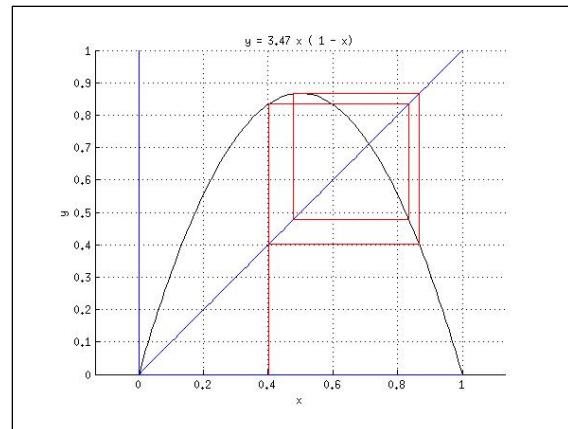
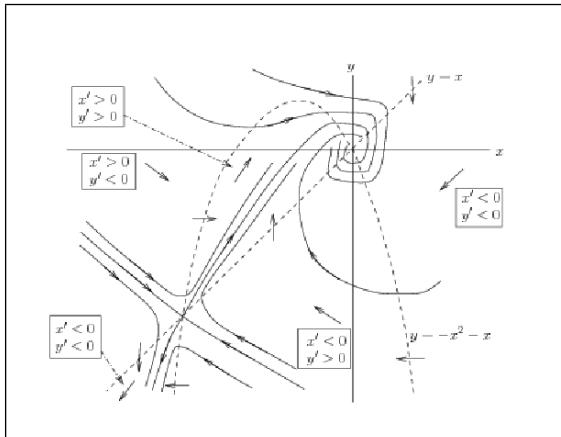




uOttawa



Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I et II

2021 édition

Benoit Dionne
Université d'Ottawa

Table des matières

Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Avant-propos	xxi
Chapitre 1 Fonction   	1
1.1. Qu'est-ce qu'une fonction ?	1
1.2. Image et domaine d'une fonction	3
1.3. Composition de fonctions	5
1.4. Fonctions inverses (réciproques)	8
1.4.1. Inverse additif d'un nombre réel	8
1.4.2. Inverse multiplicatif d'un nombre réel	9
1.4.3. Inverse (réciproque) d'une fonction	9
1.4.4. Comment déterminer si une fonction a un inverse	11
1.4.5. Comment trouver l'inverse d'une fonction	14
1.4.6. Influence du domaine et de l'image	16
1.5. Fonctions trigonométriques  	17
1.5.1. Identités trigonométriques	21
1.5.2. Graphes des fonctions trigonométriques	26
1.5.3. Fonctions trigonométriques inverses	30
1.6. Fonctions exponentielles et logarithmiques	33
1.6.1. Fonctions exponentielles	33
1.6.2. Fonctions logarithmiques	36

1.7. Exercices	38
<hr/>	
Chapitre 2 Suites et séries   	43
2.1. Suites	43
2.2. Séries	51
2.2.1. Tests de convergence 	61
2.2.2. Convergence absolue et séries alternées 	66
2.3. Le nombre e et les fonctions e^x et $\ln(x)$	71
2.3.1. Fonctions hyperboliques 	74
2.4. Exercices	76
<hr/>	
Chapitre 3 Limite et fonctions continues   	79
3.1. Limites	79
3.1.1. Epsilon et delta 	85
3.1.2. Règles pour évaluer les limites	88
3.2. Fonctions continues	90
3.2.1. Epsilon et delta 	93
3.3. Quelques propriétés des fonctions continues	93
3.4. Limites à l'infini et limites infinies	97
3.4.1. Des définitions plus pratiques 	104
3.4.2. Comportement asymptotique semblable 	108
3.5. Exercices	108
<hr/>	
Chapitre 4 Dérivée   	113
4.1. Étude du graphe et comportement d'une fonction	113
4.2. Taux de variation d'une fonction	115
4.3. Dérivée d'une fonction en un point	120
4.4. Dérivée d'une fonction	126
4.4.1. Différentiable implique continue	133
4.4.2. Une première application de la dérivée ; la vitesse d'un objet	134
4.5. Dérivées de quelques fonctions élémentaires	134
4.5.1. Dérivée de $f(x) = x^n$ où n est un entier positif ou nul	135

4.5.2. Dérivée du sinus et du cosinus  	138
4.6. Calcul des dérivées	142
4.6.1. Dérivée d'une fonction multipliée par une constante	142
4.6.2. Dérivée d'une somme de fonctions	143
4.6.3. Dérivée du produit de fonctions	145
4.6.4. Dérivée du quotient de fonctions	148
4.6.5. Dérivée de fonctions composées	149
4.7. Encore plus de dérivées de fonctions élémentaires	153
4.7.1. Dérivée de $f(x) = b^x$	153
4.7.2. Dérivée de $\log_b(x)$	160
4.7.3. Dérivée de x^α où α est réel	162
4.7.4. Dérivée des fonctions trigonométriques inverses   	164
4.8. Exercices	166
Chapitre 5 Applications de la dérivée   	175
5.1. Introduction	175
5.2. Étude de courbes	175
5.3. Optimisation	187
5.4. Les taux liés 	197
5.5. La dérivation implicite 	200
5.6. Approximation locale des fonctions	202
5.6.1. Calcul de limites 	209
5.7. Comportement asymptotique  	210
5.8. Méthode de Newton  	225
5.9. Systèmes dynamiques discrets 	232
5.9.1. Équation logistique	242
5.9.2. Étude des points d'équilibre	245
5.9.3. Étude des orbites périodiques 	252
5.10. Exercices	255
Chapitre 6 Intégrale   	281
6.1. Primitives et intégrales indéfinies	281

6.2.	Techniques d'intégration	284
6.2.1.	Substitutions	285
6.2.2.	Intégration par parties	293
6.2.3.	Fractions partielles	300
6.2.4.	Substitutions trigonométriques 	305
6.3.	L'intégrale définie	310
6.3.1.	Définition	314
6.3.2.	Propriétés de l'intégrale définie	320
6.3.3.	Évaluations des intégrales définies 	323
6.3.4.	Déplacement	326
6.3.5.	L'intégrale de Riemann (Stieljes) 	328
6.4.	Théorème fondamental du calcul	331
6.4.1.	Première version du théorème fondamental du calcul	331
6.4.2.	Deuxième version du théorème fondamental du calcul	337
6.5.	L'intégrale impropre	339
6.5.1.	Intégrale sur un intervalle d'intégration de longueur infinie	339
6.5.2.	Intégrale avec un intégrande non borné	345
6.6.	Test de comparaison 	350
6.7.	Méthodes numériques d'intégration 	357
6.7.1.	Méthode du point milieu	357
6.7.2.	Méthode des trapèzes	360
6.7.3.	Méthode de Simpson	367
6.8.	Exercices	371
Chapitre 7	Applications de l'intégrale   	381
7.1.	Aire entre deux courbes	381
7.2.	Valeur moyenne d'une fonction	385
7.3.	Volume d'un objet 	388
7.3.1.	Solides de révolution	391
7.4.	Masse d'un objet 	403
7.5.	Travail 	404
7.5.1.	Travail pour déplacer un objet	405
7.5.2.	Travail pour vider un réservoir	408

7.6.	Force et pression hydrostatique 	414
7.7.	Centre de masse 	419
7.8.	Débit sanguin 	422
7.9.	Applications à l'économie 	425
7.9.1.	Valeurs présentes et futures	427
7.9.2.	Surplus du consommateur et du producteur	429
7.10.	Test de l'intégrale 	431
7.11.	Exercices	434
<hr/> Chapitre 8 Équations différentielles  		441
8.1.	Introduction	441
8.2.	Équations différentielles séparables	445
8.3.	Équations non-autonomes	449
8.4.	Existence et unicité des solutions 	452
8.5.	Équations autonomes	455
8.5.1.	Points d'équilibre	455
8.5.2.	L'équation logistique	461
8.6.	Applications aux sciences physiques, biologiques et économiques	465
8.7.	Famille de courbe orthogonales 	476
8.8.	Méthode d'Euler 	478
8.9.	Exercices	484
<hr/> Chapitre 9 Vecteurs   		499
9.1.	Vecteurs	499
9.2.	Opérations sur les vecteurs	501
9.2.1.	Produit d'un vecteur par un nombre réel	501
9.2.2.	Somme de vecteurs	502
9.2.3.	Notation vectorielle classique	502
9.2.4.	Produit scalaire 	504
9.2.5.	Produit vectoriel 	507
9.3.	Équation d'une droite 	510
9.3.1.	Droites tangentes	513

9.3.2. Intersection de deux droites	514
9.4. Équation d'un plan 	515
9.4.1. Représentations vectorielles et paramétriques du plan	518
9.4.2. Intersection d'une droite et d'un plan	520
9.4.3. Intersection de deux plans	521
9.4.4. Intersection de trois plans	524
9.5. Projections 	526
9.5.1. Plus courte distance entre un point et une droite	526
9.5.2. Plus courte distance entre un point et un plan de l'espace	528
9.6. Exercices	530
Chapitre 10 Algèbre linéaire  	531
10.1. Systèmes d'équations linéaires	531
10.1.1. Systèmes d'équations linéaires avec deux inconnues	533
10.1.2. Systèmes d'équations linéaires avec plus de deux inconnues	535
10.2. Matrices	540
10.2.1. Opérations sur les matrices	541
10.2.2. Inverse additif et multiplicatif d'une matrice	548
10.3. Représentations matricielles	551
10.3.1. Méthode d'élimination de Gauss	552
10.3.2. Matrices inverses	553
10.3.3. Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3	557
10.4. Déterminant	558
10.4.1. introduction	558
10.4.2. Le signe d'une permutation 	560
10.4.3. Calcul du déterminant	561
10.5. Suites dans \mathbb{R}^n	567
10.6. Valeurs propres et vecteurs propres	567
10.7. Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires 	576
10.8. Chaînes de Markov 	580
10.9. Exercices	584

Chapitre 11	Représentation paramétrique des courbes	 	591
11.1.	Définition		592
11.2.	Droite tangente à une courbe		595
11.3.	Longueur d'une courbe 		601
11.4.	Aire d'une surface 		606
11.5.	Coordonnées polaires 		609
11.5.1.	Équations en coordonnées polaires		611
11.5.2.	Longueur d'une courbe		615
11.5.3.	Aire d'une région		616
11.6.	Exercices		620
Chapitre 12	Fonction de plusieurs variables	 	621
12.1.	Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles		624
12.2.	Limites et fonctions continues		631
12.3.	Propriétés des fonctions continues 		641
12.4.	Exercices		642
Chapitre 13	Dérivée de fonctions de plusieurs variables	 	645
13.1.	Dérivées partielles		645
13.2.	Plan tangent à une surface (forme explicite)		652
13.2.1.	Surface donnée par une fonction de x et y		652
13.2.2.	Surface donnée par une représentation paramétrique		656
13.3.	Dérivées selon une direction donnée 		657
13.4.	Propriétés du gradient 		662
13.4.1.	Plan tangent à une surface (forme implicite)		662
13.4.2.	Direction de croissance maximale		665
13.4.3.	Théorème de la moyenne		669
13.5.	Approximation locale des fonctions de plusieurs variables 		670
13.6.	Points critiques et valeurs extrêmes 		672
13.7.	Les multiplicateurs de Lagrange 		677
13.8.	Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m  		680
13.9.	Exercices		683

Chapitre 14 Systèmes d'équations différentielles		689
14.1. Introduction		689
14.2. Énoncé du problème général		698
14.3. Systèmes d'équations différentielles linéaires		702
14.4. Introduction à l'analyse globale		711
14.4.1. Points d'équilibre		712
14.4.2. Nullclines		714
14.5. Équation de Van der Pol		721
14.6. Système prédateurs-proies		723
14.6.1. Lotka-Volterra		723
14.6.2. Un meilleur modèle prédateurs-proies		725
14.7. Exercices		732
<hr/> Bibliographie		737
<hr/> Index		738

Liste des tableaux

1.1.	Valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour quelques valeurs de θ	19
3.1.	Limite à l'infini d'une fonction	99
4.1.	Approximations de la dérivée de $f(x) = \cos(x)$ à partir de la définition de la dérivées.	140
4.2.	Approximations de la dérivée de $f(x) = 3^x$ à partir de la définition de la dérivées.	153
4.3.	Approximations de la dérivée de $f(x) = 2^x$ à partir de la définition de la dérivées.	155
4.4.	Approximation de e	158
5.1.	Calcul de deux orbites du système dynamique discret linéaire $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$	238
5.2.	Calcul de deux orbites pour l'équation logistique $x_{n+1} = 1.1x_n(1 - x_n)$	244
5.3.	Calcul de deux orbites pour l'équation logistique $x_{n+1} = 3.2x_n(1 - x_n)$	253
6.1.	Quelques intégrales indéfinies	283

Table des figures

1.1.	Définition d'une fonction	2
1.2.	Graphe de $h(x) = x^3 - 2x + 1$	3
1.3.	Graphe de $y = \sqrt{x}$	4
1.4.	Composition de fonctions	5
1.5.	Graphe de $g(x) = x^2 - 1$	6
1.6.	Graphe de $y = h(g(x))$	7
1.7.	Graphe de $y = g(h(x))$	8
1.8.	Définition des fonctions f et f^{-1}	11
1.9.	Fonction qui n'a pas d'inverse	12
1.10.	Graphe de $f(x) = x/3 + 1$	13
1.11.	Graphe de f^{-1} obtenu par réflexion du graphe de f	15
1.12.	Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ et f^{-1}	17
1.13.	Définition du sinus et cosinus d'un angle à partir du cercle unité	18
1.14.	Définition du sinus et cosinus d'un angle à partir d'un triangle	18
1.15.	Identités trigonométriques provenant de réflexions par rapport aux axes	22
1.16.	Identités trigonométriques provenant d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$	22
1.17.	Règle d'addition pour les sinus et cosinus	23
1.18.	Graphes de $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$	27
1.19.	Graphe de $y = \tan(\theta)$	27
1.20.	Graphe de $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$, et $y = \csc(\theta)$	28
1.21.	Graphe d'une fonction sinusoïdale	29
1.22.	Graphe de $y = f(x) = 3 + 5 \cos((2\pi/7)(x + 4))$	29
1.23.	Graphe de $y = \sin(x)$	30
1.24.	Graphe de $y = \sin^{-1}(x)$	31
1.25.	Graphe de $y = \cos^{-1}(x)$	32
1.26.	Graphe de $y = \tan^{-1}(x)$	32

1.27.	Représentation graphique de $\cos(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$	33
1.28.	Graphes de $y = 3^x$, $y = 2^x$ et $y = (1/2)^x$	35
1.29.	Graphes de $y = 3^x$ et de $y = \log_3(x)$	36
1.30.	Figure pour la question 6	39
2.1.	Représentation graphique de l'erreur $ S_n - S $ pour une série alternée	69
2.2.	La suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$	74
2.3.	Le graphe du sinus et du cosinus hyperbolique	75
3.1.	Graphe de $g(x) = x^2 + 1$	81
3.2.	Graphe de $g(x) = \sin(x)/x$	83
3.3.	Graphe de $g(x) = \sin(1/x)$	84
3.4.	Définition avec ϵ et δ de la limite d'une fonction en un point	86
3.5.	Une fonction qui n'a pas de limite en un point	87
3.6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$	89
3.7.	Une fonction discontinue	91
3.8.	Définition en termes de ϵ et δ de la continuité d'une fonction à un point	93
3.9.	Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x > 0$	96
3.10.	Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x < 0$	97
3.11.	Théorème des valeurs intermédiaires	97
3.12.	Graphe de $g(x) = 5 + e^{(2-x)/10}$	98
3.13.	Asymptote verticale pour $f(x) = 2/(x-3)^2$	102
3.14.	Asymptote verticale pour $f(x) = 2/(x^2 - 9)$	103
3.15.	Limites à droite et à gauche	104
3.16.	Asymptote horizontale	105
3.17.	Asymptote verticale	106
4.1.	Caractéristiques du graphe d'une fonction	114
4.2.	Graphe de $x = 50 e^{-2t}$	116
4.3.	Quelques sécantes du graphe de $x = 50 e^{-2t}$	118
4.4.	Limite de sécantes pour le graphe de $x = 50 e^{-2t}$	119
4.5.	Interprétation graphique de la dérivée d'une fonction en un point	122
4.6.	Approximation linéaire d'une fonction	124
4.7.	Une fonction continue qui n'est pas différentiable en un point	125

4.8.	Fonction avec une tangente verticale en un point	125
4.9.	Fonction croissante	127
4.10.	Fonction décroissante	128
4.11.	Maximum local d'une fonction	128
4.12.	Minimum local d'une fonction	129
4.13.	Une dérivée nulle n'implique pas un extremum	129
4.14.	Un maximum local sans que la dérivée soit nulle	130
4.15.	Une représentation graphique du théorème de la moyenne	132
4.16.	Une fonction n'est pas différentiable aux points où elle n'est pas continue	133
4.17.	Tangente au graphe de $y = x^2$ en un point	137
4.18.	Périodicité de la tangente au graphe de $\cos(x)$	138
4.19.	Symétrie de la tangente au graphe de $\cos(x)$	139
4.20.	Un graphe possible pour la dérivée du cosinus	139
4.21.	Le graphe de la dérivée de $\cos(x)$	140
4.22.	Distance parcourue par un passager de train	144
4.23.	L'aire d'un rectangle dont les dimensions varient avec le temps	147
4.24.	Le graphe de la dérivée de $f(x) = 3^x$	154
4.25.	Le graphe de la dérivée de $f(x) = 2^x$	155
5.1.	Exemple d'une fonction convexe	177
5.2.	Exemple d'une fonction convexe	177
5.3.	Exemple d'une fonction concave	178
5.4.	Un point d'inflexion où la dérivée seconde n'existe pas	179
5.5.	Un point d'inflexion où la dérivée première n'est pas nulle	180
5.6.	Le graphe de la dérivée d'une fonction	180
5.7.	Graphe de $f(x) = e^{-x}/x$	184
5.8.	Graphe de $f(x) = 1/((x - 1)(x - 2))$	185
5.9.	Une fonction sans maximum global	188
5.10.	Une fonction qui n'atteint pas son maximum global	188
5.11.	Une fonction avec un maximum global	189
5.12.	Trajet du pigeon entre le bateau et la demeure de son propriétaire	191
5.13.	Un triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon r	191
5.14.	Un gobelet conique fait à partir d'un secteur de cercle de rayon R	192

5.15.	La quantité de nectar récoltée par une abeille	193
5.16.	Graphe de la vitesse moyenne à laquelle une abeille aspire le nectar d'une fleur	194
5.17.	Relation entre la vitesse moyenne à laquelle une abeille aspire le nectar d'une fleur et le temps pour se rendre à une autre fleur	195
5.18.	Un cercle de rayon R inscrit à l'intérieur d'un triangle	198
5.19.	Droite tangente au cercle unité	201
5.20.	Courbe décrite par $(x + y)^3 + xe^y = 2$	202
5.21.	Les polynômes de Taylor de $\sin(x)$ de degré inférieur à 6 pour x près de l'origine	206
5.22.	Les graphes de $\ln(x)$ et de $x^{1/5}$	212
5.23.	Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$	214
5.24.	Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $30 \leq x \leq 40$	215
5.25.	Les graphes de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$	216
5.26.	La méthode de Newton produit une suite qui tend vers une racine d'une fonction	227
5.27.	Les courbes $y = 3e^{t/3}$ et $y = t + 4$	230
5.28.	Graphe de la solution d'un système dynamique discret linéaire	233
5.29.	Graphe d'une solution qui tend vers le point d'équilibre d'un système dynamique discret linéaire	234
5.30.	Portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$	236
5.31.	Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$	237
5.32.	Graphe d'une solution convergeant vers un point d'équilibre non nul d'un système dynamique discret	239
5.33.	Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$	239
5.34.	Portrait de phase du système dynamique discret $x_{n+1} = 1.1x_n(1 - x_n)$.	244
5.35.	Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $x_{n+1} = 2.3x_n(1 - x_n)$	245
5.36.	Le point d'équilibre $p = 2/3$ du système dynamique $x_{n+1} = 0.7x_n + 0.2$	246
5.37.	Le point d'équilibre $p = 3/5$ du système dynamique $x_{n+1} = 2x_n - 0.6$.	247
5.38.	Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = -0.7x_n + 0.68$	247
5.39.	Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = -2x_n + 1.2$	248
5.40.	Orbite périodique de période 2 pour l'équation logistique avec $r = 3.2$.	254

5.41.	Orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$	254
5.42.	Stabilité de l'orbite de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$	255
6.1.	La région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$	310
6.2.	Un somme à gauche avec 11 termes pour l'intégrale de e^x	311
6.3.	Un somme à gauche avec 22 termes pour l'intégrale de e^x	311
6.4.	Un somme à droite avec 11 termes pour l'intégrale de e^x	312
6.5.	Un somme à droite avec 22 termes pour l'intégrale de e^x	313
6.6.	Graphe de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$	315
6.7.	Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie	318
6.8.	Figure associée à l'exemple 6.3.10	319
6.9.	L'intégrale d'une fonction f qui change de signe en un seul point de son domaine d'intégration représente la différence de deux aires	321
6.10.	Graphe d'une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine	322
6.11.	Graphe d'une fonction paire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine	322
6.12.	L'aire de la région bornée par $y = x^2$, l'axe des x , et les droites $x = 1$ et $x = 3$	324
6.13.	La vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette	328
6.14.	Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$	330
6.15.	Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$	330
6.16.	La fonction de densité pour la distribution normale	339
6.17.	Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s) ds$	340
6.18.	L'intégrale impropre comme la limite d'intégrales définies	341
6.19.	La région bornée par la courbe $y = 1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites $x = 0$ et $x = 1$.	345
6.20.	L'intégrale impropre d'une fonction définie sur un intervalle ouvert de longueur finie	346
6.21.	Graphe de $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$	348
6.22.	Représentation qualitative du graphe de fonctions définies par des intégrales	351
6.23.	Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale	358
6.24.	La méthode du point milieu surestime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est concave	361

6.25.	La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe	361
6.26.	Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale	362
6.27.	La concavité de l'intégrande détermine si la méthode des trapèzes sous-estime ou surestime la valeur de l'intégrale	365
6.28.	Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale	368
7.1.	Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann	382
7.2.	Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes se croisent	382
7.3.	Région bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 2 - x^2$, et les droites $x = 0$ et $x = 2$	384
7.4.	Région bornée par les courbes $y = x$ et $y = \sin(x)$ pour $-\pi/4 \leq x \leq \pi/2$	384
7.5.	Région bornée par les courbes $4x - y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$	385
7.6.	Représentation graphique du théorème de la moyenne pour l'intégrale .	387
7.7.	La valeur moyenne de $f(x) = -x^4 + 4$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est $8/3$	387
7.8.	Une tranche d'un solide S quelconque	388
7.9.	La section d'un cylindre engendrée par l'intersection avec un plan	389
7.10.	L'approximation d'une tranche d'un solide	389
7.11.	Le tronc d'une pyramide et une section perpendiculaire de ce tronc de pyramide	391
7.12.	Solide de base donnée dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés	392
7.13.	Un solide de révolution dont les sections transversales sont les anneaux	393
7.14.	Un solide produit par la rotation d'une région autour de l'axe $y = c$. .	393
7.15.	Une section obtenue par l'intersection d'un solide avec un plan où x est constant	394
7.16.	La rotation autour de l'axe $x = -1$ de la région bornée par les deux courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$	395
7.17.	La rotation d'une région autour d'un axe $x = c$ donne un solide	398
7.18.	Une région dont la rotation autour d'un axe produit une portion tubulaire d'une solide	398
7.19.	Calcul de l'aire d'un tube	399
7.20.	Approximation d'une portion tubulaire d'une solide	400
7.21.	Travail pour lever un bloc de glace de 50 mètres	407
7.22.	Lois de Hooke pour les ressorts	407

7.23. Un réservoir de forme quelconque enfoui sous le sol	408
7.24. Une mince couche de liquide dans un réservoir	409
7.25. Le volume d'une mince couche de liquide dans un réservoir	410
7.26. Un réservoir sphérique	412
7.27. Un réservoir conique	412
7.28. Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles renversés	413
7.29. Un réservoir cylindrique	415
7.30. Vue transversale d'une surface verticale soumise à la force exercée par la pression	416
7.31. Le calcul de la force exercée sur une des extrémités d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac	417
7.32. Le calcul de la force exercée sur la surface courbée externe d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac	418
7.33. Centre de masse (cas discret)	419
7.34. Centre de masse (densité constante)	420
7.35. Écoulement laminaire	422
7.36. Représentation graphique du surplus du consommateur et du producteur	430
7.37. La justification du test de l'intégrale pour déterminer si une série converge	432
 8.1. Le graphe possible de la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale	449
8.2. Un champ de pentes possible pour une équation différentielle	450
8.3. Le champ de pentes pour une équation différentielle	451
8.4. Champ de pentes de l'équation différentielle $y' = (x - 1)^2 - y + 1$	452
8.5. Domaine d'existence et d'unicité des solutions satisfaisant une condition initiale	453
8.6. Le champ de pentes pour l'équation différentielle de la loi de Newton pour la chaleur	457
8.7. Le portrait de phases de l'équation différentielle de la loi de Newton pour la chaleur	458
8.8. Le portrait de phases de l'équation différentielle $y' = (y - a)(y - b)$	459
8.9. Le champ de pentes pour l'équation logistique	462
8.10. Le portrait de phases de l'équation logistique	463
8.11. Comportement de la fraction de la population porteur d'un microbe	467
8.12. Comportement de la fraction de la population porteur d'un microbe	467

8.13. Une fonction continue par morceaux	469
8.14. Solution d'un problème de pêche saisonnière avec de faibles oscillations	469
8.15. Solution d'une problème de pêche saisonnière avec de fortes oscillations	470
8.16. Familles de courbes orthogonales, les cercles et leurs rayons	477
8.17. Familles de courbes orthogonales : $y = ce^x$ et $\frac{y^2}{2} = -x + d$	478
8.18. La solution numérique à l'aide de la méthode d'Euler d'une équation différentielle	481
 9.1. Représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$ de l'espace	500
9.2. Longueur du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$	500
9.3. Représentation du vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$	502
9.4. Représentation graphique de la somme de deux vecteurs	503
9.5. La loi des cosinus	506
9.6. Interprétation géométrique du produit scalaire	506
9.7. Démonstration de la loi des cosinus	507
9.8. Le vecteur obtenu du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan généré par ces deux vecteurs	509
9.9. L'aire du parallélogramme définie par deux vecteurs	510
9.10. Représentation vectorielle d'une droite	511
9.11. Équation d'une droite du plan qui est perpendiculaire à un vecteur . .	512
9.12. Représentation vectorielle d'un plan	515
9.13. Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires	519
9.14. Droite parallèle à un plan	521
9.15. Projection d'un vecteur sur un autre vecteur	526
9.16. Translation dans l'espace	528
9.17. Projection d'un vecteur sur un plan passant par l'origine	529
 11.1. Une courbe du plan donnée par une représentation paramétrique	593
11.2. tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique . .	596
11.3. Une courbe du plan donnée par une représentation paramétrique et une fonction	598
11.4. Une courbe dans le plan que l'on approche avec des segments de droites	602
11.5. Une surface produite par la rotation d'une courbe autour d'un axe . .	606
11.6. Une section horizontal d'un cône dont l'axe est vertical	607

11.7.	Une section d'un surface produite par la rotation du graphe d'une fonction autour d'un axe horizontal	607
11.8.	Les coordonnées polaires	610
11.9.	Une région du plan bornée par une courbe définie en coordonnées polaires	617
12.1.	Rotation d'un vecteur dans le plan	623
12.2.	Le graphe d'une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}	626
12.3.	Quelques courbes élémentaires dans le plan	632
12.4.	La norme Euclidienne dans \mathbb{R}^n	633
12.5.	Voisinage d'un point de \mathbb{R}^n	634
13.1.	Courbe produite par l'intersection d'une surface et d'un plan où y est constant	653
13.2.	Courbe produite par l'intersection d'une surface et d'un plan où x est constant	654
13.3.	Plan tangent à la surface $y = f(x, y)$ en un point $(a, b, f(a, b))$	655
13.4.	Représentation graphique de la définition de la dérivée dans la direction d'un vecteur	659
13.5.	La tangente à la courbe d'intersection d'un plan perpendiculaire et d'une surface	659
13.6.	Courbe appartenant à une surface	662
13.7.	Le gradient $\nabla F(a, b, c)$ est perpendiculaire à la surface $F(x, y, z) = 0$ au point (a, b, c)	664
13.8.	Les trajectoires le long desquelles une fonction croît le plus rapidement coupent les courbes de niveau perpendiculairement	668
13.9.	Ensembles convexes et non-convexes	669
13.10.	Exemple d'un maximum local	673
13.11.	Deux exemples de col, un cas que l'on peut prédire et un que l'on ne peut pas.	676
14.1.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang	693
14.2.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang	694
14.3.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang pour une médication continue	695
14.4.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang pour une médication continue	696
14.5.	Le taux d'absorption d'un médicament pris à intervalles réguliers	696

14.6.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang pour une médication administrée à intervalles réguliers	697
14.7.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang pour une médication administrée à intervalles réguliers	698
14.8.	L'image d'une solution $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie une courbe dans le plan	701
14.9.	Des portraits de phases possibles dans \mathbb{R}^2 si les valeurs propres sont distinctes.	703
14.10.	Un portrait de phases possible dans \mathbb{R}^2 s'il n'y a qu'une valeur propre et tous les vecteur propres sont colinéaires	704
14.11.	Un portrait de phases possible pour un système de deux équations différentielles linéaires avec une paire de valeurs propres complexes	705
14.12.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles linéaires	706
14.13.	Classification des portraits de phases pour un système de deux équations différentielles linéaires	708
14.14.	L'orbite associée à une solution ϕ d'un système d'équations différentielles	711
14.15.	Le champ de vecteurs d'un système d'équations différentielles	712
14.16.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	716
14.17.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	718
14.18.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	720
14.19.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	721
14.20.	Quelques orbites du système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol	722
14.21.	L'ombre de la solution périodique pour le système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol	723
14.22.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	725
14.23.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	726
14.24.	Perturbation du système prédateurs-proies de Lotka-Voltera avec $\alpha = 1$	727
14.25.	Perturbation du système prédateurs-proies de Lotka et Voltera avec $\alpha = 0.1$	728
14.26.	Modèles possibles pour décrire le phénomène de saturation chez les prédateurs	729
14.27.	Portrait de phases d'un modèle réaliste de prédateurs-proies	731
14.28.	Orbites qui tendent vers une solution périodique représentant l'équilibre périodique entre les populations de prédateurs et de proies	733

Avant-propos

Les notes de cours que vous avez en main représente un ouvrage inachevé, qui est en constante évolution. Il ne faut donc pas être surpris d'y retrouver des fautes d'orthographe, des coquilles, etc. Les corrections seront apportées au cours du temps suite au commentaires des lecteurs. L'auteur prend entière responsabilité pour les erreurs ; comment pourrait-il faire autrement ?

Le contenu du premier chapitre est principalement une révision des principaux sujets normalement enseignés au secondaire. Certains sujet seront convers en plus grande profondeur qu'au secondaire.

Les chapitres 2 et 3 contiennent du matériel présenté au secondaire mais aussi plusieurs sujets qui ne sont pas abordé au secondaire. La matière des cours de calcul différentiel et intégral au niveau universitaire débute avec certaines sections de ces chapitres selon le cours de calcul différentiel et intégral auquel vous êtes inscrit.

Ces notes peuvent être utilisées pour trois des variantes des cours de calcul différentiel et intégral qui sont offertes à l'Université d'Ottawa.

- **Calcul différentiel et intégral (pour les étudiants en génie)** : Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1720 et MAT1722.
- **Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie** Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1730 et MAT1732.
- **Méthodes mathématiques I (pour les étudiants en administration)** : Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent le cour MAT1700.

Les items qui n'ont aucun de ces symboles sont requis pour les trois variantes des cours de calcul différentiel et intégral.

Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie

Comme les principaux utilisateurs de ces notes sont les étudiants dans les cours de Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie, nous offrons un aperçu du cours.

Le but principal du premier cours (MAT1730) est de développer les outils nécessaires pour l'étude des «systèmes dynamiques discrets». Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés entre autre pour décrire certaines caractéristiques des populations animales mesurées

à intervalles réguliers. Le deuxième cours (MAT1732) présente certains outils mathématiques pour l'étude des «systèmes dynamiques». Les systèmes dynamiques sont des systèmes d'équations différentielles ; c'est-à-dire, des équations qui contiennent une fonction inconnue et sa dérivée. Ces systèmes sont utilisés pour modéliser les réactions chimiques, la croissance des individus, le mouvement des populations, etc.

Avertissement : Les modèles mathématiques utilisés dans les questions pour le cours de calcul pour les sciences de la vie ne représentent pas toujours des situations réelles. Pour obtenir des modèles mathématiques qui soient intéressants et utilisent la théorie présentée dans les notes, tout en étant accessibles pour le niveau du cours, nous avons dû créer des modèles qui ne sont pas basés sur des données scientifiques. Nous avons quand même essayé d'avoir des modèles qui soient qualitativement valables.

Théorie

Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les étudiants intéressés à la théorie et la rigueur en mathématique. Plusieurs de ces items demandent une connaissance de la notion de « démonstration » que la majorité des étudiants n'auront probablement pas vu au secondaire. Ces items sont généralement optionnel. Ils sont pour les étudiants curieux qui voudrait en savoir plus sur les méthodes enseignées en classe. On espère que certains étudiants seront intéressés par la rigueur mathématiques et voudront poursuive cette direction dans leur études.

Il y a plusieurs mentions du nombre d'Euler e . On donne plusieurs façons équivalentes de le définir. On mentionne indirectement le lien entre le nombre e et les fonctions trigonométriques, donc le nombre π , lors d'une des démonstrations de la règle d'addition pour les fonctions sin et cos. On espère que les étudiants seront fascinés par le fait que les nombres e et π sont reliés.

Notation

Définition

Les ensembles suivants seront fréquemment utilisés dans le présent document.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels.
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels positifs.
3. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers.
4. \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels ; c'est-à-dire, les nombres de la forme n/m où $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
5. \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

En français, la virgule est utilisée pour séparer la partie entière de la partie décimale d'un

nombre et on utilise un espace pour séparer les multiples de 10^3 . Ainsi,

$$105\ 456\ 263,456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000} .$$

Cependant, dans le présent document, nous utiliserons la notation anglaise. Le point sépare la partie entière de la partie décimale d'un nombre et la virgule sépare les multiples de 10^3 . On écrit donc

$$105,456,263.456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000} .$$

La raison principale de ce choix est que la grande majorité des données utilisées dans ce document proviennent de documents en anglais qui utilisent cette notation. De plus, les logiciels sont tous en anglais et utilisent aussi cette notation. Pour être consistent, on a donc choisi d'utiliser la notation anglaise.

Remerciements

J'aimerais remercier Yves Bourgault et Wadii Hajji, deux collègues de travail, dont les suggestions ont améliorées la présentation de la matière.

De plus, j'aimerais remercier Paméla Touchette-Giroux pour son excellent travail de révision des textes pour la première édition de ces notes. Il n'en reste pas moins que je prends toute la responsabilité pour les fautes que l'on peut trouver dans le texte.



1

Fonction



1

Ce chapitre présente les objets fondamentaux sur lesquels nous allons travailler dans les prochains chapitres. Ces objets sont les fonctions. Les principales propriétés des fonctions sont aussi définies dans ce chapitre. On termine le chapitre avec une introduction à quelques unes des fonctions de base : les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques. Les fonctions exponentielles sont définies de façon intuitive dans ce chapitre. Elles sont revues de façon rigoureuse dans le chapitre suivant.

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1.1.1

Une **fonction** f est une opération d'un ensemble X à un ensemble Y qui, à chaque élément de X , associe un seul élément de Y . On écrit $f : X \rightarrow Y$ pour désigner une fonction f de X dans Y .

Exemple 1.1.2

À la figure 1.1, on définit à l'aide d'un diagramme une fonction f d'un ensemble X de pays à un ensemble Y de villes. La fonction f donne la capitale du pays. À chacun des pays de X est associé une unique capitale dans Y .

Il n'est pas nécessaire que toutes les villes de Y soient des capitales de pays. Par exemple, Toronto n'est pas la capitale d'un pays mais d'une province.

On écrit

$$f(\text{Canada}) = \text{Ottawa} , \quad f(\text{Angleterre}) = \text{Londres} , \quad \text{etc.}$$



Exemple 1.1.3

Le tableau suivant définit une fonction g qui, à chaque nombre entier plus grand que 1 (ligne du haut), associe les diviseurs premiers de ce nombre entier (ligne du bas).

x	2	3	...	6	...	27	...	1372455084	...
$g(x)$	{2}	{3}	...	{2, 3}	...	{3}	...	{2, 3, 7, 11, 13, 17, 47}	...

1. L'entête de chaque chapitre est accompagné d'une image. Ces images sont quelques unes des illustrations produites par Tenniel pour la version originale du livre **Alice's Adventures in Wonderland** par Lewis Carroll

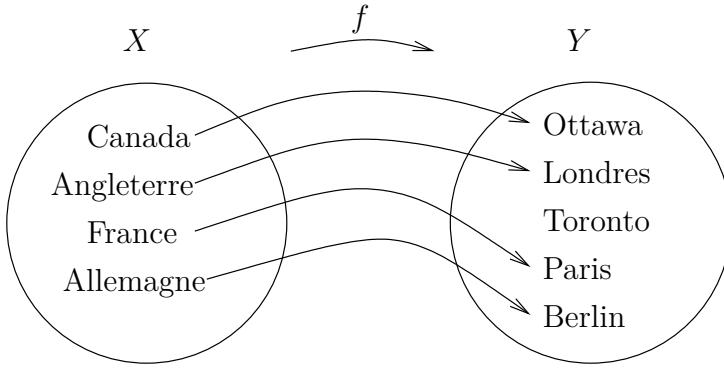


FIGURE 1.1 – Définition d'une fonction f à l'aide d'un diagramme

La fonction g est donc une fonction qui va de l'ensemble X des nombres entiers plus grand que 1 à l'ensemble Y des ensembles de nombres premiers.

On écrit

$$g(2) = \{2\} , \dots, g(1372455084) = \{2, 3, 7, 11, 13, 17, 47\} , \dots$$



Exemple 1.1.4

La fonction h qui suit est définie à l'aide d'une expression algébrique.

$$h(x) = x^3 - 2x + 1 .$$

La fonction h est définie pour $x \in X = \mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) et $h(x) \in Y = \mathbb{R}$. On dit alors que h est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et on écrit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On écrit

$$h(1) = 0 , h(2) = 5 , h(\pi) = 12.26706787812110\dots , \dots$$

Pour la valeur $h(\pi)$, les points de suspension après le dernier 0 indiquent qu'il y a une infinité de chiffres qui suivent.

Dans l'expression

$$y = h(x) = x^3 - 2x + 1 ,$$

la variable x est appelée la **variable indépendante** et la variable y est appelée la **variable dépendante** car elle dépend de x .



Définition 1.1.5

Si f est une fonction qui va d'un ensemble X à un ensemble Y , on définit le **graphe de la fonction f** comme étant l'ensemble

$$\text{graphe de } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} .$$

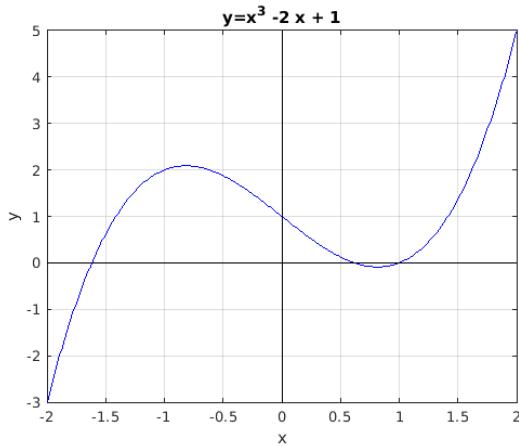


FIGURE 1.2 – Graphe de $y = h(x) = x^3 - 2x + 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

Pour une fonction qui va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il est plus fréquent de représenter le graphe de cette fonction par la courbe du plan cartésien qui est tracée par l'ensemble des points du graphe. Le graphe est donc un sous-ensemble du plan cartésien.

Exemple 1.1.6

On retrouve à la figure 1.2, la représentation dans le plan cartésien du graphe de la fonction h définie à l'exemple 1.1.4. ♣

1.2 Image et domaine d'une fonction

Définition 1.2.1

L'**image** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble des éléments $y \in Y$ pour lesquelles il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On écrit :

$$\text{Im } f \equiv \{y \in Y : f(x) = y \text{ pour au moins un élément } x \in X\} .$$

Exemple 1.2.2

Pour l'exemple 1.1.2, l'image de f est l'ensemble

$$\text{Im } f = \{\text{Berlin, Londres, Paris, Ottawa}\} .$$



Remarque 1.2.3

Pour l'exemple 1.1.3, on ne connaît pas tous les éléments de l'image de g et il n'existe pas de formule pour les générer. ♠

Exemple 1.2.4

Pour l'exemple 1.1.4, l'image de h est l'ensemble des nombres réels comme on peut le voir à

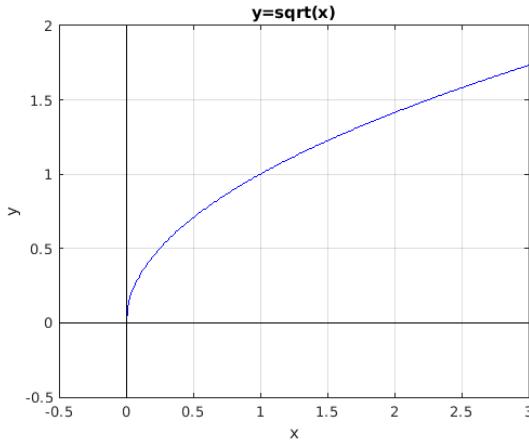


FIGURE 1.3 – Graphe de $y = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 3$

partir du graphe de h à la figure 1.2. On écrit :

$$\text{Im } h = \mathbb{R}.$$



Définition 1.2.5

Le **domaine** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble X sur lequel la fonction f est définie. On écrit :

$$\text{Dom } f = X.$$



Exemple 1.2.6

Pour l'exemple 1.1.2, la fonction f est définie pour tous les pays de l'ensemble X . Donc, le domaine de f est l'ensemble X au complet.

$$\text{Dom } f = X = \{\text{Allemagne, Angleterre, Canada, France}\}.$$



Exemple 1.2.7

On peut facilement voir que la fonction h de l'exemple 1.1.4 est définie pour tous les nombres réels. Donc, le domaine de h est \mathbb{R} .

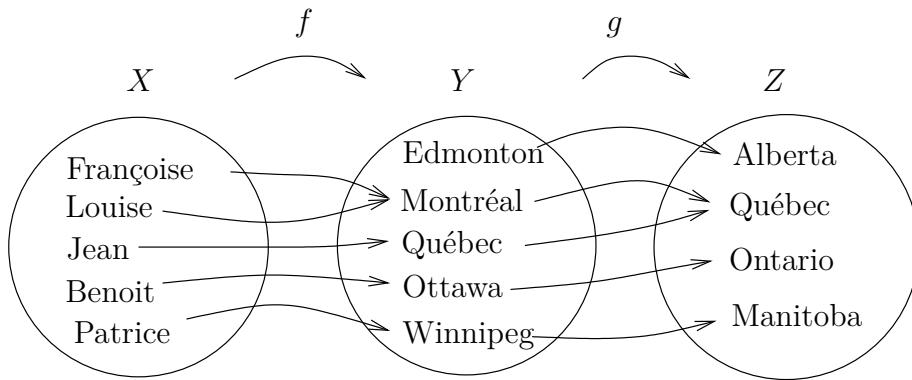


Exemple 1.2.8

Le graphe de la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est donné à la figure 1.3. On voit que

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}.$$



FIGURE 1.4 – Définition des fonctions f et g pour l'exemple 1.3.2

1.3 Composition de fonctions

Définition 1.3.1

Si f est une fonction qui va de l'ensemble X à l'ensemble Y et g est une fonction qui va de l'ensemble Y à l'ensemble Z , on peut définir une nouvelle fonction $g \circ f$ qui va aller de l'ensemble X à l'ensemble Z en posant

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$$

pour tous les éléments x dans l'ensemble X . La nouvelle fonction $g \circ f$ est appelée la **composition** des fonctions f et g .

Exemple 1.3.2

On définit deux fonctions à la figure 1.4. La fonction f donne la ville où demeure chacune des personnes de l'ensemble X et la fonction g donne la province où se situe chacune des villes de l'ensemble Y . La composition $g \circ f$ est donc la fonction qui donne la province où demeure chacune des personnes de l'ensemble X . Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\text{Françoise}) &= g(f(\text{Françoise})) = g(\text{Montréal}) = \text{Québec} , \\ (g \circ f)(\text{Patrice}) &= g(f(\text{Patrice})) = g(\text{Winnipeg}) = \text{Manitoba} , \\ &\dots \end{aligned}$$



Exemple 1.3.3

Soit F la fonction qui donne pour chaque personne sa mère biologique et soit M la fonction qui donne pour chaque personne son père biologique.

La composition des fonctions F et M , dénotée $F \circ M$, est la fonction qui donne pour chaque personne la mère biologique du père biologique de cette personne (une des grand-mères de la personne). Rappelons que dans la composition $F \circ M$, la fonction M est exécutée en premier

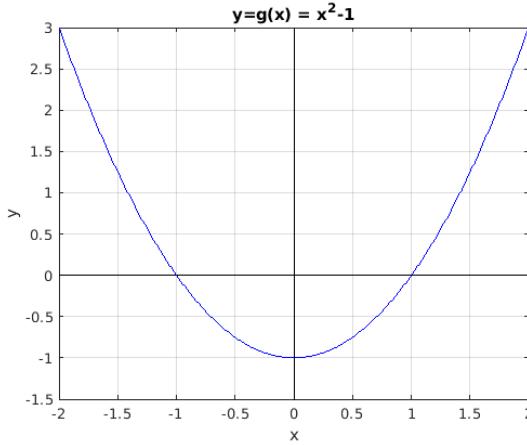


FIGURE 1.5 – Graphe de $y = g(x) = x^2 - 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$

et la fonction F en second. La fonction M donne le père biologique de la personne donnée initialement. Puis, la fonction F avec comme argument le père biologique de la personne donnée initialement donne la mère biologique de ce père.

Quel est le résultat de la composition $F \circ M \circ F$? 

Exemple 1.3.4

Regardons un exemple de fonctions dont le domaine et l'image font parties des nombres réels. Plus précisément, considérons les fonctions $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 3x - 2$. Ainsi,

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 3 = 9x^2 - 12x + 7$$

et

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2 + 3) = 3(x^2 + 3) - 2 = 3x^2 + 7.$$

On voit que ces compositions donnent bien des fonctions différentes du produit fg qui est

$$(fg)(x) \equiv f(x)g(x) = (x^2 + 3)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6.$$



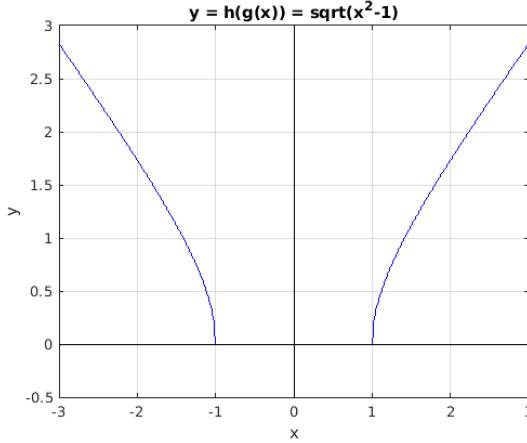
Exemple 1.3.5

On peut composer les fonctions $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = \sqrt{x}$ pour obtenir de nouvelles fonctions. Le graphe de g se retrouve à la figure 1.5. On a que le domaine de g est \mathbb{R} et l'image de g est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$. De plus, le domaine de h est $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et l'image de h est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Pour définir la composition $h \circ g$, il faut avoir

$$\text{Im } g \subset \text{Dom } h. \quad (1.3.1)$$

Ce qui n'est pas le cas présentement. On doit donc restreindre g à l'ensemble des x tels que $x^2 - 1 \geq 0$ (c'est à dire, $|x| \geq 1$) pour satisfaire (1.3.1). Ainsi, si on restreint g à l'ensemble

FIGURE 1.6 – Graphe de $y = h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $1 \leq |x| \leq 3$

$\{x : |x| \geq 1\}$ on a

$$\text{Im } g = \{x : x \geq 0\} = \text{Dom } h \quad (1.3.2)$$

et la composition $h \circ g$ est définie par

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad |x| \geq 1.$$

Il découle de (1.3.2) que l'image de $h \circ g$ est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$, l'image de h . Le graphe de $h \circ g$ se trouve à la figure 1.6. Le domaine de $h \circ g$ est $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ et l'image de $h \circ g$ est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Puisque

$$\text{Im } h = \{y | y \geq 0\} \subset \mathbb{R} = \text{Dom } g,$$

La fonction $g \circ h$ est définie par

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1, \quad x \geq 0.$$

Le domaine de $g \circ h$ est déterminé par le domaine de la racine carrée. Puisque h peut atteindre toutes les valeurs réelles plus grandes ou égales à zéro, on a que l'image de $g \circ h$ est l'image de g . On a donc

$$\text{Dom } g \circ h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } g \circ h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}.$$

Le graphe de $g \circ h$ se trouve à la figure 1.7.



Remarque 1.3.6

Il serait tentant de dire que $(g \circ h)(x) = x - 1$ pour tout x mais cela est vrai seulement si $x \geq 0$ car la fonction h n'est pas définie pour les nombres négatifs et on ne peut donc pas définir $g(h(x))$ pour $x < 0$; l'expression $(\sqrt{x})^2 - 1$ n'est pas définie pour $x < 0$.

La fonction $f(x) = x - 1$ n'est pas la fonction $g \circ h$. Il est vrai que $(g \circ h)(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$ mais f est définie pour toutes les valeurs réelles de x alors que $g \circ h$ ne l'est pas.

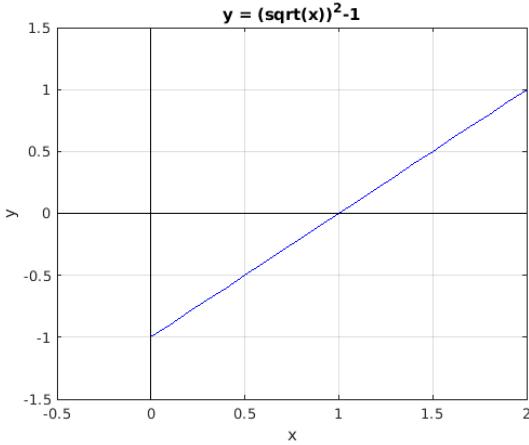


FIGURE 1.7 – Graphe de $y = g(h(x)) = x - 1$ pour $0 \leq x \leq 2$

On dit que f est une **extension** de la fonction $g \circ h$. Il ne faut donc pas utiliser l'extension d'une fonction pour déterminer le domaine et l'image de celle ci car cela peut conduire à des erreurs. Dans le cas présent, on a

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Im } f = \mathbb{R},$$

ce qui est différent du domaine et de l'image de $g \circ h$. 

1.4 Fonctions inverses (réciproques)

Commençons par revoir la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, cela nous sera utile pour bien comprendre ce qu'est l'inverse d'une fonction.

1.4.1 Inverse additif d'un nombre réel

Le nombre 0 est l'**élément neutre** pour l'addition ; c'est le nombre y tel que $y + x = x + y = x$ pour tout nombre réel x .

Exemple 1.4.1

On a $5 + 0 = 0 + 5 = 5$, $\frac{27}{4} + 0 = 0 + \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$ et $\pi + 0 = 0 + \pi = \pi$. 

On définit l'**inverse additif** d'un nombre réel x comme le nombre réel z tel que $x + z = z + x = 0$.

Exemple 1.4.2

L'inverse additif de 5 est -5 car $5 + (-5) = 0$. De même, l'inverse additif de π est $-\pi$ car $\pi + (-\pi) = 0$. 

1.4.2 Inverse multiplicatif d'un nombre réel

Le nombre 1 est **l'élément neutre** pour la multiplication ; c'est le nombre y tel que $y \times x = x \times y = x$ pour tout nombre réel x .

Exemple 1.4.3

On a $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$, $\frac{27}{4} \times 1 = 1 \times \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$ et $\pi \times 1 = 1 \times \pi = \pi$. 

On définit **l'inverse multiplicatif** d'un nombre réel $x \neq 0$ comme le nombre réel z tel que $x \times z = z \times x = 1$.

Exemple 1.4.4

L'inverse multiplicatif de 5 est 0.2 car $5 \times 0.2 = 0.2 \times 5 = 1$. De même, l'inverse multiplicatif de π est $\pi^{-1} = 0.318309886\dots$ car $\pi \times \pi^{-1} = \pi^{-1} \times \pi = 1$. 

Remarque 1.4.5

Le nombre 0 n'a pas d'inverse multiplicatif car il n'existe pas de nombre réel y tel que $0 \times y = 1$. 

1.4.3 Inverse (réciproque) d'une fonction

Avant de définir l'inverse d'une fonction, il faut bien comprendre que l'opération pour laquelle on veut définir un inverse n'est pas l'addition ou la multiplication de fonctions mais la composition de fonctions.

L'addition et la multiplication de fonctions sont en fait des opérations sur les éléments de l'image des fonctions (à valeurs réelles). La composition de fonctions est indépendante des opérations d'addition et de multiplication des fonctions.

Comme on l'a fait pour l'inverse additif et l'inverse multiplicatif, il faut définir l'élément neutre de la composition de fonctions.

Définition 1.4.6

La fonction qui joue le rôle **d'élément neutre** pour la composition de fonctions est la **fonction identité**, dénotée I , qui est définie par $I(z) = z$ pour tout élément z du domaine. Pour chaque élément z du domaine, la fonction identité redonne cet élément z .

Si f est une fonction d'un ensemble X dans un ensemble Y , on peut facilement voir que

$$f \circ I = f \quad \text{et} \quad I \circ f = f .$$

C'est à dire, $(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$ et $(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$ pour tout x .

On remarque la similarité avec la propriété de l'élément neutre pour l'addition (i.e. $0 + x = x + 0 = x$ pour tout x) et de l'élément neutre pour la multiplication (i.e. $1 \times x = x \times 1 = x$ pour tout x).

Exemple 1.4.7

La fonction I , qui à une personne redonne cette même personne, est l'élément neutre pour

la composition de fonctions qui agissent sur les personnes comme les fonctions F et M de l'exemple 1.3.3.

Par exemple, on a $I \circ F = F$ car F donne pour chaque personne sa mère biologique et par la suite I redonne cette mère. 

Exemple 1.4.8

Pour la composition de fonctions dont le domaine et l'image sont des sous-ensembles des nombres réels, l'élément neutre I est la fonction qui à chaque nombre réel x redonne le nombre réel x . Ainsi, si $p(x) = x^2 + 5x$, on a que $I \circ p = p \circ I = p$ car $(I \circ p)(x) = I(p(x)) = p(x)$ et $(p \circ I)(x) = p(I(x)) = p(x)$ pour tout nombre réel x . 

En s'inspirant de la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, on définit l'inverse pour la composition de fonctions.

Définition 1.4.9

L'inverse d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction g qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$f \circ g = I \quad \text{et} \quad g \circ f = I ,$$

C'est-à-dire, $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$ et $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$. On dénote par f^{-1} la fonction g qui est l'inverse de f .

On suppose ici que l'image de f est Y .

Cette définition est équivalente à l'énoncé suivant qui est souvent utilisé comme définition de l'inverse d'une fonction.

Définition 1.4.10

L'inverse de la fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction f^{-1} qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x) .$$

En effet, si $y = f(x)$ alors $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et si $x = f^{-1}(y)$ alors $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ par définition de l'inverse d'une fonction.

Exemple 1.4.11

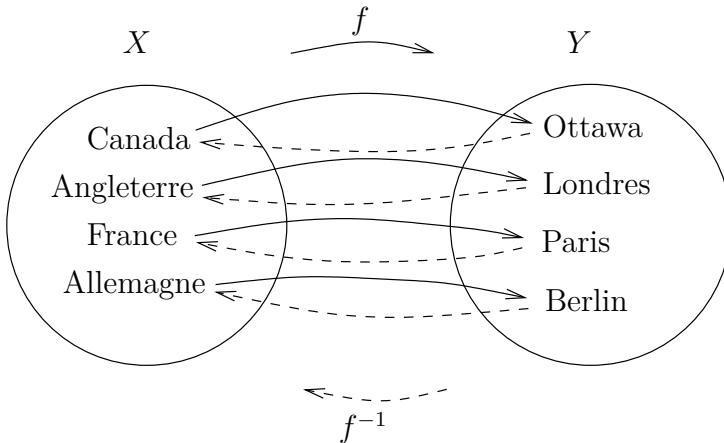
On retrouve à la figure 1.8 la définition d'une fonction f qui à chaque pays dans X assigne sa capitale dans Y . La fonction inverse f^{-1} est donc la fonction qui, à chaque capitale dans Y , assigne le pays dont elle est la capitale dans X .

La fonction f^{-1} est définie à la figure 1.8 par les flèches formées de tirets. 

Exemple 1.4.12

Vérifions que l'inverse de la fonction $f(x) = x/3 + 1$ est la fonction $g(x) = 3x - 3$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 3 = x = I(x)$$

FIGURE 1.8 – Définition des fonctions f et f^{-1} de l'exemple 1.4.11

pour tout x . De même, on peut vérifier que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = I(x)$ pour tout x .

Ainsi, pour $f(x) = x/3 + 1$, on obtient $f^{-1}(x) = 3x - 3$. ♣

On a vu que 0 n'avait pas d'inverse multiplicatif mais que tous les autres nombres réels avaient un inverse multiplicatif. La situation est encore plus complexe pour les fonctions car elles n'ont pas toutes un inverse.

Exemple 1.4.13

Par exemple, la fonction F de l'exemple 1.3.3 qui donne pour chaque personne sa mère biologique n'a pas d'inverse. Si on donne une mère, alors on ne peut pas déterminer uniquement la personne pour qui elle est la mère sauf si cette mère a eu un seul enfant. ♣

Remarque 1.4.14

En Ontario, on utilise très fréquemment l'expression **la réciproque d'une fonction** pour désigner l'inverse d'une fonction. Ce n'est pas le cas dans tous les pays de la francophonie. Les anglophones utilisent l'inverse d'une fonction. ♠

1.4.4 Comment déterminer si une fonction a un inverse

Pour déterminer si une fonction f (en tant que fonction de son domaine à son image) a un inverse il faut vérifier que pour chaque élément y de son image il existe un seul et unique élément x du domaine de f tel que la fonction f évaluée à x donne y (i.e. $f(x) = y$). On donne un nom spéciale aux fonctions qui possèdent cette propriété.

Définition 1.4.15

Une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est **injective** si $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$.

Exemple 1.4.16

Une fonction f est définie par le diagramme de la figure 1.9. On peut voir que cette fonction

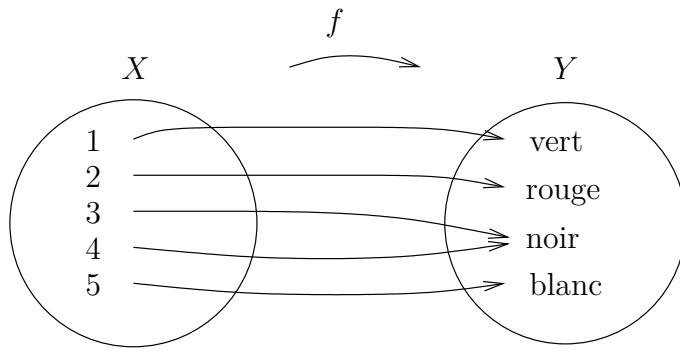


FIGURE 1.9 – Définition d'une fonction f qui n'a pas d'inverse. Cette fonction est discutée à l'exemple 1.4.16

n'a pas d'inverse car les nombres 3 et 4 donnent tous les deux la couleur noir. On ne peut donc pas définir une fonction inverse de Y dans X pour f ; quelle serait alors la valeur assignée à la couleur noir ?



Il y a plusieurs façons de vérifier si une fonction est injective ; c'est-à-dire que pour chaque valeur y dans l'image d'une fonction f il existe une seule valeur x dans le domaine de cette fonction f qui satisfasse $f(x) = y$.

Une autre notion importante dans le contexte générale de l'étude des fonctions est la notion suivante.

Définition 1.4.17

Une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est **surjective** si, pour tout $y \in Y$, il existe au moins un $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

En d'autres mots, une fonction $f : X \rightarrow Y$ est surjective si $\text{Im } f = Y$; tous les éléments de Y sont dans l'image de la fonction. Ce concept jouera un rôle secondaire dans notre recherche de fonctions inverses car nous considérerons seulement les fonctions $f : X \rightarrow Y$ avec $Y = \text{Im } f$.

Méthode algébrique

On illustre cette méthode à l'aide d'un exemple.

Exemple 1.4.18

Considérons la fonction $f(x) = x/3 + 1$ que l'on a vu précédemment. On suppose que x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Le but est de montrer que $x_1 = x_2$ et que l'on avait en fait évalué la fonction f au même point pour obtenir y .

Si on développe $f(x_1) = f(x_2)$, on trouve $x_1/3 + 1 = x_2/3 + 1$. Si on soustrait 1 de chaque côté de l'égalité, on trouve $x_1/3 = x_2/3$. Si on multiplie par 3 des deux côtés de cette nouvelle

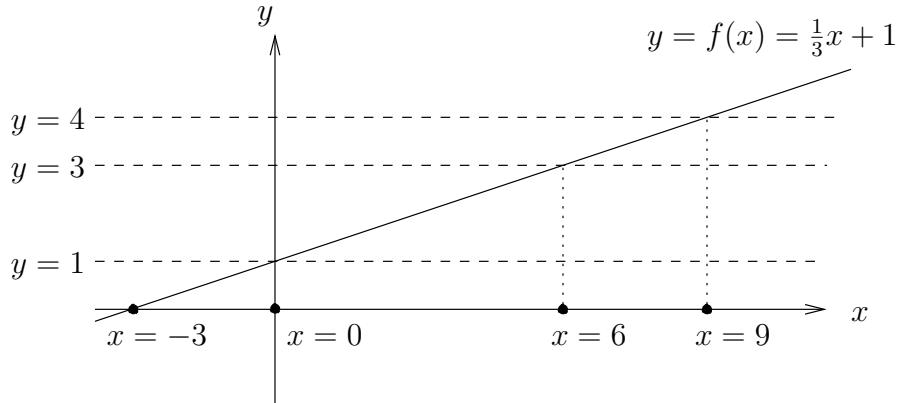


FIGURE 1.10 – On retrouve sur cette figure le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et de quelques droites horizontales

égalité, on trouve $x_1 = x_2$, ce que l'on voulait démontrer. ♣

Exemple 1.4.19

Est-ce que la fonction $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ a un inverse sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$, son domaine ?

Montrons que f est injective. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{1+3x_1}{5-2x_1} = \frac{1+3x_2}{5-2x_2} \\ &\Leftrightarrow (1+3x_1)(5-2x_2) = (1+3x_2)(5-2x_1) \\ &\Leftrightarrow 5 + 15x_1 - 2x_2 - 6x_1x_2 = 5 + 15x_2 - 2x_1 - 6x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow 15x_1 - 2x_2 = 15x_2 - 2x_1 \\ &\Leftrightarrow 17x_1 = 17x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 . \end{aligned}$$



Test de la droite horizontale

Cette fois-ci, on utilise le graphe de la fonction f et on vérifie que chaque droite horizontale (i.e. y est constant) coupe le graphe de la fonction f en un seul point. L'abscisse x de ce point est la seule valeur du domaine de f telle que $f(x) = y$.

Exemple 1.4.20

À la figure 1.10, on a tracé le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et quelques droites horizontales pour nous convaincre que chaque droite horizontale coupe le graphe de la fonction en un seul point. ♣

1.4.5 Comment trouver l'inverse d'une fonction

Après avoir vérifié qu'une fonction est injective et donc qu'un inverse existe, on peut chercher son inverse.

Méthode algébrique

Si $y = f(x)$, il faut résoudre pour x en fonction de y . L'exemple suivant va illustrer cette méthode.

Exemple 1.4.21

Dans le cas simple de la fonction $f(x) = x/3 + 1$, on pose $y = f(x) = x/3 + 1$ et on résout pour x . On soustrait 1 de chaque côté de l'égalité précédente pour obtenir $y - 1 = x/3$. Puis on multiplie les deux côtés de cette nouvelle égalité par 3 pour obtenir $x = 3y - 3$. Donc, $x = f^{-1}(y) = 3y - 3$.

La tradition veut que l'on utilise y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante. On échange donc x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = 3x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$. ♣

Exemple 1.4.22

Même si f est donnée par un simple polynôme, il n'est pas toujours possible de trouver une expression algébrique pour l'inverse de f .

Par exemple, soit $f(x) = x^6 + x^2 + 3$. Il est facile de tracer le graphe de f et de remarquer que f satisfait le test de la droite horizontale. On est donc certain que l'inverse de f existe.

Cependant, on ne peut résoudre l'équation $y = x^6 + x^2 + 3$ pour x en fonction de y afin d'obtenir $x = f^{-1}(y)$. En fait, il a été démontré par Evariste Galois, un mathématicien français du 18^e siècle, qu'il n'existe pas de formule générale pour trouver les racines d'un polynôme de degré plus grand que quatre comme c'est le cas pour les polynômes de degré deux. ♣

Exemple 1.4.23

À l'exemple 1.4.19, on a montré que la fonction $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ était injective. Il existe donc un inverse de f en tant que fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$. On va trouver cet inverse.

Puisque

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{1+3x}{5-2x} &\Leftrightarrow y(5-2x) = 1+3x \Leftrightarrow 5y-2xy = 1+3x \\ &\Leftrightarrow 5y-1 = 2xy+3x = (2y+3)x \Leftrightarrow x = \frac{5y-1}{2y+3}, \end{aligned}$$

on a $x = f^{-1}(y) = \frac{5y-1}{2y+3}$. Comme la tradition veut que l'on utilise y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante. On échange x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$. La fonction f^{-1} a comme domaine l'image de la fonction f qui est $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$. ♣

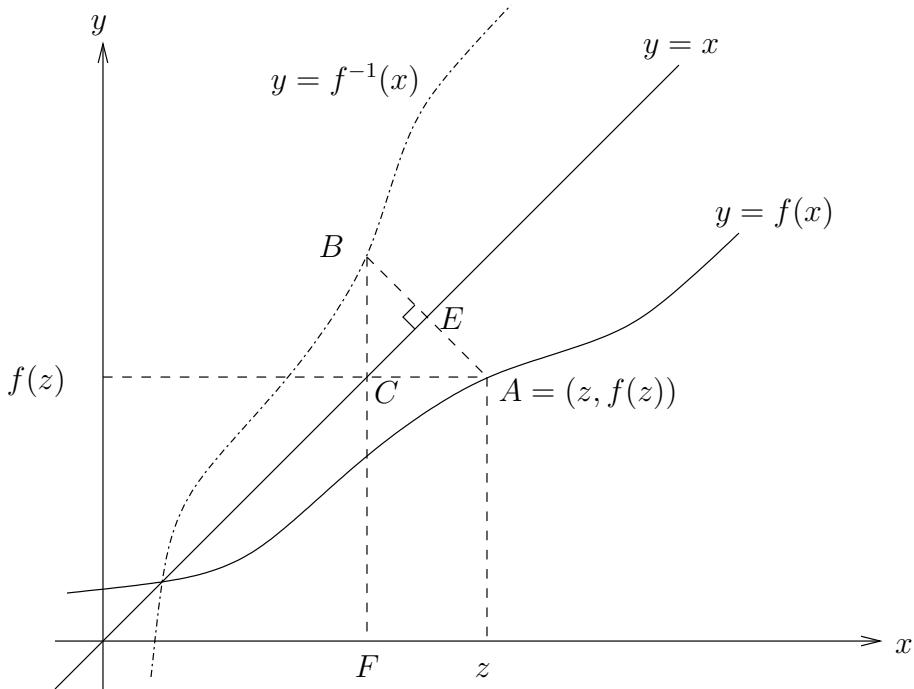


FIGURE 1.11 – Graphe de f^{-1} obtenu par réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$

Méthode graphique

Méthode 1.4.24

Si f est une fonction qui possède une fonction inverse f^{-1} , alors on obtient le graphe de f^{-1} en faisant la réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

Remarque 1.4.25 ☺

Pour justifier cet énoncé, on utilise la figure 1.11. On fixe z . On cherche les coordonnées du point B qui est le point symétrique au point $A = (z, f(z))$ par rapport à la droite $y = x$. On veut montrer que les coordonnées du point B sont $(f(z), z)$, un point du graphe de f^{-1} car $z = f^{-1}(f(z))$.

Si B est le point qui est symétrique au point A par rapport à la droite $y = x$, alors les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont des angles droits et les segments \overline{AE} et \overline{BE} sont de même longueur.

On trace la droite horizontale $y = f(z)$ qui coupe la droite $y = x$ en C . Puisque les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle BCE$ sont congruents (les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont égaux et les côtés \overline{AE} et \overline{CE} adjacents à l'angle $\angle AEC$ sont respectivement de même longueur que les côtés \overline{BE} et \overline{CE} adjacents à l'angle $\angle BEC$), ainsi les segments \overline{AC} et \overline{CB} sont de même longueur et les angles $\angle ACE$ et $\angle BCE$ sont égaux.

Puisque $\angle ACE = \pi/4$ (la droite $y = x$ fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe des x), on a

$\angle ACB = \pi/2$ et donc que la droite qui passe par B et C est verticale. Comme les coordonnées du point C sont $(f(z), f(z))$, on a donc que l'abscisse du point B est $f(z)$.

Le point d'intersection de la droite qui passe par B et C avec l'axe des x est $F = (f(z), 0)$. Pour trouver l'ordonnée du point B , on utilise le fait que la longueur du segment \overline{BC} , qui est aussi la longueur du segment \overline{AC} , est $z - f(z)$. Donc, l'ordonnée du point B est la somme des longueurs des segments \overline{FC} et \overline{CB} . C'est-à-dire que l'ordonnée du point B est $f(z) + (z - f(z)) = z$. Ce qui confirme que les coordonnées de B sont $(f(z), z)$. 

1.4.6 Influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse

Une question que l'on n'a pas abordée précédemment est l'influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse.

Exemple 1.4.26

Considérons la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour toutes les valeurs réelles de x . Cette fonction n'a pas d'inverse car elle n'est pas injective. Par exemple, $f(-1) = f(1) = 0$. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de f que cette fonction ne satisfait pas le test de la droite horizontale.

Par contre, si on considère $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ seulement, alors f a un inverse qui est $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$. On présente à la figure 1.12 les graphes de f et f^{-1} .

Si on utilise la méthode algébrique pour trouver l'inverse de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$, on commence par poser

$$y = f(x) = x^2 - 1.$$

On additionne 1 de chaque côté de cette égalité pour obtenir

$$y + 1 = x^2$$

puis on prend la racine carrée des deux côtés de cette nouvelle égalité pour obtenir

$$x = \sqrt{y+1}.$$

Donc, $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$ pour $y \geq -1$.

Par tradition, on échange x et y pour obtenir

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \geq -1.$$

Sans l'hypothèse que $x \geq 0$, on aurait obtenu $x = \pm\sqrt{y+1}$. Or, cette formule ne peut pas définir une fonction car on a deux valeurs pour chaque valeur de y . 

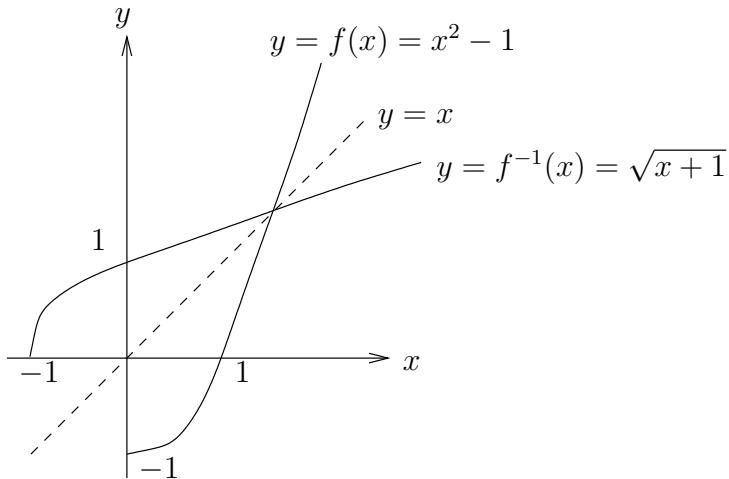


FIGURE 1.12 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ et de $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$ pour $x \geq -1$.

1.5 Fonctions trigonométriques

Vous avez probablement vu la définition du cosinus et sinus d'un angle à partir d'un triangle droit. Si $\triangle ABC$ est un triangle avec un angle droit au sommet C et θ est l'angle au sommet A (voir figure 1.14), alors le cosinus et le sinus de θ sont définis par

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$$

où $|\overline{AC}|$, $|\overline{BC}|$ et $|\overline{AB}|$ sont les longueurs des segments \overline{AC} , \overline{BC} et \overline{AB} respectivement. Cette définition est excellente pour les angles aiguës (moins de 90°) mais comment définir le cosinus ou sinus d'un angle obtus (plus de 90°)?

Une autre façon de définir le **cosinus et sinus d'un angle en radians** est avec le cercle unité.

Définition 1.5.1

Soit D , l'intersection du cercle de rayon 1 centré à l'origine avec la droite émanant de l'origine et qui forme un angle θ avec l'axe des x lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (voir la figure 1.13). L'abscisse du point D est $\cos(\theta)$ et l'ordonnée du point D est $\sin(\theta)$.

À partir de maintenant, au lieu de calculer les angles en degrés, on calcule les angles en radians. N'oubliez pas que le nombre π est le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre. Ainsi, 360° correspond à 2π radians (la circonférence d'un cercle de rayon 1).

Les deux définitions que nous venons de donner du cosinus et sinus sont équivalentes. Si le sommet A du triangle $\triangle ABC$ (voir figure 1.14) est à l'origine, \overline{AC} repose sur l'axe des x ,

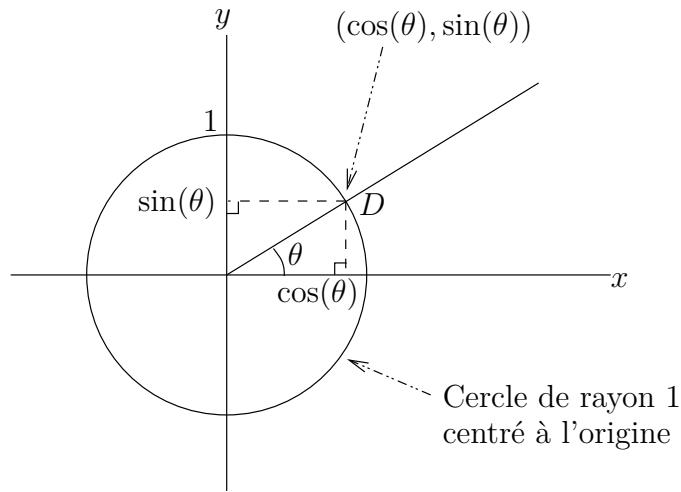


FIGURE 1.13 – Définition du sinus et cosinus de l’angle θ à partir du cercle unité.

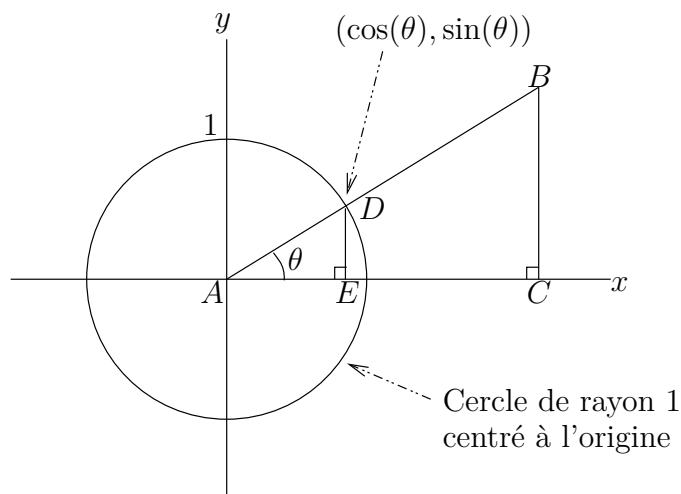


FIGURE 1.14 – Définition du sinus et cosinus de l’angle θ à partir d’un triangle.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

TABLE 1.1 – Valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour quelques valeurs de θ .

D est le point d'intersection de la droite contenant le segment \overline{AB} avec le cercle de rayon 1 centré à l'origine, et E est le point d'intersection de la droite perpendiculaire à \overline{AC} passant par D , alors les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables. Ainsi

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{AE}| \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{DE}|$$

car $|\overline{AD}| = 1$.

Il faut bien comprendre que l'angle positif θ représenté aux figures 1.13 et 1.14 est l'angle mesuré lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x .

Le Tableau 1.1 donne quelques valeurs du sinus et cosinus qu'il faut mémoriser. On verra plus tard que l'on peut utiliser les identités trigonométriques pour trouver d'autres valeurs du sinus et cosinus.

Si $\triangle ABC$ est le triangle de la figure 1.14 avec un angle droit en C et θ est l'angle en radians au sommet A . Pour $\theta \neq n\pi + \pi/2$ où $n \in \mathbb{Z}$, la tangente de l'angle θ est définie par

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} .$$

On peut aussi définir la tangente de l'angle θ à l'aide du cercle unité. Si on utilise le triangle $\triangle ABC$ de la figure 1.14, alors la **tangente de l'angle** θ est

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AE}|} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} , \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} .$$

Il ne faut pas oublier que l'angle positif θ est l'angle mesuré lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x .

Il y a trois autres fonctions trigonométriques qui peuvent être utiles de temps à autre. Nous donnons leurs définitions à l'aide de la figure 1.14.

La **cotangente d'un angle** θ est définie par la relation

$$\cot(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} , \quad \theta \neq n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} .$$

La **sécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\sec(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AE}|} = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, la **cosécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\csc(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DE}|} = \frac{1}{\sin(\theta)}, \quad \theta \neq n\pi \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.5.2

Il faut noter que $\cos(\theta) \neq \cos(\theta)$.

Dans le cours de **Fonctions** de 11^e année qui prépare pour l'université, vous avez défini une fonction $\cos(x)$ où x est mesuré en degrés. Puis, dans le cours de **Fonctions Avancées** de 12^e année qui prépare aussi pour l'université, vous avez redéfini une fonction $\cos(x)$ où x est mesuré en radians.

La même notation a été utilisée pour dénoter deux différentes fonctions. Par exemple, $\cos(10) \neq \cos(10)$ si l'angle du premier cosinus est 10 degrés et celui du deuxième cosinus est 10 radians. Il est aussi mélangeant d'écrire $\cos(10) = \cos(10(\pi/180))$; il faut comprendre que l'angle du premier cosinus est 10 degrés alors que celui du deuxième cosinus est $10(\pi/180)$ radians.

Si on dénote par \cos_d le cosinus où l'angle est mesuré en degrés et par \cos le cosinus où l'angle est mesuré en radians, alors il est maintenant clair que $\cos_d(10) \neq \cos(10)$ et $\cos_d(10) = \cos(10(\pi/180))$.

Il aurait été préférable de donner des noms différents au cosinus pour les angles en degrés et au cosinus pour les angles en radians. Malheureusement, la tradition veut que l'on utilise le même nom (i.e. \cos) dans les deux cas.

À moins d'avis contraire, l'argument des fonctions trigonométriques sera toujours mesuré en radians. Il sera très clairement spécifié si jamais on doit utiliser les fonctions trigonométriques où les angles sont mesurés en degrés.

Cette nuance entre le cosinus où les angles sont mesurés en degrés et celui où les angles sont mesurés en radians aura des conséquences très importantes lors de l'étude du calcul différentiel et intégral pour les fonctions trigonométriques.

La remarque précédente au sujet du cosinus est aussi valable pour les autres fonctions trigonométriques. 

Remarque 1.5.3

On remarquera que $\sin \theta \neq \theta \sin$. En fait, cette dernière expression n'a aucun sens. Il faut noter qu'un grand nombre d'auteurs utilisent la notation $\sin \theta$ pour indiquer $\sin(\theta)$. C'est donc le sinus qui est évalué à θ et non pas le produit du sinus par le monôme θ .

L'utilisation de $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\tan \theta$ pour désigner $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ respectivement est une tradition que nous éviterons dans le présent document. De cette façon, nous ne risquerons pas de retrouver une expression du genre $\sin \theta + 1$. Est-ce $\sin(\theta + 1)$ ou $\sin(\theta) + 1$?



1.5.1 Identités trigonométriques

Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées d'un point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, on a :

Proposition 1.5.4

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad , \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

Puisque θ et $\theta + 2\pi$ représentent le même point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, on a :

Proposition 1.5.5

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

On a les mêmes égalités si 2π est remplacé par -2π , 4π , -4π , etc. On dit que le cosinus et le sinus sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π .

Il est facile de déduire plusieurs identités trigonométriques à partir du cercle unité.

Puisque les triangles $\triangle OBE$, $\triangle OCG$, $\triangle ODG$ et $\triangle OAE$ de la figure 1.15 sont congruents, on obtient les identités suivantes :

Proposition 1.5.6

$$\begin{array}{ll} \cos(\theta) = \cos(-\theta) & \sin(\theta) = -\sin(-\theta) \\ \cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) & \sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) \\ \cos(\theta) = -\cos(\pi + \theta) & \sin(\theta) = -\sin(\pi + \theta) \end{array}$$

quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque les triangles $\triangle OAB$ et $\triangle ODC$ de la figure 1.16 sont congruents, on obtient les identités suivantes :

Proposition 1.5.7

$$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

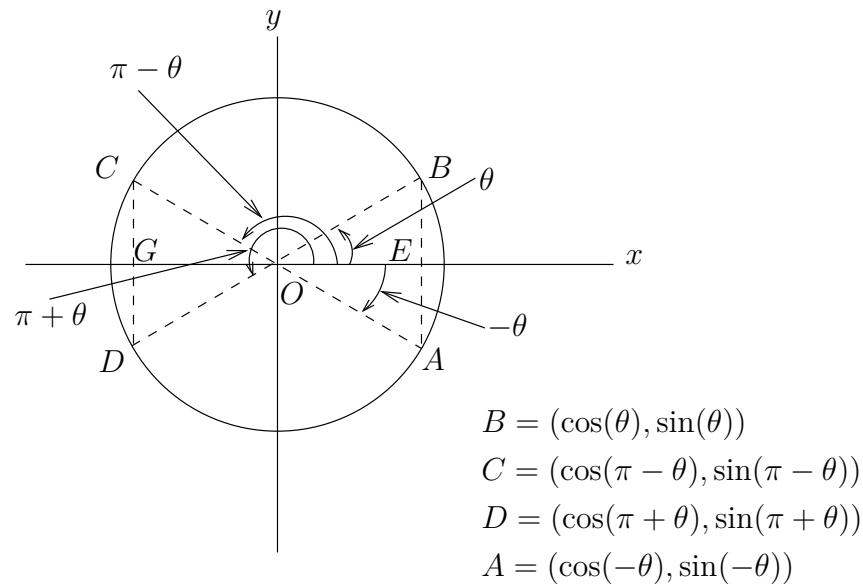


FIGURE 1.15 – Identités trigonométriques provenant de réflexions par rapport aux axes

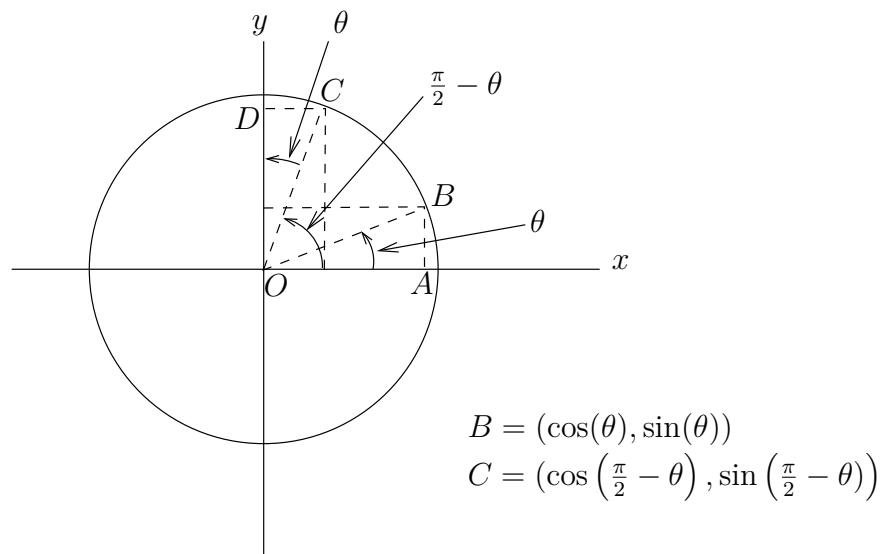


FIGURE 1.16 – Identités trigonométriques provenant d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$

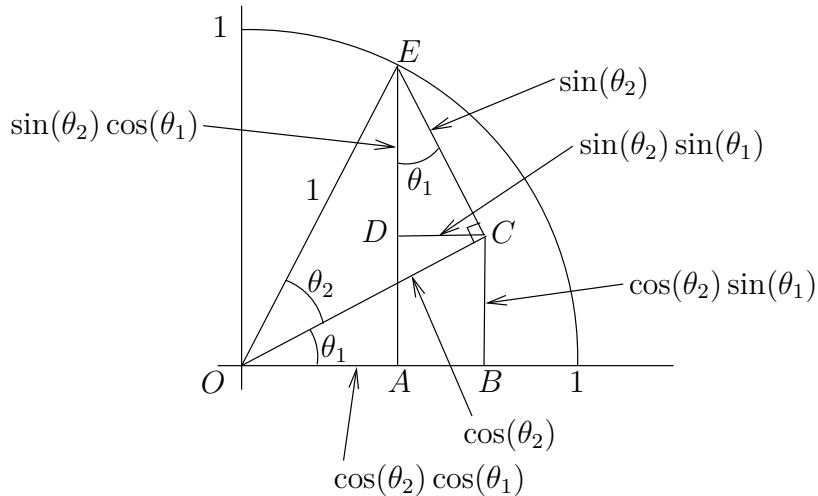


FIGURE 1.17 – Cette figure sert à la première démonstration de la règle d'addition pour les sinus et cosinus qui est donnée à la remarque 1.5.9.

Ce sont seulement quelques unes des identités trigonométriques que l'on peut déduire à partir du cercle unité.

Finalement, les **formules d'addition** suivantes seront d'une très grande utilité lors de la résolution d'équations impliquant les cosinus et sinus. Elles sont aussi utilisées pour simplifier les intégrales (voir chapitre 6) que l'on retrouve souvent dans les applications.

Proposition 1.5.8

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} .$$

Remarque 1.5.9

On entend souvent dire qu'il n'y a qu'une et une seule façon de résoudre un problème en mathématiques. Nous donnons plusieurs démonstrations différentes des formules d'addition pour le sinus et le cosinus. Toutes ces démonstrations sont bonnes. Il est donc possible d'avoir plus d'une bonne façon de résoudre un problème mathématique.

Première démonstration: On utilise le dessin de la figure 1.17. On assume donc que θ_1 et θ_2 sont entre 0 et $\pi/2$. Pour les autres valeurs de θ_1 et θ_2 , la démonstration peut être réduite au présent cas à l'aide des identités trigonométriques données au propositions 1.5.6 et 1.5.7.

Le triangle $\triangle OBC$ est semblable au triangle $\triangle EDC$. En particulier, $\angle COB = \angle CED$. Si on considère le triangle $\triangle OCE$, on trouve que la longueur de l'hypoténuse \overline{EC} du triangle $\triangle EDC$ est $\sin(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{ED}| = \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)$ et $|\overline{DC}| = \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle droit. De même, si on considère le triangle

$\triangle OCE$, on trouve que la longueur de l'hypoténuse \overline{OC} du triangle $\triangle OBC$ est $\cos(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{OB}| = \cos(\theta_2) \cos(\theta_1)$ et $|\overline{BC}| = \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle droit.

On a donc

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = |\overline{AE}| = |\overline{BC}| + |\overline{DE}| = \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)$$

et

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = |\overline{OA}| = |\overline{OB}| - |\overline{DC}| = \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_1).$$

Deuxième démonstration: Cette démonstration fait appel aux nombres complexes que le lecteur n'a probablement pas vu. Nous donnons quand même cette démonstration puisqu'elle est très courte et élégante, en espérant que cela pourra inciter certains lecteurs à approfondir leurs connaissances en mathématiques au delà du cours de calcul différentiel et intégral.

Puisque $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{(\theta_1+\theta_2)i} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.5.1)$$

et

$$\begin{aligned} e^{(\theta_1+\theta_2)i} &= e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i} = (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2))i \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Si on compare la partie réelle et imaginaire de (1.5.1) et (1.5.2), on obtient

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2).$$

Évidemment, cette démonstration est très courte mais fait appel à l'identité $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ qui n'est pas triviale à démontrer.



Exemple 1.5.10

Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/3)$?

Puisque $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$, on trouve

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

où la dernière égalité provient du Tableau 1.1.



Exemple 1.5.11

Quelle est la valeur de $\sin(7\pi/12)$?

Puisque $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$, on obtient de la formule d'addition pour le sinus que

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) .\end{aligned}$$



Exemple 1.5.12

Montrez que

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) \quad (1.5.3)$$

quel que soit θ .

Si on prend la formule d'addition pour le cosinus et on y remplace θ_1 et θ_2 par θ , on trouve

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) .$$

Puisque $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, on trouve

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 . \quad (1.5.4)$$

D'où

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) .$$



On peut obtenir une formule pour $\sin^2(\theta)$ qui est semblable à celle donnée en (1.5.3). La proposition suivante inclus ces deux formules.

Proposition 1.5.13

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) .$$

La première formule est la **formule de l'angle double pour le cosinus** alors que la deuxième formule est la **formule de l'angle double pour le sinus**



On laisse au lecteur la tâche de vérifier la formule de l'angle double pour le sinus, comme on l'a fait pour la formule de l'angle double pour le cosinus.

Remarque 1.5.14

Les deux formules données à la proposition (1.5.13) vont s'avérer très utiles pour évaluer certaines intégrales au chapitre 6.



Pour terminer, nous mentionnons deux identités trigonométriques qui font appel à la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. Si nous divisons l'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ tour à tour par $\cos^2(\theta)$ et par $\sin^2(\theta)$, nous obtenons les deux identités suivantes :

Proposition 1.5.15

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) \quad , \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} .$$

$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta) \quad , \quad \theta \neq n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} .$$

1.5.2 Graphes des fonctions trigonométriques

Le cosinus et le sinus sont deux fonctions définies pour tous les nombres réels. On trace le graphe de ces fonctions à la figure 1.18.

On déduit à partir de leurs définitions que

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

quel que soit l'angle θ . Ainsi,

$$\text{Dom } \cos = \text{Dom } \sin = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Im } \cos = \text{Im } \sin = \{x : -1 \leq x \leq 1\} .$$

Puisque $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ pour tout θ , le graphe du cosinus est une translation par $\pi/2$ vers le gauche du graphe du sinus.

La tangente est une fonction qui n'est pas définie pour tous les angles. Le graphe de la tangente est donnée à la figure 1.19. On remarque que

$$\text{Dom } \tan = \left\{ \theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2} , \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im } \tan = \mathbb{R} .$$

De plus, $\tan(\theta) = \tan(\theta + \pi)$ quel que soit $\theta \neq n\pi + \pi/2$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La tangente est donc une fonction **périodique** de **période** π .

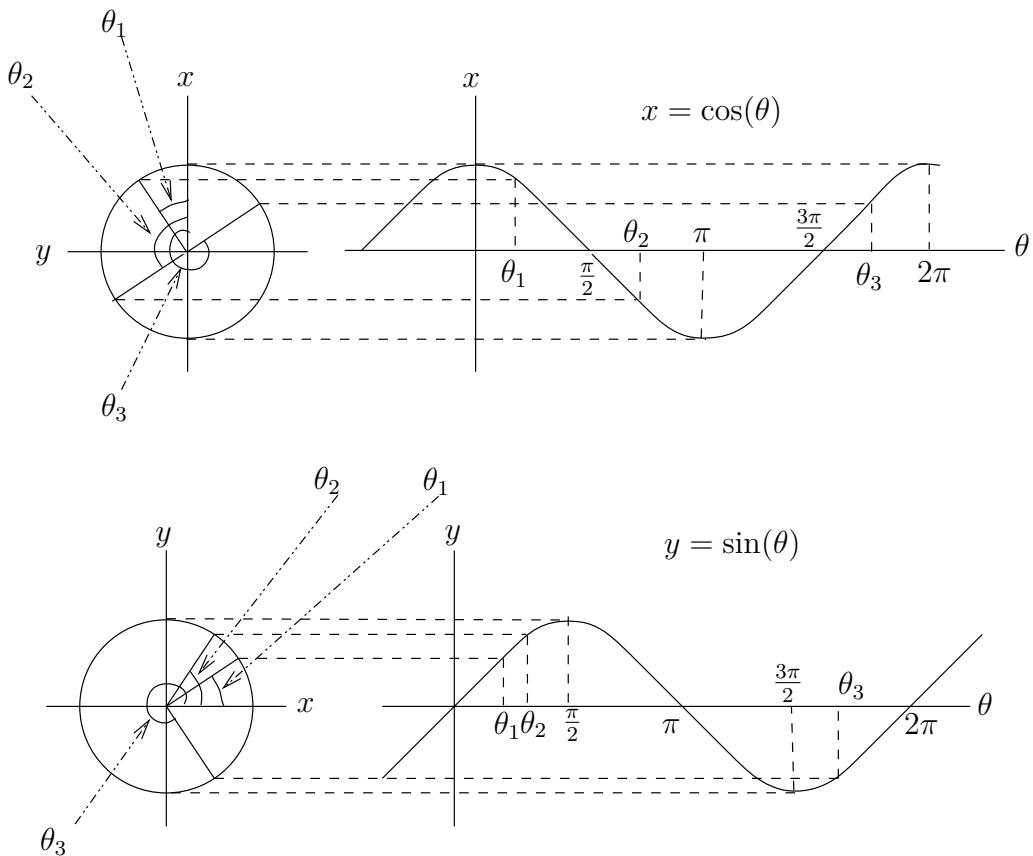
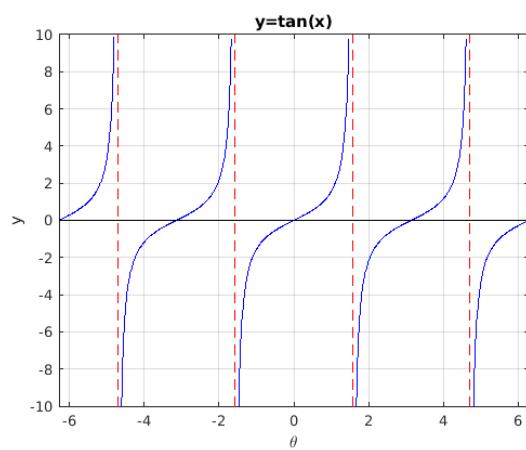
On retrouve le graphe de la cotangente, de la sécante et de la cosécante à la figure 1.20. On remarque que

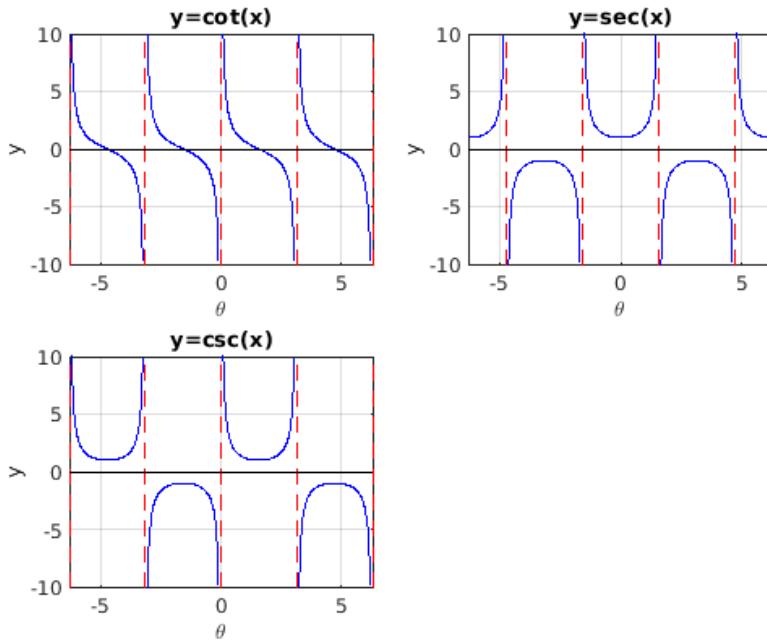
$$\begin{aligned} \text{Dom } \cot &= \{ \theta : \theta \neq n\pi , \quad n \in \mathbb{Z} \} \quad \text{et} \quad \text{Im } \cot = \mathbb{R} , \\ \text{Dom } \sec &= \left\{ \theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2} , \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im } \sec = \{y : |y| \geq 1\} , \end{aligned}$$

et

$$\text{Dom } \csc = \{ \theta : \theta \neq n\pi , \quad n \in \mathbb{Z} \} \quad \text{et} \quad \text{Im } \csc = \{y : |y| \geq 1\} .$$

Comme la tangente, la cotangente est une fonction **périodique** de **période** π . La sécante et la cosécante sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π .

FIGURE 1.18 – Graphes de $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$ FIGURE 1.19 – Graphe de $y = \tan(\theta)$

FIGURE 1.20 – Graphe de $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$, et $y = \csc(\theta)$ **Définition 1.5.16**

Lorsque l'on parle de **fonctions sinusoïdales**, on parle de fonctions de la forme

$$y = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(x - X)\right) \quad (1.5.5)$$

où M , A , P et X sont des constantes. On donne le sens graphique de ces constantes à la figure 1.21. La constante M est la **moyenne** de la fonction sinusoïdale, la constante A est l'**amplitude** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale, la constante P est la **période** et la constante X est la **phase** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale.

Dans certains livres, le sinus est utilisé pour définir les fonctions sinusoïdales. C'est-à-dire que l'on utilise

$$y = M + A \sin\left(\frac{2\pi}{P}(x - X)\right).$$

En changeant seulement la phase, on peut produire avec cette formule n'importe laquelle des ondes données par la formule (1.5.5).

Exemple 1.5.17

Tracer le graphe de la fonction $y = f(x) = 3 + 5 \cos((2\pi/7)(x + 4))$.

La moyenne de cette fonction sinusoïdale est $M = 3$, son amplitude est $A = 5$, sa période est $P = 7$ et sa phase est $X = -4$. On a tracé le graphe d'une période de cette fonction à la figure 1.22. ♣

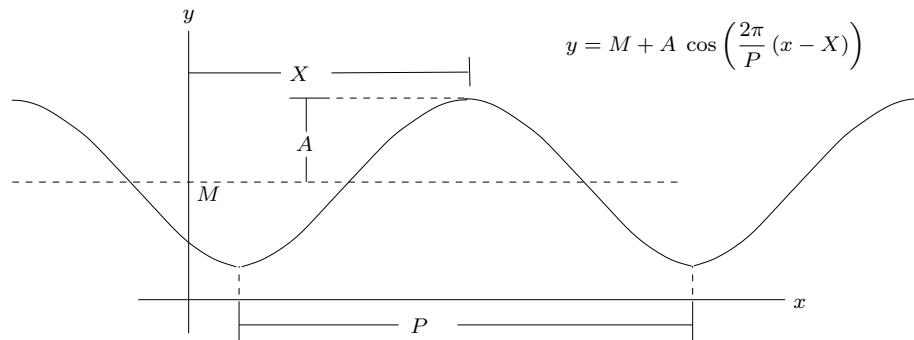
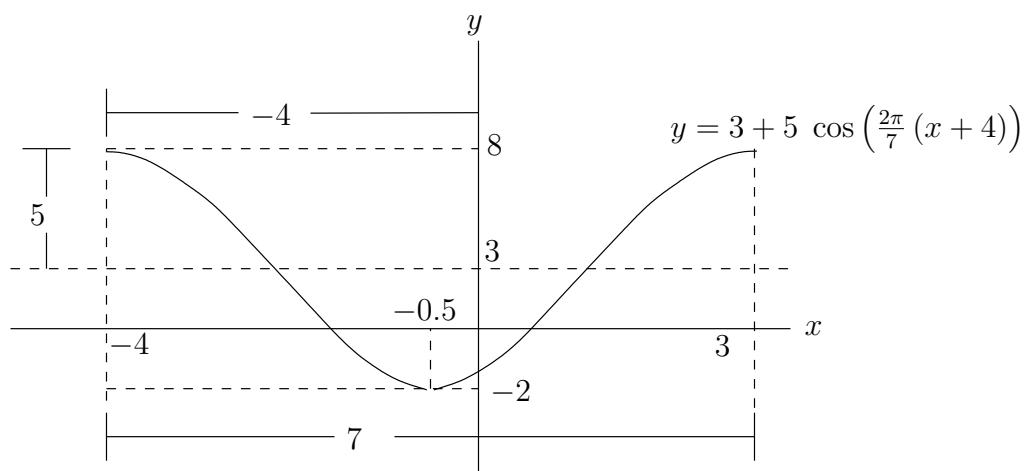


FIGURE 1.21 – Graphe d'une fonction sinusoïdale

FIGURE 1.22 – Graphe de $y = f(x) = 3 + 5 \cos((2\pi/7)(x + 4))$

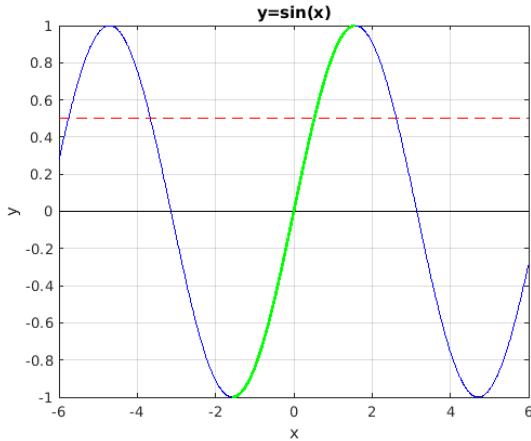


FIGURE 1.23 – Graphe de $y = \sin(x)$ pour $-6 \leq x \leq 6$

Exemple 1.5.18

La température moyenne du corps chez la femme pour une période de 24 heures est de 36.8°C avec un minimum de 36.5°C à 2h00 et un maximum de 37.1°C à 14h00. Si on suppose que la température T du corps chez la femme en fonction du temps t est décrite par une fonction sinusoïdale, quelle est cette fonction ?

Dans la formule (1.5.5), la moyenne est $M = 36.8$, l'amplitude est $A = (37.1 - 36.5)/2 = 0.3$, la phase est $X = 14$ heures et la période est naturellement $P = 24$ heures. On trouve donc

$$T = 36.8 + 0.3 \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 14)\right)$$

où T est la température en degrés centigrades et t est le temps en heures.



1.5.3 Fonctions trigonométriques inverses

Le graphe de la fonction sinus se trouve à la figure 1.23. On voit facilement par le test des droites horizontales que cette fonction n'est pas injective et donc n'a pas d'inverse.

Mais ! Il y a bien une fonction \sin^{-1} sur la calculatrice. Quelle est cette fonction ?

On définit la fonction inverse pour le sinus en restreignant le domaine du sinus à l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. C'est la courbe tracée en vert que l'on retrouve à la figure 1.23.

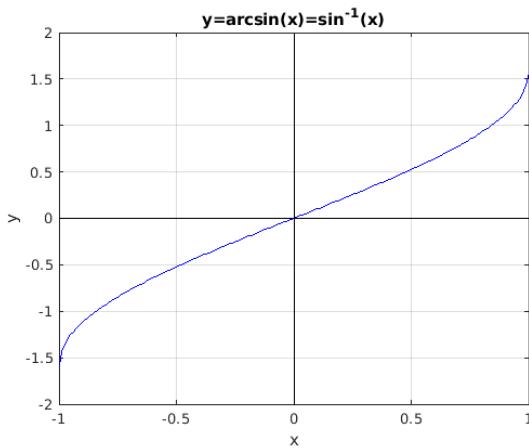


FIGURE 1.24 – Graphe de $y = \sin^{-1}(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$

Définition 1.5.19

Sur l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, la fonction \sin est bien injective et on peut définir son inverse \sin^{-1} par la formule standard

$$x = \sin^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \sin(x)$$

pour $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ et $-1 \leq y \leq 1$. La fonction \sin^{-1} est appelée l'**arcsinus** et est aussi dénotée \arcsin ; c'est-à-dire, $\sin^{-1}(x) \equiv \arcsin(x)$.

En d'autres mots, $x = \sin^{-1}(y)$ est l'angle en radians entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ qu'il faut pour que $\sin(x) = y$.

La définition de \sin^{-1} explique pourquoi cette fonction sur votre calculatrice n'acceptera jamais d'arguments plus petits que -1 et plus grands que 1 .

On retrouve à la figure 1.24, le graphe de la fonction \sin^{-1} . Le lecteur peut vérifier que le graphe de \sin^{-1} est bien obtenu d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$ du graphe de \sin .

De même, on peut définir un inverse pour le cosinus.

Définition 1.5.20

Sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$, la fonction \cos est bien injective et on peut définir son inverse \cos^{-1} par la formule standard

$$x = \cos^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \cos(x)$$

pour $0 \leq x \leq \pi$ et $-1 \leq y \leq 1$. La fonction \cos^{-1} est appelée **arccosinus** et est aussi dénotée \arccos ; c'est-à-dire, $\cos^{-1}(x) \equiv \arccos(x)$.

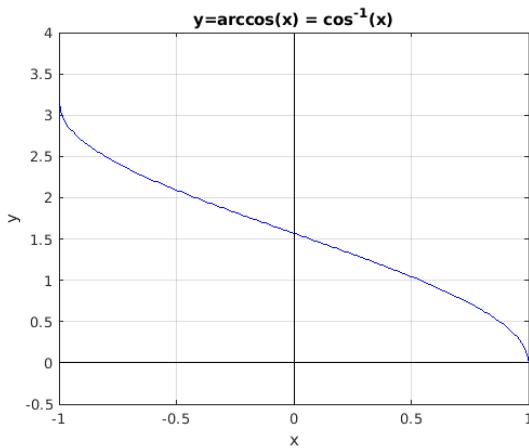


FIGURE 1.25 – Graphe de $y = \cos^{-1}(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$

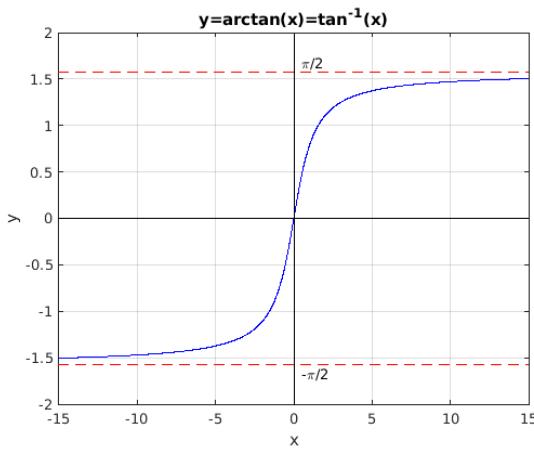


FIGURE 1.26 – Graphe de $y = \tan^{-1}(x)$ pour x réels

Finalement, on peut définir un inverse pour la tangente.

Définition 1.5.21

Sur l'intervalle $-\pi/2 < x < \pi/2$, la fonction \tan est bien injective et on peut définir son inverse \tan^{-1} par la formule standard

$$x = \tan^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \tan(x)$$

pour $-\pi/2 < x < \pi/2$ et y réels. La fonction \tan^{-1} est appelée l'**arctangente** et est aussi dénotée \arctan ; c'est-à-dire, $\tan^{-1}(x) \equiv \arctan(x)$.

Le graphe de \cos^{-1} est donné à la figure 1.25 et celui de \tan^{-1} est donné à la figure 1.26.

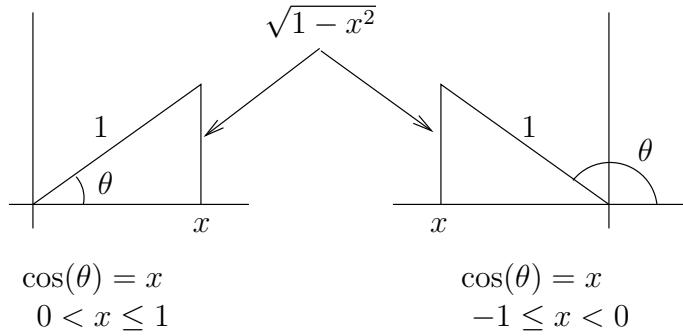


FIGURE 1.27 – Représentation graphique de $\cos(\theta) = x$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.

Remarque 1.5.22

On remarquera que $\sin^{-1} \neq \sin^{-1}$

Il faut bien comprendre que \sin^{-1} sur la calculatrice n'est pas égale à $(\sin(x))^{-1} = 1/\sin(x)$. Par exemple,

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0.52359877559830$$

alors que

$$\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.08582964293349.$$



Exemple 1.5.23

Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pour $-1 \leq x \leq 1$.

Soit $\theta = \arccos(x)$ où $0 \leq \theta \leq \pi$. Grâce à la figure 1.27, on a $\sin(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$.



1.6 Fonctions exponentielles et logarithmiques

1.6.1 Fonctions exponentielles

Le but de cette section est de donner un sens à l'expression b^p pour le plus grand nombre de **base** b et d'**exposant** p . Nous résumons ci-dessous ce qui est connu au sujet de l'exponentiel d'un nombre.

- L'expression b^p n'est pas définie pour $b = p = 0$.
- $b^p = 1$ pour $b > 0$ et $p = 0$. Par exemple, $\pi^0 = 1$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et p est un entier positif,

$$b^p = \underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{p \text{ fois}} .$$

Par exemple, $\pi^3 = \pi \times \pi \times \pi$.

- Si $b \in \mathbb{R}$ et $p = 1/n$ où n est un nombre impair, $y = b^p$ est le nombre réel tel que $y^n = b$. Par exemple, $(-8)^{1/3} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.
- Si $b \geq 0$ et $p = 1/n$ où n est un nombre pair, $y = b^p$ est le nombre réel positif tel que $y^n = b$. Par exemple, $16^{1/4} = 2$ car $2^4 = 16$.
- Si $p = m/n$, on calcul $b^{1/n}$ si cela est possible puis on calcul $(b^{1/n})^m$. Il est toujours avantageux de simplifier la fraction m/n avant de faire les calculs. Par exemple, $(-8)^{2/3} = 4$ car $(-8)^{1/3} = -2$ et $((-8)^{1/3})^2 = (-2)^2 = 4$. De même, $16^{3/4} = 8$ car $16^{1/4} = 2$ et $(16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$.
- Si $p < 0$, on définit b^p par $1/b^{-p}$ si b^{-p} est définie. Par exemple, $\pi^{-3} = 1/\pi^3 = 1/(\pi \times \pi \times \pi)$.

Aucune définition n'est donnée pour b^p lorsque b est un nombre réel positif et p est un exposant réel quelconque. Comment peut-on définir une expression comme 4^π ? Comment calcule-t-on 4^π ? Pour calculer 4^2 , il suffit de multiplier 4 par lui-même. Pour calculer $4^{1/2}$, il suffit de trouver le nombre positif y tel que $y^2 = 4$; dans le cas présent $y = 2$. Mais comment calcule-t-on 4^π ? On peut utiliser la définition suivante :

Définition 1.6.1

Pour $b > 1$ et $p \in \mathbb{R}$, on définit le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus petit nombre réel¹ M tel que $M \geq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Pour $0 < b < 1$ et $p \in \mathbb{R}$, on définit le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Naturellement, si $b = 1$ on obtient $b^p = 1$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Ainsi, 4^π est le plus petit nombre réel M tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq \pi$. De même, $4^2 = 16$ car $M = 16$ est le plus petit nombre tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq 2$; le nombre 2 est une valeur possible pour r .

La définition du nombre exponentiel b^p , $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$, ci-dessus n'est pas facile à utiliser. Il faut généralement beaucoup de travail pour évaluer un nombre exponentiel avec cette définition. Pour l'instant, cette définition sera suffisante pour nos besoins.

En fait, cette définition d'un nombre exponentiel manque de rigueur. Il faudrait démontrer que cette définition est consistante. Par exemple, est-ce que cette définition de b^p pour $b > 1$ est équivalente à « b^p est le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \geq p$ »? Comme on verra prochainement, cela revient à demander si les limites à droite et à gauche de b^r sont égales en $r = p$. Il y a bien d'autres questions de ce genre que l'on pourrait poser au sujet de cette définition. De plus, il est difficile de démontrer les propriétés des exposants avec cette définition.

Nous donnerons à la section ?? une définition équivalente du nombre exponentiel b^p , $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$, qui sera plus facile à manipuler que celle ci-dessus. Avec la définition

1. **L'Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure.

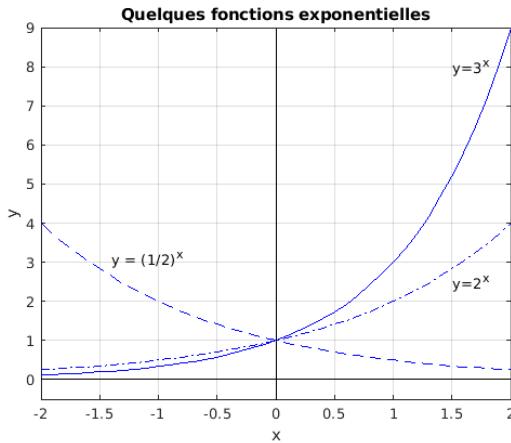


FIGURE 1.28 – Graphes de $y = 3^x$, $y = 2^x$ et $y = (1/2)^x$

présentée à la section ??, il est facile de déduire les propriétés des exposants. De plus, les calculatrices et ordinateurs utilisent cette définition (avec quelques subtilités additionnelles) pour évaluer les nombres exponentiels.

Pour l'instant, la valeur d'un nombre exponentiel comme 4^π sera estimée par 4^r pour des valeurs rationnelles de r très près de π et inférieures à π . Quelle valeur de r , proche de π , doit-on utiliser pour obtenir une bonne approximation de 4^π ? Cette question ne sera pas abordée.

Définition 1.6.2

Si b est un nombre réel positif, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ définie par $f(x) = b^x$ pour tout x réel est appelée une **fonction exponentielle**.

Les fonctions exponentielles satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 1.6.3

Si a et b sont des nombres réels positifs et x et y sont des nombres réels, alors

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x b^x = (ab)^x \text{ et } (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

On retrouve les graphes de quelques fonctions exponentielles à la figure 1.28.

Pour $f(x) = b^x$, on déduit de la figure 1.28 que le domaine de f est \mathbb{R} et que son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. On remarque de plus que f est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $0 < b < 1$.

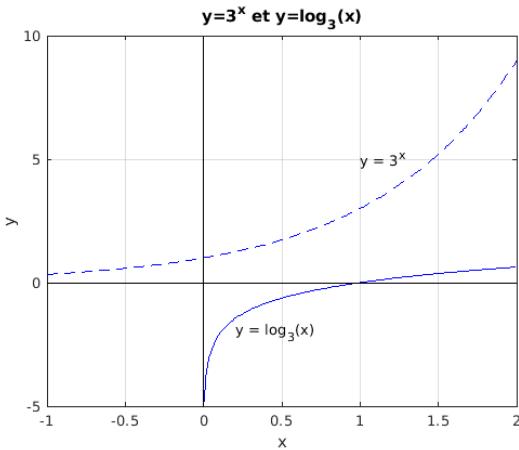


FIGURE 1.29 – Graphes de $y = 3^x$ (tirets) et de $y = \log_3(x)$ (pleine ligne)

1.6.2 Fonctions logarithmiques

La fonction logarithmique n'est rien d'autre que la fonction inverse de $f(x) = b^x$ où b , la **base**, est un nombre réel positif. Si on applique la définition de l'inverse d'une fonction à la fonction b^y , on obtient :

Définition 1.6.4

La **fonction logarithmique** \log_b est définie par

$$y = \log_b(x) \quad \text{si et seulement si} \quad b^y = x$$

pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

On donne à la figure 1.29, le graphe des fonctions $f(x) = b^x$ et $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ pour $b = 3$. Puisque le domaine de $f(x) = b^x$ est \mathbb{R} et son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, on trouve bien que le domaine de \log_b est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et son image est \mathbb{R} .

Puisque $y = \log_b(x)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir x (i.e. pour que $b^y = x$), il est alors simple de vérifier à partir de cet énoncé que les fonctions logarithmiques satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 1.6.5

Si a , b , x et y sont des nombres positifs réels et p est un nombre réel, on a :

$$\log_b(x^p) = p \log_b(x) , \quad (1.6.1)$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad (1.6.2)$$

et

$$\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x) . \quad (1.6.3)$$

Exemple 1.6.6

Si b , x et y sont des nombres positifs réels, alors

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

car

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x y^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1}) = \log_b(x) - \log_b(y) ,$$

où la deuxième égalité provient de (1.6.2) et la troisième égalité provient de (1.6.1). 

Exemple 1.6.7

Démontrer à partir de la définition du logarithme que $\log_b(x^p) = p \log_b(x)$.

Si $y = \log_b(x^p)$ alors $b^y = x^p$ par définition du logarithme. Donc, $b^{y/p} = x$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_b(x) = y/p$. Ainsi, si on résout cette dernière équation pour y on trouve $p \log_b(x) = y = \log_b(x^p)$. 

Exemple 1.6.8

Démontrer que $\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x)$ à partir de la définition du logarithme.

Si $v = \log_a(x)$ et $w = \log_a(y)$, alors $a^v = x$ et $a^w = y$ par définition du logarithme. On obtient de $a^w = y$ que $a = y^{1/w}$. Si on substitue cette expression pour a dans $a^v = x$, on trouve $x = (y^{1/w})^v = y^{v/w}$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_y(x) = \frac{v}{w} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$ par définition de v et w . 

Exemple 1.6.9

Un modèle fréquemment utilisé pour décrire une population est de la forme $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$ où $P(t)$ est le nombre d'individus au temps t , P_0 est le nombre initial d'individus, et α est le « taux de croissance relatif ». Le taux de croissance relatif est défini comme étant le taux de croissance (instantané) au temps t divisé par le nombre total d'individus au temps t . Dans ce modèle, on suppose que ce rapport est constant et égale à α . Nous justifierons ce modèle au chapitre 8 sur les équations différentielles.

On veut déterminer le temps nécessaire pour que la population soit 2.5 plus grande si $\alpha = 1.5$. On suppose que le temps est mesuré en heures.

On cherche t tel que $P(t) = 2.5P_0$. C'est-à-dire, on cherche t tel que $P_0e^{1.5t} = 2.5P_0$. Ainsi,

$$P_0e^{1.5t} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{1.5t} = 2.5 \Rightarrow 1.5t = \ln(e^{1.5t}) = \ln(2.5) \Rightarrow t = \frac{\ln(2.5)}{1.5} \approx 0.61086 .$$

Il faut donc approximativement 0.61086 heure pour que la population soit 2.5 fois plus grande.

Si la population prend 3 jours pour être 2.5 plus grande, quel est le taux de croissance relatif ?

On a $P(3) = 2.5P_0$. Donc,

$$P_0e^{3\alpha} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{3\alpha} = 2.5 \Rightarrow 3\alpha = \ln(e^{3\alpha}) = \ln(2.5) \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2.5)}{3} \approx 0.3054 .$$

Quelle est le nombre initial d'individus si $\alpha = 0.5$ et on a 10^6 individus après 10 jours ?

On a $10^6 = P(10) = P_0e^{0.5 \times 10}$. Donc, $P_0 = \frac{10^6}{e^5} \approx 6738$ individus. 

1.7 Exercices

Note : Quelques unes des questions feront usage du nombre d'Euler $e = 2.718281828459\dots$ que nous définirons correctement à la section 2.3. Comme pour π , ce nombre se retrouve sur toutes les calculatrices scientifiques car il joue un rôle fondamental en mathématique.

Question 1.1

Simplifiez si possible les expressions suivantes :

a) $(3^4)^{0.5}$

b) $2^{2^3} \times 2^{2^2}$

c) $\log_3(1)$

d) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20)$

e) $\log_{10}(500) - \log_{10}(50)$

f) $\log_{42.3}(42.3^7)$

Question 1.2

Factorisez les polynômes suivants :

a) $x^2 + x - 6$

b) $3x^2 - 5x - 2$

c) $x^{3/2} + x^{1/2} - 12x^{-1/2}$

Question 1.3

Résolvez les équations suivantes :

a) $7 \times 5^{3x} = 21$

b) $4 \times 3^{-2x+1} = 7^{3x}$

Question 1.4

Résolvez les équations suivantes :

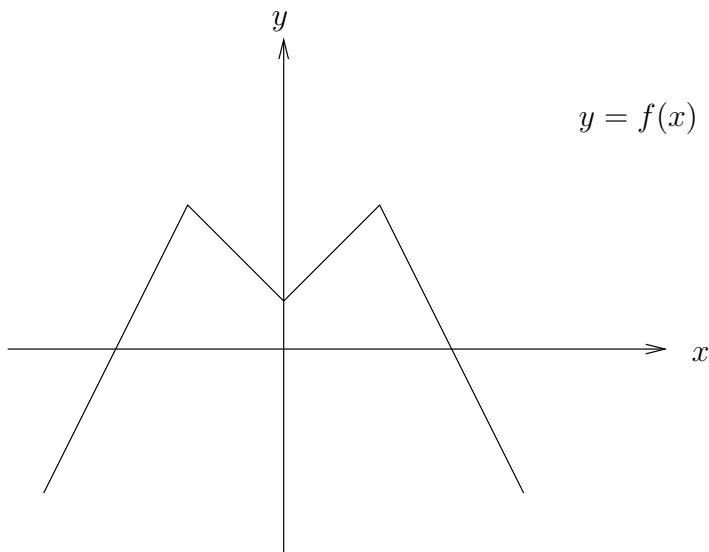


FIGURE 1.30 – La figure pour la question 6

a) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$

b) $\ln(x-3) + \ln(x-5) = \ln(2x-6)$

c) $|x-2| = 5$

d) $|x-2| = |2x-5|$

Question 1.5

Résolvez les inégalités suivantes.

a) $\frac{x^2}{x+2} < 1$

b) $\frac{x}{x-3} < \frac{-6}{x+1}$

c) $|x-2| < 5$

d) $|x^2 - 2x - 5| < |x-1|$

Question 1.6

Une fonction f est définie par le graphique de la figure 1.30. Déterminez si f est injective.

Question 1.7

Déterminez si les fonctions suivantes ont un inverse. Si une fonction a un inverse, trouvez cet inverse. Bien indiquer le domaine et l'image de la fonction et de son inverse.

a) $g(x) = 5^{x^3}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{10}$

Question 1.8

Écrivez les fonctions suivantes comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x , $\log_b(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

a) $f(x) = \frac{5}{1+5^x}$

b) $h(t) = (1-t^2)^{-4}$

Question 1.9  

Écrivez la fonction $g(x) = \cos(\sqrt{1+x^2})$ les fonctions suivantes comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x , $\log_b(x)$, $\cos(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

Question 1.10  

Vérifiez les identités trigonométriques suivantes pour $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ et π .

- a) $\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$.
- b) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Question 1.11  

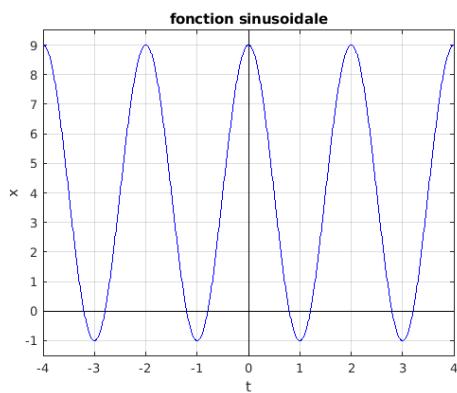
Récrivez les fonctions sinusoïdales suivantes sous la forme standard $f(t) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$ où $A > 0$.

- a) $f(t) = 2 - \cos(t)$
- b) $g(t) = 2 + \sin(t)$

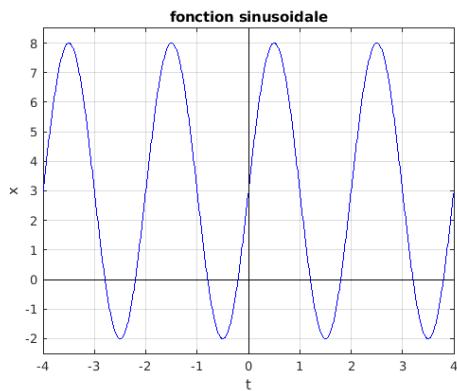
Question 1.12  

Quelle est la moyenne, l'amplitude, la période et la phase de la fonction sinusoïdale qui possède le graphe suivant.

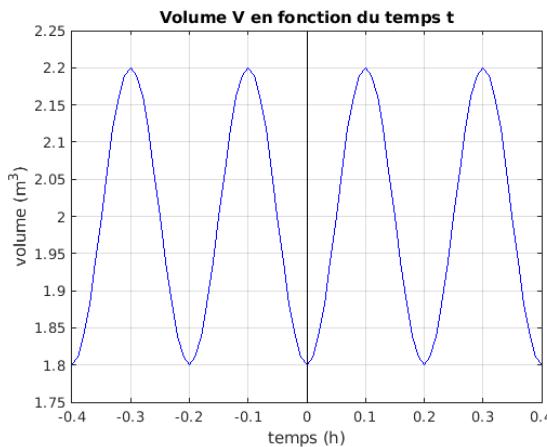
a)



b)



c)

**Question 1.13** 🔔 🌲

Pour chacune des fonctions sinusoïdale suivantes, déterminez la moyenne, l'amplitude, la période et la phase. De plus, Tracez le graphe de la fonction. Bien indiquer sur votre dessin la moyenne, l'amplitude, la période et la phase.

a) $h(z) = 1 + 5 \cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = 6 \sin(3x - 6) - 4$

c) $W(y) = -2.0 + 3.0 \cos(4\pi(y + 0.1))$

Question 1.14 🔔 🌲

Montrez que $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1 < x < 1$.

Question 1.15

Quelques valeurs de deux fonctions sont données dans le tableau ci-dessous. Une des fonctions est linéaire (de la forme $mx + b$) et l'autre est exponentielle (de la forme pb^x). Trouvez une formule pour chacune des fonctions.

x	2	4	6	8
f(x)	0.75	0.1875	0.046875	0.011719
g(x)	5.7	10.3	14.9	19.5

Question 1.16 🔔 🌲

Tracez le graphe de la fonction $g(t) = e^t \cos(2\pi t)$ pour $0 < t < 3$. On ne cherche pas un graphe très précis mais un graphe qui décrit bien le comportement qualitatif de la fonction.

Question 1.17 🔔 🌲

Tracez le graphe de la fonction $W(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ pour $t \geq 0$. On ne cherche pas un graphe très précis mais un graphe qui décrit bien le comportement qualitatif de la fonction.

Question 1.18

Le poids S en kilogrammes d'un individu au temps t en jours est donnée par la formule $S(t) = S_0 10^{\alpha t}$ où le poids initial est $S_0 = S(0) = 2.34$ kg et le taux de croissance par rapport

au poids de l'individu² est $\alpha = 0.693$. Combien de temps faut-il pour que le poids de l'individu double ? Pour que le poids soit 10 fois plus grand ?

Question 1.19

La population d'un territoire double à tous les 24 ans. Si la population initiale est de 500 individus (par km²), quel sera le nombre d'individus (par km²) après 12 années ? Il faut se rappeler que le nombre d'individus dans la population au temps t en années est donné par une formule de la forme $p(t) = p_0 e^{\alpha t}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et α est une constante représentant le taux de croissance par rapport à la taille de la population.

Suggestion : vous pouvez déterminer α à l'aide du temps nécessaire pour que la population double.

Question 1.20

Le volume (en cm³) d'un organisme au temps t (en seconde) est donné par l'expression $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$. Quelles sont les unités de α ? Si $V_0 = 2$ et $\alpha = 0.1$, combien faut-il de temps pour que le volume double ? Pour qu'il quadruple ?

Question 1.21

La quantité de Carbone-14 (en atomes) que l'on retrouve dans les os d'un animal, t années après son décès, est donnée par $Q(t) = Q_0 e^{-0.000122 t}$ où Q_0 est la quantité de carbone-14 au moment du décès. Quelle est la demie-vie du carbone-14 ?

Question 1.22

Si une population a une demie-vie de 43 ans et le nombre d'individus au départ est de 1600 (par m²), combien de temps faut-il pour que la population soit de 200 individus (par m²) ? Trouvez une formule pour le nombre $P(t)$ d'individus (par m²) au temps t dans cette population. Combien faut-il de temps pour que la population soit de 437 individus (par m²) ?

2. Le fait que α représente le taux de croissance par rapport au poids de l'individu sera justifié au chapitre 8 sur les équations différentielles.



Suites et séries



2

Au chapitre précédent, on a introduit les fonctions ; les objets sur lesquels nous travaillerons tout au long de cet ouvrage. Ce ne sont pas toutes les fonctions qui nous intéressent. Par exemple, on est intéressé aux fonctions qui peuvent représenter des phénomènes naturels qui évoluent de façon continue dans le temps et qui ont des comportements prévisibles. Les fonctions qui représentent ce genre de phénomènes sont généralement continues ou même differentiables. Pour définir ces propriétés, nous aurons besoin des concepts de limite d'une suite et de limite d'une fonction en un point. Certaines fonctions ne peuvent être définies de façon simple comme, par exemple, à l'aide d'une expression algébrique. Nous aurons besoin du concept de séries pour définir ces fonctions. C'est le cas en particulier de la fonction e^x . Ce sont ces concepts que nous présentons dans ce chapitre.

2.1 Suites

Définition 2.1.1

Une **suite** est un ensemble infini et ordonné de nombres. Les nombres qui forment une suite sont appelés les **termes** de la suite. Par exemple, $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ représente une suite de nombres où a_1 est le **premier terme** de la suite, a_2 est le **deuxième terme** de la suite, ainsi de suite.

Les termes de la suite sont généralement donnés par une fonction $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; c'est-à-dire, $a_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. On dénote alors la suite par $\{f(n)\}_{n=1}^\infty$.

Exemple 2.1.2

La suite $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^\infty$ est la suite formée des termes

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots\right\}$$

alors que la suite $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^\infty$ est la suite formée des termes

$$\left\{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}.$$



Exemple 2.1.3

La procédure pour générer certaines suites demande plus qu'une simple fonction $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. C'est le cas de la **suite de Fibonacci**. On choisit a_1 et a_2 . Les autres termes de la suites sont générés par $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour $n = 2, 3, 4, \dots$. En d'autres mots, chaque terme de la suite est le résultat de la somme des deux termes qui le précède.

La suite de Fibonacci la plus classique est lorsque $a_1 = a_2 = 1$. On obtient la suite

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}.$$



Nous sommes souvent intéressés par le comportement asymptotique des termes de la suite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 2.1.4

On dit que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers un nombre L (lorsque n tend vers l'infini) si, pour chaque valeur $\epsilon > 0$, il existe un entier N (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

En d'autre mots, Quel que soit le nombre ϵ qui est donné, on a que la distance entre L et a_n est plus petite que ϵ à partir d'un indice N . On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Le nombre L est appelé la **limite** de la suite.

S'il n'existe pas de valeur L qui satisfait la définition ci-dessus, on dit que la suite **diverge**.

Exemple 2.1.5

Il est intuitivement claire que la suite

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

tend vers 0. On peut vérifier que la définition de limite est satisfaite par $L = 0$. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $N > 1/\epsilon$ ¹ pour obtenir que $|a_n - 0| = 1/n \leq 1/N < \epsilon$ pour $n \geq N$.



Exemple 2.1.6

La suite

$$\left\{ \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots \right\}$$

1. L'existence de N est une conséquence du principe d'Archimède

tend vers 1.

En effet, pour ϵ donné, il suffit de prendre $N > 2(1-\epsilon)/\epsilon$ pour obtenir $|a_n - 1| < \epsilon$ lorsque $n \geq N$. En effet,

$$n > \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon} \Rightarrow n\epsilon > 2 - 2\epsilon \Rightarrow \epsilon(n+2) > 2 \Rightarrow \epsilon > \frac{2}{n+2} = 1 - \frac{n}{n+2} = |a_n - 1|$$

Par exemple, si $\epsilon = 10^{-5}$, il faut prendre $N > 2(1 - 10^{-5})/10^{-5} = 199998$.



Remarque 2.1.7

- On utilise aussi l'expression « $a_n \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$ » pour dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- Il est souvent très utile d'explorer numériquement le comportement d'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; c'est-à-dire, d'évaluer a_n pour de très grandes valeurs de n dans l'espoir d'obtenir des termes qui approchent une constante L quelconque. Cela ne démontre pas que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L mais cela nous permet de conjecturer la limite de la suite. Il faut vérifier que la définition de limite ci-dessus est satisfaite pour pouvoir dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers la constante L obtenue numériquement.
- La définition de limite ci-dessus revient à dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L si et seulement si la suite $\{|a_n - L|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0 .$$

En d'autres mots, la distance $|a_n - L|$ entre a_n et L approche 0 lorsque n augmente.



La limite de suites possède les propriétés suivantes qui permettront d'évaluer facilement les limites de certaines suites.

Théorème 2.1.8

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_a et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_b , alors :

- La suite $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a + L_b$. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

- La suite $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a L_b$. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) .$$

- Si $b_n \neq 0$ pour tout n et $L_b \neq 0$, alors la suite $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\frac{L_a}{L_b}$. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

Exemple 2.1.9

Soit c une constante quelconque. Il est facile de voir que la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = c$ pour tout n est c . On peut utiliser cette information pour trouver la limite de la suite $\left\{\frac{5n+2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. En effet, grâce au théorème précédent, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + 2 \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 + 2 \times 0 = 5.$$

**Théorème 2.1.10 (des gendarmes ou sandwich)**

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ deux suites qui tendent vers L . Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite telle que $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout n , alors la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers L .

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendent vers L , il existe $N \geq 0$ tel que $|a_n - L| < \epsilon$ et $|c_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$$

pour $n \geq N$. C'est-à-dire que $|b_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. 

Exemple 2.1.11

Montrons que la limite de la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $b_n = n^{1/n}$ est 1.

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = 1$ pour tout n satisfait $a_n \leq b_n$ pour tout n .

De plus, si $x_n = b_n - 1$, on a

$$n = b_n^n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \dots + x_n^n.$$

Comme c'est une somme de termes positifs, on a

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Si on isole x_n on trouve

$$x_n \leq \sqrt{2/n}, \quad n \geq 1.$$

Ainsi, la suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $c_n = 1 + \sqrt{2/n}$ pour tout n satisfait

$$b_n = 1 + x_n \leq 1 + \sqrt{2/n} = c_n$$

pour tout n .

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{2/n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2/n} = 1$$

car on peut facilement montrer à partir de la définition de limite que la suite $\{\sqrt{2/n}\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers 0.

Puisque $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq 1$, on obtient du Théorème des gendarmes que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. ♣

Le résultat suivant est quelques fois utile.

Théorème 2.1.12

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 si et seulement si la suite $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

Démonstration ☺

$\Rightarrow)$ Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $||a_n| - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

$\Leftarrow)$ Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $||a_n| - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. ■

Il est très utile de pouvoir caractériser le comportement des suites lorsque n tend vers l'infini.

Définition 2.1.13

1. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout n .
2. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout n .
3. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée supérieurement** s'il existe un nombre réel M tel que $a_n \leq M$ pour tout n . Le nombre M est appelé une **borne supérieure** pour la suite.
4. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée inférieurement** s'il existe un nombre réel m tel que $a_n \geq m$ pour tout n . Le nombre m est appelé une **borne inférieure** pour la suite.
5. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée** si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Le concept de convergence peut aussi être adapté aux suites non-bornées.

Définition 2.1.14

On dit qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge (ou tend) vers $+\infty$ (plus l'infini) si pour chaque $M > 0$ il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

On dit qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge (ou tend) vers $-\infty$ (moins l'infini) si pour chaque $M < 0$ il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n < M$ pour tout $n \geq N$. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Exemple 2.1.15

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = n^2 + 1$ tend vers plus l'infini. En effet, si $M \geq 1$ est un nombre quelconque, il suffit de prendre $N > \sqrt{M-1}$ pour obtenir

$$a_n = n^2 + 1 \geq N^2 + 1 > (\sqrt{M-1})^2 + 1 = M$$

pour tout $n \geq N$.

**Exemple 2.1.16**

Le fait qu'une suite ne soit pas bornée n'implique pas qu'elle tende vers plus ou moins l'infini. Par exemple, la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1/n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

n'est pas bornée car il y a des termes qui sont aussi grands que l'on veut. Par contre, cette suite ne tend pas vers plus l'infini car il est impossible de trouver $N > 0$ tel que $a_n > 1$ pour $n \geq N$. Les termes a_n avec n impair et plus grand que 1 sont tous plus petits que 1.



Les deux propositions suivantes nous donnent la limite de certaines suites que l'on retrouve fréquemment dans les applications.

Proposition 2.1.17

Soit r un nombre réel. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } -1 < r < 1 \end{cases}.$$

La suite $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas pour $r \leq -1$.

Proposition 2.1.18

Soit r un nombre réel. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases}.$$

Exemple 2.1.19

Évaluez les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 4}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Pour calculer la limite en (a), on utilise les théorèmes 2.1.8 et 2.1.18 pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 2/n + 4/n^2} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2/n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0. \end{aligned}$$

Pour évaluer la limite en (b), on utilise le Théorème des gendarmes. Puisque

$$0 \leq \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

pour tout n , la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $b_n = |\cos(n)/n^2|$ tend vers 0 car les suites $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $a_n = 0$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $c_n = 1/n^2$ tendent vers 0. Puisque la suite $\left\{ \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il en est de même de la suite $\left\{ \frac{\cos(n)}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ grâce au théorème 2.1.12. Donc, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0.$$

**Théorème 2.1.20**

Toute suite croissante et bornée supérieurement converge. De même, toute suite décroissante et bornée inférieurement converge. Dans le premier cas, la limite est la plus petite borne supérieure ^a de la suite alors que dans le deuxième cas c'est la plus grande borne inférieure de la suite.

a. L'**Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure. Il en découle aussi que tout ensemble non vide et borné inférieurement possède une plus grande borne inférieure.

Démonstration

On considère le cas où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite décroissante et bornée inférieurement. La démonstration pour une suite croissante et bornée supérieurement est semblable. Soit m la plus grande borne inférieure de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $m + \epsilon > m$ n'est pas une borne inférieure de la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, il existe $N > 0$ tel que $m \leq a_N < m + \epsilon$. Puisque la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est décroissante, on a $m \leq a_n < m + \epsilon$ pour $n \geq N$. C'est-à-dire, $|a_n - m| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$. 

Exemple 2.1.21

Trouver la limite de la suite

$$\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \right\}.$$

Cette suite est produite de façon itérative. C'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour $n = 1, 2, \dots$

On remarque que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée supérieurement par 2. Cela se démontre par induction. On a $a_1 < 2$. Supposons que $a_n < 2$. Alors, $2a_n < 4$ et

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

Donc, $a_n < 2$ pour tout n par induction.

De plus, on remarque que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Cela se démontre aussi par induction. En fait on montre par induction que

$$a_{n+1} = 2^{1/2^{(n+1)}} a_n \quad (2.1.1)$$

pour tout n . Puisque $2^{1/2^{(n+1)}} > 1$, on obtient alors que $a_{n+1} > a_n$ pour tout n . L'équation (2.1.1) est vrai pour $n = 1$ car

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/2^2}\sqrt{2} = 2^{1/2^2}a_1.$$

Supposons que l'équation (2.1.1) soit vrai pour n et montrons qu'elle est alors vrai pour $n + 1$. On a

$$a_{n+2} = \sqrt{2a_{n+1}} = \sqrt{2(2^{1/2^{(n+1)}} a_n)} = \sqrt{2a_n} \sqrt{2^{1/2^{(n+1)}}} = a_{n+1} 2^{1/2^{(n+2)}}.$$

La deuxième égalité est une conséquence de l'hypothèse d'induction. Ce qui démontre que (2.1.1) est vrai pour $n + 1$ et complète la preuve par induction.

On a donc que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante et bornée supérieurement. Il découle du théorème précédent que la suite converge. Appelons L la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La suite $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers L car c'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auquel on a enlevé le premier terme. De plus, on peut montrer à partir de la définition de limite d'une suite que $\{\sqrt{2a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\sqrt{2L}$. Puisque $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour tout n , on a donc que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2L}.$$

La limite L doit donc satisfaire l'équation $L^2 - 2L = L(L - 2) = 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante de termes positifs, on doit avoir $L = 2$. 

2.2 Séries

Si a_1, a_2, \dots, a_n sont n nombres réels, le symbole $\sum_{k=1}^n a_k$ dénote la somme de ces nombres. En d'autres mots,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

De façon générale, si $k_1 \leq k_2$ sont deux nombres entiers et a_k pour $k_1 \leq k \leq k_2$ sont des nombres réels, on a

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = a_{k_1} + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}.$$

En générale, on a que $a_k = f(k)$ pour une fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = \sum_{k=k_1}^{k_2} f(k) = f(k_1) + f(k_1+1) + f(k_1+2) + \dots + f(k_2).$$

Exemple 2.2.1

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^8 \underbrace{k^2}_{=f(k)} &= \underbrace{3^2}_{=f(3)} + \underbrace{4^2}_{=f(4)} + \underbrace{5^2}_{=f(5)} + \dots + \underbrace{8^2}_{=f(8)} \\ &= 9 + 16 + 25 + \dots + 64 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \underbrace{\frac{1}{k^2+1}}_{=f(k)} &= \underbrace{\frac{1}{1^2+1}}_{=f(1)} + \underbrace{\frac{1}{2^2+1}}_{=f(2)} + \underbrace{\frac{1}{3^2+1}}_{=f(3)} + \dots + \underbrace{\frac{1}{6^2+1}}_{=f(6)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{37} \end{aligned}$$



Il découle de la commutativité de l'addition et de la distributivité du produit sur l'addition que

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} ca_n = c \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=k_1}^{k_2} (a_n + b_n) = \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n + \sum_{n=k_1}^{k_2} b_n ,$$

où c , a_n et b_n pour $k_1 \leq n \leq k_2$ sont des nombres réels.

Proposition 2.2.2

Certaines sommes sont fréquemment utilisées.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 1 &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n , & \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} , \\ \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} , & \sum_{k=0}^n k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^3 + 3n - 1)}{30} .$$

Remarque 2.2.3

Commençons par démontrer la deuxième identité. Posons $S = \sum_{k=1}^n k$, on a donc

$$\begin{aligned} S &= \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \dots + \boxed{(n-1)} + \boxed{n} \\ S &= \underbrace{\boxed{n} + \boxed{(n-1)} + \boxed{(n-2)} + \dots + \boxed{2} + \boxed{1}}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

Si on fait la somme de ces deux équations, on obtient $2S = n(n+1)$. Donc

$$\sum_{k=0}^n k = S = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Nous donnons deux démonstrations de la troisième identité.

La première démonstration ne fait pas appel au principe d'induction. On considère la séries télescopique $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) &= (2^3 - 1) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \dots + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) \\ &= -1 + (2^3 - 2^3) + (3^3 - 3^3) + \dots + (n^3 - n^3) + (n+1)^3 \end{aligned}$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) &= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n . \end{aligned}$$

Ainsi

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 .$$

Si on résout pour $\sum_{k=1}^n k^2$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

La deuxième démonstration utilise la principe d'induction. L'hypothèse d'induction est

$$P(n) : \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

$P(1)$ est vrai car, pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 .$$

On suppose que $P(n)$ est vrai. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) (n+1) = \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} (n+1) \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{6} (n+1) , \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'hypothèse d'induction. Cette dernière expression n'est nul autre que $P(n+1)$. Par induction, on conclut que $P(n)$ est vrai pour tout n .

La démonstration des autres identités est laissée au lecteur.



Exemple 2.2.4 ☺

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 4k + 1) &= 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 2 \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} + 4 \frac{10(10+1)}{2} + 7 = 1000\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (4k^2 + nk) &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 + n \sum_{k=1}^n k \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(11n+4)(n(n+1))}{6}\end{aligned}$$



Définition 2.2.5

Soit a_1, a_2, a_3, \dots une suite de nombres réels. Posons

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots$

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est définie comme étant la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est appelée une **série**, les a_n sont les **termes** de la série, et les termes S_k de la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont appelés les **sommes partielles** de la série.

On dit aussi que la série **converge** si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles converge. Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles diverge, on dit que la série **diverge**.

Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles tend vers $S \in \mathbb{R}$, on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

et on dit que la **somme** de la série est S . Par abus de langage, on désigne souvent la somme de la série par $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. C'est le contexte qui détermine le sens donné à

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exemple 2.2.6

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. On démontrera plus loin que cette série ne converge pas.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{\sin(n)}{n^2 + n} = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{6} + \frac{\sin(3)}{12} + \dots + \frac{\sin(k)}{k^2 + k}.$$

On démontrera plus loin que cette série converge. ♣

Exemple 2.2.7 Série géométrique

Soit r un nombre réel. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ et diverge si $|r| \geq 1$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ est très importante en mathématiques et, pour cette raison, on lui a donné un nom. On appelle cette série la **série géométrique**. La valeur r est appelée la **raison** de la série géométrique.

Les sommes partielles de la série géométrique sont de la forme

$$S_k = 1 + r + r^2 + \dots + r^k$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$ Ainsi

$$rS_k = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k+1}$$

et

$$(1 - r)S_k = S_k - rS_k = 1 - r^{k+1}.$$

Donc,

$$S_k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$. Pour $|r| < 1$, il découle du théorème 2.1.18 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Si $r \leq -1$, la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ ne converge pas. Donc, la suite des sommes partielles ne converge pas si $r \leq -1$. Si $r > 1$, on sait que la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Ce qui

implique que la suite des sommes partielles tend aussi vers plus l'infini. De même, si $r = 1$, on obtient que $S_k = k + 1$ pour tout k et la suite des sommes partielles tend donc vers plus l'infini.



En résumé, on a :

Proposition 2.2.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad , \quad |r| < 1 ,$$

et la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Pour déterminer si une série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ est une série géométrique, il faut vérifier que $a_{j+1}/a_j = r$, la raison de la série, pour tout j . Si c'est le cas, on a alors que $a_j = a_0 r^j$ pour tout j et $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} r^j$.

Exemple 2.2.9

Déterminer si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ?

Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$$

est une série géométrique de raison $r = 1/25$, elle converge car $|r| < 1$. En fait,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{1 - (1/25)} = \frac{25}{24} .$$



Exemple 2.2.10

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}}$ converge ou diverge.

Les termes de la série sont $\frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\frac{7}{25}\right)^n$. Ainsi, la série est une série géométrique de raison $7/25$. Comme la raison est plus petite que 1 en valeur absolue, la série converge.



Théorème 2.2.11

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont deux séries convergentes et c est un nombre réel, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ sont des séries convergentes. De plus, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA .$$

Démonstration 

Le théorème précédent est une conséquence du théorème 2.1.8. En effet, considérons les sommes partielles suivantes :

$$A_k = \sum_{n=1}^k a_n , \quad B_k = \sum_{n=1}^k b_n , \quad C_k = \sum_{n=1}^k c a_n \quad \text{et} \quad D_k = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n) .$$

On a $C_k = c A_k$ et $D_k = A_k + B_k$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c A_k = c \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = cA$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_k + B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k + \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = A + B .$$

■

Exemple 2.2.12 

Déterminez si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4^{n-1}}{5^n}$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ?

On a

$$\frac{3 - 4^{n-1}}{5^n} = 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^n .$$

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n$$

sont des séries géométriques de raisons $r = 1/5$ et $r = 4/5$ respectivement. Puisque dans les deux cas $|r| < 1$, ces séries convergent. Plus précisément, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/5)} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (4/5)} = 5 .$$

Ainsi, grâce au théorème précédent, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4^{n-1}}{5^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{2} .$$



Exemple 2.2.13

Déterminez si la série

$$-3 + \frac{6}{5} - \frac{12}{25} + \frac{24}{125} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ? Que peut-on dire au sujet de la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n ? \tag{2.2.1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $r = -2/5$. Puisque $|r| < 1$, cette série converge. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (-2/5)} = \frac{5}{7} .$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3 \frac{5}{7} = \frac{-15}{7} .$$

Pour étudier la série (2.2.1), on pose

$$S_k = \sum_{n=0}^k (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=3}^k (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n .$$

Pour $k \geq 3$, on a

$$T_k = S_k - \sum_{n=0}^2 (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n = S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} \right) \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n \right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} \end{aligned}$$

$$= \frac{-15}{7} + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \frac{24}{175} .$$


Exemple 2.2.14 (Série télescopique) 🔧

Déterminez si la série suivante converge et, si elle converge, donner sa valeur.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} . \quad (2.2.2)$$

À l'aide de la méthode des fractions partielles, on obtient

$$\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$$

pour tout $n \geq 3$. Ainsi, les sommes partielles de la série (2.2.2) sont

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=3}^k \frac{2}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^k \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5} \right) + \dots + \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 3$. Le premier terme à l'intérieur d'une parenthèse est annulé par le deuxième terme à l'intérieur de la parenthèse précédente sauf pour le premier terme de la première parenthèse. On a donc

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} = 1 .$$

Les séries pour lesquelles les sommes partielles peuvent être réduites grâce à une procédure permettant d'annuler une partie d'un terme à l'aide d'une partie du terme suivant comme on a fait ci-dessus (une procédure qui rappelle le mécanisme utilisé pour ranger les télescopes rétractiles) sont appelées des **séries télescopiques**.


Exemple 2.2.15 🔍 🔧

Montrez que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Les sommes partielles sont $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. On montre par induction que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = +\infty .$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne peut pas tendre vers un nombre réel S car c'est une suite de termes croissants dont les termes S_{2^k} tendent vers l'infini.

On montre par induction que

$$S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \quad (2.2.3)$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots$.

Puisque $S_2 = 1 + 1/2$, on a que (2.2.3) est vrai pour $k = 1$. Supposons que l'inégalité (2.2.3) soit vraie et montrons qu'elle est aussi vraie si on remplace k par $k + 1$. On a

$$\begin{aligned} S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= S_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k}}_{2^k \text{ termes } \geq 1/2^{k+1}} \\ &\geq S_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} \\ &\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne (2.2.3) si on remplace k par $k + 1$.

On a donc démontré par induction que $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \geq 0$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$. Puisque la suite $\{1 + k/2\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini, il en est de même pour la suite $\{S_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$. ♣

Proposition 2.2.16

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

Remarque 2.2.17 🔑

Une démonstration élémentaire de ce théorème existe. Cette démonstration ne sera pas donnée mais, à sa place, le théorème précédent sera démontré à l'aide du test de l'intégrale qui sera énoncé à la section 7.10 du chapitre sur les applications de l'intégrale. ♠

Théorème 2.2.18

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Démonstration 🔍

Pour démontrer le théorème précédent, posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Puisque les suites $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{S_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tendent vers S , il découle du théorème 2.1.8 que la suite $\{S_{n+1} - S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ tend vers $S - S = 0$. ■

Remarque 2.2.19

Il est **faux** de dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La série harmonique est la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = 1/n$. Il est vrai que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mais la série harmonique diverge.

**2.2.1 Tests de convergence**

On présente des méthodes pour déterminer si une série converge ou diverge. Il faut démontrer qu'une série converge avant d'essayer d'estimer la limite de ses sommes partielles (soit analytiquement ou numériquement à l'aide d'un ordinateur). Il y a peu de séries pour lesquelles on possède une formule pour déterminer exactement la somme, il faut donc bien souvent utiliser un ordinateur pour estimer la valeur des séries convergentes.

Le critère de convergence suivant découle du théorème 2.2.18.

Théorème 2.2.20

Si la suite des termes $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.21

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 1}$ diverge car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{1 + 1/n} = \frac{\sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = 1 \neq 0.$$

**Exemple 2.2.22**

Démontrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}}$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \frac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\frac{49}{25}\right)^n$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ et la série diverge.



On aurait aussi pu dire que la série est une série géométrique de raison $49/25 > 1$. Comme la raison est plus grande que 1 en valeur absolue, la série diverge.

Exemple 2.2.23

Démontrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \arctan(n)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi/2 \neq 0$, la série diverge.



La théorème suivant est une conséquence du théorème 2.1.20.

Théorème 2.2.24 (Test de comparaison)

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs ou nuls.

1. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout n , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout n , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.25

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5 + 1}}$ converge car

$$\frac{n}{\sqrt{n^5 + 1}} < \frac{1}{n^{3/2}} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge grâce au théorème 2.2.16.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + n^{1/3}}$ diverge car

$$\frac{2}{1 + n^{1/3}} \geq \frac{2}{n^{1/3} + n^{1/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge grâce au théorème 2.2.16.



Exemple 2.2.26

Déterminez si la séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ pour tout $n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison $1/3$), on en déduit à partir du test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge.



Exemple 2.2.27

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^5 + 4n}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \frac{n}{5n^5 + 4n} \leq \frac{1}{5n^4}$ pour tout $n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4}$ est une série convergente

(théorème 2.2.16 avec $p > 1$), on obtient du test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^5 + 4n}$ converge.



Exemple 2.2.28

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{(5n^5 + n^4)^{1/3}}$ converge ou diverge.

On a que

$$\frac{\sqrt{n^3 + 2}}{(5n^5 + n^4)^{1/3}} = \frac{n^{3/2}(1 + 2/n^3)^{1/2}}{n^{5/3}(5 + 1/n)^{1/3}} = \frac{n^{1/6}(1 + 2/n^3)^{1/2}}{(5 + 1/n)^{1/3}} \geq \frac{1}{6^{1/3}n^{1/6}}.$$

pour tout $n > 0$ car $1 + 2/n^3 > 1$ et $5 + 1/n < 6$ pour tout $n > 0$. De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{1/3}n^{1/6}} =$

$\frac{1}{6^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$ est une série qui diverge (théorème 2.2.16 avec $p < 1$), on en déduit à partir du

test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{(5n^5 + n^4)^{1/3}}$ diverge.



Théorème 2.2.29 (Test de comparaison à la limite)

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs.

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in]0, \infty[$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la

série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge implique que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Remarque 2.2.30

1. L'énoncer de l'item 2 du théorème 2.2.29 peut être reformulé de la façon suivante. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge implique que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, il suffit d'inverser les rôles de a_n et b_n pour pouvoir utiliser l'item 2 du théorème 2.2.29.



Exemple 2.2.31

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 3^n}$ converge car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $1/3$) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/3^n}{1/(1 + 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 1 \in]0, \infty[.$$

Par contre, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (le cas $p = 1/2$ du théorème 2.2.16) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\ln(n)/\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

où on suppose que $n > 1$ pour ne pas avoir de division par zéro. ♣

Théorème 2.2.32 (Test de d'Alembert ou du quotient)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors :

1. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.33

Si $L = 1$ au théorème précédent, on ne peut rien dire au sujet de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Par exemple, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. La première série diverge (c'est la série harmonique) alors que la deuxième série converge (c'est le cas $p = 2$ du théorème 2.2.16). ♠

Exemple 2.2.34

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{(n+2)5^n}{n4^{3n}}$ converge car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+3)5^{n+1}}{(n+1)4^{3(n+1)}} \right) \left(\frac{(n+2)5^n}{n4^{3n}} \right)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n^2 + 3n)}{4^3(n^2 + 3n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(1 + 3/n)}{4^3(1 + 3/n + 2/n^2)} = \frac{5}{4^3} < 1 . \end{aligned}$$



Exemple 2.2.35

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ converge.

Le nombre $n!$, **prononcé n factoriel**, est le nombre défini par $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ si n est un entier positif et $n! = 1$ si $n = 0$.

On utilise le test de d'Alembert pour démontrer en fait que cette série converge. On a la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$. Puisque

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!} \left(\frac{n!}{(2n+1)!} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{4 + 10/n + 6/n^2} = 0 < 1,\end{aligned}$$

la série converge. ♣

Exemple 2.2.36

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge ou diverge.

On utilise le test du quotient. Puisque

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \right) \left(\frac{n^n}{(2n)!} \right)^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1/n + 1/n^2}{(4 + 6/n + 2/n^2)} \\ &= e \times 0 = 0 < 1,\end{aligned}$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

Le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ provient du théorème !2.3.1 que nous verrons prochainement. ♣

Théorème 2.2.37 (Test de la racine)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors

1. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.38

Comme pour le Test de d'Alembert, on ne peut rien dire au sujet de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $L = 1$ dans le théorème précédent.

Par exemple, si on utilise le fait que la suite $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1, on peut facilement montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Comme à la remarque 2.2.33, la première série diverge alors que la deuxième série converge. 

Exemple 2.2.39

La série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$ converge car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1.$$



Un autre test pour déterminer si une série de termes positifs converge est le test de l'intégrale. Ce test sera présenté à la section 7.10 du chapitre sur les applications de l'intégrale d'une fonction.

2.2.2 Convergence absolue et séries alternées

Jusqu'à maintenant, la majorité des séries que nous avons considérées ne possédaient que des termes positifs. Nous allons maintenant étudier un type particulier de séries avec des termes positifs et négatifs.

Définition 2.2.40

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une **série alternée** si $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout n .

Exemple 2.2.41

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Ainsi, $a_n > 0$ pour n pair et $a_n < 0$ pour n impair. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$



Théorème 2.2.42 (Test des séries alternées)

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ satisfait les conditions suivantes :

1. $a_n > 0$ pour tout n ,
2. $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n et
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

alors elle converge. De plus, les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ satisfont la relation

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad (2.2.4)$$

où $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Démonstration 

Nous démontrons ce théorème car la démonstration nous permet de mieux comprendre la relation (2.2.4).

Puisque $S_{2(k+1)} - S_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k-1} \leq 0$ pour tout $k \geq 1$, on obtient

$$S_{2(k+1)} \leq S_{2k} , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.5)$$

Donc,

$$\dots \leq S_6 \leq S_4 \leq S_2 .$$

De même, puisque $S_{2k+1} - S_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, on obtient

$$S_{2k+1} \geq S_{2k-1} , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.6)$$

Donc,

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots$$

De plus

$$S_{2k-1} \leq S_{2k-1} + a_{2k} = S_{2k} , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.7)$$

On déduit de (2.2.5), (2.2.6) et (2.2.7) que

$$S_q \leq S_p \quad (2.2.8)$$

pour p pair et q impair. En effet, si $q < p$ on a que

$$S_p \geq S_{p-1} \geq S_q .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.6). Si par contre $q > p$ on a que

$$S_q \leq S_{q+1} \leq S_p .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.5).

Puisque la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée inférieurement par S_q où q est impair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}.$$

De même, puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ est croissante et bornée supérieurement par S_p où p est pair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1}.$$

Puisque $B \geq S_q$ pour tout q impair grâce à (2.2.8), on déduit que $B \geq A$.

Puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers A et la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers B , on a que

$$B - A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 0.$$

grâce à la troisième hypothèse du théorème.

Pour résumé, si on pose $S = A = B$, on a montré que

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S \leq \dots \leq S_6 \leq S_4$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la relation (2.2.4). Il découle de $S_{2k-1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \leq S - S_{2k-1} \leq S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k}.$$

Ainsi $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est impair. De même, il découle de $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \geq S - S_{2k} \geq S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1}.$$

Ainsi $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est pair. On a donc démontré (2.2.4). On retrouve à la figure 2.1 une représentation graphique du raisonnement que l'on vient de faire. 

Exemple 2.2.43

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car c'est une série alternée avec $a_n = 1/n$ qui satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées. 

Exemple 2.2.44

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$ converge. De plus, trouver une petite valeur N telle

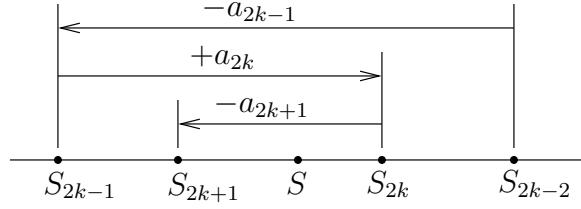


FIGURE 2.1 – Pour la série alternée du théorème 2.2.42, si on utilise S_n pour estimer la valeur S , l'erreur $|S_n - S|$ commise est plus petite ou égale à a_{n+1}

que $|S_n - S| < 10^{-3}$ si $n \geq N$ où S_n est la n^e somme partielle de la série et S est la somme de la série.

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

où la série de droite est une série alternée avec $a_n = n/(n^2 + 1)$. Puisque $a_n = n/(n^2 + 1) > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 1/n^2} = 0$$

et

$$a_{n+1} < a_n \quad (2.2.9)$$

pour tout n , on a que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$ converge.

Notez que (2.2.9) provient de la relation

$$(n+1)(n^2 + 1) = n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + n + n = n((n+1)^2 + 1)$$

pour tout $n \geq 1$.

Pour déterminer N tel que $|S_n - S| < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$, il suffit de trouver n tel que $|S_n - S| < a_{n+1} < 10^{-3}$. Pour simplifier les calculs, on choisie n tel que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{n+1} < 10^{-3}$$

Si on résout pour n , on trouve $n > 10^3 - 1$. Il suffit de prendre $N = 10^3$. ♣

D'autres applications du test des séries alternées sont données à l'exemple 5.7.24 dans le chapitre sur les applications de la dérivée d'une fonction.

Définition 2.2.45

Une série de termes réels $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si la série de termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge conditionnellement.

Remarque 2.2.46

On peut utiliser le Test de comparaison, théorème 2.2.24, le Test de comparaison à la limite, théorème 2.2.29, le Test de d'Alembert ou du quotient, théorème 2.2.32, et le Test de la racine, théorème 2.2.37, pour déterminer la convergence absolue d'une série. ♠

Exemple 2.2.47

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle satisfait le test des séries alternées. Par contre, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est la série harmonique qui diverge. Donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge conditionnellement. ♣

Comme on vient de le voir à l'exemple précédent, on peut avoir une série qui converge mais qui ne converge pas absolument. L'inverse n'est pas possible.

Théorème 2.2.48

Si une série converge absolument alors elle converge.

Démonstration ☺

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série qui converge absolument. On pose $b_n = a_n + |a_n|$ pour $n \geq 1$. On remarque que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } a_n < 0 \\ 2a_n & \text{pour } a_n \geq 0 \end{cases} .$$

Donc, $b_n - |a_n| = a_n$ pour tout $n \geq 1$.

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, on a que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge. De plus, puisque $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge, on a par le test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Finalement, puisque les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Exemple 2.2.49

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ converge car elle converge absolument. En effet,

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge grâce au théorème 2.2.16. Il découle du test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right|$ converge. ♣

2.3 Le nombre e et les fonctions e^x et $\ln(x)$

Théorème 2.3.1

La suite $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Sa limite est définie comme étant le **nombre d'Euler**

$$e = 2.718281828459\dots$$

Démonstration

Pour démontrer que cette limite existe, on utilise la formule suivante, connue sous le nom de **formule du binôme**, qui permet de développer une expression de la forme $(a + b)^n$ où n est un entier positif.

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Par exemple, on retrouve $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Montrons que la suite $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

On commence par montrer que la suite est bornée supérieurement. Grâce à la formule du binôme, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k .$$

Or

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

pour $1 \leq k \leq n$. De plus,

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k} \leq \underbrace{\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \dots \times 2}}_{k-1 \text{ fois}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour $1 \leq k \leq n$. On a donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3.$$

On montre que la suite $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante.

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Or, il découle de la formule du binôme que

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0} + \dots \\ &\quad + \underbrace{\frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}} - \frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

si n est impair et

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0} + \dots \\ &\quad + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^{2(n-2)}} - \frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}} + \frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

si n est pair. Donc,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n^3 + 3n^3 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 . \end{aligned}$$

La convergence de la série $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est donc une conséquence du théorème 2.1.20 ■

Remarque 2.3.2

Une autre façon équivalente de définir le nombre e est donnée lors de l'étude de la dérivée de fonctions exponentielles.



Définition 2.3.3

On définit $\ln(x)$ comme étant $\log_e(x)$ pour $x > 0$. C'est à dire,

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x .$$

La fonction $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'inverse de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

Remarque 2.3.4 ☺

Au risque de répéter ce qui a déjà été annoncé à la section 1.6.1, une définition simple de b^p pour $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$ sera donnée à la section ???. Cette définition fera appel aux séries.



Exemple 2.3.5

Évaluer la limite de la suite $\left\{\frac{n e^{-n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Pour ce faire, on remarque que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car c'est le cas $0 < r = e^{-1} < 1$ du théorème 2.1.17. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ (voir figure 2.2) que la limite de la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ est 0.

On peut alors conclure que la limite de la suite $\left\{\frac{n e^{-n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est aussi 0 car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n e^{-n}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-n}}{1 + 1/n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)} = \frac{0}{1 + 0} = 0 . \end{aligned}$$



Exemple 2.3.6

Évaluer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$.

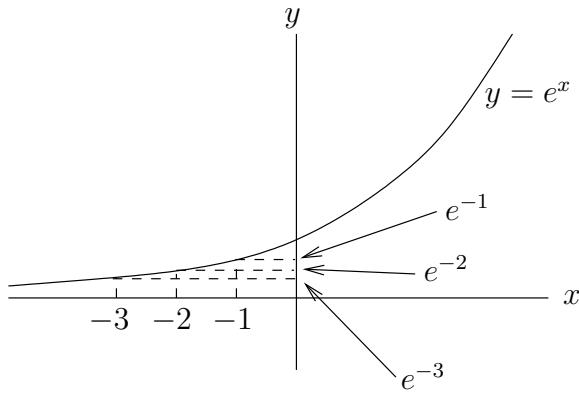


FIGURE 2.2 – La suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0

Comme à l'exemple précédent, on a que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. De plus, la suite $\{1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers 0 (c'est le cas $r = 2 > 0$ du théorème 2.1.18). Ainsi, grâce au théorème 2.1.8, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) = 0 \times 0 = 0.$$



2.3.1 Fonctions hyperboliques

Les **fonctions hyperboliques** sont :

1. le sinus hyperbolique $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
2. le cosinus hyperbolique $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
3. la tangente hyperbolique $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
4. la cotangente hyperbolique $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
5. la sécante hyperbolique $\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et
6. la cosécante hyperbolique $\operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ces fonctions sont fréquemment utilisées en ingénierie. Le graphe du sinus hyperbolique et celui du cosinus hyperbolique sont donnés à la Figure 2.3

Les fonctions hyperboliques n'apportent rien de nouveau du point de vue des mathématiques puisqu'elles proviennent de formules algébriques en termes des fonctions exponentielles

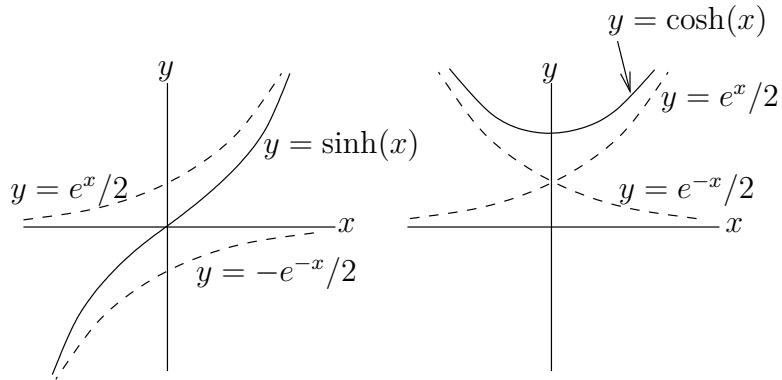


FIGURE 2.3 – Le graphe du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique

e^x et e^{-x} . Il n'en reste pas moins qu'elle permettent de présenter plusieurs résultats de façon élégante.

Les fonctions hyperboliques satisfont les identités suivantes : $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ (fonction impaire), $\cosh(-x) = \cosh(x)$ (fonction paire), $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ et bien d'autres. Elles satisfont donc des identités semblables à celles satisfaites par les fonctions trigonométriques.

Remarque 2.3.7

En fait, on montre en analyse complexe, qu'il y a un lien entre les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$, et la fonction e^z . C'est un sujet pour les étudiant.e.s qui poursuivront leurs études des mathématiques. ♠

Finalement, pour chaque fonction hyperbolique, on peut définir une fonction inverse. Par exemple, la fonction \sinh^{-1} est définie par $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour $x \in \mathbb{R}$. En effet,

$$y = \sinh^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 .$$

C'est un polynôme de degré deux en e^x . Donc, si on utilise la formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux, on obtient

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} .$$

On ne peut pas utiliser la formule $\frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$ car elle donne des valeurs négatives alors que $e^x > 0$. On a donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ pour $y \in \mathbb{R}$. Pour respecter la tradition d'avoir y en fonction de x , on échange les rôles de x et y pour obtenir $y = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

De façons semblables, on peut montrer que \tanh^{-1} est définie par $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour $-1 < x < 1$. Le domaine de \tanh^{-1} est $] -1, 1 [$, l'image de \tanh .

La fonction \cosh a aussi un inverse si on considère seulement $\cosh(x)$ pour $x \geq 0$. Sur l'intervalle $[0, \infty[$, la fonction \cosh est injective et possède donc un inverse. L'image de \cosh est $[1, \infty[$. L'inverse de \cosh est donnée par $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour $x \geq 1$.

2.4 Exercices

Question 2.1

Déterminez si les suites suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs limites.

a) $\left\{ \frac{2^n}{3^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$
d) $\left\{ 3 + \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{ \ln(n+3) - \ln(n) \right\}_{n=1}^{\infty}$
e) $\left\{ 2 + \cos(n\pi) \right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{ \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Question 2.2

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 10 mètres et elle rebondit. A chaque bond elle atteint $3/4$ de la hauteur du bond précédent. Ainsi, au premier bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)$ mètres, au deuxième bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)^2$ mètres, etc.

- a) Trouvez une expression pour la hauteur du n^e bond.
- b) Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la première, deuxième, troisième et quatrième fois.
- c) Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la n^e fois. d) Quelle sera éventuellement la distance parcourue par la balle ?

Question 2.3

Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{\sqrt[3]{n^7 + 1}}$
g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$
j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n+4}$
h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^3 + 5)^{1/3}}$
k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$
f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}}$
l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 1}$

Question 2.4

Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs sommes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n-2}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{6^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 3^{n+2}}{4^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n 2^{-2n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$

Question 2.5 🔧

Déterminez si les séries suivantes convergent absolument, convergent conditionnellement ou divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2} \right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n+1)(2n+3)}$

Question 2.6 🔧

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série.

Question 2.7 🔧

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série. Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-3} .

Question 2.8 🔧

On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

a) Montrez que cette série converge.

b) Trouvez un petit entier N tel que $|S - S_N| < 10^{-4}$ où S est la somme de la série et S_N est la somme partielle des N premiers termes de la séries.

c) Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

Question 2.9 ↗

Un fabricant de cerfs-volants vend 5000 unités par année. Chaque année, 10% des cerfs-volants vendus depuis le début de la production sont brisés par leur propriétaire.

a) Combien y aura-t-il de cerfs-volants après n années ?

b) Quel est le niveau de stabilisation du marché pour ce type de cerfs-volants ? C'est-à-dire, si P_n est le nombre de cerfs-volants après n années, quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ si cette limite existe ?



Limites et fonctions continues



3

La première partie du chapitre est consacrée aux limites de fonctions en un point et à l'infini. La définition de limite d'une fonction en un point est introduite de façon intuitive. Par la suite, on donne une définition rigoureuse de limite.

La deuxième partie du chapitre présente la définition de fonctions continues avec quelques unes de leurs propriétés. On verra d'autres propriétés des fonctions continues dans les prochains chapitres. La limite de fonctions en un point sera aussi l'outil qui nous permettra de définir la dérivée d'une fonction au chapitre suivant.

3.1 Limites

L'exemple suivant introduit le concept de limite d'une fonction en un point.

Exemple 3.1.1

Si $g(x) = x^2 + 1$, vérifions que $g(x)$ approche 2 lorsque x approche 1. Dans le tableau suivant, on évalue g à chacun des termes de la suite de nombres

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

qui tend vers 1.

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = 1 + \frac{1}{n}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$...	$\frac{101}{100}$...	$\frac{10001}{10000}$...
$g(x_n)$	5	3.25	$2.\overline{7}$	2.5625	...	2.0201	...	2.00020001	...

On voit que $g(x_n)$ approche la valeur 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ et donc lorsque x_n approche 1. On a donc que la suite

$$\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots\}$$

tend vers 2. On écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2 .$$

On peut aussi vérifier algébriquement que $g(x_n)$ où $x_n = 1 + 1/n$ approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$. On a

$$g(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

qui approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ car $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Avec $x_n = 1 - 1/n^2$, on obtient les résultats du tableau suivant qui montrent encore que $g(x_n)$ approche 2 lorsque x_n approche 1.

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = 1 - \frac{1}{n^2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{16}$...	$\frac{9999}{10000}$...	$\frac{99999999}{100000000}$...
$g(x_n)$	1	1.5625 ...	1.7901 ...	1.8789	1.9998	1.99999998

la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ approche la valeur 2 plus rapidement avec cette suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres qu'avec la suite précédente mais l'idée fondamentale est que la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ approche encore la valeur 2 avec cette nouvelle suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui approche la valeur 1. On a encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2 .$$

Comme on l'a fait pour $x_n = 1 + 1/n$, on peut vérifier algébriquement que $g(x_n)$ où $x_n = 1 - 1/n^2$ approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$. On a

$$g(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 + 1 = 2 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}$$

qui approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ car $1/n^2$ et $1/n^4$ approchent 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Quelque soit la suite de nombres $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers 1 que l'on choisisse, le résultat sera toujours une suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers la valeur 2. En d'autres mots,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2$$

pour

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 .$$

Pour résumer ce dernier énoncé (i.e. le fait que $g(x_n)$ tend vers 2 quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers 1), on écrit

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 .$$

À partir du graphe de g que l'on retrouve à la figure 3.1, on voit que $g(x_n)$ approche la valeur 2 lorsque la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ approche 1. 

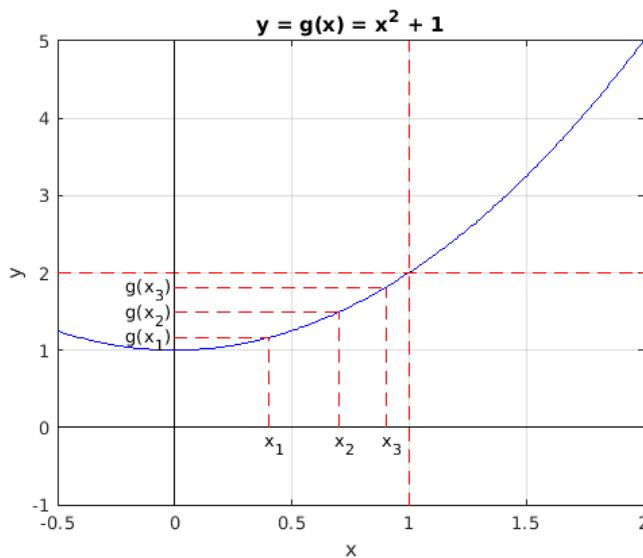


FIGURE 3.1 – Graphe de $g(x) = x^2 + 1$ pour x près de 1.

Définition 3.1.2

Soit f une fonction définie pour x près de c (il n'est pas nécessaire que f soit définie à c). On écrit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$$

s'il existe un unique nombre C tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c . On écrit aussi $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c$. On dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur C** lorsque x converge (ou tend) vers c . On dit aussi que C est la limite de f au point c .

Il est aussi nécessaire à l'occasion de considérer seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approchent c par la droite ou la gauche.

Définition 3.1.3

Si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c , on considère seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n < c$, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = C$$

ou $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c^-$, et on dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge (ou tend) par la gauche vers c . On dit aussi que C est la limite à gauche de f au point c .

De même, si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c , on considère seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n > c$, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = C$$

ou $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c^+$, et on dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge (ou tend) par la droite vers c . On dit aussi que C est la limite à droite de f au point c .

Exemple 3.1.4

Soit $g(x) = \sin(x)/x$. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x approche 0 ? En d'autres mots, quelle est la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} ?$$

Dans le tableau suivant, on évalue $g(x)$ lorsque x approche 0. On a choisi la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n = 1/n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Toute autre suite qui tend vers 0 aurait pu être utilisée.

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$g(x_n)$
1	1	0.8414709848 ...
2	1/2	0.9588510772 ...
3	1/3	0.9815840903 ...
4	1/4	0.9896158370 ...
⋮	⋮	⋮
100	1/100	0.9999833334 ...
⋮	⋮	⋮
10000	1/10000	0.9999999983 ...
⋮	⋮	⋮

On voit que la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. On va montrer plus loin que cela est vrai quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 .$$

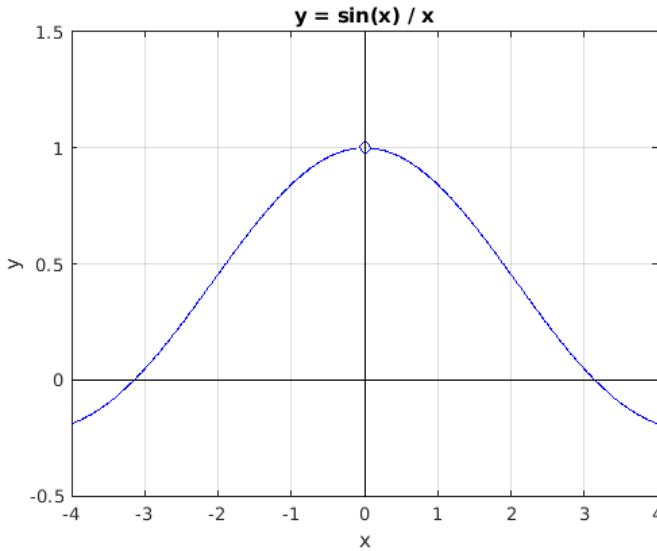


FIGURE 3.2 – Graphe de $g(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$.

Comme on peut constater à partir du graphe de g donné à la figure 3.2, $g(x)$ approche la valeur 1 lorsque x approche 0. Par contre, la fonction g n'est pas définie à l'origine. ♣

Exemple 3.1.5

Soit $g(x) = \sin(1/x)$. Est-ce que $g(x)$ approche une valeur quelconque lorsque x approche l'origine ? Si oui, quelle est cette valeur ?

Le tableau suivant donne les valeurs de g pour les termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car $g(x_n) = 0$ pour tout n .

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = \frac{1}{2n\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{6\pi}$	$\frac{1}{8\pi}$...	$\frac{1}{200\pi}$...	$\frac{1}{20000\pi}$...
$g(x_n)$	0	0	0	0	...	0	...	0	...

Il semble que $g(x)$ approche 0 lorsque x approche 0. Essayons maintenant avec la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 2/((4n+1)\pi)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. Par contre, le tableau suivant semble indiquer que $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ approche 1 lorsque x_n approche 0.

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$\frac{2}{17\pi}$...	$\frac{2}{4001\pi}$...	$\frac{2}{40001\pi}$...
$g(x_n)$	1	1	1	1	...	1	...	1	...

En fait, pour tout nombre α entre -1 et 1 inclusivement, on pourrait trouver une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0 et telle que $g(x_n)$ tend vers α lorsque $n \rightarrow \infty$. Il y a aussi des suites

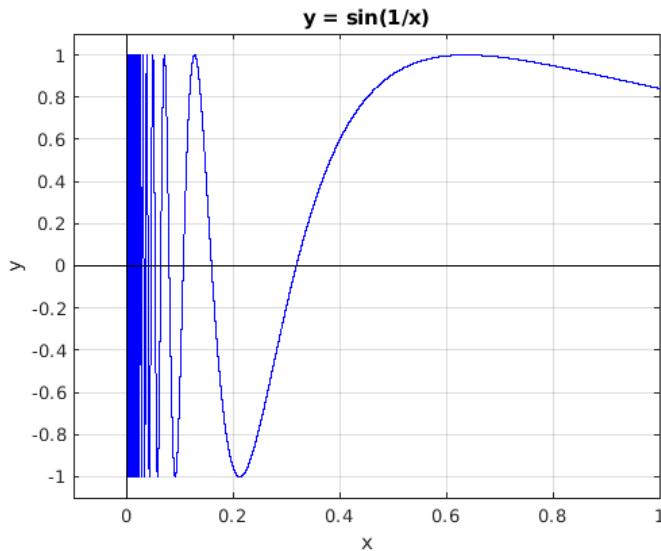


FIGURE 3.3 – Graphe de $g(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0 et telles que $g(x_n)$ n'approche aucune valeur fixe lorsque $n \rightarrow \infty$ mais se promène entre -1 et 1 .

Le graphe de g que l'on retrouve à la figure 3.3 montre bien que $g(x)$ n'approche pas une valeur unique lorsque x approche 0. Le graphe de g oscille entre -1 et 1 de plus en plus rapidement lorsque x approche 0.

Donc, dans la définition de $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$, il est très important que la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tends vers une valeur unique C quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c . ♣

La définition précédente pour

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C,$$

où on utilise les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c pour déterminer la valeur possible de C , est très utile pour prédire numériquement la valeur possible C de la limite. Cependant, il est généralement impossible d'utiliser cette définition pour prouver que la limite est bien la valeur C suggérée. Pour prouver cela, il faudrait vérifier que toutes les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c donnent des suites $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers C . Ceci est évidemment impossible.

Exemple 3.1.6

Est-ce que la limite suivante existe ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

On considère deux cas : x converge vers 1 avec $x > 1$ et x converge vers 1 avec $x < 1$.

Pour $x > 1$, on a que $|x - 1| = x - 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

Pour $x < 1$, on a que $|x - 1| = 1 - x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1|}{x - 1},$$

on doit conclure que la limite n'existe pas. ♣

Exemple 3.1.7 (Suite de l'exemple 3.1.1) ☺

Vérifier de façon algébrique (et donc rigoureusement) que $g(x) = x^2 + 1$ satisfait $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

On remarque que toute suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui approche 1 peut s'écrire $x_n = 1 + r_n$ où la suite $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ approche 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. C'est certainement le cas pour les suites $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ et $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^\infty$ que nous avons utilisées précédemment. Ainsi

$$g(x_n) = g(1 + r_n) = (1 + r_n)^2 + 1 = 2 + 2r_n + r_n^2 \rightarrow 2$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ car r_n et r_n^2 approchent 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2$. ♣

3.1.1 Epsilon et delta ☺

On donne une définition de la limite d'une fonction en un point qui est équivalent à celle donnée à la section précédente et qui ne fait pas appelle aux suites.

Malheureusement, la méthode algébrique utilisée à l'exemple 3.1.7 est restreinte aux fonctions algébriques (simples). La définition de

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C,$$

que l'on va donner ci-dessous est équivalente à la définition de limite d'une fonction en un point que l'on a donnée précédemment. Cette nouvelle définition est souvent appelée la définition en termes de ϵ et δ de la limite d'un fonction en un point. C'est cette définition qui est généralement utilisée pour démontrer rigoureusement que la limite d'une fonction f en un point c est une valeur C .

Définition 3.1.8

Soit f une fonction définie pour $x < c$ et $x > c$ (il n'est pas nécessaire que f soit définie à $x = c$). On écrit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$$

si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|f(x) - C| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - c| < \delta, \quad x \neq c.$$

On dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge vers c .

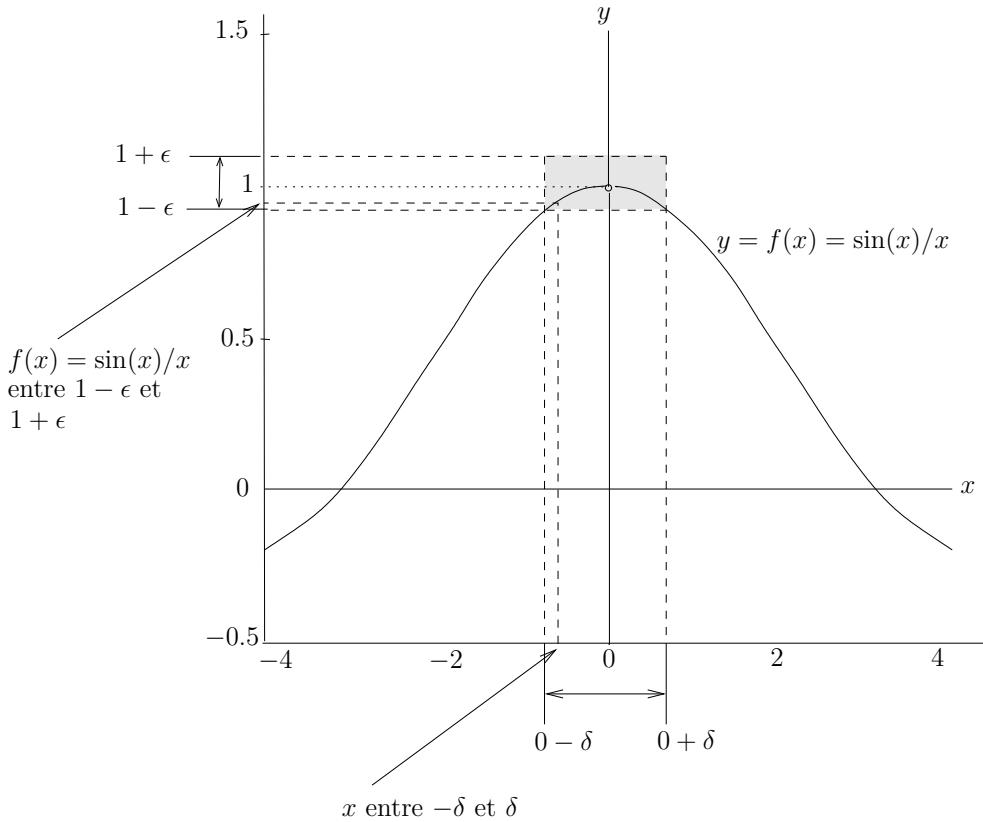


FIGURE 3.4 – Pour ϵ donné, le graphe nous donne une valeur possible de δ pour que $f(x) = \sin(x)/x$ soit entre $1 - \epsilon$ et $1 + \epsilon$ quel que soit $x \neq 0$ entre $-\delta$ et δ .

Nous illustrons cette nouvelle formulation de la limite d'une fonction en un point à l'aide de la fonction $\sin(x)/x$ au point $x = 0$. Quelque soit la valeur de ϵ , on remarque à partir du graphe de la figure 3.4 qu'il est toujours possible de trouver $\delta > 0$ pour que $f(x)$ soit entre $1 - \epsilon$ et $1 + \epsilon$ (on a $C = 1$) si x est entre $-\delta$ et δ (on a $c = 0$). Le graphe de f est complètement à l'intérieur de la boîte définie par $-\delta < x < \delta$ et $1 - \epsilon < y < 1 + \epsilon$. Plus ϵ sera petit, plus on devra prendre δ petit.

À la figure 3.5, nous montrons ce qui se passe avec une fonction f qui n'a pas de limite au point c . Il n'existe pas de δ tel que le graphe de f entre $c - \delta$ et $c + \delta$ soit complètement à l'intérieur de la boîte définie par $c - \delta < x < c + \delta$ et $C - \epsilon < y < C + \epsilon$. Il n'existe donc pas de δ pour satisfaire la définition précédente.

Dans la définition de limite, ϵ prend n'importe laquelle des valeurs positives. Il ne suffit pas de trouver un ϵ pour lequel on peut trouver un δ tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $[C - \epsilon, C + \epsilon]$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$. Il faut que pour chaque valeur $\epsilon > 0$ on puisse trouver un δ (qui peut varier si on varie ϵ) tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $[C - \epsilon, C + \epsilon]$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$.

Exemple 3.1.9

Montrons à l'aide de la dernière définition de limite d'une fonction en un point que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

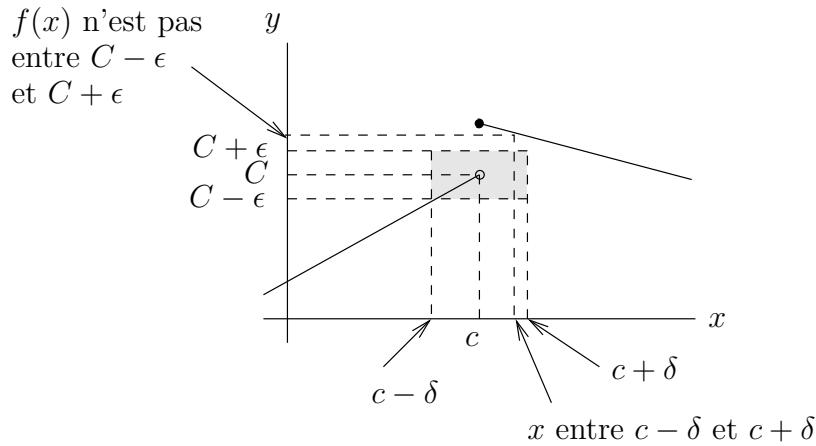


FIGURE 3.5 – Pour ϵ donné, il est impossible de trouver δ pour que $f(x)$ soit entre $C - \epsilon$ et $C + \epsilon$ quel que soit $x \neq c$ entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Puisque l'on cherche la limite lorsque x approche 2, on peut supposer que $x > 1$. Ainsi,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-x}{2x} \right| = \frac{|2-x|}{|2x|} < \frac{|2-x|}{2}$$

pour $x > 1$. Si on prend $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, on a alors que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < \frac{|2-x|}{2} < \frac{\delta}{2} \leq \epsilon$$

pour $|x - 2| < \delta$. ♣

Proposition 3.1.10

La définition de convergence donnée à la page 81 est équivalent à la définition de convergence donnée à la page 85.

Démonstration

i) Supposons que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition de la page 81. Montrons que la définition de la page 85 est satisfaite.

La preuve est par contradiction. Supposons que la définition de la page 85 ne soit pas satisfaite. Cela implique qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout δ on peut trouver au moins un point x_δ tel que $|x_\delta - c| < \delta$ et $|f(x_\delta) - C| \geq \epsilon$.

Si on prend $\delta = 1/n$ pour n un entier positif, on obtient une suite $\{x_{1/n}\}_{n=1}^\infty$ telle que $|x_{1/n} - c| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_{1/n}) - C| \geq \epsilon$ pour tout n . On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1/n} = c$ mais la suite $\{f(x_{1/n})\}_{n=1}^\infty$ ne tend pas vers C . Ce qui contredit la définition de la page 81.

ii) Supposons maintenant que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition de la page 85. Montrons que la définition de la page 81 est satisfait.

Supposons que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ soit une suite qui tend vers c . Soit $\epsilon > 0$. Selon la définition de la page 85, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - C| < \epsilon$ si $|x - c| < \delta$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, il existe $N > 0$ tel que $|x_n - c| < \delta$ pour $n > N$. Ainsi, on a que $|f(x_n) - C| < \epsilon$ pour $n > N$. Puisque ϵ est arbitraire, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C$.

Comme le résultat du paragraphe précédent est vrai pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c , on a que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition de la page 81. ■

3.1.2 Règles pour évaluer les limites

Le théorème suivant est parfois très utile pour évaluer la limite d'une fonction en un point. On a déjà vu une version de ce théorème (voir théorème 2.1.10) pour les suites. La présente version en est une conséquence.

Théorème 3.1.11 (des gendarmes ou sandwich)

Soit f , g et h trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x près de c . Si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L .$$

Exemple 3.1.12

La méthode algébrique de l'exemple 3.1.7 n'est pas utile pour démontrer rigoureusement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 . \quad (3.1.1)$$

On doit utiliser une autre approche. Le théorème précédent nous permet de démontrer rigoureusement (3.1.1).

À la figure 3.6, on voit bien que

$$\sin(x) = |\overline{CE}| < |\overline{AC}| < \text{longueur de l'arc de cercle } AC = x .$$

Donc,

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 . \quad (3.1.2)$$

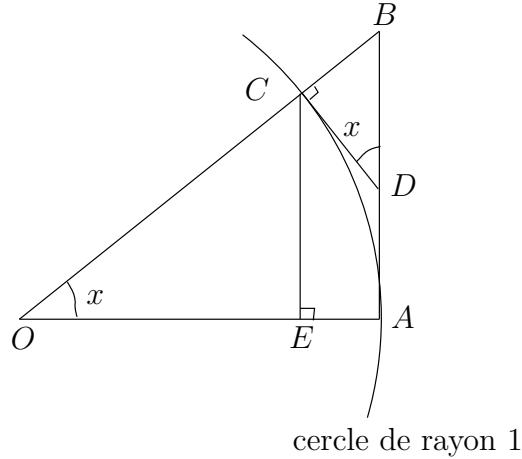


FIGURE 3.6 – La figure utilisée pour démontrer rigoureusement que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$.

De plus,

$$\begin{aligned} x &= \text{longueur de l'arc de cercle } AC \\ &< |\overline{AD}| + |\overline{DC}| < |\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{AB}| = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OA}|} \\ &= \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x}. \quad (3.1.3)$$

De (3.1.2) et (3.1.3), on obtient

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Il est facile de vérifier à partir de la définition du cosinus que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

Par exemple, pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0, on a que $\cos(x_n)$ tend vers $\cos(0) = 1$. Ainsi, on obtient que $g(x) = \sin(x)/x$ approche 1 lorsque x approche 0 grâce au théorème des gendarmes. ♣

Comme on vient de voir, il n'est pas toujours facile de démontrer rigoureusement qu'une fonction à une limite en un point.

Comme pour les limites de suites, nous avons les propriétés suivantes :

Théorème 3.1.13

On assume que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ et $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$.

1. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$.
2. Si k est un nombre réel, alors $\lim_{x \rightarrow c} (k f(x)) = kA$.
3. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = AB$.
4. Si $B \neq 0$ (donc $g(x) \neq 0$ pour x près de c), alors $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Les quatre conclusions du théorème précédent sont souvent énoncées de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

respectivement.

3.2 Fonctions continues

Une propriété que possèdent certaines fonctions est la **continuité**. La fonction f est continue au point $x = c$ si f est définie au point $x = c$ et $f(x)$ approche la valeur $f(c)$ lorsque x approche c .

Si on utilise la définition de limite introduite à la section précédente pour définir la continuité d'une fonction au point $x = c$, on obtient l'énoncé suivant :

Définition 3.2.1

Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c . La fonction f est **continue au point c** si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) .$$

En d'autres mots, f est continue au point c si $f(c)$ existe et $f(x_n)$ approche $f(c)$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c .

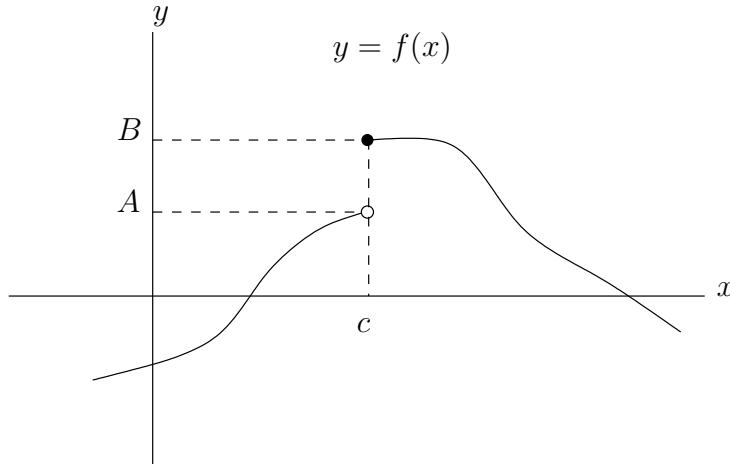


FIGURE 3.7 – La fonction f n'est pas continue au point $x = c$

À la figure 3.7, on trouve le graphe d'une fonction f qui n'est pas continue au point $x = c$ car $f(x)$ approche la valeur B lorsque $x > c$ et $f(x)$ approche la valeur $A \neq B$ lorsque $x < c$ approche c . Comme f est une fonction, elle ne peut pas prendre deux valeurs distinctes, A et B , lorsque $x = c$. Dans la figure 3.7, le cercle plein à l'extrémité gauche de la courbe supérieure (à $x = c$) et le cercle vide à l'extrémité droite de la courbe inférieure (aussi à $x = c$) indiquent que $f(c) = B$.

Pour qu'une fonction ne soit pas continue en un point $x = c$, il faut que le graphe de la fonction soit représenté par une courbe brisée à $x = c$.

Exemple 3.2.2

À l'exemple 3.1.1, on a montré que la fonction $g(x) = x^2 + 1$ est continue au point $x = 1$ car on a montré que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ et on a que $g(1) = 2$. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) .$$



Exemple 3.2.3

La fonction $g(x) = \sin(x)/x$ que l'on a étudié à l'exemple 3.1.4 n'est pas continue au point $x = 0$ car $g(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Par contre, si on défini

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(x) = g(x)$ pour $x \neq 0$ et f est continue au point $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) .$$

Le graphe de f est le graphe de la figure 3.2 où le point $(0, 1)$ est maintenant représenté par un cercle plein.



Définition 3.2.4

Si une fonction f est continue en tout point d'un intervalle $]a, b[$ (resp. $[a, b]$, $[a, b[$, etc.) on dit que la fonction f est **continue sur l'intervalle** $]a, b[$ (resp. $[a, b]$, $[a, b[$, etc.).

Il est toujours préférable (si c'est possible) d'utiliser des fonctions continues pour décrire les phénomènes physiques, biologiques, et autres. La raison pour cette préférence est qu'une petite variation de l'argument d'une fonction continue aura très peu d'effet (en général) sur la valeur retournée par la fonction. Cela est nécessaire si on veut faire des prédictions à long terme ou si on veut estimer les valeurs à fournir à la fonction pour obtenir le résultat escompté. On illustre ce dernier type de problèmes dans l'exemple suivant.

Exemple 3.2.5 

On observe qu'une population de bactéries est gouvernée par le « système dynamique discret » (voir section 5.9)

$$p_{t+1} = 0.7p_t + 10$$

où p_t est le nombre de bactéries en unité de mille t heures après le début des observations.

Combien de bactéries doit-on introduire au départ pour obtenir 100,000 bactéries avec une précision de 1,000 bactéries après une heure ? Après deux heures ?

Le nombre de bactéries après une heure est p_1 , il faut donc choisir p_0 tel que que

$$99 < p_1 = 0.7p_0 + 10 < 101 .$$

Il ne faut pas oublier que l'on compte les bactéries par unité de 1,000 dans le système dynamique discret. Si on isole p_0 , on trouve

$$127.142\dots = \frac{99 - 10}{0.7} < p_0 < \frac{101 - 10}{0.7} = 130 .$$

Il faut donc introduire entre 127,142 et 130,000 bactéries initialement.

Le nombre de bactéries après deux heures est p_2 . Or,

$$p_2 = 0.7p_1 + 10 = 0.7(0.7p_0 + 10) + 10 = 0.49p_0 + 17 .$$

Il faut donc que

$$99 < 0.49p_0 + 17 < 101 .$$

Ainsi,

$$167.3468\dots = \frac{99 - 17}{0.49} < p_0 < \frac{101 - 17}{0.49} = 171.4285\dots$$

Il faut introduire entre 167,347 et 171,429 bactéries initialement. 

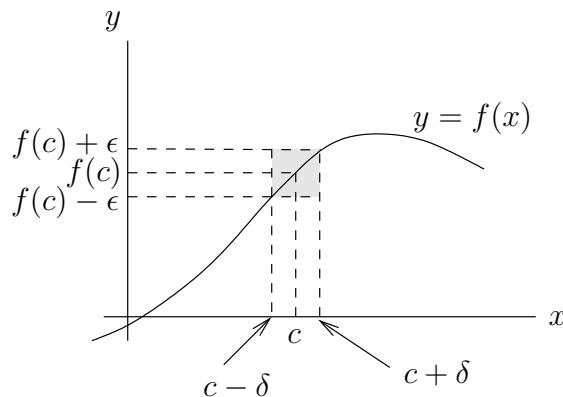


FIGURE 3.8 – Pour ϵ donné, il est possible de trouver δ pour que $f(x)$ (incluant $f(c)$) soit entre $f(c) - \epsilon$ et $f(c) + \epsilon$ quel que soit x entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

3.2.1 Epsilon et delta ☺

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous donne une définition de la continuité qui est équivalente à celle que l'on vient de donner.

Définition 3.2.6

Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c . La fonction f est continue au point $x = c$ si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - c| \leq \delta .$$

Remarque 3.2.7

On illustre à la figure 3.8 la deuxième formulation de la définition d'une fonction continue f en un point c . Quel que soit le nombre ϵ , on peut toujours trouver δ tel que le graphe de la fonction f entre $c - \delta$ et $c + \delta$, incluant $(c, f(c))$, soit dans la boîte définie par $c - \delta < x < c + \delta$ et $f(c) - \epsilon < y < f(c) + \epsilon$. ♠

3.3 Quelques propriétés des fonctions continues

On peut démontrer les résultats suivants à partir de la définition d'une fonction continue.

Proposition 3.3.1

- Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques sont des fonctions continues sur leur domaine.
- Il découle du théorème 3.1.13 que le produit et la somme de fonctions continues donnent une nouvelle fonction continue. De même, le quotient de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue sauf aux points où le dénominateur est nul.
- La composition de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue.

Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite qui converge vers un point c du domaine d'une fonction continue f , alors la suite $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers le point $f(c)$. En d'autres mots,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Puisque la définition de limite d'une fonction en un point c fait appel aux suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui convergent vers c , on obtient le résultat suivant qui est très utile pour calculer des limites.

Proposition 3.3.2

Soit f une fonction continue et g une fonction dont l'image est un sous-ensemble du domaine de f . On peut donc considérer la composition $f \circ g$. Si $\lim_{x \rightarrow r} g(x) = s$ est un élément du domaine de f , alors $\lim_{x \rightarrow r} f(g(x)) = f(s)$. En d'autres mots,

$$\lim_{x \rightarrow r} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow r} g(x)\right)$$

Exemple 3.3.3

Calculez les limites suivantes si elles existent.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2 - \sqrt{x + 3}}$$

a) On note que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 .$$

Puisque $\sin(x)$ est continue en $x = 4$, on peut utiliser la proposition 3.3.2 pour conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \sin(4) .$$

b) On remarque que

$$\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2-\sqrt{x}} = -(\sqrt{x}+2)$$

pour $x \neq 4$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} -(\sqrt{x}+2) = -(\sqrt{4}+2) = -4$$

On a utilisé le fait que $\sqrt{x}-2$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite.

c) Pour évaluer cette limite, on élimine premièrement la racine carrée au dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} &= \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} \left(\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} \right) = \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} \\ &= \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = -(2+\sqrt{x+3}) \end{aligned}$$

pour $x \neq 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} -(2+\sqrt{x+3}) = -(2+\sqrt{4}) = -4$$

On a utilisé le fait que $2+\sqrt{x+3}$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite.



Exemple 3.3.4 ☺

Soit la fonction

$$h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0 .$$

Montrer que

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Premièrement, on montre que

$$\sin(h(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Posons $\theta_1 = \arctan(x)$ et $\theta_2 = \arctan(1/x)$. On a $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ et

$$\sin(h(x)) = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) .$$

On déduit de la figure 3.9 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} , \quad \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} , \quad \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

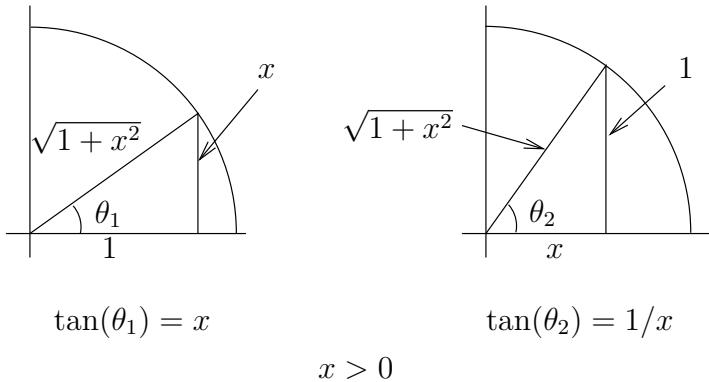


FIGURE 3.9 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x > 0$ et $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$.

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

pour $x > 0$. Donc,

$$\sin(h(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

pour tout $x > 0$. De même, on déduit de la figure 3.10 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

pour $x < 0$. Donc,

$$\sin(h(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = -1$$

pour tout $x < 0$.

Pour compléter le problème, on remarque que $h(1) = 2 \arctan(1) = \pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x > 0$ et h est une fonction continue pour $x > 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x > 0$ et ainsi $h(x) = \pi/2$ pour $x > 0$. De même, $h(-1) = 2 \arctan(-1) = -\pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x < 0$ et h est continue pour $x < 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x < 0$ et ainsi $h(x) = -\pi/2$ pour $x < 0$. 

Les fonctions continues possèdent une propriété très importante que l'on utilisera lors de l'étude des fonctions au prochain chapitre.

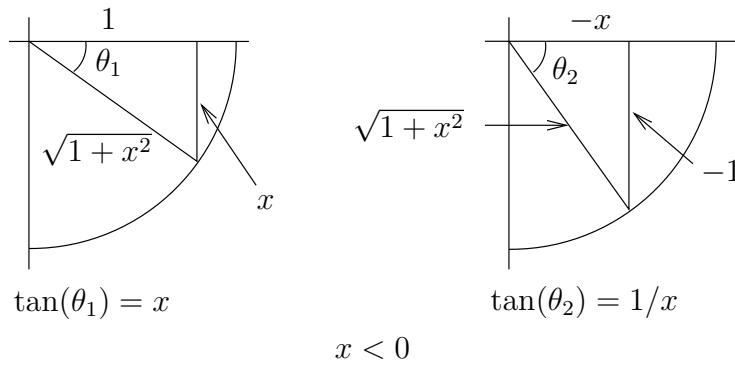


FIGURE 3.10 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x < 0$ et $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < 0$.

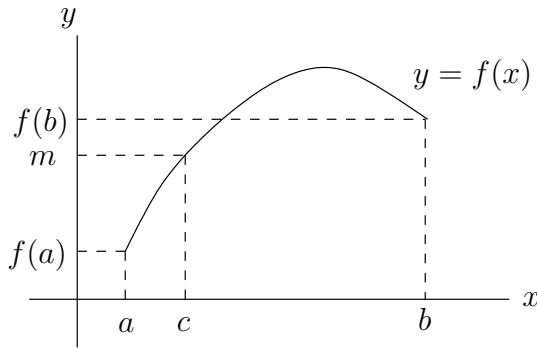


FIGURE 3.11 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 3.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit m une valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe au moins une valeur c telle que $a \leq c \leq b$ et $f(c) = m$.

Le dessin de la figure 3.11 illustre le résultat du théorème précédent.

3.4 Limites à l'infini et limites infinies

Lorsque l'on étudie une fonction, il est souvent intéressant de savoir comment se comporte la fonction pour de très grandes valeurs de son domaine.

Exemple 3.4.1

Comme on peut le voir à la figure 3.12, la fonction $g(x) = 5 + e^{(2-x)/10}$ semble approcher la valeur 5 lorsque x devient de plus en plus grand. En effet, $g(x) \approx 5$ pour x très grand. ♣

Commençons par donner un sens mathématique à l'énoncé « $f(x)$ approche une certaine valeur lorsque x tend vers plus l'infini ». Pour se faire, on utilise la définition 2.1.14 de limite

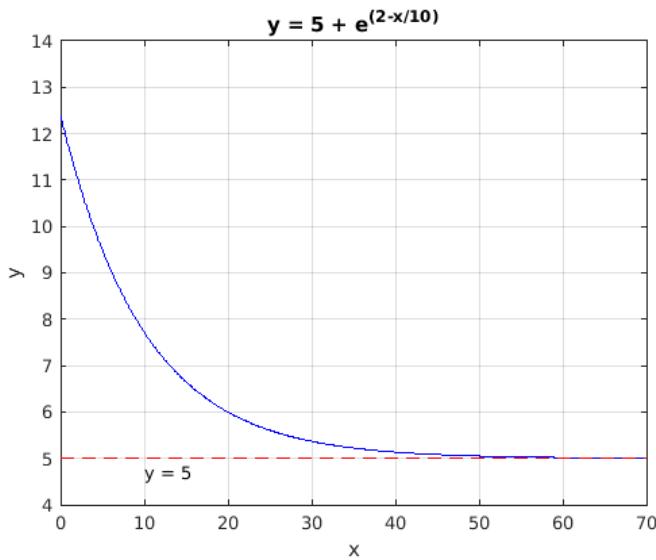


FIGURE 3.12 – Le graphe de $g(x) = 5 + e^{(2-x)/10}$. On a que $g(x)$ approche 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

à l'infini pour les suites. On obtient la définition suivante de limite d'une fonction f lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

Définition 3.4.2

Si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par ∞ , on dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers plus l'infini et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C .$$

De même, si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par $-\infty$, on dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers moins l'infini et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = C .$$

Exemple 3.4.3

Si on revient à l'exemple précédent avec $g(x) = 5 + e^{(2-x)/10}$.

La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ est une suite qui tend vers plus l'infini car c'est une suite croissante de nombres sans borne supérieure. On donne, dans le tableau 3.1, les valeurs de $g(x_n)$ pour quelques uns des termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. On voit bien que $g(x_n)$ approche 5 lorsque n (et donc x_n) devient de plus en plus grand.

Puisque pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers plus l'infini, on pourrait montrer que

n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$	n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$
1	1	11.68589444228...	13	169	5.000000033807...
2	4	9.95303242440...	14	196	5.00000002272...
3	9	8.00416602395...	15	225	5.00000000125...
4	16	6.49182469764...	16	256	5.00000000006...
5	25	5.60653065971...	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	22	484	5.00000000000...
11	121	5.00004107956...	23	529	5.00000000000...
12	144	5.0000411859...	24	576	5.00000000000...

TABLE 3.1 – $g(x_n)$ pour quelques valeurs de n .

$g(x_n)$ approche 5 lorsque n devient de plus en plus grand, on a que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$. Ainsi, $g(x)$ tend vers 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

La droite $y = 5$ est appelée une **asymptote horizontale** pour la fonction g .

On pourrait aussi résonner à partir du graphe de $y = e^x$ pour montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$. En effet, puisque $2 - x/10$ devient de plus en plus petit (de plus en plus « négatif ») lorsque x devient de plus en plus grand, on peut conclure à partir du graphe de $y = e^x$ que $e^{(2-x/10)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers plus l'infini. Donc, $5 + e^{(2-x/10)}$ tend vers 5 lorsque x tend vers plus l'infini. ♣

Les propositions 2.1.17 et 2.1.18 ne sont pas limitées à la suite $\{n\}_{n=1}^\infty$.

Proposition 3.4.4

Soit r un nombre réel positif. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 < r < 1 \end{cases} .$$

Proposition 3.4.5

Soit r un nombre réel. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases} .$$

On fait référence dans les propositions précédentes à la convergence vers plus l'infini que nous verrons sous peu. C'est deux propositions seront extrêmement utiles pour calculer des

limites.

Exemple 3.4.6

Évaluez les limites suivantes si elles existent.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 1}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{x^{3/2} + 2x + 1}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}}$$

a) Si on divise le numérateur et dénominateur par x^2 , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (1/x) + (3/x^2)}{5 + (1/x^2)} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2)}{5 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2)} = \frac{1}{5}$$

grâce à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2) = 0$.

b) Si on divise le numérateur et dénominateur par $x^{3/2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{x^{3/2} + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x^{1/2}) - (4/x^{3/2})}{1 + (2/x^{1/2}) + (1/x^{3/2})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2})}{1 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2})} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

grâce encore à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2}) = 0$.

c) Si on factorise x^4 à l'extérieur de la racine carrée et x^8 à l'extérieur de la racine quatrième, on obtient

$$\frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}} = \frac{x^2 \sqrt{4 + (5/x^4)}}{x^2 (1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}} = \frac{\sqrt{4 + (5/x^4)}}{(1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + (5/x^4)}}{(1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}} \\ &= \frac{\sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} (5/x^4)}}{\left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^6) + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^8)\right)^{1/4}} = \frac{\sqrt{4}}{1^{1/4}} = 2 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^r) = 0$ pour $r > 0$. 

Exemple 3.4.7

Déterminer si la limite suivante existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

Si la limite existe, donner cette limite.

On remarque que

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Puisque $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ croît sans borne supérieure lorsque x augmente, on a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$



On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers plus l'infini. De même,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers moins l'infini. On peut ainsi donner la définition suivante.

Définition 3.4.8

Soit f une fonction définie pour x près de c (il n'est pas nécessaire que f soit définie à c). On écrit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c . On dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge (ou tend) vers c .

Exemple 3.4.9

Si $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3 ? On remarque que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Pour montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty ,$$

il faudrait normalement montrer que, quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 3, la suite $\left\{ \frac{2}{(x_n-3)^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Nous ne ferons pas cela mais le lecteur peut

vérifier avec une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de son choix qui tend vers 3 que $\left\{ \frac{2}{(x_n-3)^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

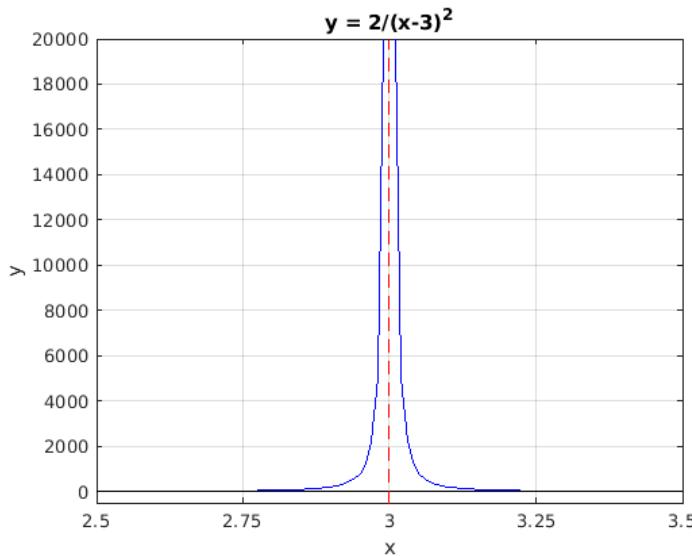


FIGURE 3.13 – Le graphe de $f(x) = 2/(x - 3)^2$. f croît sans limite supérieure lorsque x approche 3. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale.

Nous utilisons une autre méthode (un peu moins rigoureuse) pour nous convaincre que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x - 3)^2} = \infty .$$

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors $x - 3$ est très près de zéro avec $x - 3 > 0$. Donc, $(x - 3)^2$ est encore plus près de zéro que $x - 3$ peut l'être si $x - 3 < 1$. Ainsi, $2/(x - 3)^2 > 0$ est très grand car on divise par un très petit nombre. Un raisonnement semblable pour x très près de 3 avec $x < 3$, montre que $2/(x - 3)^2 > 0$ est aussi très grand.

Si on résonne à partir du graphe de f près de 3 que l'on retrouve à la figure 3.13, on peut conclure que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x tend vers 3. La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f . 

Exemple 3.4.10

Si $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3 ? On remarque que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors $x^2 - 9$ est très près de zéro avec $x^2 - 9 > 0$. Donc, $2/(x^2 - 9) > 0$ est très grand car on divise par un très petit nombre. Si x est très près de 3 avec $x < 3$ alors $x^2 - 9$ est très près de zéro avec $x^2 - 9 < 0$. Donc, $2/(x^2 - 9) < 0$ est très petit car on divise par un nombre négatif qui est très petit en valeur absolue.

Le graphe de f près de 3 que l'on retrouve à la figure 3.14 indique que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et la fonction f décroît sans borne inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$. La fonction $2/(x^2 - 9)$ ne tend pas vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x tend vers 3. 

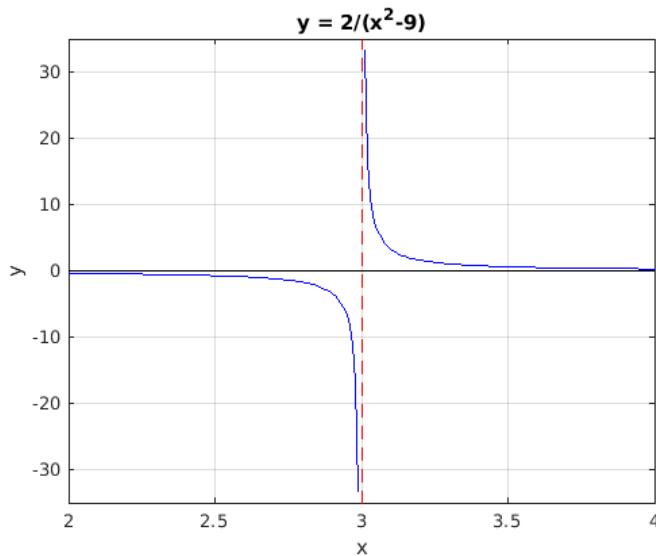


FIGURE 3.14 – Le graphe de $f(x) = 2/(x^2 - 9)$. f croît sans limite supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et f décroît sans limite inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$.

Si f est une fonction qui n'est pas définie en un point c , l'exemple précédent suggère de considérer le comportement de cette fonction lorsque l'on s'approche de c avec des valeurs plus petites que c (i.e. par la gauche) ou des valeurs plus grandes que c (i.e. par la droite).

Définition 3.4.11

Soit f une fonction définie pour $x > c$. On écrit

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n > c$ qui tend vers c . On dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge par la droite vers c . De même, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \quad (\text{resp. } -\infty).$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n < c$ qui tend vers c . On dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge par la gauche vers c . Voir la figure 3.15.

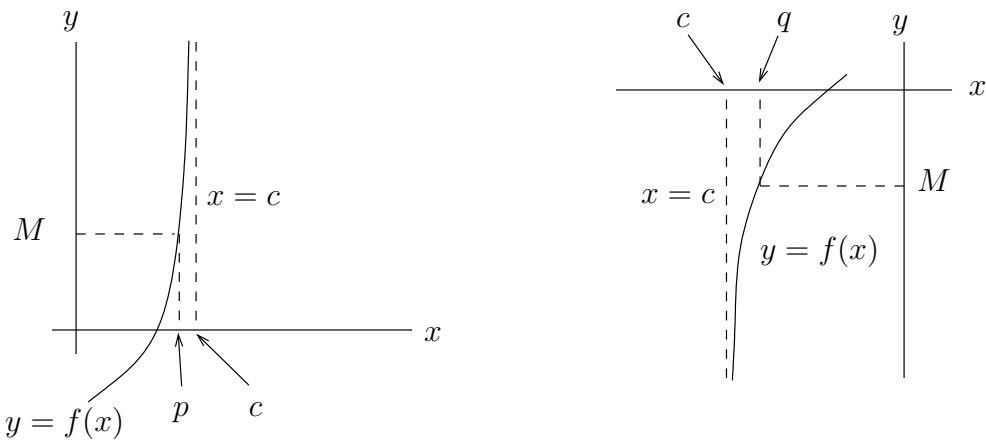


FIGURE 3.15 – Dans la figure de gauche $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ alors que dans la figure de droite $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.4.12

À l'exemple précédent, on a

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x^2 - 9} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x^2 - 9} = \infty .$$

La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f . 

3.4.1 Des définitions plus pratiques

Dans les exemples précédents, nous nous sommes inspiré du graphe de la fonction pour déterminer les limites à l'infini et les limites infinies en un point. Ce n'est pas une approche rigoureuse et elle dépend de notre capacité à tracer le graphe de la fonction. Il nous faut donc une définition de limite à l'infini et une définition de limite infinie en un point qui soient en accord avec la définition 3.1.8 de limite d'une fonction en un point en termes de ϵ et δ .

La définition 3.1.8 de la limite d'une fonction en un point (équivalent à celle donné à la définition 3.1.2) ne faisait pas appelle aux suites. On peut faire de même pour la définition de la limite d'une fonction à l'infini (définition 3.4.2) et la définition de la limite infinie d'une fonction en un point (définition 3.4.8).

Ce sont ces définitions qui nous permettent de déterminer rigoureusement si une limite à l'infini existe et qu'elle est cette limite, ou si une fonction à une limite infinie en un point.

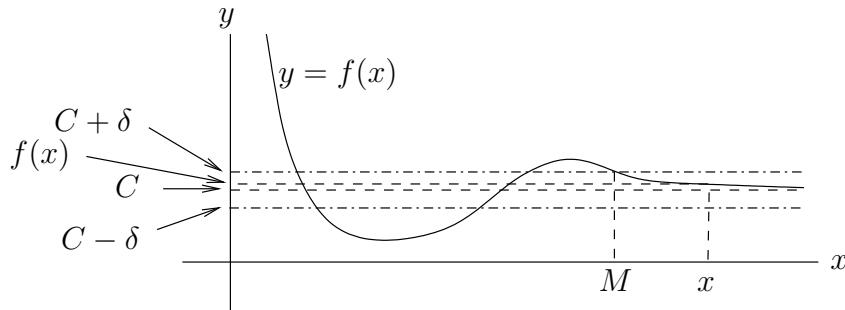


FIGURE 3.16 – La fonction f tend vers C lorsque x tend vers plus l'infini. Pour $\epsilon > 0$ donné, on peut voir à partir du graphe de f qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x)$ est entre $C - \epsilon$ et $C + \epsilon$ si $x > M$.

Définition 3.4.13

Soit f une fonction définie pour x positif. On écrit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$$

et on dit que $f(x)$ tend vers C lorsque x tend vers plus l'infini si la condition suivante est satisfaite. Il existe une unique constante C telle que, pour toute valeur $\epsilon > 0$, on peut trouver une constante $M > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) pour laquelle $f(x)$ est dans l'intervalle $[C - \epsilon, C + \epsilon]$ si $x > M$. Voir la figure 3.16.

De façons semblables, on peut définir la limite vers moins l'infini.

Définition 3.4.14

Soit f une fonction définie pour x près d'un point c . On écrit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c si la condition suivante est satisfaite. Pour toute constante M , il existe une constante $\delta > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque x est dans l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$. Voir la figure 3.17.

De façons semblables, on peut définir la convergence vers moins l'infini, et les convergences à droite et à gauche vers plus ou moins l'infini.

Exemple 3.4.15

Revenons à $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$ que l'on a étudié précédemment. Montrons à l'aide des définitions précédentes que

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty .$$

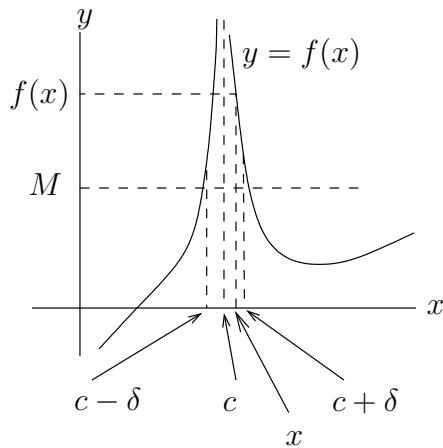


FIGURE 3.17 – La fonction f tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c . Pour $M > 0$ donné, on peut voir à partir du graphe de f qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ si x est entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

Prenons un très grand nombre M (e.g. $M = 10^6$). Existe-t-il un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 9} > M$$

lorsque $3 < x < 3 + \delta$? On cherche les valeurs de $x > 3$ telles que $\frac{2}{x^2 - 9} > M$. Si on résout pour x^2 , on trouve $x^2 < 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 < x < \sqrt{9 + 2/M} = 3 + \left(\sqrt{9 + 2/M} - 3 \right).$$

Soit $\delta = \sqrt{9 + 2/M} - 3$. On a $\delta > 0$ car $M > 0$, et $f(x) > M$ pour $3 < x < 3 + \delta$. Le lecteur est invité à calculer δ pour une valeur M de son choix. On vient de montrer que quel que soit $M > 0$, on peut toujours trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ pour $3 < x < 3 + \delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ dent vers $+\infty$ lorsque x tend par la droite vers 3.

De même, prenons un très petit nombre M (e.g. $M = -10^8$). On cherche les valeurs de $x < 3$ telles que

$$\frac{2}{x^2 - 9} < M.$$

Si on résout pour x^2 , on trouve $x^2 > 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 > x > \sqrt{9 + 2/M} = 3 - (3 - \sqrt{9 + 2/M})$$

où on assume que $M < -2/9$ pour que $9 + 2/M$ soit positif.

Soit $\delta = 3 - \sqrt{9 + 2/M}$. On a $\delta > 0$ car $M < -2/9$, et $f(x) < M$ pour $3 - \delta < x < 3$. On vient de montrer que quel que soit $M < 0$, on peut toujours trouver un nombre $\delta > 0$

tel que $f(x) < M$ pour $3 > x > 3 - \delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend par la gauche vers 3.



Exemple 3.4.16

Revenons au calcul de la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

que nous avons étudié à l'exemple 3.4.7.

Démontrons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

à partir de notre définition de limite à l'infini. Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Si on prend $M = \frac{1}{4\epsilon^2}$, on obtient

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{1/(4\epsilon^2)}} = \epsilon$$

pour $x > M$.



Pour terminer, nous considérons le cas où on a une limite infinie à l'infini.

Définition 3.4.17

Soit f une fonction définie pour x positif. On écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si pour toute constante $M > 0$ il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque $x > m$. De même, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers moins l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si pour toute constante $M < 0$ il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) < M$ lorsque $x > m$.

De façons semblables, on peut définir la convergence de $f(x)$ vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x converge vers moins l'infini.

3.4.2 Comportement asymptotique semblable

Définition 3.4.18

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l'infini lorsque x tend vers c . On dit que f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers c si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Si f et g ont un comportement asymptotique semblable, on a que $f(x) \approx g(x)$ pour x très près de c . Ainsi, les fonctions f et g ont des graphes semblables pour x près de c .

De même,

Définition 3.4.19

Deux fonctions f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini) si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1) .$$

Exemple 3.4.20

À l'exemple 3.4.3, on a montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$ où $g(x) = 5 + e^{2-x/10}$. Si on pose $f(x) = 5$ pour tout x , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Donc, g et f ont des graphes semblables lorsque x est très grand. 

Nous reviendrons sur l'étude du comportement asymptotique des fonctions à la section 5.7.

3.5 Exercices

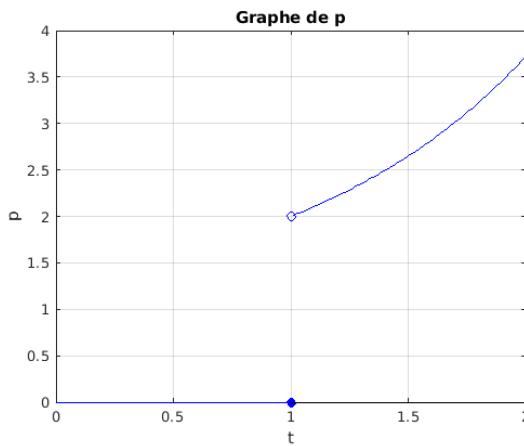
Question 3.1

Utilisez une approche numérique et une approche graphique (vous devez utiliser un logiciel ou une calculatrice graphique pour tracer le graphe) pour trouver la valeur de la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} .$$

Question 3.2

Le graphe de la fonction p est donnée dans la figure suivante



Évaluez graphiquement les limites suivantes si c'est possible :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} p(t) , \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} p(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} p(t) .$$

Question 3.3

À l'aide de suites de valeurs numériques, estimez la valeur des limites suivantes :

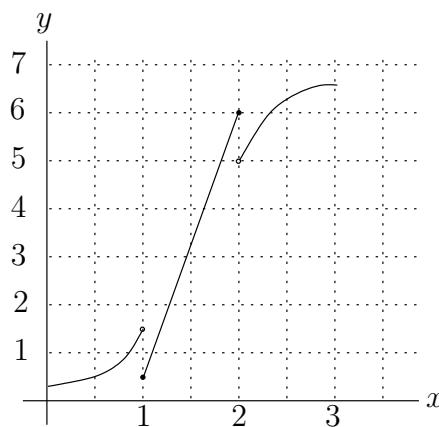
$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \qquad \mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x}$$

Question 3.4

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Pour quelles valeurs de x a-t-on que $\sqrt{x} < 0.1$? Que $\sqrt{x} < 0.01$? Est-ce que \sqrt{x} approche rapidement 0 lorsque $x > 0$ approche 0?

Question 3.5

Le graphe de la fonction f est donnée dans la figure suivante :



Calculez les limites à droite et à gauche aux points $x = 1$ et $x = 2$. Est-ce que la limite de la fonction existe aux points $x = 1$ et $x = 2$?

Question 3.6

Soit $v(t) = 1 + t^2$. Évaluez la limite $\lim_{t \rightarrow 0} v(t)$. Soit α la valeur de cette limite.

1. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t) - \alpha| < 1$?
2. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t) - \alpha| < 0.5$?
3. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t) - \alpha| < 0.01$?

Question 3.7

Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez la limite quand elle existe.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{2 + \sqrt{2x^2 - 4}} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(\pi/x)}{x^2 - 5} \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{2 - \sqrt{x^2 - 5}} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x^2 - 25} & \end{array}$$

Question 3.8  

Évaluez si possible la limite $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x)$.

Question 3.9 

Le volume d'une culture au temps t en secondes est donnée par la formule $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$ ml où $V_0 = V(0) = 1$ ml est le volume initial. Sachant que le volume est de 2.71828 ml après 1000 secondes (i.e. $V(1000) = 2.71828$ ml), trouvez α . Déterminez les valeurs de t pour lesquelles le volume $V(t)$ après t secondes est 2.71828 ml avec une marge d'erreur de 0.1 ml. C'est-à-dire, trouvez t tel que $2.71828 - 0.1 < V(t) < 2.71828 + 0.1$.

Question 3.10 

La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Est-ce que $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 1$? Justifiez votre réponse.

Question 3.11

Donnez une formule mathématique pour définir la fonction continue f telle que $f(x) = -1$ pour $x < -0.1$, $f(x) = 1$ pour $x > 0.1$, et $f(x)$ est linéaire pour $-0.1 < x < 0.1$.

Question 3.12 

Un neurone a la réaction suivante lorsqu'il reçoit une impulsion électrique. Si le voltage V de l'impulsion électrique est supérieure à une valeur V_0 , le neurone produit une impulsion électrique de voltage $2V$. Au contraire, si le voltage V de l'impulsion électrique est inférieure à cette valeur V_0 , le neurone produit une impulsion électrique de voltage V_1 . Donnez une formule mathématique pour la réponse du neurone à une impulsion électrique? Si on sait que la réponse du neurone à une impulsion électrique est une fonction continue, quelle doit être la valeur de V_1 ?

Question 3.13

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Pour quelles valeurs de x a-t-on que $\frac{1}{\sqrt{x}} > 10$? Que $\frac{1}{\sqrt{x}} > 100$?

Est-ce que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ croît rapidement ou lentement lorsque $x > 0$ approche 0 ?

Question 3.14

Soit

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x & \text{si } x < 3 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.15

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ ax^2 + x + b & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ b\sqrt{x} + \frac{5ax}{2} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Trouvez les valeurs de a et b pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.16

Un diapason est un petit instrument en acier qui a la forme d'une fourche et qui produit (approximativement) la note La lorsqu'il vibre. La fréquence x (en hertz) d'un bon diapason devrait être très proche de la fréquence exacte du La qui est de 440 hertz. Une marque de diapason coûte $5/|x - 440|$ dollars où x est la fréquence du diapason. Combien coûtera un tel diapason si l'on demande une précision de 0.1% ? De 0.01% ? Peut-on se permettre un diapason parfait ?

Question 3.17

Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que l'équation $e^x + x^2 - 2 = x$ a au moins une solution.

Question 3.18

Le prix de l'essence a augmenté de \$2.10 à \$2.50 le litre au cours de la semaine passée, peut-on conclure à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires que le prix de l'essence a été de \$2.25 le litre à un moment au cours de la semaine passée ? Justifiez votre réponse.

Question 3.19

Utilisez des suites pour évaluer $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1 - t)^{-4}$.

Question 3.20

Évaluez numériquement la limite suivante :

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} y^2 \ln(y - 1) .$$

Question 3.21

Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez celles qui existent. Pour celles qui n'existent pas, expliquez pourquoi.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{3x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - (8x^3 + 3)^{1/3}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 7x})$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x} - e^{-3x}}{3e^{2x} - 4e^{-5x}}$

Question 3.22  

Évaluez si possible la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2}$.



4.1 Étude du graphe et comportement d'une fonction

Avant de définir ce qu'est la dérivée d'une fonction, un des piliers du calcul différentiel et integral, et de plonger dans l'étude de la dérivée d'une fonction, nous énonçons quelques propriétés des fonctions que la dérivée nous permettra de déterminer.

La dérivée est un outil pour l'étude des fonctions. Lorsque l'on parle de l'étude des fonctions, on parle de l'étude du graphe et du comportement des fonctions sur leur domaine. On cherche les caractéristiques marquantes des fonctions. Quelques unes des caractéristiques qu'une fonction peut avoir sont :

Définition 4.1.1

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f est **strictement croissante** si $f(x) < f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
2. La fonction f est **croissante** si $f(x) \leq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
3. La fonction f est **strictement décroissante** si $f(x) > f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
4. La fonction f est **décroissante** si $f(x) \geq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.

Définition 4.1.2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum local** au point c si $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$ suffisamment près de c .
2. La fonction f a un **minimum local** au point c si $f(x) > f(c)$ pour tout $x \neq c$ suffisamment près de c .

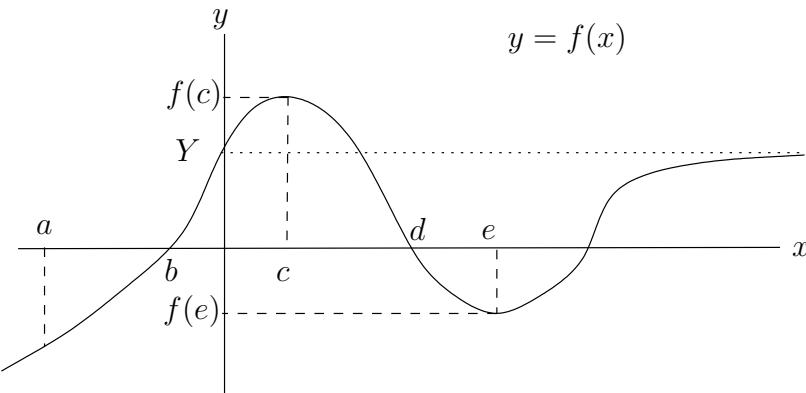


FIGURE 4.1 – À l'exemple 4.1.4, on détermine certaines caractéristiques de la fonction qui possède ce graphe.

Définition 4.1.3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le maximum global de f sur $[a, b]$.
2. La fonction f a un **minimum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) < f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le minimum global de f sur $[a, b]$.

Exemple 4.1.4

Considérons la fonction continue dont le graphe est donné à la figure 4.1. Quelques unes des caractéristiques de cette fonction sont :

1. La fonction f a un maximum absolu au point c car $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$. La valeur $f(c)$ est le maximum absolu de f . Cela implique aussi que f a un maximum local au point c .
2. La fonction f a un minimum local au point e car $f(x) > f(e)$ pour tout x près de e , $x \neq e$. Ce n'est pas un minimum absolu car il y a des valeurs de x pour lesquelles $f(x) < f(e)$ (e.g. $f(a) < f(e)$).
3. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ car $f(x_1) < f(x_2)$ pour tous $x_1 < x_2 < c$. De même, la fonction f est strictement croissante pour $x > e$. Par contre, la fonction f est strictement décroissante pour x entre c et e car $f(x_1) > f(x_2)$ pour tout $a < x_1 < x_2 < c$.
4. On a que $f(x)$ approche la valeur Y lorsque x devient de plus en plus grand. La droite $y = Y$ est une asymptote horizontale pour f lorsque x tend vers plus l'infini.



On verra plus tard d'autres caractéristiques que les fonctions peuvent avoir.

Si on observe minutieusement l'exemple précédent, on remarque que la fonction f est strictement croissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est positive, la fonction f est strictement décroissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est négative, la fonction f a un maximum local au point x où la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est zéro, ainsi de suite. Donc, la pente des droites tangentes au graphe d'une fonction semble déterminer les caractéristiques importantes d'une fonction. Il serait donc important de pouvoir facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. La dérivée est l'outil qui nous permettra de facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. Ainsi, elle nous permettra de trouver les minimums et maximums locaux d'une fonction, les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction, et encore plus.

4.2 Taux de variation d'une fonction

Définition 4.2.1

Si f est une fonction dont le domaine inclut l'intervalle $[a, b]$, le **taux de variation moyen** de f entre a et b est

$$\text{Taux de variation moyen de } f \text{ entre } a \text{ et } b = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple 4.2.2

Suite à une expérience de laboratoire sur une culture de bactéries dans un milieu qui ne leur est pas favorable, on observe que la fonction $g(t) = 50 e^{-2t}$ représente le nombre de bactéries par cm^3 au temps t en heures.

Cette formule demande quelques clarifications. On remarque que g peut retourner des valeurs réelles qui ne sont pas des entiers. Cela ne semble pas « rationnel » car on ne peut pas avoir une fraction de bactérie (e.g. on ne peut pas avoir un dixième de bactérie). Il faut comprendre que g retourne un nombre moyen de bactéries par cm^3 dans un contenant qui pourrait avoir un mètre cube. La courbe donnée par g (voir figure 4.2) est une très bonne représentation du nombre de bactéries par cm^3 en fonction du temps t en heures.

Le taux de variation moyen du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 10$ est

$$\frac{g(10) - g(0)}{10 - 0} = \frac{50 e^{-20} - 50}{10 - 0} \approx -5.0000$$

bactéries par cm^3 par heure. C'est-à-dire que le nombre de bactéries décroît en moyenne de 5 bactéries par cm^3 par heure pendant les dix premières heures. On dit que la population de bactéries a un taux de croissance moyen de -5 bactéries par cm^3 par heure. On aurait pu parler de décroissance mais la tradition veut que l'on parle de croissance négative.

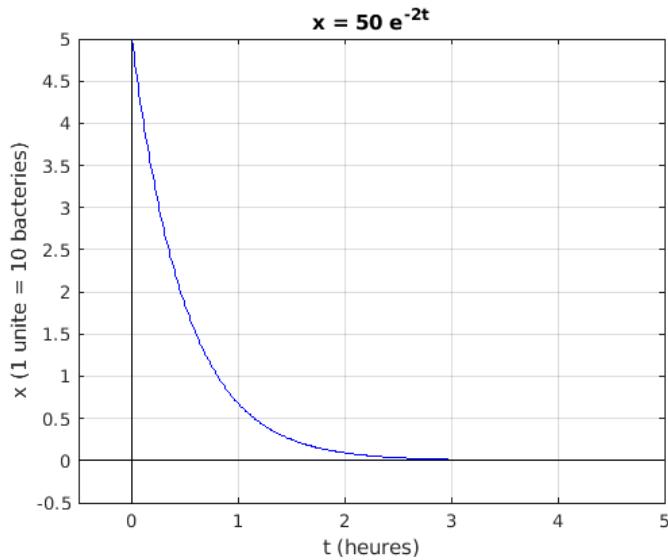


FIGURE 4.2 – Graphe de $x = 50 e^{-2t}$ pour $0 \leq t \leq 5$ heures.

Si on regarde le graphe de g , on voit que la population de bactéries décroît plus rapidement dans les premières heures. Par exemple, le taux de croissance moyen de la population de bactéries entre $t = 0$ et $t = 3$ est

$$\frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{50 e^{-6} - 50}{3 - 0} \approx -16.625$$

bactéries par cm^3 par heure. Donc, le nombre de bactéries décroît en moyenne de 16.625 bactéries par cm^3 par heure pendant les trois premières heures.

La population de bactéries a théoriquement disparu après 10 heures car il reste

$$g(10) = 50 e^{-20} \approx 1.0306 \times 10^{-7}$$

bactéries par cm^3 après 10 heures. 

Qu'arrivera-t-il si on calcul les taux de variation moyens sur des intervalles $[a, b]$ de plus en plus petit ; c'est-à-dire, pour lesquelles b tend vers a ?

Exemple 4.2.3

Revenons à l'exemple précédent au sujet d'une population de bactéries. Si on calcul le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) sur des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est de plus en plus près de a , on obtient les données suivantes :

a heures	b heures	$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ bactéries par cm^3 par heure
1	2	-5.8509822...
1	1.5	-8.5548214...
1	1.1	-12.2660624...
1	1.01	-13.3990907...
1	1.001	-13.5200038...
1	1.0001	-13.5321750...
1	1.00001	-13.5333929...
1	1.000001	-13.5335147...
1	1.0000001	-13.5335269...

Comme le taux de croissance moyen n'a pas vraiment le temps de changer entre $t = a = 1$ et $t = b = 1.0000001$ heure, on peut dire que le taux de croissance à $t = 1$ heure est approximativement -13.5335269 bactéries par cm^3 par heure. On pourrait prendre des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est encore plus près de 1 que 1.0000001. Si on fait cela, on trouve que le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) approche -13.53352832... bactéries par cm^3 par heure. Cette dernière valeur est le **taux de variation instantané** du nombre de bactéries à $t = 1$ heure. On définit le **taux de croissance** de la population de bactéries à $t = 1$ heure comme étant ce taux de variation instantané.

On aurait pu calculer des taux de variation moyens pour des intervalles de la forme $[b, a]$, où $b < a$ tend vers a . On aurait trouvé le même taux de variation instantané. ♣

Définition 4.2.4

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R}$, le **taux de variation instantané** de f au point a est la valeur M unique (si une telle valeur existe) telle que le taux de variation moyen $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ tend vers M lorsque b tend vers a où b peut être plus petit ou plus grand que a .

On remarque que le taux de variation moyen

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est aussi la pente de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Une droite qui passe par au moins deux points d'une courbe est une **sécante**.

Exemple 4.2.5

Pour la population de bactéries étudiée précédemment, on a tracé à la figure 4.3 les sécantes qui passent par les points suivants :

1. $(1, 50 e^{-2})$ et $(4, 50 e^{-8})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{50 e^{-8} - 50 e^{-2}}{4 - 1} = -2.24999701\dots$$

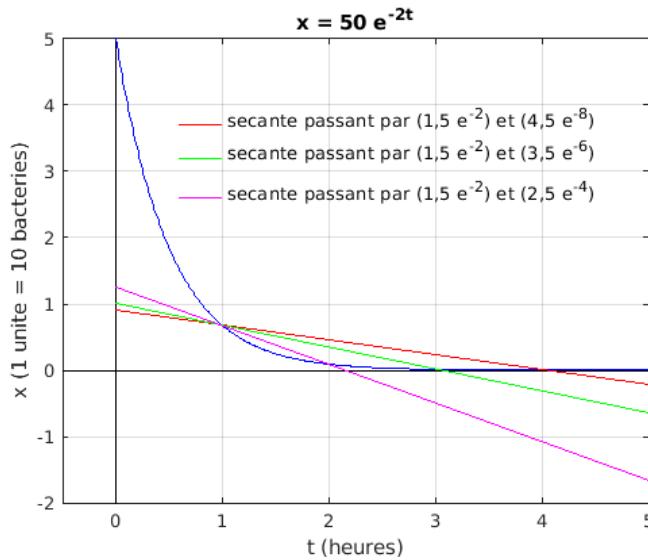


FIGURE 4.3 – Quelques sécantes du graphe de $x = 50 e^{-2t}$.

2. $(1, 50 e^{-2})$ et $(3, 50 e^{-6})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{50 e^{-6} - 50 e^{-2}}{3 - 1} = -3.321413276\dots$$

3. $(1, 50 e^{-2})$ et $(2, 50 e^{-4})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{50 e^{-4} - 50 e^{-2}}{2 - 1} = -5.850982217\dots$$



Que devient la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ si b est de plus en plus près de a ? L'exemple suivant va fournir une réponse à cette question.

Exemple 4.2.6

Toujours pour la population de bactéries de l'exemple 4.2.2, on a tracé à la figure 4.4 les sécantes qui passent par les points suivants.

1. $(1, 50 e^{-2})$ et $(1.1, 50 e^{-2.2})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.1) - g(1)}{1.1 - 1} = \frac{50 e^{-2.2} - 50 e^{-2}}{1.1 - 1} = -12.2660624\dots$$

2. $(1, 50 e^{-2})$ et $(1.001, 51 e^{-2.002})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.001) - g(1)}{1.001 - 1} = \frac{50 e^{-2.002} - 50 e^{-2}}{1.001 - 1} = -13.5200038\dots$$

On remarque que, pour des valeurs de b très près de $a = 1$, il devient de plus en plus difficile de différencier le graphe de la fonction g dans le voisinage de $x = 1$ de la sécante qui passe

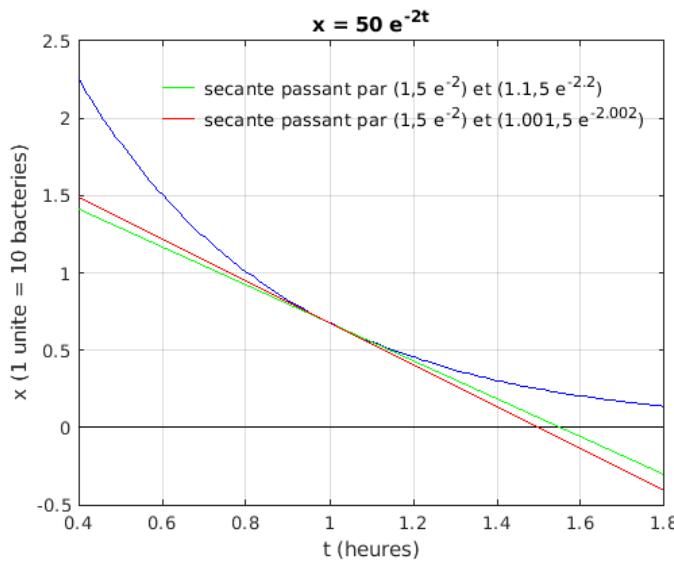


FIGURE 4.4 – La sécante qui passe par $(1, 50e^{-2})$ et $(1.001, 50e^{-2.002})$ se confond à la courbe $x = 50 e^{-2t}$ pour t très près de $t = 1$ heure.

par les points $(a, g(a)) = (1, g(1))$ et $(b, g(b))$. À la limite, ces sécantes approchent une droite que l'on ne peut dissocier de la courbe $x = g(t)$ pour t assez près de $t = 1$. Cette droite est appelée la droite tangente à la courbe au point $(1, g(1))$. La pente de cette droite est la valeur limite des pentes des sécantes qui passent par $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$ lorsque que b tend vers $a = 1$. Dans le cas présent, cette pente est $-13.53352832\dots$ que l'on a trouvée à l'exemple-4.2.3. ♣

Définition 4.2.7

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient $a \in \mathbb{R}$. La droite

$$y = h(x) = f(a) + M(x - a) ,$$

où M est le taux de variation instantané de f à $x = a$, est la **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

On a que la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a .

Au moment de donner la définition de la dérivée d'une fonction en un point, on donnera un sens mathématique à « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ».

En résumé, lorsque b approche a , la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ approche une droite qui passe par $(a, f(a))$ et qui est indissociable (presque superposée) à la courbe $y = f(x)$ pour x assez près de $x = a$. Cette droite limite est la droite tangente que l'on vient de définir.

4.3 Dérivée d'une fonction en un point

La **dérivée** d'une fonction f en un point $x = a$ n'est rien d'autre que le taux de variation instantané de f à a .

Avec la définition de limite d'une fonction en un point, on peut donner un sens mathématique au taux de variation instantané de f au point a . À la section 4.2, on a défini le taux de variation instantané de f au point a comme étant le nombre M tel que le taux de variation moyen $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ approche M lorsque b approche a où b peut être plus petit ou plus grand que a . En termes mathématiques, l'énoncé précédent est simplement

$$M = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On obtient la définition suivante.

Définition 4.3.1

Soit f une fonction définie dans un voisinage de a incluant le point a . La **dérivée de f au point a** , dénotée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est

$$f'(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si cette limite existe.

La limite précédente est équivalente à

$$f'(a) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si cette limite existe. Il suffit de substituer $x = a + h$ dans la première limite pour obtenir la deuxième et vice-versa. On a que x approche a si et seulement si $h = x - a$ approche 0. Notez que h peut être plus petit ou plus grand que 0.

Exemple 4.3.2

À l'exemple 4.2.3, on a montré numériquement que

$$g'(1) = -13.53352832\dots \text{ bactéries par cm}^3/\text{heure}$$

où $g(t) = 50e^{-2t}$. 

Pour l'exemple qui suit, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.3.3

Le **taux de croissance relatif** d'une population au temps t est

$$\frac{\text{taux de croissance instantané (au temps } t\text{)}}{\text{nombre d'individus dans la population (au temps } t\text{)}}$$

En d'autres mots, si $p(t)$ est le nombre d'individus au temps t , le taux de croissance relatif au temps t est $\frac{p'(t)}{p(t)}$.

Exemple 4.3.4

On veut estimer le taux de croissance relatif à $t = 1$ et $t = 2$ d'une population dont le nombre d'individus au temps t (en heures) est donnée par $p(t) = 2^t$.

On commence par estimer $p'(1)$, le taux de croissance instantané à $t = 1$. On a

$$\begin{aligned} \frac{p(1.01) - p(1)}{0.01} &= \frac{2^{1.01} - 2}{0.01} \approx 1.3911100, & \frac{p(1.001) - p(1)}{0.001} &= \frac{2^{1.001} - 2}{0.001} \approx 1.386774925, \\ \frac{p(1.0001) - p(1)}{0.0001} &= \frac{2^{1.0001} - 2}{0.0001} \approx 1.386342407529995, & \dots &\rightarrow 1.3862943611\dots \end{aligned}$$

Donc, $p'(1) = 1.3862943611\dots$

De même, on peut estimer $p'(2)$, le taux de croissance instantané à $t = 2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{p(2.01) - p(2)}{0.01} &= \frac{2^{2.01} - 4}{0.01} \approx 2.7822200, & \frac{p(2.001) - p(2)}{0.001} &= \frac{2^{2.001} - 4}{0.001} \approx 2.773549850, \\ \frac{p(2.0001) - p(2)}{0.0001} &= \frac{2^{2.0001} - 4}{0.0001} \approx 2.7726848151, \dots &\rightarrow 2.772588722\dots \end{aligned}$$

Donc, $p'(2) = 2.772588722\dots$

Le taux de croissance relatif à $t = 1$ est

$$\frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{1.3862943611\dots}{2} = 0.693147180559945\dots$$

et le taux de croissance relatif à $t = 2$ est

$$\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{2.772588722\dots}{4} = 0.693147180559945\dots$$

Est-ce que $\frac{p'(t)}{p(t)} = 0.693147180559945\dots$ pour tout t ? On verra prochainement que la réponse est affirmative.



Si

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

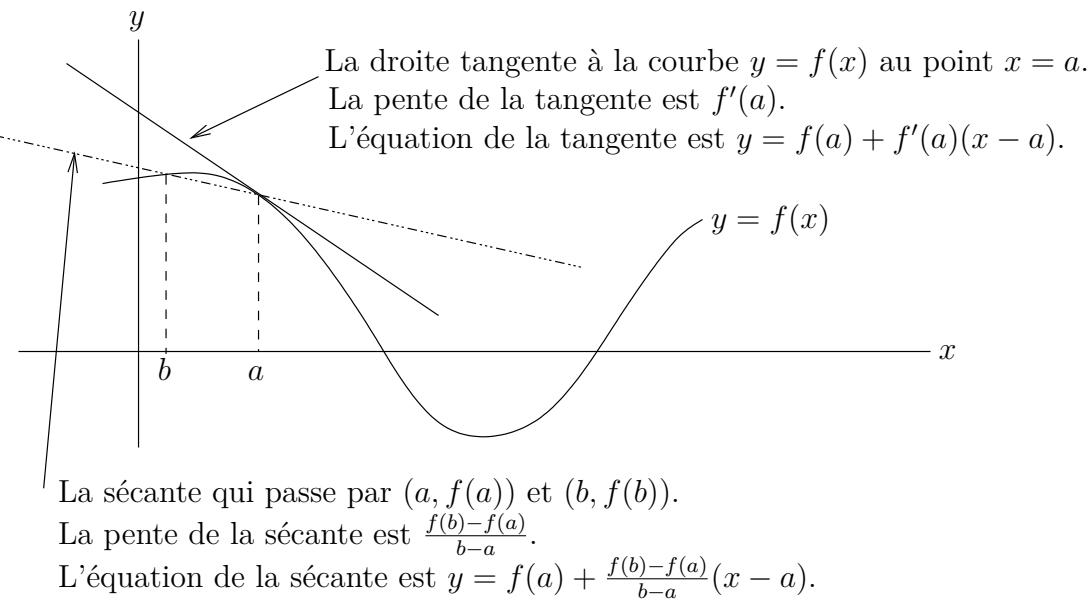


FIGURE 4.5 – Interprétation graphique de la dérivée d'une fonction f au point $x = a$

on a pour x près de a que

$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si on résout cette relation pour $f(x)$ on trouve

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4.3.1)$$

Le côté droit de cette relation n'est nul autre que l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ définie à la section 4.2 car $f'(a)$ est le taux de variation instantané. Donc, $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

On retrouve à la figure 4.5 un résumé de l'interprétation graphique de la dérivée.

Proposition 4.3.5

Si f est une fonction différentiable au point a , alors

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

pour x très près de a .

L'équation de la droite tangente est une formule simple pour estimer la fonction f au voisinage du point $x = a$. Voir la figure 4.6. L'approximation de fonctions compliquées à l'aide de droites tangentes ou de polynômes sera abordé dans une prochaine section.

Remarque 4.3.6 

En Analyse Mathématique, on définit la dérivée d'une fonction f au point a de la façon suivante.

Définition 4.3.7

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La dérivée de la fonction f au point a est le nombre $f'(a)$ qui satisfait

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0. \quad (4.3.2)$$

Cette définition de la dérivée est équivalente à la définition de la dérivée que l'on a donnée. En effet, puisque

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right|$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = 0,$$

on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0.$$

Il découle de cette définition que, lorsque x approche a , la distance entre $f(x)$ et $f(a) + f'(a)(x - a)$ approche 0 plus vite que la distance entre x et a . Voir la figure 4.6. Cette propriété explique les énoncées « la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = h(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ sont presque superposées lorsque l'on considère des valeurs de x assez près de $x = a$ » et « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ». ♠

Remarque 4.3.8

Une fonction peut ne pas avoir de dérivée en un point. Prenons la fonction $g(x) = |x|$. La dérivée de g au point $x = 0$ n'existe pas. Les tableaux suivants donnent deux suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0. Dans le premier tableau, les valeurs $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approchent 1 alors que dans le second tableau, les valeurs $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approchent -1.

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$	n	$x_n = -\frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$
1	1	1	1	-1	-1
2	1/2	1	2	-1/2	-1
3	1/3	1	3	-1/3	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10000	1/10000	1	10000	-1/10000	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

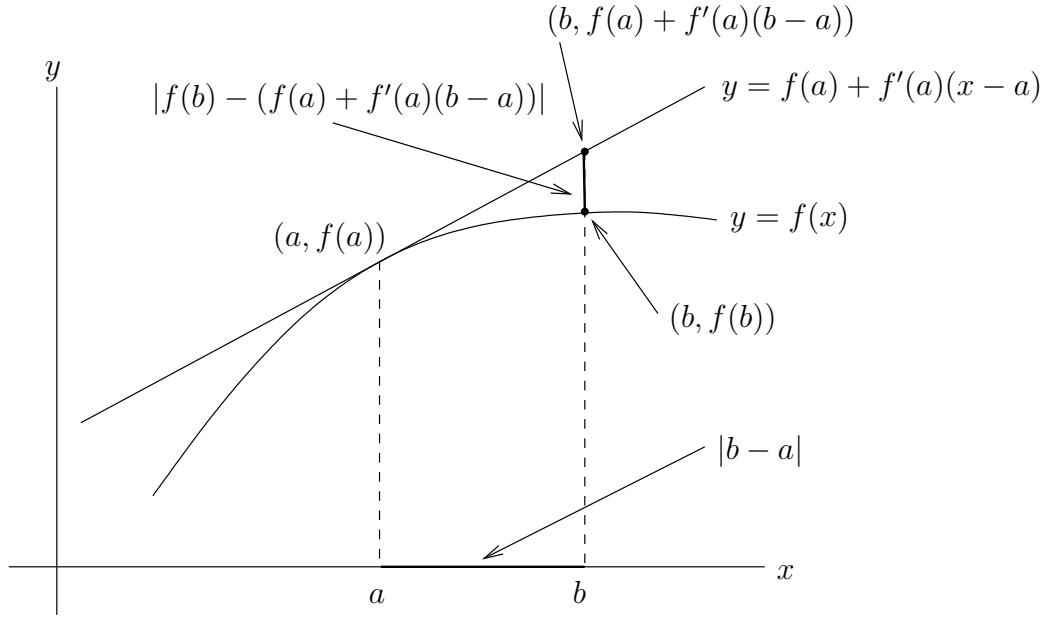


FIGURE 4.6 – Distance entre la courbe $y = f(x)$ et la droite tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ à $x = b$. La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ a une pente de $f'(a)$, le taux de variation instantané de f à $x = a$.

On ne peut pas trouver une valeur unique M telle que $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approche M pour toute suite x_n qui approche 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ n'existe pas, et $g'(0)$ n'existe pas.

De plus, à partir du graphe de g à la figure 4.7, on voit qu'il n'y a pas de droite qui passe par $(0, g(0)) = (0, 0)$ et qui soit indissociable de la courbe $y = g(x) = |x|$ pour x assez près de 0 où x peut être inférieur ou supérieur à 0. On peut satisfaire la condition précédente pour $x < 0$ ou $x > 0$ séparément mais elle ne peut pas être satisfaite pour $x < 0$ et $x > 0$ en même temps. La droite $y = x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x > 0$ mais pas pour $x < 0$. De même, la droite $y = -x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x < 0$ mais pas pour $x > 0$. Les autres droites qui passent par $(0, 0)$ sont clairement distinctes de la courbe $y = g(x)$. ♠

Remarque 4.3.9

Il n'est pas nécessaire que le graphe de la fonction ait un « coin » comme à la remarque précédente pour que la fonction ne soit pas différentiable. La fonction f dont le graphe se trouve à la figure 4.8 n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale ; elle a donc une pente infinie. ♠

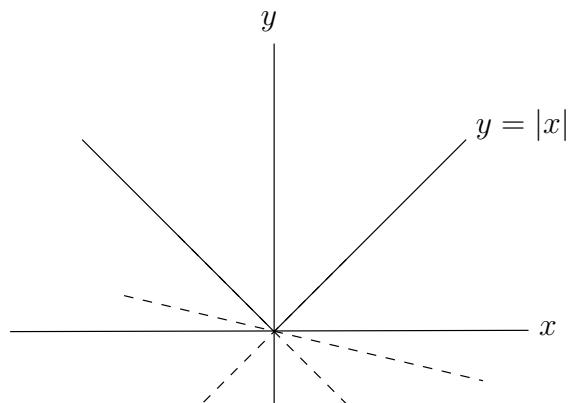


FIGURE 4.7 – Le graphe de $y = g(x) = |x|$. On voit que g n'a pas de dérivée à $x = 0$ car il n'y a pas de droite qui soit indissociable du graphe de g près de l'origine.

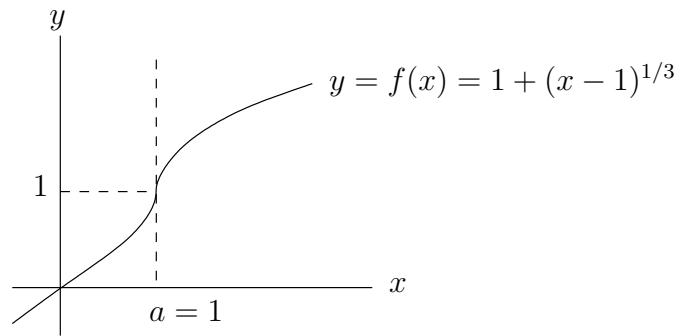


FIGURE 4.8 – La fonction f représentée par le graphe dans cette figure n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale.

4.4 Dérivée d'une fonction

À la section précédente, on a vu la définition de la dérivée $f'(a)$ d'une fonction f en un point $x = a$. C'est-à-dire,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si la limite existe. Si on calcule $f'(a)$ pour toutes les valeurs de a , on obtient la fonction qui, pour tout nombre réel a , donne la valeur $f'(a)$ de la dérivée de f au point $x = a$. Cette fonction est appelée la **dérivée de f** . Comme la tradition veut que l'on utilise x comme variable indépendante d'une fonction, on obtient la définition suivante.

Définition 4.4.1

La **dérivée** d'une fonction f est la fonction f' définie par

$$f'(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

pour toutes les valeurs de x où la limite existe. On utilise aussi la notation $\frac{df}{dx}$ pour désigner f' .

Puisque $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$, on en déduit les propriétés suivantes :

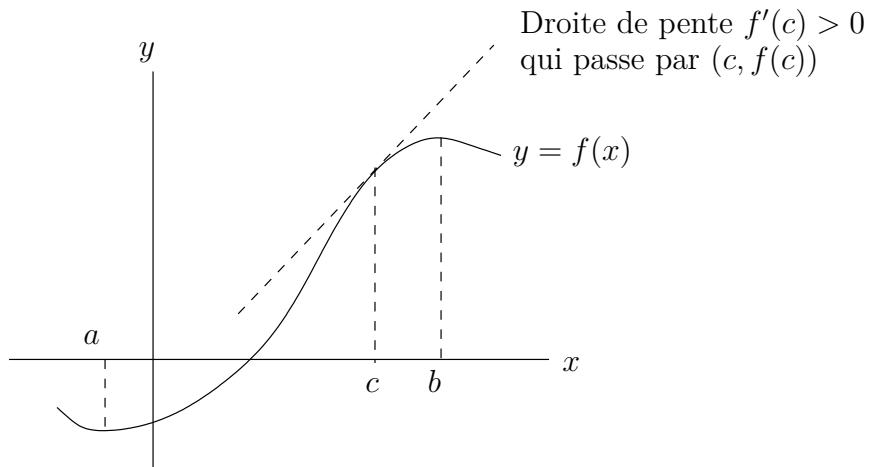


FIGURE 4.9 – $f'(x) > 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement croissante pour $a < x < b$.

Proposition 4.4.2

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$.

1. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est positive en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est positive pour tout x entre a et b . Voir la figure 4.9.
2. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est négative en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est négative pour tout x entre a et b . Voir la figure 4.10.
3. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c , et si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c , alors la fonction f a un maximum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ près de c et strictement décroissante pour $x > c$ près de c . Voir la figure 4.11.
4. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c , et si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c , alors la fonction f a un minimum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement décroissante pour $x < c$ près de c et strictement croissante pour $x > c$ près de c . Voir la figure 4.12.

Exemple 4.4.3

À la figure 4.1, la fonction f est strictement croissante pour $x < c$ et $x > e$; ce sont les intervalles où $f'(x) > 0$. De même, f est strictement décroissante pour $c < x < e$; c'est l'intervalle où $f'(x) < 0$. On a un maximum local à $x = c$ qui est prédict par $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c . Finalement, on a un minimum local à

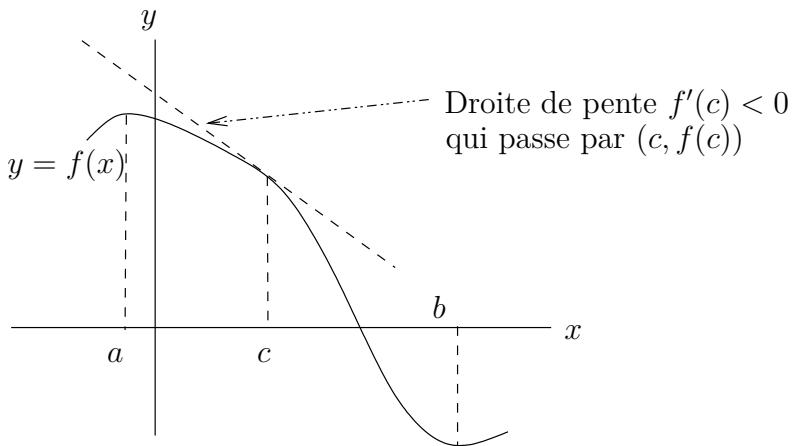


FIGURE 4.10 – $f'(x) < 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement décroissante pour $a < x < b$.

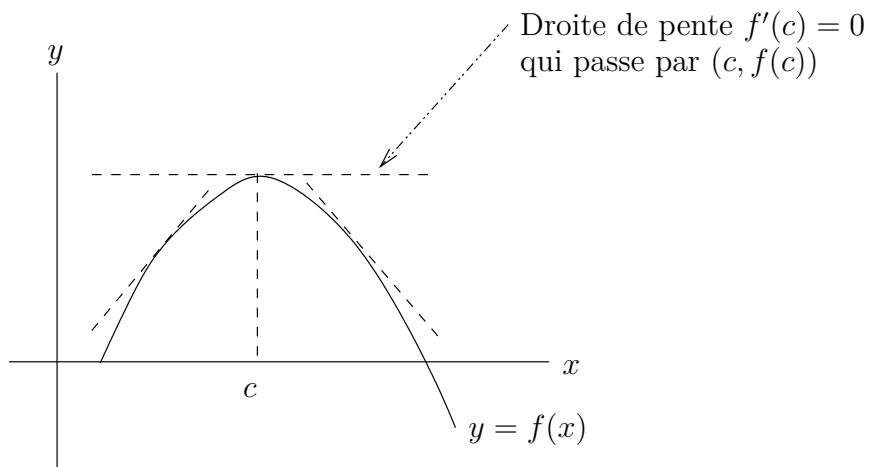


FIGURE 4.11 – La fonction f a un maximum local à $x = c$ car $f'(x) < 0$ pour $x > c$ et $f'(x) > 0$ pour $x < c$.

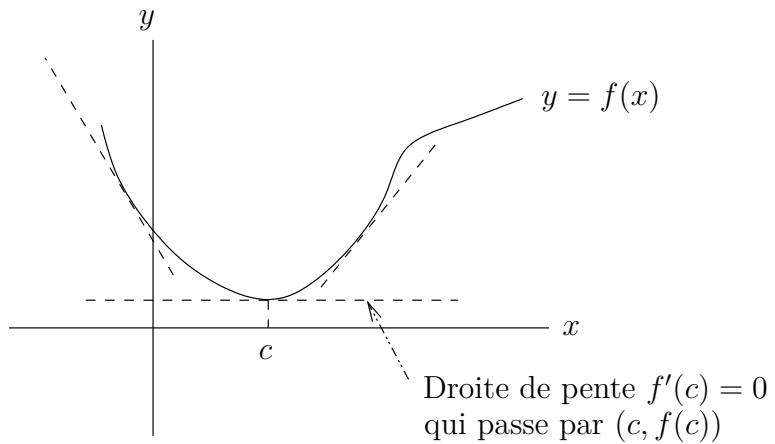


FIGURE 4.12 – La fonction f a un minimum local à $x = c$ car $f'(x) > 0$ pour $x > c$ et $f'(x) < 0$ pour $x < c$.

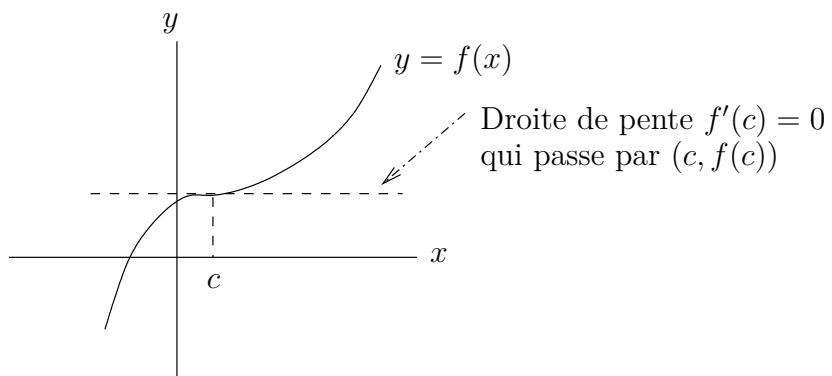


FIGURE 4.13 – On a $f'(c) = 0$ mais on n'a pas de minimum ou maximum local à $x = c$.

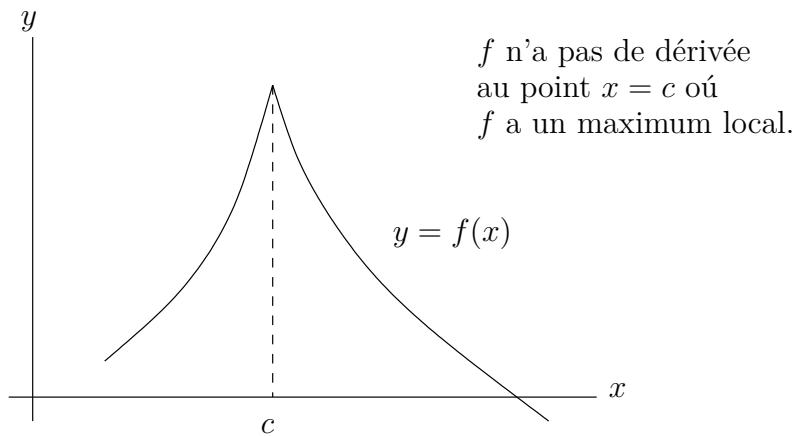


FIGURE 4.14 – On a un maximum local au point $x = c$ mais la fonction f n'a pas de dérivée à ce point.

$x = e$ qui est prédit par $f'(x) < 0$ pour $x < e$ près de e et $f'(x) > 0$ pour $x > e$ près de e . ♣

Remarque 4.4.4

Si f' est une fonction continue, puisque f' change de signe à un maximum ou un minimum local c , on doit avoir $f'(c) = 0$. Par contre, $f'(c) = 0$ n'implique pas que l'on ait un maximum ou minimum local comme on peut le constater à la figure 4.13.

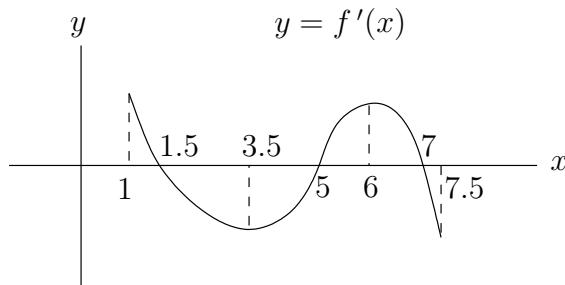
De plus, f peut ne pas avoir de dérivée à un maximum ou minimum local comme on peut le voir à la figure 4.14.

Nous reviendrons plus en détails sur ce sujet au chapitre sur les applications de la dérivée.



Exemple 4.4.5

Le graphe de f' est donné dans la figure ci-dessous.



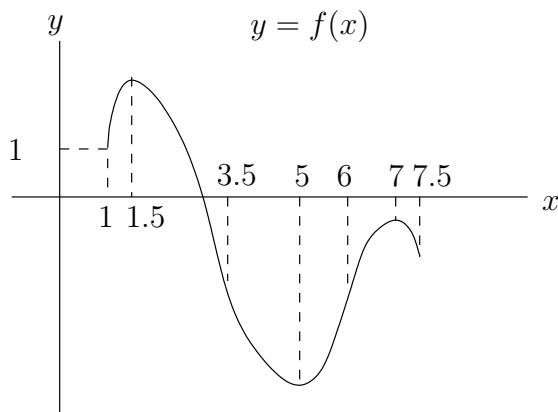
Si on sait que $f(1) = 3$, on peut dessiner un graphe approximatif de f à partir de l'information fournie par le graphe de f' .

Entre 1 et 1.5, la fonction est strictement croissante car f' est positive. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1 à 1.5, la pente de f est de moins en moins abrupte lorsque x augmente de 1 à 1.5 et la fonction f croît donc de moins en moins rapidement.

Entre 1.5 et 5, la fonction f est strictement décroissante car f' est négative. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1.5 à 3.5, la pente de f devient de plus en plus abrupte et f décroît donc de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 1.5 à 3.5. Par contre, f' augmente lorsque x augmente de 3.5 à 5. Ainsi, la pente de f devient de moins en moins abrupte et donc f décroît de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 3.5 à 5.

En raisonnant comme on l'a fait aux paragraphes précédents, on obtient que f croît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 5 à 6, et de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 6 à 7. Finalement, la fonction f décroît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 7 à 7.5.

On retrouve un graphe possible pour f dans la figure suivante.



Le théorème qui suit n'a généralement peu d'utilité du point de vue numérique. Par contre, il est très utile du point de vue conceptuelle comme les exemples qui suivront l'énoncé du théorème vont démontrer.

Théorème 4.4.6 (Théorème de la moyenne / Théorème des accroissements finis)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

On insiste sur le fait que ξ dépend de a et b (d'où la notation $\xi = \xi(a, b)$) et donc varie si a et b changent. Voir la figure 4.15.

Exemple 4.4.7

Si un train prend deux heures, à une vitesse moyenne de 100 km/h, pour se rendre d'Ottawa à Montréal, alors il faut qu'à un moment durant le voyage la vitesse (instantanée) du train

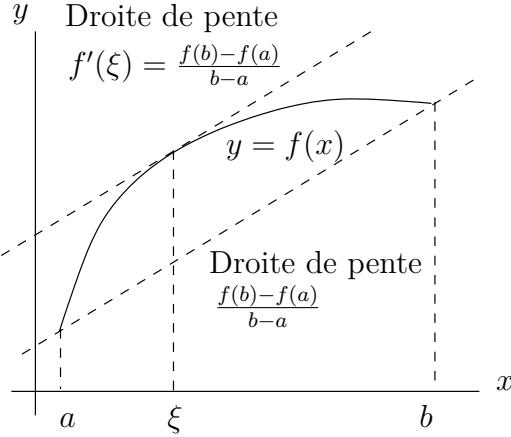


FIGURE 4.15 – Une représentation graphique du théorème de la moyenne.

soit de 100 km/h. Si ce n'est pas le cas, cela implique que la plus grande vitesse du train durant le voyage a été inférieure à 100 km/h (si on suppose que le train part au repos) et donc la vitesse moyenne est inférieure à 100 km/h.

De même, si le taux moyen de croissance d'une population de bactéries pour une période de 24 heures est 1,000 bactéries par heure, alors, à un moment durant la période de 24 heures, le taux instantané de croissance de la population est de 1,000 bactéries par heure.

Ces deux observations sont deux réalisations concrètes du théorème de la moyenne. ♣

Le théorème de la moyenne peut être utilisé pour donner une démonstration analytique de la proposition 4.4.2 ; une démonstration qui ne fait pas appel à l'interprétation graphique de la dérivée.

Montrons que si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. Soit $x_1 < x_2$ deux points de l'intervalle $]a, b[$. Le théorème de la moyenne donne ξ entre x_1 et x_2 tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Puisque $\xi \in]a, b[$, on a $f'(\xi) > 0$ et ainsi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

et donc

$$f(x_2) > f(x_1).$$

De la même façon, on pourrait montrer que si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) < 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$.

On verra très prochainement que la dérivée d'une fonction constante est nulle en tout point. Est-ce que les fonctions constantes sont les seules fonctions dont la dérivée est nulle en tout point ? Le théorème de la valeur moyenne nous permet de répondre par l'affirmative à cette question. En effet, supposons que f soit une fonction telle que $f'(x) = 0$ pour tout x .

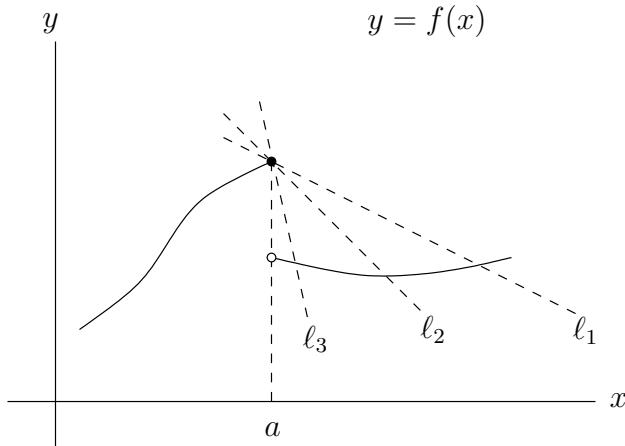


FIGURE 4.16 – Cette fonction n'est pas continue à $x = a$ et donc sa dérivée n'existe pas à ce point,

Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques, il existe grâce au théorème de la moyenne un point ξ entre x_1 et x_2 telle que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) .$$

Or $f'(\xi) = 0$. Donc, $f(x_2) = f(x_1)$.

4.4.1 Différentiable implique continue

On remarque que la fonction f donnée à la figure 4.16 n'est pas différentiable au point a où elle n'est pas continue. La pente des sécantes $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ approche moins l'infini car ces sécantes approchent une droite verticale. On a donc

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\infty .$$

Il semble donc que les fonctions doivent être continues aux points où elles sont différentiables. On peut vérifier cela à partir de la définition de la dérivée.

Théorème 4.4.8

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable au point $c \in]a, b[$, alors f est continue au point c .

On peut démontrer ce théorème de la façon suivante. Si la fonction f est différentiable au point c , on a donc que la limite

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

existe et est égale à $f'(c) \in \mathbb{R}$. En particulier, f doit être définie au point c . Mais alors,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow c} (f(z) - f(c)) &= \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{f(z) - f(c)}{z - c} \right) (z - c) \\ &= \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{f(z) - f(c)}{z - c} \right) \times \lim_{z \rightarrow c} (z - c) = f'(c) \times 0 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c).$$

Ce qui prouve que f est continue au point c .

4.4.2 Une première application de la dérivée ; la vitesse d'un objet

Soit $x(t)$ la position en kilomètres (km) au temps t en heures (h) d'un véhicule se déplaçant en ligne droite. La vitesse moyenne d'un véhicule est donnée par la distance parcourue divisée par le temps nécessaire pour couvrir cette distance. Si la distance est en kilomètres et le temps est en heures, la vitesse moyenne est en kilomètres par heure (km/h). La formule pour calculer la vitesse moyenne entre $t = a$ heures et $t = b > a$ heures est donnée par

$$\frac{x(b) - x(a)}{b - a} \text{ km/h}.$$

Si b est très près de a , alors on peut assumer que la vitesse du véhicule entre $t = a$ et $t = b$ heures est (presque) constante et est égale à la vitesse moyenne entre $t = a$ et $t = b$. Si on laisse b tendre vers a , on obtient la vitesse instantanée du véhicule au temps $t = a$ heures. C'est la vitesse du véhicule à précisément $t = a$ heures. Donc,

$$x'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}$$

est la vitesse instantanée en km/h du véhicule à $t = a$ heures.

4.5 Dérivées de quelques fonctions élémentaires

On a vu précédemment comment calculer numériquement la dérivée d'une fonction en un point. Malheureusement, pour analyser le comportement d'une fonction sur un intervalle donné à l'aide de la dérivée, on ne peut pas calculer numériquement la dérivée à tous les points de l'intervalle pour déterminer le signe de la dérivée en ces points. Il faut donc chercher des formules qui nous permettront de calculer la dérivée d'une fonction rapidement et efficacement.

Nous allons voir dans les prochaines sections qu'il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles et trigonométriques à partir de la définition de la dérivée. Il existe des formules générales pour calculer ces dérivées.

Nous aurions pu conclure ce chapitre avec une courte section énonçant les règles de dérivation sans ou avec le minimum de justifications. Le lecteur n'aurait eu qu'à mémoriser ces règles. Cependant, cet approche n'aurait pas permis au lecteur de développer ses capacités de raisonnement logique et mathématique.

Nous avons donc choisi de présenter dans cette section celles qui suivent les règles de dérivation de façon logique et avec le plus de rigueur possible sans aller aux extrêmes. Chaque règle est introduite quand et seulement quand les concepts nécessaires pour justifier cette règle ont été présentés. C'est pour cette raison, par exemple, que la règle de dérivation pour $f(x) = x^\alpha$ avec α un nombre réel quelconque est présentée seulement à la presque toute fin du chapitre. C'est portant une des premières règles de dérivation qui est donnée dans le cours de mathématiques de 12^e année au niveau secondaire.

4.5.1 Dérivée de $f(x) = x^n$ où n est un entier positif ou nul

Quelle est la dérivée de la fonction constante f ; c'est-à-dire, de la fonction définie par $f(x) = c$ pour tout x où c est une constante?

Si on utilise le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, on trouve que $f'(x) = 0$ pour tout x car le graphe de f est une droite horizontale et les droites horizontales ont une pente nul. On utilise le fait que la tangente à un droite est la droite elle-même.

On peut aussi utiliser la définition de la dérivée pour démontrer que $f'(x) = 0$ pour tout x . Puisque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

quel que soit h , on a que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On a donc que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

pour tout x . On obtient donc la règle suivante.

Proposition 4.5.1

Soit c une constante. Si $f(x) = c$ pour tout x , alors $f'(x) = 0$ pour tout x .

On considère maintenant $f(x) = x$ pour tout x . Si on utilise encore le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, on trouve que $f'(x) = 1$ pour tout x car $y = f(x) = x$ est une droite de pente 1 qui est sa propre tangente en tout point.

On peut démontrer à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de $f(x) = x$ est bien $f'(x) = 1$ pour tout x . Pour faire cela, il suffit de remarquer que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

pour tout $h \neq 0$. Donc,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

La fonction constante à 1 sur la droite réelle approche évidemment 1 quand on approche l'origine.

Considérons maintenant la fonction $f(x) = x^2$ pour tout x . Dans le tableau suivant, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ 2x - f'(x) $
-1	-2	0
1	2.00001000001...	$0.1000001\dots \times 10^{-4}$
2	4.00001000002...	$0.1000002\dots \times 10^{-4}$
π	6.2831953071...	$0.99999\dots \times 10^{-5}$
3.5	7.00001000009...	$0.1000009\dots \times 10^{-4}$

On remarque que $f'(x) \approx 2x$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. On peut conjecturer que $f'(x) = 2x$ pour tout x .

Montrons à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est bien $f'(x) = 2x$ pour tout x . On a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui approche $2x$ lorsque h tend vers 0. Donc,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

quel que soit x .

Maintenant que l'on sait que la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ pour tout x , il est très facile de trouver la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point de cette courbe. Il n'est plus nécessaire de calculer numériquement les pentes des tangentes à l'aide de limites de pentes de sécantes.

Exemple 4.5.2

Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(x, y) = (3, 9)$ sur cette courbe.

On a vu que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point $x = a$ est donnée par $f'(a)$. Ainsi, la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(3, 9)$ est $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.

L'équation de la tangente dans la forme point-pente est donc $y - 9 = 6(x - 3)$, ce qui donne $y = 6x - 9$ dans la forme standard. On a tracé le graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$ à la figure 4.17.



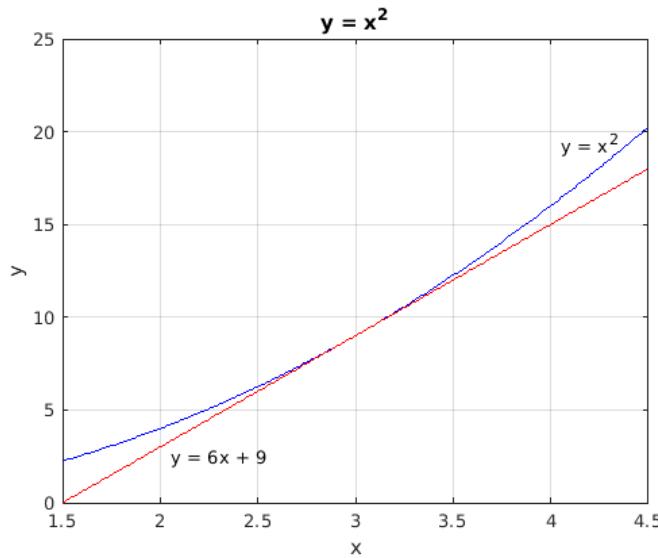


FIGURE 4.17 – Graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$.

En procédant comme on la fait avec la fonction $f(x) = x^2$, on peut montrer que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$, celle de $f(x) = x^4$ est $f'(x) = 4x^3$, et ainsi de suite. On peut obtenir un résultat dans le cas général où $f(x) = x^n$ avec n un entier positif à l'aide de la formule du binôme.

Puisque

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n \quad ,$$

on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n \right) - x^n \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \dots +}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} \underbrace{nh^{n-2}x}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} + \underbrace{h^{n-1}}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} \right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

On obtient la règle suivante.

Proposition 4.5.3

Soit $f(x) = x^n$ pour un entier $n \neq 0$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour les valeurs de x où x^{n-1} est définie.

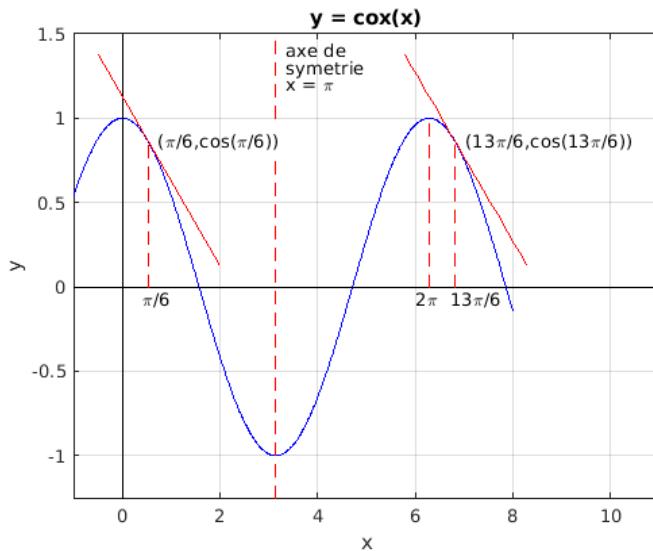


FIGURE 4.18 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont parallèles.

4.5.2 Dérivée du sinus et du cosinus

Si $f(x) = \cos(x)$, quel sera $f'(x)$?

Commençons par quelques observations qui nous guideront dans la recherche de la dérivée de f . Puisque f est périodique de période 2π , alors f' sera aussi périodique de période au plus 2π comme on peut le constater grâce à la figure 4.18. Par exemple, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(\pi/6, \cos(\pi/6)) = (\pi/6, \sqrt{3}/2)$ est parallèle à la tangente à cette même courbe au point $(13\pi/6, \cos(13\pi/6)) = (13\pi/6, \sqrt{3}/2)$. Donc, les deux tangentes ont la même pente. Ainsi, $f'(\pi/6) = f'(13\pi/6)$.

De plus, puisque $f(x) = f(2\pi - x)$, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = \pi$. Ainsi, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(2\pi - a, f(2\pi - a))$ est obtenue de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ par une symétrie par rapport à l'axe vertical $x = \pi$ (Voir la figure 4.19). En particulier, $f'(2\pi - a) = -f'(a)$.

Puisque f a des maximums locaux à $x = 2n\pi$ et des minimums locaux à $x = (2n - 1)\pi$ quel que soit l'entier n , on a que $f'(n\pi) = 0$ pour tout entier n .

À partir du graphe de f , on peut supposer que la plus petite pente pour les tangentes à la courbe $y = f(x)$ est lorsque $x = (4n+1)\pi/2$ et la plus grande pente pour les tangentes de cette même courbe est lorsque $x = (4n + 3)\pi/2$ quel que soit l'entier n . Cela sera démontré plus loin. Donc, f' aura des minimums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n + 1)\pi/2$ et des maximums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n + 3)\pi/2$ quel que soit l'entier n .

Si on utilise le fait que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ sur la courbe, on peut déterminer le signe de $f'(x)$ et même estimer la valeur de

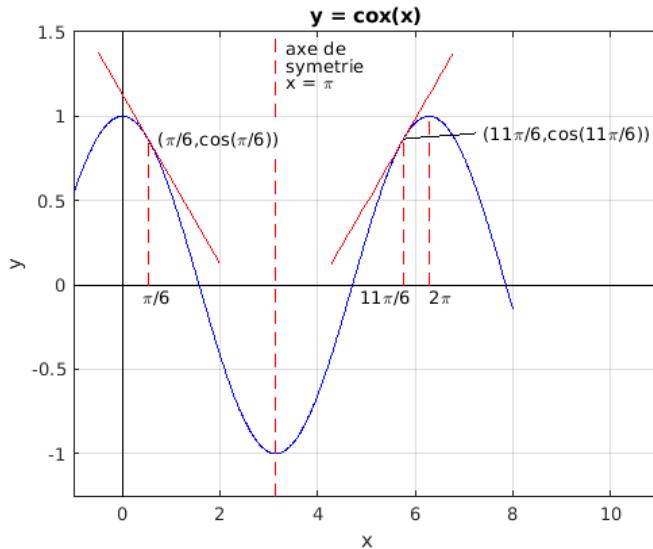


FIGURE 4.19 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont symétriques par rapport à l'axe $x = \pi$.

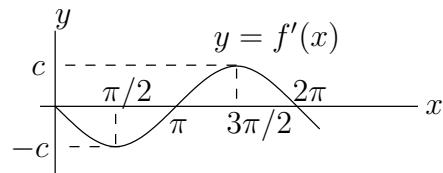


FIGURE 4.20 – Un graphe possible pour la dérivée du cosinus basé sur le signe de la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = \cos(x)$.

$f'(x)$ pour prédire la forme du graphe de f' . On a tracé un graphe possible pour f' à la figure 4.20.

Dans le tableau 4.1, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x) \approx -\sin(x)$ pour les quelques valeurs de x dans le tableau 4.1.

Le graphe associé aux données du tableau 4.1 ainsi que le graphe de $y = -\sin(x)$ sont donnés à la figure 4.21. Les deux graphes sont très semblables. Pour obtenir un meilleur graphe de f' on suggère au lecteur d'ajouter plus de points au tableau 4.1 et de choisir h plus petit dans l'approximation $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de $f'(x)$.

On va démontrer plus loin qu'il est effectivement vrai que $f'(x) = -\sin(x)$.

Si $g(x) = \sin(x)$, on pourrait procéder comme on vient de le faire pour $f(x) = \cos(x)$ pour montrer numériquement que $g'(x) = \cos(x)$. Cependant, il y a une façon plus simple de démontrer cela en assumant que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

x	$f'(x) \approx \frac{f(x + 0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ -\sin(x) - f'(x) $
$0.000000\dots$	-0.000005\dots	0.000005\dots
$\pi/12 = 0.261799\dots$	-0.258824\dots	0.000005\dots
$\pi/6 = 0.523599\dots$	-0.500004\dots	0.000004\dots
$\pi/4 = 0.785398\dots$	-0.707110\dots	0.000004\dots
$\pi/3 = 1.047198\dots$	-0.866028\dots	0.000002\dots
$5\pi/12 = 1.308997\dots$	-0.965927\dots	0.000001\dots
$\pi/2 = 1.570796\dots$	-1.000000\dots	0.000000\dots
$7\pi/12 = 1.832596\dots$	-0.965925\dots	0.000001\dots
$2\pi/3 = 2.094395\dots$	-0.866023\dots	0.000003\dots
$3\pi/4 = 2.356194\dots$	-0.707103\dots	0.000004\dots
$5\pi/6 = 2.617994\dots$	-0.499996\dots	0.000004\dots
$11\pi/12 = 2.879793\dots$	-0.258814\dots	0.000005\dots
$\pi = 3.141593\dots$	0.000005\dots	0.000005\dots
$13\pi/12 = 3.403392\dots$	0.258824\dots	0.000005\dots
$7\pi/6 = 3.665191\dots$	0.500004\dots	0.000004\dots
$5\pi/4 = 3.926991\dots$	0.707110\dots	0.000004\dots
$4\pi/3 = 4.188790\dots$	0.866028\dots	0.000002\dots
$17\pi/12 = 4.450590\dots$	0.965927\dots	0.000001\dots
$3\pi/2 = 4.712389\dots$	1.000000\dots	0.000000\dots
$19\pi/12 = 4.974188\dots$	0.965925\dots	0.000001\dots
$5\pi/3 = 5.235988\dots$	0.866023\dots	0.000003\dots
$7\pi/4 = 5.497787\dots$	0.707103\dots	0.000004\dots
$11\pi/6 = 5.759587\dots$	0.499996\dots	0.000004\dots
$23\pi/12 = 6.021386\dots$	0.258814\dots	0.000005\dots
$2\pi = 6.283185\dots$	-0.000005\dots	0.000005\dots

TABLE 4.1 – Approximations de la dérivée de $f(x) = \cos(x)$ à l'aide du rapport $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$

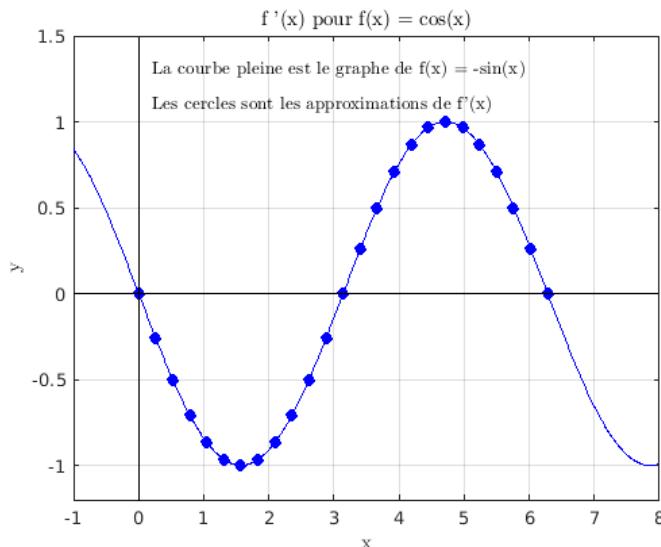


FIGURE 4.21 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = \cos(x)$ qui se retrouvent dans le tableau 4.1 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de $-\sin(x)$.

Puisque

$$g(x) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

on obtient le graphe de g par une translation de $\pi/2$ vers la droite du graphe de f . Il s'en suit que les tangentes au graphe de g sont obtenues par une translation de $\pi/2$ vers la droite des tangentes au graphe de f , et il en est de même pour les pentes de ses tangentes. Ainsi,

$$g'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

On peut aussi expliquer cette égalité à l'aide de la définition de la dérivée. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left((a+h) - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + h\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(a - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

En combinant les deux cas précédents on obtient les formules suivantes :

Proposition 4.5.4

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Soit $f(x) = \cos(x)$. Pour démontrer que $f'(x) = -\sin(x)$, il faut se rappeler que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Or, on a vu à l'exemple 3.1.12 que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= -1 \times 0 = 0$$

car $\frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1}$ est une fonction continue à $h = 0$ et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} = \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos(x) \times 0 - \sin(x) \times 1 = -\sin(x) \end{aligned}$$

quel que soit x .

4.6 Calcul des dérivées

Quelle est la dérivée de $x^{10} + 5x^3 + 4$, de $x \cos(x)$, de $\cos(x^2)$, etc ? Il n'est pas raisonnable de chercher systématiquement la dérivée de chaque fonction comme on l'a fait à la section précédente. Il y a des règles de dérivation qui nous permettront de calculer la dérivée d'un grand nombre de fonctions sans avoir à utiliser la définition de la dérivée comme nous l'avons fait pour les fonctions de la section précédente.

4.6.1 Dérivée d'une fonction multipliée par une constante

Exemple 4.6.1

Soit $x(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture A et $y(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture B. Si on a deux bactéries de la culture A pour chaque bactérie de la culture B en tout temps, alors pour chaque bactérie qui s'ajoute à la culture B, deux bactéries doivent s'ajouter à la culture A pour préserver le rapport de 2 pour 1. Par exemple, si pendant une période de deux heures, le nombre de bactéries de la culture B augmente de 10,000 à 11,000 alors le nombre de bactéries de la culture A doit augmenter de 20,000 à 22,000 pour préserver le rapport de 2 pour 1. Le taux de croissance de la culture A est donc deux fois celui de la culture B.

Mathématiquement, si $x(t) = 2y(t)$ pour tout t alors $x'(t) = 2y'(t)$ pour tout t car $x'(t)$ et $y'(t)$ sont les taux de croissance (taux de variation instantanée) au temps t pour les cultures A et B respectivement. 

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.2

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $f = cg$ où c est une constante, alors

$$f'(x) = cg'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

On peut vérifier à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vrai. Si $f(x) = cg(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = c \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = cg'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple 4.6.3

Cette règle nous permet donc de calculer les dérivées suivantes.

$$\frac{d}{dx}(5x^7) = 5 \frac{d}{dx}(x^7) = 5(7x^6) = 35x^6$$

et

$$\frac{d}{dx}(7 \cos(x)) = 7 \frac{d}{dx}(\cos(x)) = 7(-\sin(x)) = -7 \sin(x)$$

**4.6.2 Dérivée d'une somme de fonctions****Exemple 4.6.4**

Un train se déplace en ligne droite (voir figure 4.22). Si $x(t)$ est la distance au temps t entre la queue du train et le début du trajet, la vitesse du train (taux de variation instantané de sa position) au temps t est donnée par $x'(t)$.

Si $y(t)$ est la distance entre un passager et la queue du train au temps t , alors la vitesse du passager par rapport au train au temps t est $y'(t)$. Comme le passager passe normalement la majorité de son temps assis, on a que $y(t)$ est constant et donc $y'(t) = 0$ pour de long intervalles. De plus, $y'(t)$ sera plus grand que 0 si la personne se déplace vers l'avant du train et plus petit que 0 si la personne se déplace vers l'arrière du train.

La distance au temps t entre le passager et le début du trajet est $z(t) = x(t) + y(t)$, la somme de la distance entre le début du trajet et la queue du train, et de la distance entre la queue du train et la position du passager dans le train.

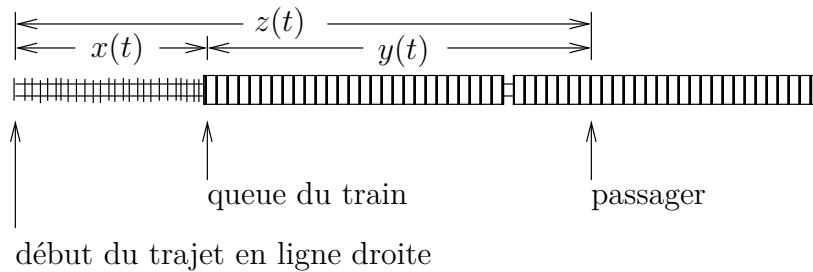


FIGURE 4.22 – Distance parcourue par un passager de train qui roule en ligne droite.

Si, 30 minutes (i.e. 0.5 heure) après le début du trajet, le train se déplace à une vitesse de 130 km/heure et le passager se déplace vers l'avant du train par rapport au train à une vitesse de 3 km/heure, alors la vitesse du passager par rapport au début du trajet en ligne droite est de 133 km/heure.

Mathématiquement, ce que l'on vient de dire est que $z'(0.5) = 133 = 130 + 3 = x'(0.5) + y'(0.5)$. 

L'exemple précédent suggère la règle suivante pour la dérivée.

Théorème 4.6.5

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $q = f + g$, alors

$$q'(x) = f'(x) + g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

On peut vérifier à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vraie. Par définition de la dérivée de q , on a

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} .$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} . \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) ,$$

on a

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Exemple 4.6.6

Soit $p(x) = 5x^{10} + 3x^4 + 2x^2 + 7$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p(x) &= \frac{d}{dx}(5x^{10}) + \frac{d}{dx}(3x^4) + \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7) \\ &= 5\frac{d}{dx}(x^{10}) + 3\frac{d}{dx}(x^4) + 2\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(7) \\ &= 5(10x^9) + 3(4x^3) + 2(2x) + 0 = 50x^9 + 12x^3 + 4x \end{aligned}$$

où la règle pour calculer la dérivée de x^n a été utilisée. ♣

Exemple 4.6.7

Pour trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(x) = 3x^{10} + 5x^4$ lorsque $x = 1$, il faut trouver la pente de la tangente à la courbe $y = p(x)$ au point $(1, p(1)) = (1, 8)$. Cette pente est donnée par $p'(1)$. Or

$$p'(x) = \frac{d}{dx}(3x^{10}) + \frac{d}{dx}(5x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^{10}) + 5\frac{d}{dx}(x^4) = 3(10x^9) + 5(4x^3) = 30x^9 + 20x^3.$$

Donc, $p'(1) = 50$. L'équation de la tangente dans la forme point-pente est $y - 8 = 50(x - 1)$, ce qui donne $y = 50x - 42$. ♣

4.6.3 Dérivée du produit de fonctions

Exemple 4.6.8

Supposons que la longueur des côtés d'un rectangle varient en fonction du temps. Soit $x(t)$ la longueur de la base du rectangle en mètres au temps t en secondes, et soit $y(t)$ la longueur de la hauteur du rectangle en mètres au temps t en secondes. L'aire $A(t)$ du rectangle en mètres carrés au temps t en secondes est donc $A(t) = x(t)y(t)$ m².

Si la longueur de la base augmente à une vitesse constante de 2 m/s et la longueur de la hauteur augmente à une vitesse constante de 3 m/s, quel sera le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle en m²/s ?

On a que $x'(t) = 2$ m/s et $y'(t) = 3$ m/s pour tout t . Si la longueur initiale de la base est de 10 m et la longueur initiale de la hauteur est de 11 m, alors la longueur de la base augmente de 10 à 12 m et la longueur de la hauteur augmente 11 à 14 m en une seconde. L'aire du rectangle augmente donc de $10 \times 11 = 110$ m² à $12 \times 14 = 168$ m² en une seconde, une augmentation moyenne de 58 m²/s.

Est-ce que $A'(t) = 58$ m²/s pour tout t ? En particulier, est-ce que la vitesse de croissance de l'aire du rectangle est constante par rapport au temps?

Toujours en supposant que la longueur initiale de la base soit de 10 m et celle de la hauteur soit de 11 m, après 2 secondes la longueur de la base est de 14 m et celle de la hauteur est de 17 m. Donc, l'aire du rectangle augmente de $10 \times 11 = 110 \text{ m}^2$ à $14 \times 17 = 238 \text{ m}^2$ en deux secondes. Ce qui donne une augmentation moyenne de $64 \text{ m}^2/\text{s}$. On ne peut donc pas avoir $A'(t) = 58 \text{ m}^2/\text{s}$ pour tout t .

Comment peut-on calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$? En fait, peut-on calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$?

Il est clair que la formule $A'(t) = x'(t)y'(t)$ est **fausse**. Les calculs précédents montrent que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle varie avec le temps, ce qui n'est pas le cas pour le produit $x'(t)y'(t)$ qui est égal à 6 pour tout t . En fait, une étude des unités utilisées montre que cette formule n'a pas de sens. Puisque les unités de $x'(t)$ et de $y'(t)$ sont des m/s, les unités de $x'(t)y'(s)$ sont des m^2/s^2 et non des m^2/s comme on doit avoir pour $A'(t)$.

Considérons la variation de l'aire sur un très petit intervalle de temps Δt . Durant cet petit intervalle de temps, la longueur de la base augmente de x à $x + \Delta x$ mètres et la longueur de la hauteur augmente de y à $y + \Delta y$ mètres (voir la figure 4.23). L'aire du rectangle augmente donc de xy à

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Lorsque Δt approche 0, on a que $\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}$ converge vers 0 car

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} = \Delta x \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ou Δx converge vers 0 et $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ converge vers y' lorsque Δt approche 0. Ainsi,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy}{\Delta t} = x \frac{\Delta y}{\Delta t} + y \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} \rightarrow xy' + yx'$$

lorsque Δt approche 0.



La formule obtenue à l'exemple précédent suggère donc le résultat suivant.

Théorème 4.6.9

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ and $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $q = fg$, alors

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Posons $q(x) = f(x)g(x)$ pour tout x . Par définition de la dérivée, on a

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x + h) - q(x)}{h}.$$

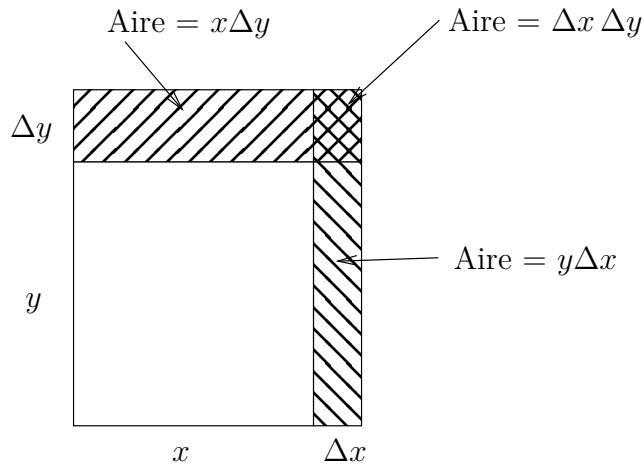


FIGURE 4.23 – L'aire du rectangle augmente de xy à $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) g(x+h) + f(x) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Comme g est différentiable au point x par hypothèse, g est continue au point x . Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

De plus,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

car f et g sont différentiables au point x par hypothèse. On a donc

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) + f(x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions.

Exemple 4.6.10

Retournons à l'exemple précédent où l'on devait déterminer le taux de croissance instantané

de l'aire d'un rectangle dont la longueur des côtés varie en fonction du temps. Notre formule pour la dérivée du produit de fonctions donne donc

$$A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 2y(t) + 3x(t) \text{ m}^2/\text{s}.$$

On observe que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle n'est pas constant par rapport au temps même si les taux de croissance instantanés des longueurs des côtés sont constants. Par exemple, le taux de croissance instantané au début (à $t = 0$) est

$$A'(0) = x'(0)y(0) + x(0)y'(0) = 2 \times 11 + 3 \times 10 = 52 \text{ m}^2/\text{s}$$

et celui à $t = 1$ est

$$A'(1) = x'(1)y(1) + x(1)y'(1) = 2 \times 14 + 3 \times 12 = 64 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Si on étudie les unités utilisées, on obtient de la formule $A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ que les unités de $A'(t)$ sont des $\text{m}/\text{s} \times \text{m} + \text{m} \times \text{m}/\text{s} = \text{m}^2/\text{s}$ comme il se doit. 

Exemple 4.6.11

Soit $q(x) = (x^3 + 2x)\sin(x)$. La fonction q est le produit des fonctions $f(x) = x^3 + 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. Ainsi,

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (3x^2 + 2)\sin(x) + (x^3 + 2x)\cos(x).$$



4.6.4 Dérivée du quotient de fonctions

Quelle est la dérivée de $g(x) = p(x)/q(x)$? En multipliant par $q(x)$ des deux côtés on obtient $g(x)q(x) = p(x)$. Maintenant, en dérivant des deux côtés, on obtient

$$g'(x)q(x) + g(x)q'(x) = p'(x) \Leftrightarrow g'(x)q(x) = p'(x) - g(x)q'(x) \Leftrightarrow g'(x) = \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{g(x)q'(x)}{q(x)}.$$

Or $g(x) = p(x)/q(x)$, donc

$$g'(x) = \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Cette formule pour calculer la dérivée du quotient de deux fonctions mérite d'être mise en évidence car elle est utile.

Proposition 4.6.12

Soit $p :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. de plus, on suppose que $q(x) \neq 0$ pour $a < x < b$. Alors

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Cette formule est appelée la **règle de dérivée du quotient** de deux fonctions.

Exemple 4.6.13

Calculer la dérivée de $g(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 5x)$.

On a $p(x) = x^3 + 2$ et $q(x) = x^2 + 5x$ dans la règle de dérivée du quotient de deux fonctions. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}.$$

**Exemple 4.6.14**

Calculer la dérivée de $\tan(x)$.

Puisque $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, on peut utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions ci-haut avec $p(x) = \sin(x)$ et $q(x) = \cos(x)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx} \sin(x)\right) \cos(x) - \sin(x) \left(\frac{d}{dx} \cos(x)\right)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 = \sec^2(x)\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.



En procédant de la même façon que dans l'exemple précédent, on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.6.15

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x), \quad \frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x), \quad \frac{d}{dx} \sec(x) = \tan(x) \sec(x)$$

et

$$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\cot(x) \csc(x).$$

4.6.5 Dérivée de fonctions composées**Exemple 4.6.16**

On étudie les populations d'ours et de poissons le long d'une section de 1 kilomètre d'une rivière du nord de l'Ontario.

On estime que le nombre de poissons augmente de 147 lorsque la température de l'eau de la rivière augmente de 2°C et que le nombre d'ours augmente de 2 lorsque le nombre de

poissons augmente de 49. On peut donc dire que le nombre d'ours augmente de 3 lorsque la température de l'eau augmente de 1°C car une augmentation de 2°C entraîne une augmentation de 147 poissons qui entraîne un augmentation de 6 ours (2 ours par tranche de 49 poissons).

Essayons de reformuler le raisonnement du paragraphe précédent en termes mathématiques. Si $P(T)$ est le nombre de poissons lorsque la température de l'eau est de $T^\circ\text{C}$ et $N(P)$ est le nombre d'ours lorsqu'il y a P poissons, alors le nombre d'ours en fonction de la température T en degrés centigrades de l'eau est donné par $B(T) = (N \circ P)(T) = N(P(T))$. On a que $P'(T) = 147/2$ poissons/degré et $N'(P) = 2/49$ ours/poisson. L'énoncé du paragraphe précédent se traduit donc par la formule mathématique

$$B'(T) = N'(P(T))P'(T) = \frac{2}{49} \times \frac{147}{2} = 3 \text{ ours/degré.}$$

En d'autres mots, le taux de croissance du nombre d'ours par rapport à la température de l'eau est le produit du taux de croissance du nombre d'ours par rapport au nombre de poissons (2/49 ours/poisson) et du taux de croissance du nombre de poissons par rapport à la température de l'eau (149/2 poissons/degré).

La formule $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ est cohérente avec les unités utilisées. Les unités de $P'(T)$ sont des poissons/degré et les unités de $N'(P(T))$ sont des ours/poisson. Il n'est donc pas surprenant que les unités de $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ soient des ours/degré. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.17

Soit $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que $g(x) \in]c, d[$ pour tout $x \in]a, b[$. La fonction $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q = f \circ g$ satisfait

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) .$$

On vérifie que cette règle est vraie à partir de la définition de la dérivée. Par définition de la dérivée, on a

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} .$$

Le quotient dans la limite précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) . \end{aligned}$$

Nous allons calculer la limite lorsque h tend vers 0 pour chacun des facteurs de l'expression précédente. Pour le deuxième facteur, on remarque que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

car g est différentiable par hypothèse. Pour le premier facteur, on remarque premièrement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x + h) = g(x)$$

car g est une fonction différentiable, donc continue, sur l'intervalle $]a, b[$. Puisque f est différentiable sur l'intervalle $]c, d[$ et $g(x) \in]c, d[$, on a

$$f'(g(x)) = \lim_{b \rightarrow g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)} .$$

On en déduit que

$$\frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} \rightarrow f'(g(x))$$

lorsque $h \rightarrow 0$ car $g(x + h) \rightarrow g(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$. C'est-à-dire,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} = f'(g(x)) .$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x + h) - q(x)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(g(x))g'(x) . \end{aligned}$$

Remarque 4.6.18 ☺

Soit $x \in]a, b[$ arbitraire mais fixe. Pour démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} = f'(g(x)) . \quad (4.6.1)$$

à l'aide de la définition de limite en termes de ϵ et δ , on choisit $\epsilon > 0$. Puisque

$$f'(g(x)) = \lim_{b \rightarrow g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)}$$

pour $g(x) \in]c, d[$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

pour $|b - g(x)| < \delta_1$. De plus, puisque g est continue à $x \in]a, b[$, il existe δ tel que $|g(x + h) - g(x)| < \delta_1$ pour $|h| < \delta$. Donc, pour $|h| < \delta$, nous avons

$$\left| \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

Puisque ϵ est arbitraire, on obtient (4.6.1). ♠

Exemple 4.6.19

Calculer la dérivée de $q(x) = (1 + x^2)^{101}$. Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 + x^2$ et $f(x) = x^{101}$. Puisque $g'(x) = 2x$ et $f'(x) = 101x^{100}$, on trouve que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = 101(1 + x^2)^{100} \times 2x = 202x(1 + x^2)^{100}.$$



Exemple 4.6.20

Calculer la dérivée de $q(x) = \cos(1 - x^5)$. Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 - x^5$ et $f(x) = \cos(x)$. Puisque $g'(x) = -5x^4$ et $f'(x) = -\sin(x)$, on trouve que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\sin(1 - x^5) \times (-5x^4) = 5x^4 \sin(1 - x^5).$$



Exemple 4.6.21

On peut utiliser la dérivée de fonctions composées pour obtenir la formule de dérivation d'un quotient de fonctions. Soit $g(x) = p(x)/q(x)$? La fonction g est le produit des fonctions p et $r \circ q$ où $r(x) = x^{-1}$. La règle pour la dérivée du produit de fonctions donne

$$g'(x) = p'(x) r(q(x)) + p(x) \left(\frac{d}{dx} r(q(x)) \right).$$

Or,

$$\frac{d}{dx} r(q(x)) = r'(q(x))q'(x) = -(q(x))^{-2}q'(x)$$

car $r'(x) = -x^{-2}$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= p'(x)(q(x))^{-1} - p(x)(q(x))^{-2}q'(x) \\ &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}. \end{aligned}$$



Exemple 4.6.22

Calculer la dérivée de $g(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 5x)$ sans utiliser la règle de dérivation du quotient de deux fonctions.

On a que $g(x) = p(x)r(q(x))$ où $p(x) = x^3 + 2$, $q(x) = x^2 + 5x$ et $r(x) = x^{-1}$. Donc,

$$\begin{aligned} g'(x) &= p'(x)r(q(x)) + p(x)r'(q(x))q'(x) \\ &= (3x^2)(x^2 + 5x)^{-1} + (x^3 + 2) \left(-(x^2 + 5x)^{-2} \right) (2x + 5) \\ &= \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la première égalité, on a utilisé la règle pour la dérivée du produit de fonctions et celle pour la dérivée des fonctions composées. ♠

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x)/3^x$
-2.00	0.122069...	1.098618...
-1.84	0.145527...	1.098618...
-1.68	0.173493...	1.098618...
-1.52	0.206834...	1.098618...
-1.36	0.246582...	1.098618...
-1.20	0.293969...	1.098618...
-1.04	0.350462...	1.098618...
-0.88	0.417811...	1.098618...
-0.72	0.498103...	1.098618...
-0.56	0.593826...	1.098618...
-0.40	0.707943...	1.098618...
-0.24	0.843991...	1.098618...
-0.08	1.006183...	1.098618...
0.08	1.199545...	1.098618...
0.24	1.430066...	1.098618...
0.40	1.704886...	1.098618...
0.56	2.032520...	1.098618...
0.72	2.423116...	1.098618...
0.88	2.888774...	1.098618...
1.04	3.443919...	1.098618...
1.20	4.105749...	1.098618...
1.36	4.894764...	1.098618...
1.52	5.835407...	1.098618...
1.68	6.956816...	1.098618...
1.84	8.293731...	1.098618...
2.00	9.887565...	1.098618...

TABLE 4.2 – Approximations de la dérivée de $f(x) = 3^x$ à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

4.7 Encore plus de dérivées de fonctions élémentaires

Avec nos connaissances des règles de dérivation, on peut maintenant développer des formules pour calculer la dérivée de fonctions exponentielles et logarithmiques.

4.7.1 Dérivée de $f(x) = b^x$

Exemple 4.7.1

Quelle est la dérivée de $f(x) = 3^x$?

Dans le tableau 4.2, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x)/f(x) \approx 1.098618\dots$ pour les quelques valeurs de x au tableau 4.2. Si $C_3 = 1.098618\dots$, on semble avoir

$$\frac{d}{dx} 3^x = C_3 3^x.$$

Le graphe associé aux données du tableau 4.2 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 3^x$ sont donnés à la figure 4.24. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus grand que 1 de $f(x)$.

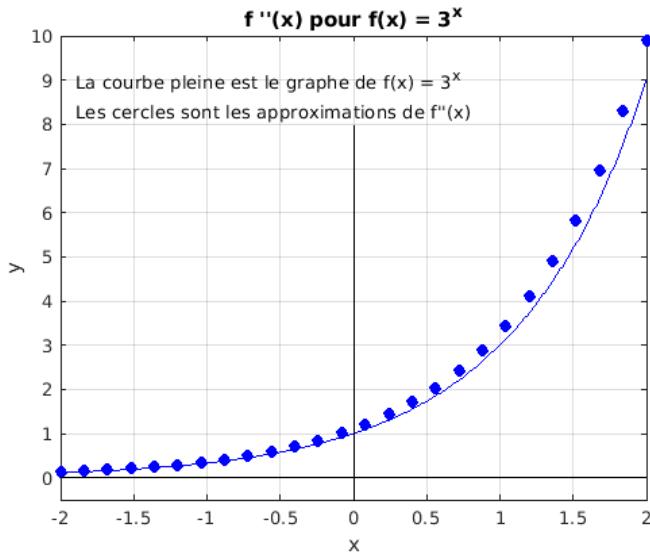


FIGURE 4.24 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 3^x$ qui se retrouvent au tableau 4.2 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de 3^x .



Exemple 4.7.2

Soit $f(x) = 2^x$. Essayons de voir si, comme à l'exemple précédent, le rapport $f'(x)/f(x)$ est constant. Si c'est le cas, est-ce la même constante qu'à l'exemple précédent ?

Dans le tableau 4.3, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x)/f(x) \approx 0.693150\dots$ pour les quelques valeurs de x au tableau 4.2. Si $C_2 = 0.693150\dots$, on semble avoir

$$\frac{d}{dx} 2^x \approx C_2 2^x .$$

Comme à l'exemple précédent, on a que $f'(x)/f(x)$ est constant mais la constante n'est pas la même qu'à l'exemple précédent.

Le graphe associé aux données du tableau 4.3 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 2^x$ sont donnés à la figure 4.25. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus petit que 1 de $f(x)$. ♣

Les trois questions suivantes découlent des exemples que l'on vient de présenter.

1. Est-il toujours vrai que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^x$ où C_b est une constante qui dépend seulement du choix de b ?
2. Si la réponse à la question précédente est affirmative, existe-t-il un moyen de calculer facilement cette constante C_b en fonction de la base b qui a été choisie ?
3. Existe-t-il une base b pour laquelle la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = f(x) = b^x$? C'est-à-dire, pour laquelle la constante de proportionnalité C_b est 1 ?

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x)/2^x$
-2.00	0.173287...	0.693150...
-1.84	0.193612...	0.693150...
-1.68	0.216320...	0.693150...
-1.52	0.241691...	0.693150...
-1.36	0.270039...	0.693150...
-1.20	0.301711...	0.693150...
-1.04	0.337098...	0.693150...
-0.88	0.376635...	0.693150...
-0.72	0.420809...	0.693150...
-0.56	0.470165...	0.693150...
-0.40	0.525309...	0.693150...
-0.24	0.586921...	0.693150...
-0.08	0.655759...	0.693150...
0.08	0.732672...	0.693150...
0.24	0.818605...	0.693150...
0.40	0.914616...	0.693150...
0.56	1.021889...	0.693150...
0.72	1.141744...	0.693150...
0.88	1.275655...	0.693150...
1.04	1.425273...	0.693150...
1.20	1.592440...	0.693150...
1.36	1.779212...	0.693150...
1.52	1.987891...	0.693150...
1.68	2.221045...	0.693150...
1.84	2.481545...	0.693150...
2.00	2.772598...	0.693150...

TABLE 4.3 – Approximations de la dérivée de $f(x) = 2^x$ à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

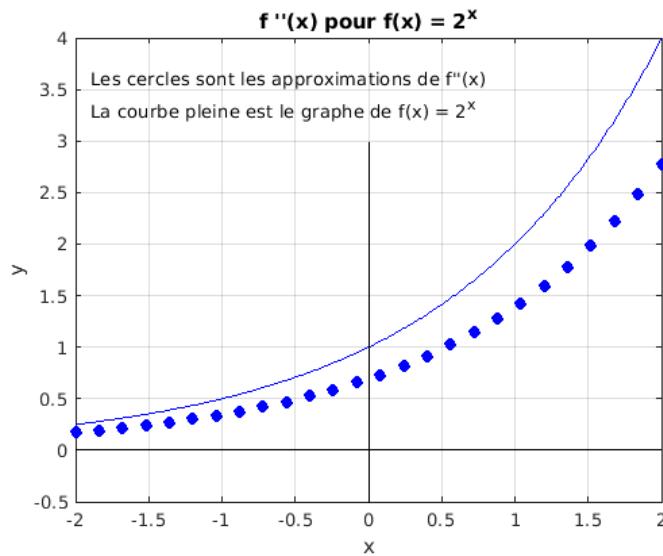


FIGURE 4.25 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 2^x$ qui se retrouvent au tableau 4.3 sont représentées par des cercles. La courbe bleue est le graph de 2^x .

On répond à la première question et donne une réponse partielle à la deuxième question dans la prochaine sous-section. La réponse à la troisième question sera donnée dans la sous-section suivante. La réponse complète à la deuxième question dépend de la dérivée de fonctions composées. Cette réponse sera donnée dans la dernière sous-section.

La constante C_b

Pour répondre à la première question et aborder la réponse pour la deuxième question, il faut avoir recours à la définition de la dérivée. Si $f(x) = b^x$ pour une base quelconque $b > 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \frac{b^x b^h - b^x}{h} = b^x \frac{b^h - 1}{h}.$$

Comme b^x ne dépend pas de h , on a donc

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{=C_b}$$

si la limite existe. Pour une base b donnée, l'expression $C_b \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (b^h - 1)/h$ est une constante car elle est indépendante du point x qui est choisi.

On a bien que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^x$ pour une constante C_b . Pour calculer cette constante C_b , on peut utiliser la formule

$$C_b \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}. \quad (4.7.1)$$

Remarque 4.7.3

Dans la discussion précédente, nous avons supposé que la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ existait pour tout $b > 0$. Effectivement, la limite existe et cela sera prouvé à la section ?? ; après que nous aurons défini la fonction exponentielle e^x à l'aide d'une série. ♠

Exemple 4.7.4

Soit $f(x) = 3^x$. Pour estimer C_3 , on utilise (4.7.1) avec $b = 3$ et $h = h_n = 1/n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0. Donc, $\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$ converge vers C_3 lorsque $n \rightarrow \infty$.

On obtient les résultats suivant :

n	$h_n = 1/n^2$	$\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$
1	1	2
2	1/4	1.26429605180997...
3	1/9	1.16847867518778...
4	1/16	1.13720772916663...
5	1/25	1.12310877860219...
:	:	:
100	1/10000	1.09867263832664...
:	:	:
1000	1/1000000	1.09861289221413...
:	:	:

On a donc que $\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$ approche la constante 1.09861... lorsque h_n approche 0. Comme toute autre séquence qui tend vers 0 donnerait le même résultat, on obtient

$$C_3 \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.09861\dots$$

qui est la constante trouvée à l'exemple 4.7.1. ♣

La Formule 4.7.1 pour évaluer la constante C_b demande le calcul d'une limite comme on vient de le faire à l'exemple précédent pour $b = 3$. Il existe une façon plus simple (du point de vue de l'utilisateur d'une calculatrice) de calculer la valeur de C_b que nous donnerons bientôt.

Le nombre e

On répond maintenant à la troisième question au début de la section. C'est-à-dire, on cherche la base b telle que la dérivée de $f(x) = b^x$ soit $f'(x) = f(x) = b^x$.

On a refait le travail de l'exemple 4.7.4 en choisissant des valeurs pour la base b de $f(x) = b^x$ de telle sorte que la constante de proportionnalité C_b entre f et sa dérivée soit de plus en plus près de 1. On résume dans le tableau 4.4 suivant les résultats que l'on a trouvés.

Les valeurs de b dans le tableau 4.4 approche le nombre $e = 2.71828182852\dots$. On a donc le résultat suivant.

Proposition 4.7.5

Si $e = 2.71828182852\dots$ et $f(x) = e^x$ pour tout x , alors

$$f'(x) = f(x)$$

pour tout x .

b	$C_b \approx$		Prochaine valeur de b
2.0	0.6931470952...	< 1	
3.0	1.0986123122...	> 1	2.5 entre 2 et 3
2.5	0.9162908209...	< 1	2.7 entre 2.5 et 3
2.7	0.9932517031...	< 1	2.8 entre 2.7 et 3
2.8	1.0296195007...	> 1	2.75 entre 2.7 et 2.8
2.75	1.011600803...	> 1	2.72 entre 2.7 et 2.75
2.72	1.0006317996...	> 1	2.71 entre 2.7 et 2.72
2.71	0.9969487457...	< 1	2.715 entre 2.71 et 2.72
2.715	0.9987919380...	< 1	2.718 entre 2.715 et 2.72
2.718	0.9998963879...	< 1	2.719 entre 2.718 et 2.72
2.719	1.0002640937...	> 1	2.7185 entre 2.718 et 2.719
2.7185	1.0000802408...	> 1	2.7182 entre 2.718 et 2.7185
2.7182	0.9999698846...	< 1	2.7183 entre 2.7182 et 2.7185
2.7183	1.0000067440...	> 1	2.71825 entre 2.7182 et 2.7183
2.71825	0.9999883143...	< 1	2.71828 entre 2.71825 et 2.7183
2.71828	0.9999994166...	< 1	2.71829 entre 2.71828 et 2.7183
2.71829	1.0000029693...	> 1	2.718285 entre 2.71828 et 2.71829
2.718285	1.0000011929...	> 1	2.718282 entre 2.71828 et 2.718285
⋮	⋮	⋮	⋮
2.718281828	0.9999999939...		

TABLE 4.4 – On utilise (4.7.1) pour estimer C_b . Le nombre e est plus grande que les valeurs de b pour lesquelles $C_b < 1$ et plus petit que les valeurs de b pour lesquelles $C_b > 1$. On utilise ce résultat pour prendre en sandwich le nombre $e \approx 2.718281828$.

La formule (4.7.1) avec la base $b = e$ devient donc

$$C_e = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 .$$

Si $f(x) = e^x$, la formule précédente n'est nul autre que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 .$$

Donc, la pente de la courbe $y = e^x$ à $x = 0$ est 1. La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction exponentielle de la forme b^x dont la valeur de la dérivée à l'origine est 1.

Remarque 4.7.6

On a vu la définition suivante de e à la section 2.3.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \quad (4.7.2)$$

Est-ce le même nombre e que celui que l'on vient de définir ?

Avec la définition de e^x donnée à la section ??, il est trivial de montrer que le nombre e défini par (4.7.2) satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

On présente ici un raisonnement qui supporte sans démontrer que le nombre e défini en (4.7.2) satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, il découle de la définition de limite d'une fonction en un point que $\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. Si $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on peut donc dire que $1 \approx \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ pour n très grand. Si on résout pour e , on trouve

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

pour n très grand. Donc, le nombre e qui satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ et le nombre e défini par (4.7.2) semblent bien être le même nombre.

Il est beaucoup plus facile d'estimer e à l'aide de (4.7.2) que d'utiliser la formule (4.7.1) pour déterminer la valeur de b telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$ comme on la fait au tableau 4.4. ♠

Quelle est la valeur de la constante C_b

On peut maintenant donner une réponse complète à la deuxième question de la section 4.7.1. À savoir, comment peut-on calculer la constante C_b dans la relation

$$\frac{d}{dx} b^x = C_b b^x$$

sans avoir à calculer une limite comme en (4.7.1)? Soit $q(x) = b^x$ avec $b > 0$. Puisque $q(x) = b^x = e^{x \ln(b)}$, on peut exprimer $q(x)$ comme la composition $q(x) = f(g(x))$ des fonctions $g(x) = x \ln(b)$ et $f(x) = e^x$. Comme $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = \ln(b)$, on a

$$\frac{d}{dx} b^x = q'(x) = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = q(x)g'(x) = b^x \ln(b).$$

On obtient le théorème suivant.

Proposition 4.7.7

Si $b > 0$,

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln(b)$$

pour tout x .

La constante C_b que l'on cherchait est donc $\ln(b)$.

Exemple 4.7.8

Si $f(x) = 5^x$, alors $f'(x) = 5^x \ln(5)$. ♣

Exemple 4.7.9

Si $f(x) = 5^{x^2}$, la dérivée de f n'est pas $f'(x) = 5^{x^2} \ln(5)$. Il faut remarquer que $f(x) = g(p(x))$

où $q(x) = 5^x$ et $p(x) = x^2$. Puisque $q'(x) = 5^x \ln(5)$ et $p'(x) = 2x$, la règle de la dérivée de fonctions composées donne

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = 5^{x^2} \ln(5) \times 2x = 2x 5^{x^2} \ln(5) .$$



Remarque 4.7.10

Comme on a vu à l'exemple précédent, il est facile de se tromper avec toutes les règles de calcul des dérivées. Il est souvent plus avantageux de s'en tenir aux formules les plus importantes.

À l'exemple précédent, on aurait pu simplement écrire $f(x) = 5^{x^2}$ comme $f(x) = e^{x^2 \ln(5)}$. Il est alors clair que f est la composition de deux fonctions. On a $f(x) = q(p(x))$ où $q(x) = e^x$ et $p(x) = x^2 \ln(5)$. Puisque $q'(x) = e^x$ et $p'(x) = 2x \ln(5)$, on a donc

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = e^{p(x)}(2x \ln(5)) = 2x e^{x^2 \ln(5)} \ln(5) = 2x 5^{x^2} \ln(5) .$$



4.7.2 Dérivée de $\log_b(x)$

Puisque $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ pour tout $x > 0$, il suffit de trouver une formule pour la dérivée de \ln . Pour trouver cette formule, on utilise le fait que $g(x) = \ln(x)$ est la fonction inverse de $f(x) = e^x$.

Si on dérive les deux côtés de l'égalité $f(g(x)) = x$ pour $x > 0$, on trouve

$$f'(g(x))g'(x) = 1 .$$

Or $f'(x) = f(x)$ et $f(g(x)) = x$, donc

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x} .$$

On vient de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.11

Pour $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} .$$

Quelle est la dérivée de $\ln|x|$ pour tout $x \neq 0$? Puisque $|x| = x$ pour $x > 0$, on a

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} , \quad x > 0 .$$

Puisque $|x| = -x$ pour $x < 0$, on a $\ln|x| = \ln(-x)$ pour $x < 0$. Ainsi, pour $x < 0$, $\ln|x| = g(h(x))$ où $g(y) = \ln(y)$ et $h(x) = -x$. Puisque $g'(y) = 1/y$ et $h'(x) = -1$, on obtient donc

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{h(x)} h'(x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x}, \quad x < 0.$$

On peut donc généraliser le théorème précédent de la façon suivante.

Proposition 4.7.12

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

Exemple 4.7.13

Quelle est la dérivée de $\log_5(x)$ pour tout $x > 0$?

Puisque $\log_5(x) = \ln(x)/\ln(5)$, on a

$$\frac{d}{dx} \log_5(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(5)} \right) = \frac{1}{\ln(5)} \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x \ln(5)}.$$



Exemple 4.7.14

Quelle est la dérivée de $q(x) = \ln(\sin(x))$ pour $0 < x < \pi$?

Notez que l'on assume $0 < x < \pi$ pour que $\sin(x)$ soit positif et donc que $\ln(\sin(x))$ soit bien définie.

Puisque $q = f \circ g$ où $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \ln(x)$, on obtient de la règle pour la dérivée de fonctions composées que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cos(x) = \cot(x)$$

pour $0 < x < \pi$.



Exemple 4.7.15

Calculer la dérivée de $f(x) = (x+1)^5(x+5)^7/(x+2)^4$.

Il serait tentant d'utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions mais cela risque d'être très long.

En calcul numérique, on utilise très souvent la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour remplacer le produit de très grands nombres par la somme de leurs logarithmes. Cela permet d'éviter les nombres trop grands pour l'ordinateur.

La même idée peut être utilisée ici. On a

$$\ln|f(x)| = 5\ln|x+1| + 7\ln|x+5| - 4\ln|x+2|$$

Si on dérive des deux côtés de l'égalité, on trouve

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2}$$

et ainsi

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2} \right) = \frac{(x+1)^5(x+5)^7}{(x+2)^4} \left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2} \right).$$

Calculer la dérivée de f avec la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions pour comparer cette méthode avec celle que l'on vient d'introduire.



4.7.3 Dérivée de x^α où α est réel

On a vu que la dérivée de $h(x) = x^n$ où n est un entier positif est $h'(x) = nx^{n-1}$. Mais, quelle est la dérivée de $h(x) = x^\alpha$ si α n'est pas un entier positif. Par exemple, quelle est la dérivée de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ou de x^π ? Commençons par un exemple simple.

Exemple 4.7.16

Soit $f(x) = x^{-1} = 1/x$ pour $x \neq 0$. Si on estime $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$, on obtient les résultats suivants :

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ -x^{-2} - f'(x) $
-1	-1.0000100009...	$0.1000009\dots \times 10^{-4}$
1	-0.99999000010...	$0.999989\dots \times 10^{-5}$
2	-0.24999875000...	$-0.124999\dots \times 10^{-5}$
π	-0.10132086112...	$-0.32251\dots \times 10^{-6}$
3.5	-0.08163241982...	$-0.23323\dots \times 10^{-6}$

On remarque que $f'(x) \approx -x^{-2}$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. On peut donc supposer que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$.

Montrons à partir de la définition de la dérivée que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$. En effet, si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

car $x^2 + xh \rightarrow x^2$ lorsque $h \rightarrow 0$.



L'exemple précédent semble indiquer que la règle qui dit que la dérivée de $h(x) = x^n$ est $h'(x) = nx^{n-1}$ pourrait s'appliquer pour au moins tous les nombres entiers n .

Pour montrer que la règle est vraie pour tout exposant réel non-nul, il faut se rappeler que $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ pour $x > 0$. Ainsi, $x^\alpha = f(g(x))$ où $g(x) = \alpha \ln(x)$ et $f(x) = e^x$. Puisque $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = \alpha/x$, on déduit de la règle de la dérivée de fonctions composées que

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} \right) = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour $x > 0$. On vient de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.17

Si $\alpha \neq 0$ est un nombre réel, alors

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour tout $x > 0$.

Exemple 4.7.18

Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. On a $f'(x) = 1/2x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$. ♣

Exemple 4.7.19

Calculer la dérivée de $g(x) = \frac{(x^4 + 2)e^{2x}}{(x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3}}$.

On pourrait attaquer ce problème directement avec la règle de dérivation du quotient de deux fonctions mais, comme la fonction g est assez complexe, ce ne serait pas une bonne idée. On invite le lecteur à essayer.

On va faire appel à l'ensemble de nos connaissances des méthodes de dérivation. On commence pas calculer le logarithme de g . On obtient

$$\begin{aligned} \ln |g(x)| &= \ln \left| \frac{(x^4 + 2)e^{2x}}{(x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3}} \right| = \ln \left(\frac{(x^4 + 2)e^{2x}}{|x^2 + 3x|\sqrt{x^2 + 3}} \right) \\ &= \ln(x^4 + 2) + \ln(e^{2x}) - \ln|x^2 + 3x| - \ln((x^2 + 3)^{1/2}) \\ &= \ln(x^4 + 2) + 2x - \ln|x^2 + 3x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) \end{aligned}$$

On dérive maintenant des deux côtés

$$\frac{d}{dx} \ln |g(x)| = \frac{d}{dx} \ln(x^4 + 2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx} \ln|x^2 + 3x| - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3)$$

pour obtenir

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3} .$$

Ainsi,

$$g'(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3} \right) g(x)$$

$$= \left(\frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3} \right) \left(\frac{(x^4 + 2)e^{2x}}{(x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3}} \right)$$



4.7.4 Dérivée des fonction trigonométriques inverses

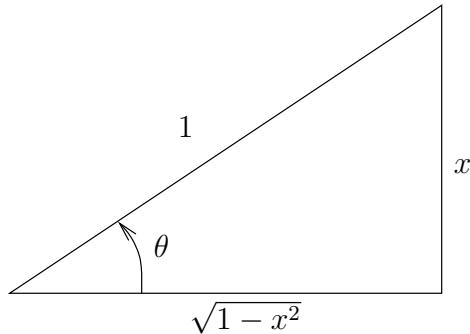
Si on dérive les deux côtés de l'identité $x = \sin(\arcsin(x))$ pour $-1 < x < 1$, on obtient grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \cos(\arcsin(x)) \frac{d}{dx} \arcsin(x).$$

On a donc

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Posons $\theta = \arcsin(x)$. On a $\sin(\theta) = x$ par définition de l'arc sinus et on obtient la figure suivante.



On en déduit

$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

On obtient donc la formule suivante.

Proposition 4.7.20

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

De façon semblable, le lecteur peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.7.21

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

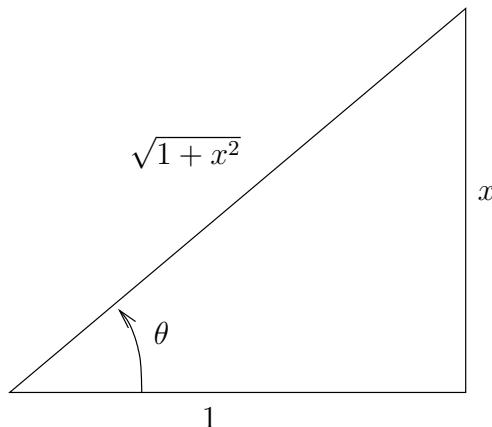
Si maintenant on dérive les deux côtés de l'identité $x = \tan(\arctan(x))$ où x est réel, on obtient grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \sec^2(\arctan(x)) \frac{d}{dx} \arctan(x) .$$

On a donc

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} .$$

Posons $\theta = \arctan(x)$. On a $\tan(\theta) = x$ par définition de l'arctangente et on obtient la figure suivante.



On en déduit

$$\sec^2(\arctan(x)) = \sec^2(\theta) = (\sqrt{1+x^2})^2 = 1+x^2 .$$

On obtient donc la formule suivante.

Proposition 4.7.22

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

4.8 Exercices

Question 4.1

Pour chacune des fonctions suivantes et des points t_0 suivants :

- i) Calculez la moyenne de la fonction f entre les points t_0 et $t_0 + \Delta t$ pour $\Delta t = 1, 0.5, 0.1$ et 0.01 .
- ii) Donnez l'équation de la sécante qui passe par les points $(t_0, f(t_0))$ et $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t))$ pour $\Delta t = 1, 0.5, 0.1$ et 0.01 .
- iii) Dessiner, sur une même figure, la fonction avec ses quatre sécantes.
- iv) Donner, en vous basant sur les valeurs calculées en (i), une approximation de la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$.
- v) Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$.

a) $f(t) = 2t^2$ et $t_0 = 1$.

b) $f(t) = e^{2t}$ et $t_0 = 0$.

Question 4.2

On suppose que le nombre d'individus au temps t (en heures) pour une certaine population animale est donnée par $p(t) = 1.5^t$.

- a) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 1 ?
- b) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.1 ?
- c) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.01 ?
- d) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.0001 ?
- e) Quelle est le taux de croissance instantané à $t = 0$?
- f) Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(t)$ au point $(0, p(0))$.

Question 4.3

Les données du tableau suivant décrivent la hauteur H (en mètres) d'un arbre en fonction du temps t (en années).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	10.11	11.18	12.40	13.74	15.01	16.61	18.27	20.17	22.01	24.45	26.85

- a) Estimez le taux de croissance instantané à $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ ans à l'aide de la moyenne du taux de croissance moyen pour l'année qui se termine et pour l'année qui commence (si possible).
- b) Sur un graphe du taux de croissance instantané en fonction du temps, marquez par un point le taux de croissance instantané pour chacune des années en (a). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?
- c) Estimez le taux de croissance relatif à $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ ans.

d) Sur un graphe du taux de croissance relatif en fonction du temps, marquez par un point le taux de croissance relatif pour chacune des années en (c). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?

e) Comparez vos deux graphes. Que pouvez-vous en conclure ?

Question 4.4

Le nombre d'individus dans une population est donné par la formule $p(t) = 2^t$ où t est le temps en heures. Trouvez le taux de croissance moyen entre 0 et 1 heure, 0 et 0.1 heure, 0 et 0.01 heure, et 0 et 0.001 heure.

Quelle est la limite ? Que représente cette limite ? Tracez le graphe de la fonction p et la droite tangent à ce graphe au point $(t, p) = (0, 1)$. Donnez l'équation de cette droite tangente.

Question 4.5

Le nombre N de visites au nouveau site Internet du ministère de l'environnement est donné dans le tableau suivant :

nombre d'heures après l'inauguration du site	1	2	3	4	5
N	30	57	87	151	246

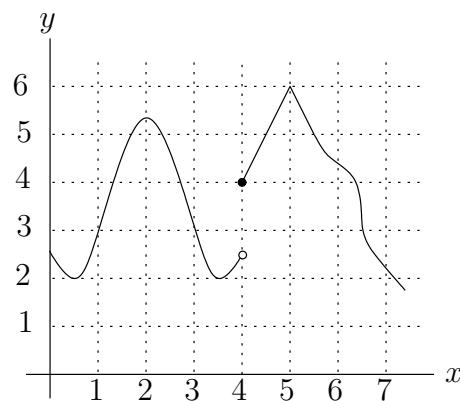
a) Trouvez le taux moyen de croissance des visites de la deuxième à la troisième heure, de la troisième à la quatrième heure, et de la troisième à la cinquième heure. Donnez les unités de vos réponses.

b) Donnez une approximation du taux instantané de croissance des visites après trois heures en prenant la moyenne de deux taux de croissance moyens. Donnez les unités de votre réponse.

c) Est-ce qu'il est réaliste d'estimer le taux de croissance instantané des visites après trois heures sur la base des données que l'on possède ?

Question 4.6

Le graphe de la fonction f est donné dans la figure suivante :



a) Identifiez les points où la fonction n'est pas continue.

b) Identifiez les points où la fonction n'est pas différentiable et dite pourquoi.

c) Identifiez les points où la dérivée de la fonction est nulle.

Question 4.7

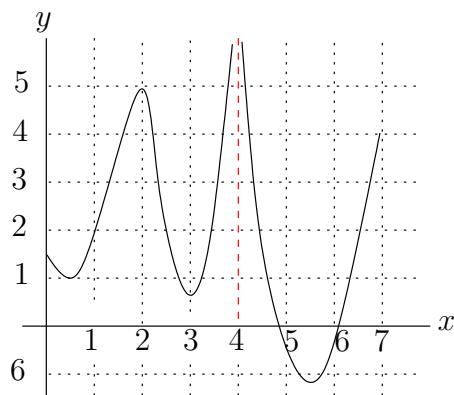
Calculez la dérivée de $g(y) = -3y + 5$ et déterminez les intervalles, s'il y en a, où la fonction est strictement croissante.

Question 4.8

Utilisez la définition de la dérivée pour calculer la dérivée de $f(x) = 4 - x^2$. Tracez le graphe de f et f' . Trouvez les points où la dérivée de f est nulle. Déterminez les intervalles où la fonction est strictement croissante et ceux où elle est strictement décroissante.

Question 4.9

Le graphe de la fonction f est donné à la figure suivante :



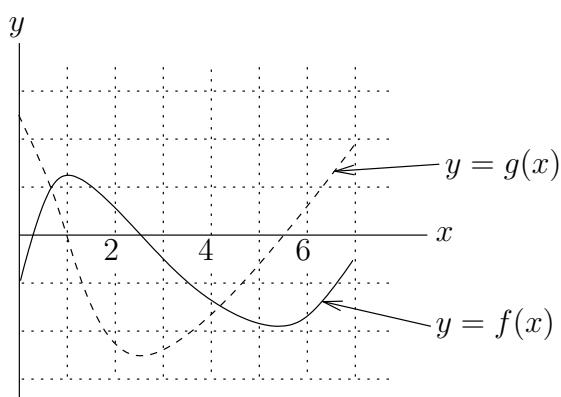
a) Identifiez les points où la dérivée est positive.

b) Identifiez les points où la dérivée est négative.

c) Identifiez les points où la dérivée est nulle.

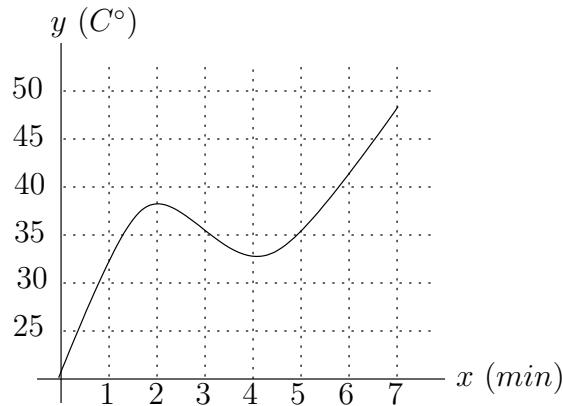
Question 4.10

La figure suivante contient le graphe d'une fonction et le graphe de la dérivée de cette fonction. Quelle est le graphe de la dérivée ?



Question 4.11

La température en fonction du temps d'une substance chimique est donnée dans la figure suivante :



Tracez le graphe du taux de variation instantané de la température en fonction du temps. Sur le graphe que vous avez dessiner, indiquer lorsque la température augmente et lorsqu'elle diminue.

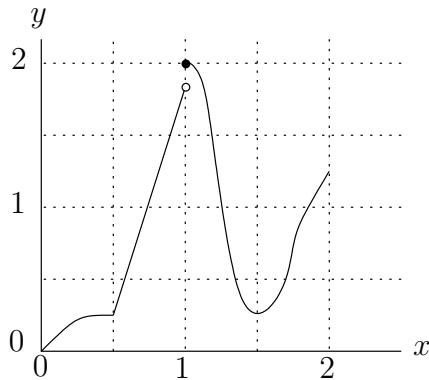
Question 4.12

Un chien court après un cycliste. Tracez sur un même graphe la position du chien et du cycliste en fonction du temps si :

- a) Le chien et le cycliste se déplacent à vitesse constante mais le chien se déplace plus rapidement que le cycliste et, après un certain temps, rattrape le cycliste.
- b) La vitesse du chien augmente et celle du cycliste diminue. Le chien rattrape le cycliste.
- b) La vitesse du chien et du cycliste diminue, et la distance entre les deux augment.

Question 4.13

Le graphe d'une fonction f est donné à la figure suivante :



Donnez les points x où la fonction f n'est pas continue, où la fonction f n'est pas différentiable et dite pourquoi, et où la dérivée $f'(x)$ est nulle.

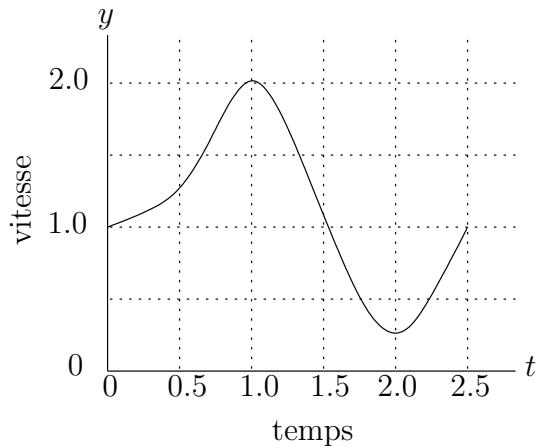
Question 4.14

Soit $g(x) = x + 2x^2$ une fonction quadratique. Donnez la pente de la sécante à la courbe

$y = g(x)$ entre les points x et $x + h$. Donnez la pente de la tangente à la courbe $y = g(x)$ au point x en passant à la limite lorsque h approche 0. Donnez la dérivée de g au point x .

Question 4.15

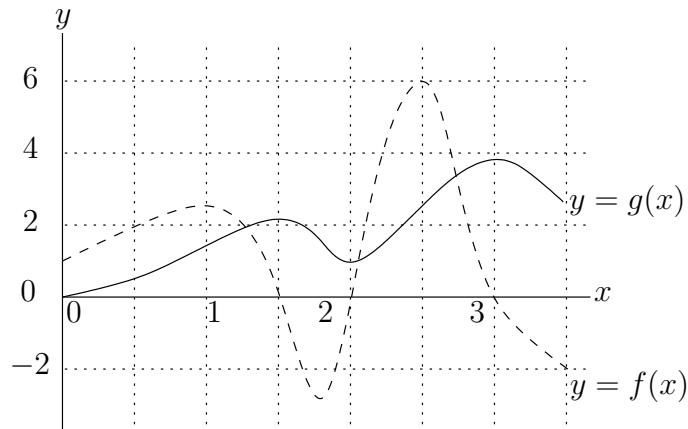
Le graphe du volume $V(t)$ en mètres cubes d'un objet en fonction du temps t en heures est donné dans la figure suivante :



- Identifiez un point t où la dérivée est positive.
- Identifiez un point t où la dérivée est négative.
- Identifiez le point t avec la plus grande dérivée.
- Identifiez le point t avec la plus petite dérivée.
- Identifiez les points t où la dérivée est nulle.
- Tracez le graphe de la dérivée V' de V .

Question 4.16

On considère le graphe de deux fonctions donnés dans la figure suivante :



Identifiez la courbe qui représente le graphe de la dérivée d'un fonction dont le graphe est donné par l'autre courbe.

Question 4.17

Une voiture est remorquée par une dépanneuse à l'aide d'une tige rigide de 5 mètres de long. Tracez les graphes possibles de la position et de la vitesse des deux véhicules en fonction du temps si la dépanneuse part du repos, recule lentement pour une courte période de temps, arrête, avance lentement pour une autre courte période de temps et finalement avance plus rapidement.

Question 4.18

Une dépanneuse remorque une autre voiture avec une tige rigide de 10 m. Dessinez la position et la vitesse des deux véhicules en fonction du temps si la dépanneuse est initialement au repos, accélère lentement, garde une vitesse constante pour un certain temps, et finalement arrête brusquement.

Question 4.19

Un train se déplace à 110 km/h. Un passager de ce train se déplace à un vitesse de 3 km/h vers l'arrière du train. Quelle est la vitesse de ce passager par rapport au sol ?

Question 4.20

Pour chacune des questions suivantes, Calculez la dérivée à l'aide de la formule de dérivation des fonctions composées.

- a) Soit $T(W) = 30 - 0.2W$, $S(T) = 9 - T/5$ et $H(W) = S(T(W))$. Calculez $\frac{dH}{dW}$.
- b) Soit $L(T) = 10 + T/10$, $V(L) = 2L^3$, $M(V) = 1.3V$ $H(T) = M(V((L(T))))$. Calculez $\frac{dH}{dT}$.
- c) Soit $M(G) = 5G + 2$, $P(M) = 0.5M$ et $H(G) = P(M(G))$. Calculer $\frac{dH}{dG}$.
- d) Soit $V(I) = 5I^2$, $F(V) = 37 + 0.4V$ et $H(I) = F(V(I))$. Calculer $\frac{dF}{dI}$.

Question 4.21

Soit $B = 0.007W^{2/3}$ et $W = 0.12L^{2.53}$. On suppose que L est une fonction de t et que $L'(t)$ est constant. Si on sait que L augmente de 5 lorsque t augmente de 10, quelle est la dérivée de $H(t) = B(W(L(t)))$ par rapport à t lorsque $L = 18$?

Question 4.22

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = x^{1/5}$ | b) $h(t) = x^{1/e}$ |
| c) $g(z) = 3z^3 + 2z^2$ | d) $f(x) = (2x + 1)^3$ |
| e) $p(z) = (1 + 3z)^2(1 + 2z)^3$ | f) $h(x) = (x^2 - 5)^{135/2}$ |
| g) $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$ | h) $G(x) = \frac{(1 + x)(2 + x)}{(3 + x)}$ |
| i) $f(x) = \log_2(1 - 3x)$ | j) $f(y) = (5y - 3)^7(y^2 - 1)$ |
| k) $h(t) = \frac{1+t}{2-t}$ | l) $g(z) = \frac{1+z^2}{1+2z^3}$ |
| m) $f(t) = (1 + 3t)^{33}$ | n) $h(x) = \frac{(1 + 3x)^2}{(1 + 2x)^3}$ |
| o) $g(z) = \left(1 + \frac{2}{1+z}\right)^7$ | p) $f(x) = e^{-7x}$ |
| q) $h(x) = \ln \ln(x) , x > 0$ | |

Question 4.23  

Évaluez les dérivées suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $h(\theta) = \sec(\theta) \tan(\theta)$ | b) $G(t) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi(t-3)}{5}\right)$ |
| c) $f(x) = \ln(4 + \sin(x))$ | d) $g(\theta) = \sqrt{2\theta \sin(\theta)}$ |
| e) $F(\theta) = \tan^2(\sin(\theta))$ | f) $g(x) = x \arctan(4x)$ |
| g) $h(\theta) = \sin(\theta) \cos(\theta)$ | h) $h(x) = 3 + \cos(2x - 1)$ |
| i) $g(z) = e^{\cos(z)}$ | j) $f(\theta) = \sec(\theta)$ |

Question 4.24  

Montrez que $y(t) = t^2 \sin(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = 2t \sin(t) + t^2 \cos(t) .$$

C'est-à-dire, montrez que l'équation est satisfaite si on remplace $y(t)$ par $t^2 \sin(t)$.

Question 4.25

Calculez la dérivée de $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ de deux façons :

- i) Avec la règle de la dérivée d'un quotient.
- ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.26

Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(7x)$ de deux façons :

- i) Avec une des identités satisfaites par $\ln()$.
- ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.27

Calculez la dérivée de $f(x) = 7^x$ de deux façons :

- i) Avec la règle introduite en classe pour dériver ce type de fonctions.
ii) Avec le fait que 7^x peut s'exprimer sous la forme $e^{h(x)}$ pour une certaine fonction h .

Question 4.28  

Calculez la dérivée de $f(\theta) = \cos(2\theta)$ de deux façons :

- i) Avec les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.
ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Montrez que vos deux réponses sont égales.

Question 4.29

Un tableau contenant certaines valeurs de f , f' , g et g' est donné ci-dessous.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

- a) Si $h(x) = f(g(x))$, calculez $h'(1)$.
b) Si $k(x) = g(f(x))$, calculez $k'(1)$.

Question 4.30

Soit f une fonction strictement croissante positive. Une fonction f est positive si $f(x) > 0$ pour tout x . Montrez que la fonction g définie par $g(x) = 1/f(x)$ pour tout x est strictement décroissante.

Question 4.31

Soit $f(x) = 2 + x^3$. Calculez la dérivée de la fonction inverse f^{-1} en procédant de deux façons :

- i) En Trouvant la fonction inverse et dérivant cette fonction.
ii) Avec la dérivée de la fonction composée $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Question 4.32

Trouvez la dérivée de la fonction inverse de $F(x) = 1 - e^{-x}$ en procédant de deux façons :

- a) En Trouvant la fonction inverse de F et dérivant cette fonction inverse.
b) Avec la dérivée de la fonction composée $(F \circ F^{-1})(x) = F(F^{-1}(x)) = x$.

Question 4.33  

Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \sin(\sin(x))$ au point $(x, y) = (\pi, 0)$.

Question 4.34

- a) Trouvez la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^3 + 8$ au point où cette courbe coupe l'axe des x .
b) Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'intersection trouvé en (a).
c) Trouvez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite tangente en (b) qui passe par le point d'intersection en (a).

Question 4.35

L'aire d'un disque en fonction de son rayon est donné par la formule $A(r) = \pi r^2$, où r est mesuré en mètres et A en mètres carrés. Calculez la dérivée de l'aire en fonction du rayon. Illustriez par un dessin la région représentée par la différence entre un disque de rayon $r + \Delta r$ et un disque de rayon r . Donnez une représentation géométrique de la dérivée. Est-ce que les unités sont cohérentes.

Question 4.36

Soit $f(x) = x^2$. Trouvez le point sur l'intervalle $[0, 2]$ où $f'(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

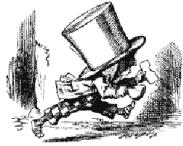
Question 4.37

La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrez qu'il n'existe pas de solution à l'équation $H(x) = 0.5$ même si $H(-1) = 0$ et $H(1) = 1$. Ceci démontre que le Théorème des valeurs intermédiaires est valable seulement pour les fonctions continues.

Montrez qu'il n'existe pas de valeur c telle que $H'(c)$ soit égale à la pente $\frac{H(1) - H(-1)}{2}$ de la sécante entre les points $(-1, H(-1))$ et $(1, H(1))$. Ceci démontre que le Théorème de la moyenne est valable seulement pour les fonctions qui sont différentiables.



Applications de la dérivée



5

5.1 Introduction

Exemple 5.1.1

Trouver l'équation de la droite tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ au point $(1, 2)$.

Une façon simple de résoudre ce genre de problème fait appel au calcul différentiel. Pour obtenir la pente de la droite tangente à la courbe

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

il suffit de dériver des deux côtés de l'égalité précédente en gardant en tête que y est une fonction de x . On obtient

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}.$$

La pente de la tangente à l'ellipse au point $(x, y) = (1, 2)$ est donc

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{-2 \times 1}{2} = -1.$$

L'équation de la droite tangente (sous la forme point-pente) est

$$(y - 2) = -(x - 1).$$



5.2 Étude de courbes

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. À la section 4.3, on a vu que $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$. À la proposition 4.4.2 de la section 4.4, on a utilisé cette propriété pour donner des conditions sur la dérivée f' qui déterminent les intervalles de croissance et décroissance de f , et les minimums et maximums locaux de f .

En résumé, on a remarqué que :

1. La fonction f est strictement croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour tout x entre a et b .
2. La fonction f est croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \geq 0$ pour tout x entre a et b .
3. La fonction f est strictement décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour tout x entre a et b .
4. La fonction f est décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \leq 0$ pour tout x entre a et b .
5. La fonction f a un maximum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c .
6. La fonction f a un minimum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c .

Il découle de la remarque 4.4.4 que, si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui possède un minimum ou maximum local au point $x = c$ de l'intervalle $]a, b[$, on a un des deux scénarios suivants : f n'a pas de dérivée au point $x = c$ ou $f'(c) = 0$. Pour trouver les maximums et minimums locaux d'une fonction f , il faut donc analyser les points c définis ci-dessous.

Définition 5.2.1

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Un **point critique** de la fonction f est un point $c \in]a, b[$ qui satisfait une des deux conditions suivantes :

1. f n'a pas de dérivée au point $x = c$.
2. $f'(c) = 0$.

En plus de pouvoir déterminer sur quels intervalles une fonction est croissante ou décroissante et à quels points elle a un maximum ou minimum local, on peut aussi utiliser la dérivée pour déterminer sur quels intervalles la pente de la fonction est croissante ou décroissante. Ce type de comportement des fonctions porte le nom de **courbure** de la fonction. On observe deux types de courbure.

Définition 5.2.2

Une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** (ou **concave vers le haut**) sur $]a, b[$ si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (5.2.1)$$

pour tous x et y dans $]a, b[$ et tous $\lambda \in [0, 1]$ (voir figure 5.1).

La fonction f est dite **concave** (ou **concave vers le bas**) sur $]a, b[$ si le signe \leq est remplacé par \geq en (5.2.1).

Dans le cas où f est une fonction différentiable définie sur un intervalle $]a, b[$, on obtient que f est convexe sur $]a, b[$ si pour tout $x \in]a, b[$ on a que la droite tangente au graphe de la

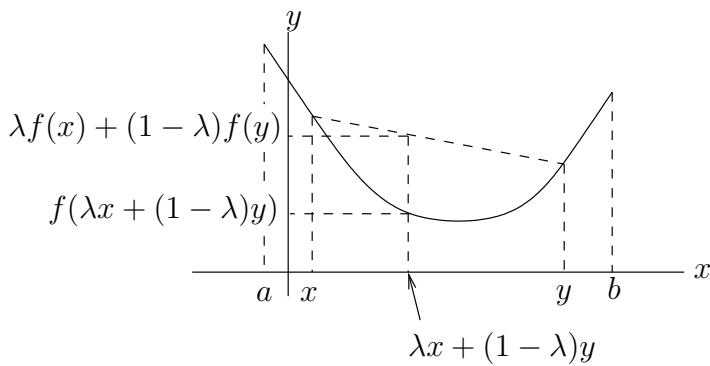


FIGURE 5.1 – Exemple d'une fonction convexe sur l'intervalle $]a, b[$. La droite qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est au-dessus du graphe de f .

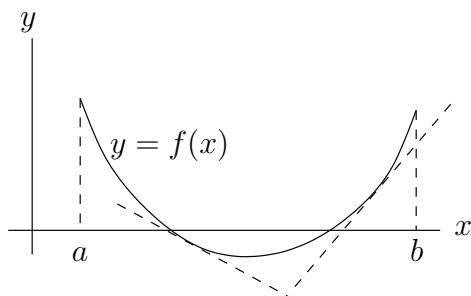


FIGURE 5.2 – Exemple d'une fonction convexe sur l'intervalle $]a, b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est en dessous du graphe de cette fonction. On a aussi que la pente de la tangente augmente lorsque x augmente.

fonction f au point $(x, f(x))$ est strictement en dessous du graphe de f sauf naturellement au point $(x, f(x))$ lui-même. À première vue, cette dernière caractérisation des fonctions convexes n'est pas facile à vérifier. Cependant, le théorème suivant nous donne un outil pour démontrer facilement qu'une fonction est convexe ou concave sur un intervalle.

Proposition 5.2.3

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Si f' est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est convexe sur l'intervalle $]a, b[$ (voir figure 5.2).
2. Si f' est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est concave sur l'intervalle $]a, b[$ (voir figure 5.3).

Si f' est une fonction différentiable, on peut utiliser sa dérivée pour déterminer les intervalles où elle est croissante et décroissante comme on a fait pour la fonction f .

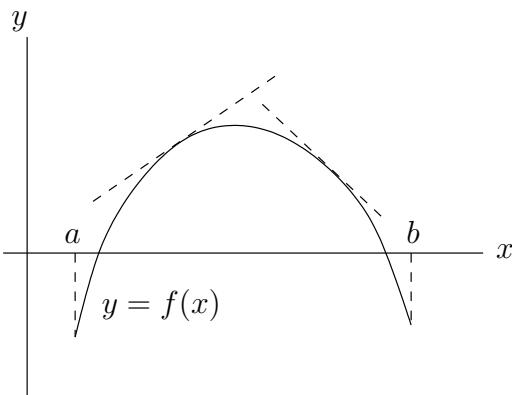


FIGURE 5.3 – Exemple d'une fonction concave sur l'intervalle $]a, b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est au dessus du graphe de cette fonction. On a aussi que la pente de la tangente diminue lorsque x augmente.

Définition 5.2.4

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est elle-même une fonction différentiable. La **dérivée seconde de f** ou **dérivée d'ordre 2 de f** est la dérivée de la fonction f' . Elle est dénotée f'' , $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.

Si $f'' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, la **dérivée troisième de f** ou **la dérivée d'ordre 3 de f** est la dérivée de la fonction f'' . Elle est dénotée f''' , $\frac{d^3 f}{dx^3}$ ou $f^{(3)}$.

Par induction, on peut définir la **n^e dérivée de f** ou **dérivée d'ordre n de f** qui est dénotée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Proposition 5.2.5

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre deux.

1. La fonction f est convexe sur un intervalle $]a, b[$ si $f''(x) > 0$ pour tout x entre a et b .
2. La fonction f est concave sur un intervalle $]a, b[$ si $f''(x) < 0$ pour tout x entre a et b .

Les points où la fonction change de convexe à concave et vice-versa sont très utiles pour tracer le graphe d'une fonction. On leur donne donc un nom.

Définition 5.2.6

Un **point d'inflexion** est un point du domaine de la fonction où la direction de la concavité change.

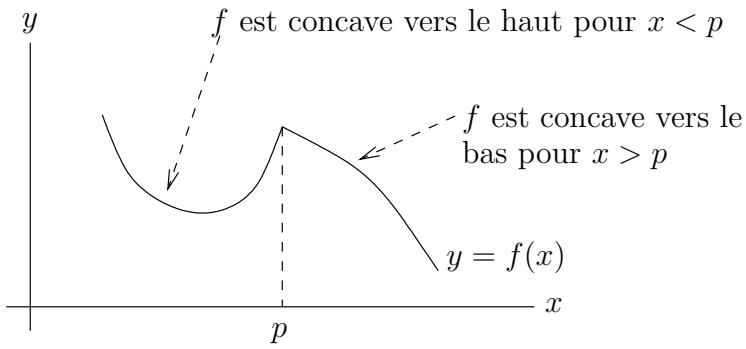


FIGURE 5.4 – Le point p est un point d’infexion où f'' n’existe pas car f' n’existe pas.

Proposition 5.2.7

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Un point p est un point d’infexion si f' a un maximum ou minimum local à p .

Remarque 5.2.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On a vu que $f'(p) = 0$ n’était pas suffisant et nécessaire pour obtenir un maximum ou minimum au point p . On a un problème semblable avec les points d’infexion.

On n’a pas nécessairement $f''(p) = 0$ à un point d’infexion p . À la figure 5.4, on a une fonction qui a un point d’infexion à p mais la fonction ne possède pas de dérivée d’ordre deux (et d’ordre un) au point p .

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui possède des dérivées d’ordre 2, alors on doit avoir $f''(p) = 0$. Malheureusement, on ne peut pas conclure que l’on a un point d’infexion à p lorsque $f''(p) = 0$. Par exemple, la fonction $f(x) = x^4$ satisfait $f''(0) = 0$ mais 0 n’est pas un point d’infexion (tracer le graphe de f pour vous en convaincre).

De plus, il n’est pas nécessaire d’avoir $f'(p) = 0$ à un point d’infexion comme il est montré à la figure 5.5. Un autre exemple est fourni par le graphe du sinus qui possède des points d’infexion à tous les points $n\pi$ où n est un entier. ♠

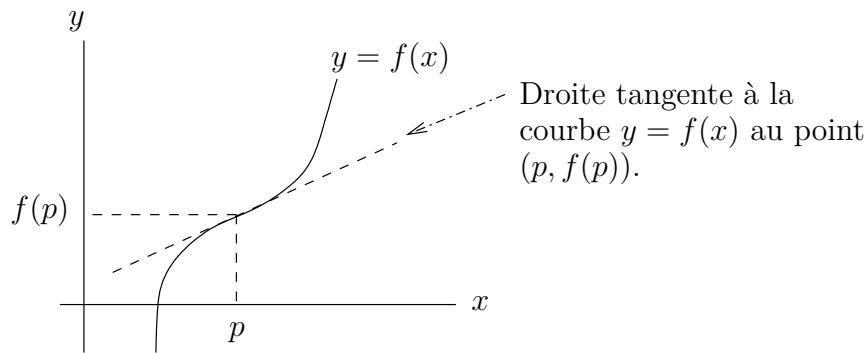
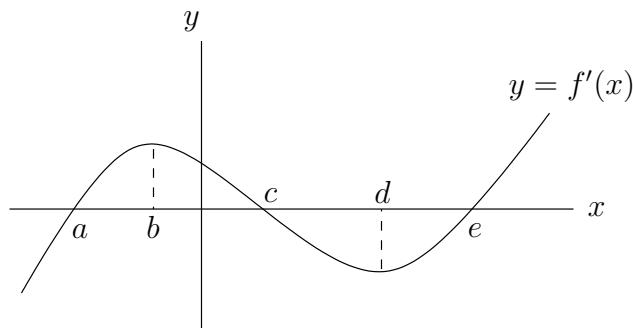
Exemple 5.2.9

On considère le graphe de f' donné à la figure 5.6.

- Quels sont les points critiques de f ?
- Où sont les maximums et minimums locaux de f ?
- Quels sont les points d’infexion de f ?

Le graphe de f' nous donne l’information suivante sur la fonction f .

x	$x < a$	a	$a < x < c$	c	$c < x < e$	e	$e < x$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	décroît	min. local	croît	max. local	décroît	min. local	croît

FIGURE 5.5 – Le point p est un point d'inflexion où $f'(p) \neq 0$.FIGURE 5.6 – Le graphe de la dérivée de la fonction f qui est considéré à l'exemple 5.2.9.

- a) Les points critiques de f sont a , c et e car, pour ces valeurs de x , $f'(x) = 0$.
- b) Il y a un maximum local au point $x = c$ car $f'(x)$ passe de positif à négatif lorsque x varie de plus petit que c à plus grand que c . Il y a un minimum local au point $x = a$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que a à plus grand que a . De même, il y a un minimum local au point $x = e$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que e à plus grand que e .
- c) La pente de la tangente à la courbe $y = f'(x)$ au point x donne $f''(x)$. Ainsi, on a

x	$x < b$	b	$b < x < d$	d	$x > d$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
	convexe	point d'inflexion	concave	point d'inflexion	convexe

On a des points d'inflexion aux points $x = b$ et $x = d$ car la courbure change à ces points.



Avant de décrire la procédure pour tracer le graphe d'une fonction, on peut énoncer deux méthodes pour déterminer si un point critique est un maximum ou un minimum local.

Proposition 5.2.10 (Test de la dérivée première)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f . On suppose que f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf peut-être au point c .

1. Si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour $x > c$, alors f a un minimum local au point c .
2. Si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour $x > c$, alors f a un maximum local au point c .

Pour le premier cas, on déduit du signe de la dérivée que f est décroissante pour $x < c$ et croissante pour $x > c$. Donc, on a bien un minimum local en $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, on a que f est croissante pour $x < c$ et décroissante pour $x > c$. Donc, on a un maximum local en $x = c$.

Proposition 5.2.11 (Test de la dérivée seconde)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivé d'ordre deux et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f' .

1. Si $f''(c) > 0$, alors f a un minimum local au point c .
2. Si $f''(c) < 0$, alors f a un maximum local au point c .

Pour le premier cas, on déduit du signe de la dérivée seconde que f est convexe au voisinage de c . Donc, on a un minimum local en $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, on a que f est concave au voisinage de c . Donc, on a un maximum local en $x = c$.

Si on se fie seulement à l'énoncé des deux propositions précédentes, on pourrait croire que le test de la dérivée second est plus simple à utiliser que le test de la dérivée première car l'énoncé du test de la dérivée second est plus simple que celui du test de la dérivée première. Ce n'est pas un bon critère de comparaison entre les deux tests. Le test de la dérivée première est généralement préférable car il faut seulement calculer la première dérivée de f .

On peut maintenant énoncer la procédure pour tracer le graphe d'une fonction.

Méthode 5.2.12

Pour tracer le graphe d'une fonction f , il faut :

1. Trouver les points où f n'est pas définie. Ce sont les points où il peut y avoir une asymptote verticale.
2. Trouver (si possible) les points p où $f(p) = 0$. Ce sont les points où le graphe de f traverse l'axe des x .
3. Trouver les points critiques de f . Ce sont les points où il peut y avoir un maximum ou un minimum local. Pour tracer le graphe de f , il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
4. Trouver les points où f'' n'existe pas et les points p où $f''(p) = 0$ (i.e. les points critiques de f'). Ce sont les points où il peut y avoir des points d'inflexion. Comme pour les points critiques, pour tracer le graphe de f , il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
5. Après avoir ordonné les points trouvés précédemment, déterminer le signe de f , f' et f'' sur chacun des intervalles délimités par ces points. Le signe de f détermine si f est positive ou négative. Le signe de f' détermine si f est strictement croissante ou décroissante. Le signe de f'' détermine si f est convexe ou concave.
6. Trouver les asymptotes horizontales (lorsque x converge vers plus ou moins l'infini) et les asymptotes verticales (lorsque $f(x)$ converge vers plus ou moins l'infini si x converge vers un point qui n'est pas dans le domaine de f).
7. Tracer le graphe de f intervalle par intervalle en utilisant toute l'information trouvée ci-dessus.

Exemple 5.2.13

Tracer le graphe de $f(x) = 1/(xe^x) = x^{-1}e^{-x}$.

On a

$$f'(x) = -x^{-2}e^{-x} - x^{-1}e^{-x} = \left(-x^{-2} - x^{-1}\right)e^{-x} = -x^{-2}(1+x)e^{-x}$$

et

$$f''(x) = \left(2x^{-3} + x^{-2}\right)e^{-x} - \left(-x^{-2} - x^{-1}\right)e^{-x} = x^{-3}\left(2 + 2x + x^2\right)e^{-x}.$$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie au point $x = 0$, elle est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$.

La fonction f' n'est pas définie au point $x = 0$ et elle est égale à 0 au point $x = -1$. De plus, sauf à $x = 0$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > -1$ et positif pour $x < -1$. On a que $f(-1) = e = 2.71828182845905\dots$

La fonction f'' n'est pas définie au point $x = 0$ et n'est jamais égale à 0 car le polynôme $2 + 2x + x^2$ n'a pas de racines réelles ; dans le cas présent, $2 + 2x + x^2 > 0$ pour tout x . On a $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 0$.

Puisque xe^x est une fonction qui croît sans borne supérieure lorsque x augmente, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

La droite $y = 0$ est donc une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty.$$

On peut vérifier numériquement cette dernière limite à l'aide de suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tendent vers moins l'infini (e.g. prenez la suite où $x_n = -n$). On va voir plus tard un résultat (i.e. la règle de l'Hospital) qui nous permettra facilement de calculer ce genre de limites.

Puisque $xe^x < 0$ tend vers 0 lorsque $x < 0$ tend vers 0, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{xe^x} = -\infty.$$

De même, puisque $xe^x > 0$ tend vers 0 lorsque $x > 0$ tend vers 0, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe^x} = +\infty.$$

La droite $x = 0$ (avec $y > 0$) est donc une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la droite et la droite $x = 0$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la gauche.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	—	$-e$	—	N.A.	+	0
$f'(x)$	+	0	—	N.A.	—		
$f''(x)$	—	$-e$	—	N.A.	+		

I : négative, croissante et concave

IV : asymptote verticale $x = 0$

II : maximum local

V : positive, décroissante et convexe

III : négative, décroissante et concave

VI : asymptote horizontale $y = 0$

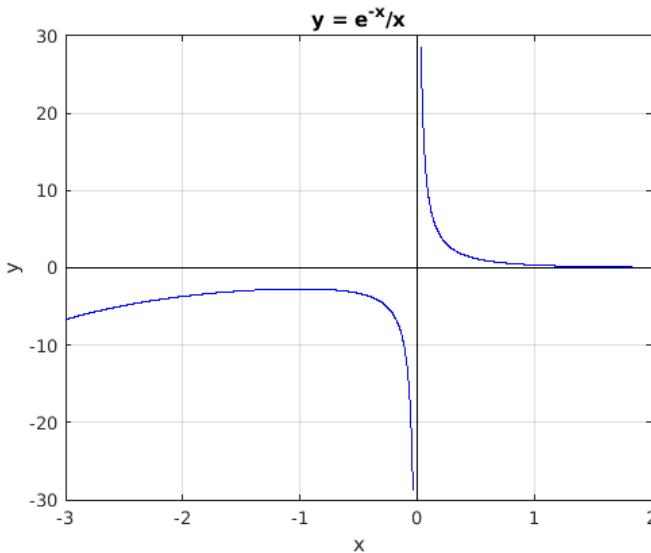
Le graphe de f est donné à la figure 5.7. ♣

Exemple 5.2.14

Traçons le graphe de $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

On a

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{6x^2 - 18x + 14}{(x-1)^3(x-2)^3}.$$

FIGURE 5.7 – Graphe de $f(x) = e^{-x}/x$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, elle est positive pour $x < 1$ et $x > 2$, et négative pour $1 < x < 2$.

La fonction f' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$. Elle est égale à 0 au point $x = 3/2$. De plus, sauf aux points $x = 1$ et $x = 2$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > 3/2$ et positif pour $x < 3/2$. On a $f(3/2) = -4$.

La fonction f'' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, et n'est jamais égale à 0 car $6x^2 - 18x + 14$ n'a pas de racines réelles ; on a $6x^2 - 18x + 14 > 0$ pour tout x .

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ,$$

l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers moins l'infini. De même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 ,$$

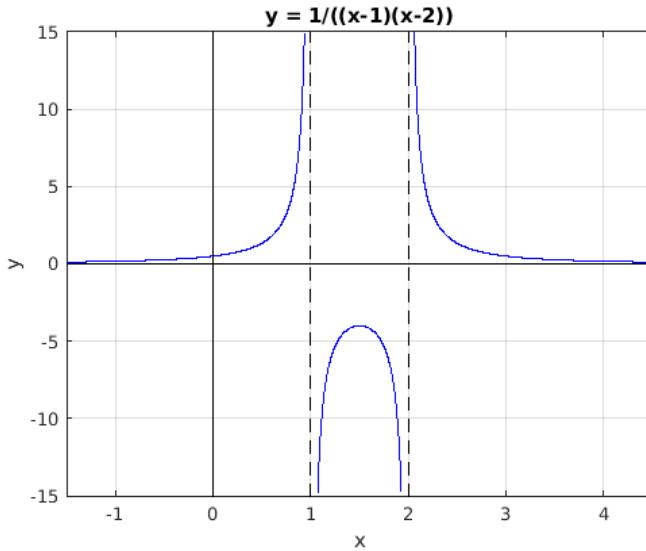
et l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty .$$

Donc, la droite $x = 1$ (avec $y > 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la gauche, la droite $x = 1$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la droite, la droite $x = 2$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par la gauche et la droite $x = 2$ (avec $y > 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par la droite.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

FIGURE 5.8 – Graphe de $f(x) = 1/((x-1)(x-2))$

x	$-\infty$	$x < 1$	1	$1 < x < 3/2$	$3/2$	$3/2 < x < 2$	2	$x > 2$	$+\infty$
$f(x)$	0	+	N.A.	–	-4	–	N.A.	+	0
$f'(x)$		+	N.A.	+	0	–	N.A.	–	
$f''(x)$		+	N.A.	–	–	–	N.A.	+	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

I : asymptote horizontale $y = 0$

VI : négative, décroissante, concave

II : positive, croissante, convexe

VII : asymptote verticale $x = 2$ III : asymptote verticale $x = 1$

VIII : positive, décroissante, convexe

IV : négative, croissante, concave

IX : asymptote horizontale $y = 0$

V : maximum local

Le graphe de f est donné à la figure 5.8. ♣**Exemple 5.2.15** ♣

La relation entre le signe de la dérivée d'une fonction et la croissance ou décroissance de la fonction peut être très utile pour déterminer la convergence de certaines séries. Déterminons si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

converge ou diverge.

On va montrer que cette série converge en montrant qu'elle satisfait les trois conditions du test des séries alternées (voir théorème 2.2.42). Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

avec

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} > 0$$

pour tout n . De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ grâce au théorème des gendarmes. En effet,

$$0 < a_n = \frac{n^{1/2}}{n^{2/3} + 1} < \frac{n^{1/2}}{n^{2/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$.

Finalement, pour démontrer que $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n > 6$, on pose

$$f(x) = \frac{x^{1/2}}{x^{2/3} + 1}.$$

Puisque,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^{2/3} + 1) - x^{1/2}\left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)}{(x^{2/3} + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^{1/6} + \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(x^{2/3} + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(1 - \frac{1}{3}x^{2/3})}{(x^{2/3} + 1)^2} < 0$$

pour $x > 3^{3/2} = 5.196\dots$, f est strictement décroissante pour $x > 3^{3/2}$ et ainsi

$$a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$$

pour tout $n > 5$.

Grâce au test des série alternée, la série

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

converge et il en est de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}.$$

En effet, puisque

$$\sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \sum_{n=6}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

pour tout $k > 5$, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=6}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}. \end{aligned}$$



5.3 Optimisation

Définition 5.3.1

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Le **supremum** de f sur X est le plus petit nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in X$. L'**infimum** de f sur X est le plus grand nombre réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in X$.

Un fonction ne possède pas toujours un supremum ou un infimum. La fonction $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$ n'a pas de supremum car $1/x$ peut-être aussi grand que l'on veut lorsque x approche l'origine. Par contre 0 est l'infimum de $f(x)$ pour $x > 0$. On a bien que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Il n'existe pas de nombre $m > 0$ qui satisfasse aussi $1/x > m$ pour tout $x > 0$ car $1/x$ peut être aussi petit que l'on veut lorsque x devient de plus en plus grand.

On a définie précédemment le maximum absolu ou global d'une fonction f définie sur un intervalle ainsi que son minimum absolu ou global. Le maximum absolu et minimum absolu d'une fonction f définie sur un intervalle n'existent pas toujours. On a vu au paragraphe précédent que 0 était l'infimum de la fonction $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$. Cependant, f n'a pas de minimum absolu sur l'intervalle $]0, \infty[$. Il n'existe pas de point $c \in]0, \infty[$ tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

On peut par contre imposer des conditions sur la fonction et son domaine pour garantir l'existence du maximum absolu et minimum absolu.

Théorème 5.3.2 (Théorème des valeurs extrêmes)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors, f possède un maximum absolu M et un minimum absolu m . De plus, il existe au moins deux points c_1 et c_2 dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c_1) = M$ et $f(c_2) = m$.

Le théorème précédent demande que f soit continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Ces contraintes sont imposées à f et au domaine de f pour garantir l'existence d'un maximum et minimum absolu ; pour garantir l'existence de points dans le domaine de f où la fonction f atteint son maximum absolu et son minimum absolu. (voir la figure 5.11).

Si on considère la fonction f qui est définie sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.9, l'intervalle est ouvert au point $x = a$ et $x = a$ est une asymptote verticale pour f . La fonction f n'a donc pas de maximum absolu sur l'intervalle $]a, b]$.

Si on considère la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.10, l'intervalle est bien fermé mais la fonction n'est pas continue au point $x = c$. La valeur de f au point c est inférieure à M qui est la limite de f lorsque x approche c . M est le supremum de f sur l'intervalle $[a, b]$ mais il n'y a pas de point c_1 tel que $a \leq c_1 \leq b$ et $f(c_1) = M$. En d'autres mots, f n'a pas de maximum absolu sur l'intervalle $[a, b]$.

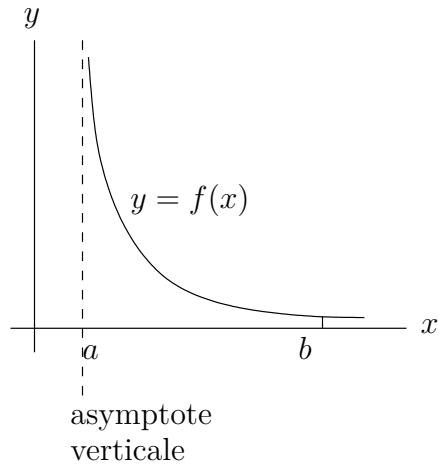
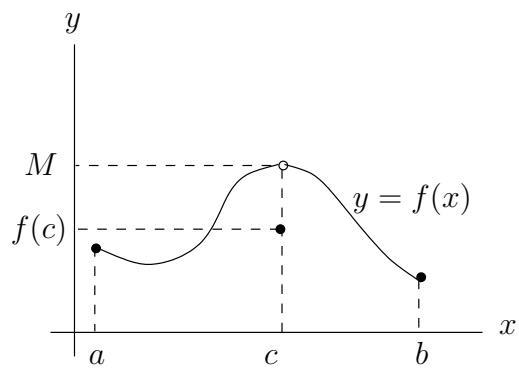
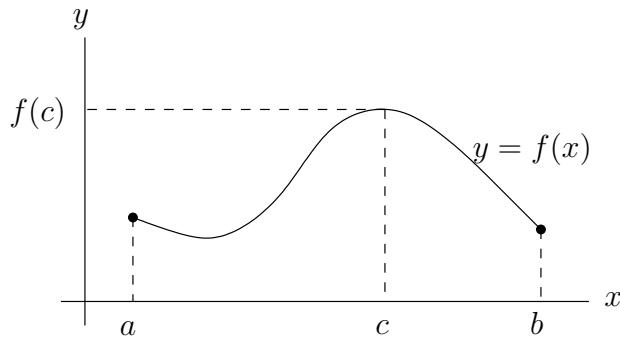


FIGURE 5.9 – La fonction n’admet pas de maximum global dans l’intervalle semi-ouvert $]a, b]$



f n’est pas
continue au point $x = c$

FIGURE 5.10 – La fonction n’a pas de maximum global dans l’intervalle fermé $[a, b]$



function continue sur
un intervalle fermé

FIGURE 5.11 – La fonction a un maximum global au point $x = c$ car la fonction est bien continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$

Méthode 5.3.3

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction f continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il suffit de trouver tous les points critiques de f sur l'intervalle $]a, b[$ et de comparer les valeurs de f à ces points et aux points a et b . La plus grande valeur est le maximum absolu et la plus petite valeur est le minimum absolu.

Exemple 5.3.4

Le nombre de saumons qui remontent une rivière de la Colombie-Britannique en fonction de la température $x^\circ\text{C}$ de l'eau est $S(x) = -x^3 + 3x^2 + 360x + 5000$ saumons. Si la température de l'eau varie de 6°C à 20°C , pour quelle température a-t-on le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière ?

On a $S'(x) = -3x^2 + 6x + 360 = -3(x - 12)(x + 10)$. Ainsi, le seul point critique dans l'intervalle $[6, 20]$ est 12.

Puisque $S(6) = 7052$, $S(12) = 8024$ et $S(20) = 5400$ saumons, le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière est 8024 saumons lorsque la température de l'eau est de 12°C . ♣

Exemple 5.3.5

Déterminez les points de l'ellipse $x^2 + 3y^2 = 9$ qui sont le plus près du point $(1, 0)$?

Il faut trouver les points (x, y) de l'ellipse dont la distance euclidienne $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ au point $(1, 0)$ est minimale. Ceci revient à trouver les points (x, y) qui minimisent $(x - 1)^2 + y^2$ et satisfont $x^2 + 3y^2 = 9$.

De l'équation de l'ellipse, on obtient que $y^2 = (9 - x^2)/3$ où $-3 \leq x \leq 3$. Il faut donc trouver x dans l'intervalle $[-3, 3]$ qui minimise $g(x) = (x - 1)^2 + (9 - x^2)/3$.

Le seul point critique de g est $x = 3/2$ car $g'(x) = 2(x - 1) - 2x/3 = 4x/3 - 2$. Puisque

$g(-3) = 16$, $g(3) = 4$ et $g(3/2) = 5/2$, la distance minimale entre l'ellipse et le point $(1, 0)$ est $\sqrt{5/2}$ lorsque $x = 3/2$. Il y a deux points (x, y) sur l'ellipse qui sont associés à $x = 3/2$; ils sont donnés par $y^2 = (9 - x^2)/2$. On trouve $(3/2, 3/2)$ et $(3/2, -3/2)$



Exemple 5.3.6

Un pigeon voyageur est libéré de sa cage qui se trouve sur un bateau pour livrer un message à son propriétaire qui demeure sur le bord de la côte. On suppose que la côte est linéaire. La distance entre le bateau et le point de la côte qui est le plus près du bateau est de 2 kilomètres, et la distance entre ce point et la demeure du propriétaire est de 3 kilomètres. Voir la figure 5.12.

En raison de la baisse de pression atmosphérique au dessus de grandes étendues d'eau, il est plus difficile pour les oiseaux de voler au-dessus de l'eau que de voler au-dessus de la terre ferme. Si le pigeon dépense 40% plus d'énergie pour voler au-dessus de l'eau qu'il en dépense pour voler au-dessus de la terre ferme, quel trajet doit suivre le pigeon pour minimiser la dépense d'énergie ? Doit-il se diriger vers le point de la côte qui est le plus près du bateau et ensuite longer la côte jusqu'à la demeure de son propriétaire ? Doit-il voler directement vers la demeure de son propriétaire ? Doit-il choisir un trajet entre ces deux extrêmes ?

S'il faut une unité d'énergie par kilomètre pour voler au-dessus de la terre ferme alors il faut 1.4 unités d'énergie par kilomètre pour voler au dessus de l'eau. La quantité d'énergie dépensée par le pigeon pour se rendre du bateau à la demeure de son propriétaire est

$$E(x) = 1.4\sqrt{2^2 + x^2} + |3 - x| = \frac{7}{5}\sqrt{4 + x^2} + |3 - x|$$

où x est la distance (en kilomètres) entre le point de la côte qui est le plus près du bateau et le point où le pigeon atteint la côte. On peut supposer que $0 \leq x \leq 3$ car, pour des valeurs de x à l'extérieur de cet intervalle, le pigeon allongerait son trajet inutilement.

Les points critiques de E sont les solutions de

$$E'(x) = \frac{7x}{5\sqrt{4 + x^2}} - 1 = 0.$$

Le seul point critique entre 0 et 3 est $x = 5/\sqrt{6} = 2.04\dots$ kilomètres.

Puisque $E(0) = 5.8$, $E(3) = 5.04777\dots$ et $E(5/\sqrt{6}) = 4.95959\dots$. L'énergie est minimale pour $x = 5/\sqrt{6}$.

Donc, le pigeon devrait voler en ligne droite au-dessus de l'eau jusqu'au point de la côte qui est à une distance de $2.04\dots$ kilomètres du point de la côte qui est le plus près du bateau, et de ce point voler en ligne droite jusqu'à la demeure de son propriétaire.



Exemple 5.3.7

Déterminer les dimensions du triangle isocèle (deux côtés égaux) d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon r . Voir la figure 5.13.

La hauteur du triangle est $h = r + x$ avec $-r \leq x \leq r$. L'aire du triangle est $A = hb/2 = (r + x)b/2$. Il faut écrire b en fonction de x et r . Du théorème de Pythagore, on a que $r^2 = x^2 + (b/2)^2$. Ainsi $b = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

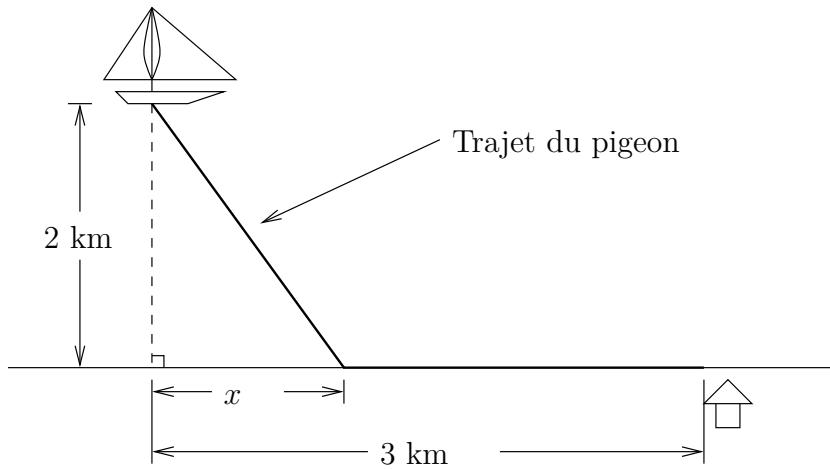


FIGURE 5.12 – Trajet du pigeon entre le bateau et la demeure de son propriétaire

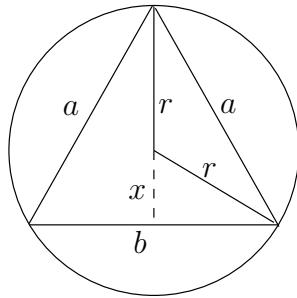


FIGURE 5.13 – Un triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon r

L'aire du triangle est donc $A(x) = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$ pour $-r \leq x \leq r$. La fonction A a un seul point critique entre $-r$ et r car $A'(x) = (-2x^2 - xr + r^2)/\sqrt{r^2 - x^2} = 0$ avec $-r < x < r$ implique que $-2x^2 - xr + r^2 = 0$. C'est un polynôme de degré deux en x (car r est une constante) dont les racines sont

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} = -r \quad \text{ou} \quad \frac{r}{2}.$$

Ainsi, entre $-r$ et r , le seul point critique de la fonction A est $x = r/2$.

Puisque $A(r) = A(-r) = 0$ et $A(r/2) = 3\sqrt{3}r^2/4$, l'aire maximale est $3\sqrt{3}r^2/4$ pour $x = r/2$. Ainsi, le triangle isocèle a les dimensions suivantes : $h = r + x = 3r/2$, $b = 2\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3}r$ et $a = \sqrt{h^2 + (b/2)^2} = \sqrt{3}r$. En fait, on a un triangle équilatéral (trois côtés égaux) car $a = b$. ♣

Exemple 5.3.8 🔑

On forme un gobelet conique à partir d'un secteur de cercle de rayon R en joignant les deux rayons qui délimitent le secteur de cercle. Quelle est la capacité maximale d'un tel gobelet ?

Si on utilise la figure 5.14, le problème est de trouver θ pour obtenir le cône de volume

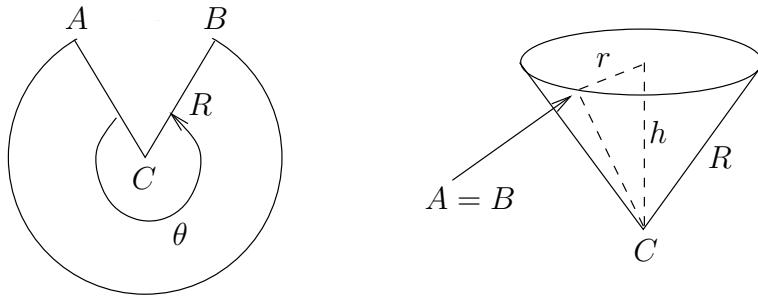


FIGURE 5.14 – Un gobelet conique fait à partir d'un secteur de cercle de rayon R

maximal.

Le volume d'un cône est donné par la formule $V = \pi r^2 h/3$. Nous allons exprimer le volume en termes du rayon r de la base du cône et du rayon R . Puisque $r^2 + h^2 = R^2$, on obtient que $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ pour $0 \leq r \leq R$. Donc, $V(r) = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}/3$.

Le seul point critique de V entre 0 et R est $r = \sqrt{2/3} R$. En effet,

$$V'(r) = \frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{3} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi r(2R^2 - 3r^2)}{3\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Donc, $V'(r) = 0$ avec $0 < r < R$ seulement pour $r = \sqrt{2/3} R$.

Puisque $V(0) = V(R) = 0$ et $V(\sqrt{2/3} R) = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$, le volume maximal du cône est $2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ pour $r = \sqrt{2/3} R$.

On remarque que la circonférence de la base du cône est la longueur de l'arc de cercle défini par le secteur de cercle utilisé pour construire le cône. Donc, $\theta R = 2\pi r = 2\pi \sqrt{2/3} R$ et on trouve $\theta = 2\pi \sqrt{2/3}$ radians. ♣

Malheureusement, on ne peut pas toujours utiliser la méthode 5.3.3 pour trouver le maximum et minimum absolu d'une fonction. Quand c'est le cas, on doit tracer grossièrement le graphe de la fonction dont l'on cherche le maximum ou minimum absolu. C'est la situation qui se présente dans les exemples suivants.

Exemple 5.3.9

Cet exemple provient de [1].

Les abeilles butinent (récoltent le nectar des fleurs) dans le but de produire du miel. Lorsqu'une abeille butine, elle aspire le nectar des fleurs dans son jabot. La vitesse à laquelle elle aspire le nectar d'une fleur (i.e. le taux instantané de changement de la quantité de nectar dans le jabot de l'abeille) diminue avec le temps en raison de la diminution de nectar dans la fleur, ce qui rend le travail d'aspirer le nectar plus difficile pour l'abeille.

Dans le but de maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage, l'abeille n'aspire pas tout le nectar de chaque fleur qu'elle visite mais quitte cette fleur pour une autre fleur avant d'avoir aspiré tout le nectar. L'abeille quitte une fleur lorsque

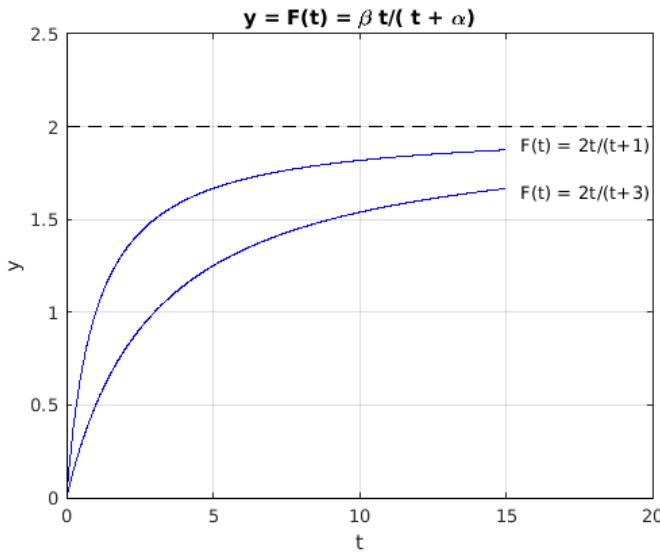


FIGURE 5.15 – Le graphe de $F(t) = \beta t / (t + \alpha)$, la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une fleur.

la vitesse à laquelle elle aspire le nectar est assez faible pour justifier le voyage à une autre fleur. Par contre, quand l'abeille voyage d'une fleur à une autre fleur, elle ne récolte pas de nectar.

Combien de temps l'abeille doit-elle demeurer sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage ?

Si on suppose que les fleurs sont uniformément distribuées dans le champ, on peut assumer que le temps que prend l'abeille pour se rendre d'une fleur à une autre fleur est constant, disons τ minutes.

Supposons que la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur est

$$F(t) = \frac{\beta t}{t + \alpha}$$

où β est la quantité de nectar que possède une fleur et α est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar. La quantité $F(t)$ récoltée après t minutes diminue lorsque α augmente (voir la figure 5.15). Normalement, les constantes α et β varient selon l'espèce de fleurs, et parfois α et β vont varier entre deux fleurs de même espèce. Pour simplifier le problème, nous supposerons que toutes les fleurs sont identiques et donc que α et β ne varient pas d'une fleur à l'autre.

En comptant le temps pour se rendre d'une fleur à l'autre, la vitesse moyenne à laquelle l'abeille aspire le nectar d'une fleur sur laquelle elle demeure pendant t minutes (i.e. le taux de variation moyen de la quantité de nectar dans le jabot de l'abeille durant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur) est

$$R(t) = \frac{F(t)}{t + \tau}.$$

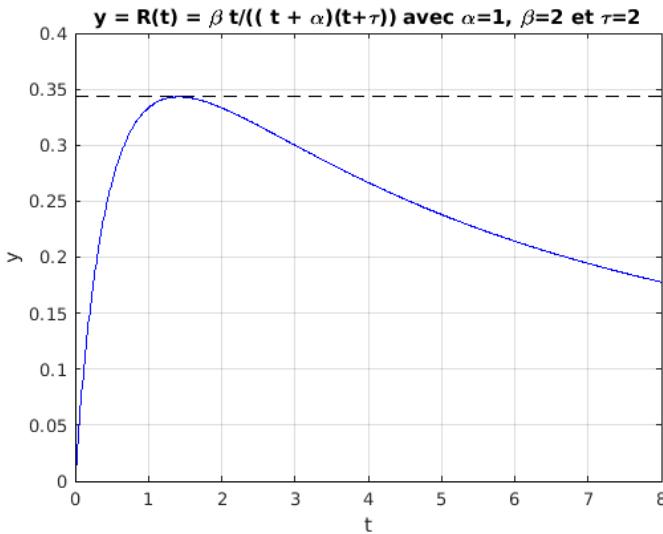


FIGURE 5.16 – Le graphe de la vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille aspire le nectar d'une fleur en fonction du temps t depuis son arrivée sur la fleur

Si on suppose que le nombre d'heures de travail d'une abeille dans une journée est fixe (les abeilles sont syndiquées et elles travaillent 8 heures par jour), le problème mathématique que l'abeille a « à résoudre » est de trouver la valeur de t pour maximiser $R(t)$.

Puisque

$$R(t) = \frac{\beta t}{(t + \tau)(t + \alpha)} .$$

on trouve

$$R'(t) = \frac{\beta(\alpha\tau - t^2)}{(t + \alpha)^2(t + \tau)^2} .$$

Le point $T = \sqrt{\alpha\tau}$ est le seul point critique positif de R (vérifier cet énoncé).

On obtient donc

t	0	$0 < t < T$	T	$T < t < +\infty$	$+\infty$
$R(t)$	0	+	$\beta T / ((T + \alpha)(T + \tau))$	+	0
$R'(t)$	$\beta / (\alpha\tau)$	+	0	-	0
			max. local		asymptote horizontale

Puisque $R(t) < R(T)$ pour tout $t \geq 0$ et $t \neq T$, la fonction R a donc un maximum absolu à $T = \sqrt{\alpha\tau}$ minutes (voir figure 5.16).

On peut donner un sens biologique / physique au choix de t qui maximise $R(t)$. Si on

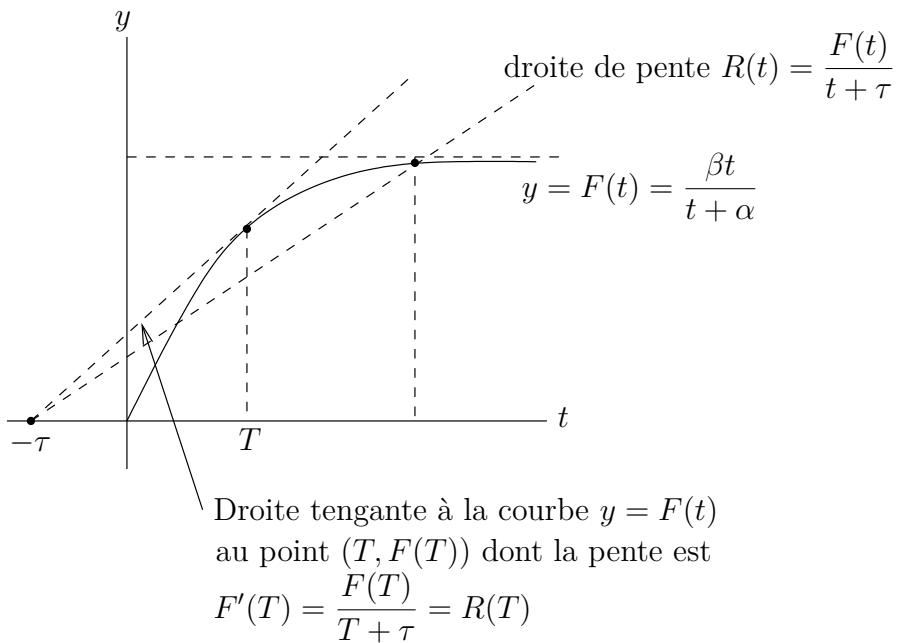


FIGURE 5.17 – La vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille a aspiré le nectar d'une fleur pendant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur est la pente de la droite entre $(-\tau, 0)$ et $(t, F(t))$. On cherche la valeur T de t pour que cette droite soit tangente à la courbe $y = F(t)$ au point $t = T$.

dérive $R(t) = F(t)/(t - \tau)$ sans substituer l'expression algébrique pour $F(t)$, on trouve

$$R'(t) = \frac{F'(t)(t + \tau) - F(t)}{(t + \tau)^2} .$$

Ainsi, $R'(t) = 0$ si et seulement si

$$F'(t) = \frac{F(t)}{t + \tau} = R(t) .$$

Une abeille arrête donc de butiner une fleur au temps $t = T$ lorsque la vitesse (instantanée) à laquelle elle aspire le nectar égale la vitesse moyenne $R(t)$. Ce principe est appelé la **règle des valeurs marginales**.

Qu'arrive-t-il au temps t où R atteint son maximum lorsque le temps τ pour voyager d'une fleur à l'autre augmente ? Lorsque le niveau de difficulté α pour récolter le nectar augmente ?

Sommes-nous en mesure de traiter le problème où α et β change d'une fleur à l'autre ? ♣

Exemple 5.3.10 🌳

Cet exemple provient de [10] et [13]

Les mâles d'une espèce de grenouille du Porto-Rico (i.e. Eleutherodactylus coqui) protègent les oeufs pondus par les femelles. S'ils ne protègent pas les oeufs, ceux-ci risquent d'être

détruits. Par contre, quand les mâles protègent les oeufs, ils ne cherchent pas de partenaires pour se reproduire et donc ne participent pas à la reproduction de l'espèce.

La proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui éclosent (qui produisent une nouvelle grenouille) en fonction du temps t passé par les mâles pour protéger les oeufs est

$$w(t) = \frac{p(t)}{t + C}$$

où $p(t)$ est la probabilité que les mâles passent le temps t à protéger les oeufs et C est une constante qui représente le niveau de difficulté à trouver un partenaire.

Si $p(t) = \frac{t}{1+t}$ et $C = 3$, pour quelle valeur de t aurons-nous la plus grande proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui écloront ?

On a $w(t) = \frac{t}{(t+1)(t+3)}$. Donc,

$$\ln(w(t)) = \ln(t) - \ln(t+1) - \ln(t+3)$$

donne, après avoir dérivé par t des deux côtés,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}.$$

Ainsi,

$$w'(t) = \left(\frac{(t+1)(t+3) - t(t+3) - t(t+1)}{t(t+1)(t+3)} \right) \left(\frac{t}{(t+1)(t+3)} \right) = \frac{-t^2 + 3}{(t+1)^2(t+3)^2} = 0$$

pour $t = \sqrt{3}$. Puisque $w'(t) < 0$ pour $t > \sqrt{3}$ et $w'(t) > 0$ pour $0 \leq t < \sqrt{3}$, $t = \sqrt{3}$ est le temps qui maximise $w(t)$.

Si on dérive $w(t) = \frac{p(t)}{t+C}$ par rapport à t , on trouve que

$$w'(t) = \frac{p'(t)(t-C) - p(t)}{(t+C)^2} = 0$$

lorsque

$$p'(t) = \frac{p(t)}{t+C} = w(t).$$

On a une **règle des valeurs marginales** comme à l'exemple 5.3.9 pour les abeilles. On a que la proportion maximale d'oeufs pondus qui éclosent est atteinte à $t = T$ lorsque le taux de variation instantané de la probabilité des mâles de protéger les oeufs pendant un temps t est égale à la proportion d'oeufs pondus qui éclosent si les mâles passent un temps t à protéger les oeufs. ♣

Exemple 5.3.11 ♪

Quelles sont les dimensions du triangle isocèle d'aire minimale qui contiendra un cercle de rayon R ?

L'aire du triangle de la figure 5.18 est donnée par la formule $A = b(R + x)/2$. Il faut exprimer b en terme de x et R . On remarque que le triangle $\triangle ABC$ est semblable au triangle $\triangle DOC$. On a donc que

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{CD}|}.$$

Or, par le théorème de Pythagore, $|\overline{CD}| = \sqrt{x^2 - R^2}$. Ainsi,

$$\frac{b/2}{R+x} = \frac{R}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

pour $x > R$. On obtient $b = 2R(x + R)/\sqrt{x^2 - R^2}$ et l'aire du triangle contenant le cercle de rayon R est

$$A(x) = \frac{R(x + R)^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

Cherchons les points critiques de A . On a

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2R(x + R)\sqrt{x^2 - R^2} - Rx(x + R)^2/\sqrt{x^2 - R^2}}{x^2 - R^2} \\ &= \frac{2R(x + R)(x^2 - R^2) - Rx(x + R)^2}{(x^2 - R^2)\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{R(x - 2R)(x + R)^2}{(x^2 - R^2)\sqrt{x^2 - R^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $A'(x) = 0$ avec $x > R$ si $x = 2R$. On résume l'information que l'on a au sujet de A dans le tableau suivant :

x	R	$R < x < 2R$	$2R$	$x > R$	∞
$A(x)$	$+\infty$	+	$3\sqrt{3}R^2$	+	$+\infty$
$A'(x)$		-	0	+	
			min. local		

L'aire minimale du triangle contenant le cercle de rayon R est $3\sqrt{3}R^2$ lorsque $x = 2R$. Pour $x = 2R$, on a que $b = 2R(2R + R)/\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 2\sqrt{3}R$ et

$$a = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2} = \sqrt{(b/2)^2 + (x + R)^2} = 2\sqrt{3}R.$$

On trouve donc un triangle équilatéral avec des côtés de longueur $2\sqrt{3}R$.



5.4 Les taux liés

On considère les problèmes où deux variables dépendantes du temps (ou de tout autre paramètre) sont reliées par une relation mathématiques. On cherche à déterminer le taux de variation instantané d'une variable en fonction du taux de variation instantané de l'autre

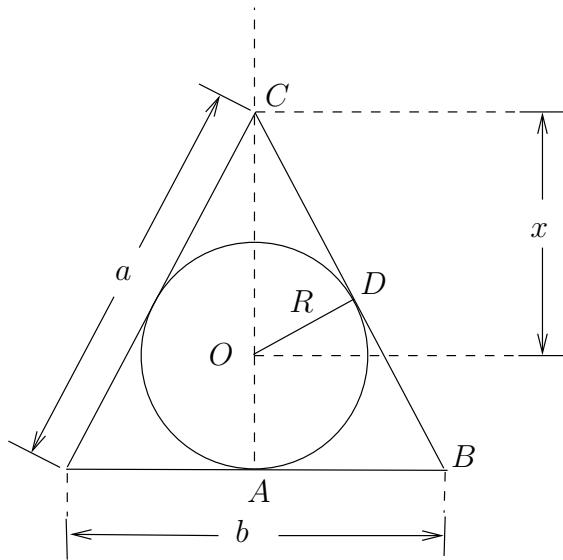
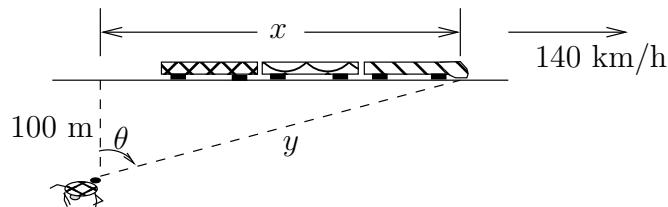


FIGURE 5.18 – Un cercle de rayon R inscrit à l'intérieur d'un triangle

variable. Comme les exemples suivants vous démontrer, on a tous les outils nécessaires pour résoudre ce genre de problèmes.

Exemple 5.4.1

Une vache regarde le train passer. Si la vache est à 100 m de la voie ferrée et le train se déplace à 140 km/h, à quelle vitesse (angulaire) la vache doit-elle tourner la tête pour suivre le (devant du) train lorsque celui-ci est à 500 m de la vache ?



On va résoudre le problème avec les kilomètres comme unités de distance. On a

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{0.1} = 10x(t) .$$

θ et x dépendent du temps t . Si on dérive cette équation par rapport à t , on obtient

$$\sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) = 10 \frac{dx}{dt}(t) .$$

Donc

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = 10 \frac{dx}{dt}(t) \cos^2(\theta(t)) .$$

Comme la vitesse du train est constante, on a $\frac{dx}{dt}(t) = 140$ km/h pour tout t . Supposons que le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache lorsque $t = \tau$. On a alors

$$\cos(\theta(\tau)) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 .$$

Donc, lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache, on a

$$\frac{d\theta}{dt}(\tau) = 10 \frac{dx}{dt}(\tau) \cos^2(\theta(\tau)) . = 10 \times 140 \times 0.2^2 = 56 \text{ radians/h} .$$

Le temps τ lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache n'est pas connu. Pour le déterminer, il faudrait connaître la position initiale du train. Comme on a vu, on n'a pas besoin de connaître τ pour déterminer la vitesse à laquelle la vache doit tourner la tête lorsqu'elle est à 0.5 km du (devant du) train.

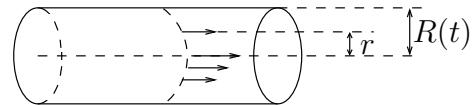


Exemple 5.4.2

Le flot dans un vaisseau sanguin est déterminé par la loi de Poiseuille.

$$v(t) = k(R^2(t) - r^2)$$

où $v(t)$ est la vitesse du sang en millimètres par minute à une distance r du centre du vaisseau au temps t en minutes.



$R(t)$ est le rayon en millimètres du vaisseau sanguin au temps t en minutes et $k = 375$ est une constante associée au sang. Si le froid fait contracter le vaisseau sanguin à la vitesse de 0.01 mm/m, calculer le taux de variation de la vitesse sanguin (l'accélération) lorsque le rayon du vaisseau sanguin est de 0.08 mm.

On a que $\frac{dR}{dt}(t) = -0.01$ mm/m pour tout t . Le signe négatif indique que le vaisseau contracte. Si on dérive la loi de Poiseuille par rapport à t , on obtient

$$\frac{dv}{dt}(t) = 2kR(t) \frac{dR}{dt}(t) .$$

Ainsi, au temps $t = \tau$ où $R(\tau) = 0.08$ mm, on a

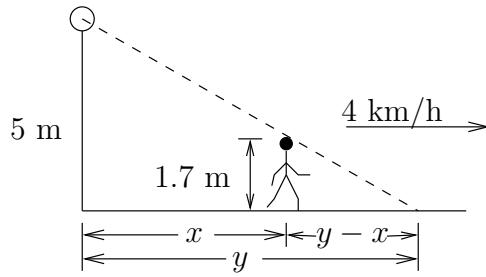
$$\frac{dv}{dt}(\tau) = 2kR(\tau) \frac{dR}{dt}(\tau) = 2 \times 375 \times 0.08 \times (-0.01) = -0.6 \text{ mm/m} .$$

La vitesse du sang diminue.



Exemple 5.4.3

Un réverbère a une hauteur de 5 m. Une personne mesurant 1.7 m s'éloigne en ligne droite de ce réverbère à une vitesse de 4 km/h. Quelle sera la vitesse de la pointe de l'ombre de cette personne lorsque la personne se trouve à 15 m du réverbère.



On va résoudre le problème avec les mètres comme unités de distance. Par similarité des triangles, on a

$$\frac{y(t)}{5} = \frac{y(t) - x(t)}{1.7}$$

Si on résout pour $y(t)$, on trouve

$$y(t) = \frac{5}{3.3} x(t) .$$

Ainsi, si on dérive par rapport à t , on obtient

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{5}{3.3} \frac{dx}{dt}(t) .$$

Puisque $\frac{dx}{dt}(t) = 4000$ m/h pour tout t , on a

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{5}{3.3} \times 4000 = 6060.\overline{60} \text{ m/h} .$$

La pointe de l'ombre se déplace donc à une vitesse constante de $6.0\overline{60}$ km/h. Cette réponse est indépendante de la position de la personne. 

5.5 La dérivation implicite

Il n'y a pas de nouveau concepts à introduire pour expliquer la dérivation implicite. La dérivation implicite est une façon différente d'aborder certains problèmes avec les outils que l'on a développé jusqu'à date.

Exemple 5.5.1

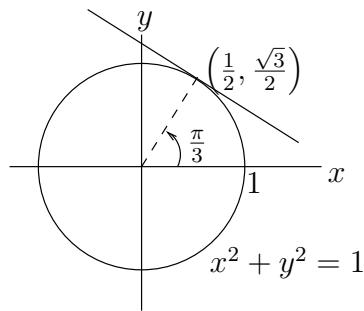
Quelle est la pente de la tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$? Voir la figure 5.19.

1^{er} méthode : Pour la partie supérieure du cercle unité, on a $y = \sqrt{1 - x^2}$ avec $-1 \leq x \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - x^2)^{1/2} = -x(1 - x^2)^{-1/2}$$

et

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

FIGURE 5.19 – Droite tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

2^e méthode : On peut calculer $\frac{dy}{dx}$ en un point sans avoir à exprimer explicitement y en fonction de x . Il suffit de dériver par rapport à x de chaque côté de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en tenant bien compte du fait que y est une fonction de x . On a

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Au point $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$, on obtient

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La deuxième méthode est tout aussi bien valide pour la partie supérieure que la partie inférieure du cercle unité. ♣

Exemple 5.5.2

Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe $(x + y)^3 + xe^y = 2$ au point $(1, 0)$ sur cette courbe ?

On ne peut pas isoler y en fonction de x . On procède donc de la façon suivante. On dérive par rapport à x chaque côté de l'équation $(x + y)^3 + xe^y = 2$ en tenant compte du fait que y est une fonction de x . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((x + y)^3 + xe^y) &= \frac{d}{dx}(2) \Rightarrow 3(x + y)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + e^y + xe^y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow (3(x + y)^2 + xe^y) \frac{dy}{dx} = -3(x + y)^2 - e^y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3(x + y)^2 - e^y}{3(x + y)^2 + xe^y} \end{aligned}$$

Ainsi, au point $(x, y) = (1, 0)$, on obtient

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{-3 - 1}{3 + 1} = -1 .$$

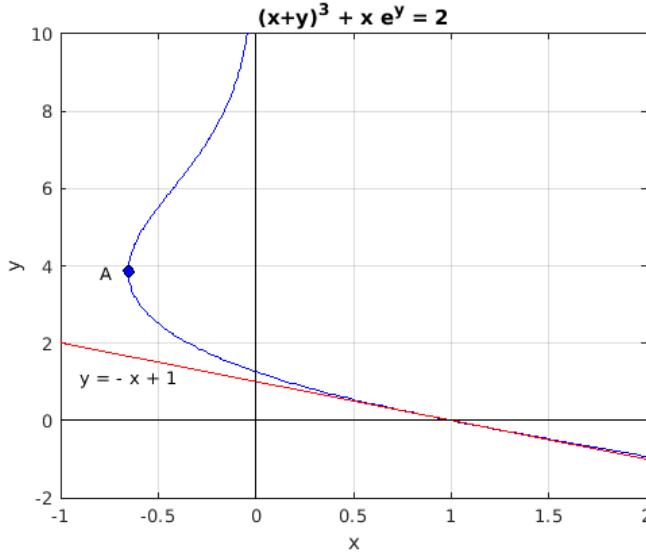


FIGURE 5.20 – Une partie de la courbe décrite par $(x + y)^3 + x e^y = 2$ ainsi que la droite tangente à cette courbe au point $(1, 0)$ sur la courbe.

L'équation de la droite tangente est donc donnée par $-1 = \frac{y - 0}{x - 1}$. On trouve $y = -x + 1$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 5.20. ♣

Remarque 5.5.3

Dans les trois exemples précédent, on considère des équations en x et y . Il faut noter que la méthode de dérivation implicite pour calculer la dérivée de y en fonction de x échoue lorsque que l'on ne peut pas (en théorie) exprimer y en fonction de x . Pour le cercle unité dans la figure 5.19, cela se produit aux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Pour la courbe que l'on retrouve dans la figure 5.20, cela ce produit au point A . Dans tous les cas, la pente de la droite tangente à la courbe est verticale. On doit alors considérer x en fonction de y si cela est possible. ♠

5.6 Approximation locale des fonctions

Une conséquence du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6, est que pour chaque valeur x près de c , on peut trouver une valeur $\xi = \xi(c, x)$ entre c et x telle que

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c).$$

Le théorème affirme l'existence de la valeur ξ mais ne donne pas de formule pour la trouver.

Quoi que simple, le théorème de la moyenne nous permettra de trouver des fonctions polynomiales de la forme

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_k(x - c)^k$$

qui donneront de très bonnes approximations de $f(x)$ pour x près de c .

Si on définit la fonction constante

$$p_0(x) = f(c) \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

On a que $p_0(x) \approx f(x)$ pour x très près de c (une conséquence de la continuité de f au point c). Ainsi, p_0 est une fonction constante qui fournit une approximation de $f(x)$ pour x très près de c .

On a déjà introduit à la section 4.3 une meilleure méthode pour estimer la valeur d'une fonction près d'un point. Si f est une fonction différentiable au point c , on peut définir la fonction

$$p_1(x) \equiv f(c) + f'(c)(x - c) \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

On a que $p_1(x) \approx f(x)$ pour x suffisamment près de c . La fonction polynomiale p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c . Voir la figure 4.6. On estime la valeur de $f(x)$ au point $x = b$ près de c par la valeur de $p_1(b)$. Le point $(x, y) = (b, p_1(b))$ est sur la droite tangente $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ à la courbe $y = f(x)$ au point $x = c$.

Exemple 5.6.1

Estimer la valeur de la racine cubique de 8.02 (sans utiliser de calculatrice).

La question peut être reformulée de la façon suivante : estimer la valeur de $f(x) = x^{1/3}$ au point $x = 8.02$. Puisque $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$, on a

$$f(x) \approx p_1(x) = f(8) + f'(8)(x - 8) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8)$$

pour x près de 8. Ainsi $f(8.02) \approx 2 + (1/12)(8.02 - 8) = 2.001\bar{6}$. La valeur exacte de $\sqrt[3]{8.02}$ est 2.00166528... Notre approximation est très bonne. ♣

La fonction polynomiale p_1 satisfait les deux relations suivantes :

$$p_1(c) = f(c) \quad \text{et} \quad p'_1(c) = f'(c) .$$

Serait-il possible de choisir les coefficients A , B et C de la fonction polynomiale

$$p_2(x) = A + B(x - c) + C(x - c)^2$$

de degré 2 de telle sorte que

$$p_2(c) = f(c) \quad , \quad p'_2(c) = f'(c) \quad \text{et} \quad p''_2(c) = f''(c)$$

soient satisfaits ? Ainsi, la courbe $y = p_2(x)$ aurait la même pente et la même courbure que f au point c . On serait alors en droit de croire que la courbe $y = p_2(x)$ fournit une meilleure approximation du graphe de f que la droite $y = p_1(x)$ pour x très près de c .

Puisque

$$\begin{aligned} p_2(c) = f(c) &\Rightarrow A = f(c) , \\ p'_2(c) = f'(c) &\Rightarrow B = f'(c) \end{aligned}$$

et

$$p_2''(c) = f''(c) \Rightarrow 2C = f''(c),$$

on trouve

$$p_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2.$$

On a vu à la proposition 4.3.5 que $p_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ donne une bonne approximation de $f(x)$ pour x très près de c . Peut-on en dire autant de $p_2(x)$? Si oui, est-ce que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème suivant qui lui-même est une généralisation (et découle) du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6.

Théorème 5.6.2 (Théorème de Taylor)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $(k+1)$ fois différentiables sur $]a, b[$ où $k \geq 0$. Quel que soit x et c dans l'intervalle $]a, b[$, il existe $\xi = \xi(k, c, x)$ entre x et c tel que

$$f(x) = p_k(x) + r_k(x)$$

où

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(x - c)^3 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x - c)^k \end{aligned}$$

et

$$r_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x - c)^{k+1}.$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour x près de c** et r_k est l'**erreur de troncature**.

Au théorème précédent, on insiste sur le fait que ξ dépend de l'ordre k du polynôme de Taylor, de c et de x , d'où la notation $\xi = \xi(k, x, c)$. Donc, ξ varie si k , c et x changent.

Pour $k = 1$, on dit que p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c , alors que pour $k = 2$, on dit que p_2 est une **approximation quadratique** de f pour x près de c .

Exemple 5.6.3

Donnez le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x) = e^{2(x-1)}$ pour x près de 1. Utilisez ce polynôme pour estimer $f(1.01)$ et utiliser la formule pour l'erreur de troncature pour estimer l'erreur $|f(1.01) - p_3(1.01)|$.

Puisque $f(x) = e^{2(x-1)}$, $f'(x) = 2e^{2(x-1)}$, $f''(x) = 2^2e^{2(x-1)}$ et $f'''(x) = 2^3e^{2(x-1)}$, on obtient

$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x - 1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x - 1)^3$$

$$= 1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 + \frac{4}{3}(x - 1)^3.$$

Ainsi,

$$f(1.01) \approx p_3(1.01) = 1 + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-4} + 1.\overline{3} \times 10^{-6} = 1.020201\overline{3}.$$

Puisque $f^{(4)}(x) = 2^4 e^{2(x-1)}$, la formule pour l'erreur de troncature est

$$r_3(x) = \frac{2^4}{4!} e^{2(\xi-1)} (x-1)^4$$

où ξ est un nombre entre 1 et x que l'on ne connaît pas. Pour $x = 1.01$, on a que ξ est inférieur à 1.01. Ainsi

$$|r_3(1.01)| \leq \frac{2^4 e^{0.02}}{4!} (1.01 - 1)^4 = \frac{2e^{0.02}}{3} 10^{-8} < 0.68014 \times 10^{-8}. \quad (5.6.1)$$

Donc, $f(1.01) \approx 1.020201\overline{3}$ avec une erreur d'au plus 0.68014×10^{-8} .

En fait la valeur exacte de $f(1.01) = 2^{0.02}$ est $1.0202013400267558102\dots$ Donc $p_3(1.01)$ est une très bonne approximation de $f(1.01)$. De plus, on a $|f(1.01) - p_3(1.01)| = 0.669\dots \times 10^{-8}$. La formule en (5.6.1) nous donne une très bonne approximation de l'erreur. ♣

Exemple 5.6.4

Trouvez les polynômes de Taylor de degré 1, 2, 3, 4 et 5 de $f(x) = \sin(x)$ pour x près de l'origine. Dans une même figure, tracez les graphes de f , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 et p_5 . Que peut-on conclure de cette figure.

Puisque

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f'(x) &= \cos(x), & f''(x) &= -\sin(x), & f^{(3)}(x) &= -\cos(x), \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos(x) = f'(x), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) = x, \\ p_2(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x - 0)^2 = x, \\ p_3(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x - 0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(x - 0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}, \\ p_4(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x - 0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(x - 0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)(x - 0)^4 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

et

$$p_5(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x - 0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(x - 0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)(x - 0)^4$$

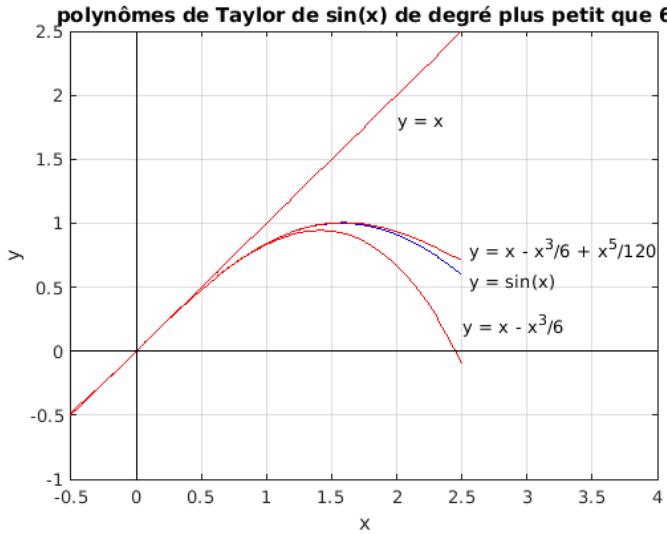


FIGURE 5.21 – On retrouve dans cette figure les graphes des polynômes de Taylor de $\sin(x)$ de degré inférieur à 6 pour x près de l'origine, ainsi que le graphe de $\sin(x)$

$$+ \frac{1}{5!} f^{(5)}(0)(x - 0)^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

On remarque que $p_{2n} = p_{2n-1}$ pour tout $n \geq 1$ car $f^{(2n)}(x) = \pm \sin(x)$ et donc $f^{(2n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

À la figure 5.21, on retrouve dans un même système de coordonnées le graphe de chacun des polynômes de Taylor p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 , ainsi que le graphe de f . On déduit de cette figure que, plus l'ordre k du polynôme de Taylor $p_k(x)$ de $\sin(x)$ (développé autour de l'origine) est élevé, meilleure est l'approximation de $\sin(x)$ fournie par $p_k(x)$ pour x près de l'origine.

Puisque $f^{(2n)}(x) = \pm \sin(x)$ et $f^{(2n-1)}(x) = \pm \cos(x)$ pour tout $n \geq 1$, on a que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n . On trouve la borne suivante pour l'erreur de troncature :

$$|r_k(x)| = \frac{1}{(k+1)!} |f^{(k+1)}(\xi)| |x|^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour x près de l'origine, l'erreur sera donc petite. ♣

Exemple 5.6.5 🔑

Trouver le polynôme de Taylor p_k de degré k de $\sin(x)$ près de l'origine tel que $p_k(0.01)$ soit une approximation de $\sin(0.01)$ avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-8} . Quelle est la valeur de cette approximation ?

On cherche un petit entier k tel que

$$|\sin(0.01) - p_k(0.01)| = |r_k(0.01)| < 10^{-8}.$$

On a montré à l'exemple précédent que

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Donc,

$$|r_k(0.01)| \leq \frac{1}{(k+1)!} 0.01^{k+1} .$$

On choisit le plus petit entier k tel que

$$\frac{1}{(k+1)!} 0.01^{k+1} < 10^{-8}$$

soit satisfaite. Pour $k = 2$, on a

$$|r_2(0.01)| \leq \frac{1}{3!} 0.01^3 = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \not< 10^{-8} .$$

Par contre, pour $k = 3$, on a

$$|r_3(0.01)| \leq \frac{1}{4!} 0.01^4 = 0.41\bar{6} \times 10^{-9} < 10^{-8} .$$

Donc, $k = 3$ est le degré cherché. L'approximation est donnée par

$$\sin(0.01) \approx p_3(0.01) = 0.01 - \frac{0.01^3}{3!} \approx 0.0099998333 .$$

La valeur exacte est $\sin(0.01) = 0.00999983334\dots$. On remarque que l'on obtient plus de précision qu'il a été demandé. Cela est généralement du au fait que notre borne supérieure sur l'erreur de troncature est une grossière sur-estimation de la valeur réel de l'erreur de troncature.



Exemple 5.6.6 🔑

Donner le degré d'un polynôme de Taylor de $f(x) = \sin(x/3)$ près de l'origine qui donnera toujours une approximation de f avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-3} quel que soit le point $x \in [-4, 4]$ considéré.

Pour déterminer le degré d'un tel polynôme de Taylor il faut trouver k tel que

$$|r_k(x)| = \left| \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} \right| < 10^{-3}$$

pour $|x| < 4$ où $\xi = \xi(k, x, 0)$ est une nombre entre 0 et x . Or

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) , \quad f''(x) = -\frac{1}{3^2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) , \quad f^{(3)}(x) = -\frac{1}{3^3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) , \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{3^4} \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3^4} f(x) , \quad \dots \end{aligned}$$

Par induction, on obtient

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{3^n} , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ainsi

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{3^{k+1}(k+1)!} |x|^{k+1} < \frac{4^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)!}$$

pour $|x| < 4$. Puisque

$$|r_6(x)| < \frac{4^7}{3^7 7!} \approx 0.0014864 < 10^{-3} \quad \text{pour } |x| < 4$$

et

$$|r_7(x)| < \frac{4^8}{3^8 8!} \approx 0.0002477 < 10^{-3} \quad \text{pour } |x| < 4,$$

on choisit $k = 7$. Pour satisfaire la précision demandée dans la question, il faut donc utiliser le polynôme de Taylor de degré 7 qui comprend quatre termes ; c'est-à-dire,

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \approx p_7(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^3 3!}x^3 + \frac{1}{3^5 5!}x^5 - \frac{1}{3^7 7!}x^7, \quad |x| < 4.$$

On a que

$$|f(x) - p_7(x)| < 10^{-3}, \quad |x| < 4.$$

Ce genre d'approximation qui est valable pour tout x dans un ensemble donné X est appelée approximation uniforme sur X . Dans le cas présent $X = \{x : |x| < 4\}$. 

Remarque 5.6.7

Ce que l'on observe à l'exemple précédent est généralement vrai quel que soit la fonction f qui possède des dérivées d'ordre suffisamment grand. C'est-à-dire que généralement, plus l'ordre k du polynôme de Taylor de f (développé autour du point c) est grand, meilleure sera l'approximation de $f(x)$ fournies par $p_k(x)$ pour x très près de c .

On doit insister sur le mot généralement utilisé au paragraphe précédent ainsi que sur la contrainte que x doit être très près de l'origine. Il y a des exceptions. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

possède des dérivées de toute ordre au point $x = 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k > 0$. Donc, les polynômes de Taylor p_k de f près de l'origine satisfont $p_k(x) = 0$ pour tout x quel que soit l'ordre k du polynôme. Ainsi, $p_k(x) < f(x)$ pour tout $x > 0$ et augmenter l'ordre du polynôme de Taylor ne donne pas de meilleures approximations que $f(x) \approx 0$ pour x près de l'origine.

De plus, dans certain cas, l'intervalle I contenant c sur lequel le polynôme de Taylor p_k de degré k de f près de c donne une bonne approximation de f devient de plus en plus petit lorsque k augmente. À la « limite », lorsque k devient de plus en plus grand, l'intervalle I «tend» vers l'ensemble $\{c\}$. 

Soit p_1 et p_2 les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 respectivement d'une fonction f . On parle ici de polynômes de Taylor près d'un point c . Sans être une démonstration rigoureuse, le raisonnement qui suit supporte l'idée que le polynôme de Taylor p_2 fournie généralement une

meilleure approximation de f près du point c que le polynôme de Taylor p_1 . Les polynômes p_1 et p_2 satisfont

$$\begin{aligned} f(x) &= p_1(x) + \frac{1}{2}f''(\xi(1, c, x))(x - c)^2 \\ f(x) &= p_2(x) + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi(2, c, x))(x - c)^3 \end{aligned}$$

où $\xi(1, c, x)$ et $\xi(2, c, x)$ sont des nombres entre x et c . Si on suppose que $f''(\xi(1, c, x)) \approx f''(c)$ et $f^{(3)}(\xi(2, c, x)) \approx f^{(3)}(c)$ pour x près de c , on obtient que l'erreur pour l'approximation linéaire $p_1(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x - c)^2$ et celle pour l'approximation quadratique $p_2(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x - c)^3$. Puisque $(x - c)^3$ approche 0 plus rapidement que $(x - c)^2$ lorsque x approche 0, on a que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c .

5.6.1 Calcul de limites

On peut utiliser les polynômes de Taylor pour évaluer les limites de la forme $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $\lim_{n \rightarrow a} f(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow a} g(x) = 0$.

Exemple 5.6.8

Calculez les limites suivantes.

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x}$$

a) Le Théorème de Taylor donne

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x)$$

où

$$|r_3(x)| = \left| \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) x^4 \right| = \left| \frac{1}{4!} \sin(\xi) x^4 \right| \leq \frac{1}{4!} |x|^4$$

avec ξ entre 0 et x . Ainsi,

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2}.$$

Puisque

$$\frac{x}{3!} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \left| \frac{r_3(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{4!} |x|^2 \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

b) Le Théorème de Taylor donne

$$f(x) = \cos(2x) = 1 - 2x^2 + r_2(x)$$

où

$$r_2(x) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi) x^3 = \frac{8}{3!} \sin(\xi) x^3$$

avec ξ entre 0 et x .

De plus, grâce au théorème de Taylor, on a

$$g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \hat{r}_2(x)$$

où

$$\hat{r}_2(x) = \frac{1}{3!} g^{(3)}(\hat{\xi}) x^3 = \frac{1}{3!} e^{\hat{\xi}} x^3$$

avec $\hat{\xi}$ entre 0 et x . Donc,

$$\frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x} = \frac{2x^2 - r_2(2x)}{-\frac{x^2}{2!} - \hat{r}_2(x)} = \frac{2 - \frac{r_2(2x)}{x^2}}{-\frac{1}{2} - \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2}}.$$

Puisque

$$0 \leq \left| \frac{r_2(2x)}{x^2} \right| \leq \frac{8}{3!} |x| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \left| \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{3!} e^x |x| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x} = \frac{2 - \frac{r_2(2x)}{x^2}}{-\frac{1}{2} - \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2}} \rightarrow \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$



5.7 Comportement asymptotique

Lorsque que l'on étudie l'interaction entre deux espèces animales, une espèce étant les prédateurs et l'autre les proies, on cherche souvent à déterminer s'il se créera dans le futur un équilibre entre le nombre de prédateurs et le nombre de proies. Mathématiquement, on doit évaluer une limite de la forme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} \tag{5.7.1}$$

où $f(t)$ est le nombre de prédateurs et $g(t)$ est le nombre de proies au temps t . Si $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers les nombres réels $A \neq 0$ et $B \neq 0$ respectivement lorsque t tend vers l'infini, alors l'analyse du comportement à long terme des deux populations est simple car la valeur de la limite (5.7.1) est A/B . Pour t très grand, on a $f(t) \approx (A/B)g(t)$; le nombre de prédateurs est presque proportionnel au nombre de proies avec A/B comme constante de proportionnalité.

Bien souvent, l'analyse devient plus délicate car $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers 0 ou $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers plus l'infini lorsque t tend vers plus l'infini. C'est le genre de situations que nous allons présentement analyser.

Définition 5.7.1

Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty .$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ,$$

on dit que $f(x)$ croît plus lentement que $g(x)$ et que $g(x)$ croît plus rapidement que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

S'il existe un nombre réel positif L tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L ,$$

on dit que $f(x)$ et $g(x)$ ont **asymptotiquement le même type de croissance** lorsque x tend vers l'infini.

Définition 5.7.2

Une limite de la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

est appelée une limite du **type ∞/∞** . a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.7.3

Soit $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/5} = +\infty .$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type ∞/∞ . Laquelle des deux fonctions croît le plus rapidement ?

Si on trace les graphes de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ sur un même système de coordonnées (voir figure 5.22), il semble que $\ln(x)$ croît plus rapidement que $x^{1/5}$. Mais, est-ce vrai ?

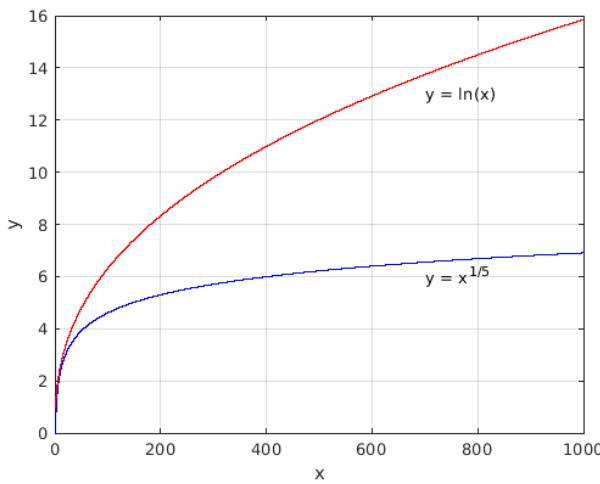


FIGURE 5.22 – Les graphes de $\ln(x)$ et de $x^{1/5}$. Lequel croît le plus rapidement ?

Le tableau suivant donne la valeur de $\ln(x)/x^{1/5}$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 10^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

x	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\ln(x)/x^{1/5}$	0.8716997 ...	0.6416729 ...	0.4627065 ...	0.3284416 ...	0.2302585 ...
...	...	10^{13}	...	10^{17}	...
...	...	0.0751898	0.0155834

La suite $\left\{ \frac{\ln(x_n)}{x_n^{1/5}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble bien tendre vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers plus l'infini. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/5}} = 0$$

et on conclut que $x^{1/5}$ croît plus rapidement que $\ln(x)$. Ce n'est pas ce que le graphe de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ entre 1 et 1000 semblait suggérer. ♣

Remarque 5.7.4

Dans l'exemple précédent, on a choisi les fonctions f et g (i.e. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$) de telle sorte que les graphes de f et g entre 0 et 5000 indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croît plus rapidement que f . Il serait possible de construire des fonctions f et g telles que les graphes de f et g à l'intérieur des limites de calcul d'un ordinateur indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croît plus rapidement que f . Les ordinateurs ont des limites que la théorie n'a pas. ♠

Noter que l'on est libre de choisir le rapport f/g ou g/f pour déterminer la fonction qui croît le plus rapidement et celle qui croît le plus lentement. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty ,$$

on a $f(x)$ qui croît plus rapidement que $g(x)$ et $g(x)$ qui croît plus lentement que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Définition 5.7.5

Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 .$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ,$$

on dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers l'origine plus rapidement que $g(x)$ et que $g(x)$ converge (ou tend) vers l'origine plus lentement que $f(x)$ lorsque x converge vers l'infini.

S'il existe un nombre réel non-nul L tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L ,$$

on dit que $f(x)$ et $g(x)$ ont asymptotiquement le même type de convergence vers l'origine lorsque x converge vers l'infini.

Définition 5.7.6

Une limite de la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

est appelée une limite du type 0/0. a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.7.7

Soit $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10/x^5$. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^5} = 0 .$$

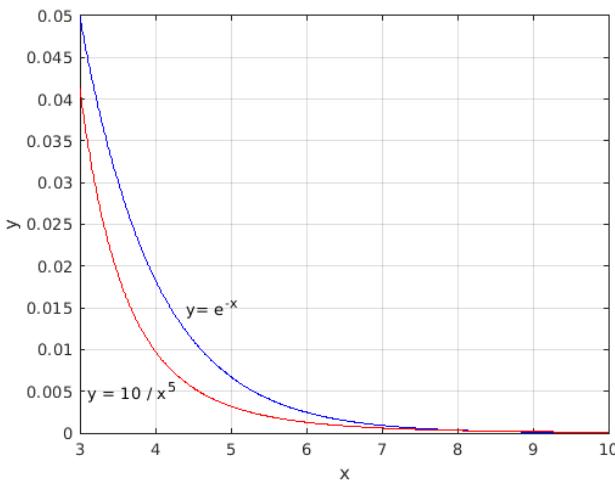


FIGURE 5.23 – Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type 0/0. Laquelle des deux fonctions tend le plus rapidement vers 0 ?

Si on trace le graphe de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$ sur un même système de coordonnées (voir la figure 5.23), il semble que $10/x^5$ tend vers 0 plus rapidement que e^{-x} . Par contre, le graphe de ces deux fonctions pour $30 \leq x \leq 40$ (voir figure 5.24) montre que c'est en fait e^{-x} qui tend vers 0 plus rapidement que $10/x^5$.

Le tableau suivant donne la valeur de $e^{-x}/(10/x^5)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 10n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Cette suite tend vers plus l'infini.

x	10	20	30	...
$e^{-x}/(10/x^5)$	0.453999 ...	$6.595691 \dots \times 10^{-4}$	$2.273902 \dots \times e^{-7}$...
...				
	100		...	
	$3.720075 \dots \times 10^{-35}$...	

La suite $\left\{ \frac{e^{-x_n}}{10/x_n^5} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble tendre très rapidement vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers l'infini. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{10/x^5} = 0$$

et on conclut que e^{-x} tend vers 0 plus rapidement que $10/x^5$.



Exemple 5.7.8

Considérons les fonctions $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 .$$

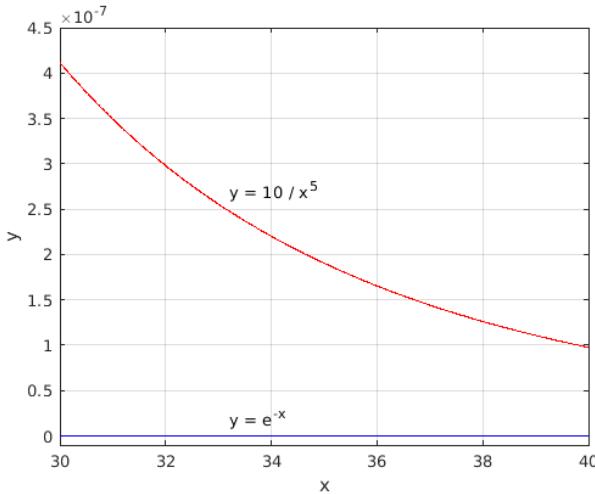


FIGURE 5.24 – Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $30 \leq x \leq 40$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (5.7.2)$$

est une limite du type 0/0.

Le graphe de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$ que l'on retrouve à la figure 5.25 semble indiquer que x^5 tend vers 0 légèrement plus rapidement que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. Est-ce vrai ?

Pour répondre à cette question, il nous faut donc calculer la limite (5.7.2). Le tableau suivant donne la valeur de $x^5/(e^x - 1)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ où $x_n = 1/n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Cette suite tend vers l'origine.

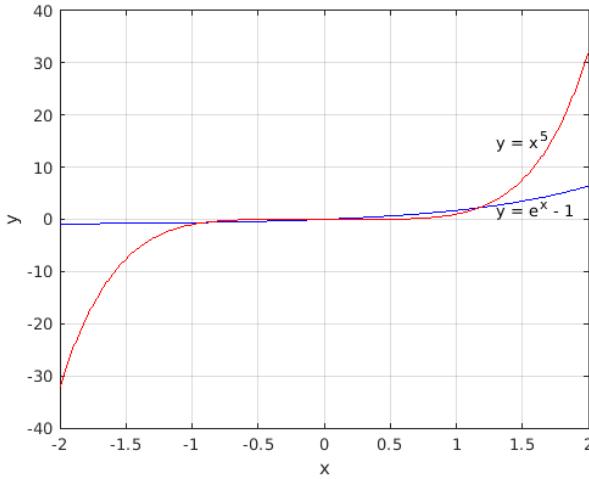
x	1	$1/4$	$1/9$	$1/25$...
$x^5/(e^x - 1)$	0.58197 ...	0.00343 ...	$1.44105 \dots \times 10^{-4}$	$2.50914 \dots \times 10^{-6}$...

La suite $\left\{ \frac{x_n^5}{e^{x_n} - 1} \right\}_{n=0}^\infty$ semble tendre vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ qui tend vers l'origine (même si certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sont négatifs). Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$$

et on conclut que x^5 tend effectivement plus rapidement vers 0 que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. ♣

Dans tous les exemples précédents, on a dû calculer numériquement des limites du type 0/0 ou ∞/∞ pour pouvoir comparer la « vitesse » de convergence de deux fonctions. Dans le but d'éviter le calcul numérique de limite du type ∞/∞ ou 0/0, on peut utiliser le résultat suivant.

FIGURE 5.25 – Les graphes de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$ **Théorème 5.7.9 (Règle de l'Hospital)**

Soit f et g deux fonctions différentiables sur l'intervalle $]a, b[$. De plus, on suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Le théorème est aussi vrai si on remplace $x \rightarrow a^+$ par $x \rightarrow b^-$ ou par $x \rightarrow c \in]a, b[$. De plus, le théorème reste valide pour $a = +\infty$ et $b = -\infty$.

Remarque 5.7.10

Pour calculer les limites du type $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$,

il faut souvent calculer $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Si ces deux limites sont égales, alors

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$



Sans être une démonstration rigoureuse de la règle de l'Hospital, le raisonnement suivant peut quand même motiver cette règle. Supposons que $f(c) = g(c) = 0$, f et g sont différen-

tielles en $x = c$ (donc f et g sont continues en $x = c$), f' et g' sont continues en $x = c$, et $g'(c) \neq 0$. L'approximation linéaire de f et g près de c nous permet d'écrire

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c) = f'(c)(x - c) \quad \text{et} \quad g(x) \approx g(c) + g'(c)(x - c) = g'(c)(x - c)$$

pour x très près de c . Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

pour x très près de c . Donc, il est plausible que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pour démontrer la Règle de l'Hospital, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.7.11 (Théorème de la moyenne de Cauchy)

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiables sur l'intervalle $]a, b[$, et si de plus $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b tel que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Démonstration

Ce lemme est une conséquence du théorème de la moyenne. Posons

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

pour $x \in [a, b]$. Notons que $g(a) \neq g(b)$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction g est soit strictement croissante ou décroissante.

La fonction h est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ car c'est le cas pour f et g . Puisque $h(a) = h(b) = 0$, il découle du théorème des valeurs moyennes qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$. C'est-à-dire,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0.$$

D'où

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Notons que $g'(\xi) \neq 0$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.



Démonstration (Règle de l'Hospital)

On démontre la Règle de l'Hospital seulement dans le cas où

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0. \quad (5.7.3)$$

La démonstration dans les autres cas est semblable.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R},$$

il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

et

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Il découle de (5.7.3) que F et G sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. De plus, F et G sont différentiable sur $]a, b[$ et $G'(x) = g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On peut donc utiliser le théorème de la moyenne de Cauchy sur $[a, x]$ où $a < x < b$ pour trouver ξ entre x et a tel que

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)},$$

en d'autres mots

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$ alors $|\xi - a| < \delta$ car ξ est entre a et x . Donc,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. ■

Exemple 5.7.12

Pour $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$ de l'exemple 5.7.3, puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/5} = \infty ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $f'(x) = 1/x$ et $g'(x) = 1/(5x^{4/5})$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/(5x^{4/5})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^{1/5}} = 0 .$$

**Exemple 5.7.13**

Dans l'exemple 5.7.8, on a calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0 ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $f'(x) = 5x^4$ et $g'(x) = e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4}{e^x} = \frac{0}{1} = 0 .$$

**Exemple 5.7.14**

Dans l'exemple 5.7.7, on a $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10x^{-5}$. On remarque que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x}}{10x^{-5}} = \frac{x^5}{10e^x} .$$

Si on pose $F(x) = x^5$ et $G(x) = 10e^x$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} .$$

C'est cette dernière limite que nous évaluerons. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 10e^x = \infty ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $F'(x) = 5x^4$ et $G'(x) = 10e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{10e^x} .$$

On a encore une limite du type ∞/∞ . On peut maintenant utiliser la règle de l'Hospital avec F' et G' pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F''(x)}{G''(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{10e^x}.$$

On obtient encore une limite du type ∞/∞ que l'on peut évaluer à l'aide de la règle de l'Hospital. On peut répéter cette procédure jusqu'à ce que l'on obtienne une limite qui ne satisfasse plus la règle de l'Hospital ou que l'on peut évaluer facilement. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{10e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{10e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{10e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{10e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{10e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{10e^x} = 0. \end{aligned}$$

Sauf pour la dernière limite, toutes les autres limites de l'expression précédente sont du type ∞/∞ . On a donc démontré que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$



Exemple 5.7.15

Montrons que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ domine (i.e. croît plus rapidement que) x^3 lorsque x tend vers plus l'infini.

On a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\alpha e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\alpha^2 e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\alpha^3 e^{\alpha x}} = 0$$

car $\alpha > 0$. Chacune des égalités est une conséquence de la règle de l'Hospital. Dans le premier cas on a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = \infty$, dans le deuxième cas $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha e^{\alpha x} = \infty$, et dans le troisième cas $\lim_{x \rightarrow \infty} 6x = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^2 e^{\alpha x} = \infty$.



Remarque 5.7.16

En fait, on peut montrer que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ tend vers plus l'infini plus rapidement que x^β lorsque x tend vers plus l'infini quel que soit $\beta > 0$. En effet,

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{e^{\beta \ln(x)}}{e^{\alpha x}} = e^{\beta \ln(x) - \alpha x} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x}.$$

Or, on peut montré (le cas $\sigma = 1$ et $\epsilon = \alpha/2$ de la remarque 5.7.17 qui suit) que pour x assez grand $\ln(x)/x - \alpha/2 < 0$. Ainsi, pour x assez grand, on a

$$\beta(\ln(x)/x - \alpha/2 - \alpha/2)x < \beta(-\alpha/2)x = -\beta\alpha x/2.$$

Il en découle que

$$0 \leq \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha/2 - \alpha/2)x} \leq e^{-\beta\alpha x/2}$$

lorsque x tend vers l'infini. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\beta\alpha x/2} = 0$$

car $-\beta\alpha < 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$$

grâce au théorème des gendarmes. ♠

Remarque 5.7.17

Montrons que x^σ avec $\sigma > 0$ quelconque domine $\ln(x)$ lorsque x tend vers plus l'infini.

Grâce à la règle de l'Hospital, on a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\sigma} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\sigma x^{\sigma-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma x^\sigma} = 0$$

car $\sigma > 0$. La définition 3.4.13 nous permet de dire que quel que soit $\epsilon > 0$ petit, on peut toujours trouver un nombre $M > 0$ assez grand tel que $\ln(x)/x^\sigma < \epsilon$ pour $x > M$. Plus ϵ sera petit, plus M devra être grand. ♠

Exemple 5.7.18

Évaluez la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

On a une limite du type 0/0 pour laquelle on peut utiliser la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} .$$

On obtient une limite du type 0/0 pour laquelle on peut encore utiliser la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} - \sin(0) = 0 .$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$. ♣

Exemple 5.7.19

Il n'y a pas seulement que les limites du type 0/0 ou ∞/∞ que l'on puisse traiter avec la règle de l'Hospital. Calculez la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} .$$

On obtient une limite du type 0^0 . Avec quelques opérations algébriques, on peut amener le problème à une limite du type ∞/∞ . Puisque

$$(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\ln((\sin(x))^{\tan(x)})} = e^{\tan(x) \ln(\sin(x))}$$

et la fonction exponentielle est une fonction continue, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x))}.$$

Il suffit donc de calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)).$$

Ce n'est pas encore une limite du type ∞/∞ mais plutôt une limite du type $0 \cdot \infty$. Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}$$

et cette dernière limite est du type ∞/∞ . Si on utilise la règle de l'Hospital, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) \Big/ (-\csc^2(x)) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \sin(x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x))} = e^0 = 1.$$



Exemple 5.7.20

Calculez la limite

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)).$$

On obtient une limite du type $\infty - \infty$. Avec quelques opérations algébriques, on peut amener le problème à une limite du type $0/0$ pour laquelle on pourra utiliser la règle de l'Hospital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0, \end{aligned}$$

où la troisième limite est une limite du type $0/0$ pour laquelle on peut utiliser la règle de l'Hospital.



Exemple 5.7.21

Évaluez les limites suivantes si elles existent.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

où chaque égalité (sauf la dernière) est une conséquence de la règle de l'Hospital pour une limite du type ∞/∞ .

b) On a

$$(e^x + x)^{1/x} = e^{\ln((e^x + x)^{1/x})} = e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} .$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x}} = e^1 = e .$$

**Exemple 5.7.22**

Évaluez la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

On a une limite du type $0 \cdot \infty$. Par contre

$$(x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(\frac{(x - 1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

où

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

car $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est une fonction continue, et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ est une limite du type $0/0$. Donc, on peut utiliser la règle de l'Hospital pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \right) = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi} . \end{aligned}$$

**Exemple 5.7.23**

Montrez que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a \tag{5.7.4}$$

pour $a > 0$. Utilisez ce résultat pour montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a .$$

(5.7.4) n'est pas une limite du type ∞/∞ ou $0/0$. On ne peut donc pas utiliser la règle de l'Hospital directement. Par contre on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{(1/x)} .$$

Cette dernière limite est du type $0/0$. On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{-1} \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{-1} = a \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} \right)^{-1} = a \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$. La seconde égalité est une conséquence de la règle de l'Hospital.

Puisque $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions continues, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)} = e^a . \end{aligned}$$

On remarque que (5.7.4) est aussi vrai pour $a < 0$ si on assume que la limite est pour $x > |a|$. Finalement, (5.7.4) est évidemment satisfait si $a = 0$. 

Exemple 5.7.24

Montrez que la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

On a une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ où $a_n = \ln(n)/n$. On démontre que cette série satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées, le théorème 2.2.42.

1. On a $a_n > 0$ pour $n \geq 2$ et $a_1 = 0$ (on peut donc ignorer le premier terme de la série).
2. Grâce à la règle de l'Hospital, on a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 .$$

3. Puisque que la dérivée de $f(x) = \ln(x)/x$ satisfait $f'(x) = (1 - \ln(x))/x^2 < 0$ pour $x > e$, on a que f est une fonction décroissante pour $x > e$ et donc que

$$a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = \frac{\ln(n)}{n} = a_n$$

pour tout $n \geq 3$.

On peut donc conclure du test des séries alternées que la série $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

Puisque

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^k (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

pour tout $k > 2$, on a que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}. \end{aligned}$$



5.8 Méthode de Newton

Exemple 5.8.1

Supposons qu'à l'exemple 5.3.9 la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur soit $F(t) = \beta(1 - e^{-t/\alpha})$ où β est la quantité de nectar que possède une fleur et $\alpha > 0$ est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar.

On a montré que la solution T de l'équation

$$F'(T) = \frac{F(T)}{T + \tau}$$

donnait le temps T en minutes que l'abeille devait rester sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage.

Donc, T est la solution de

$$\frac{\beta}{\alpha} e^{-t/\alpha} = \frac{\beta(1 - e^{-t/\alpha})}{t + \tau}.$$

Quelques manipulations algébriques montrent que cette dernière équation est équivalente à

$$\alpha + \tau + t = \alpha e^{t/\alpha}.$$

Si on suppose que $\alpha = 3$, $\beta = 2$ et $\tau = 1$, la valeur T qui maximise la récolte de nectar pour une journée est la solution de l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3}.$$

Il est malheureusement impossible d'isoler t . Comment peut-on trouver T ?



L'exemple précédent nous amène à considérer les méthodes numériques pour estimer les solutions d'équations de la forme

$$f(x) = 0 \quad (5.8.1)$$

où f est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est un intervalle de la droite réelle. Une solution de (5.8.1) est appelée une **racine** ou un **zéro** de f .

Nous présentons qu'une seule méthode numérique pour estimer les racines d'une équation de la forme (5.8.1). Cette méthode est connue sous le nom de **méthode de Newton**. Cette méthode permet de construire une suite de nombres $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers une racine de f .

Méthode 5.8.2 (Méthodes de Newton)

1. Choisir une valeur x_0 près de la racine p de f que l'on veut estimer.
2. Connaissant x_n , on obtient le terme suivant x_{n+1} avec la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5.8.2)$$

si $f'(x_n) \neq 0$. Si $f'(x_n) = 0$, il faut choisir une nouvelle valeur pour x_0 et reprendre en (1).

3. On répète (2) jusqu'à ce que l'on obtienne une approximation x_n de la racine p qui satisfait la précision désirée.

On peut justifier graphiquement la méthode de Newton. Supposons que x_n soit une approximation d'une racine p de f qui provient de la méthode de Newton. Alors x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des x . Voir la figure 5.26. L'équation de cette droite tangente est $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Ainsi, x_{n+1} est la solution de $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Si $f'(x_n) \neq 0$, on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Théorème 5.8.3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont la deuxième dérivée est une fonction continue. Si p est une racine de f telle que $f'(p) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite par la méthode de Newton converge vers p si la distance entre p et x_0 est plus petite que δ ; i.e. $|x_0 - p| < \delta$.

Remarque 5.8.4

En d'autres mots, le théorème dit que si $f'(p) \neq 0$ et si x_0 est suffisamment près de p , alors la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite avec la méthode de Newton tend vers p .

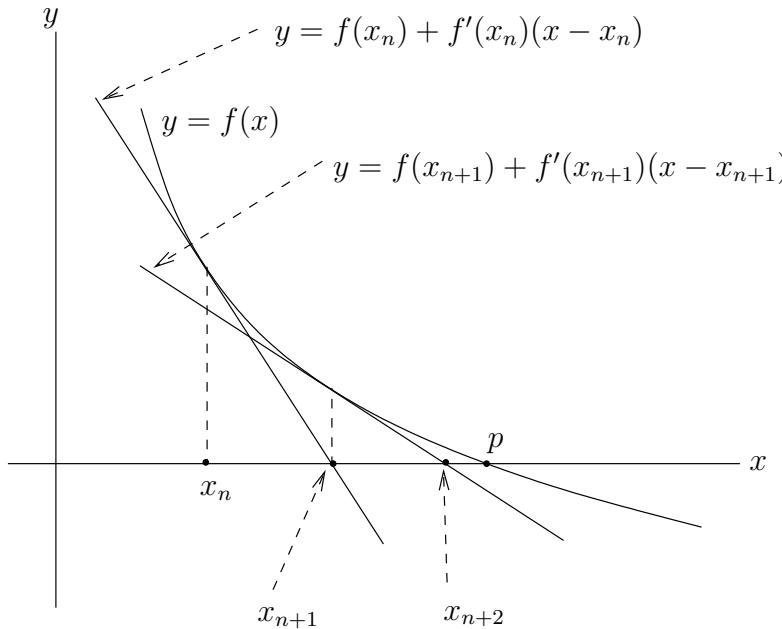


FIGURE 5.26 – La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est produite avec la méthode de Newton et tend vers une racine p de la fonction f

La méthode de Newton est une méthode du point fixe (voir la section 5.9 sur les systèmes dynamiques discrets) de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 3, \dots$ où $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Si p est un point fixe de g , alors $p = p - f(p)/f'(p)$ et on obtient $f(p) = 0$. ♠

Exemple 5.8.5

Trouvez une approximation de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton. Arrêtez lorsque la différence entre deux termes consécutifs de la suite produite par la méthode de Newton est plus petite que 10^{-4} .

Le but est de trouver la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. On a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On donne dans le tableau suivant les premiers termes de la suite produite par la méthode de Newton avec $x_0 = 2$.

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	2	
1	1.5	0.5
2	1.416667...	0.083333
3	1.414216...	0.002451
4	1.414214...	0.000002

On arrête à x_4 car $|x_4 - x_3| \approx 0.000002 < 10^{-4}$. On a $\sqrt{2} \approx x_4 = 1.414214$. La valeur exacte de $\sqrt{2}$ est $1.41421356237310\dots$ ♣

Exemple 5.8.6

Utiliser 6 itérations de la méthode de Newton pour estimer une des racines du polynôme $g(x) = -10 + 4x^2 + x^3$.

On a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{-10 + 4x_n^2 + x_n^3}{8x_n + 3x_n^2} = \frac{2(5 + 2x_n^2 + x_n^3)}{8x_n + 3x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On retrouve dans le tableau suivant les 6 premières itérations de la méthode de Newton avec $x_0 = 1.5$.

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	1.5	
1	1.3733333333333333...	0.126667
2	1.3652620148746...	0.00807132
3	1.3652300139161...	0.00003200
4	1.3652300134141...	5.0205×10^{-10}
5	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}
6	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}

Une des racines de g est donc approximativement 1.3652300134141.

Comme le polynôme g n'a qu'une seule racine réelle (le lecteur est invité à tracer le graphe de g pour démontrer cela), on a en fait trouver une approximation de cette racine. Tout autre choix pour x_0 va donner une approximation de cette racine mais un bon choix pour x_0 peut grandement réduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une bonne approximation.



Exemple 5.8.7

On peut utiliser la méthode de Newton pour estimer l'inverse multiplicatif d'un nombre a . Ce n'est naturellement pas une façon efficace de trouver l'inverse d'un nombre mais cela permet d'illustrer la méthode de Newton. L'inverse multiplicatif de a est la racine de $f(x) = a - 1/x$. Si on utilise la Méthode de Newton pour estimer cette racine, on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2x_n - ax_n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On peut utiliser cette formule pour estimer l'inverse multiplicatif de $a = 13478$. On a

$$x_{n+1} = 2x_n - 13478x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le tableau suivant donne les premiers termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ produite à l'aide de la méthode de Newton avec $x_0 = 0.0001$.

n	x_n
0	0.0001
1	0.00006522
2	0.00007310932686...
3	0.00007417909852...
4	0.00007419498098...
5	0.00007419498445...

On a donc $1/13478 \approx 0.7419498445 \times 10^{-4}$. L'inverse multiplicatif de 13478 est $0.741949844190533\dots \times 10^{-4}$.



Exemple 5.8.8

Utiliser la méthode de Newton pour compléter l'exemple 5.8.1.

On cherche une valeur de t pour laquelle l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3} \quad (5.8.3)$$

sera satisfaite. La première question à se poser est « existe-t-il une telle valeur de t ? » La figure 5.27 confirme qu'il existe en fait une valeur positive T de t pour laquelle (5.8.3) est satisfaite.

Considérons la fonction $f(t) = 3e^{t/3} - t - 4$. Si t satisfait $f(t) = 0$ alors t satisfait (5.8.3). On choisit une valeur t_0 près de T dans la figure 5.27. Soit $t_0 = 2$. La formule pour la méthode de Newton est

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{3e^{t_n/3} - t_n - 4}{e^{t_n/3} - 1} = \frac{(t_n - 3)e^{t_n/3} + 4}{e^{t_n/3} - 1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On donne dans le tableau suivant les premiers termes de la série $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton.

n	t_n	$\approx t_{n-1} - t_n $
0	2	
1	2.16544501942917\dots	0.165445
2	2.15689134808212\dots	0.00855367
3	2.15686752051758\dots	2.382756×10^{-5}
4	2.15686752033303\dots	1.845497×10^{-10}
5	2.15686752033302\dots	1.0×10^{-14}

L'abeille doit donc demeurer approximativement 2.1569 minutes sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage.



Il y a deux problèmes majeurs qui peuvent faire échouer la méthode de Newton.

Problème 1: Il faut faire un bon choix pour x_0 . Si la fonction f a plusieurs racines, il peut s'avérer difficile de trouver x_0 pour obtenir une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton qui tend vers la racine p que l'on cherche. Il faut choisir x_0 assez près de cette racine p . Mais comment peut-on choisir x_0 près de p si on ne connaît pas p ? Le Théorème des valeurs intermédiaires, Théorème 3.3.5, nous fournit une méthode pour choisir x_0 .

Si on a $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$, alors le Théorème 3.3.5 avec $m = 0$ nous confirme qu'il existe une racine de f entre a et b . L'algorithme suivant, connu sous le nom de **méthode de bisection**, nous permet de trouver un intervalle aussi petit que l'on veut et qui contient une racine de f . Si on prend x_0 dans un tel intervalle, la méthode de Newton a de bonnes chances de nous donner une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers la racine dans ce petit intervalle.

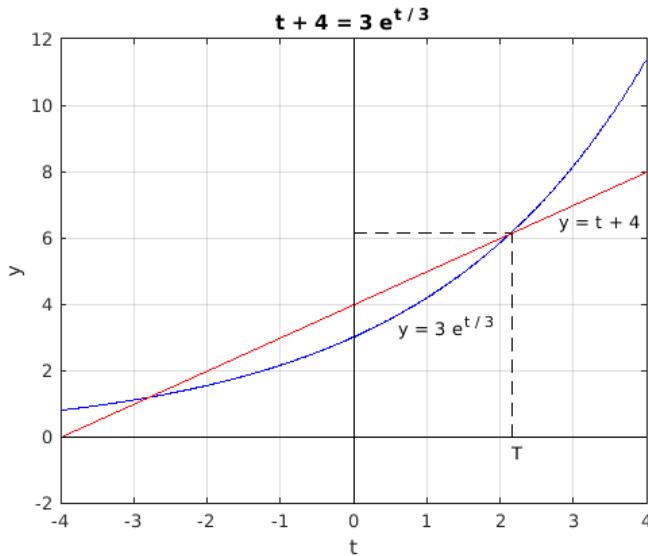


FIGURE 5.27 – Les courbes $y = 3 e^{t/3}$ et $y = t + 4$ se coupent en un seul point $t > 0$ que l'on a appelé T dans la figure

Méthode 5.8.9 (Méthode de bisection)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$; c'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé.

1. Prendre $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
2. Étant donné a_n et b_n , on pose $m = (a_n + b_n)/2$. Le point m est le point milieu de l'intervalle $[a_n, b_n]$.
3. Si $f(m) = 0$ alors m est une racine de f et on arrête.
4. Si $f(m)f(a_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Autrement, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
5. On répète (2), (3) et (4) pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

qui contiennent une racine de f .

L'item 4 mérite une attention toute particulière. Par construction, on a toujours $f(a_n)f(b_n) < 0$. Donc, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signe opposé. Ce qui implique que la fonction f change de signe dans l'intervalle $[a_n, b_n]$. De plus, $f(m) \neq 0$ suite à l'item 3. Donc, soit que $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de même signe (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé) ou $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de même signe).

Si $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) < 0$), on a par le théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[a_n, m]$. L'intervalle $[a_n, m]$ devient l'intervalle suivant $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Si $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) > 0$ car $f(a_n)$ et $f(m)$ sont alors de même signe), on a par le théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[m, b_n]$. L'intervalle $[m, b_n]$ devient l'intervalle suivant $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Exemple 5.8.10

Pour trouver une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$, on pose $f(x) = e^x - x - 4$. Puisque $f(0) = -3 < 0$ et $f(3) = 13.08\dots > 0$, il y a une racine de f entre 0 et 3. On peut utiliser la méthode de bissection pour trouver un petit intervalle contenant cette racine.

On résume dans le tableau suivant les calculs nécessaires pour la méthode de bissection.

n	a_n	b_n	m	$f(a_n)$	$f(m)$
0	0	3	1.5	-3	-1.018310...
1	1.5	3	2.25	-1.018310...	3.237735...
2	1.5	2.25	1.875	-1.018310...	0.645819...
3	1.5	1.875	1.6875	-1.018310...	-0.281551...
4	1.6875	1.875

Ainsi, il y a une racine de f entre 1.6875 et 1.875. On peut maintenant espérer que la méthode de Newton va produire une suite qui converge vers cette racine si on prend x_0 pour la méthode de Newton entre 1.6875 et 1.875.

Puisque $f'(x) = e^x - 1$, la formule pour la méthode de Newton est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 4}{e^{x_n} - 1} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n} + 4}{e^{x_n} - 1} , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Avec $x_0 = 1.7$, on obtient la suite suivante :

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	1.7	
1	1.75052643414869...	0.0505264
2	1.74903273782687...	0.0014936
3	1.74903138601381...	1.3518130×10^{-6}
4	1.74903138601270...	$1.1100009 \times 10^{-12}$

Une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$ est approximativement 1.7490313860127.

En fait, il n'y a qu'une seule solution positive car $f'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$. Donc, f est une fonction croissante. On a $f(x) > 0$ pour $x > 1.7490313860\dots$ et $f(x) < 0$ pour $0 < x < 1.7490313860\dots$ 

Problème 2: L'autre problème qui peut faire échouer la méthode de Newton est si $f'(x_n)$ est très près de zéro. Si $f'(x_n)$ est très près de zéro, alors la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ est presque horizontale. Ainsi, x_{n+1} qui est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x peut être très grand ou très petit, et donc très loin de la racine de f que l'on cherche à estimer. Si $f'(x_n)$ devient très près de zéro dans la méthode de Newton, il faut arrêter et recommencer avec une autre valeur de x_0 . Il est parfois impossible d'éviter ce problème. Il faut alors avoir recours à une autre méthode numérique pour estimer les racines.

5.9 Systèmes dynamiques discrets

Exemple 5.9.1

Une population de bactéries dans un milieu donné a un taux de croissance de 10% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 (en moyenne) initialement, alors $p_1 = 1.1p_0$ est le nombre de bactéries une heure plus tard, $p_2 = 1.1p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 1.1p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. La relation

$$p_{n+1} = 1.1p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

définit un **système dynamique discret** qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries par cm^3 initialement présent. Si initialement on a $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 , alors on aura $p_1 = 1.1p_0 = 1.1 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, on aura $p_2 = 1.1p_1 = 1.1^2 p_0 = 1.1^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

On remarque que $p_n = 1.1^n p_0 = 1.1^n \times 10^7$ bactéries par cm^3 . Ainsi, après 10 heures, on aura $p_{10} = 1.1^{10} \times 10^7$ bactéries par cm^3 si initialement on avait $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 . On a que p_n tend vers plus l'infini lorsque n augmente ; c'est-à-dire que le nombre de bactéries croît sans borne supérieure. 

Définition 5.9.2

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Une équation de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.9.1}$$

est appelée un **système dynamique discret**. La valeur donnée à p_0 est la **condition initiale**. La fonction f est appelée la **fonction itérative** ou **fonction génératrice** du système dynamique discret.

Une **solution** du système dynamique discret (5.9.1) qui satisfait la condition initiale p_0 est une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $p_n = g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ satisfait (5.9.1) et $g(0) = p_0$.

Remarque 5.9.3

Les systèmes dynamiques discrets sont très fréquents en biologie. Ils sont utilisés pour décrire mathématiquement le comportement de quantités qui sont mesurées à une fréquence régulière. Pour étudier le comportement des systèmes dynamiques discrets, on aura besoin du calcul différentiel et intégral.

Inversement, les systèmes dynamiques discrets sont très utiles pour résoudre numériquement les problèmes de calcul différentiel et intégral. Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés pour résoudre des équations où aucune méthode exacte de résolution n'existe (e.g. la méthode de Newton), pour résoudre des équations différentielles pour lesquelles les méthodes

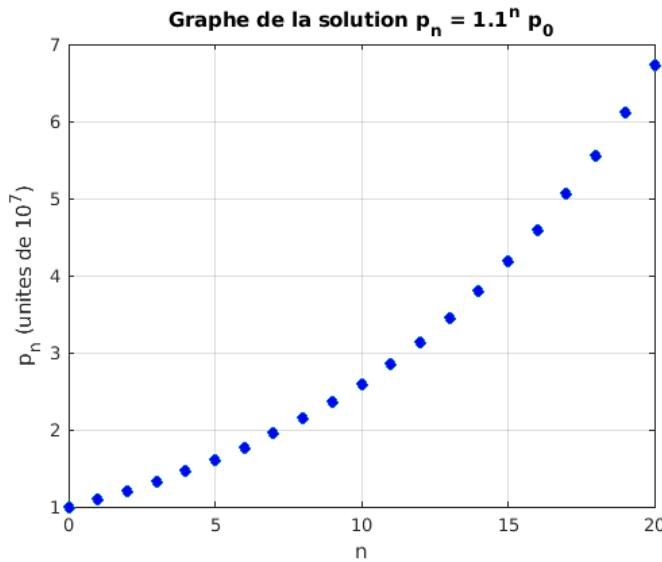


FIGURE 5.28 – Graphe de la solution $p_n = 1.1^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 1.1p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

algébriques d'intégration échouent (e.g. la méthode d'Euler que l'on présentera lors de l'étude des équations différentielles), etc. ♠

Exemple 5.9.4

À l'exemple précédent, la fonction itérative du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 1.1p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est $f(x) = 1.1x$ et la solution de ce système avec la condition initiale p_0 est

$$p_n = 1.1^n p_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On trace le graphe de cette solution avec $p_0 = 10^7$ à la figure 5.28. ♣

Exemple 5.9.5

Reprendons notre exemple d'une population de bactéries dans un milieu donné. Supposons maintenant que le taux de croissance est de -20% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 initialement, alors $p_1 = 0.8p_0$ est le nombre de bactéries par cm^3 une heure plus tard, $p_2 = 0.8p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 0.8p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. L'équation

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

définit un système dynamique discret qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries initialement présent. Si initialement on a $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 , alors on aura $p_1 = 0.8p_0 = 0.8 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, on aura $p_2 = 0.8p_1 = 0.8^2 p_0 = 0.8^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

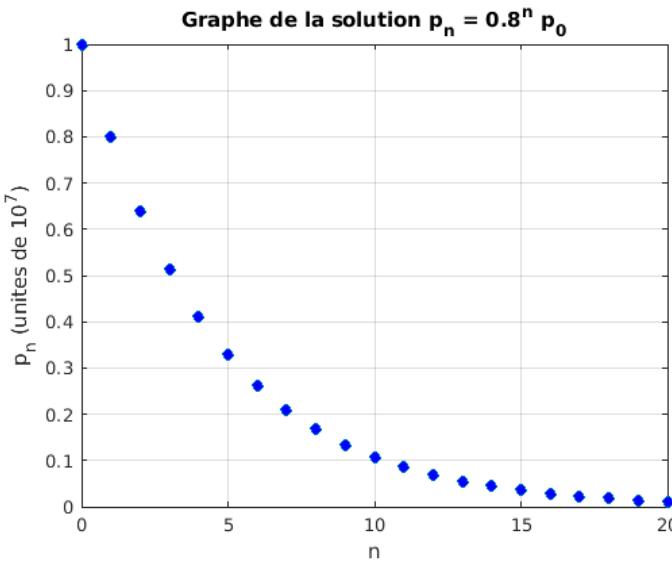


FIGURE 5.29 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

On a donc la solution $p_n = 0.8^n p_0 = 0.8^n \times 10^7$ bactéries par cm^3 . Après 10 heures, on aura $p_{10} = 0.8^{10} \times 10^7 = 1.073742 \times 10^6$ bactéries par cm^3 si initialement on avait $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 . Après 24 heures, on aura $p_{24} = 0.8^{24} \times 10^7 = 47,224$ bactéries par cm^3 . On a que p_n tend vers 0 lorsque n augmente. On trace le graphe de la solution avec la condition initiale $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 à la figure 5.29. ♣

Exemple 5.9.6

Le nombre de bactéries par cm^3 , n heures après le début d'une expérience, est p_n . On observe que la population de bactéries est décrite par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Combien d'heures au minimum faut-il pour que le nombre de bactéries par cm^3 soit réduit d'au moins la moitié ?

La solution du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ est $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. On cherche la plus petite valeur de n telle que $p_n \leq p_0/2$. Considérons

$$0.8^n p_0 = \frac{p_0}{2} .$$

Si on divise par p_0 des deux côtés de l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 0.8^n &= 2^{-1} \Rightarrow n \ln(0.8) = \ln(0.8^n) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2) \\ &\Rightarrow n = -\frac{\ln(2)}{\ln(0.8)} = -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{\ln(2)}{\ln(4) - \ln(5)} = 3.106283\dots \end{aligned}$$

Après trois heures on aura un peu plus que la moitié de la population de bactéries par cm^3 et après quatre heures on en aura moins de la moitié. Donc, on prend $n = 4$ heures. On remarque que la réponse est indépendante du nombre initial de bactéries.

Peut-on dire qu'après 3.106... heures la population de bactéries par cm^3 est exactement la moitié du nombre initial de bactéries par cm^3 ? En général non, puisque $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est la solution d'un système dynamique discret, il n'y a rien qui dit que $0.8^t p_0$ pour $t \in \mathbb{R}$ décrit le comportement de la population entre deux échantillons. On étudiera dans au chapitre 8 les systèmes dynamiques continus (i.e. les équations différentielles) qui correspondent aux systèmes dynamiques discrets de la forme $p_{n+1} = rp_n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. La solution de ces systèmes sera de la forme $p_0 e^{rt}$ pour $t \in \mathbb{R}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et r est le taux de croissance. ♣

On est intéressé au comportement de la suite $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ lorsque n devient de plus en plus grand. Est-ce que p_n tend vers une valeur quelconque lorsque n tend vers plus l'infini? Est-ce que p_n croît sans borne supérieure comme c'est le cas pour notre population de bactéries de l'exemple 5.9.1?

Définition 5.9.7

Soit

$$p_{n+1} = f(p_n) , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

un système dynamique discret. L'**orbite** (positive) de p_0 est la suite $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ où $p_1 = f(p_0)$, $p_2 = f(p_1)$, $p_3 = f(p_2)$, ...

Remarque 5.9.8

Considérons un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si la condition initiale p_0 est donnée, alors

$$\begin{aligned} p_1 &= f(p_0) , \\ p_2 &= f(p_1) = f(f(p_0)) = (f \circ f)(p_0) , \\ p_3 &= f(p_2) = f(f(f(p_0))) = (f \circ f \circ f)(p_0) , \\ &\vdots \end{aligned}$$

On dit que p_1 est obtenue de p_0 par une **itération** de f , p_2 est obtenue de p_0 par deux **itérations** de f , etc.

Dans certains livres, on utilise la notation f^2 pour désigner $f \circ f$, f^3 pour désigner $f \circ f \circ f$, etc. C'est une autre tradition mathématique qui peut conduire à confusion. Que veut dire $f^2(p_0)$? Est-ce $f(f(p_0))$ ou $(f(p_0))^2$? Seul le contexte peut le dire. Nous n'utiliserons pas f^2 , f^3 , ... pour désigner la composition de fonctions mais le produit de fonctions comme on a toujours fait. ♠

$$p_{i+1} = 0.8p_i$$



FIGURE 5.30 – Portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Comment peut-on représenter graphiquement les orbites du système dynamique

$$p_{n+1} = f(p_n) , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Deux méthodes sont fréquemment utilisées.

Portrait de phases

La première méthode est de tracer le **portrait de phase** du système. Par exemple, à la figure 5.30, on a tracé le portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ de l'exemple 5.9.1. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Pour toute condition initiale $p_0 > 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend vers 0 lorsque n devient de plus en plus grand. On pourrait aussi vérifier que pour toute condition initiale $p_0 < 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend aussi vers 0 lorsque n augmente. Mais, naturellement, quelle interprétation biologique peut-on donner à un nombre négatif de bactéries ?

Graphe en forme de toile d'araignée

La deuxième méthode consiste à tracer le **graphe en forme de toile d'araignée** d'une orbite du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ce graphe donne plus d'information sur la façon dont les orbites convergent (si elles convergent). On retrouve, à la figure 5.31, le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

de l'exemple précédent. On a choisi $p_0 = 10^7$ comme condition initiale.

Pour tracer un tel graphe, on commence au point $(p_0, 0) = (10^7, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. On trace une droite verticale à partir de $(p_0, 0)$ qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_0, p_1) où $p_1 = 0.8p_0$.
2. À partir de (p_0, p_1) , on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_1, p_1) .

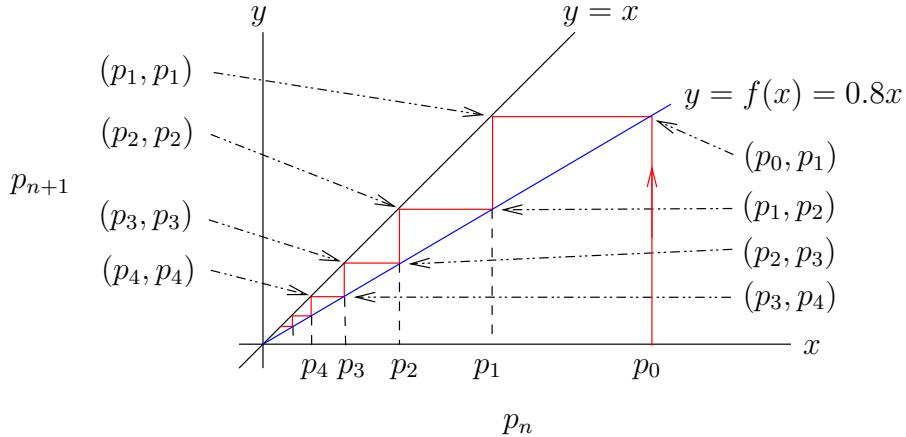


FIGURE 5.31 – Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ avec la condition initiale $p_0 = 10^7$

3. À partir de (p_1, p_1) , on trace une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_1, p_2) où $p_2 = 0.8p_1$.
4. À partir de (p_1, p_2) , on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_2, p_2) .
5. À partir de (p_2, p_2) , on trace une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_2, p_3) où $p_3 = 0.8p_2$.
6. Ainsi de suite.

Les points (p_n, p_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(p_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

Exemple 5.9.9

Soit p_n le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 qui se trouvent dans un milieu n heures après le début d'une expérience. On observe que p_n satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En plus d'un taux de croissance de -20% , il y a 3,000 bactéries par cm^3 de plus par heure qui proviennent de l'extérieur du milieu. Le milieu expérimental est contaminé.

La fonction itérative pour ce système dynamique discret est $f(x) = 0.8x + 3$.

Les premières valeurs de p_n sont

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.8p_0 + 3 , \\ p_2 &= 0.8p_1 + 3 = 0.8(0.8p_0 + 3) + 3 = 0.8^2p_0 + 0.8 \times 3 + 3 , \\ p_3 &= 0.8p_2 + 3 = 0.8(0.8^2p_0 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 = 0.8^3p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3 , \\ p_4 &= 0.8p_3 + 3 = 0.8(0.8^3p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 \\ &= 0.8^4p_0 + 0.8^3 \times 3 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3 , \\ &\vdots \end{aligned}$$

n	p_n	n	p_n
0	3	0	25
1	5.4	1	23
2	7.32	2	21.4
3	8.856	3	20.12
4	10.0848	4	19.096
5	11.06784	5	18.2768
6	11.854272	6	17.62144
7	12.4834176	7	17.097152
:	:	:	:
18	14.78382721789...	18	15.18014398509...
19	14.82706177431...	19	15.14411518808...
20	14.86164941945...	20	15.11529215046...
21	14.88931953556...	21	15.09223372037...
22	14.91145562845...	22	15.07378697629...
23	14.92916450276...	23	15.05902958104...
24	14.94333160221...	24	15.04722366483...

TABLE 5.1 – Deux orbites du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $p_0 = 3$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $p_0 = 25$. Ne pas oublier que p_n est le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 en moyenne. Donc, on ne peut pas simplement ignorer les chiffres décimaux après le troisième chiffre.

Par induction, on trouve

$$\begin{aligned} p_n &= 0.8^n p_0 + 3 \sum_{k=0}^{n-1} 0.8^k = 0.8^n p_0 + 3 \left(\frac{1 - 0.8^n}{1 - 0.8} \right) \\ &= 0.8^n(p_0 - 15) + 15 . \end{aligned}$$

Puisque 0.8^n approche 0 lorsque n devient de plus en plus grand, on a que p_n approche 15 lorsque n devient de plus en plus grand.

Au tableau 5.1, on a calculé deux orbites, une avec la condition initiale $p_0 = 3$ et l'autre avec la condition initiale $p_0 = 25$. Les deux orbites tendent vers 15.

Le graphe de la solution $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret avec $p_0 = 3$ est donné à la figure 5.32.

Le graphe en forme de toile d'araignée est donné à la figure 5.33. Il indique bien que toutes les orbites tendent vers 15.

On remarque que l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $p_0 = 15$ pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est donnée par $p_n = 15$ pour tout n . Le point $p = 15$ est invariable pour la fonction itérative $y = f(x) = 0.8x + 3$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

C'est-à-dire, $f(15) = 15$. Les points qui satisfont cette propriété sont très importants et on leur donne un nom.

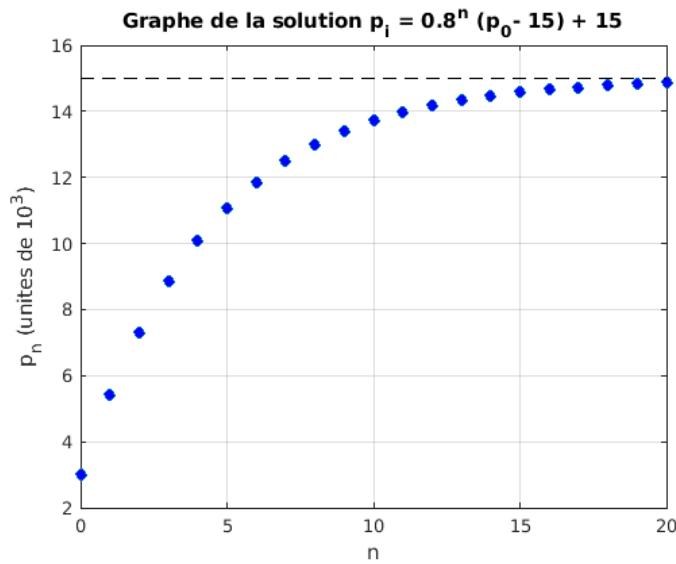


FIGURE 5.32 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ dont la condition initiale est $p_0 = 3$. Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

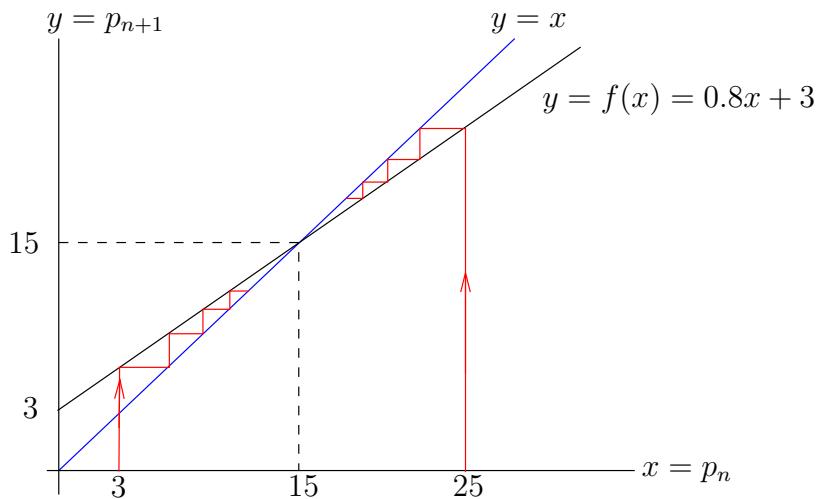


FIGURE 5.33 – Le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Définition 5.9.10

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Un point p tel que $f(p) = p$ est appelé un **point fixe**, un **point d'équilibre** ou un **état d'équilibre** du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre d'un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les solutions de $x = f(x)$; ce sont donc les points d'intersection de la droite $y = x$ avec le graphe de la fonction itérative f du système dynamique discret (voir figure 5.33).

Exemple 5.9.11

À l'exemple 5.9.9, on peut montrer que pour toute condition initiale p_0 , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tend vers 15. C'est-à-dire que le point d'équilibre $p = 15$ possède la propriété ci-dessous. ♣

Définition 5.9.12

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Un point d'équilibre p du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est **asymptotiquement stable**^a si, quelle que soit la condition initiale p_0 près de p , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers p .

Un point d'équilibre p du système dynamique discret est **instable** si, pour toute condition initial p_0 assez près de p , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ « s'éloigne » de p .

a. La définition de stabilité asymptotique que nous donnons n'est pas exactement la définition de stabilité asymptotique que l'on retrouve dans les ouvrages spécialisés sur ce sujet mais elle sera suffisante pour les problèmes que nous étudierons.

Remarque 5.9.13

Par la suite, nous substituerons à l'occasion l'expression « asymptotiquement stable » par le mot « stable » seulement. Cela simplifie l'écriture mais entre en conflit avec la littérature spécialisée sur le sujet des systèmes dynamiques. En effet, dans la littérature spécialisée, on dit qu'un point d'équilibre p est stable si les orbites $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ avec la condition initiale p_0 suffisamment près de p « ne s'éloignent pas » de p . Il est possible que ces orbites n'approchent pas p mais seulement demeurent dans le voisinage de p . ♠

Considérons un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

où la fonction itérative f est une fonction affine

$$y = f(x) = \alpha x + \beta .$$

L'existence d'un point fixe p pour ce système dynamique discret nous fournit une autre méthode pour trouver la solution du système dynamique discret.

Puisque $f(p) = p$, on a

$$p_{n+1} - p = f(p_n) - f(p) = (\alpha p_n + \beta) - (\alpha p + \beta) = \alpha(p_n - p)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_1 - p &= \alpha(p_0 - p) , \\ p_2 - p &= \alpha(p_1 - p) = \alpha^2(p_0 - p) , \\ p_3 - p &= \alpha(p_2 - p) = \alpha^3(p_0 - p) , \\ &\vdots \quad \vdots \\ p_n - p &= \alpha^n(p_0 - p) , \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 5.9.14

La solution générale du système dynamique discret

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

est $p_n = \alpha^n(p_0 - p) + p$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, où p est le point d'équilibre du système. Si le système dynamique discret n'a pas de point d'équilibre (i.e. $\alpha = 1$), la solution est $p_n = p_0 + n\beta$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Exemple 5.9.15

Puisque $p = 15$ est un point fixe du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

on a $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$.



Exemple 5.9.16

Le nombre initial de bactéries dans un milieu donné est de 2,500 bactéries par cm^3 . On détermine que le nombre de bactéries après une heure est de 2,750 bactéries par cm^3 et qu'il est de 3,125 bactéries par cm^3 après deux heures. Si on sait que le nombre de bactéries satisfait un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = \alpha p_n + \beta$, quel est ce système ? Trouvez les points d'équilibre s'il y en a et étudier leur stabilité. Donner la solution.

On cherche un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On a $p_0 = 2,500$, $p_1 = 2,750$ et $p_2 = 3,125$. On peut donc écrire le système linéaire à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{aligned} 2,750 &= \alpha 2,500 + \beta \\ 3,125 &= \alpha 2,750 + \beta \end{aligned}$$

Si on soustrait la première équation de la deuxième équation, on trouve

$$\alpha = \frac{3,125 - 2,750}{2,750 - 2,500} = 1.5 .$$

Si on remplace α par 1.5 dans la première équation, on trouve

$$\beta = 2,750 - 1.5 \times 2,500 = -1,000 .$$

Donc, le système dynamique discret cherché est

$$p_{n+1} = 1.5p_n - 1,000 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre p sont les solutions de $p = 1.5p - 1,000$. On trouve $p = 2,000$ bactéries par cm^3 . La solution générale est $p_n = 1.5^n(p_0 - 2,000) + 2,000$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dans le cas présent, $p_0 = 2,500$ bactéries par cm^3 . Donc la solution particulière est $p_n = 500 \times 1.5^n + 2,000$. Du point de vue mathématique et biologique, il y a un point fixe qui est instable (vérifier avec un graphe en forme de toile d'araignée). Indépendamment de la condition initiale $p_0 > 2,000$, la population va croître sans borne supérieure. Pour $p_0 < 2,000$, on peut considérer que la population de bactéries va disparaître. 

5.9.1 Équation logistique

Dans les exemples précédents, on a supposé que les populations de bactéries étaient décrites par un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) = rp_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{5.9.2}$$

où r était le taux de croissance relative de la population (on ignore les systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n + q$ qui peuvent être considérés comme des perturbations du systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n$). On a vu que $p_n = r^n p_0$ et donc que le nombre de bactéries tend vers plus l'infini si $r > 1$ et vers 0 si $0 < r < 1$. Cela n'est naturellement pas (toujours) réaliste.

On modifie le système dynamique discret en (5.9.2) pour mieux décrire la croissance du nombre de bactéries. On suppose qu'un milieu borné peut supporter au plus M bactéries (une limite imposée par la quantité de nourriture présente, l'espace occupé, ...). Le taux de croissance doit donc diminuer avec le temps pour garder le nombre de bactéries en deçà de M .

On considère le système dynamique discret

$$p_{n+1} = r p_n \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots , \quad (5.9.3)$$

où le facteur $\left(1 - \frac{p_n}{M}\right)$ devient de plus en plus petit lorsque le nombre de bactéries $p_n < M$ approche le nombre maximal de bactéries M que le milieu peut supporter.

Dans la littérature, on ne considère pas le nombre total de bactéries dans le milieu mais la fraction p_n/M représentant le nombre de bactéries présent par rapport au nombre maximal de bactéries que le milieu peut supporter. Si on divise les deux côtés de (5.9.3) par M , on obtient

$$\frac{p_{n+1}}{M} = r \frac{p_n}{M} \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si on pose $x_n = p_n/M$ pour tout n , on obtient l'équation suivante.

Définition 5.9.17

L'équation logistique est le système dynamique discret de la forme

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9.4)$$

Pour l'équation logistique, la fonction itérative est $f(x) = rx(1 - x)$.

On donne aux tableaux 5.2 plusieurs valeurs de x_n lorsque $r = 1.1$, et la fraction initiale de bactéries est $x_0 = 0.4$ pour le tableau de gauche et $x_0 = 0.9$ pour le tableau de droite.

Dans les deux cas, la fraction de la population maximale tend lentement vers $0.\overline{09} = 1/11$. Pour l'équation logistique $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = r x(1 - x)$ avec $r = 1.1$, le point $p = 1/11$ est un point d'équilibre car $f(p) = p$. Ainsi, si la fraction de la population maximale est $1/11$, cette fraction sera encore $1/11$ après une heure, deux heures, etc. La fraction de la population maximale ne changera pas. La population a atteint un état d'équilibre.

La population de bactéries ne disparaît pas mais approche un état d'équilibre de $1/11$ de la population maximale que le milieu peut supporter. On pourrait choisir d'autres valeurs initiales pour x_0 mais, dans tous les cas, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers l'état d'équilibre $1/11$ qui représente la fraction de la population maximale que le milieu peut supporter.

Comment peut-on expliquer ce phénomène ? Qu'arrivera-t-il si on change la valeur du paramètre r représentant le taux de croissance relative sans contraintes du milieu ?

Avant de répondre à ces questions, et à bien d'autres qui seront soulevées plus loin, il est utile de revoir les deux façons que l'on a de représenter les orbites d'un système dynamique discret.

Portrait de phases

Pour décrire le comportement du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n) , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

n	x_n	n	x_n
0	0.40000000000...	0	0.90000000000...
1	0.26400000000...	1	0.09900000000...
2	0.21373440000...	2	0.09811890000...
3	0.18485720688...	3	0.09734073961...
4	0.1657352194...	4	0.09665207202...
5	0.15210722110...	5	0.09604149390...
6	0.14186767582...	6	0.09549927788...
7	0.13391536222...	7	0.09501708239...
:	:	:	:
49	0.09124508294...	49	0.09095594351...
50	0.09121135955...	50	0.09095125583...
:	:	:	:
199	0.090909090955...	99	0.09090933224...
200	0.090909090950...	100	0.09090930811...
:	:	:	:
1999	0.09090909091...	1999	0.09090909091...
2000	0.09090909091...	2000	0.09090909091...
:	:	:	:

TABLE 5.2 – Deux orbites de l'équation logistique où $r = 1.1$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $x_0 = 0.4$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $x_0 = 0.9$.



FIGURE 5.34 – Portrait de phase du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n)$.

on peut utiliser le portrait de phase donné à la figure 5.34. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Si on prend une condition initiale x_0 entre 0 et $p = 1/11$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 tend vers p . Si on prend une condition initiale x_0 entre $p = 1/11$ et 1, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 tend aussi vers p .

On déduit du portrait de phase que le point fixe $p = 1/11$ est asymptotiquement stable.

Graphe en forme de toile d'araignée

Une autre façon de représenter les orbites du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

est le graphe en forme de toile d'araignée que l'on retrouve à la figure 5.35. Pour tracer un tel graphe, on commence au point $(x_0, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. On trace une droite verticale à partir de $(x_0, 0)$ qui coupe le graphe de f au point (x_0, x_1) où $x_1 = f(x_0)$.
2. À partir de (x_0, x_1) , on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_1, x_1) .

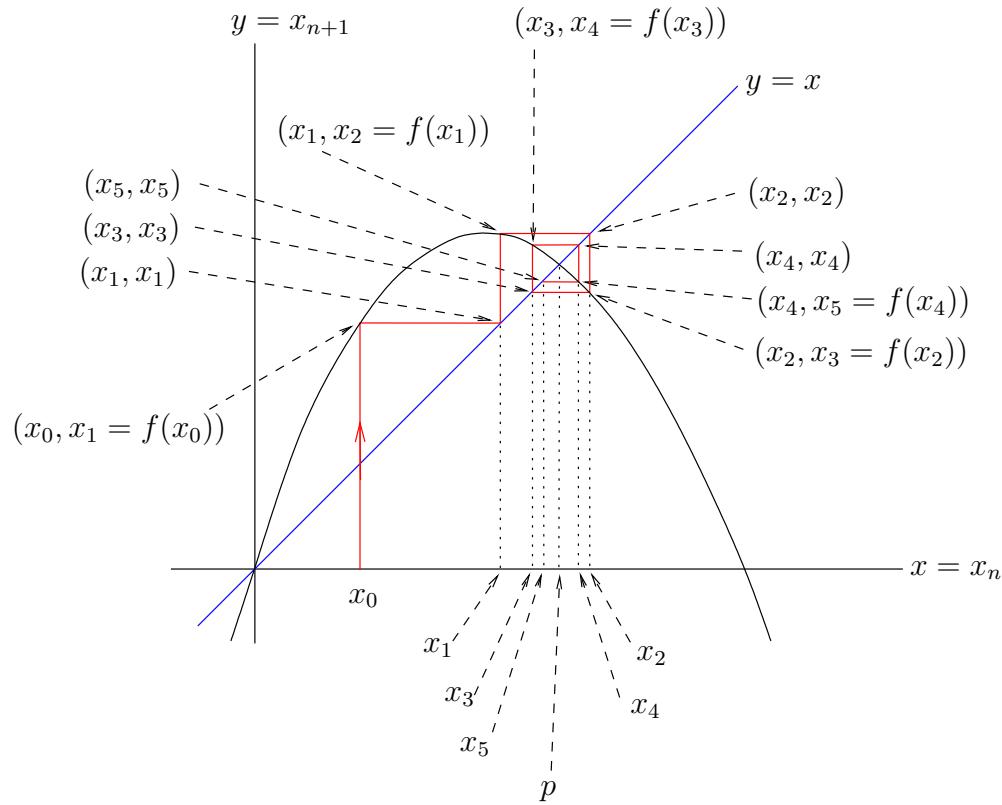


FIGURE 5.35 – Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ avec $r = 2.3$. p est un point fixe.

3. À partir de (x_1, x_1) , on trace une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_1, x_2) où $x_2 = f(x_1)$.
4. À partir de (x_1, x_2) , on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_2, x_2) .
5. À partir de (x_2, x_2) , on trace une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_2, x_3) où $x_3 = f(x_2)$.
6. Ainsi de suite.

Les points (x_n, x_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(x_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

5.9.2 Étude des points d'équilibre

Les points fixes d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 5.9.18

À l'aide du graphe en forme de toile d'araignée des systèmes dynamiques discrets, on peut

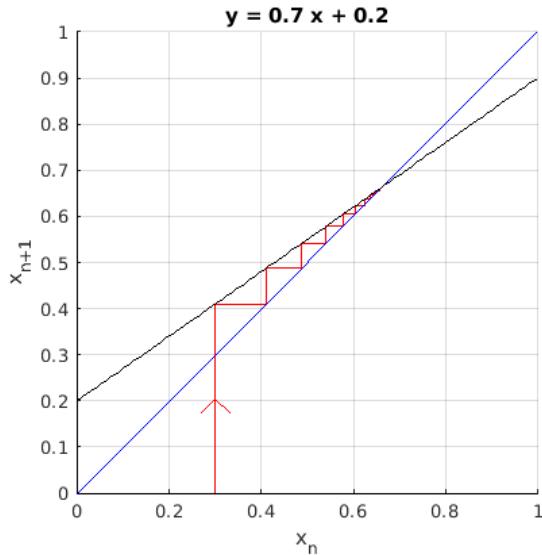


FIGURE 5.36 – Le point d'équilibre $p = 2/3$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = 0.7x_n + 0.2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est asymptotiquement stable, Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.3$.

déterminer la stabilité du point d'équilibre du système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où (i) $y = f(x) = 0.7x + 0.2$, (ii) $y = f(x) = 2x - 0.6$, (iii) $y = f(x) = -0.7x + 0.68$ et (iv) $y = f(x) = -2x + 1.2$.

On retrouve aux figures 5.36, 5.37, 5.38 et 5.39 un graphe en forme de toile d'araignée pour chacun des systèmes ci-dessus.

En (i), le point d'équilibre $p = 2/3$ est asymptotiquement stable. Il en est de même pour le point d'équilibre $p = 2/5$ en (iii). Par contre, le point d'équilibre $p = 3/5$ en (ii) et le point d'équilibre $p = 2/5$ en (iv) ne sont pas asymptotiquement stables.

En (i) et (iii), si on prend la condition initiale x_0 plus petite que le point d'équilibre p (i.e. à la gauche de p) alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 demeure toujours à la gauche du point d'équilibre p . De même, si la condition initiale x_0 est plus grande que p (i.e. à la droite de p), alors l'orbite demeure toujours à la droite de p . Par contre, ce n'est pas le cas pour (ii) et (iv). En fait, que l'on prenne x_0 à la droite ou à la gauche de p , l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 alterne entre la gauche et la droite de p . 

Les exemples précédents suggèrent le résultat suivant :

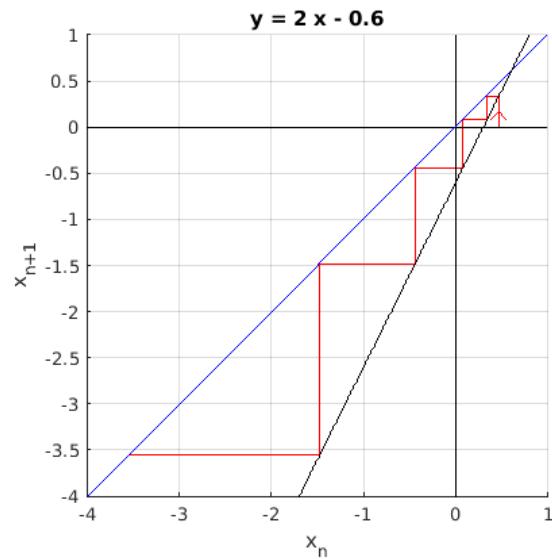


FIGURE 5.37 – Le point d'équilibre $p = 3/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n - 0.6$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.47$

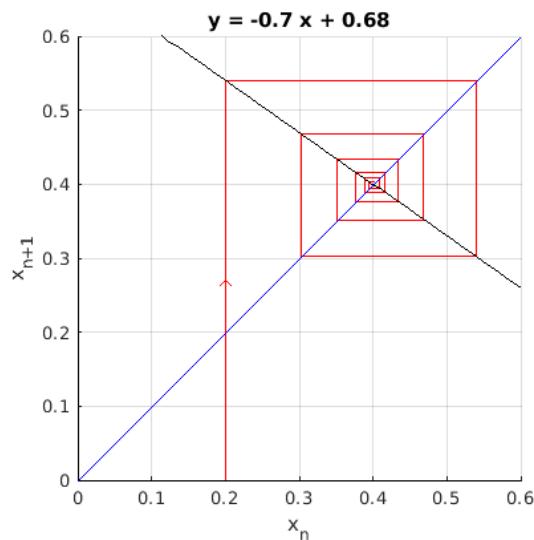


FIGURE 5.38 – Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = -0.7x_n + 0.68$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est asymptotiquement stable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.2$

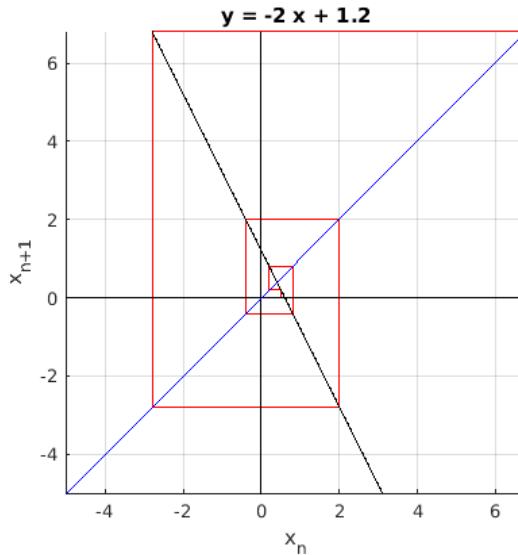


FIGURE 5.39 – Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = -2x_n + 1.2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.5$

Proposition 5.9.19

On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où la fonction itérative est $y = f(x) = mx + b$. Si p est un point d'équilibre de ce système dynamique discret alors ce point d'équilibre est asymptotiquement stable si $|m| < 1$ et instable si $|m| > 1$.

Comment peut-on déterminer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre p d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où f n'est pas une fonction affine ?

Supposons que p soit un point d'équilibre pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

où f est une fonction différentiable quelconque. On sait que $f(x) \approx g(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$ pour x très près de p . Très près du point p , le système dynamique discret ci dessus devrait donc se comporter comme le système dynamique discret

$$x_{n+1} = g(x_n) = f(p) + f'(p)(x_n - p) = mx_n + b \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

où $m = f'(p)$ et $b = f(p) - p f'(p)$. En se basant sur le résultat précédent pour $f(x) = mx + b$, ce raisonnement suggère le résultat suivant :

Théorème 5.9.20

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont la dérivée existe et est continue. Soit p un point d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Le point d'équilibre p est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$. Il est instable si $|f'(p)| > 1$. On ne peut rien conclure lorsque $|f'(p)| = 1$.

On démontrera plus loin ce résultat. C'est une simple application des résultats de calcul différentiel que l'on a présentés précédemment.

Revenons à notre équation logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre sont les solutions de

$$rx(1 - x) = x .$$

Si $x \neq 0$, on peut diviser des deux cotés de l'égalité par x pour obtenir $r(1 - x) = 1$. Ainsi $x = 1 - \frac{1}{r}$. L'équation logistique a donc deux points fixes : $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{r}$.

Si, comme à la section précédente, x_n est la fraction de la population maximale, le point fixe $x = 0$ est simplement le fait que s'il n'y a pas de bactéries initialement, il n'y en aura pas dans le futur. Dans le cas $r = 1.1$, on retrouve l'état d'équilibre $x = 1/11$ déjà observé.

Il n'est pas toujours possible de trouver algébriquement, comme on vient de le faire pour l'équation logistique, les points fixes. On utilise alors des méthodes numériques comme la méthode de Newton pour estimer les points d'équilibre.

Exemple 5.9.21

On a vu que $p = 1/11$ est un point d'équilibre pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

où $r = 1.1$. Les orbites que l'on a calculées numériquement semblent indiquer que ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Posons $f(x) = rx(1 - x)$. On a que $f'(x) = r(1 - 2x)$. Ainsi, pour $r = 1.1$ et $x = p = 1/11$, on a

$$f'(p) = 1.1 \left(1 - 2 \frac{1}{11} \right) = 0.9 .$$

Puisque $|f'(p)| < 1$, le point d'équilibre p est asymptotiquement stable.


Remarque 5.9.22

Soit le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre p où $|f'(p)| = 1$ sont en fait très importants. C'est une des conditions pour obtenir une **bifurcation**. Si on suppose que f dépend d'un paramètre r (comme c'est le cas pour l'équation logistique) et que pour une valeur r_0 de r il existe un point d'équilibre p tel que $|f'(p)| = 1$, alors le comportement du système dynamique discret pour $r < r_0$ peut être très différent du comportement du système dynamique discret pour $r > r_0$ si certaines conditions génériques sont satisfaites.

On vous invite à tracer le graphe en forme de toile d'araignée de l'équation logistique pour des valeurs de r entre 2 et 3, et une condition initiale de votre choix. Répéter la même expérience avec une valeur de r entre 3 et $3.447\dots$ de votre choix. Qu'arrivera-t-il lorsque r devient plus grand que $3.447\dots$? Quand $r = 3.839\dots$?

Lorsque $3 < r < 4$, le point $p = 1 - \frac{1}{r}$ est toujours un point d'équilibre. Par exemple, pour $r = 13/4 = 3.25$, on a le point d'équilibre $p = 9/13 = 0.69230769231$. Pourquoi les orbites ne tendent-elles pas vers ce point d'équilibre?

Nous répondrons à certaines de ces questions à la prochaine section.

Le comportement des orbites de l'équation logistique lorsque r varie est fascinant. On retrouve un grand nombre de livres sur ce sujet. ♠

Démonstration (Théorème 5.9.20) ☺

La démonstration qu'un point fixe p pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$ et instable si $|f'(p)| > 1$ repose sur le théorème de la moyenne. Nous démontrons seulement que $|f'(p)| < 1$ implique la stabilité asymptotique du point d'équilibre p et laissons aux lecteurs le soin de démontrer que $|f'(p)| > 1$ implique l'instabilité du point d'équilibre p .

On suppose que f est une fonction différentiable dont la dérivée f' est une fonction continue. Puisque $|f'(p)|$ est strictement plus petit que 1 et f' est continue, on peut trouver une constante K plus grande ou égale à $|f'(p)|$ et plus petite que 1, et une petite valeur δ telle que $|f'(x)| \leq K < 1$ pour tout x dans l'intervalle $I =]p - \delta, p + \delta[$ qui contient p .

i) Si $x_0 \in I$, alors $x_n \in I$ pour tout n .

En effet, supposons que x_n soit dans I , alors $|x_n - p| < \delta$. Grâce au théorème de la moyenne, il existe ζ entre p et x_n tel que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta)(x_n - p)$. On note que $\zeta \in I$ car ζ est entre x_n et p . Ainsi

$$|x_{n+1} - p| = |f(x_n) - f(p)| = |f'(\zeta)(x_n - p)| \leq K|x_n - p| < |x_n - p| < \delta$$

car $K < 1$. Il s'en suit que x_{n+1} est aussi dans l'intervalle I . Par induction, $x_n \in I$ pour tout n .

ii) Encore grâce au théorème de la moyenne, il existe ζ_n entre x_n et p tels que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta_n)(x_n - p)$ avec $\zeta_n \in I$ car ζ_n est entre x_n et p . On a donc $|f'(\zeta_n)| \leq K$ pour tout n . Ainsi

$$|x_n - p| = |f(x_{n-1}) - f(p)| = |f'(\zeta_{n-1})(x_{n-1} - p)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq K|x_{n-1} - p| = K|f(x_{n-2}) - f(p)| = K|f'(\zeta_{n-2})(x_{n-2} - p)| \\
&\leq K^2|x_{n-2} - p| \\
&\dots \\
&\leq K^n|x_0 - p|.
\end{aligned}$$

iii) On a donc que

$$|x_n - p| \leq K^n|x_0 - p| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0$$

pour $0 < K < 1$.

Donc, toutes les orbites avec la condition initiale x_0 dans I tendent vers p . ■

Exemple 5.9.23

Cet exemple provient de [1].

Le nombre de poissons d'une certaine espèce est gouverné par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = rp_n(1 - p_n) - hp_n \quad \text{pour } 0 < h < r - 1 < 2 \quad (5.9.5)$$

où p_n est le nombre de poissons au début de la n^{e} saison de pêche divisé par le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, r est un facteur de croissance pour cette espèce de poissons et h est un facteur d'efficacité des pêcheurs. La valeur h est déterminée par le nombre de permis de pêche, l'équipement utilisé par les pêcheurs, etc. Le terme $-hp_n$ dans l'équation (5.9.5) représente la récolte à chaque année et a un effet négatif sur la croissance de la population de poissons.

Lors d'une saison de pêche, si h augmente, alors le nombre de poissons capturés par les pêcheurs augmentera. Si on permet une plus grande valeur pour h lors d'une saison de pêche, alors on augmente l'effet négatif sur la croissance de la population. Si h est trop grand, on risque de provoquer une diminution de la population de poissons à long terme et de mettre ainsi en danger la survie de cette espèce. À long terme, il n'y aurait plus de poissons à capturer.

Le but est donc de choisir h pour maximiser le nombre de poissons capturés lors des futures saisons de pêche. En d'autres mots, on veut maximiser la récolte de poissons à long terme. Cette récolte est définie comme étant le produit du facteur d'efficacité h des pêcheurs avec l'état d'équilibre stable p_h de la population de poissons associé à cette valeur h . En termes mathématiques, on veut maximiser $R(h) = h p_h$.

La fonction itérative pour le système dynamique discret (5.9.5) est $f(p) = rp(1 - p) - hp$. Les points d'équilibre du système dynamique discret (5.9.5) sont donnés par les solutions de $p = f(p)$. On trouve $p_o = 0$ et $p_h = (r - h - 1)/r$. Le point d'équilibre p_h est positif car on assume $h < r - 1$.

On utilise le Théorème 5.9.20 pour déterminer si le point d'équilibre p_h est stable. On a que $f'(p) = r - h - 2rp$. Donc, $|f'(p_h)| = |2 + h - r|$. Pour que le point d'équilibre p_h soit stable, on doit donc exiger que

$$|2 + h - r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 + h - r < 1 \Leftrightarrow -3 + r < h < r - 1.$$

C'est effectivement le cas pour $0 \leq h < r - 1 < 2$. Notez que $|f'(p_0)| = |r - h| > 1$ pour $h < r - 1$ et donc le point d'équilibre p_0 est instable.

On considère $R(h) = h p_h = h(r - h - 1)/r$. On a $R'(h) = (r - 2h - 1)/r$ et le seul point critique est $H = (r - 1)/2$. On résume dans le tableau suivant l'information que l'on a au sujet de la fonction R .

h	0	$0 < h < (r - 1)/2$	$(r - 1)/2$	$(r - 1)/2 < h < r - 1$	$r - 1$
$R(h)$	0	+	$(r - 1)^2/(4r)$	+	0
$R'(h)$	+	+	0	-	-
		max. local			

Donc la récolte $R(h)$ est maximale pour $h = H$. L'état d'équilibre de la population de poissons pour $h = H$ est alors $p_H = (r - 1)/(2r)$. Comme on a démontré, le point d'équilibre p_H est stable et donc $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers ce point d'équilibre. La récolte maximale de poissons à long terme sera $R(H) = H p_H = (r - 1)^2/(4r)$. ♣

5.9.3 Étude des orbites périodiques

Exemple 5.9.24

Pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avec $r = 3.2$, quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que l'on choisit, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne tend pas vers un point d'équilibre comme on peut le constater avec les données dans la colonne de gauche du tableau 5.3.

On remarque que

$$x_n = \begin{cases} 0.5130445095\dots & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0.7994554905\dots & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

pour n assez grand. L'orbite oscille entre ces deux valeurs. ♣

Exemple 5.9.25

Comme à l'exemple précédent, pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avec $r = 3.47$, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne tend pas vers un point d'équilibre quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que l'on choisit.

n	x_n	n	x_n
0	0.400000000000...	0	0.400000000000...
:	:	:	:
50001	0.79945549047...	50001	0.83479261718...
50002	0.51304450953...	50002	0.47856124509...
50003	0.79945549047...	50003	0.86590511786...
50004	0.51304450953...	50004	0.40291365318...
50005	0.79945549047...	50005	0.83479261718...
50006	0.51304450953...	50006	0.47856124509...
50007	0.79945549047...	50007	0.86590511786...
50008	0.51304450953...	50008	0.40291365318...
50009	0.79945549047...	50009	0.83479261718...
50010	0.51304450953...	50010	0.47856124509...

TABLE 5.3 – Deux orbites de l'équation logistique avec la condition initiale $x_0 = 0.4$. Dans le tableau de gauche, $r = 3.2$ alors que dans le tableau de droite $r = 3.47 \dots$

Par contre, des données dans la colonne de droite du Tableau 5.3, on peut conclure que

$$x_n = \begin{cases} 0.40291365318\dots & \text{si } n = 4k \\ 0.83479261718\dots & \text{si } n = 4k + 1 \\ 0.47856124509\dots & \text{si } n = 4k + 2 \\ 0.86590511786\dots & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

pour k assez grand. L'orbite est la répétition de ces quatre valeurs, toujours dans le même ordre. ♣

Les deux exemples précédents justifient la définition suivante.

Définition 5.9.26

Soit $f : X \rightarrow X$ avec $X \subset \mathbb{R}$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une orbite du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pour laquelle il existe un entier positif k tel que $x_n = x_{n+k}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est appelée une **orbite périodique** ou **solution périodique**. Les points de cette orbite sont appelés des **points périodiques** pour f .

Si k est le plus petit entier positif tel que $x_n = x_{n+k}$, alors k est la **période** de l'orbite.

Exemple 5.9.27

À l'exemple 5.9.24, $p = 0.5130445095 \dots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 2. Voir figure 5.40.

À l'exemple 5.9.25, $p = 0.40291365318 \dots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 4. Voir figure 5.41. ♣

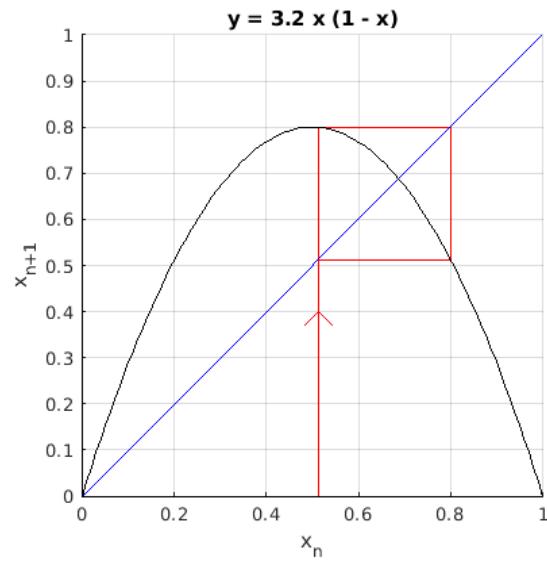


FIGURE 5.40 – Orbite périodique de période 2 pour l'équation logistique avec $r = 3.2$

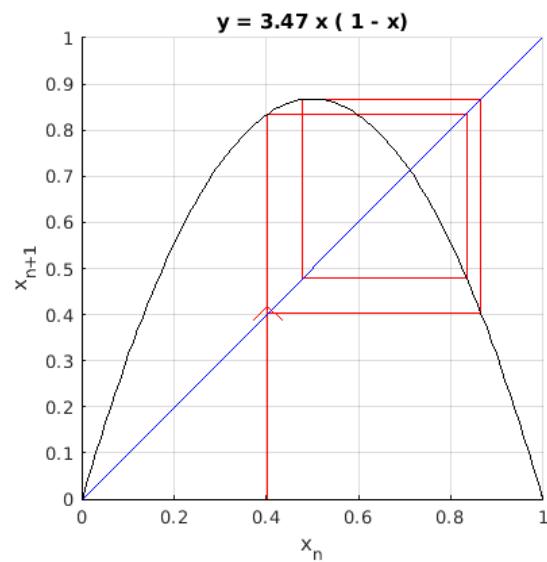


FIGURE 5.41 – Orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$

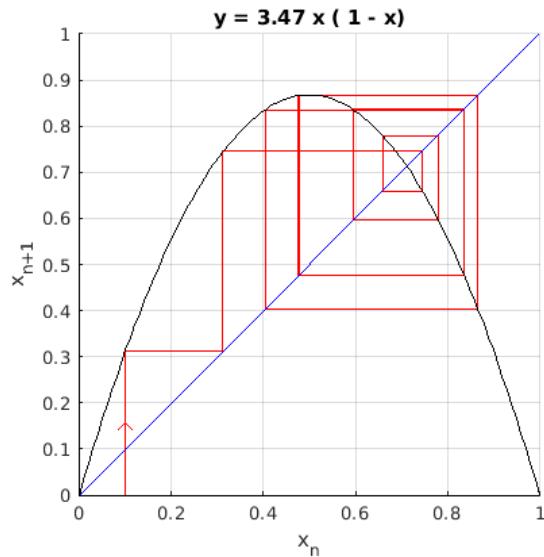


FIGURE 5.42 – Une orbite qui « converge » vers l’orbite périodique de période 4 pour l’équation logistique avec $r = 3.47$. La condition initiale est $x_0 = 0.1$

Dans les deux exemples précédents, quelle que soit la condition initiale x_0 , l’orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se comporte de plus en plus comme l’orbite périodique. Voir la figure 5.42. On a donc une notion de stabilité asymptotique pour les solutions périodiques.

Définition 5.9.28

Soit $f : X \rightarrow X$ avec $X \subset \mathbb{R}$, et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ une orbite périodique de période k pour le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Cette orbite est **asymptotiquement stable** si p , un point quelconque de l’orbite, est un point fixe asymptotiquement stable pour la fonction

$$g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ copies de } f} .$$

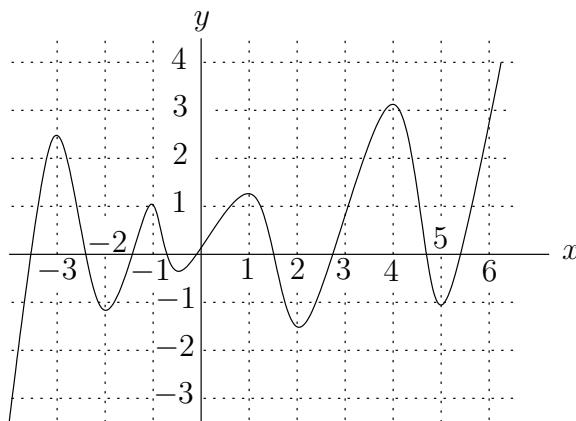
Remarque 5.9.29

On invite le lecteur à démontrer que la définition précédente est indépendante du choix du point périodique p de l’orbite. ♠

5.10 Exercices

Question 5.1

Le graphe d’une fonction f est donné dans la figure suivante.



- a) Donnez les points critiques.
- b) Donnez les valeurs de x où $f'(x) > 0$.
- c) Donnez les valeurs de x où $f'(x) < 0$.
- d) Donnez les valeurs de x où $f''(x) > 0$.
- e) Donnez les valeurs de x où $f''(x) < 0$.

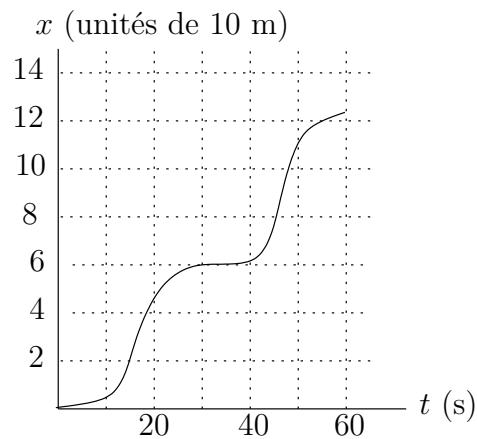
Question 5.2

Dessinez le graphe d'une fonction qui possède les propriétés suivantes :

- a) Une fonction positive qui possède une dérivée strictement croissante.
- b) Une fonction avec une dérivée négative et strictement croissante.

Question 5.3

Le graphe suivant représente la position x d'une voiture dans les montagnes russes (i.e. « roller coaster ») en fonction du temps. À quelles moments la voiture se déplace-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture accélère-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture décélère-t-elle le plus rapidement ? Expliquez votre réponse.



Question 5.4

Calculez la dérivée première et seconde des fonctions suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $h(y) = y^{10} - y^9$ | b) $f(x) = \frac{3+x}{2x}$ | c) $f(x) = x^2 e^x$ |
| d) $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$ | e) $g(z) = (z+4) \ln(z)$ | f) $F(w) = e^w \ln(w)$ |
| g) $f(x) = \ln(x^7)$ | h) $f(z) = \frac{1+e^{-z}}{1+e^z}$ | i) $F(y) = \frac{\ln(y)}{e^y}$ |
| j) $f(x) = 1 + x^{4/5}$ | | |

Question 5.5  

Si $H(\theta) = \theta \sin(\theta)$, évaluez $H'(\theta)$ et $H''(\theta)$.

Question 5.6  

Le flot d'un liquide dans une conduite a un mouvement périodique décrit par

$$F(t) = 212.0 \cos\left(\frac{2\pi t}{10}\right)$$

où F est mesuré en litres par seconde et t est le temps en seconde.

- a) Trouvez le flot moyen et son amplitude.
- b) Trouvez la période du flot et la fréquence du flot..
- c) À quel moment le flot F est-il de 0 litre par seconde ? Qu'arrive-t-il à ce moment ?
- d) Trouvez le taux instantané de changement du flot F ? Que se passe-t-il lorsque ce taux instantané de changement est 0 ? Quel est le flot à ce moment ?

Question 5.7 

Un animal passe de 4 kg à 60 kg en 14 ans. Si on suppose que la masse de l'animal est une fonction différentiable par rapport au temps, pourquoi peut-on dire que le taux de croissance (instantané) a été de 4 kg/année à un moment durant les 14 années ?

Question 5.8

Au départ, une voiture se déplace à 60 km/h. Après un certain temps, elle ralentit jusqu'à 20 km/h. Finalement, elle termine son trajet une heure plus tard à une vitesse de 50 km/h. On sait que la vitesse moyenne de la voiture pour le trajet a été de 40 km/h.

- a) Tracez un graphe de la position de la voiture en fonction du temps pour la durée du trajet.
- b) Quelle information peut-on obtenir du théorème de la moyenne sur la vitesse de la voiture ?
- c) Quelle information peut-on obtenir du théorème des valeurs intermédiaires sur la vitesse de la voiture ?

Question 5.9

La position vertical d'un objet à partir du sol est décrite par la fonction $p(t) = -5.2t^2 - 2t + 50$. On suppose que la direction positive est vers le haut. Cette équation n'est pas valide sur la terre mais sur une planète plus lourde que la terre. La position est donnée en mètres et le temps en secondes.

- a) Trouvez la vitesse et l'accélération de l'objet en fonction du temps.

- b)** Tracez le graphe de la position en fonction du temps à l'aide des résultats en **(a)**.
- c)** Si l'objet part du haut d'une tour, quelle est la hauteur de la tour ? Dans quelle direction et à quelle vitesse a-t-on lancé (si on a lancé) l'objet, vers le haut ou vers le bas ? Quelle est l'accélération dû à la gravité sur cette planète ?

Question 5.10

On laisse tomber un objet d'une hauteur de 100 m sur Jupiter. On assume qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88 \text{ m/s}^2$. Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol ? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol ?

Question 5.11

Sur Jupiter, on lance un objet vers le haut à une vitesse de 10 m/s à partir d'une hauteur de 100 m. On assume qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88 \text{ m/s}^2$. Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet atteigne sa plus grande distance du sol ? Quelle est la hauteur de l'objet à ce moment ? Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol ? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol ?

Question 5.12

Dans son nouveau programme d'exploration des objets célestes, la NASA utilise des sondes spatiales inhabitées. Une expérience conduite par une sonde se trouvant à 100 m au dessus de la lune Deimos de mars consistait à lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s pour analyser sa trajectoire. L'accélération dû à la gravité est de $2.15 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ sur cette lune.

- a)** Trouvez la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.
- b)** Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
- c)** Combien de temps faut-il à l'objet pour revenir à la hauteur de départ ? Quelle est la vitesse de l'objet à ce moment ?
- d)** Combien de temps faut-il à l'objet pour atteindre le sol de la lune ? Quelle est la vitesse de l'objet à ce moment ?
- e)** Tracez le graphe de la vitesse et de la position de l'objet en fonction du temps.

Question 5.13

Une quantité $T(t)$ au temps t est donnée par le produit de deux quantités : $p(t) = 2 \times 10^6 + 10^3 t^2$ et $M(t) = 80 - 0.5t$.

- a)** Donnez T en fonction du temps.
- b)** Calculez la dérivée de T en fonction du temps.
- c)** Quelle est la valeur de T au moment où $T'(t) = 0$? Quelle est la valeur de p à ce moment ? Quelle est la valeur de M à ce moment ?

Question 5.14

Le volume de déchets au temps t produit par deux villes est donnée par $V_a(t) = t^2 - 3t + 16$ pour la ville A et $V_b(t) = 20 + 3t$ pour la ville B . Le volume est mesuré en m^3 et le temps t est mesuré en années. Si les déchets contiennent $\rho(t) = 1.2 - 0.1t \text{ g/m}^3$ d'un certain produit toxique au temps t , répondre aux questions suivantes :

- a) Exprimez la masse du produit toxique en fonction du temps.
- b) Exprimez le taux de variation de la masse en fonction du temps.
- c) Tracez le graphe de la masse en fonction du temps pour $t \geq 0$. Est-ce que les efforts des deux villes d'éliminer le produit toxique de leurs déchets sont encourageants au départ ?

Question 5.15

Le nombre de bactéries dans un milieu riche en substances nutritives est décrit par

$$N(t) = 5000 + \frac{30000t}{100 + t^2}$$

où t est le temps. Trouvez le nombre maximal de bactéries que l'on pourra observer (i.e. trouvez le maximum absolu pour $t \geq 0$).

Question 5.16

La masse d'une culture en fonction du temps est donnée par $M(t) = 1 + t^2$ et le volume en fonction du temps est donné par $V(t) = 1 + t$. La masse est mesurée en grammes, le volume en cm^3 et le temps en jours.

- a) Exprimez la densité en fonction du temps.
- b) Calculez la dérivée de la densité.
- c) Pour quelles valeurs de t a-t-on que la densité est strictement croissante ?
- d) Tracez le graphe de la densité en fonction du temps.

Question 5.17

En l'absence d'influences externes, la croissance annuelle d'une population dépend seulement de la production annuelle moyenne par individu. Si, pour une population de p individus, la production annuelle moyenne par individu est donnée par $f(p) = 2\left(1 - \frac{p}{1000}\right)$, répondez aux questions suivantes.

- a) Exprimez la taille T de la population (i.e. nombre d'individus) après un an en fonction de la taille de la population au début de l'année.
- b) Calculez la dérivée de T par rapport à la population initiale p .
- c) Tracez le graphe de T pour $0 < p < 1000$.

Question 5.18

Soit f une fonction continue qui satisfait :

- a) $f'(x) > 0$ si $-2 < x < 1$,
- b) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 1$,
- c) $f'(x) < 0$ si $x > 1$ ou $x < -2$, et
- d) $f(x) > 0$ pour tout x .

Tracez (de façon approximative) le graphe de cette fonction. Expliquez en une phrase le sens graphique des énoncés.

Question 5.19

On considère une espèce d'oiseaux dont le rapport P du nombre moyen de poussins qui survivent en fonction du nombre x d'oeufs pondus est donné par la fonction $P(x) = 1/(1 +$

$0.5x^2$). Le nombre total de poussins qui survivent en fonction du nombre d'oeufs pondus est donc donné par $S(x) = xP(x)$. Trouvez le nombre de poussins qui survivent si un oiseau de cette espèce pond 5, 10 et 20 oeufs. Tracez le graphe de S . Quelle est la meilleure stratégie pour cette espèce d'oiseaux ? C'est-à-dire, combien d'oeufs devrait pondre un oiseau de cette espèce pour avoir le plus grand nombre possible de poussins qui survivent.

Dans ce problème, il faut comprendre que les valeurs de S sont des moyennes pour l'espèce d'oiseaux. C'est pour cela que S peut être un nombre réel ; S n'est pas obligé d'être un entier. Un oiseau ne peut pas avoir 2.5 poussins mais une population peut avoir en moyenne 2.5 poussins par individu.

Question 5.20

Soit $f(x) = x\sqrt{5-x}$ pour $x < 5$. Répondre aux questions suivantes :

- Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
- Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
- Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
- Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f .

Question 5.21

Soit $f(x) = x - 2\sin(x)$ pour $0 < x < 3\pi$. Répondre aux questions suivantes :

- Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
- Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
- Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
- Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f .

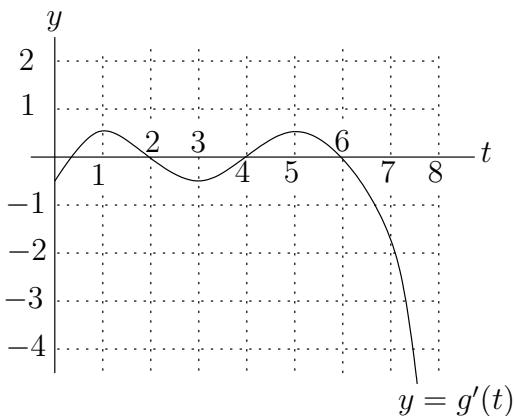
Question 5.22

Tracez un graphe de $y = f(x)$ en utilisant les données suivantes.

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	x_4	$x > x_4$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-

Question 5.23

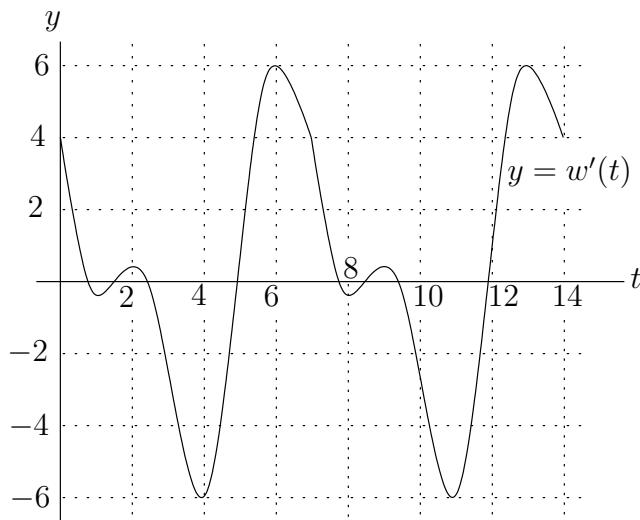
Le graphe de g' est donné dans la figure suivante



Si $g(0) = 2$, tracez un graphe possible pour g . Soyez aussi précis que possible.

Question 5.24

Utilisez le graphe du taux de variation instantanée de la fonction w qui se trouve à la figure suivante pour tracer le graphe de la fonction w si $w(0) = 1$.



Question 5.25

Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

- | | |
|---|--|
| a) $h(x) = x^3 - 3x$ | b) $h(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$ |
| c) $f(x) = x + 4/x^2$ | d) $f(x) = (1-x)e^x$ |
| e) $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$ | f) $F(z) = z^3/e^z$ |
| g) $T(t) = (1-t^2)e^t$, $-1 \leq t \leq 1$ | h) $G(x) = \sqrt{x} e^{-x}$, $x \geq 0$ |
| i) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$ | |

Question 5.26

Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

a) $y = \sin^2(x) - 2\cos(x)$
 c) $h(t) = e^{-t} \sin(t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$

b) $f(\theta) = \theta + 3\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$

Question 5.27

Les questions suivantes font référence à une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b .
- b) Tracez un graphe pour f si f est une fonction différentiable qui a un maximum absolu à $x = a$, un minimum absolu à $x = b$ et aucun point critique. Décrire en une phrase cette fonction.
- c) Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b , et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ où la dérivée existe.

Question 5.28

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le maximum absolu et le minimum absolu sur l'intervalle donné.

a) $f(x) = 2 + xe^{-x}$, $0.5 \leq x \leq 2$ b) $f(x) = x^3 - 3x$, $-2 \leq x \leq 2$
 c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $-2 \leq x \leq 0$ d) $f(x) = 5x(1-x)(2-x) - 1$, $0 \leq x \leq 1$

Question 5.29

Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de $F(x) = |1-x|$ pour $-2 \leq x \leq 3$.

Question 5.30

Tracez le graphe de $g(y) = y/(1+y^2)$ pour $0 \leq y \leq 2$ a l'aide de la dérivée premières et de la dérivée deuxième de g .

- a) Donnez les points où on a une maximum ou minimum local.
- b) Donnez les points où on a un maximum absolu et donnez ce maximum.
- c) De même, donnez les points où on a un minimum absolu et donnez ce minimum.

Question 5.31

Trouvez le point de la droite $y = 4x + 7$ qui est le plus près de l'origine.

Question 5.32

L'aire d'un rectangle dont les côtés sont de longueurs x et y est $A = xy$. Le périmètre de ce rectangle est $P = 2x + 2y$.

- a) Minimisez P si A est fixe.

b) Maximisez A si P est fixe.

Question 5.33

Trouvez les dimensions x et y de la section transversale d'une poutre de bois découpée d'un tronc d'arbre (circulaire) de 30 cm de rayon pour que la section transversale soit d'aire maximale.

Suggestion : cela revient à trouver le rectangle d'aire maximale qui peut être inscrit dans un cercle ayant un diamètre de 30 cm.

Question 5.34

Pour augmenter leur chance de survie, les animaux tentent de maximiser le rapport entre la quantité de nourriture qu'ils récoltent et le risque pour acquérir cette nourriture. Par exemple, les fleurs qui produisent une grande quantité de nectar permettent aux abeilles de récolter une grande quantité de nectar mais ces fleurs attirent aussi d'autres animaux qui sont des prédateurs pour les abeilles. Chaque espèce de fleurs produit une quantité (moyenne) q de nectar (en grammes). Si, pour une espèce de fleurs qui produit q g de nectar, $P(q)$ est le nombre de prédateurs pour les abeilles qui sont attirés par ces fleurs, alors les abeilles doivent maximiser $\frac{q}{P(q)}$ pour déterminer quelle espèce de fleurs elles doivent privilégier. Si

$P(q) = 1 + q^2$, trouvez la valeur de q qui maximise le rapport $\frac{q}{P(q)}$.

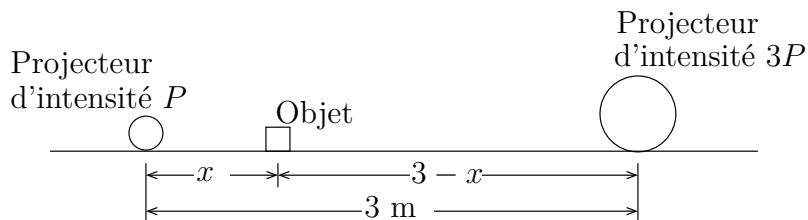
Question 5.35

Un cylindre circulaire droit est inscrit dans une sphère de rayon r . Trouvez l'aire maximal que peut avoir la surface du cylindre.

Note : Un problème un peu plus facile (que vous devriez résoudre) est de trouver le cylindre de volume maximal qui peut être inscrit dans la sphère de rayon r .

Question 5.36

Un objet est éclairé par deux projecteurs. La distance entre les projecteurs est de 3 m et l'objet est entre les deux projecteurs. Un des projecteurs est de puissance P W alors que l'autre est trois fois plus puissant.



Déterminez la position de l'objet pour que l'illumination sur l'objet soit maximale.

Il faut savoir que l'illumination d'une source lumineuse sur un objet est proportionnel à la puissance de la source lumineuse divisée par le carré de la distance entre la source lumineuse et l'objet.

Question 5.37

On considère le problème des abeilles qui butinent que l'on retrouve à l'exemple 5.3.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \frac{t}{0.5 + t}$ et si

$t = T = 1$ est le temps optimal pour maximiser la récolte de nectar durant une journée, déterminez le temps τ que prend l'abeille pour se rendre d'une fleur à une autre fleur ? Illustriez τ à l'aide d'un graphe comme à la figure 5.17 des notes.

Question 5.38

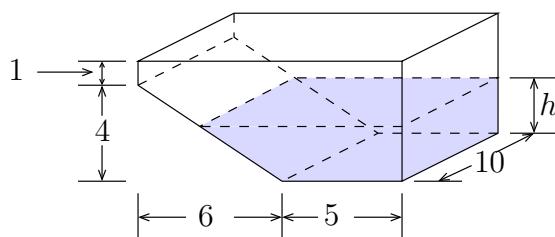
On considère le problème des abeilles qui butinent que l'on retrouve à l'exemple 5.3.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ et $\tau = 1$, déterminez le temps optimal $t = T$ pour maximiser la récolte de nectar. Il faut répéter l'exemple 5.3.9 avec cette nouvelle fonction F pour trouver T . Illustriez la règle des valeurs marginales comme il est fait à la figure 5.17.

Question 5.39

On tire un bateau vers le quai avec une corde attachée à la proue du bateau et qui passe par une poulie placée au bord du quai. Le quai a 2 m de haut. Si la corde est tirée à un vitesse constante de 0.5 m/s, à quelle vitesse le bateau s'approche-t-il du quai lorsqu'il est à 6 m du quai ? Est-ce que la vitesse à laquelle le bateau approche le quai est constante ?

Question 5.40

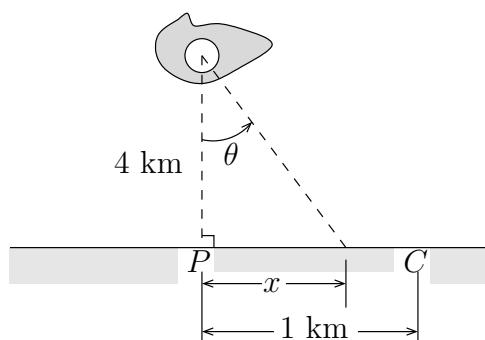
On considère la piscine suivante



Les dimensions de la piscine sont en mètres. On remplit cette piscine à l'aide d'une pompe dont le débit est de $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$. À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il lorsque la profondeur de l'eau à l'endroit le plus profond est de 3 m ?

Question 5.41

La lampe d'un phare situé sur une petite île fait 5 révolutions par minute. Le point P de la côte qui est le plus près de l'île est à une distance de 4 km de celle-ci.



À quelle vitesse (tangentielle) le rayon lumineux du phare balaye-t-il la côte au point C qui

se trouve à 1 km du point P .

Question 5.42 

Utilisez la dérivée implicite pour calculer la dérivée de la fonction y qui est donnée implicitement dans les équations suivantes :

a) $x^2y + xy^2 = 3x$
 c) $xy^4 + x^2y = x + 3y$

b) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

Question 5.43 

Utilisez une approximation linéaire pour estimer chacune des valeurs suivantes :

a) 1.002^{2001} b) $\sin(0.02)$

Question 5.44 

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

- a) Trouvez l'approximation linéaire p_1 du numérateur de f au voisinage de $x = 1$.
- b) Trouvez l'approximation linéaire p_2 du dénominateur de f au voisinage de $x = 1$.
- c) Montrez que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_1(x)}{p_2(x)}.$$

Note : L'idée de remplacer le numérateur et le dénominateur par des polynômes de Taylor est à la base de la démonstration de la règle de l'Hospital.

Question 5.45 

Donnez une approximation linéaire de la fonction $y = f(x) = x^{-3}$ au voisinage de $x = 1$.

Il est possible d'utiliser une polynôme de degré deux pour estimer la fonction f au voisinage de $x = 1$. Pour ce faire, on choisit $p_2(x) = a + bx + cx^2$ tel que $p_2(1) = f(1)$, $p'_2(1) = f'(1)$ et $p''_2(1) = f''(1)$. Trouvez p_2 .

Dessinez (à l'aide d'un logiciel) le graphe de f , le graphe de l'approximation linéaire et le graphe de p_2 près de $x = 1$. Est-ce que p_2 est une meilleure approximation de f que l'approximation linéaire ?

Question 5.46 

Utilisez une approximation quadratique (i.e. un polynôme de Taylor de degré 2) pour estimer chacune des valeurs suivantes :

a) 1.002^{2001} b) $\sin(0.02)$ c) $\cos(-0.02)$

Question 5.47 

Soit $f(x) = x^2$. Utilisez une approximation linéaire pour estimer la valeur de la fonction au point $x = 1.1$. Faite de même au point $x = 0.9$. Tracez le graphe de la fonction et le graphe de l'approximation linéaire considérée. Est-ce que l'approximation linéaire surestime

ou sous-estime la valeur exacte ? Expliquez votre réponse à la question précédente à partir des graphes que vous avez tracés.

Question 5.48

Utilisez une approximation linéaire (i.e. un polynôme de Taylor de degré un) pour estimer $\sqrt{1.1}$ et $\sqrt{0.9}$. Comparez avec les valeurs exactes. Pour chaque approximation, déterminez si on a une surestimation ou une sous-estimation. Expliquez à l'aide du graphe de $f(x) = \sqrt{x}$ pourquoi on a une surestimation ou une sous-estimation.

Question 5.49

Donnez le polynôme de Taylor de degré trois de $h(x) = \ln(x)$ au voisinage de $x = 1$.

Question 5.50

Donnez le polynôme de Taylor de degré trois de $p(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ au voisinage de $x = 0$. Aucun calcul est nécessaire si vous avez bien compris la théorie.

Question 5.51

Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. Utilisez un polynôme de Taylor de degré 3 pour estimer la valeur de $f(3.1)$.

Question 5.52

Soit $p(x) = 7x^9 - 8x^6 - 5x^3 + 2x^2 - 8$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\frac{d^9 p}{dx^9}(x) > 0$? Justifiez votre réponse.

Question 5.53

Trouver le polynôme de Taylor p_k de degré k de $\cos(x)$ près de l'origine tel que $p_k(0.5)$ soit une approximation de $\cos(0.5)$ avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-6} . Quelle est la valeur de l'approximation donnée par votre polynôme de Taylor ? Comparez avec la valeur exacte.

Question 5.54

Donnez le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = xe^{x^2-2}$ pour x près de l'origine. Donnez une borne supérieure pour l'erreur de troncature si l'on utilise ce polynôme de Taylor pour estimer $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 0.2]$.

Question 5.55

Soit

$$b(t) = \frac{1}{1+t} .$$

- a) Utilisez une approximation linéaire au point $t = 0$ pour estimer $b(1.1)$.
- b) Utilisez une approximation linéaire au point $t = 1$ pour estimer $b(1.1)$.
- c) Utilisez la sécante qui passe par les points $(0, b(0))$ et $(1, b(1))$ pour estimer $b(1.1)$.
- d) Tracez le graphe des tangentes et de la sécante qui représentent les méthodes d'approximations qui ont été utilisées précédemment.
- e) Laquelle des méthodes donne la meilleure approximation de $b(1.1)$? Pourquoi?

Question 5.56

Utilisez un polynôme de Taylor de degré suffisamment grand pour calculer la limite suivante :

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h - h^2/2}{h^3}$

c) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \theta}{\theta - \pi/2}$

Question 5.57

Utilisez la règle de l'Hospital pour déterminer laquelle des fonctions suivantes tend plus rapidement vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par la droite.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{e^x - 1} .$$

Question 5.58

Soit $\alpha(t) = \frac{5t}{e^{2t}}$. Tracez le graphe de cette fonction. Utilisez la règle de l'Hospital pour trouver l'asymptote horizontale pour $t > 0$.

Question 5.59

Plusieurs fonctions utilisées pour décrire l'absorption d'un produit sont de la forme

$$\alpha(t) = \frac{Ar(t)}{k + r(t)}$$

où

1. A et k sont des constantes positives,
2. $r(0) = 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ et
4. $r'(t) > 0$ pour $t > 0$.

Par exemple, considérons la fonction d'absorption

$$\alpha(t) = \frac{At^2}{k + t^2} .$$

- a) Déterminez $r(t)$ dans cette fonction.
- b) Montrez que $\alpha(t)$ est une fonction strictement croissante pour $t > 0$.
- c) Utilisez la règle de l'Hospital pour calculer la limite de $\alpha(t)$ lorsque t tend vers plus l'infini.

Question 5.60

Dans chacune des situations ci-dessous, déterminez la limite de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers la valeur donnée, et laquelle des deux fonctions approche cette limite le plus rapidement.

a) $f(x) = 0.1x^{0.5}$, $g(x) = 30 \ln(x)$ et $x \rightarrow \infty$.

b) $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = x^{-2}$ et $x \rightarrow \infty$.

c) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\ln(x)$ et $x \rightarrow 0^+$.

Question 5.61

Évaluez les limites suivantes.

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t+t^2}{1+t}$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+t}{1+t+t^2}$

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{1+\ln(1+z)}$

d) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z}{1+\ln(1+z)}$

Question 5.62

Évaluez les limites suivantes si elles existent.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc(5x) \sin(3x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc(x) - \cot(x))$

Question 5.63

Utilisez la méthode de Newton pour trouver une approximation de la racine réelle positive de

$$x^4 - 20 = 0 .$$

Utilisez $x_0 = 2$ et arrêtez lorsque $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$.

Question 5.64

Utilisez la Méthode de Newton pour estimer la valeur de $\sqrt[3]{30}$. Arrêtez après trois itérations. Faites le graphe de f et illustrez la première itération de la Méthode de Newton.

Suggestion : Considérez $f(x) = x^3 - 30 = 0$.

Question 5.65

Utilisez la méthode de Newton pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$ s'il y en a une. Pour ce faire vous devez :

a) vérifiez avec un graphe qu'il y a effectivement une seule solution positive.

b) Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe une solution entre 1 et 2. Cela va vous permettre de choisir la valeur de x_0 qui sera utilisée par la méthode de Newton.

c) Faire au moins trois itérations de la méthode de Newton.

Question 5.66 (Méthode de la sécante)

Dans la formule

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

si on remplace $f'(x_i)$ par $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ (une approximation de $f'(x_i)$ si x_{i-1} est très près de x_i) on obtient la méthode de la sécante

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^{-1} , \quad i = 1, 2, 3, \dots .$$

Notez qu'il faut initialement choisir deux points, x_0 et x_1 , pour pouvoir utiliser la méthode de la sécante alors qu'un seul était nécessaire pour la méthode de Newton.

- a) Soit $f(x) = x^2 - 2$ et soit x_i et x_{i+1} deux points à la droite de $\sqrt{2}$. Tracez la sécante qui passe par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et montrez que l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x donne la formule pour la méthode de la sécante.
- b) Utilisez la méthode de la sécante pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$. L'information obtenu à la question 65 pourrait être utile pour choisir les valeurs de x_0 et x_1 . Faites au moins trois itérations.

Question 5.67

Le volume (en μm^3) d'un organisme après n heures est donné par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1.5v_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ v_0 &= 1350 \end{aligned}$$

Combien faut-il d'heures pour que l'organisme atteigne un volume d'au moins $3250 \mu\text{m}^3$?

Question 5.68

Une population de bactéries satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 2p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où p_n est le nombre moyen de bactéries par éprouvette n heures après le début de l'expérience.

- a) Combien doit-on avoir de bactéries à 9 heures si on veut avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?
- a) Combien doit-on avoir de bactéries initialement si on veut avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?

Question 5.69

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Trouvez la solution de ce système et tracez le graphe de la solution pour $0 \leq i \leq 10$. Tracez le graphe de la fonction itérative. Quelle est la valeur de y_{20} ?

Question 5.70

Un population est gouvernée par le système dynamique discret $b_{i+1} = 0.7b_i$. Par exemple, b_i est le nombre d'individus après i heures. Si $b_0 = 5.0 \times 10^5$, donnez la formule générale pour la solution b_i du système dynamique discret. Trouvez la valeur de i pour que $b_i \approx 10^5$. Tracez le graphe de b_i .

Question 5.71

On considère deux populations animales qui occupent un même territoire. La première population est décrite par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2.5x_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ x_0 &= 10^2 \end{aligned} \tag{5.10.1}$$

et la deuxième population par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 2y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ y_0 &= 10^3 \end{aligned} \tag{5.10.2}$$

Déterminez si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers $+\infty$? Si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers plus l'infini, dites laquelle?

Question 5.72

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 4 - x_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative? Calculez x_1 , x_2 et x_3 . Donnez une formule pour la solution de ce système.

Question 5.73

Supposons que la hauteur d'un arbre satisfait le système dynamique discret

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= h_i + 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ h_0 &= 1 \end{aligned}$$

où h_i est la hauteur de l'arbre en mètres i années après de début des mesures. Trouvez la solution de ce système dynamique discret. Quelle est la hauteur de l'arbre après 20 ans? Est-ce que ce modèle est réaliste?

Question 5.74

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2x_i + 30 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_0 &= 10 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative? Donnez la solution de ce système.

Question 5.75

Les données suivantes représentent le nombre moyen de bactéries après 10 minutes.

Nombre de bactéries	
nombre initial	nombre final
1220	1830
1860	2790
1080	1620
1640	2460
1540	2310
1420	?

Si le nombre de bactéries est gouverné par un système dynamique discret de la forme $v_{i+1} = av_i + b$ où v_i est le nombre à tous les 10 minutes, trouvez les valeurs de a et b . Complétez le

tableau. Si le nombre initial est $v_0 = 1420$, quel sera le nombre après une heure ? Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.76

Les données suivantes représentent la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Si la concentration est gouverné par un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = ap_n + b$, trouvez les valeurs de a et b . Tracez le graphe de la solution pour $0 \leq n \leq 10$. Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.77

On considère le système dynamique discret

$$M_{i+1} = 0.75M_i + 2 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.10.3)$$

- a) Trouvez la solution générale de ce système dynamique discret.
- a) Trouvez les cinq premières valeurs de l'orbite de $M_0 = 16$.
- c) Tracez la graphe de la solution de ce système pour $M_0 = 16$.
- d) Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système.
- e) Sans itérer le système dynamique discret, trouvez la valeur de M_i pour $i = 60$ lorsque $M_0 = 10$.

Question 5.78

Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret

$$b_{i+1} = 2b_i - 5 .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles le graphe de la fonction itérative est au-dessus de la droite $y = x$ et celles pour lesquelles le graphe est en dessous de la droite $y = x$

Question 5.79

Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Prenez soin de bien identifier les axes.

Question 5.80

Considérez le système dynamique discret

$$w_{i+1} = -0.5w_i + 3 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$w_0 = 0.2$$

Quelle est la fonction itérative ? Trouvez le point d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.81

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= 0.5z_i + 8 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ z_0 &= 2 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Trouvez le ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.82

Revenons au problème de médication de la question 76 où on vous a demandé de trouver un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = ap_n + b$ associé aux données du tableau des concentrations d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Trouvez le point ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.83

On considère une population de bactéries qui double à toutes les heures mais à laquelle on enlève 10^6 bactéries à la fin de chaque heure. Si initialement on a 3×10^6 bactéries, donnez le système dynamique discret associé à ce problème. Trouvez la solution et tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Quel sera le système dynamique discret si on enlève 10^6 bactéries au début de chaque heure ? Répondre aux mêmes questions que précédemment pour ce nouveau système dynamique. Aurons-nous le même graphe en forme de toile d'araignée que pour le système dynamique discret précédent ?

Question 5.84

Un médicament est administré à un patient à tous les jours. Les doses de ce médicament sont données dans le tableau suivant :

jour	0	1	2	3
Médicament (mg/l)	0	2	3.2	3.92

Si on sait que le système dynamique discret est donné par une fonction itérative de la forme $x_{i+1} = mx_i + b$, trouvez cette fonction et le système dynamique discret qui si rapporte.

Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système dynamique discret et tracez le graphe en forme de toile d'araignée associé à la condition initiale donnée dans le tableau ci-dessus. Quelle est le point d'équilibre de ce système ?

Question 5.85

On considère les système dynamique discret

$$x_{n+1} = 0.9x_n + 8 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Trouvez le point d'équilibre de ce système et déterminez sa stabilité de deux façons.

1. Avec le graphe en forme de toile d'araignée.
2. Sans le graphe en forme de toile d'araignée.

Question 5.86

Considérons le système dynamique discret $y_{n+1} = 1 - 1.5(y_n - 1)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

- a) Trouvez les points d'équilibre.
- b) Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.
- c) Tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour une orbite du système dynamique discret.
- d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre pour les systèmes dynamiques discrets.

Question 5.87

Donnez la fonction itérative du système dynamique discret $x_{i+1} = x_i^2 + 2$ et évaluez cette fonction à $x = 0$, $x = 2$ et $x = 4$. On note que cette fonction itérative n'est pas linéaire.

Question 5.88

Tracez le graphe de la fonction itérative $f(x) = e^{-x}$ pour $0 \leq x \leq 2$ et déterminez s'il y a au moins un point d'équilibre du système dynamique discret associé à cette fonction itérative.

Question 5.89

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

où $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Calculez les valeurs de x_1, x_2, x_3, \dots Trouvez la solution générale.

Question 5.90

Tracez le graphe de la fonction itérative

$$f(y) = y^2 - 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2 .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre.

Question 5.91

Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que le système dynamique

discret $x_{i+1} = \cos(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$, a un point d'équilibre.

Question 5.92

Trouvez si possible les points d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{x_i - 1} \quad , \quad x_i > 1 .$$

Notez que la fonction itérative de ce système dynamique discret n'est pas une fonction affine.

Question 5.93

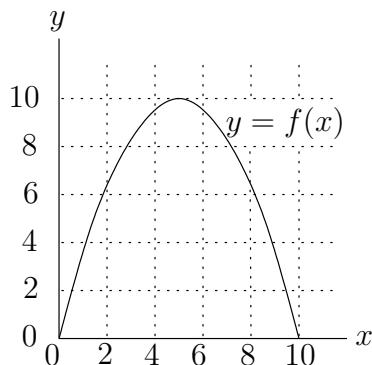
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{x_i}{x_i + 1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.94

Le graphe d'une fonction itérative f est donnée par la figure suivante



Donnez les coordonnées du point d'équilibre (s'il y en a un) du système dynamique discret $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$. Indiquer sur le graphe de la fonction itérative où se trouve le point d'équilibre ; inclure le graphe de la droite $y = x$ dans votre dessin.

Question 5.95

Considérez le système dynamique discret

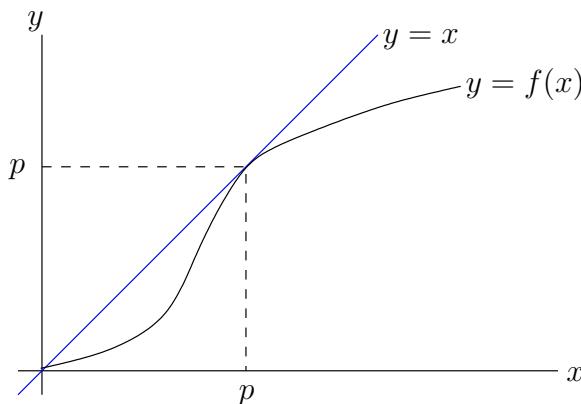
$$x_{i+1} = \frac{\alpha x_i}{1 + x_i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Donnez les valeurs de α pour lesquelles :

- a) le système dynamique discret a un seul point d'équilibre.
- b) le système dynamique discret a un point d'équilibre négatif.
- c) le système dynamique discret a un point d'équilibre positif.

Question 5.96

Le graphe d'une fonction f est donné dans la figure suivante.



On remarque que le graphe de la fonction f est tangente à la droite $y = x$ au point d'équilibre p . De plus, le graphe de la fonction f est en dessous de la droite $y = x$ près de p . Ces deux propriétés sont responsables d'une phénomène très important qui se produit lorsque le graphe de f est légèrement déformé. Le comportement du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ change lorsque le graphe de f est déformé. En particulier, le nombre de points d'équilibre change. Ce phénomène est appelé **bifurcation**.

Si on fait légèrement pivoter le graphe de f autour de l'origine, le nouveau graphe de f satisfait toujours $f(0) = 0$ car l'origine est fixe pour la rotation.

Dans les trois cas suivants, trouvez les points d'équilibre et leur stabilité, et tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour deux orbites du système dynamique discret généré par le nouveau graphe de f .

- a) Le graphe de f demeure à sa position initiale.
- b) Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens des aiguilles d'une montre.
- c) Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

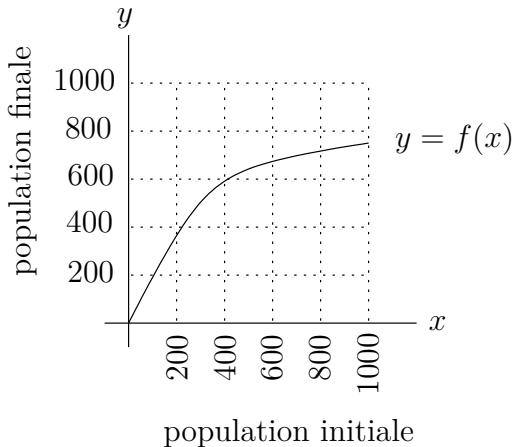
Question 5.97

Soit x_n , le nombre d'individus dans une population n semaines après le début de l'étude de cette population. Si le taux de reproduction (nombre de descendants par habitant) à la n^e semaine est donné par $2.5x_n/(1+x_n^2)$, donnez un système dynamique discret pour décrire cette population. Pour le système dynamique discret que vous avez trouvé :

- a) Trouvez les points d'équilibre.
- b) Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.
- c) Déterminez la stabilité des points d'équilibre.
- d) Décrire en quelques mots le comportement de la population selon la condition initiale.

Question 5.98

Le graphe suivant représente le graphe d'une fonction itérative f . Trouvez le point d'équilibre non-nul et déterminez sa stabilité (sans tracer le graphe en forme de toile d'araignée).

**Question 5.99** 

Dessinez le graphe d'un fonction itérative f ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée qui lui est associé dans chacun des cas suivants.

Soit p le point d'équilibre du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

- a) Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p) , et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x < p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x > p$.
- b) Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p) , et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x > p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x < p$.

Dans chacun des cas, quelle est la pente de la droite tangente au graphe de f au point (p, p) ? Est-ce que la théorie peut être utilisé pour déterminer la stabilité du point d'équilibre?

Question 5.100 

On considère une population de bactéries dans un milieu donné. Suite à une mutation génétique, une nouvelle famille de bactéries est formée à l'intérieur de notre population initiale. Soit p_i la fraction de la population total de bactéries qui appartient à cette nouvelle famille de bactéries i heures après son apparition. p_i satisfait le système dynamique discret

$$p_{i+1} = \frac{r_1 p_i}{r_1 p_i + r_2 (1 - p_i)} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

où r_1 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la nouvelle famille de bactéries et r_2 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la famille initiale de bactéries. Si $r_1 = 1.5$ et $r_2 = 2$, utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1$.

Question 5.101 

On considère une population dont le taux moyen de reproduction par individu et par heure est donné par $t(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ où x est le nombre d'individus.

- a) Si $x = x_n$ est le nombre d'individus par cm^2 après n heures, donnez le système dynamique discret satisfait par x_n .

- b) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu.
- c) Dessinez le graphe de la fonction itérative ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée.
- d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre si possible.
- e) décrire en une ou deux phrases le comportement de la population.

Question 5.102 

On considère l'équation logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

avec $\mu = 2$. Trouvez le point d'équilibre non-nul $x = p$ de ce système dynamique discret. Quelle est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction itérative au point (p, p) ? Est-ce que le point d'équilibre p est (asymptotiquement) stable? Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de ce système. Que peut-on dire au sujet de la vitesse de convergence des orbites vers le point d'équilibre p ?

Question 5.103 

On considère le système dynamique discret

$$M_{i+1} = M_i - f(M_i)M_i + 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

où M_i est la concentration d'un médicament dans le sang i heures après le début du traitement. $f(M_i)$ est la fraction du médicament qui est absorbée par l'organisme à chaque heure et le terme 1 représente une dose du médicament administrée à toutes les heures.

- a) Si $f(M) = \frac{M}{2+M}$, on remarque que $M = 2$ est un point d'équilibre pour le système dynamique discret. Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $M = 2$. Est-ce que les orbites oscillent autour du point d'équilibre?
- b) Réponde aux questions en (a) pour la fonction $f(M) = 1.5M^2/(4 + M^2)$.

Question 5.104 

On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n^2) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

avec $\mu = 2$.

- a) Quelle est la fonction itérative?
- b) Trouvez les points d'équilibre de ce système dynamique discret.
- c) Déterminez la stabilité des points d'équilibre.

Question 5.105 

On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n^2) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

- a) Déterminez les valeur de $\mu \geq 0$ pour que le point d'équilibre $x = 0$ soit (asymptotiquement) stable ? Instable ?
- b) Déterminez les valeur de $\mu \geq 0$ pour que le point d'équilibre plus grand que 0 soit (asymptotiquement) stable ? Instable ?

Question 5.106

On considère une espèce végétale sur un territoire donné. Plus la densité est grande, plus les plantes sont petites. Plus une plante est petite, moins grand est le nombre de graines qu'elle produit. On suppose que le nombre moyen N de graines produites chaque année par une plante de taille moyenne S^{-1} est $N = S - 1$. Si l'espèce produit N graines, alors la taille moyenne des plantes l'année suivante sera $S = 100/N$.

- a) Déterminez le nombre de graines produites la deuxième et la troisième année si le nombre de graines produites la première année est $N_0 = 20$.
- b) Donnez un système dynamique discret qui décrit le nombre de graines N_i après i années.
- c) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).
- d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvé en (c) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.
- e) Tracez le graphe de la fonction itérative ainsi que le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).

Question 5.107

Le modèle logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

que nous avons vu en classe est un système dynamique discret où le taux de reproduction (i.e. le nombres de descendants par individu) est une fonction strictement décroissante de x_n (i.e. le facteur $r(1 - x_n)$ dans le modèle logistique). Pour le modèle logistique, le taux de reproduction de la population diminue avec l'augmentation de la population. Il ne faut pas oublier que x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Par contre, il y a des modèles où le taux de reproduction augmente avec l'augmentation de la population. Donnez le système dynamique discret associé à la population dont le taux de reproduction est donné par $0.5 + 0.5x_n^2$ où x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

- a) Donnez la fonction itérative du système dynamique discret que vous avez trouvé.
- b) Trouvez les points d'équilibre avec leur stabilité.
- c) Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de quelques orbites.

1. On ne spécifie pas les unités de S mais on pourrait utiliser le volume, la masse, ..., de la plante. Ce n'est pas important pour résoudre le problème

d) Expliquez en quelques mots ce qui peut arriver à la population selon la condition initiale.

Question 5.108 

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2N_i(1 - N_i) - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter ; donc $0 \leq N_i \leq 1$ pour tout i . Le nombre h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

- a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?
- b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?
- d) Quelle est cette récolte ?

Question 5.109 

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{n+1} = 2.5N_n(1 - N_n) - hN_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

où N_n est le nombre d'individus à la n^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter ; donc $0 \leq N_n \leq 1$ pour tout n . h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

- a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?
- b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?
- d) Montrez que le point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c) est (asymptotiquement) stable à l'aide du théorème de stabilité pour les points d'équilibre.
- e) Tracez le graphe de la fonction itérative et un graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c).

Question 5.110 

Une population est gouvernée par le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 1.5x_n(1 - x_n) - hx_n$$

où x_n est le nombre d'individus après n semaines et h est un paramètre.

- a) Trouvez les points d'équilibre en fonction de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?
- b) Quelle est la récolte à long terme en fonction de l'état d'équilibre (non-nul) de la population ?

- c) Trouvez l'efficacité h qui donnera la récolte maximale à long terme.
- d) Quelle est la récolte maximale à long terme ?
- e) Déterminez la stabilité de l'état d'équilibre de la population pour l'efficacité trouvée en (c) ?

Question 5.111 

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = \frac{2.5N_i}{1 + N_i} - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter. h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

- a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?
- b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?
- d) Déterminez la stabilité du point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c) à l'aide du théorème de stabilité pour les point d'équilibre.

Question 5.112 

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2.5N_i e^{-N_i} - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année. h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

- a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?
- b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?

Question 5.113 

Une population de proies est décrite par le système dynamique discret

$$x_{i+1} = 1.5 x_i e^{-x_i} - h x_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où x_i est le nombre de proies après i années et h est un facteur d'efficacité des prédateurs.

- a) Trouvez le point d'équilibre $p(h)$ de la population de proies en fonction de h .
- b) Donnez la formule $R(h) = hp(h)$ qui représente le nombre de proies capturées par les prédateurs chaque année (appelé la récolte).
- c) Utilisez la Méthode de Newton pour trouver la valeur de h qui maximise à long terme la quantité de proies capturées chaque année.



6.1 Primitives et intégrales indéfinies

Définition 6.1.1

Une fonction $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de la fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple 6.1.2

$F(x) = \sin(x)$ est une primitive de $f(x) = \cos(x)$ car $F'(x) = \cos(x) = f(x)$ pour tout x .
 $F(x) = x^7/7$ est une primitive de $f(x) = x^6$ car $F'(x) = x^6 = f(x)$ pour tout x . $F(x) = \ln|x|$ est une primitive de $f(x) = 1/x$ car $F'(x) = 1/x = f(x)$ pour tout $x \neq 0$. ♣

Si F est une primitive de f alors, quelle que soit la constante C , la fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$ est aussi une primitive de f car

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$. Il y a donc une infinité de primitives de f . On a une différente primitive de f pour chaque valeur de C .

En fait, la différence entre deux primitives de f est toujours une constante. Supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de f et posons $G = F_1 - F_2$. On a

$$G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pour tout $x \in]a, b[$. Donc, G est une fonction constante ; c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $G(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi, $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$.

Remarque 6.1.3 ☺

En fait, la justification précédente assume que si $G'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors G est une fonction constante. On utilise l'interprétation de la dérivée comme la pente de la tangente à la courbe pour tirer cette conclusion. Une démonstration rigoureuse fait appel au Théorème des accroissements finis, le théorème 4.4.6.

En effet, soit $x \in]a, b[$ et $c \in]a, b[$. Grâce au Théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe ξ entre x and c (où ξ dépend de x and c) telle que

$$G(x) - G(c) = g'(\xi)(x - c) .$$

Puisque $G''(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, on a que $G(x) - G(c) = 0$. Comme ceci est vrai pour $x \in]a, b[$, on a $G(x) = G(c)$ pour tout $x \in]a, b[$. ♠

Définition 6.1.4

L'intégrale indéfinie d'une fonction f est la famille de primitives pour cette fonction. On dénote l'intégrale indéfinie par $\int f(x) dx$. Ainsi, si F est une primitive de f , on a

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x .

Le symbole dx n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x . Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Exemple 6.1.5

Si on utilise les résultats de l'exemple précédent, on obtient les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C , \quad \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C .$$



À partir des formules de dérivation que nous avons présentées à la section 4.5, on peut construire la table des intégrales que l'on retrouve dans le tableau 6.1.

Le prochain résultat est une conséquence de la linéarité de la dérivée.

Théorème 6.1.6

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$. Par conséquent,

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx .$$

La démonstration de ce théorème est très simple. Par linéarité de la dérivée, on a

$$\frac{d}{dx} (aF(x) + bG(x)) = a \frac{d}{dx} F(x) + b \frac{d}{dx} G(x) = af(x) + bg(x)$$

pour tout x . Donc, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	contraintes
x^α	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$	$\alpha \neq -1$ et x^α est définie
$1/x$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x) + C$	$ x < 1$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x) + C$	

TABLE 6.1 – Quelques intégrales indéfinies

Le théorème précédent peut être résumé en une seule phrase. L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies des fonctions de la somme, et l'intégrale indéfinie du produit d'une fonction avec une constante est le produit de l'intégrale indéfinie de la fonction avec cette constante.

Exemple 6.1.7

Calculer l'intégrale indéfinie de $g(x) = 5x^{-8} + 3\cos(x) + 7/\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}
 \int g(x) dx &= \int \left(5x^{-8} + 3\cos(x) + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= 5 \int x^{-8} dx + 3 \int \cos(x) dx + 7 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= 5 \left(\frac{x^{-7}}{-7} \right) + 3 \sin(x) + 7 \arcsin(x) + C \\
 &= -\frac{5}{7x^7} + 3 \cos(x) + 7 \arcsin(x) + C .
 \end{aligned}$$



Exemple 6.1.8

Si $f'(x) = x^4 + 5/(1+x^2)$ et $f(0) = 2$, trouver f .

La fonction f est une primitive de $x^4 + 5/(1+x^2)$. L'intégrale indéfinie de $x^4 + 5/(1+x^2)$ est

$$\int \left(x^4 + \frac{5}{1+x^2} \right) dx = \int x^4 dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^5}{5} + 5 \arctan(x) + C .$$

La fonction f est donnée par $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + C$ où C est choisi pour satisfaire $f(0) = 2$. On doit donc avoir $C = 2$ et la fonction f cherchée est $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + 2$.



Exemple 6.1.9

L'exemple suivant se trouve dans (presque) tous les livres de calcul différentiel qui ont été écrits. On va donc continuer la tradition pour ne pas paraître trop radical.

Si $p(t)$ est la position d'un objet (se déplaçant en ligne droite), sa vitesse au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la position) est $v(t) = p'(t)$. La position est une primitive de la vitesse. L'accélération au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la vitesse) est $a(t) = v'(t) = p''(t)$. La vitesse est une primitive de l'accélération.

Avec cette information, on peut trouver le temps que prendra un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur de 100 m pour atteindre le sol. On peut aussi trouver la vitesse à laquelle l'objet frappe le sol. On suppose que la friction de l'air n'a aucun effet sur l'objet.

Au départ, la position de l'objet est $p(0) = 100$ m. Puisqu'on laisse tomber l'objet, sa vitesse initiale est $v(0) = 0$ m/s.

L'accélération dû à l'attraction terrestre est bien connue et est -9.8 m/s^2 . Nous utilisons le signe négatif pour l'accélération pour indiquer que la direction positive du déplacement est vers le haut. Ainsi, $a(t) = -9.8$ pour tout t .

Puisque

$$\int a(t) dt = \int -9.8 dt = -9.8t + C$$

pour une constante C , on a $v(t) = -9.8t + C$. La constante C est déterminée par la condition $v(0) = 0$. Ainsi, $C = 0$ et $v(t) = -9.8t$ m/s.

De même, puisque

$$\int v(t) dt = \int -9.8t dt = -9.8 \int t dt = -9.8 \frac{t^2}{2} + C$$

pour une constante C , on a $p(t) = -4.9t^2 + C$. La constante C est déterminée par la condition $p(0) = 100$. Ainsi, $C = 100$ et $p(t) = -4.9t^2 + 100$ m.

L'objet va toucher le sol lorsque $p(t) = -4.9t^2 + 100 = 0$. On trouve $t = 4.5175395\dots$ secondes.

Donc, l'objet prend $t = 4.5175395\dots$ secondes pour atteindre le sol qu'il frappe à une vitesse de $v(4.5175395\dots) = -9.8 \times 4.5175395\dots = -44.271887\dots$ m/s. On note que le signe négatif pour la vitesse indique seulement que l'objet se dirige vers le sol.



6.2 Techniques d'intégration

Nous présentons quelques règles qui nous permettront de transformer une intégrale indéfinie complexe en une autre intégrale indéfinie qui fait appel seulement à des intégrales indéfinies simples comme celles que l'on retrouve dans le tableau 6.1.

6.2.1 Substitutions

La première méthode d'intégration que nous allons voir nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie de fonctions composées comme $\sin(4x)$, $\sqrt{x+7}$, etc.

Exemple 6.2.1

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\text{a)} \int e^{5x} dx \quad \text{b)} \int x \sin(x^2) dx \quad \text{c)} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$$

a) On utilise la règle de la dérivée de fonctions composées pour obtenir

$$\int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

car

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{5x}}{5} \right) = \frac{5e^{5x}}{5} = e^{5x} .$$

b) On a

$$\int x \sin(x^2) dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$$

car

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{-\cos(x^2)}{2} \right) = \frac{2x \sin(x^2)}{2} = x \sin(x^2) .$$

c) ?



Alors que les deux premières intégrales indéfinies étaient assez simple à deviner, il en est autrement de l'intégrale indéfinie en (c).

Nous présentons une méthode d'intégration basée sur la règle de la dérivée de fonctions composées qui nous permettra de trouver l'intégrale indéfinie de $x^3/\sqrt{x^2 + 5}$.

On peut récrire l'intégrale indéfinie en (a) de l'exemple précédent pour obtenir

$$\int 5e^{5x} dx = e^{5x} + C .$$

Cette intégrale indéfinie est de la forme

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \tag{6.2.1}$$

où $f(x) = e^x$, $g(x) = 5x$, et $F(x) = e^x$ est la primitive de f . De même, l'intégrale indéfinie en (b) de l'exemple précédent peut s'écrire

$$\int 2x \sin(x^2) dx = -\cos(x^2) + C .$$

C'est une intégrale indéfinie de la forme (6.2.1) où $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$, et $F(x) = -\cos(x)$ est la primitive de f .

Est-ce que la formule (6.2.1) est toujours vraie ?

Soit F une primitive d'une fonction f et g une fonction différentiable. Si f et F sont définies sur l'image de g , alors la fonction composée $F \circ g$ est différentiable et on a

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \frac{d}{dy} F(y) \Big|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x) = f(y) \Big|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x) = f(g(x))g'(x) .$$

Ainsi, $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. On obtient le résultat suivant :

Théorème 6.2.2

On suppose que

1. g est une fonction différentiable,
2. F est la primitive d'une fonction f , et
3. f et F sont définies sur l'image de g .

Alors, $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. On en déduit la **règle de substitution** (ou **méthode de changement de variable**) suivante :

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy \Big|_{y=g(x)} = F(g(x)) + C .$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose $y = g(x)$, alors $dy = g'(x) dx$ et

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int f(y) dy$$

où il ne faut pas oublier de remplacer y par $g(x)$ après avoir calculé l'intégrale indéfinie de f . L'expression $dy = g'(x) dx$ n'est pas une égalité algébrique, elle indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y .

Retournons à l'exemple précédent avec la règle de substitution en main.

Exemple 6.2.3

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

$$\textbf{a)} \int e^{5x} dx \quad \textbf{b)} \int x \sin(x^2) dx \quad \textbf{c)} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$$

a) Si on pose $y = 5x$, on a $dy = 5 dx$ et

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} \times 5 dx = \frac{1}{5} \int e^y dy \Big|_{y=5x} = \frac{1}{5} e^y \Big|_{y=5x} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C .$$

b) Si on pose $y = x^2$, on a $dy = 2x \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2) \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin(x^2) \times 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(y) \, dy \Big|_{y=x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos(y) \Big|_{y=x^2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C . \end{aligned}$$

c) Si on pose $y = x^2 + 5$, on a $x^2 = y - 5$ et $dy = 2x \, dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} \times 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{y-5}{\sqrt{y}} \, dy \Big|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{2} \int (y^{1/2} - 5y^{-1/2}) \, dy \Big|_{y=x^2+5} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^{3/2} - 10 y^{1/2} \right) \Big|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 5)^{3/2} - 5(x^2 + 5)^{1/2} + C . \end{aligned}$$



Exemple 6.2.4

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \, dx$	b) $\int \frac{1}{1+x^{1/3}} \, dx$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}} \, dx$	d) $\int \frac{1}{x^2+2x+10} \, dx$

a) On utilise la substitution $y = \sin(x)$. On a $dy = \cos(x) \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \, dx &= \int \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \, dx = \int \frac{1-\sin^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \, dx \\ &= \int \frac{1-y^2}{\sqrt{y}} \, dy \Big|_{y=\sin(x)} = \int (y^{-1/2} - y^{3/2}) \, dy \Big|_{y=\sin(x)} \\ &= \left(2y^{1/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} \right) \Big|_{y=\sin(x)} + C \\ &= 2(\sin(x))^{1/2} - \frac{2}{5}(\sin(x))^{5/2} + C . \end{aligned}$$

b) Posons $y = 1 + x^{1/3}$. Puisque

$$\frac{dy}{dx} (1 + x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} ,$$

on obtient

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}} \, dx .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^{1/3}} dx &= \int \frac{3x^{2/3}}{1+x^{1/3}} \left(\frac{1}{3x^{2/3}} \right) dx = \int \frac{3(y-1)^2}{y} dy \Big|_{y=1+x^{1/3}} \\ &= 3 \int \left(y - 2 + \frac{1}{y} \right) dy \Big|_{y=1+x^{1/3}} = 3 \left(\frac{y^2}{2} - 2y + \ln|y| \right) \Big|_{y=1+x^{1/3}} + C \\ &= \frac{3}{2}(1+x^{1/3})^2 - 6(1+x^{1/3}) + 3\ln|1+x^{1/3}| + C. \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé la relation $y = 1 + x^{1/3}$ pour déduire que $x^{1/3} = y - 1$. Ainsi, $x^{2/3} = (y-1)^2$.

c) On remarque que

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} dx.$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin(y) + C.$$

Si on pose $y = \frac{3x^2}{4}$, on obtient $dy = \frac{3x}{2} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} \left(\frac{3x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \Big|_{y=3x^2/4} = \frac{1}{6} \arcsin(y) \Big|_{y=3x^2/4} + C \\ &= \frac{1}{6} \arcsin\left(\frac{3x^2}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

d) On remarque que $x^2 + 2x + 10$ n'a pas de racines réelles (lorsque le dénominateur sera un polynôme qui peut être factorisé, on fera appel aux fractions partielles que l'on verra prochainement). Si on complète le carré, on peut écrire

$$x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 = (x+1)^2 + 3^2.$$

On doit donc évaluer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} dx = \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} dx.$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(y) + C.$$

Pour ce faire, posons $y = \frac{x+1}{3}$. Ainsi, $dy = \frac{1}{3} dx$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y=(x+1)/3} = \frac{1}{3} \arctan(y) \Big|_{y=(x+1)/3} + C \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.\end{aligned}$$



À l'occasion, il est préférable d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse. On utilise $x = g(y)$ pour obtenir

$$\int f(x) dx = \int f(g(y))g'(y) dy$$

Cela peut sembler contradictoire car on a l'impression que l'intégrande à droite, $f(g(y))g'(y)$, sera plus compliquée que l'intégrande à gauche, $f(x)$. L'exemple qui suit nous prouve le contraire.

Exemple 6.2.5

Évaluer l'intégrale indéfinie suivante.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$$



Pour évaluer l'intégrale de fonctions trigonométriques, on a souvent recours aux identités trigonométriques. Les trois plus importantes identités sont :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \quad \text{et} \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)).$$

On réfère aux deux dernières formules par le nom de **formules de l'angle double**.

Les formules d'addition suivantes sont fréquemment utilisées pour calculer des intégrales en mécanique.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))\end{aligned}$$

et

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Les trois dernières formules sont déduites des deux formules qui les précèdent.

Finalement, si l'intégrande contient les fonctions trigonométriques tan, cot, sec et csc, il est généralement préférable de réécrire ces fonctions en termes de sin et cos, et de simplifier l'intégrande. Il y a cependant quelques exceptions où les identités suivantes peuvent être utile.

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) \quad \text{et} \quad \cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha) .$$

Exemple 6.2.6

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}) \quad \int \tan(x) \, dx & \mathbf{b}) \quad \int \sin^2(x) \, dx & \mathbf{c}) \quad \int \sin^3(x) \, dx \\ \mathbf{d}) \quad \int \sin^3(x) \cos^2(x) \, dx & \mathbf{e}) \quad \int \sec(x) \, dx & \mathbf{f}) \quad \int \csc(x) \, dx \end{array}$$

a) Par définition de la tangente, on a

$$\int \tan(x) \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \tan(x) \, dx &= - \int \frac{1}{\cos(x)} (-\sin(x)) \, dx = - \int \frac{1}{y} \, dy \Big|_{y=\cos(x)} \\ &= - \ln |y| \Big|_{y=\cos(x)} + C = - \ln |\cos(x)| + C . \end{aligned}$$

b) On utilise la formule de l'angle double pour obtenir

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx .$$

Si on pose $y = 2x$, alors $dy = 2 \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2x)) \times 2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos(y)) \, dy \Big|_{y=2x} = \frac{1}{4} (y - \sin(y)) \Big|_{y=2x} + C \\ &= \frac{1}{4} (2x - \sin(2x)) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C . \end{aligned}$$

c) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour écrire

$$\int \sin^3(x) \, dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \, dx .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx &= - \int (1 - \cos^2(x)) (-\sin(x)) dx \\ &= - \int (1 - y^2) dy \Big|_{y=\cos(x)} = - \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=\cos(x)} + C = - \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) \right) + C \\ &= -\cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x) + C . \end{aligned}$$

d) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour obtenir

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx &= - \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) (-\sin(x)) dx \\ &= - \int (1 - y^2) y^2 dy \Big|_{y=\cos(x)} = - \int (y^2 - y^4) dy \Big|_{y=\cos(x)} \\ &= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \Big|_{y=\cos(x)} + C = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + C . \end{aligned}$$

e) Il faut utiliser un petit truc. On a

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \left(\frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} \right) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx .$$

Si on utilise la substitution $y = \sec(x) + \tan(x)$, on obtient

$$dy = (\sec(x) \tan(x) + \sec^2(x)) dx .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \frac{1}{\sec(x) + \tan(x)} (\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)) dx \\ &= \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\sec(x)+\tan(x)} = \ln |y| \Big|_{y=\sec(x)+\tan(x)} + C = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C . \end{aligned}$$

f) Il faut utiliser un petit truc semblable à celui utilisé en (e). On a

$$\int \csc(x) dx = \int \csc(x) \left(\frac{\csc(x) + \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} \right) dx = \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx .$$

Si on utilise la substitution $y = \csc(x) + \cot(x)$, on obtient

$$dy = (-\csc(x) \cot(x) - \csc^2(x)) dx .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \csc(x) dx &= \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x)\cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx \\ &= - \int \frac{1}{\csc(x) + \cot(x)} (-\csc^2(x) - \csc(x)\cot(x)) dx \\ &= - \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} = -\ln|y| \Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C.\end{aligned}$$



Exemple 6.2.7

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int \sin(4x) \cos(3x) dx \qquad \mathbf{b}) \quad \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx$$

a) On utilise l'identité

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

avec $\alpha = 4x$ et $\beta = 3x$ pour obtenir

$$\int \sin(4x) \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(7x) dx.$$

La première intégrale est

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C_1.$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise la substitution $y = 7x$. Donc, $dy = 7 dx$ et

$$\begin{aligned}\int \sin(7x) dx &= \frac{1}{7} \int \sin(7x) \times 7 dx = \frac{1}{7} \int \sin(y) dy \Big|_{y=7x} \\ &= -\frac{1}{7} \cos(y) \Big|_{y=7x} + C_2 = -\frac{1}{7} \cos(7x) + C_2.\end{aligned}$$

On obtient

$$\int \sin(4x) \cos(3x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{14} \cos(7x) + C$$

où $C = (C_2 - C_1)/2$.

b) On peut utiliser une des formules d'addition pour obtenir

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x).$$

Si on substitue cette expression dans l'intégrale

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx,$$

on obtient

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sin(x) \cos(x) dx + \frac{1}{2} \int \cos^2(x) dx .$$

Si on substitue

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} (\sin(x - x) + \sin(x + x)) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

et

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

dans l'intégrale précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) dx + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos(2x) dx . \end{aligned}$$

Pour évaluer la première et la troisième intégrale dans l'expression précédente, on utilise dans les deux cas la substitution $y = 2x$. Donc, $dy = 2 dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(2x) \times 2 dx + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(2x) \times 2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(y) dy \Big|_{y=2x} + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(y) dy \Big|_{y=2x} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(y) \Big|_{y=2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(y) \Big|_{y=2x} + C \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C . \end{aligned}$$



6.2.2 Intégration par parties

Alors que la méthode de substitution nous a permis d'évaluer l'intégrale indéfinie de certaines fonctions composées, la méthode d'intégration par parties nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie du produit de deux fonctions comme xe^x , $x \sin(x)$, etc.

Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) .$$

Ainsi,

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) - f'(x)g(x) .$$

Si on utilise la linéarité de l'intégrale indéfinie, on a

$$\begin{aligned}\int f(x) g'(x) dx &= \int \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) dx - \int f'(x) g(x) dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $f(x)g(x)$ est une primitive de $\frac{d}{dx} (f(x)g(x))$.

Donc, on obtient une primitive de $f(x)g'(x)$ en soustrayant de $f(x)g(x)$ une primitive de $f'(x)g(x)$. En d'autre mots,

Théorème 6.2.8

Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx .$$

Cette formule est connue sous le nom **d'intégration par parties**.

Exemple 6.2.9

Évaluer l'intégrale indéfinie $\int xe^x dx$.

On a $xe^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc, $g(x) = e^x$ et $f'(x) = 1$. Ainsi,

$$\int xe^x dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

car $\int e^x dx = e^x + C$. 

Exemple 6.2.10

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int x^2 \cos(2x) dx$	b) $\int \sqrt{t} \ln(t) dt$
lem] c) $\int x^3 \ln(2x) dx$	d) $\int \ln(x) dx$

a) On a $x^2 \cos(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(2x)$. Donc, $f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(2x)/2$. On obtient

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(2x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) - \int x \sin(2x) dx .\end{aligned}$$

On fait appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int x \sin(2x) dx$. On a $x \sin(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(2x)$. Donc, $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos(2x)/2$. Ainsi

$$\int x \sin(2x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

$$= -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(2x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) - \left(-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) + \frac{x}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) - C. \end{aligned}$$

On remarque que la méthode d'intégration par substitution a été utilisée à deux reprises pour éliminer le polynôme x^2 de l'intégrande.

b) On a $t^{1/2} \ln(t) = f(t) g'(t)$ pour $f(t) = \ln(t)$ et $g'(t) = t^{1/2}$. Donc, $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{2}{3}t^{3/2}$ et

$$\begin{aligned} \int t^{1/2} \ln(t) \, dt &= \int f(t) g'(t) \, dt = f(t)g(t) - \int g(t) f'(t) \, dt \\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} \ln(t) - \frac{2}{3} \int t^{1/2} \, dt = \frac{2}{3}t^{3/2} \ln(t) - \frac{4}{9}t^{3/2} + C. \end{aligned}$$

c) On a $x^3 \ln(2x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \ln(2x)$ et $g'(x) = x^3$. Donc, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^4/4$ et

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln(2x) \, dx &= \int f(x) g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{16} x^4 + C. \end{aligned}$$

d) On a $\ln(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$ et $f'(x) = 1/x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \ln(x) \, dx &= \int f(x) g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + C. \end{aligned}$$



On peut déduire des exemples précédents quelques règles pour l'intégration par parties.

1. Si l'intégrande est de la forme $p(x)e^{\alpha x}$ où $p(x)$ est un polynôme, on doit choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$.
2. Si l'intégrande est de la forme $p(x) \sin(\alpha x)$ ou $p(x) \cos(\alpha x)$ où $p(x)$ est un polynôme, on doit choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = \sin(\alpha x)$ ou $\cos(\alpha x)$ selon le cas.
3. Si l'intégrande est de la forme $p(x) \ln(\alpha x)$ où $p(x)$ est une somme d'expressions de la forme x^r avec r un nombre rationnel, on doit choisir $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = p(x)$.

Exemple 6.2.11

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int x 5^x dx \quad \mathbf{b}) \quad \int \arcsin(x) dx \quad \mathbf{c}) \quad \int \arctan(x) dx$$

a) On a $x5^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = 5^x$. Donc, $f'(x) = 1$, $g(x) = 5^x / \ln(5)$ et

$$\begin{aligned} \int x 5^x dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= \frac{x 5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)} \int 5^x dx = \frac{x 5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{(\ln(5))^2} 5^x + C \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que $\frac{d}{dx} 5^x = 5^x \ln(5)$.

b) On a $\arcsin(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arcsin(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = 1-x^2$. On a $dy = -2x dx$ et ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} \times (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int y^{-1/2} dy \Big|_{y=1-x^2} \\ &= -y^{1/2} \Big|_{y=1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - C.$$

c) On a $\arctan(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = 1+x^2$. On a $dy = 2x dx$ et ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \times 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1+x^2} + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - C .$$



Exemple 6.2.12

Évaluer $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

C'est un autre exemple où nous devons utiliser la règle de substitution dans le sens inverse comme nous l'avons expliqué à la section précédente.

Posons $x = t^2$ dans le but d'éliminer \sqrt{x} . Alors $dx = 2t dt$ et

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int te^t dt \Big|_{t=\sqrt{x}} = 2(t e^t - e^t) \Big|_{t=\sqrt{x}} + C = 2(\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$$

où nous avons utilisé le résultat de l'exemple 6.2.9.



L'exemple suivant démontre une technique pour évaluer les intégrales dont l'intégrande est le produit de $e^{\alpha x}$ et $\cos(\beta x)$, ou $e^{\alpha x}$ et $\sin(\beta x)$.

Exemple 6.2.13

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\mathbf{a)} \quad \int e^x \cos(x) dx \qquad \mathbf{b)} \quad \int \sin(\ln(x)) dx , \quad x > 0$$

a) Posons

$$I = \int e^x \cos(x) dx .$$

On a $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos(x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx . \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Même si cette expression n'est pas plus simple que l'intégrale du départ, on est quand même sur la bonne voie. Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x \sin(x) dx .$$

On a $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx = -e^x \cos(x) + I . \end{aligned}$$

Si on substitue cette expression dans (6.2.2), on obtient

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

et, après avoir isolé I , on trouve que

$$I = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) + e^x \cos(x))$$

est une primitive de $e^x \cos(x)$. Donc

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) + C.$$

On aurait pu utiliser $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la première intégration par parties mais alors il aurait fallu utiliser $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la deuxième intégration par parties.

b) On commence par une substitution. Posons $x = e^y$ pour éliminer $\ln(x)$. On a $dx = e^y dy$ et

$$\int \sin(\ln(x)) dx = \int \sin(y) e^y dy \Big|_{y=\ln(x)}.$$

C'est une intégrale du même type que celle que l'on a évalué en (a).

Posons

$$I = \int e^y \sin(y) dy.$$

On a $e^y \sin(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \sin(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = \cos(y)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^y \sin(y) dy = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^y \sin(y) - \int e^y \cos(y) dy \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

De plus, pour l'intégrale indéfinie

$$\int e^y \cos(y) dy,$$

on a $e^y \cos(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \cos(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = -\sin(y)$ et

$$\begin{aligned} \int e^y \cos(y) dy &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^y \cos(y) + \int e^y \sin(y) dy = e^y \cos(y) + I. \end{aligned}$$

Si on substitue cette expression dans (6.2.3), on obtient

$$I = e^y \sin(y) - (e^y \cos(y) + I)$$

et, après avoir isolé I , on trouve que

$$I = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y))$$

est une primitive de $e^y \sin(y)$. Ainsi,

$$\int e^y \sin(y) dy = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y)) + C .$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln(x)) dx &= \int \sin(y) e^y dy \Big|_{y=\ln(x)} = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y)) \Big|_{y=\ln(x)} + C \\ &= \frac{1}{2} (e^{\ln(x)} \sin(\ln(x)) - e^{\ln(x)} \cos(\ln(x))) + C \\ &= \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C . \end{aligned}$$



Méthode de Weiestrass 🔐

Il existe une autre façon d'évaluer des intégrales de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x)) dx$ où $F(\cos(x), \sin(x))$ est une fonction (rationnelle) de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. On peut utiliser la substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) , \quad -\pi < x < \pi \tag{6.2.4}$$

qui est due à Weiestrass. Cette substitution est équivalente à $x = 2 \arctan(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a

$$dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt . \tag{6.2.5}$$

De plus, grâce à la **formule de l'angle double pour la tangente**, on a

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 = \left(\frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 + 1 = \left(\frac{2t}{1 - t^2} \right)^2 + 1 = \left(\frac{1 + t^2}{1 - t^2} \right)^2$$

si $t \neq \pm 1$. Donc, $\sec(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$ donne

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} . \tag{6.2.6}$$

Cette formule est aussi valide pour $t = \pm 1$. Si $t = 1$, on a $x = \pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Donc, les deux côtés de (6.2.6) sont nuls. De même, si $t = -1$, on a $x = -\pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Donc, les deux côtés de (6.2.6) sont encore nuls. La relation

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 = \left(\frac{2t}{1 + t^2} \right)^2$$

donne

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} . \quad (6.2.7)$$

Exemple 6.2.14

Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx .$$

On utilise la substitution (6.2.4) avec (6.2.5) et (6.2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx &= \int \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1} \right) dt = \int \frac{1}{t^2+t+1} dt \\ &= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt . \end{aligned}$$

Avec la substitution $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)$, on obtient $dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2+1} dy \Big|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) \Big|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t+\frac{1}{2}\right) \right) + C . \end{aligned}$$

Finalement, puisque $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on trouve

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \right) + C .$$



6.2.3 Fractions partielles

La méthode des fractions partielles permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes. Vous devez suivre les étapes suivantes pour calculer ce genre d'intégrales.

1. Si le degré de $p(x)$ est plus grand ou égal au degré de $q(x)$, on divise $p(x)$ par $q(x)$ pour obtenir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

où le degré de $r(x)$ est plus petit que le degré de $q(x)$, et $s(x)$ est un polynôme (donc facile à intégrer).

2. On exprime $q(x)$ comme un produit de facteurs irréductibles.

$$q(x) = A(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}(x^2 + \beta_2x + \gamma_2)^{m_2} \dots$$

où $A, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \dots$ sont des constantes réelles et $n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots$ sont des entiers positifs. On assume que les α_k et les (β_k, γ_k) sont distincts.

3. On exprime $r(x)/q(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \dots \\ &\quad + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^2} + \dots + \frac{B_{m_1}x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}} + \dots \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots$ sont des constantes.

4. Finalement, on évalue

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx \\ &= \int s(x) dx + \int \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} dx + \dots + \int \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} dx \\ &\quad + \dots + \int \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)} dx + \int \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^2} dx \\ &\quad + \dots + \int \frac{B_{m_1}x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}} dx + \dots \end{aligned}$$

Exemple 6.2.15

Évaluer

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir

$$\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} .$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Étape 3 : On cherche A et B tels que

$$\frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, l'égalité est satisfaite si on a le même numérateur de chaque côté de l'égalité. C'est-à-dire si

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2) = (A + B)x - (3A + 2B).$$

Si on compare les coefficients des puissances de x , on trouve $A+B = 19$ et $-(3A+2B) = -30$. Donc, $A = -8$ et $B = 27$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(x + 5 - 8 \frac{1}{x-2} + 27 \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + -8 \ln|x-2| + 27 \ln|x-3| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \ln\left(\frac{|x-3|^{27}}{|x-2|^8}\right) + C. \end{aligned}$$



Remarque 6.2.16

Lorsque que les racines du dénominateur sont simples, on a une expression de la forme suivante à l'étape 3.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha_n)}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les racines distinctes de $q(x)$. Il y a alors une façon facile de déterminer les valeurs de A_1, A_2, \dots, A_n . Si on met sur un dénominateur commun, on obtient au numérateur une équation de la forme

$$\begin{aligned} r(x) &= A_1(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + \dots \\ &\quad + A_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Il suffit d'évaluer chacun des côtés de l'égalité précédente à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour obtenir respectivement les valeurs de A_1, A_2, \dots, A_n .

Si on utilise cette méthode à l'exemple précédent, on a

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Ainsi, on obtient $27 = B$ avec $x = 3$ et $8 = -A$ avec $x = 2$.



Exemple 6.2.17

Évaluez

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx.$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x + 1 + \frac{1}{x^3 - x}.$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.

Étape 3 : On cherche A , B et C tels que

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$1 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1).$$

Pour $x = 0$, on obtient $1 = -A$. Donc $A = -1$. Pour $x = 1$, on obtient $1 = 2B$. Donc $B = 1/2$. Finalement, pour $x = -1$, on obtient $1 = 2C$. Donc $C = 1/2$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx &= \int (x + 1) dx + \int \frac{1}{x^3 - x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|(x - 1)(x + 1)| + C. \end{aligned}$$



L'exemple suivant ne fait partie en soit de la méthode d'intégration par fractions partielles. On a même déjà vu une intégrale semblable à l'exemple 6.2.4. Cependant, on rencontre souvent cette situation quand on essaye d'utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Il est donc important d'être capable de calculer de telles intégrales.

Exemple 6.2.18

Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx.$$

Étape 1 : On n'a pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le polynôme $x^2 + 6x + 12$ est irréductible car il n'admet pas de racines réelles.

La méthode des fractions partielles ne s'applique pas. On complète le carré du dénominateur. On remarque que $x^2 + 6x + 12 = (x + 3)^2 + 3$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x + 3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} dx.$$

Si on pose $y = \frac{x + 3}{\sqrt{3}}$, on a $dy = \frac{1}{\sqrt{3}} dx$ et

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x + 3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left((x + 3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(y) \Big|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C .
\end{aligned}$$



Exemple 6.2.19

Évaluer

$$\int \frac{4x + 1}{(x - 3)(x^2 + 6x + 12)} dx .$$

Étape 1 : On n'a pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le dénominateur $(x - 3)(x^2 + 6x + 12)$ est déjà exprimé comme un produit de facteurs irréductibles car le polynôme $x^2 + 6x + 12$ n'admet pas de racines réelles.

Étape 3 : On cherche A , B et C tels que

$$\frac{4x + 1}{(x - 3)(x^2 + 6x + 12)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 12} .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$4x + 1 = A(x^2 + 6x + 12) + (Bx + C)(x - 3) = (A + B)x^2 + (6A - 3B + C)x + (12A - 3C) .$$

Si on compare les coefficients des puissances de x , on trouve $A + B = 0$, $6A - 3B + C = 4$ et $12A - 3C = 1$. Donc, $A = 1/3$, $B = -A$ et $C = 1$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x + 1}{(x - 3)(x^2 + 6x + 12)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 3} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + 1}{x^2 + 6x + 12} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x - 3| - \frac{1}{3} \int \frac{x - 3}{x^2 + 6x + 12} dx = \frac{1}{3} \ln|x - 3| - \frac{1}{3} \int \frac{x - 3}{(x + 3)^2 + 3} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x - 3| - \frac{1}{3} \int \frac{x + 3}{(x + 3)^2 + 3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{-6}{(x + 3)^2 + 3} dx .
\end{aligned}$$

Or, si on pose $y = (x + 3)^2$, on obtient $dy = 2(x + 3)dx$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{x + 3}{(x + 3)^2 + 3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + 3)^2 + 3} \times 2(x + 3) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y + 3} dy \Big|_{y=(x+3)^2} = \frac{1}{2} \ln|y + 3| \Big|_{y=(x+3)^2} + C_1 \\
&= \frac{1}{2} \ln((x + 3)^2 + 3) + C_1 .
\end{aligned}$$

De plus, si on utilise le résultat de l'exemple 6.2.18,

$$\int \frac{-6}{(x+3)^2 + 3} dx = -6 \int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = -2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C_2 .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln((x+3)^2 + 3) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

où $C = -(C_1 + C_2)/3$. ♣

Exemple 6.2.20

Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{3 \sin(x) + \cos(x)} dx .$$

On utilise la substitution (6.2.4) avec (6.2.5), (6.2.6) et (6.2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 \sin(x) + \cos(x)} dx &= \int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1} \right) dt = \int \frac{2}{1+6t-t^2} dt \\ &= - \int \frac{2}{(t-(3+\sqrt{10}))(t-(3-\sqrt{10}))} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \int \left(\frac{1}{t-(3+\sqrt{10})} - \frac{1}{t-(3-\sqrt{10})} \right) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\ln|t-(3+\sqrt{10})| - \ln|t-(3-\sqrt{10})| \right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t-(3+\sqrt{10})}{t-(3-\sqrt{10})} \right| + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\tan(x/2)-(3+\sqrt{10})}{\tan(x/2)-(3-\sqrt{10})} \right| + C . \end{aligned}$$

La méthode d'intégration par fractions partielles a été utilisée pour évaluer l'intégrale en t . ♣

6.2.4 Substitutions trigonométriques

Si l'intégrande contient un facteur de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, une substitution trigonométrique pourrait être nécessaire.

l'intégrande contient	substitution
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin(t)$ ou $x = a \cos(t)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(t)$

Pour ce genre de substitutions, on utilise la règle de substitution dans le sens inverse

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt .$$

La substitution $x = g(t)$ donne le côté droit.

Exemple 6.2.21

Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx , \quad -1 < x < 1 .$$

Posons $x = \sin(t)$ avec $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $dx = \cos(t) dt$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt \\ &= \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)\cos(t)} dt = \int \frac{1}{\sin^2(t)} dt = \int \csc^2(t) dt \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \int \csc^2(t) dt = -\cot(t) + C .$$

Or $x = \sin(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$ donne $\cos(t) = \sqrt{1-x^2} > 0$. Donc

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

et

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = -\cot(t) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C .$$



Exemple 6.2.22

Évaluer

$$\int \sqrt{x^2+1} dx , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Posons $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. On a donc

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2(t)+1} = \sqrt{\sec^2(t)} = |\sec(t)| = \sec(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $dx = \sec^2(t) dt$, on obtient

$$I = \int \sqrt{x^2+1} dx = \int \sec(t) \sec^2(t) dt$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. On a $\sec(t) \sec^2(t) = f(t)g'(t)$ pour $f(t) = \sec(t)$ et $g'(t) = \sec^2(t)$. Donc, $f'(t) = \sec(t) \tan(t)$, $g(t) = \tan(t)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int \sec(t) \sec^2(t) dt = \int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) - \int \sec(t) \tan^2(t) dt = \sec(t) \tan(t) - \int \sec(t) (\sec^2(t) - 1) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) dt - \int \sec(t) \sec^2(t) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) dt - I . \end{aligned}$$

Si on résout pour I on trouve

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sec^3(t) dt = \frac{1}{2} \left(\sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) dt \right) .$$

À l'exemple 6.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t) dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_1 .$$

Donc,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sec^3(t) dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C$$

où $C = C_1/2$. Finalement, puisque $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$, on a $\sec(t) = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + x^2}$. Ainsi,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C .$$



Exemple 6.2.23

Évaluer l'intégrale

$$\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx , \quad x > 1 .$$

On a

$$\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx = \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx .$$

Posons $x = y^2$ pour $y > 1$. On a $\sqrt{x} = y$ et $dx = 2y dy$. Donc,

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \times 2y dy = 2 \int \sqrt{y^2-1} dy$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = \sec(\theta)$ pour $0 < \theta < \pi/2$. On a $dy = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$ et $\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\sec^2(\theta)-1} = \tan(\theta)$ car $\tan(\theta) > 0$ pour $0 < \theta < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2-1} dy = \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) d\theta$$

$$= \int (\sec^2(\theta) - 1) \sec(\theta) d\theta = \int \sec^3(\theta) d\theta - \int \sec(\theta) d\theta$$

À l'exemple 6.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t) dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_1$$

et à l'exemple précédent on a montré que

$$\int \sec^3(t) dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_2 .$$

Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2 - 1} dy = \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) - \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_3$$

où $C_3 = C_2 - C_1$. Puisque $\sec(\theta) = y$ et $\tan(\theta) = \sqrt{y^2 - 1}$ pour $0 < \theta < \pi/2$, on obtient

$$\int \sqrt{y^2 - 1} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |y + \sqrt{y^2 - 1}| + C_3 .$$

Finalement, puisque $y = \sqrt{x}$ pour $x > 1$, on trouve

$$\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx = 2 \int \sqrt{y^2 - 1} dy = \sqrt{x(x-1)} - \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x-1}| + C$$

où $C = 2C_3$. 

Exemple 6.2.24

Évaluer

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx , \quad x > 1 .$$

Si on pose $x = \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \tan(t) \sec(t) dt$ et

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2(t) - 1}}{\sec^3(t)} \sec(t) \tan(t) dt = \int \frac{\tan^2(t)}{\sec^2(t)} dt = \int \sin^2(t) dt ,$$

où on a utilisé l'identité

$$\sqrt{\sec^2(t) - 1} = \sqrt{\tan^2(t)} = |\tan x| = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$, on a

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) + C .$$

Pour exprimer le résultat de notre intégrale en fonction de x seulement, on note que $t = \text{arcsec}(x)$ car on a posé $x = \sec(t)$. De plus, $x = \sec(t)$ donne $\cos(t) = 1/x$ et

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

car $x = \sec(t) > 1$ et $\sin(t) > 0$ pour $0 < t < \pi/2$. Finalement,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) + C \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(x)}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2} + C\end{aligned}$$

où l'identité trigonométrique $\sin(2t) = \sin(t+t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ a été utilisé pour la deuxième égalité. ♣

Exemple 6.2.25

Évaluer

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx \quad \text{pour } x > 5/2.$$

On peut récrire cette intégrale de la façon suivante :

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} dx.$$

Si on pose $x = \frac{5}{2} \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \frac{5}{2} \tan(t) \sec(t) dt$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 \sec^2(t) - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left(\frac{5}{2} \tan(t) \sec(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{(\sec^2(t) - 1)^{3/2}} dt = \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{(\tan^2(t))^{3/2}} dt \\ &= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\tan^3(t)} dt = \frac{1}{50} \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{50} \int \cot(t) \csc(t) dt = -\frac{1}{50} \csc(t) + C.\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité

$$\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t) \quad \text{et} \quad \sqrt{\tan^2 x} = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sec(t) = \frac{2}{5}x$ donne $\cos(t) = \frac{5}{2x}$, on obtient

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2x}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - 25}}{2x}$$

car $x = \frac{5}{2} \sec(t) > \frac{5}{2}$ et $\sin(t) \geq 0$ pour $0 \leq t < \pi/2$. Finalement,

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx = -\frac{1}{50 \sin(t)} + C = -\frac{x}{25 \sqrt{4x^2 - 25}} + C.$$



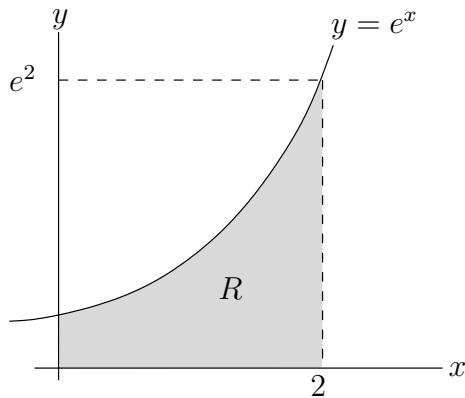


FIGURE 6.1 – La région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

6.3 L'intégrale définie

La région R de la figure 6.1 est la région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$. La façon intuitive d'estimer l'aire A de cette région est de partitionner en petits rectangles cette région et de faire la somme de l'aire de chaque rectangle car il est simple de calculer l'aire d'un rectangle.

Les rectangles utilisés à la figure 6.2 sont construits de la façon suivante. On partage l'intervalle $[0, 2]$ en 11 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est donc $2/11$. On obtient 11 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/11$, $x_2 = 4/11, \dots, x_{11} = 22/11 = 2$. Les rectangles que l'on utilise sont les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

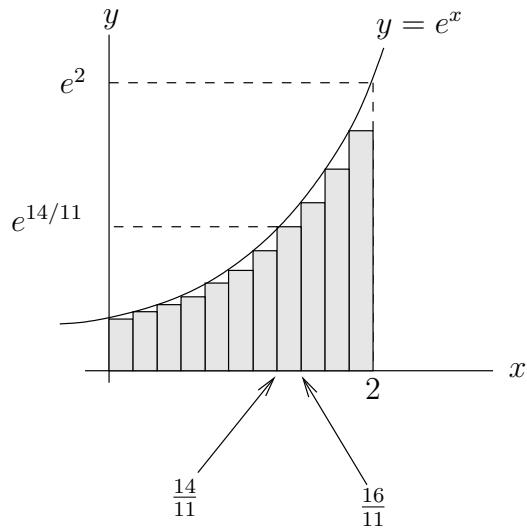
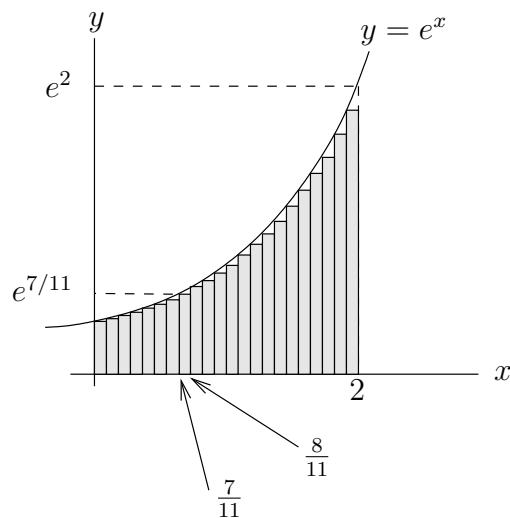
L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} , est $e^{x_i} \left(\frac{2}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{11} = e^0 \left(\frac{2}{11}\right) + e^{2/11} \left(\frac{2}{11}\right) + e^{4/11} \left(\frac{2}{11}\right) + \dots + e^{20/11} \left(\frac{2}{11}\right) \approx 5.8258238\dots$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $G_{11} = 5.8258238\dots$. En fait, on a sous-estimé l'aire de la région R car nos rectangles sont tous à l'intérieur de la région.

Le choix de 11 intervalles est arbitraire. Pour obtenir une meilleure approximation de l'aire de la région R , on pourrait prendre plus d'intervalles. Par exemple, si on partage l'intervalle $[0, 2]$ en 22 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est alors de $1/11$ et on obtient 22 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 21$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 1/11$, $x_2 = 2/11, \dots, x_{22} = 22/11 = 2$. Comme dans le cas précédent avec 11 intervalles, on utilise les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour $i = 0, 1, 2, \dots, 21$. On obtient la figure 6.3.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} , est

FIGURE 6.2 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i} FIGURE 6.3 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i}

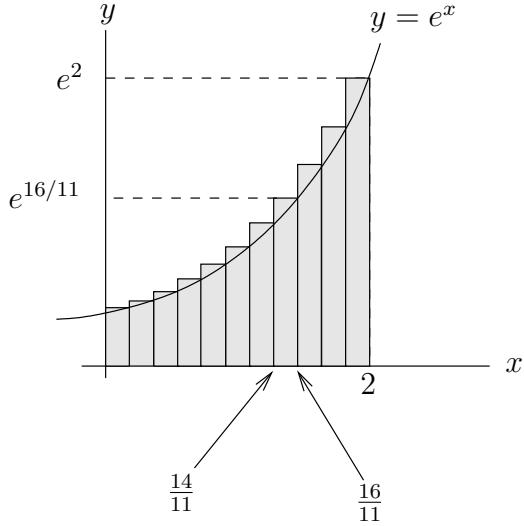


FIGURE 6.4 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

maintenant $e^{x_i} \left(\frac{1}{11} \right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$\begin{aligned} G_{22} &= e^0 \left(\frac{1}{11} \right) + e^{1/11} \left(\frac{1}{11} \right) + e^{2/11} \left(\frac{1}{11} \right) + e^{3/11} \left(\frac{1}{11} \right) + \dots \\ &\quad + e^{20/11} \left(\frac{1}{11} \right) + e^{21/11} \left(\frac{1}{11} \right) \approx 6.10304402\dots \end{aligned}$$

et on obtient que l'aire A de la région R est approximativement $G_{22} = 6.10304402\dots$. On a encore sous-estimé l'aire de la région R .

Si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme G_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente. Les sommes G_k sont appelées des **sommes à gauche** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité gauche x_i de l'intervalle.

Remarque 6.3.1

Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à gauche G_k sont toutes des sous-estimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. ♠

Revenons à la partition de l'intervalle $[0, 2]$ en 11 sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, 10$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/11$, $x_2 = 4/11, \dots, x_{10} = 20/11$ et $x_{11} = 2$. Ces intervalles sont tous de longueur égale à $2/11$. Considérons maintenant les rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 6.4.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est $e^{x_{i+1}} \left(\frac{2}{11} \right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{11} = e^{2/11} \left(\frac{2}{11} \right) + e^{4/11} \left(\frac{2}{11} \right) + e^{6/11} \left(\frac{2}{11} \right) + \dots + e^{22/11} \left(\frac{2}{11} \right) \approx 6.987470396\dots$$

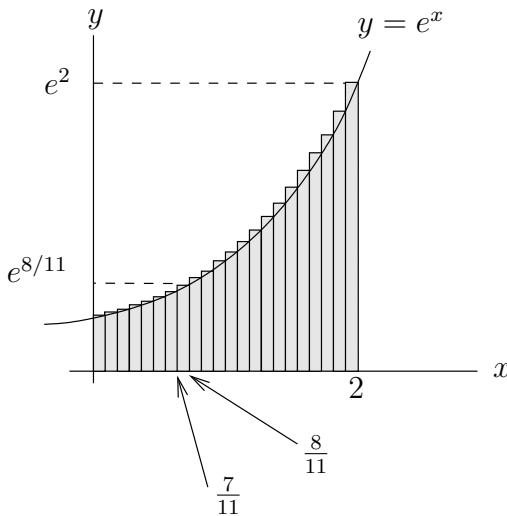


FIGURE 6.5 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{11} = 6.987470396 \dots$. En fait, on a surestimé l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R .

Finalement, on considère les 22 rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$ où les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, 21$ sont bornées par les points $x_0 = 0$, $x_1 = 1/11$, $x_2 = 2/11, \dots, x_{21} = 21/11$ et $x_{22} = 2$. Chaque intervalle est de longueur égale à $1/11$. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 6.5.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est maintenant $e^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$\begin{aligned} D_{22} &= e^{1/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{2/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{3/11} \left(\frac{1}{11}\right) + \dots \\ &\quad + e^{21/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{22/11} \left(\frac{1}{11}\right) \approx 6.68386731 \dots \end{aligned}$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{22} = 6.68386731 \dots$. On a toujours une surestimation de l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R mais la surestimation est moins grande que lorsqu'on utilise seulement 11 rectangles.

Les sommes D_k sont appelées des **sommes à droite** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité droite x_{i+1} de l'intervalle. Comme pour les sommes à gauche, si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme D_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente.

Remarque 6.3.2

Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à droite D_k sont toutes des surestimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. ♠

Pour 1000 sous-intervalles de $[0, 2]$, on obtient

$$D_{1000} = 6.39544728 \dots \quad \text{et} \quad G_{1000} = 6.38266917 \dots$$

Si on combine les sommes à droite et à gauche que nous avons calculées, on obtient

$$G_{11} < G_{22} < G_{1000} < A < D_{1000} < D_{22} < D_{11} .$$

La valeur exacte de l'aire A de la région R est $A = 6.3890560 \dots$

Comme le symbole de sommation \sum sera très utile, il est probablement important de revoir sa définition pour le bénéfice du lecteur.

Définition 6.3.3

Soit $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$, un ensemble de nombres indexés par les entiers. Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$, alors la somme des nombres a_n, a_{n+1}, \dots, a_m est dénotée

$$\sum_{i=n}^m a_i \equiv a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{m-1} + a_m .$$

Si on partitionne l'intervalle $[0, 2]$ en k sous-intervalles de longueur $2/k$, on obtient les intervalles de base $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/k$, $x_2 = 4/k$, \dots , $x_{k-1} = 2(k-1)/k$ et $x_k = 2$.

Si on utilise le symbole de sommation, on a

$$G_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{x_i} \quad \text{et} \quad D_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{x_{i+1}} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k e^{x_i}$$

où $2/k$ est la longueur de la base des rectangles. On a aussi que

$$G_1 < \dots < G_k < G_{k+1} < A < D_{k+1} < D_k < \dots < D_1$$

pour tout $k \geq 1$ et l'aire A de la région R est donnée par

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k .$$

6.3.1 Définition

La définition de l'intégrale définie que nous donnons généralise le calcul de l'aire qui a été fait à la section précédente pour la région R bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$.

Avant de définir l'intégrale dans le cas général, nous devons décrire les fonctions pour lesquelles l'intégrale existera. La raison pour ces restrictions sur les fonctions que nous allons intégrer deviendra plus clair lors de l'étude des intégrales improprees que nous ferons prochainement.

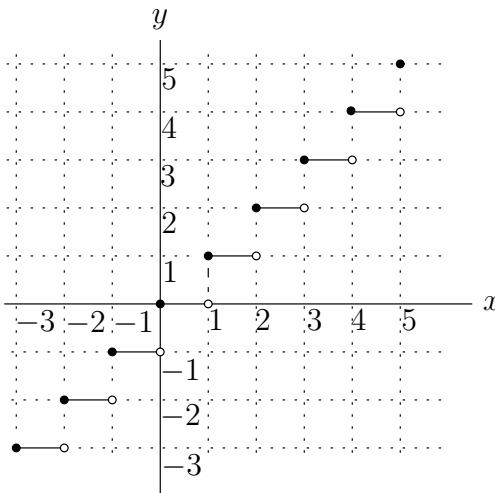


FIGURE 6.6 – Graphe de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $-3 \leq x \leq 5$.

Définition 6.3.4

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **bornée** s'il existe une constante M telle que $|f(x)| < M$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **continue par morceaux** s'il y a une nombre fini de points c où la fonction f n'est pas continue et, à ces points c , on a que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c+ \\ x \in [a, b]}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c- \\ x \in [a, b]}} f(x)$$

existent.

Exemple 6.3.5

La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que ou égale à x , est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé de \mathbb{R} . Le graphe de cette fonction est donné à la figure 6.6. ♣

On remarque qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé est une fonction bornée.

Définition 6.3.6 (Somme de Riemann)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} quelconque de l'intervalle $[a, b]$. La longueur d'un sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. On définit une mesure de la partition \mathcal{P} par

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{\Delta x_i : 0 \leq i < k\}.$$

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. La somme

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x_i$$

est une **somme de Riemann** pour la partition \mathcal{P} .

Une même partition supporte un nombre infini de sommes de Riemann selon le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$.

Définition 6.3.7

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. L'**intégrale définie** de f de a à b est le nombre I qui satisfait la condition suivante.

$$S_{\mathcal{P}} \rightarrow I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0.$$

On écrit $\int_a^b f(x) dx = I$.

Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**. L'intervalle $[a, b]$ est appelé **l'intervalle d'intégration**. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x .

Remarque 6.3.8 ☺

$$S_{\mathcal{P}} \rightarrow I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0.$$

veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|I - S_{\mathcal{P}}| < \epsilon$$

quelle que soit la partition \mathcal{P} de $[a, b]$ avec $\|\mathcal{P}\| < \delta$ et quelle que soit le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ associé à la partition \mathcal{P} . ♠

Consultez la section 6.3.5 pour une définition plus générale de l'intégrale définie de Riemann.

On insiste sur le fait que le symbole dx n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x . Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Il découle de la définition de l'intégrale définie que l'on peut estimer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en choisissant un partition très fine (i.e. $\|\mathcal{P}\|$ très petit) avec une somme de Riemann subordonnée à cette partition.

Normalement, on choisit des partitions \mathcal{P} telles que Δx_i est constant.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Pour $k \in \mathbb{N}^+$, on pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i \Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les points $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ forment une partition \mathcal{P} de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx . On a que $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = (b-a)/k$ tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini.

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. Donc, $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$. On obtient la somme de Riemann

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x .$$

Cette somme est représentée graphiquement à la figure 6.7.

l'intégrale définie de f de a à b peut être calculée à l'aide de la formule

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k . \quad (6.3.1)$$

Remarque 6.3.9

1. La limite (6.3.1) existe toujours car f est continue par morceau. Cela pourrait être démontré à partir de la définition rigoureuse de l'intégrale donnée à la section 6.3.5 ci-dessous.
2. Quelques rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $|f(x_i^*)|$ sont représentés à la figure 6.7. Comme $f(x_i^*)$ peut être négatif, l'expression $f(x_i^*) \Delta x$ représente l'aire du rectangle à un signe près.
3. Si $x_i^* = x_i$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité gauche de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = G_k$, la somme à gauche pour k rectangles.
4. Si $x_i^* = x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité droite de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = D_k$, la somme à droite pour k rectangles.
5. Si x_i^* est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ pour $0 \leq i < k$, alors S_k est **une somme de Riemann pour le point milieu** que l'on dénote M_k .



Exemple 6.3.10

Notre but est de trouver la meilleure estimation de $\int_{-1}^2 1 + x^2 dx$. Pour ce faire, nous allons utiliser les sommes à gauche, les sommes à droites et les sommes pour le point milieu avec $n = 3$ et $n = 6$ sous-intervalles.

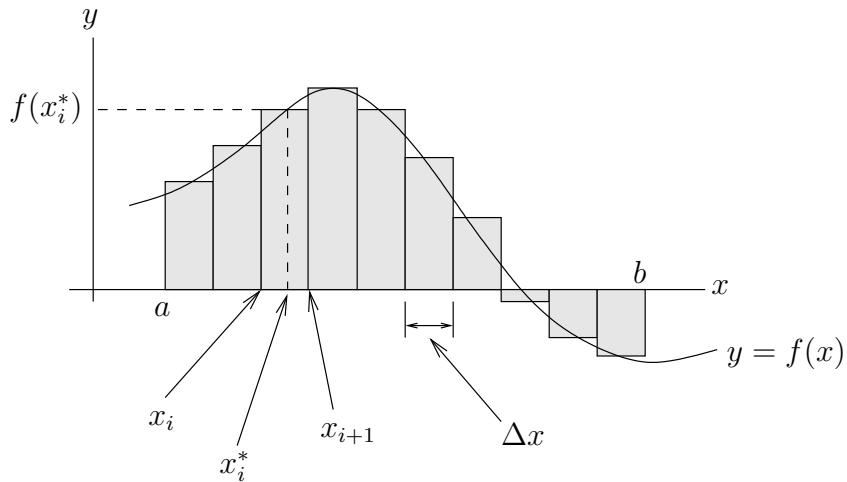


FIGURE 6.7 – Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie

Nous utiliserons le graphe de f pour déterminer laquelle des estimations que l'on a trouvées donne la meilleure approximation de l'intégrale ; c'est-à-dire, de l'aire sous la courbe $y = f(x) = 1 + x^2$ pour $-1 \leq x \leq 2$.

Pour $n = 3$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/3 = 1$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i$ pour $i = 0, 1, 2$ et 3. On obtient les trois intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

Pour $n = 6$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/6 = 1/2$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i/2$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 6$. On obtient les six intervalles $[-1, -0.5]$, $[-0.5, 0]$, \dots et $[1.5, 2]$.

La somme à droite avec $n = 3$ est

$$D_3 = (f(0) + f(1) + f(2))(1) = 8 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx D_3 = 8$.

La somme à droite avec $n = 6$ est

$$D_6 = (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2))(0.5) = 6.875 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx D_6 = 6.875$.

La somme à gauche avec $n = 3$ est

$$G_3 = (f(-1) + f(0) + f(1))(1) = 5 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx G_3 = 5$.

La somme à gauche avec $n = 6$ est

$$G_6 = (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5))(0.5) = 5.375 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx G_6 = 5.375$.

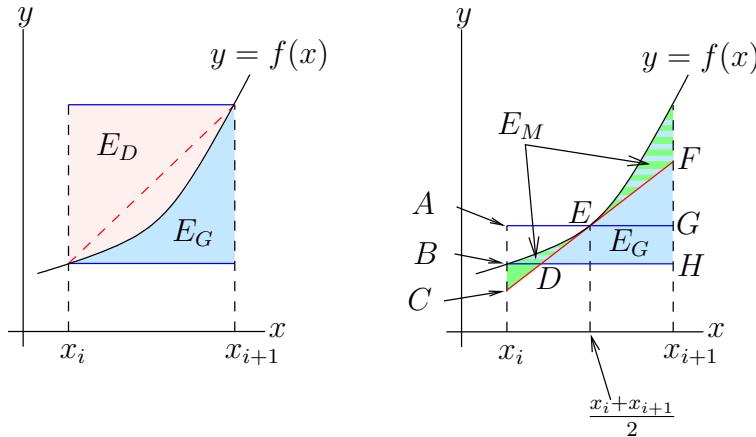


FIGURE 6.8 – Figure utilisée pour comparer l'efficacité des sommes à droite, des sommes à gauche et des sommes pour le point milieu à l'exemple 6.3.10

La somme pour le point milieu avec $n = 3$ est

$$M_3 = 1 \times (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5)) = 5.75 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx S_3 = 5.75$.

La somme pour le point milieu avec $n = 6$ est

$$M_6 = 0.5(f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) = 5.9375 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx S_6 = 5.9375$.

La meilleure approximation est donnée par la somme M_6 . Considérons la figure 6.8.

Nous avons à gauche le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_D (en rose) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à droite. L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Comme f est positive, croissant et convexe, on a que l'aire de la région E_D est plus grande que l'aire de la région E_G . Donc, la somme à gauche donne une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$.

Nous avons à droite le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_M (en vert) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu. Il faut noter que l'aire du rectangle de sommets x_i, A, G et x_{i+1} produit par la somme pour le point milieu est égale à l'aire du trapèze de sommets à x_i, A, G et x_{i+1} car les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle GFE$ sont congruents (on a $|\overline{AE}| = |\overline{EG}|$, $|\overline{CE}| = |\overline{CF}|$ et $\angle AED = \angle GEF$). L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Puisque l'aire du triangle $\triangle BCD$ est toujours plus petite que l'aire du triangle $\triangle HFD$, on a que l'aire de la région

E_G est plus grande que l'aire de la région E_M . Donc, la somme pour le point milieu donne une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$.

En conclusion, quand f est positive, croissante et convexe, la somme pour le point milieu donne la meilleure approximation de l'intégrale de f .

Quand f est positive, décroissante et convexe, Un raisonnement semblable montre que la somme pour le point milieu donne encore la meilleure approximation de l'intégrale de f . La seule différence dans ce cas est que la somme à droite donne une meilleure estimation de l'intégrale de f que la somme à gauche. On invite le lecteur à vérifier cette conclusion.

De plus, on remarque à partir de la figure ci-dessus que, dans le cas d'une fonction convexe, l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu est toujours inférieure à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$. Donc, la somme pour le point milieu est une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

En conséquence, puisque $M_3 < M_6$, on a que M_6 est la meilleure approximation de l'intégrale.

Il y a cependant une contrainte majeure à la justification que nous venons de donner. L'origine doit être un des points x_i pour que notre raisonnement soit valable. Toute notre justification est basée sur la propriété que la fonction ne change pas de signe, de croissante à décroissante et vice-versa, ou de courbure dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. ♣

6.3.2 Propriétés de l'intégrale définie

On déduit du deuxième item de la remarque 6.3.9 ci-dessus que si $f(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

où A est l'aire de la région R en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = b$. Par contre, si $f(x) \leq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

où A est l'aire de la région R au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = b$. Si f change de signe à un seul point c de l'intervalle $[a, b]$ comme à la figure 6.9, alors

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 ,$$

où A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = c$; et A_2 est l'aire de la région R_2 au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre $x = c$ et $x = b$.

Il est parfois facile de calculer l'intégrale d'une fonction si cette fonction et l'intervalle d'intégration possèdent certaines symétries. Par exemple, si f est une fonction impaire (i.e.

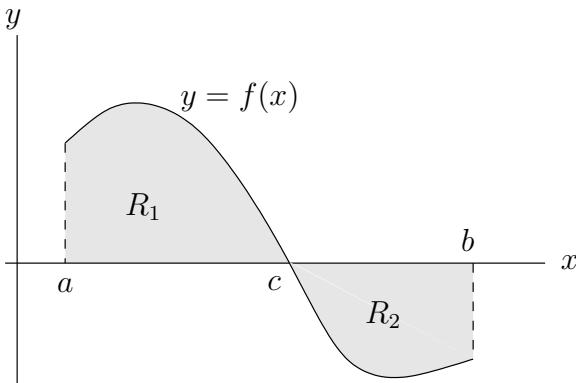


FIGURE 6.9 – L'intégrale d'une fonction f qui change de signe seulement au point c comme dans la figure donne l'aire de la région R_1 moins l'aire de la région R_2 .

$f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

La justification de ce résultat est donnée par la figure 6.10. A_1 est l'aire de la région R_1 au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction impaire $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^a f(x) dx = A_2 - A_1 = 0.$$

Si f est une fonction paire (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

La justification de ce résultat est donnée à la figure 6.11. A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction paire alors $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^a f(x) dx = A_2 + A_1 = 2A_1 = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

On insiste sur le fait que, dans les deux cas précédents, la borne supérieure d'intégration est la réflexion par rapport à l'origine de la borne inférieure d'intégration.

Définition 6.3.11

Si l'intégrale de f de a à b existe, on définit l'intégrale de f de b à a par

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

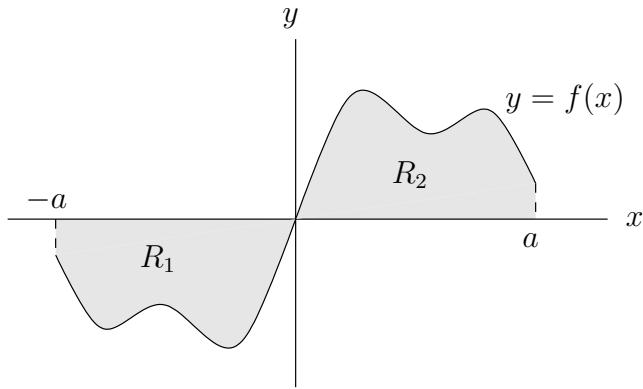


FIGURE 6.10 – Graphe d’une fonction impaire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l’origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

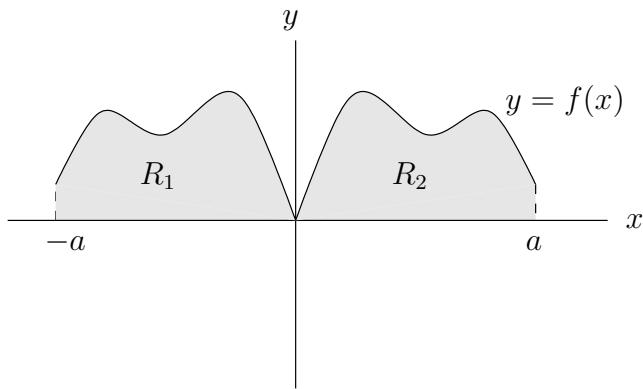


FIGURE 6.11 – Graphe d’une fonction paire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l’origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

Les propriétés suivantes découlent de la définition de l'intégrale :

Théorème 6.3.12

Soit a , b et c trois nombres réels. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle qui contient a , b et c , et si k est un nombre réel, alors

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ,$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Voir figure 6.9 pour une interprétation graphique de la dernière règle du théorème précédent.

6.3.3 Évaluations des intégrales définies

Exemple 6.3.13

On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x) = x^2$ et les droites $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ (voir la figure 6.12).

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 2/k$ et $x_i = 1 + 2i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = [1 + \frac{2i}{k}, 1 + \frac{2(i+1)}{k}]$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = 1 + \frac{2i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{2i}{k}\right)^2 \frac{2}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{4i}{k} + \frac{4i^2}{k^2}\right) \frac{2}{k} \\ &= \underbrace{\frac{2}{k} \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1\right)}_{=k} + \underbrace{\frac{8}{k^2} \left(\sum_{i=0}^{k-1} i\right)}_{=k(k-1)/2} + \underbrace{\frac{8}{k^3} \left(\sum_{i=0}^{k-1} i^2\right)}_{=k(k-1)(2k-1)/6} \end{aligned}$$

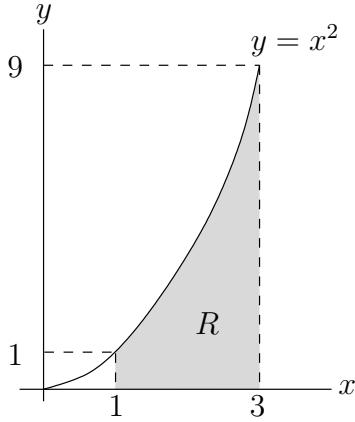


FIGURE 6.12 – L'aire de la région R définie à l'exemple 6.3.13 est donné par l'intégrale de $f(x) = x^2$ de 1 à 3

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{4(k-1)}{k} + \frac{4(k-1)(2k-1)}{3k^2} \\ &= \frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2} \right) = \frac{26}{3}.$$



Exemple 6.3.14

On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$.

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 4/k$ et $x_i = -2 + 4i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = \left[-2 + \frac{4i}{k}, -2 + \frac{4(i+1)}{k} \right]$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = -2 + \frac{4i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(4 - \left(-2 + \frac{4i}{k} \right)^2 \right) \frac{4}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-16i^2}{k^2} + \frac{16i}{k} \right) \frac{4}{k} \\ &= \frac{-64}{k^3} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \frac{64}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{-64}{k^3} \left(\frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \right) + \frac{64}{k^2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{32}{k} - \frac{32}{3k^2} + 32 - \frac{32}{k} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2}$$

Ainsi

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2} \right) = \frac{32}{3}.$$



Exemple 6.3.15

Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}.$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 \frac{1}{n}$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\int_0^1 x^3 dx$.

En effet, si $\Delta x = \frac{1}{n}$ et $x_i = i\Delta x = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, on obtient une partition de l'intervalle $[0, 1]$ et

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n x_i^3 \Delta x.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \int_0^1 x^3 dx.$$

On va voir plus loin comment calculer cette intégrale.



Exemple 6.3.16

Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2.$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n},$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\frac{1}{2} \int_2^4 x^2 dx$.

En effet, si $\Delta x = \frac{2}{n}$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + \frac{2i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, on obtient une partition de l'intervalle $[2, 4]$ et

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_2^4 x^2 \, dx .$$



6.3.4 Déplacement

Le problème que nous considérons dans la présente section est classique. On montre comment l'intégrale peut être utilisée pour déterminer la distance parcourue par une voiture si on connaît sa vitesse en fonction du temps.

Soit $v(t)$, la vitesse en km/h d'une voiture au temps t en heures. Si on veut estimer la distance parcourue par la voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, on divise l'intervalle de temps $[a, b]$ en (petits) sous-intervalles de même longueur et on suppose que la vitesse de la voiture sur chacun des sous-intervalles de temps est constante.

Soit $k > 0$. On pose $\Delta t = (b - a)/k$ et $t_0 = a$, $t_1 = a + \Delta t$, $t_2 = a + 2\Delta t$, $t_3 = a + 3\Delta t$, ..., $t_k = a + k\Delta t = b$. Si $v(t_i^*)$ est la vitesse de la voiture mesurée au temps t_i^* dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et si on suppose que la voiture a voyagé à une vitesse constante durant cet intervalle de temps, alors la distance parcourue durant cet intervalle de temps est $v(t_i^*)\Delta t$ km. On note que la longueur de l'intervalle de temps Δt est en heures et la vitesse $v(t)$ est en km/h, ainsi $v(t_i^*)\Delta t$ est bien en kilomètres.

Si on fait cela pour chaque sous-intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$, on trouve que la distance parcourue par la voiture entre a et b heures est approximativement

$$\sum_{i=0}^{k-1} v(t_i^*) \Delta t .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale de la fonction v de a à b . Si on laisse k tendre vers l'infini, on obtient que la distance parcourue entre a et b heures est

$$p(b) - p(a) = \int_a^b v(t) \, dt \tag{6.3.2}$$

où $p(t)$ est la position de la voiture au temps t .

La vitesse moyenne v_m de la voiture entre a et b heures est

$$v_m = \frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b v(t) \, dt .$$

Remarque 6.3.17

Puisque p est une primitive de v car $p'(t) = v(t)$ pour tout t , l'équation (6.3.2) suggère la méthode suivante pour évaluer l'intégrale définie d'une fonction f . Si F est une primitive de f , on a

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) .$$

Est-ce vrai pour toute fonction f ? Nous donnerons une réponse affirmative à cette question pour les fonctions continues f lorsque nous présenterons le Théorème fondamental du calcul.



Exemple 6.3.18

Antoine et Antoinette travaillent tous les deux sur la colline parlementaire à Ottawa. Comme ils travaillent pour des partis politiques différents, ils ne se connaissent pas. Ils ont quand même un intérêt commun pour la peinture et décident d'aller à Montréal pour visiter le Musée d'Arts Contemporain. Ils partent tous les deux pour Montréal après leur journée d'ouvrage du vendredi. Antoine part à 17h00 et Antoinette à 18h00. Ils arrivent au Musée d'Arts Contemporain en même temps.

On trouve à la figure 6.13, la vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette lors du voyage pour se rendre à Montréal. $v_1(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoine au temps t en heures et $v_2(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoinette au temps t en heures. Vérifiez qu'ils parcourrent 210 km chacun.

- a) Quelle distance a parcouru Antoine quand Antoinette part ?

La distance parcourue par Antoine après la première heure est l'intégrale de la vitesse v_1 de $t = 17$ à $t = 18$. Cette intégrale correspond à l'aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18$. On trouve 55 km.

- b) À quel moment la distance entre Antoine et Antoinette est la plus grande? Quelle est cette distance?

Le seul moment où la distance entre Antoine et Antoinette peut passer de croissante à décroissante et vice-versa est lorsque la voiture d'Antoine et la voiture d'Antoinette vont à la même vitesse. Cela arrive à $t = 18.25$ (i.e. 18h15) et $t = 20.25$ (i.e. 20h15).

Avant $t = 18.25$, Antoine va plus vite que Antoinette. À $t = 18.25$, la distance parcourue par Antoine est l'aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18.25$, soit 78.75 km, et la distance parcourue par Antoinette est l'aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 18.25$, soit 21.25 km. Antoine a donc $78.75 - 21.25 = 57.5$ km. d'avance sur Antoinette.

Entre $t = 18.25$ et $t = 20.25$, la voiture d'Antoinette va plus vite que celle d'Antoine et Antoinette gagne du terrain sur Antoine.

À $t = 20.25$, la distance parcourue par Antoine est l'aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 20.25$, soit 196.25 km, et la distance parcourue par Antoinette est l'aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 20.25$, soit 198.75 km. Antoinette a maintenant $198.75 - 196.25 = 2.5$ km. d'avance sur Antoine.

Entre $t = 20.25$ et $t = 20.50$, la voiture d'Antoine va plus vite que celle d'Antoinette et Antoine gagne du terrain sur Antoinette pour arriver au Musée d'Arts Contemporain en même temps que Antoinette.

La plus grande distance entre la voiture d'Antoine et d'Antoinette est donc de 57.5 km.

- c) À quel moment Antoinette rattrape-t-elle Antoine ?

Si T est le temps où Antoinette rattrape Antoine, il faut que l'aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq T$ soit égale à l'aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq T$.

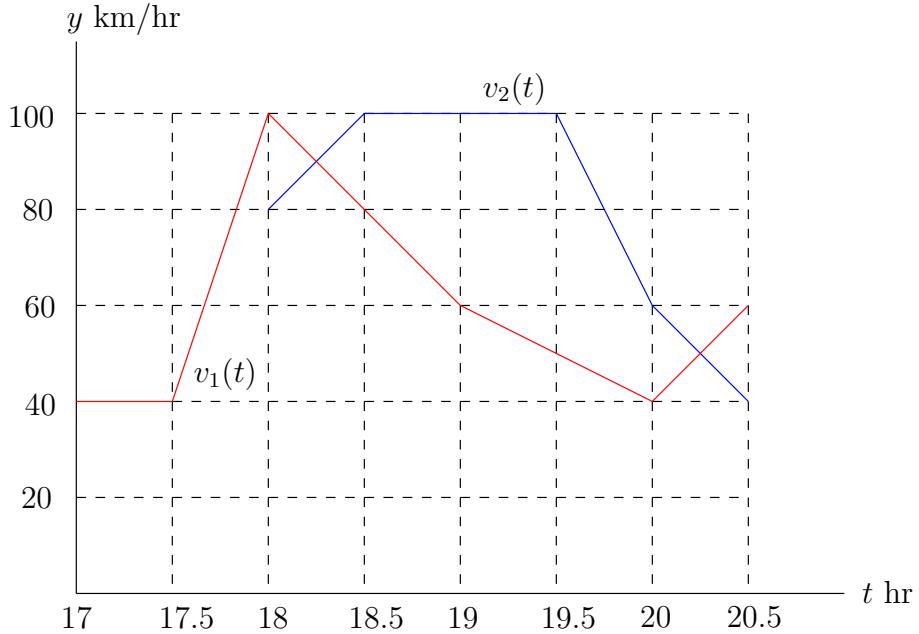


FIGURE 6.13 – La vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette

À $T = 20$ (i.e. 20h00), Antoine et Antoinette ont parcouru 185 km. Après 20h00, Antoinette devance Antoine.

L'histoire ne dit pas si Antoine et Antoinette se sont rencontrés au Musée d'Arts Contemporain. De plus, Ils auraient pu faire du co-voiturage pour diminuer leur impact sur l'environnement.



6.3.5 L'intégrale de Riemann (Stieljes)

La définition de l'intégrale que nous avons donnée à la page 316 est valable pour les fonctions continues par morceaux. Le fait que l'intégrande soit une fonction continue par morceaux permet de démontrer que la limite en (6.3.1) ne dépend pas du choix de partitions de l'intervalle d'intégration et du choix des points x_i^* .

La définition de l'intégrale définie d'une fonction que nous donnons dans cette section généralise celle donnée à la page 316.

On crédite Riemann (et Stieljes) pour la définition de l'intégrale définie que voici.

Soit f , une fonction bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, une partition de l'intervalle $[a, b]$. C'est-à-dire que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k = b$.

Pour $0 \leq i < k$, on pose

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \\ m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)\end{aligned}$$

et

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Δx_i est la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. m_i est la plus grande valeur telle que $m_i \leq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et M_i est la plus petite valeur telle que $M_i \geq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

La **somme inférieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à \mathcal{P} est

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} m_i \Delta x_i$$

(voir figure 6.14) et la **somme supérieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à \mathcal{P} est

$$U_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} M_i \Delta x_i$$

(voir figure 6.15).

Soit

$$L = \sup\{L_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}$$

et

$$U = \inf\{U_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}.$$

Si $U = L$, on dit que **f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$** et on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = L = U.$$

Les fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ sont intégrables au sens de Riemann et la formule donnée en (6.3.1) est satisfaite.

Nous utilisons la formule (6.3.1) pour calculer les intégrales définies de fonctions continues par morceaux car elle est plus simple que celle que nous venons de donner ci-dessus.

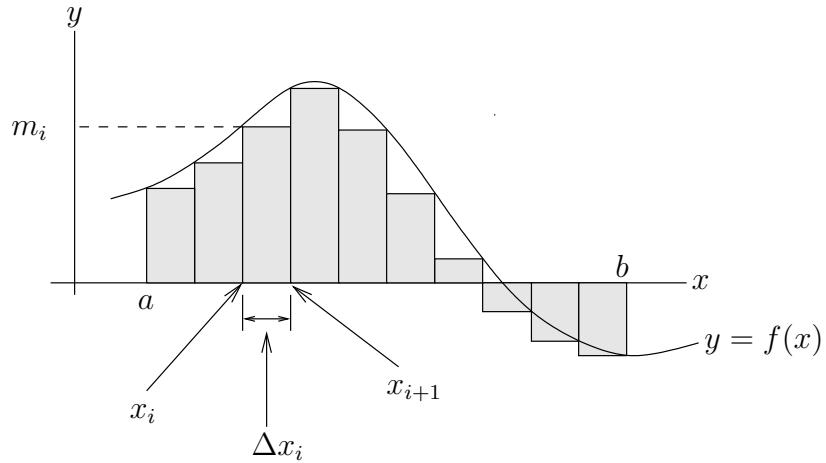


FIGURE 6.14 – Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

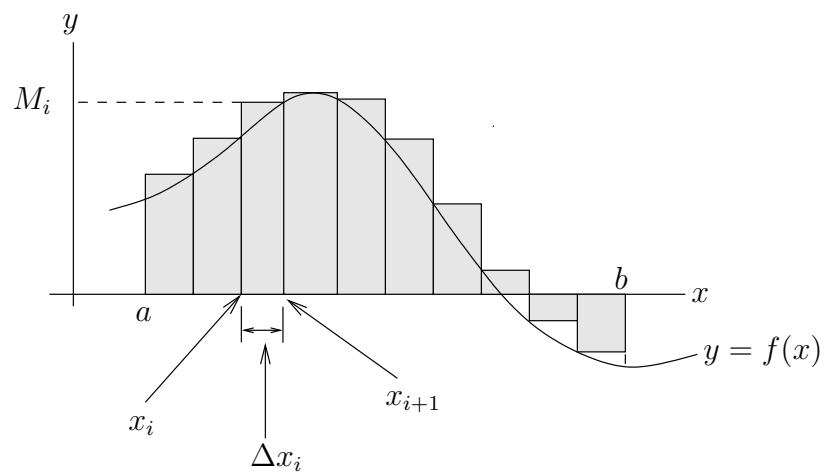


FIGURE 6.15 – Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

6.4 Théorème fondamental du calcul

Dans cette section, nous verrons comment le calcul des intégrales indéfinies peut quelques fois être utilisé pour évaluer les intégrales définies. Par contre, dans les applications réelles, les intégrales définies sont plus fréquemment évaluées avec un ordinateur à partir de la définition de l'intégrale définie ou d'un algorithme qui découle de cette définition. Nous verrons quelques algorithmes pour évaluer numériquement les intégrales définies dans une prochaine section.

6.4.1 Première version du théorème fondamental du calcul

À la section 6.3.4, nous avons observé que pour évaluer la distance parcourue par une voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, il suffisait de calculer l'intégrale définie de la vitesse $v(t)$ de la voiture au temps t de $t = a$ à $t = b$. De plus, à la remarque 6.3.17, on a noté qu'on pouvait remplacer le calcul de l'intégrale avec les sommes de Riemann par la valeur $p(b) - p(a)$ où $p(t)$ est la primitive de la vitesse $v(t)$; c'est-à-dire, $p'(t) = v(t)$. C'est essentiellement l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 6.4.1 (Théorème fondamental du calcul)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et si F est une fonction différentiable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$ sur $[a, b]$ (i.e. F est une primitive de f), alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b \equiv F(b) - F(a).$$

Remarque 6.4.2

On peut motiver le théorème précédent de la façon suivante.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx . Grâce au théorème de la moyenne, il existe x_i^* entre x_i et x_{i+1} tel que

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(x_i^*) = f(x_i^*)$$

pour $i = 0, 1, \dots, k-1$. Ainsi,

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i^*)\Delta x_i$$

pour $i = 0, 1, \dots, k-1$. On obtient la somme de Riemann

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \dots + (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Pour k suffisamment grand, on a

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_k = F(b) - F(a) .$$

C'est essentiellement l'idée de la démonstration du théorème fondamental du calcul.



Exemple 6.4.3

Si f est la **distribution de densité** d'une population en fonction de l'âge en années, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

est le pourcentage de la population âgée entre α et β ans. Si T est l'âge maximal des individus de cette population, on doit avoir

$$\int_0^T f(t) dt = 1 .$$

C'est-à-dire, 100% de la population est âgé de 0 à T ans.

Si on suppose que l'âge maximum des individus d'une population animale est 10 ans et que la distribution de densité de cette population en fonction de l'âge est donnée par $f(t) = 0.006 t(10 - t)$ pour $0 \leq t \leq 10$ années, quel est le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans ?

Le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans est donné par

$$\int_2^7 0.006 t(10 - t) dt .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut trouver une primitive de $f(t) = 0.006 t(10 - t)$.

$$\int 0.006 t(10 - t) dt = 0.06 \int t dt - 0.006 \int t^2 dt = 0.03t^2 - 0.002t^3 + C .$$

Puisque l'on a besoin d'une seule primitive, on peut prendre $C = 0$. Donc,

$$\int_2^7 0.006 t(10 - t) dt = \left(0.03t^2 - 0.002t^3 \right) \Big|_{t=2}^7 = 0.784 - 0.104 = 0.68$$

et 68% de la population animale est entre 2 et 7 ans.



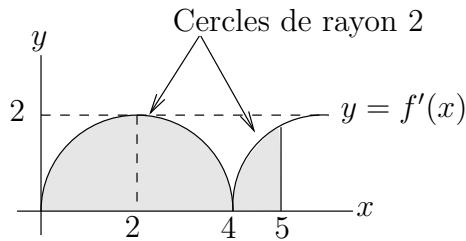
Remarque 6.4.4

À l'exemple précédent, l'intégrale de la fonction de densité de 2 à 7 nous donne le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans. Est-ce que cela inclus les individus âgés de précisément 2 et 7 ans ? En fait, que ceux âgés de précisément 2 et 7 ans soient inclus ou non n'a pas d'importance car il y a probablement aucun individu âgé de précisément 2 et 7 ans. Quelle est la chance qu'un individu de l'espèce animale soit âgé de précisément 2 ou 7 ans ? Mathématiquement, il n'y a aucune chance. Peut-être que l'individu aura deux ans et une seconde, ou deux ans et un centième de seconde, mais la chance qu'il est exactement 2 ans est nulle.



Exemple 6.4.5

Le graphe de la dérivée d'une fonction f est donnée dans la figure suivante :



Si $f(0) = 3$, quelle est la valeur de $f(5)$?

Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x) dx = 3 + \int_0^5 f'(x) dx .$$

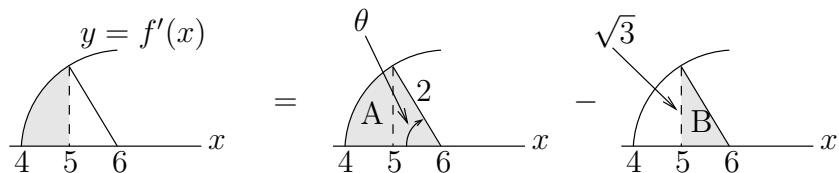
Il faut donc calculer l'aire sous la courbe $y = f'(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$. Or

$$\int_0^5 f'(x) dx = \int_0^4 f'(x) dx + \int_4^5 f'(x) dx .$$

Puisque $\int_0^4 f'(x) dx$ représente la moitié de l'aire du disque de rayon 2, on a que

$$\int_0^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} (2^2 \pi) = 2\pi .$$

Pour évaluer l'intégrale de f' entre 4 et 5, on utilise la figure suivante :



L'angle θ est donnée par $\cos(\theta) = 1/2$. Donc, $\theta = \pi/3$. Ainsi, l'aire de la région A est un sixième de l'aire du disque de rayon 2 ; c'est-à-dire, l'aire de A est $2^2 \pi / 6 = 2\pi/3$. L'aire du triangle B est $\sqrt{3}/2$. Donc,

$$\int_4^5 f'(x) dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

On obtient

$$f(5) = 3 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} + \frac{6 - \sqrt{3}}{2} .$$



Exemple 6.4.6

Évaluer les intégrales définies suivantes :

$$\text{a)} \quad \int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 dt \quad \text{b)} \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Grâce au théorème fondamental du calcul, nous n'avons plus à utiliser la définition de l'intégrale définie (et donc les sommes de Riemann) pour évaluer ces intégrales.

a)

$$\begin{aligned} \int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 dt &= \int_4^9 \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln(t) \right) \Big|_{t=4}^9 \\ &= \left(\frac{9^2}{2} + 2 \times 9 + \ln(9) \right) - \left(\frac{4^2}{2} + 2 \times 4 + \ln(4) \right) \\ &= \frac{85}{2} + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

car $t^2/2 + 2t + \ln(t)$ est une primitive de $t + 2 + 1/t$.

b)

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) \Big|_{x=0}^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

car $\arcsin(x)$ est une primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$. ♣

Remarque 6.4.7

Le théorème fondamental du calcul est indépendant de la primitive F qui est utilisée dans la formule

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Si G est une autre primitive de f , on a vu qu'il existait une constante C telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x . Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

car $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. ♠

La règle de substitution prend une forme particulière dans le contexte des intégrales définies.

Théorème 6.4.8

Si

1. g est une fonction différentiable (croissante ou décroissante),
2. F est la primitive d'une fonction f , et
3. f et F sont définies sur l'image de $[a, b]$ par g ,

alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose $y = g(x)$, alors $dy = g'(x) dx$ et

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy .$$

On rappelle que le symbole $dy = g'(x) dx$ n'est pas une égalité algébrique, il indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y .

Exemple 6.4.9

Évaluer les intégrales définies suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} dx & \text{b)} \quad \int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta & \text{c)} \quad \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx \\ \text{d)} \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx & \text{e)} \quad \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} dt & \end{array}$$

a) Si on pose $y = x^3 + 5$, on a $dy = 3x^2 dx$. De plus $y = 6$ pour $x = 1$ et $y = 32$ pour $x = 3$. Donc,

$$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} dx = \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 5}} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_6^{32} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{3} \sqrt{y} \Big|_{y=6}^{32} = \frac{2}{3} (4\sqrt{2} - \sqrt{6}) .$$

b) Si on pose $y = -\cos(\theta)$, on a $dy = \sin(\theta) d\theta$. De plus $y = -1$ pour $\theta = 0$ et $y = 0$ pour $\theta = \pi/2$. Donc,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^0 e^y dy = e^y \Big|_{y=-1}^0 = 1 - e^{-1} .$$

c) si on pose $y = x^2$, on a $dy = 2x dx$. De plus $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = 1/2$ pour $x = 1/\sqrt{2}$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(y) \Big|_{y=0}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - 0 \right) = \frac{\pi}{12} . \end{aligned}$$

d) Si on pose $y = \sqrt{x}$, on a $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. De plus $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = \pi$ pour $x = \pi^2$. Donc,

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(y) dy = 2 \sin(y) \Big|_{y=0}^{\pi} = 0 .$$

e) Si on pose $y = 5 - t$, on a $dy = -dt$ et $t + 7 = 12 - y$. De plus $y = 5$ pour $t = 0$ et $y = 1$ pour $t = 4$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} dt &= - \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} (-1) dt = - \int_5^1 \frac{12-y}{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_1^5 (12y^{-1/2} - y^{1/2}) dy = \left(24y^{1/2} - \frac{2}{3}y^{3/2} \right) \Big|_{y=1}^5 = \frac{62}{3}\sqrt{5} - \frac{70}{3}. \end{aligned}$$



Remarque 6.4.10

Comme dans le cas des intégrales indéfinies, il est préférable à l'occasion d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx .$$

On a l'intégrale de gauche et il faut obtenir l'intégrale de droite. Il faut trouver a et b qui donneront les bornes d'intégration $g(a)$ et $g(b)$ de l'intégrale de gauche. 

À l'instar de la règle de substitution, la règle d'intégration par parties prend la forme suivante.

Définition 6.4.11

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx .$$

Exemple 6.4.12

Évaluer les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a)} \quad \int_1^3 (5x+2)e^{3x} dx \qquad \mathbf{b)} \quad \int_0^1 \arctan(t) dt$$

a) On a $(5x+2)e^{3x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 5x+2$ et $g'(x) = e^{3x}$. Donc, $f'(x) = 5$, $g(x) = e^{3x}/3$ et

$$\begin{aligned} \int_1^3 (5x+2)e^{3x} dx &= \int_1^3 f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^3 - \int_1^3 g(x) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{3}(5x+2)e^{3x} \Big|_{x=1}^3 - \frac{5}{3} \int_1^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}(5x+2)e^{3x} \Big|_{x=1}^3 - \frac{5}{9}e^{3x} \Big|_{x=1}^3 \\ &= \frac{17}{3}e^9 - \frac{7}{3}e^3 - \frac{5}{9}e^9 + \frac{5}{9}e^3 = \frac{46}{9}e^9 - \frac{16}{9}e^3 . \end{aligned}$$

b) On a $\arctan(t) = f(t)g'(t)$ où $f(t) = \arctan(t)$ et $g'(t) = 1$. Donc, $f'(t) = 1/(1+t^2)$, $g(t) = t$ et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(t) dt &= \int_0^1 f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 g(x) f'(x) dx \\ &= t \arctan(t) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt.\end{aligned}$$

Or, si on pose $y = 1+t^2$, on obtient $dy = 2t dt$. De plus, $y = 1$ lorsque $t = 0$ et $y = 2$ lorsque $t = 1$. Donc,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} 2t dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1}^2 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

Finalement,

$$\int_0^1 \arctan(t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$



6.4.2 Deuxième version du théorème fondamental du calcul

Théorème 6.4.13 (Deuxième version du théorème fondamental du calcul)

Si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad , \quad x \in [a, b],$$

est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $F'(c) = f(c)$ aux points c où f est continue. En particulier, si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors F est une primitive de f ; c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 6.4.14

Une des plus importantes fonctions en statistique est la fonction de densité

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart type.

Une variable X est dite **aléatoire** si elle représente le résultat d'une expérience que l'on ne peut pas prédire exactement. Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type

d'ampoules électriques est une variable aléatoire. Si on dit que la durée de vie moyenne d'une ampoule est 400 heures, cela veut dire que certaines ampoules dureront un peu plus de 400 heures et d'autres un peu moins de 400 heures. On ne peut pas déterminer exactement la durée de vie d'une ampoule spécifique.

On dit que la variable aléatoire X possède une **distribution normale** de **moyenne** μ et de **d'écart type** σ si la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b est

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx .$$

C'est-à-dire que l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x , et les droites $x = a$ et $x = b$ est la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b . À la figure 6.16, on retrouve le graphe de la fonction de densité pour $\mu = 400$ et $\sigma = 20$.

Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est normalement distribuée avec une durée de vie moyenne de 400 heures et un écart type de 20 heures.

Il n'existe pas de fonction connue qui soit la primitive de f . Par contre, la deuxième version du théorème fondamental du calcul affirme l'existence d'une primitive pour f . Une primitive de f est

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt .$$

Pour évaluer la fonction F , on doit calculer numériquement (e.g. avec les sommes de Riemann) cette intégrale. ♣

Exemple 6.4.15

Calculer la dérivée de $F(x) = \int_1^{x^2} (1+s^2)^{3/2} ds$.

Posons,

$$G(u) = \int_1^u (1+s^2)^{3/2} ds \quad \text{et} \quad H(x) = x^2 .$$

Alors $F(x) = G(H(x))$ et $F'(x) = G'(H(x)) H'(x)$. La deuxième version du théorème fondamental du calcul nous donne $G'(u) = (1+u^2)^{3/2}$. Ainsi, puisque $H'(x) = 2x$, on obtient

$$F'(x) = G'(H(x)) H'(x) = \left(1 + (x^2)^2\right)^{3/2} (2x) = 2x (1+x^4)^{3/2} .$$



Remarque 6.4.16

Si f est continue au point c , la deuxième version du théorème fondamental du calcul nous assure que $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ est différentiable au point c et que $F'(c) = f(c)$. Si f n'est pas continue au point c , on ne peut rien affirmer.

Prenons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

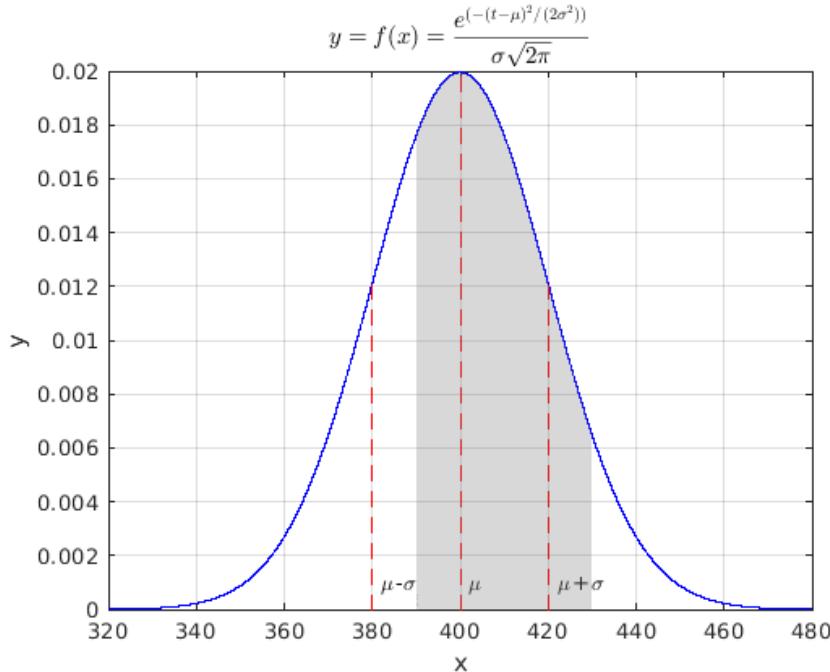


FIGURE 6.16 – La fonction de densité pour la distribution normale de moyenne $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 20$. L'aire de la région en gris représente la probabilité que la variable aléatoire X soit entre 390 et 430.

On a

$$F(x) = \int_0^x f(s) \, ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Donc, F est une fonction continue comme il est prévu par la deuxième version du théorème fondamental du calcul car f est continue par morceaux. On retrouve le graphe de f et de F à la figure 6.17.

Par contre, F n'est pas différentiable au point $x = 1$ où f n'est pas continue. ♠

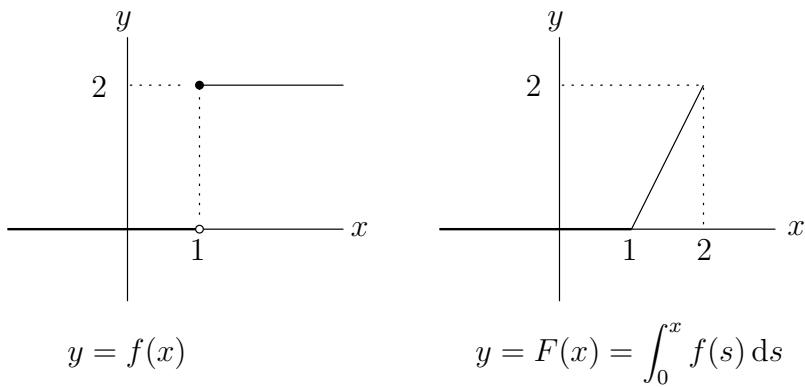
6.5 L'intégrale impropre

6.5.1 Intégrale sur un intervalle d'intégration de longueur infinie

Jusqu'à présent nous avons évalué des intégrales de la forme

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

où les bornes d'intégration a et b sont des nombres réels.

FIGURE 6.17 – Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s) \, ds$

Pour tout entier positif k , le fait que l'intervalle $[a, b]$ soit de longueur finie nous a permis de définir le nombre réel $\Delta x = (b - a)/k$ représentant la longueur de chacun des sous-intervalles d'une partition de l'intervalle $[a, b]$. Les k sous-intervalles ainsi obtenus étaient de la forme $[x_I, x_{I+1}]$ où $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Pour tout entier positif k , on a un nombre fini de sous-intervalles et donc une somme de Riemann avec un nombre fini de termes.

Il serait utile et naturel de définir l'intégrale sur des intervalles de longueur infinie de la forme $[a, \infty[$ où $]-\infty, b]$. On ne peut pas utiliser littéralement notre définition de l'intégrale définie pour définir une intégrale sur un intervalle de longueur infinie comme $[a, \infty[$ et $]\infty, b]$ car, pour un intervalle de longueur infinie, il est impossible de définir Δx comme le rapport de la longueur de l'intervalle sur le nombre k de sous-intervalles. Il faut regarder le problème d'un angle différent. Si on fixe la valeur de Δx , alors il faut un nombre infini d'intervalles de longueur Δx pour décomposer l'intervalle d'intégration de longueur infinie. Les sommes de Riemann auront alors un nombre infini de termes.

On peut tout de même utiliser l'existence des intégrales définies sur les intervalles bornés pour définir l'intégrale sur un intervalle de longueur infinie.

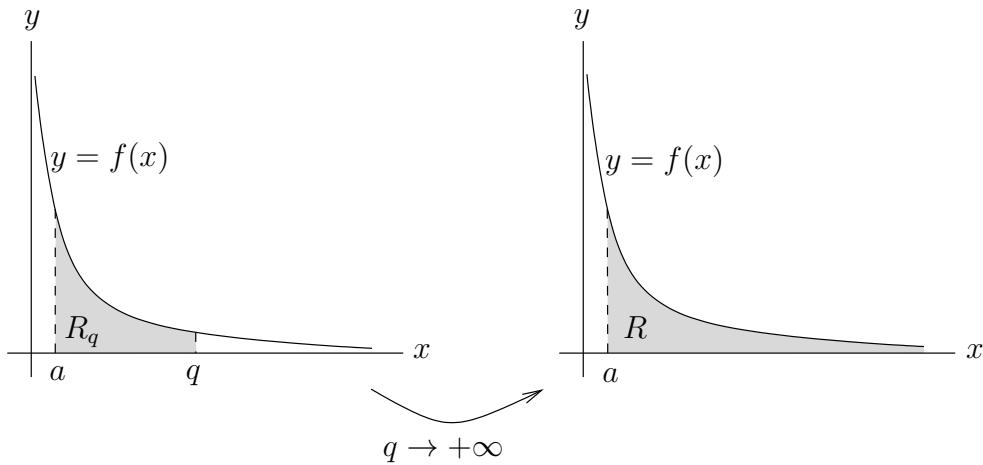


FIGURE 6.18 – L'intégrale de f de a à plus l'infini est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers plus l'infini. On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$.

Définition 6.5.1

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $[a, \infty[$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à plus l'infini** comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_a^q f(x) dx .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, b]$. On définit **l'intégrale impropre de f de moins l'infini à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^b f(x) dx .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x , l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x) dx$ représente l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$ comme on peut le voir à la figure 6.18. On peut énoncer un résultat semblable pour $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

Exemple 6.5.2

Évaluer l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$.

Par définition,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$$

si cette limite existe. Or, avec la substitution $y = x-1$, on obtient $dy = dx$ et

$$\int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \int_{q-1}^{-2} y^{-4/3} dy = (-3y^{-1/3}) \Big|_{y=q-1}^{-2} = \frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}}.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}} \right) = \frac{3}{2^{1/3}}.$$



Exemple 6.5.3

Évaluer l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3} dx$.

Par définition,

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

peut être intégrée à l'aide de la règle d'intégration par parties. On a $x^{-3} \ln(x) = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^{-3}$. Ainsi, $f'(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$ et

$$\begin{aligned} \int_1^q x^{-3} \ln(x) dx &= - \left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x) \right) \Big|_{x=1}^q + \int_1^q \frac{1}{2} x^{-3} dx \\ &= - \left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x) \right) \Big|_{x=1}^q - \left(\frac{1}{4} x^{-2} \right) \Big|_{x=1}^q \\ &= -\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

car, par la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ln(q)}{q^2} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^{-1}}{2q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q^2} = 0.$$



Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale impropre converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

Pour $p \neq 1$,

$$\int_1^q x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right) \Big|_{x=1}^q = \frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p} .$$

Pour $p = 1$,

$$\int_1^q x^{-p} dx = \int_1^q \frac{1}{x} dx = (\ln(x)) \Big|_{x=1}^q = \ln(q) .$$

Ainsi, pour $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)q^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

car $p-1 > 0$.

Pour $p < 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{-p+1} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$$

car $1-p > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q \frac{1}{x} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \ln(q) = \infty .$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 6.5.4

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leq 1$. De plus,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} , \quad p > 1 .$$

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ où a est un nombre réel quelconque.

Exemple 6.5.5

Évaluer si possible l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut diviser le domaine d'intégration en deux. On va évaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

On aurait pu choisir une autre valeur que 0 pour partager le domaine d'intégration. Cela ne change rien à la réponse finale, pourquoi ?

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \arctan(u) + C = \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

grâce à la substitution $u = x + 1$ et $du = dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=q}^0 \\ &= \lim_{q \rightarrow -\infty} (\arctan(1) - \arctan(q)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=0}^q \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (\arctan(q) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$



Exemple 6.5.6

Évaluer si possible l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$

On utilise la règle d'intégration par parties pour évaluer $\int xe^{-x} dx$.

On a $xe^{-x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Ainsi, $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q xe^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_{x=0}^q \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (-qe^{-q} - e^{-q} + 1) = 1 \end{aligned}$$

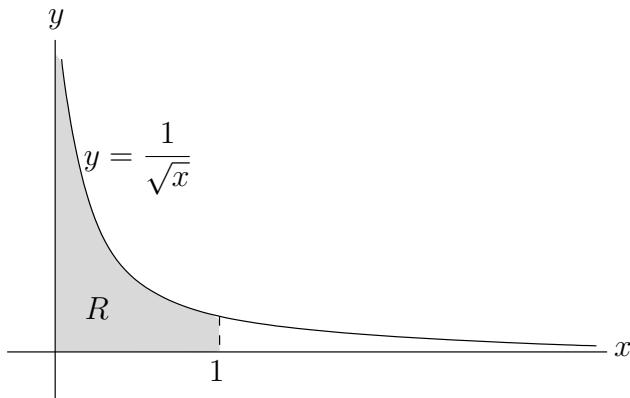


FIGURE 6.19 – La région R est la région bornée par la courbe $y = f(x) = 1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

car

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{e^q} = 0$$

et

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q e^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q}{e^q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{e^q} = 0 .$$

Pour le calcul de cette dernière limite, nous avons utilisé la règle de l'Hospital pour obtenir la deuxième égalité car $\lim_{n \rightarrow \infty} q = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} e^q = +\infty$. ♣

6.5.2 Intégrale avec un intégrande non borné

Une autre situation où il serait utile de définir l'intégrale est lorsque l'intégrande n'est pas borné. Par exemple, peut-on définir l'intégrale de façon à pouvoir l'utiliser pour calculer l'aire A de la région R de la figure 6.19 qui est bornée par la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

On défini respectivement ci-dessous ce que sera l'intégrale d'une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = a$, et l'intégrale d'une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = b$.

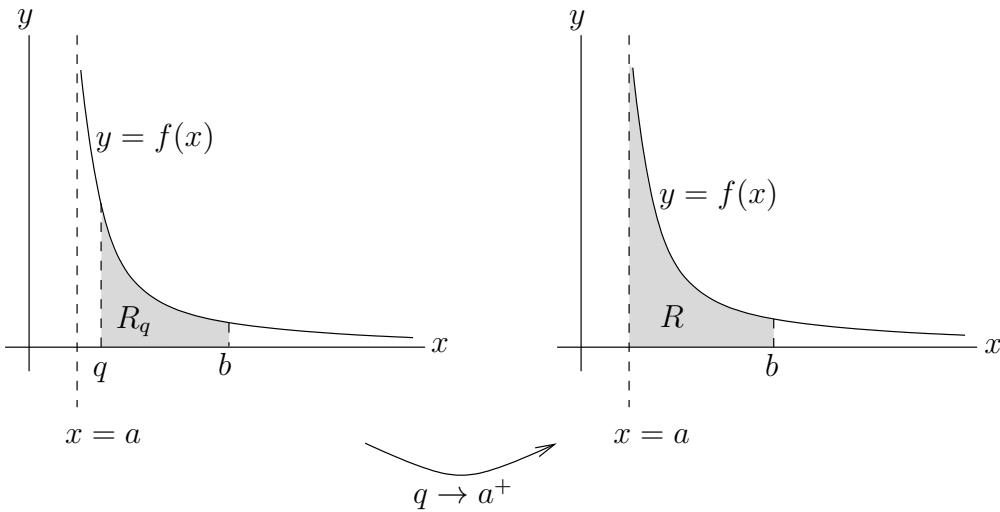


FIGURE 6.20 – L'intégrale de f de a à b est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers a . On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Définition 6.5.7

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $]a, b]$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow a^+} \int_q^b f(x) dx$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow b^-} \int_a^q f(x) dx .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x , ces intégrales improprest représentent l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$ comme on peut le voir à la figure 6.20.

Exemple 6.5.8

Évaluez l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Puisque $x = 0$ est une asymptote verticale pour $f(x) = 1/\sqrt{x}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_q^1 x^{-1/2} dx = \left(2x^{1/2} \right) \Big|_{x=q}^1 = 2 - 2\sqrt{q} .$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{q}) = 2 .$$



Exemple 6.5.9

Déterminez si l'intégrale impropre $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ converge ou diverge. Si elle converge, donner la valeur de l'intégrale.

On note que $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)}$$

a une asymptote verticale à $x = 2$. Le graphe de f est donné à la figure 6.21. Ainsi, il faut déterminer si

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$$

existe.

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la méthode des fractions partielles. C'est-à-dire que l'on détermine les variables A et B telles que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2} .$$

Si on écrit ces fractions sur un même commun dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)} + \frac{B(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} .$$

On a égalité lorsque l'on a le même numérateur des deux côtés de l'égalité ; c'est-à-dire si $1 = A(x - 2) + B(x + 3)$. Pour $x = -3$, on obtient $1 = -5A$ et ainsi $A = -1/5$. Pour $x = 2$, on obtient $1 = 5B$ et ainsi $B = 1/5$. On a donc que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x + 3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x - 2} \right) .$$

Ainsi,

$$\int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = -\frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x + 3} dx + \frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x - 2} dx$$

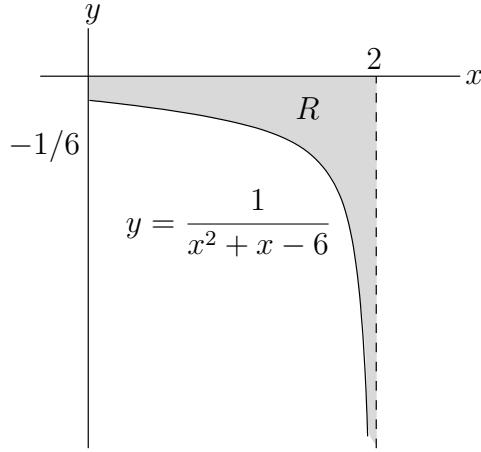


FIGURE 6.21 – Graphe de $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ pour $0 \leq x < 2$.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{5} \ln(x+3) \Big|_{x=0}^q + \frac{1}{5} \ln|x-2| \Big|_{x=0}^q \\ &= -\frac{1}{5} (\ln(q+3) - \ln(3) - \ln|q-2| + \ln(2)) \\ &= -\frac{1}{5} (\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln(2/3)) . \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln|q-2| = -\infty$ et $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln(q+3) = \ln(5)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx &= \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx \\ &= -\frac{1}{5} \lim_{q \rightarrow 2^-} \left(\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) = -\infty . \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge. 

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx$$

Pour $p \neq 1$,

$$\int_q^1 x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right) \Big|_{x=q}^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} .$$

Pour $p = 1$,

$$\int_q^1 x^{-p} dx = \int_q^1 \frac{1}{x} dx = (\ln(x)) \Big|_{x=q}^1 = -\ln(q) .$$

Ainsi, pour $p < 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

car $1-p > 0$.

Pour $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)q^{p-1}} \right) = \infty \end{aligned}$$

car $p-1 > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{q \rightarrow 0^+} \ln(q) = \infty.$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 6.5.10

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge pour $p < 1$ et diverge pour $p \geq 1$. De plus, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ pour $p < 1$.

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ où $a > 0$ est un nombre réel quelconque.

Remarque 6.5.11 ☺

La proposition 6.5.10 peut être déduite de la proposition 6.5.4 et vice-versa. Si on pose $t = 1/x$, on a $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ et

$$\int_1^q \frac{1}{x^p} dx = \int_1^q \frac{-1}{x^{p-2}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) dx = -\int_1^{1/q} \frac{1}{t^{2-p}} dt = \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt.$$

Les énoncés suivants sont équivalents.

- la proposition 6.5.4 est vrai.
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{1}{x^p} dx$ existe si et seulement si $p > 1$.
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si $p > 1$.
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si $2-p < 1$.

$\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow 0} \int_q^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si $2 - p < 1$.
 \Leftrightarrow la proposition 6.5.10 est vrai.

On obtient la conclusion de la proposition 6.5.10 à partir de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ en y remplaçant $2 - p$ par p . 

6.6 Test de comparaison

Il est généralement difficile d'évaluer algébriquement les intégrales. C'est encore plus évident dans le cas des intégrales improches. On a donc souvent recours aux méthodes numériques pour estimer la valeur des intégrales improches. Avant d'estimer numériquement une intégrale impropre, il est nécessaire de déterminer si elle converge. Le fait que les calculs numériques d'une intégrale impropre produisent des valeurs supérieures à ce qu'un ordinateur peut traiter (on parle de « overflow ») n'indique pas que l'intégrale impropre diverge. Il se pourrait très bien que la valeur de l'intégrale soit en fait une valeur plus grande que l'ordinateur peut traiter. Il est aussi possible que ce problème soit dû à des erreurs de troncature ou à l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique inappropriée.

Nous présentons un test pour déterminer si une intégrale impropre converge ou diverge. Les propositions 6.5.4 et 6.5.10 seront d'une très grande utilité.

Théorème 6.6.1 (Test de comparaison)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondre à des asymptotes verticales pour les fonctions f et g .

1. Si $\int_a^b g(x) dx$ converge alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.
2. Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge alors $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

Dans le cas où f et g sont continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et $b = \infty$, le théorème précédent est une conséquence de la relation $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tous x dans l'intervalle $[a, +\infty[$. En effet, il découle de cette dernière inégalité que

$$0 \leq \int_a^q f(x) dx \leq \int_a^q g(x) dx \tag{6.6.1}$$

pour tout $q \geq a$. Définissons les fonctions

$$F(q) = \int_a^q f(x) dx \tag{6.6.2}$$

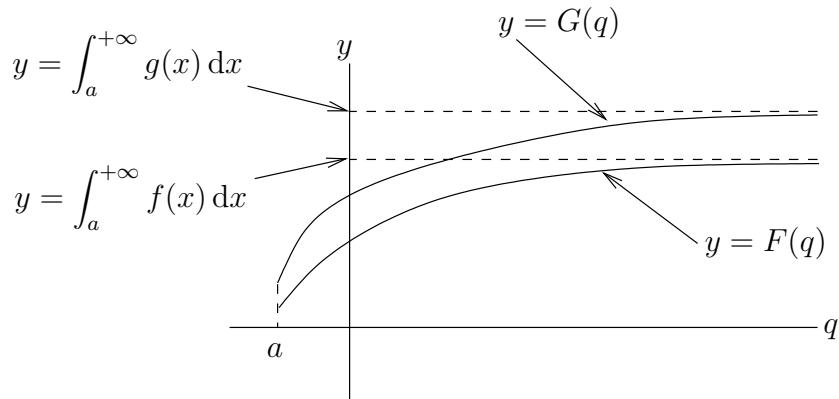


FIGURE 6.22 – Représentation qualitative du graphe des fonctions F et G définies en (6.6.2) et (6.6.3) respectivement.

et

$$G(q) = \int_a^q g(x) \, dx \quad (6.6.3)$$

Puisque f et g sont deux fonctions positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$, les fonctions F et G sont positives et croissantes (l'aire sous la courbe augmente lorsque q augmente). De plus, (6.6.1) devient $0 \leq F(q) \leq G(q)$ pour tout q .

Si on suppose que

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} G(q)$$

converge, alors F est une fonction croissante bornée supérieurement par

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx .$$

Il s'en suit que

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} F(q)$$

converge grâce au théorème 2.1.20. On retrouve à la figure 6.22 deux graphes qui peuvent représenter qualitativement les graphes de F et G .

Par contre si $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge alors F est une fonction qui croît sans limite supérieure. Il en est donc de même pour G car $F(q) \leq G(q)$ pour tout q . Ainsi, $\lim_{q \rightarrow +\infty} G(q) = +\infty$ et $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ diverge.

La justification du test de comparaison pour les autres types d'intégrales improprest semblaient.

Exemple 6.6.2

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

$$\mathbf{a}) \quad \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx \qquad \mathbf{b}) \quad \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3 - x + 1} dx$$

a) Puisque

$$0 \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

converge (c'est le cas $p > 1$ de la proposition 6.5.4), on a que

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$$

converge grâce au test de comparaison.

b) On commence par remarquer que $\frac{x^2}{x^3 - x + 1} > 1/x$ pour $x \geq 1$. En effet, pour $x \geq 1$, on a $0 \geq 1 - x$ et ainsi

$$x^3 \geq x^3 - x + 1. \quad (6.6.4)$$

La fonction $p(x) = x^3 - x + 1$ est croissante pour $x \geq 1$ car $p'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ pour $x \geq 1$. Ainsi, $x^3 - x + 1 = p(x) \geq p(1) = 1 > 0$ pour $x \geq 1$. On peut donc diviser les deux cotés de l'inégalité en (6.6.4) par $x(x^3 - x + 1)$ sans changer la direction de l'inégalité et sans risquer de diviser par zéro. On obtient

$$\frac{x^2}{x^3 - x + 1} \geq \frac{1}{x}$$

pour $x \geq 1$.

Puisque

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

diverge (c'est le cas $p \leq 1$ de la proposition 6.5.4), on a que

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3 - x + 1} dx$$

diverge grâce au test de comparaison. 

Exemple 6.6.3

Déterminer si l'intégrale

$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx$$

converge ou diverge.

C'est une intégrale impropre car $x = 1$ est une asymptote verticale de $(x^2 - 1)^{-1/3}$. On a

$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \int_q^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx .$$

Puisque notre intention est de comparer cette intégrale avec l'intégrale entre 0 et a de la proposition 6.5.10, nous commençons par une simple substitution pour obtenir 0 comme borne inférieure pour l'intégrale. Soit $u = x - 1$. On a $du = dx$, $u = q - 1$ lorsque $x = q$ et $u = 4$ lorsque $x = 5$. Ainsi,

$$\int_q^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx = \int_{q-1}^4 \frac{1}{((u+1)^2 - 1)^{1/3}} du = \int_{q-1}^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du .$$

Ainsi, lorsque q tend vers 1, on obtient que $\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx$ converge si et seulement si $\int_0^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du$ converge. La substitution $u = x - 1$ est simplement une translation de l'intervalle d'intégration de 1 vers la gauche. Il suffit de terminer si cette dernière intégrale impropre converge ou diverge pour obtenir la même conclusion pour l'intégrale impropre du départ.

Puisque

$$(u^2 + 2u)^{1/3} = u^{2/3} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^{1/3} \geq u^{2/3}$$

pour $u > 0$, on a

$$0 \leq \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} \leq \frac{1}{u^{2/3}}$$

pour tout $u > 0$. Puisque

$$\int_0^4 \frac{1}{u^{2/3}} du$$

converge (c'est le cas $p < 1$ de la proposition 6.5.10), on a que

$$\int_0^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du$$

converge grâce au test de comparaison. ♣

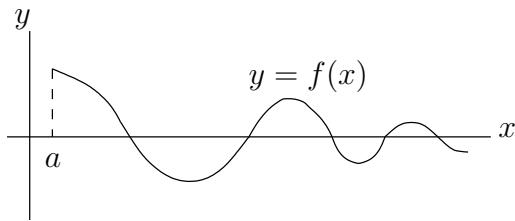
Le test de comparaison peut aussi être utilisé pour déterminer la convergence d'intégrales impropre dont l'intégrande peut avoir des valeurs négatives.

Théorème 6.6.4

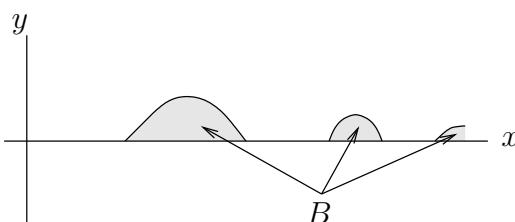
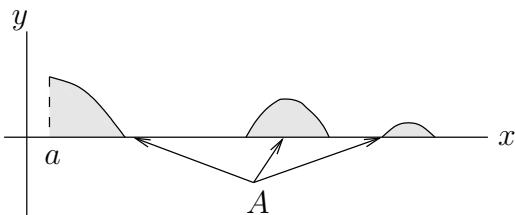
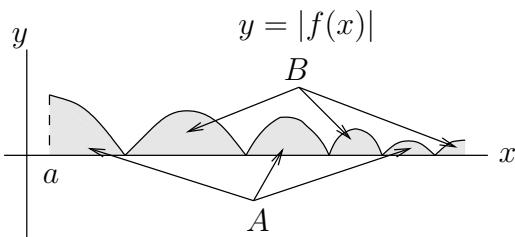
Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondre à des asymptotes verticales pour la fonction f . Alors $\int_a^b f(x) dx$ converge si $\int_a^b |f(x)| dx$ converge.

Par exemple, $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge.

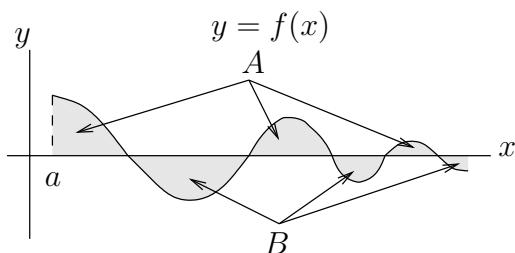
Il est possible de justifier intuitivement ce résultat en considérant le graphe de f . Supposons que le graphe de f est celui donné à la ci-dessous.



L'aire de la région A plus l'aire de la région B dans la figure suivante donnent l'aire sous la courbe $y = |f(x)|$ pour $a \leq x < \infty$; c'est-à-dire, $\int_a^\infty |f(x)| dx$.



On suppose que la valeur de cette intégrale est finie. Donc l'aire de la région A et l'aire de la région B sont aussi des valeurs finies. Il s'en suit que la valeur de $\int_a^\infty f(x) dx$ est finie car c'est l'aire de la région A moins l'aire de la région B comme on peut le voir dans la figure suivante.



Remarque 6.6.5

Nous présentons ci-dessous une démonstration que $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge. Cette démonstration formalise la justification graphique que nous venons de donner ci-dessus.

Si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge alors $\int_a^\infty 2|f(x)| dx$ converge car

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q 2|f(x)| dx = 2 \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q |f(x)| dx .$$

Puisque

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

pour tout x dans l'intervalle $]a, \infty[$, on obtient que $\int_a^\infty (|f(x)| - f(x)) dx$ converge grâce au test de comparaison.

Finalement, $\int_a^\infty f(x) dx$ converge car

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q f(x) dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\int_a^q |f(x)| dx - \int_a^q (|f(x)| - f(x)) dx \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q |f(x)| dx - \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q (|f(x)| - f(x)) dx \end{aligned}$$

où les deux dernières limites existent.

On pourrait tirer la même conclusion en considérant les autres formes pour l'intégrale impropre.

**Exemple 6.6.6**

On a vu à l'exemple 6.6.2 que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$ convergeait. Il s'en suit que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ converge.

**Remarque 6.6.7**

Si $\int_a^b |f(x)| dx$ diverge, on ne peut rien dire au sujet de $\int_a^b f(x) dx$.

Par exemple, $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge mais $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

i) Commençons par montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Puisque $\sin(x)/x = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 1/x$ et $g'(x) = \sin(x)$, on obtient $f'(x) = -1/x^2$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\int_1^q \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

par la règle d'intégration par parties. Puisque

$$0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge grâce à la proposition 6.5.4, on a que

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx$$

converge. Donc $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge. De plus

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q \right) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\cos(1) - \frac{\cos(q)}{q} \right) = \cos(1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

est une nombre réel.

ii) Pour montrer que $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = +\infty.$$

On remarque que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(k+1)\pi} \geq \frac{2}{\pi} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx$$

car

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \begin{cases} \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = 2 & \text{pour } k \text{ pair} \\ \int_\pi^{2\pi} -\sin(x) dx = \cos(x) \Big|_\pi^{2\pi} = 2 & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \\ &\geq \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln(2)) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

lorsque n tend vers plus l'infini. 

6.7 Méthodes numériques d'intégration

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable. Notre but est de développer des méthodes numériques qui nous permettront d'évaluer l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

lorsque nos techniques d'intégration s'avèrent impuissante à évaluer cette intégrale ou lorsque quelles aboutissent à des calculs algébriques qui sont longs et complexes.

L'idée principale qui supporte les méthodes numériques que nous présentons est la suivante. On cherche une fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x et telle que $\int_a^b p(x) dx$ est simple à évaluer. Si $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x , on peut espérer que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx .$$

Il y a une infinité de choix possible pour p . Les trois méthodes que l'on présente sont les suivantes :

1. La méthode du point milieu où p sera une fonction constante par morceaux.
2. La méthode des trapèzes où p sera une fonction linéaire par morceaux.
3. La méthode de Simpson où p sera une fonction quadratique par morceaux.

6.7.1 Méthode du point milieu

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$.

On définit la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = f(x_{2i+1}) \quad \text{si} \quad x_{2i} \leq x < x_{2i+2} .$$

C'est une fonction qui est constante par morceaux. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, la fonction p prend la valeur de f au point milieu x_{2i+1} . C'est ce qui est représenté à la figure 6.23. On a que

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i+1}) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}) = 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \end{aligned}$$

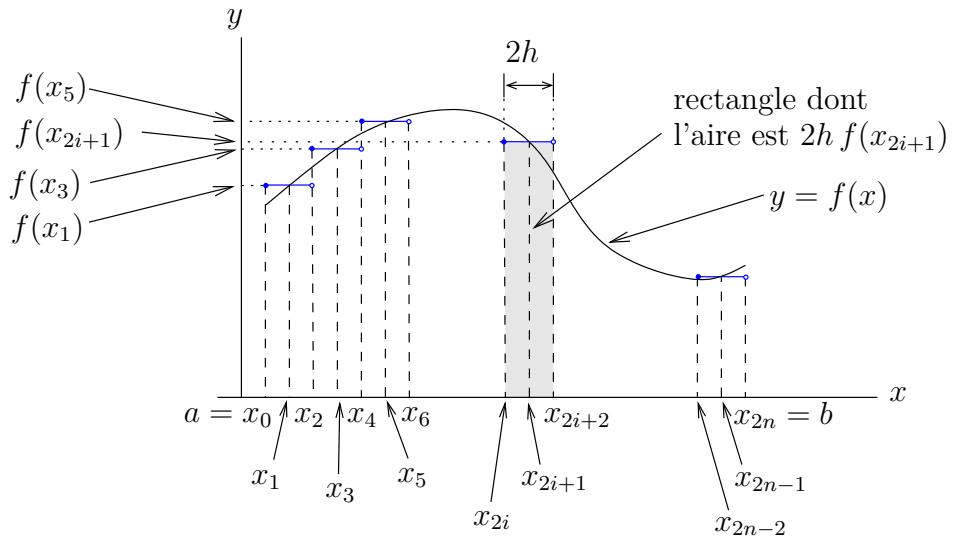


FIGURE 6.23 – Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale

La somme $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ est une somme de Riemann avec $\Delta x = 2h$ pour l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Donc, en théorie, $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque h tend vers 0. On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Soit $h = (b-a)/(2n)$ et $x_j = a + j h$ for $j = 0, 1 \dots, 2n$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre première méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.2 (Méthode du point milieu)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1})$$

où $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + j h$ for $j = 0, 1, \dots, 2n$.

l'erreur de troncature pour la méthode du point milieu est $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$.

Comme ξ à la proposition précédente est inconnu, l'erreur de troncature a une utilité limitée.

Exemple 6.7.3

Utiliser la méthode du point milieu pour estimer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ (i.e. la longueur de h) pour obtenir une erreur de troncature inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode du point milieu, on a $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisie n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2 \right| \leq \frac{6e}{6} \left(\frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{e}{4n^2} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{4} 10^4} = \frac{10^2}{2} \sqrt{e} \approx 82.436 .$$

On peut donc prendre $n = 83$.

On a $h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{166}$ et $x_{2i+1} = \frac{2i+1}{166}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 82$, On obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{166} \sum_{j=0}^{82} e^{((2j+1)/166)^2}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{83} \left(e^{(1/166)^2} + e^{(3/166)^2} + e^{(5/166)^2} + \dots + e^{(163/166)^2} + e^{(165/166)^2} \right) \\ &\approx 1.4626189 . \end{aligned}$$



Remarque 6.7.4

Si f est une fonction convexe, la méthode du point milieu donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode du point milieu donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que $f''(x) > 0$ pour tout x . Ainsi l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$ est positif. Par contre si, f est concave, on a que $f''(x) < 0$ pour tout x . Ainsi l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$ est négatif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide des figures 6.24 et 6.25.

À la figure 6.24, on a une fonction concave. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$ comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ est complètement recouverte par le trapèze $ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc inférieure ou égale à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , on a que

$$\int_a^b f(x) dx \leq 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) .$$

Dans la figure 6.25, on a une fonction convexe. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$ comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ recouvre complètement le trapèze $ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc supérieure à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , on a que

$$\int_a^b f(x) dx \geq 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) .$$



6.7.2 Méthode des trapèzes

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

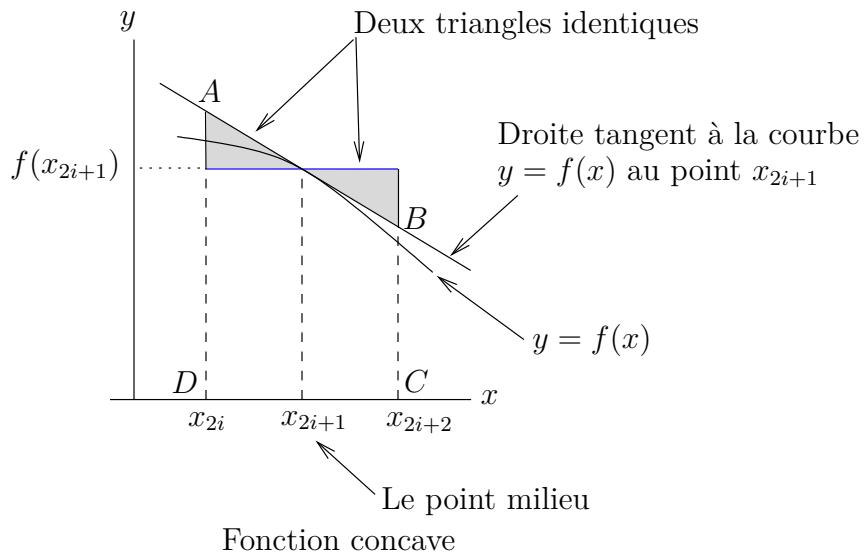


FIGURE 6.24 – La concavité de la fonction f détermine si la méthode du point milieu donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f . Dans le cas présent, on a une surestimation de l'intégrale car la fonction est concave.

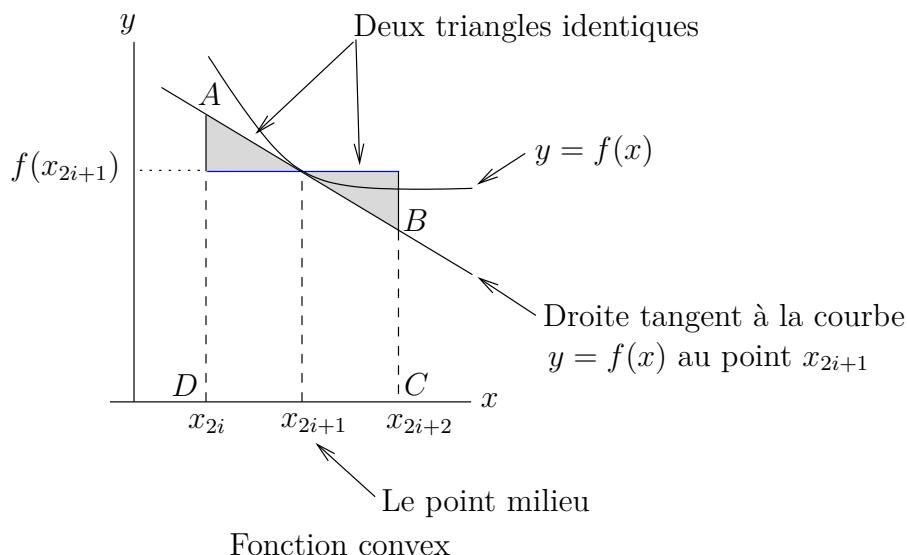


FIGURE 6.25 – La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe comme dans le cas présent.

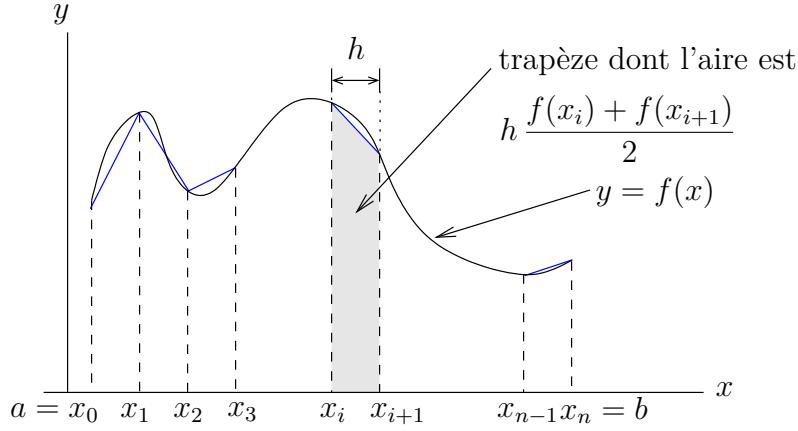


FIGURE 6.26 – Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale

On définit la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i) \quad \text{si } x_i \leq x < x_{i+1}.$$

C'est une fonction qui est linéaire par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, le graphe de la fonction p est la droite qui lie les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 6.26.

On a que

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx \\ &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + f(x_i) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Dans le cas où $f(x_i) > 0$ et $f(x_{i+1}) > 0$, on reconnaît la formule pour calculer l'aire du trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h et les côtés adjacents sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

On a donc que

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\ &= h \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right). \end{aligned}$$

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Soit $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + j h$ pour $j = 0, 1 \dots, n$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) - \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre deuxième méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.6 (Méthode des trapèzes)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right)$$

où $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + j h$ for $j = 0, 1 \dots, n$.

L'erreur de troncature pour la méthode des trapèzes est $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$.

Remarque 6.7.7

On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode du trapèze à l'aide des sommes à droite et à gauche. On a $T_n = (G_n + D_n)/2$. ♠

Exemple 6.7.8

Utiliser la méthode des trapèzes pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieure à 10^{-4} .

Dans la formule pour la méthode des trapèzes, on a $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/n = 1/n$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisie n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2 \right| \leq \frac{6e}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{e}{2n^2} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{2} 10^4} = 10^2 \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 116.5821$$

On peut donc prendre $n = 117$.

On a $h = \frac{1}{n} = \frac{1}{117}$ et $x_i = \frac{i}{117}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 117$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{234} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^{116} e^{(j/117)^2} + e^1 \right) \\ &\approx \frac{1}{234} \left(1 + 2 \left(e^{(1/117)^2} + e^{(2/117)^2} + \dots + e^{(116/117)^2} \right) + e \right) \\ &\approx 1.46268 . \end{aligned}$$



Remarque 6.7.9

Comme on a fait pour la méthode du point milieu, il est possible d'analyser l'effet de la courbure d'une fonction pour déterminer si la méthode des trapèzes donnera une surestimation ou une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

Si f est une fonction convexe, la méthode des trapèzes donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode des trapèzes donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que $f''(x) > 0$ pour tout x . Ainsi l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$ est négatif. Par contre si, f est concave, on a que $f''(x) < 0$ pour tout x . Ainsi l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$ est positif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide de la figure 6.27.

Le graphe de gauche dans la figure 6.27 représente une fonction concave. Le trapèze $ABCD$ est le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze $ABCD$ est complètement recouvert par la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus petite ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , on a que

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) .$$

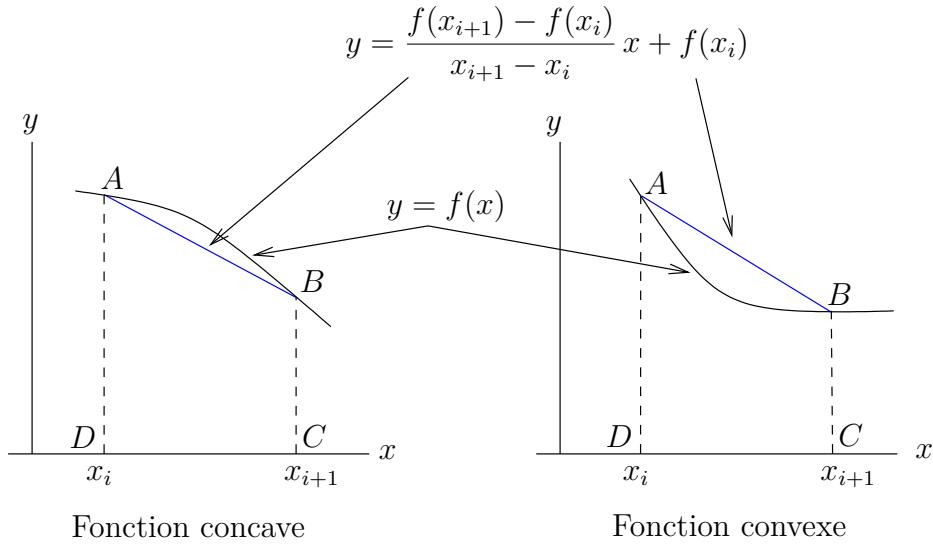


FIGURE 6.27 – La courbure de la fonction f détermine si la méthode des trapèzes donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f . Dans le graphe de gauche, on a une sous-estimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est concave. Par contre dans le graphe de droite, on a une surestimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est convexe.

Le graphe de droite dans la figure 6.27 représente une fonction convexe. Le trapèze $ABCD$ est toujours le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze $ABCD$ recouvre complètement la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus grande ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , on a que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right).$$



L'idée de majorer une fonction f par une autre fonction g pour obtenir la relation

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$$

peut être utilisée pour estimer la valeur d'intégrales improprees.

Exemple 6.7.10

Estimer la valeur de l'intégrale $\int_1^\infty e^{-x^2/2} dx$ avec une précision de 10^{-4} .

Il y a deux étapes pour trouver cette approximation.

- i) Puisque que

$$\int_1^\infty e^{-x^2/2} dx = \int_1^c e^{-x^2/2} dx + \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx$$

on cherche une valeur c telle que

$$0 \leq \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

ii) Lorsque l'on aura c , on utilisera une méthode numérique pour trouver une approximation I de $\int_1^c e^{-x^2/2} dx$ telle que

$$\left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx - I \right| < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

On aura alors que

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty e^{-x^2/2} dx - I \right| &= \left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx + \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx - I \right| \\ &\leq \left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx - I \right| + \left| \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx \right| \\ &< \frac{1}{2} 10^{-4} + \frac{1}{2} 10^{-4} = 10^{-4}. \end{aligned}$$

La valeur I est l'approximation cherchée.

i) Comme aucune de nos techniques d'intégration peut être utilisée pour évaluer l'intégrale

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2} dx,$$

nous majorons cette intégrale par une intégrale que l'on peut évaluer.

Pour $x \geq 2$, on a $x^2 \geq 2x$. Ainsi, $-x \geq -x^2/2$ pour $x \geq 2$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx &\leq \int_c^\infty e^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_c^q e^{-x} dx \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_c^q = \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-q} + e^{-c}) \\ &= e^{-c} \end{aligned}$$

pour $c \geq 2$. On prend c tel que

$$e^{-c} < \frac{1}{2} 10^{-4},$$

c'est-à-dire

$$c > -\ln\left(\frac{1}{2} 10^{-4}\right) = -\ln(2^{-1}) - \ln(10^{-4}) = \ln(2) + 4\ln(10) \approx 9.903487.$$

Donc, $c = 10$ est un bon choix.

ii) On utilise la méthode des trapèzes pour trouver une première approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx$.

Si on prend $n = 600$ dans la formule pour la méthode des trapèzes, puisque $a = 1$ et $b = 10$, on obtient $h = 9/600 = 3/200$, $x_i = 1 + 3i/200$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 600$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \approx I_1 = \frac{3}{400} \left(e^{-1/2} + 2 \sum_{j=1}^{599} e^{(1+3j/200)^2/2} + e^{10^2/2} \right) \approx 0.397701117958515 .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_1 est une surestimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On utilise la méthode du point milieu pour trouver une deuxième approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx$.

Si on prend $n = 600$ dans la formule pour la méthode du point milieu, puisque $a = 1$ et $b = 10$, on obtient $h = 9/1200 = 3/400$, $x_i = 1 + 3i/400$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 1200$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \approx I_2 = \frac{3}{200} \sum_{j=0}^{599} e^{(1+3(2j+1)/400)^2/2} \approx 0.397684059123784 .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_2 est une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On a

$$0.3976840 \leq \int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \leq 0.3977012 .$$

Puisque

$$0.3977012 - 0.3976840 = 0.172 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} 10^{-4} ,$$

on peut prendre $I = (0.3977012 + 0.3976840)/2 = 0.3976926$ comme approximation de $\int_1^{\infty} e^{-x^2/2} dx$.

Notez que l'on a assumé que les calculs numériques étaient exactes. Ce n'est généralement pas le cas. Il faudrait considérer les « round-off errors » qui sont dû à l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs.

Pour être plus rigoureux, on aurait pu utiliser nos formules pour calculer l'erreur de troncature afin de choisir une valeur de n qui soit possiblement plus petite que 600. On a ici simplement choisi une valeur de n au hasard en espérant qu'elle soit assez grande pour obtenir la précision requise. ♣

6.7.3 Méthode de Simpson

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre quatre qui est continue.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$.

On définit la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suivante. Pour $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$, on définit

$$m_1 = \frac{f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})}{x_{2i+1} - x_{2i}} , \quad m_2 = \frac{f(x_{2i+2}) - f(x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i+1}} , \quad m_3 = \frac{m_2 - m_1}{x_{2i+2} - x_{2i}} \quad (6.7.1)$$

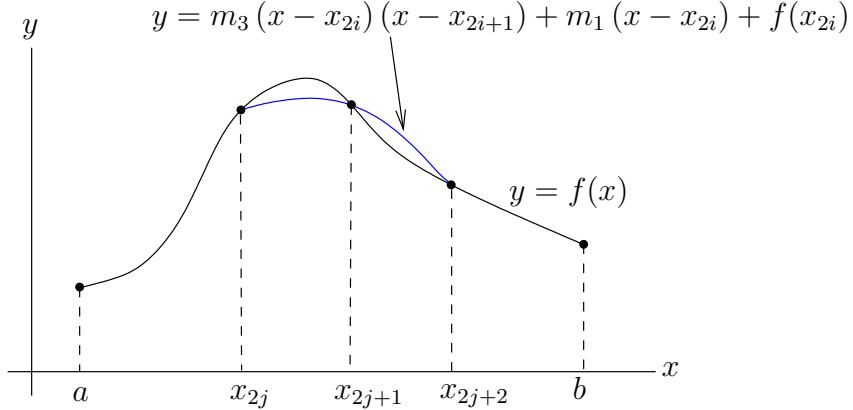


FIGURE 6.28 – Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale. On utilise le polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$ pour estimer $f(x)$ lorsque $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$

et l'on pose

$$p(x) = m_3(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) + m_1(x - x_{2i}) + f(x_{2i}).$$

C'est une fonction quadratique par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, le graphe de la fonction p est le graphe du polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 6.28.

Il est intéressant de noter que grâce au théorème fondamental de l'algèbre¹, il n'y a qu'un seul polynôme de degré deux qui passe par les trois points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.

L'intégrale du polynôme

$$p(x) = m_3(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) + m_1(x - x_{2i}) + f(x_{2i})$$

sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ est

$$\begin{aligned} & \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx \\ &= m_3 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) dx + m_1 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i}) dx + \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i}) dx \\ &= m_3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_{2i} + x_{2i+1}}{2} x^2 + x_{2i} x_{2i+1} x \right) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + m_1 \frac{(x - x_{2i})^2}{2} \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \\ &\quad + f(x_{2i})(x - x_{2i}) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}. \end{aligned}$$

Si on substitue les expressions pour m_1 et m_3 données en (6.7.1) dans la formule ci-dessus et si on simplifie le résultat, on obtient, après un long calcul qu'on laisse aux lecteurs le soin

1. Un polynôme de degré n a exactement n racines complexes si on inclus les racines multiples.

d'effectuer, la formule suivante

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})) .$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right) . \end{aligned}$$

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.11

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre quatre. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + j h$ pour $j = 0, 1 \dots, 2n$. Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right) \\ &\quad - \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4 \end{aligned}$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre troisième et dernière méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.12 (Méthode de Simpson)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right)$$

où $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + j h$ for $j = 0, 1 \dots, 2n$.

L'erreur de troncature pour la méthode de Simpson est $-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4$.

Remarque 6.7.13

On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode de Simpson à l'aide des formules d'approximation M_n pour la méthode du point milieu et T_n pour la méthode des

trapèzes. On a $S_n = (2M_{n/2} + T_n)/3$. Pour la méthode des trapèzes, on utilise seulement les intervalles de la forme $[x_{2j}, x_{2j+2}]$.



Exemple 6.7.14

Utiliser la méthode de Simpson pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode de Simpson, on pose $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisit n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f^{(4)}(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f^{(4)}(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f^{(4)}(x)| = 4e^{x^2} (3 + 12x^2 + 4x^4) \leq 76e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utiliser $76e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4 \right| \leq \frac{76e}{180} \left(\frac{1}{2n} \right)^4 = \frac{19e}{720n^4} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \left(\frac{19e}{720} 10^4 \right)^{1/4} = 5 \left(\frac{19e}{45} \right)^{1/4} \approx 5.175220 .$$

On peut donc prendre $n = 6$.

On a $h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{12}$ et $x_i = \frac{i}{12}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 12$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{36} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^5 e^{(j/6)^2} + 4 \sum_{j=0}^5 e^{((2j+1)/12)^2} + e^1 \right) \\ &= \frac{1}{36} \left(1 + 2 \left(e^{(2/12)^2} + e^{(4/12)^2} + \dots + e^{(10/12)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(e^{(1/12)^2} + e^{(3/12)^2} + \dots + e^{(11/12)^2} \right) + e \right) \\ &\approx 1.46267 . \end{aligned}$$



Remarque 6.7.15

1. Comme on a vu, pour déterminer si l'estimation fournie par la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes est une surestimation ou une sous-estimation, il

suffit de déterminer la courbure (convexe ou concave) du graphe de l'intégrande ; c'est à dire, le signe de la dérivée seconde de l'intégrande. Ce n'est plus le cas pour la méthode de Simpson. Puisque l'erreur de troncature est

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4,$$

il faut considérer le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande. Nous ne ferons pas cette analyse.

2. Puisqu'une fonction peut avoir un graphe qui change de courbure lorsque la variable indépendante varie, il n'est souvent pas possible d'utiliser la courbure pour déterminer si la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes vont donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale. De même, Il est rarement possible d'utiliser le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande pour déterminer si la méthode de Simpson va donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale car le signe de cette dérivée peut changer lorsque la valeur de la variable indépendante varie.
3. Pour une même précision, la méthode de Simpson demande de subdiviser l'intervalle d'intégration en beaucoup moins de sous-intervalles que les méthodes du point milieu et des trapèzes. Pour justifier cette remarque, il suffit de considérer l'erreur de troncature pour les trois méthodes que l'on a présentées.

Si on suppose que f'' et $f^{(4)}$ varient lentement par rapport à la variable indépendante, on peut comparer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature pour les trois méthodes qui nous intéresse. Pour h donné, l'erreur de troncature pour les méthodes du point milieu et des trapèzes est de l'ordre de h^2 , alors qu'elle est de l'ordre de h^4 pour la méthode de Simpson. Lorsque h diminue (i.e. $h \rightarrow 0$), l'erreur de troncature de la méthode de Simpson diminue beaucoup plus rapidement que celle pour les méthodes du point milieu ou des trapèzes. C'est ce qui fait que la méthode de Simpson est généralement supérieure au deux autres méthodes.

Des trois méthodes que l'on a étudiées, c'est la méthode de Simpson qui demande le moins de sous-intervalles et donc le moins d'opération arithmétiques pour estimer une intégrale avec une précision donnée. De plus, si on tient compte des « round-off errors » lors des calculs sur ordinateurs, il est préférable d'utiliser une méthode qui demande moins d'opérations arithmétiques pour minimiser ce type d'erreurs.



6.8 Exercices

Question 6.1

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| a) $\int -x^{-2} dx$ | b) $\int \frac{10}{x^9} dx$ | c) $\int (5z^{-1.2} - 1.2) dz$ |
| d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}} + 3t \right) dt$ | e) $\int 2^x dx$ | f) $\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx$ |

Question 6.2

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| a) $\int \cos(2\pi(x-2)) dx$ | b) $\int \frac{1}{1+4t} dt$ | c) $\int \frac{1}{5-3x} dx$ |
| d) $\int 3e^{3x/7} dx$ | e) $\int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 dt$ | f) $\int \frac{e^z}{1+e^z} dz$ |
| g) $\int 3y\sqrt{1+y^2} dy$ | h) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$ | i) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} dx$ |
| j) $\int x^2\sqrt{x^3+1} dx$ | k) $\int e^t (1+e^t)^4 dt$ | l) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}} dx$ |
| m) $\int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt$ | n) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ | o) $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$ |
| p) $\int e^t (2+e^{2t}) dt$ | q) $\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}} dt$ | |

Question 6.3  

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| a) $\int \frac{\cos(\theta)}{1-\cos^2(\theta)} d\theta$ | b) $\int \frac{\sin(x)}{1-\sin^2 x} dx$ | c) $\int \sqrt{x} \sin(x^{3/2}+1) dx$ |
| d) $\int \frac{\cos(1/t)}{t^2} dt$ | e) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$ | f) $\int \frac{x^3+1}{x^2+3} dx$ |
| g) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$ | h) $\int \tan(x) \sec^4(x) dx$ | |

Question 6.4

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| a) $\int \ln(\sqrt{x}) dx$ | b) $\int x^2 e^x dx$ | c) $\int \frac{x}{e^{3x}} dx$ |
| d) $\int x^2 e^{-x} dx$ | e) $\int x^3 e^{x^2} dx$ | f) $\int (x^2+x^6) \ln(x) dx$ |

Question 6.5  

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- | | |
|--|--------------------------|
| a) $\int \theta \cos(\pi\theta) d\theta$ | b) $\int e^x \sin(x) dx$ |
|--|--------------------------|

Question 6.6

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

- a) $\int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx$ b) $\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)} dx$ c) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$
 d) $\int \frac{1}{t^2 + 6t + 8} dt$ e) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$ f) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
 g) $\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ h) $\int \frac{t^2 + 1}{t^2 + 3t + 2} dt$ i) $\int \frac{x^3 - x - 2}{x^2 - 4} dx$
 j) $\int \frac{9x + 29}{x^2 + 2x - 15} dx$

Suggestion : Pour certaines des intégrales, vous pourriez avoir à compléter le carré du dénominateur et à utiliser une substitution.

Question 6.7 🔧

Évaluez l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx$

Question 6.8

Trouvez toutes les fonctions f telles que $f''(x) = 1 + x^{4/5}$.

Question 6.9

Donnez la somme de Riemann à droite et la somme de Riemann à gauche pour l'intégrale $\int_0^1 (1 + t^3) dt$ où l'intervalle $[0, 1]$ est subdivisée en 5 sous-intervalles égaux.

Question 6.10 🌳

La vitesse d'un abeille en vol a été mesuré à toutes les cinq secondes pendant 50 secondes. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
v (m/s)	12.7	12.2	11.8	11.5	11.3	11.2	11.2	11.3	11.6	12.0	12.5

On suppose que l'abeille vol en ligne droite. Utilisez une somme de Riemann à droite pour estimer la distance parcourue par l'abeille. Utilisez une somme de Riemann à gauche pour estimer la distance parcourue par l'abeille.

Question 6.11

Donnez la somme de Riemann à droite et celle à gauche pour l'intégrale $\int_0^2 t^2 dt$ lorsque la partition de l'intervalle $[0, 2]$ comprend cinq sous-intervalles égaux.

Question 6.12

Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$, calculez la somme de Riemann pour le point milieu de l'intégrale $\int_1^6 f(x) dx$ lorsque l'intervalle $[1, 6]$ est subdivisé en $n = 5$ sous-intervalles égaux. Tracez le graphe de f et les rectangles de la somme de Riemann.

Question 6.13

Utilisez les sommes de Riemann pour le point milieu avec $n = 5$ sous-intervalles égaux pour obtenir une approximation de la valeur de l'intégrale

$$\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x}) dx .$$

Donnez votre réponse avec une précision de quatre chiffres décimaux.

Question 6.14

Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs d'une fonction croissante. Utilisez une somme à droite et une somme à gauche pour trouver une borne supérieure et une borne inférieure de l'intégrale

$$\int_0^{25} f(x) dx .$$

Utilisez le plus grand nombre de points possible pour chaque somme.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

Question 6.15

Un objet se déplace en ligne droite durant 8 secondes. Le tableau ci-dessous donnent la vitesse v de l'objet en mètres par seconde toutes les 2 secondes.

t (sec)	0	2	4	6	8
v (m/s)	10.0	9.5	9.0	8.0	6.0

Comme on peut voir, la vitesse est décroissante. Répondre aux questions suivantes à l'aide des sommes de Riemann à droite et à gauche.

- a) Donnez une borne supérieure et un borne inférieure de la distance parcourue pendant les 8 secondes.
- b) À quelle fréquence doit-on mesurer la vitesse de l'objet pour obtenir des bornes supérieures et inférieures qui soient à 0.1 mètre de la distance parcourue pendant les 8 secondes ?

Question 6.16

Exprimez la limite suivante comme une intégrale définie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi j}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi j}{n} \right) .$$

Question 6.17

Donnez la somme de Riemann à droite pour l'intégrale

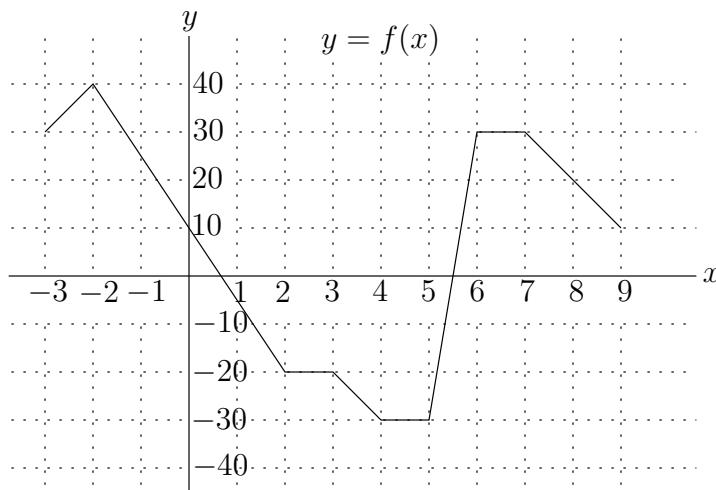
$$\int_2^5 \sqrt{2 + x^{1/3}} dx$$

où on assume que l'intervalle $[2, 5]$ est subdivisé en N sous-intervalles égaux.

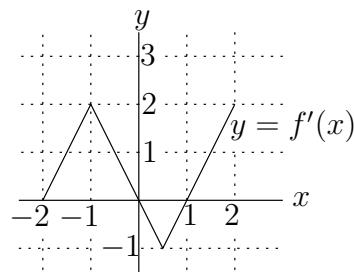
Question 6.18

Utilisez le graphe de la fonction f donné ci-dessous pour évaluer les intégrales suivantes.

$$\text{a)} \quad \int_{-2}^5 f(x) dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^{10} f(x) dx$$

**Question 6.19**

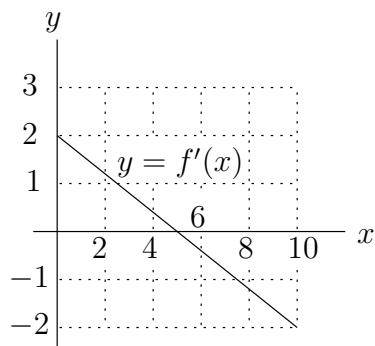
Le graphe de f' est donné dans la figure suivante



Si $f(-1) = 2$, quelle est la valeur de $f(2)$?

Question 6.20

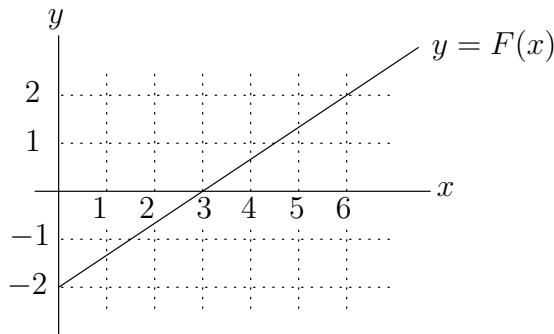
Le graphe de f' est donné dans la figure suivante



Si $f(0) = 1$, tracez un graphe possible pour f . Soyez aussi précis que possible.

Question 6.21

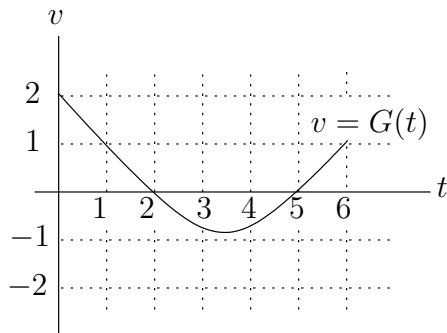
Si le graphe de F est le graphe suivant



Tracez le graphe de la primitive f de F qui satisfait $f(1) = 3$.

Question 6.22

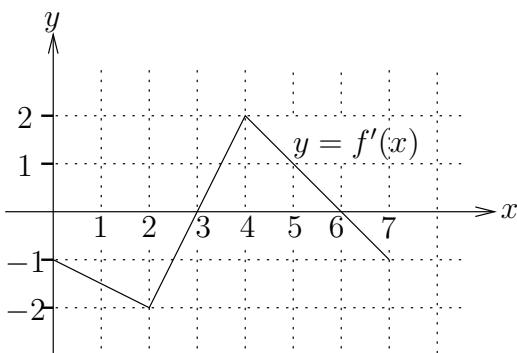
Si le graphe de G est le graphe suivant



Tracez le graphe de la primitive g de G qui satisfait $g(1) = 10$.

Question 6.23

La figure suivante donne le graphe de $f'(x)$. On suppose de plus que $f(0) = 2$.

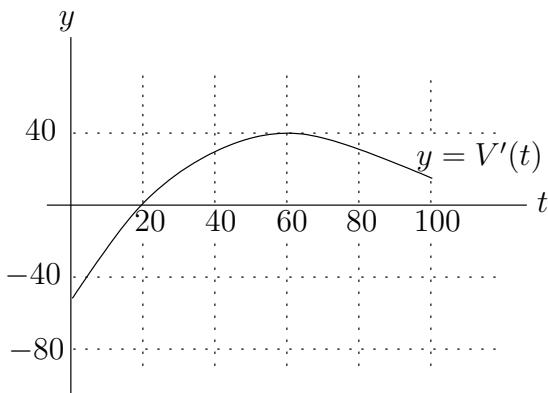


a) Trouvez tous les points critiques et points d'inflexion de $f(x)$ avec la valeur de $f(x)$ à ces points.

b) Tracez le graphe de $f(x)$ en indiquant bien tous les points critiques et les points d'inflexion.

Question 6.24

Le graphe de la fonction V' est donné à la figure suivante



Tracez le graphe de V , la primitive de la fonction V' , qui passe par le point $(0, 1000)$.

Question 6.25

Évaluez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt , \quad \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt .$$

Si vous connaissez la valeur de deux des intégrales ci-dessus, montrez que vous connaissez la valeur de la troisième intégrale.

Question 6.26

Si $\int_2^8 f(x) dx = 5$ et $\int_5^8 f(x) dx = 7$, calculez les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_2^5 f(x) dx \quad \mathbf{b}) \quad \int_5^8 (2f(x) + 3x) dx \quad \mathbf{c}) \quad \int_{-2/3}^{2/3} f(2 - 3t) dt$$

Question 6.27

Évaluez les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}) \quad \int_1^5 \frac{5}{x^3} dx & \mathbf{b}) \quad \int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx \\ \mathbf{c}) \quad \int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx & \mathbf{d}) \quad \int_1^2 \frac{3}{t^4} dt \end{array}$$

Question 6.28

Évaluez les intégrales définies suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}) \quad \int_0^5 3e^{x/5} dx & \mathbf{b}) \quad \int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^4 dt & \mathbf{c}) \quad \int_1^{10} (1 + 2t)^{-4} dt \\ \mathbf{d}) \quad \int_0^2 \frac{1}{1 + 4t} dt & \mathbf{e}) \quad \int_0^1 x^2 (1 + 2x^3)^5 dx & \mathbf{f}) \quad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ \mathbf{g}) \quad \int_1^e \frac{1}{x(1 + (\ln(x))^2)} dx & \mathbf{h}) \quad \int_1^e x^2 \ln(x) dx & \mathbf{i}) \quad \int_1^2 \frac{4x^2 - 14x + 10}{2x^2 - 7x + 3} dx \end{array}$$

Question 6.29 

Évaluez les intégrales définies suivantes :

a) $\int_0^\pi (2 \sin(\theta) + 3 \cos(\theta)) \, d\theta$

b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x) \cos^3(x) \, dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) \, dx$

d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \sec^4(x) \, dx$

e) $\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} \, dx$

Question 6.30 

Évaluez les intégrales définies suivantes :

a) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3 \sqrt{t^2 - 1}} \, dt$

b) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} \, dt$

Question 6.31

Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\int_{-2}^2 (y^4 + 5y^3) \, dy$

b) $\int_{-a}^a x \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$

Question 6.32 

Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) \, dx$

b) $\int_2^5 \cos(2\pi(x - 2)) \, dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x^{16} \sin(2x) \, dx$

Question 6.33 

Vérifiez que $\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) \, ds = f(x)$ pour $f(s) = (5s + 1)^7$ et a une constante.

Question 6.34

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $g(y) = \int_2^y t^2 \sin(t) \, dt$

b) $h(x) = \int_2^{1/x} \arctan(t) \, dt$

Suggestion : Utilisez le Théorème fondamental du calcul différentiel.

Question 6.35

Déterminez si les intégrales improches suivantes convergent ou divergent. Évaluez les intégrales improches qui convergent.

a) $\int_0^\infty e^{-3x} dx$

d) $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

g) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

j) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$

m) $\int_0^2 \frac{1}{4-x^2} dx$

p) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{(2+5x)^4} dx$

e) $\int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx$

h) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

k) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+3x)^{3/2}} dx$

n) $\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

f) $\int_{-\infty}^0 3x^2 e^{-x^3} dx$

i) $\int_0^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx$

l) $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx$

o) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$

Question 6.36 🔔

Utilisez le test de comparaison des intégrales pour déterminer si les intégrales suivantes convergent :

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$

c) $\int_1^\infty \frac{x}{x^2 + x^{4/3}} dx$

Question 6.37 🔔

Utilisez le test de comparaison pour déterminer si les intégrales improches suivantes convergent ou divergent. Donnez une borne supérieure pour la valeur des intégrales improches qui convergent.

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 e^x} dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} dx$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} dx$

e) $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x} dx$

c) $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^3 + 2} dx$



Applications de l'intégrale



7

7.1 Aire entre deux courbes

Pour estimer l'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ de la figure 7.1, et les droites $x = a$ et $x = b$, on peut procéder comme on a fait pour estimer l'aire sous la courbe $y = e^x$ au chapitre précédent.

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta x = (b - a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, on choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et on définit le rectangle

$$R_i = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ et } g(x_i^*) \leq y \leq f(x_i^*)\}.$$

L'aire d'un tel rectangle est $(f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x$.

La somme de l'aire de chaque rectangle R_i nous donne une approximation de l'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$.

$$A \approx \sum_{i=0}^{k-1} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x.$$

De plus, on remarque que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

À la figure 7.1, $f(x) > g(x)$ pour tout x et donc $f(x_i^*) - g(x_i^*) > 0$ est bien la hauteur du rectangle R_i . Dans le cas où $f(x_i^*) < g(x_i^*)$, comme à la figure 7.2, la hauteur du rectangle R_i est alors donnée par $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$. On obtient le résultat suivant :

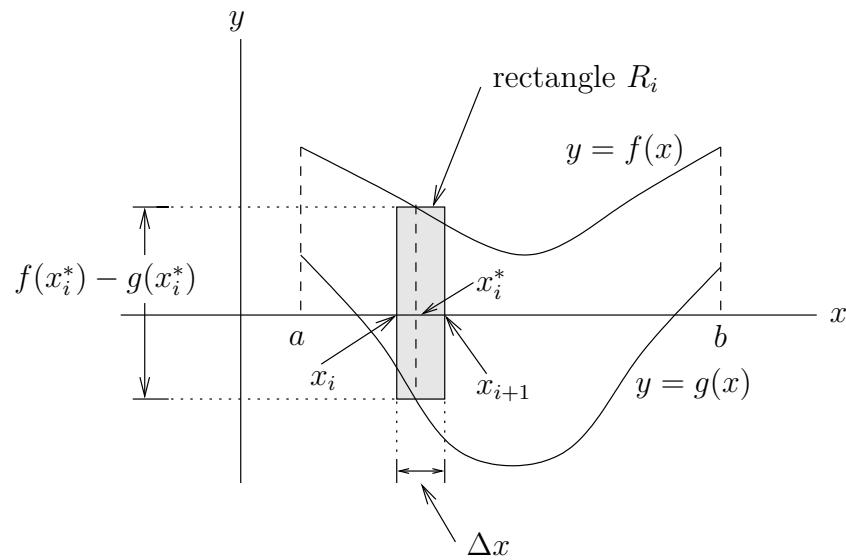


FIGURE 7.1 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann

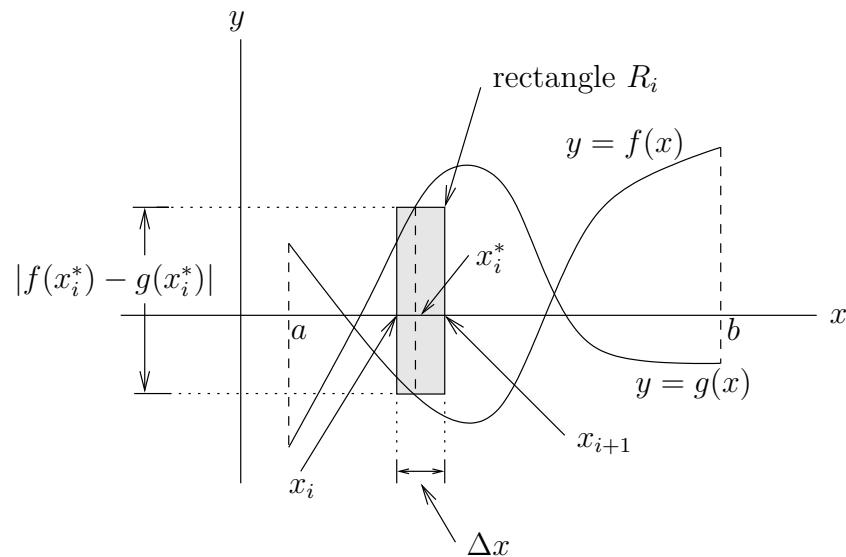


FIGURE 7.2 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes se croissent

Méthode 7.1.1

L'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et entre les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx .$$

La procédure que avons utilisée pour obtenir la formule ci-dessus peut évidemment être modifiée pour donner la formule suivante.

Méthode 7.1.2

L'aire A de la région R entre les courbes $x = f(y)$ et $x = g(y)$, et entre les droites $y = a$ et $y = b$ est donnée par

$$A = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy .$$

Exemple 7.1.3

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes $y = f(x) = x^2$ et $y = g(x) = 2 - x^2$, et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

On retrouve le graphe de ces deux courbes à la figure 7.3. On remarque que $f(x) < g(x)$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(x) > g(x)$ pour $1 < x \leq 2$. Le point $(1, 1)$ est le point d'intersection des deux courbes que l'on peut trouver en résolvant $f(x) = g(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - (2 - x^2)) dx = \int_0^1 (2 - 2x^2) dx + \int_1^2 (2x^2 - 2) dx \\ &= \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right) \Big|_{x=0}^1 + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x\right) \Big|_{x=1}^2 = 4 . \end{aligned}$$

**Exemple 7.1.4**

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes $y = f(x) = x$ et $y = g(x) = \sin(x)$, et les droites $x = -\pi/4$ et $x = \pi/2$.

Le dessin de la région R est donné à la figure 7.4. On remarque que $f(x) > g(x)$ pour $0 < x \leq \pi/2$ et $f(x) < g(x)$ pour $-\pi/4 < x < 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/4}^{\pi/2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\pi/4}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-\pi/4}^0 (\sin(x) - x) dx + \int_0^{\pi/2} (x - \sin(x)) dx \end{aligned}$$

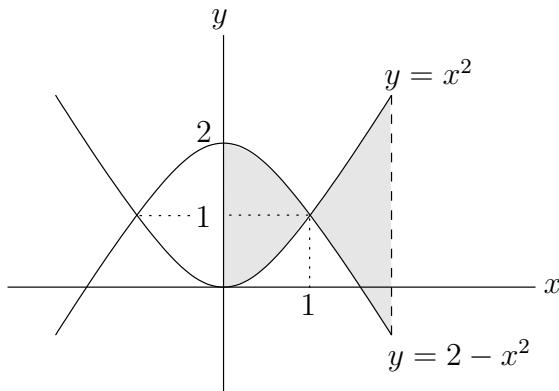


FIGURE 7.3 – Région bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 2 - x^2$, et les droites $x = 0$ et $x = 2$

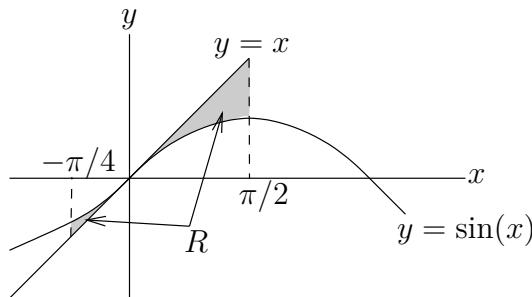


FIGURE 7.4 – Région bornée par les courbes $y = x$ et $y = \sin(x)$ pour $-\pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

$$= \left(-\cos(x) - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=-\pi/4}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) \right) \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{5\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2.$$



Exemple 7.1.5

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes $4x + y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$.

Pour trouver l'intersection de ces deux courbes, on substitue $y = 2x + 4$ dans $4x + y^2 = 0$. On obtient $4x + (2x + 4)^2 = 4(x + 4)(x + 1) = 0$. Donc les deux courbes se coupent aux points $(-1, 2)$ et $(-4, -4)$. Le dessin de la région R est donné à la figure 7.5.

On remarque que pour calculer l'aire $A = \int_{-4}^0 |f(x) - g(x)| dx$, il faudrait utiliser $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -4 et -1 , et $f(x) = 2\sqrt{-x}$ et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -1 et 0 . Il est donc plus simple d'utiliser une intégrale par rapport à y pour calculer l'aire de la région R .

Si on résout $4x + y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$ pour x , on obtient les fonctions $f(y) = -y^2/4$ et

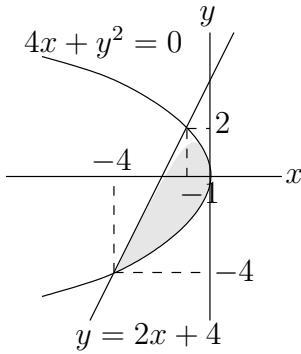


FIGURE 7.5 – Région bornée par les courbes $4x + y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$.

$g(y) = (y - 4)/2$. On a $f(y) > g(y)$ pour $-4 < y < 2$. Ainsi,

$$A = \int_{-4}^2 |f(y) - g(y)| dy = \int_{-4}^2 \left(-\frac{y^2}{4} - \frac{y - 4}{2} \right) dx = \left(-\frac{y^3}{12} - \frac{(y - 4)^2}{4} \right) \Big|_{x=-4}^2 = 9.$$



7.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 7.2.1

La **valeur moyenne** d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Pour justifier cette définition, rappelons que la formule pour calculer la moyenne de k nombres m_1, m_2, \dots, m_k est

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i.$$

Pour estimer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, il suffit de choisir un très grand nombre de points dans l'intervalle et de faire la moyenne des valeurs de la fonction évaluée à tous ces points. Plus on utilise de points, plus on est près de la valeur moyenne de la fonction.

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$. On choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. La valeur moyenne M_f de f sur l'intervalle $[a, b]$ est approximativement la moyenne de $f(x_0^*)$,

$f(x_1^*), \dots, f(x_{k-1}^*)$. On a donc

$$M_f \approx \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) .$$

Or $k = (b - a) / \Delta x$. Si on substitue dans l'expression précédente, on trouve

$$M_f \approx \frac{1}{b - a} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x .$$

La somme que l'on retrouve dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$M_f = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx .$$

Exemple 7.2.2

Quelle est la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$?

$$M_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{1}{3} .$$



Comme pour la dérivée d'une fonction, il y a un théorème de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction

Théorème 7.2.3 (Théorème de la moyenne pour l'intégrale)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx .$$

C'est-à-dire que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

La conclusion du théorème précédent est illustrée à la figure 7.6. Cette figure est une représentation typique de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. L'aire sous la courbe $y = f(x)$ et au-dessus de la droite $y = M_f$ (i.e. la région en bleu) est égale à l'aire au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et sous la droite $y = M_f$ (i.e. la région en rouge). En effet, puisque

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b M_f dx = M_f = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

on obtient

$$0 = \frac{1}{b - a} \int_a^b (f(x) - M_f) dx .$$

Pour que cette intégrale soit nulle, il faut que l'aire sous la courbe $y = f(x) - M_f$ et au-dessus de l'axe des x soit égale à l'aire au-dessus de la courbe $y = f(x) - M_f$ et sous

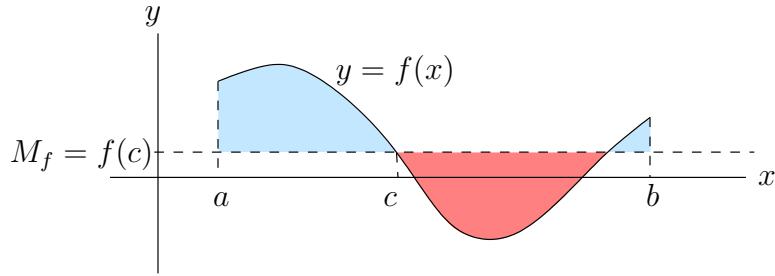


FIGURE 7.6 – Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$

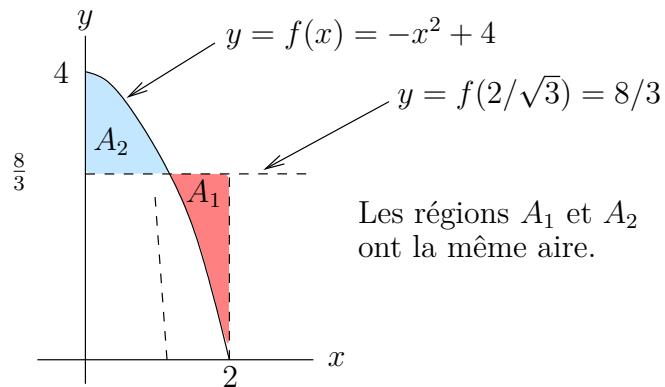


FIGURE 7.7 – Graphe de $f(x) = -x^4 + 4$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 2]$ est $8/3$. L'aire sous la courbe $y = f(x)$ et au-dessus de la droite $y = 8/3$ (en bleu) est égale à l'aire au dessus de la courbe $y = f(x)$ et sous la droite $y = 8/3$ (en rouge) pour $0 \leq x \leq 2$.

l'axe des x . Avec une translation de M_f vers le haut, la courbe $y = f(x) - M_f$ devient le graphe de f et l'axe des x devient la droite $y = M_f$. L'énoncé au début du paragraphe est une conséquence de la propriété qu'ont les translations de préserver l'aire.

Exemple 7.2.4

Soit $f(x) = -x^2 + 4$, trouver un point c de l'intervalle $[0, 2]$ tel que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 2]$.

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{8}{3} .$$

Le point c est donné par $f(c) = -c^2 + 4 = 8/3$. Si on résout pour c dans l'intervalle $[0, 2]$, on trouve $c = 2/\sqrt{3}$.

Le graphe de f ainsi que la représentation de la valeur moyenne sont donnés à la figure 7.7.



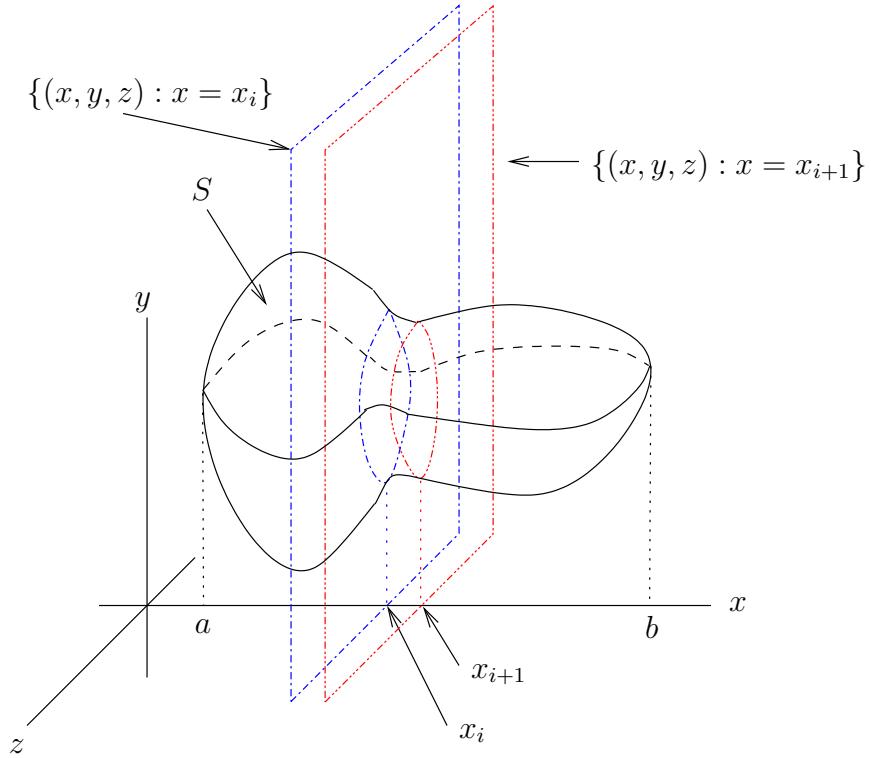


FIGURE 7.8 – La tranche du solide S pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Le volume de cette tranche est V_i .

7.3 Volume d'un objet 🔧

On peut utiliser l'intégration pour calculer le volume V d'un solide S comme celui de la figure 7.8. On suppose que le solide S est contenu entre les plans $x = a$ et $x = b$.

Pour estimer le volume V du solide S , on partage le solide S en fines tranches parallèles au plan y,z et on estime le volume de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S .

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta x = (b - a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

La i^e tranche du solide S que l'on voit à la figure 7.8 est donnée par l'intersection du solide S avec la région définie par $\{(x, y, z) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$.

Pour estimer le volume V_i de la i^e tranche, on choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On considère le cylindre S_i , que l'on peut voir à la figure 7.10, dont la hauteur est Δx et la base est la section B_i obtenue de l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S . On retrouve à la figure 7.9 un exemple possible pour la section B_i du cylindre S_i ; notez que B_i n'est pas toujours un disque comme on a dans la figure. Les côtés du cylindre S_i sont parallèles à l'axe des x .

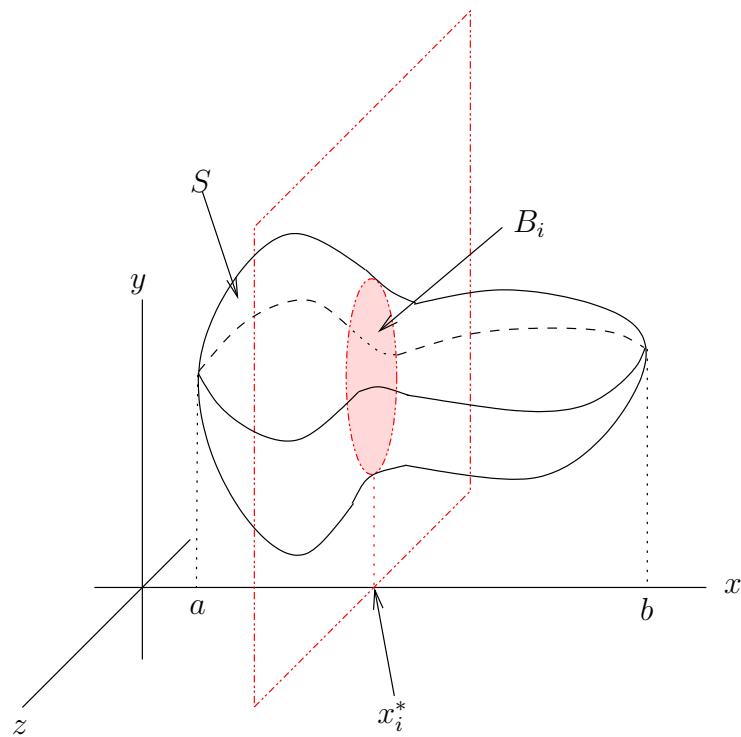


FIGURE 7.9 – La section B_i est engendrée par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S . L'aire de la section est $A(x_i^*)$.

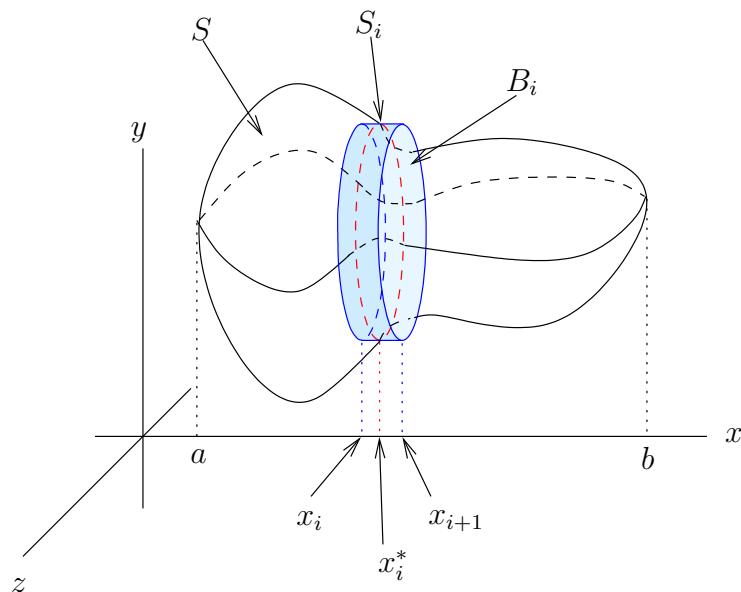


FIGURE 7.10 – S_i est approximativement une tranche du solide S . L'épaisseur de S_i est Δx et l'aire de sa section transversale est $A(x_i^*)$

Le volume du cylindre S_i est $A(x_i^*)\Delta x$ où $A(x_i^*)$ est l'aire de la section B_i . Pour Δx petit, le volume V_i de la i^e tranche de S est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx A(x_i^*)\Delta x$$

pour Δx petit. La somme du volume de chaque cylindre S_i donne un estimé du volume V de S .

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} A(x_i^*)\Delta x$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S . À la limite, on obtient le volume V de S .

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b A(x) dx$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.3.1

Le volume V d'un solide S comme celui de la figure 7.9 est donnée par

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (7.3.1)$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S .

Exemple 7.3.2

Trouver le volume V du tronc de pyramide S représenté à la figure 7.11 dont la base est un carré qui possède des côtés de longueur a et le sommet est aussi un carré mais qui possède des côtés de longueur b . La hauteur du tronc de pyramide est h .

Selon la façon dont on tranche S , on obtient des sections de niveaux de complexité différents. La façon de trancher S qui donne les sections les plus simples est de trancher horizontalement. Les sections sont alors des carrés.

Pour utiliser la formule (7.3.1), il faut trouver une formule pour l'aire $A(x)$ des sections obtenues par l'intersection de S avec le plan x constant. Comme on peut le voir à partir du dessin d'une coupe verticale de S que l'on retrouve à la figure 7.11, la longueur y d'un côté d'une section varie linéairement en fonction de x . On a $y = a$ pour $x = 0$ et $y = b$ pour $x = h$. La droite qui passe par ces deux points est de pente $m = (b - a)/(h - 0) = (b - a)/h$. Ainsi, son équation est

$$y = \frac{b - a}{h} x + a$$

Section donnée par x constant

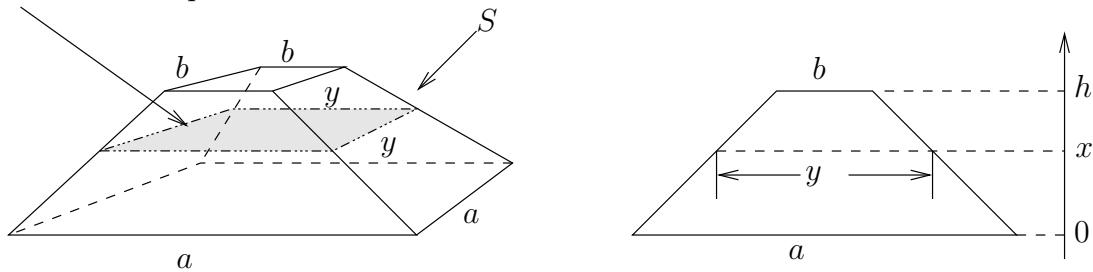


FIGURE 7.11 – Le tronc d'une pyramide et une section perpendiculaire de ce tronc de pyramide.

car $y = a$ lorsque $x = 0$. On obtient

$$A(x) = \left(\frac{b-a}{h} x + a \right)^2 .$$

Le volume V de S est donc

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left(\frac{b-a}{h} x + a \right)^2 dx = \frac{h}{3(b-a)} \left(\frac{b-a}{h} x + a \right)^3 \Big|_{x=0}^h \\ &= \frac{h}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{h}{3} (b^2 + ab + a^2) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la substitution $y = (b-a)x/h + a$ pour évaluer l'intégrale. ♣

Exemple 7.3.3

Trouver le volume V du solide S dont la base est la région du plan x,y bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés. On retrouve une représentation de ces sections à la figure 7.12.

Puisque les deux courbes se coupent à $x = -2$ et $x = 2$ (il faut résoudre $x^2 = 8 - x^2$), la base du solide est la région entre les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

La section pour x constant est un carré dont la longueur des côtés est $(8-x^2)-x^2 = 8-2x^2$. L'aire de cette section est donc $A(x) = (8-2x^2)^2$. Le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 A(x) dx = \int_{-2}^2 (8-2x^2)^2 dx = \int_{-2}^2 (64 - 32x^2 + 4x^4) dx \\ &= \left(64x - \frac{32}{3} x^3 + \frac{4}{5} x^5 \right) \Big|_{x=-2}^2 = \frac{2^{11}}{15} . \end{aligned}$$



7.3.1 Solides de révolution

On peut utiliser (7.3.1) pour trouver le volume d'un solide obtenu par la rotation d'une région plane autour d'un axe.

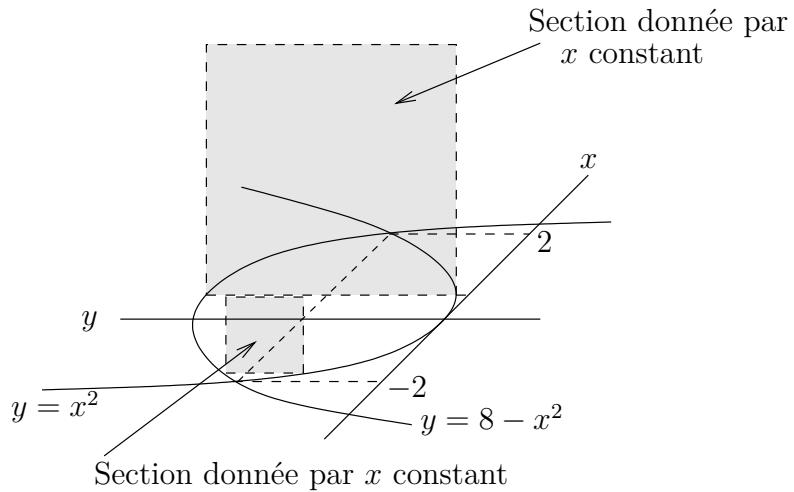


FIGURE 7.12 – Solide dont la base est bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

Supposons que la région R soit la région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$. Un exemple typique de région R est donné à la figure 7.13.

Si on fait la rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ (et $z = 0$) qui ne coupe pas la région R , on obtient un solide S semblable à celui illustré à la figure 7.14.

Pour calculer le volume V du solide S , on doit trouver une formule pour l'aire $A(x)$ des sections perpendiculaires à l'axe des x . Si on fait la projection dans le plan y,z d'une section, on trouve un anneau centré au point $(c, 0)$ dont le petit rayon est $|f(x) - c|$ et le grand rayon par $|g(x) - c|$. On retrouve un tel anneau à la figure 7.15

Puisque l'aire d'un disque de rayon r est donnée par πr^2 , l'aire $A(x)$ de notre anneau est l'aire du disque de rayon $|g(x) - c|$ moins l'aire du disque de rayon $|f(x) - c|$. Ainsi

$$A(x) = \pi (g(x) - c)^2 - \pi (f(x) - c)^2 .$$

On obtient donc la formule suivante pour calculer le volume du solide S .

Méthode 7.3.4

Soit R une région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ qui ne coupe pas la région R . Le volume V du solide S est

$$V = \pi \int_a^b |(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2| dx . \quad (7.3.2)$$

Exemple 7.3.5

Quelle est le volume V du solide S obtenu par la rotation autour de l'axe $y = -1$ de la région bornée par les courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$?

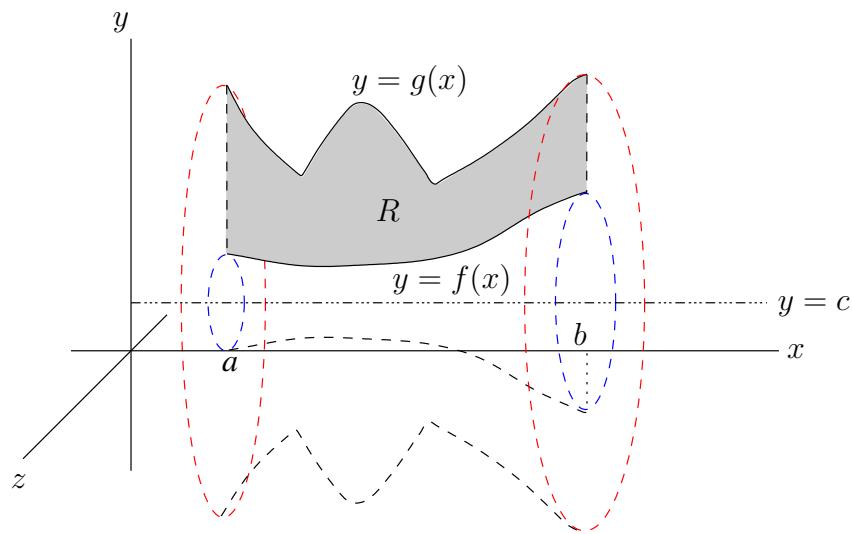


FIGURE 7.13 – La rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ (et $z = 0$) donne une solide dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont les anneaux que l'on retrouve à la figure 7.15

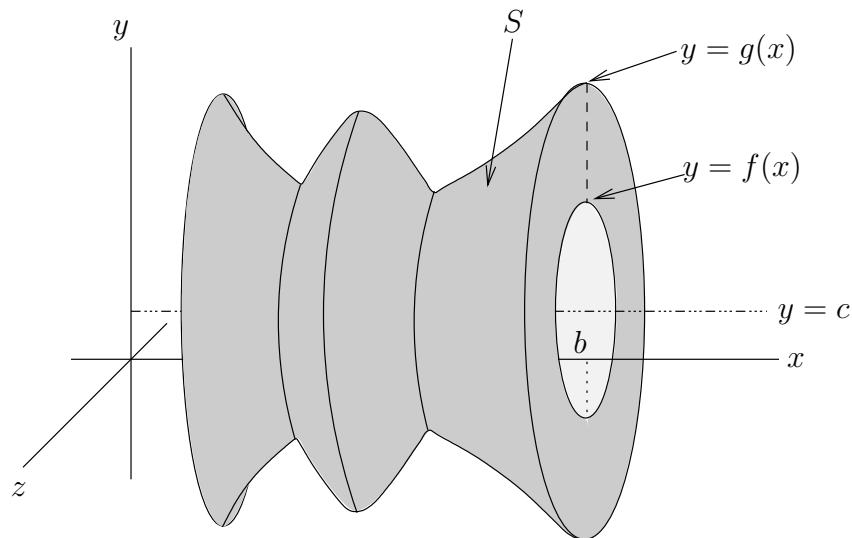


FIGURE 7.14 – Le solide S qui résulte de la rotation de la région R de la figure 7.13 autour de l'axe $y = c$

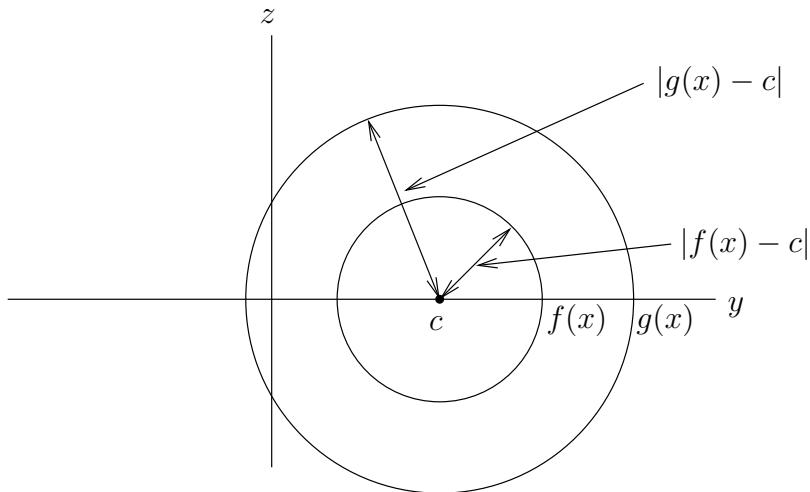


FIGURE 7.15 – Une section du solide S de la figure 7.14 obtenue par l'intersection du solide S avec un plan où x est constant. Les sections sont donc perpendiculaires à l'axe des x

On retrouve à la figure 7.16 le graphe des deux courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$, et la région R qui est bornée par ces deux courbes. Pour déterminer les points d'intersections de ces deux courbes, il faut résoudre l'équation $3 - x^2 = 1 + x^2$ pour trouver les valeurs de x où la valeur de y est la même sur les deux courbes. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 0$. On trouve $x = \pm 1$. Pour $x = -1$, on a le point d'intersection $(-1, 2)$ et pour $x = 1$ on a le point d'intersection $(1, 2)$.

On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.2). On a

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left((3 - x^2) - (-1) \right)^2 - \left((x^2 + 1) - (-1) \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (4 - x^2)^2 - (x^2 + 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (-12x^2 + 12) dx \\ &= \pi \left(-4x^3 + 12x \right) \Big|_{x=-1}^1 = 16\pi. \end{aligned}$$



Exemple 7.3.6

Trouvez le volume V de chacun des solides S suivant.

- a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .
- b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = \sin(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et l'axe des x .
- c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $x = 2y - y^2$ et l'axe des y .

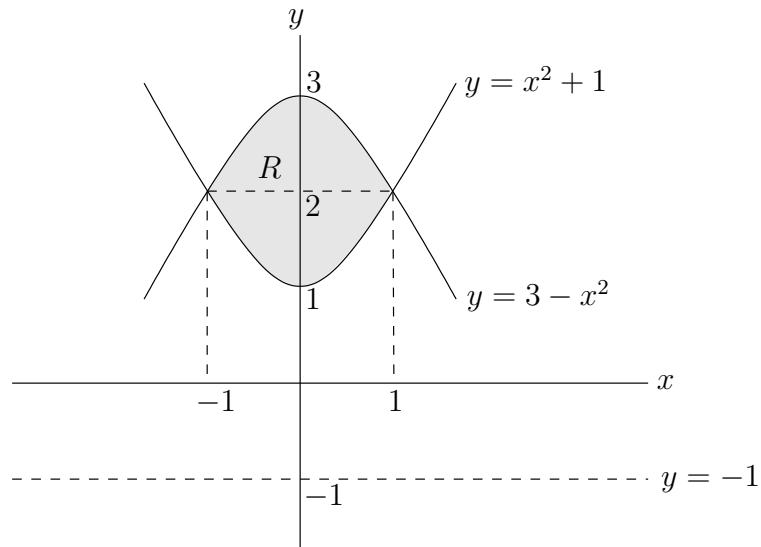
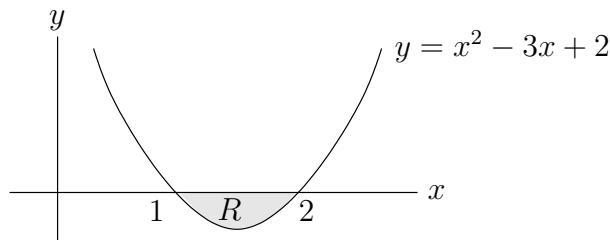


FIGURE 7.16 – La rotation autour de l'axe $x = -1$ de la région bornée par les deux courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$ va produire un solide S dans l'espace qui ressemblera à un bagel.

- d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $y = 7$ de la région bornée par la courbe $y = (x - 4)^2 + 1$ et la droite $y = x - 1$.
- e) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $y = -1$ de la région bornée par la courbe $y = \cos(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$, et les droites $x = 0$ et $y = 0$.

Il est toujours préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

- a) On doit premièrement trouver l'intersection de la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ avec l'axe des x ; c'est-à-dire, les racines de ce polynôme. Puisque $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, les racines sont 1 et 2. La figure suivante présente le dessin de la région R bornée par $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .

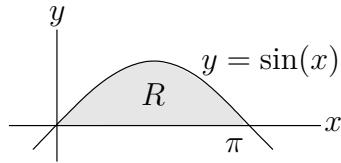


On peut calculer le volume V du solide de révolution S à l'aide de la formule (7.3.2). On a

$$V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{\pi}{30}.$$

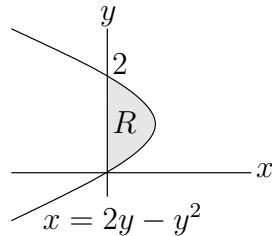
- b) On donne ci-dessous le dessin de la région R bornée par $y = \sin(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et l'axe des x .



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

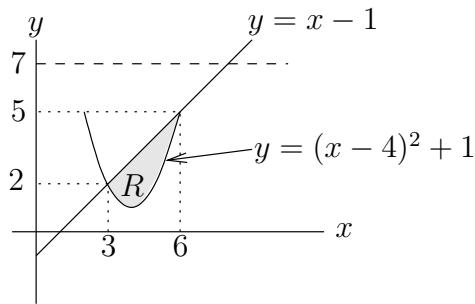
- c) On donne ci-dessous le dessin de la région R bornée par $x = y^2 - 2y$ et l'axe des y .



On peut évidemment écrire une formule identique à (7.3.2) où x est remplacé par y . Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 (y^4 - 4y^3 + 4y^2) dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} - y^4 + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

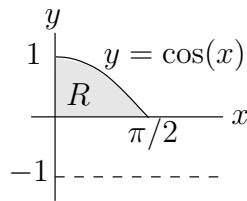
- d) Pour obtenir l'intersection de la parabole $y = (x - 4)^2 + 1$ et de la droite $y = x - 1$, on pose $x - 1 = (x - 4)^2 + 1$. Ce qui donne $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6) = 0$. On obtient les deux points d'intersection $(3, 2)$ et $(6, 5)$. Le dessin suivant représente la région R bornée par la parabole $y = (x - 4)^2 + 1$ et la droite $y = x - 1$.



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_3^6 \left(((x-4)^2 + 1 - 7)^2 - (x-1-7)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_3^6 \left(x^4 - 16x^3 + 83x^2 - 144x + 36 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{83x^3}{3} - 72x^2 + 36x \right) \Big|_3^6 = 39.6\pi . \end{aligned}$$

e) Le dessin suivant représente la région R bornée par la courbe $y = \cos(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$, l'axe des x et l'axe des y .



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} \left((\cos(x) + 1)^2 - (0 + 1)^2 \right) dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(x) + 2\cos(x) \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) + 2\cos(x) \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) + 4\sin(x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 4 \right) . \end{aligned}$$



Quelle sera le volume V du solide S , que l'on peut voir à la figure 7.17, obtenu par la rotation de la région R présentée à la figure 7.13 autour d'un axe $x = c$ qui ne coupe pas R ? Il est généralement inconcevable d'utiliser les sections provenant de l'intersection du solide S avec les plans perpendiculaires à l'axe des y (i.e. les plans où y est constant) car il est fort possible que ces sections soient formées de plusieurs anneaux.

On doit donc retourner à la définition de l'intégrale pour développer une formule qui nous permettra de calculer le volume du solide S dans le cas présent.

Pour estimer le volume V du solide S , on partage le solide S en mince tubes dont l'axe est l'axe $x = c$ autour de laquelle la région R fait une rotation. On estime le volume de chacun des tubes. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S .

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Soit R_i , la région donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$. Le i^e tube (voir la figure 7.18) qui compose le solide S est obtenue par la rotation de la région R_i autour de l'axe $x = c$.

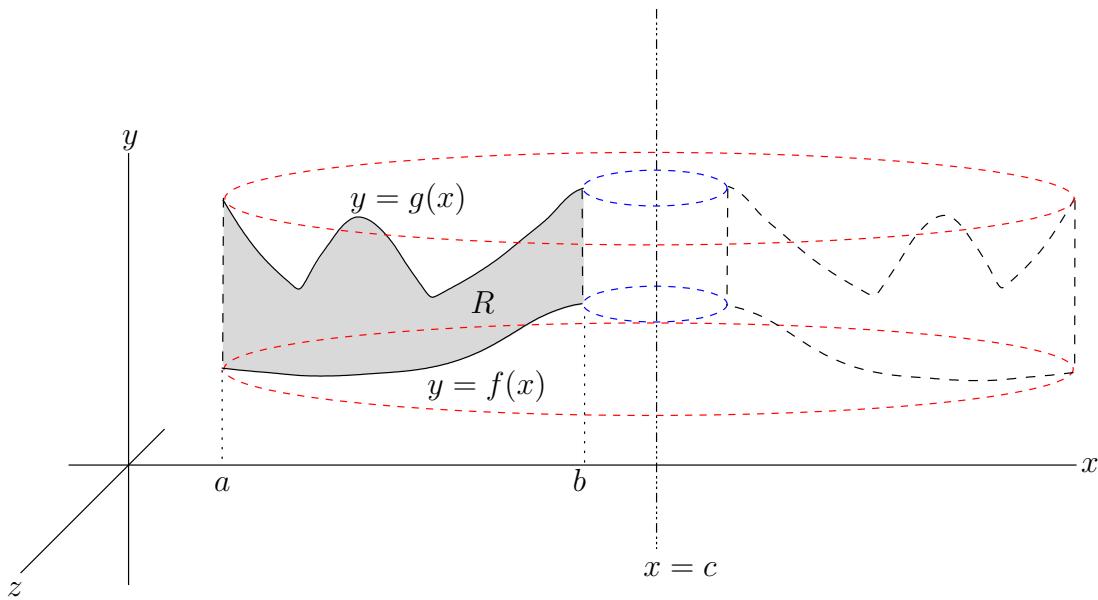


FIGURE 7.17 – La rotation de la région R autour de l'axe $x = c$ (et $z = 0$) donne un solide S .

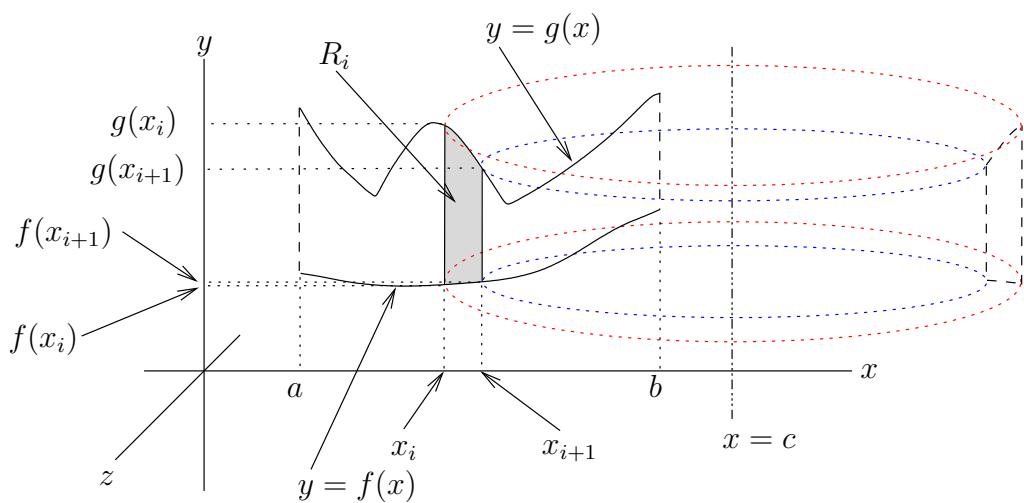


FIGURE 7.18 – la région R_i donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$.

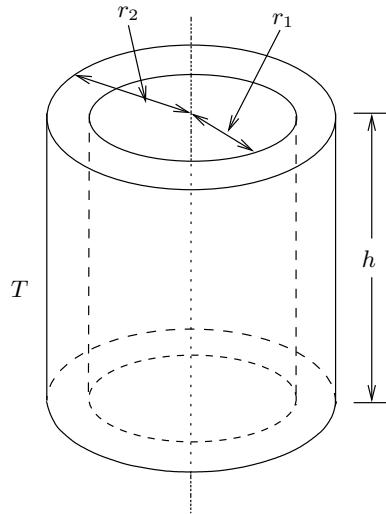


FIGURE 7.19 – Le volume de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2

Pour estimer le volume du i^e tube, nous aurons besoin de la formule pour calculer l'aire d'un tube T comme celui de la figure 7.19. Le volume V_T de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2 . Ainsi

$$V_T = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1). \quad (7.3.3)$$

Pour estimer le volume V_i du i^e tube, on applique la formule (7.3.3) au tube S_i que l'on retrouve à la figure 7.20. La valeur du rayon r_1 et celle du rayon r_2 dans la formule (7.3.3) sont $r_1 = c - x_{i+1}$ et $r_2 = c - x_i$. On a alors que

$$r_2 - r_1 = x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

et

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(c - x_{i-1}) + (c - x_i)}{2} = c - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

où $(x_{i-1} + x_i)/2$ est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si on pose

$$x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

et

$$h = |f(x_i^*) - g(x_i^*)|,$$

alors le volume de S_i est

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} (r_2 - r_1) h = 2\pi (c - x_i^*) |f(x_i^*) - g(x_i^*)| \Delta x$$

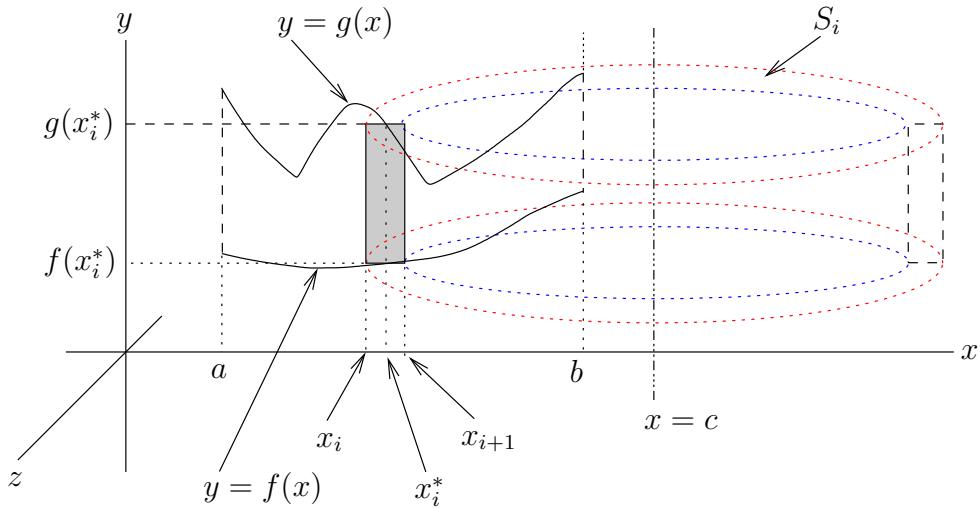


FIGURE 7.20 – Un tube S_i d'épaisseur Δx et de hauteur $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$.

Pour Δx petit (i.e. pour des grandes valeurs de k), le volume V_i du i^e tube produit par la rotation de la région R_i autour de l'axe $x = c$ est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx 2\pi(c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ et Δx petit.

La somme du volume de chaque tube S_i donne un estimé du volume V de S .

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} 2\pi(c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x .$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S . À la limite, on obtient le volume V de S .

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_a^b (c - x)|f(x) - g(x)| dx . \quad (7.3.4)$$

Un raisonnement identique à celui qui a été utilisé pour développer (7.3.4) donne

$$2\pi \int_a^b (x - c)|f(x) - g(x)| dx$$

lorsque l'axe de rotation $x = c$ est à la gauche de la région R .

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.3.7

Soit R une région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe $x = c$ qui ne coupe pas la région R . Le volume V du solide S est

$$V = 2\pi \int_a^b |c - x| |f(x) - g(x)| dx . \quad (7.3.5)$$

Exemple 7.3.8

Quelle est le volume V du solide S obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 2$ de la région R donnée à l'exemple 7.3.5 et à la figure 7.16.

On peut utiliser la formule (7.3.5) pour calculer le volume V de S . On a

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 - x) ((3 - x^2) - (x^2 + 1)) dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 - x)(2 - 2x^2) dx = 2\pi \int_{-1}^1 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{32\pi}{3} . \end{aligned}$$

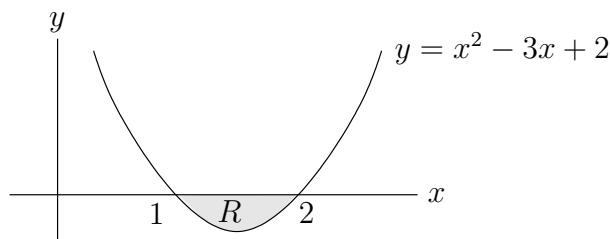
**Exemple 7.3.9**

Trouver le volume V de chacun des solides S suivant.

- a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .
- b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 1$ de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.
- c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 1$ de la région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $y = e$ et $x = 0$.
- d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = -2$ de la région bornée par les courbes $y = 4x - x^2$ et $y = 8x - 2x^2$.

Au risque de ce répéter, il est préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

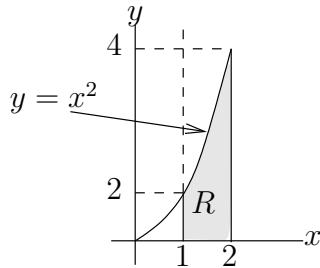
- a) On a vu à l'exemple 7.3.6 que la région R bornée par $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x est la région que l'on retrouve dans la figure ci-dessous



On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.5). On a

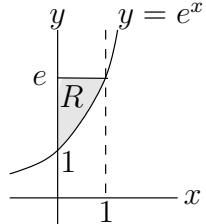
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x \left(0 - (x^2 - 3x + 2) \right) dx = 2\pi \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- b)** On retrouve dans la figure suivante le dessin de la région R qui est bornée par la courbe $y = x^2$, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et l'axe des x .



$$V = 2\pi \int_1^2 (x - 1)(x^2 - 0) dx = 2\pi \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{17\pi}{6}.$$

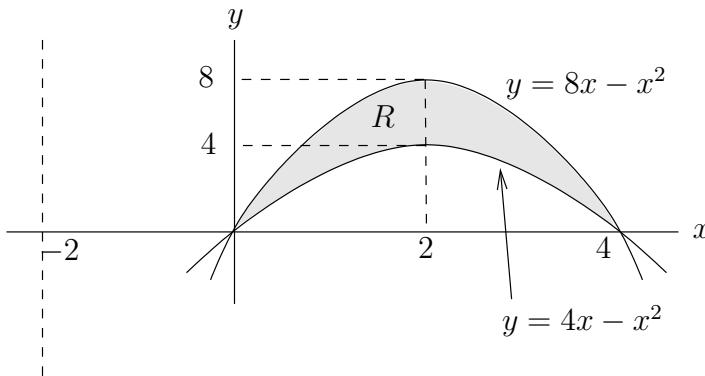
- c)** La figure suivante contient le dessin de la région R qui est bornée par la courbe $y = e^x$, la droite $y = e$ et l'axe des y .



La formule (7.3.5) pour le volume d'un solide de révolution donne

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1-x)(e - e^x) dx = 2\pi \int_0^1 (e - ex - e^x + xe^x) dx \\ &= 2\pi \left(ex - \frac{e}{2}x^2 - e^x + xe^x - e^x \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(2 - \frac{e}{2} \right). \end{aligned}$$

- d)** On retrouve dans la figure suivante le graphe des courbes $y = 4x - x^2$ et $y = 8x - 2x^2$, et la région R qui est bornée par ces deux courbes.



Pour déterminer les points d'intersections de ces deux courbes, il faut résoudre l'équation $4x - x^2 = 8x - 2x^2$ pour trouver les valeurs de x où la valeur de y est la même sur les deux courbes. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$. Les solutions sont $x = 0$ et $x = 4$. Pour $x = 0$, on a le point d'intersection $(0,0)$ et pour $x = 4$ on a le point d'intersection $(2,0)$. Les deux graphes se coupent sur l'axe des x .

On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.5). On a

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (x+2) \left((8x - x^2) - (4x - x^2) \right) dx = 2\pi \int_0^4 (x+2)(4x - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^4 (-x^3 + 2x^2 + 8x) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right) \Big|_{x=0}^4 = \frac{4^4 \pi}{3}. \end{aligned}$$



7.4 Masse d'un objet

Comme à la section précédente pour le calcul du volume d'un solide, on peut utiliser l'intégration pour calculer le masse M d'un solide S comme celui de la figure 7.9.

On suppose que la densité du solide varie de façon continue en fonction de x seulement. C'est très proche de la réalité lorsque le solide S est un tube de petit diamètre. Soit $\rho(s)$ la densité du solide pour la section où $x = s$.

Pour estimer la masse M du solide S , on partage le solide S en fines tranches parallèles au plan y,z et on estime la masse de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation de la masse de S .

On utilise les tranches (voir la figure 7.8), les sections (voir la figure 7.9) et les cylindres (voir la figure 7.10) qui ont été définies à la section précédente. On peut assumer que la densité de la i^e tranche est approximativement constant à $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire que $\rho(x) = \rho(x_i^*)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Si Δx est très petit, il est raisonnable de supposer que la densité $\rho(x)$ ne changera presque pas pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Comme la masse d'un objet de densité constante est le produit de sa densité par son volume, la masse M_i de la i^e tranche est approximativement la masse du solide S_i pour

lequel on assume que la densité est $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire

$$M_i \approx \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . La somme de la masse de chaque solide S_i donne une estimation de la masse M de S .

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x .$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près de la masse M du solide S . À la limite, on obtient la masse M de S .

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b \rho(x) A(x) dx .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.4.1

Soit S est solide dont la densité varie seulement dans une direction. On peut supposer que cet direction est donnée par l'axe des x et que $\rho(x)$ est la densité de la section $x = s$ engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . Si $A(s)$ est l'aire de cette section, alors le masse du solide S est

$$M = \int_a^b \rho(x) A(x) dx . \quad (7.4.1)$$

7.5 Travail 🔧

La force exercée sur un objet qui se déplace en ligne droite est donnée par le produit de sa masse par son accélération. Ainsi, si m est la masse en kilogrammes de l'objet et $x(t)$ est sa position en mètres au temps t en secondes, l'accélération de l'objet en m/s^2 est

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

et la force en Newtons exercée sur l'objet au temps t est

$$F(t) = m a(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}(t) .$$

L'abréviation pour un Newton est la lettre N. Ainsi, $N = \text{kg m/s}^2$.

Le travail en joules fait pour déplacer un objet en ligne droite sur une distance d , lorsque la force F exercée est constante durant tout le déplacement, est donnée par

$$W = F d . \quad (7.5.1)$$

L'abréviation pour un joule est la lettre J. Ainsi, $J = \text{N m}$.

Avec ces deux résultats de physique, on est en mesure de répondre aux questions suivantes.

7.5.1 Travail pour déplacer un objet

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force qui varie avec la distance parcourue. Si cette force est de $F(x)$ N lorsque l'objet est à x m de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de L m à partir de l'origine ; son point de départ ?

Si la force était constante, la formule (7.5.1) résoudrait le problème. Malheureusement, ce n'est pas le cas présentement.

Divisons l'intervalle $[0, L]$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = L/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = i \Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Si le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est très court, on peut supposer que la force F est presque constante sur cet intervalle et est égale à $F(x_i^*)$ où $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$. Le travail pour déplacer l'objet de x_i à x_{i+1} est donc $F(x_i^*) \Delta x$ grâce à la formule (7.5.1).

Ainsi, le travail pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donc approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} F(x_i^*) \Delta x ;$$

la somme du travail fait pour déplacer l'objet sur chacun des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^L F(x) dx .$$

Donc, si k tend vers l'infini, on trouve que le travail pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donnée par

$$W = \int_0^L F(x) dx .$$

Méthode 7.5.1

Le travail nécessaire pour déplacer un objet d'un point $x = a$ à un point $x = b$ (en ligne droite) est donné par l'intégrale

$$W = \int_a^b F(x) dx ,$$

où $F(x)$ est la force exercée sur l'objet lorsqu'il occupe la position x .

Exemple 7.5.2

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force. Si cette force est de $F(x) = 5x^2 + 3x + 1$ N lorsque l'objet est à x mètres de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de 6 mètres à partir de l'origine.

Le travail est donnée par

$$W = \int_0^6 (5x^2 + 3x + 1) dx = \left(\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right) \Big|_{x=0}^6 = 420 \text{ J} .$$



Exemple 7.5.3

On veut lever un bloc de glace de 100 kg à partir du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Le bloc de glace font à une vitesse de 4 kg/min et la vitesse à laquelle on peut lever le bloc est de 1.5 m/min. Si la masse de la corde est de 0.5 kg/m, déterminer le travail nécessaire pour lever le bloc à la hauteur désirée. Le problème est illustré à la figure 7.21.

Commençons par éliminer le temps dans l'énoncé du problème. Le bloc de glace font à une vitesse de 4 kg/min et en une minute le bloc monte de 1.5 mètres. Donc, la masse du bloc diminue de 4 kg par 1.5 mètres ; c'est-à-dire de $8/3$ kg/m.

Divisons l'intervalle $[0, 50]$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta y = 50/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[y_i, y_{i+1}]$ où $y_i = i \Delta y$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On choisit $y_i^* \in [y_i, y_{i+1}]$ pour tout i .

Si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, on peut assumer que le bloc de glace n'a pas le temps de fondre entre y_i et y_{i+1} mètres et donc que sa masse est constante et égale à $(100 - (8/3)y_i^*)$ kg car le bloc font à $8/3$ kg/m. Le travail pour lever le bloc de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8 \left(100 - \frac{8}{3}y_i^* \right) \Delta y .$$

De même, si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, on peut assumer que la corde que l'on doit lever entre y_i et y_{i+1} est de longueur constante égale à $(50 - y_i^*)$ mètres. La masse de cette portion de la corde est de $0.5(50 - y_i^*)$ kg. Le travail pour lever cette portion de la corde de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8 \left(0.5(50 - y_i^*) \right) \Delta y .$$

Donc, le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde de y_i à y_{i+1} mètres est approximativement

$$9.8 \left(100 - \frac{8}{3}y_i^* \right) \Delta y + 9.8 \left(0.5(50 - y_i^*) \right) \Delta y = 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y_i^* \right) \Delta y .$$

Ainsi, le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y_i^* \right) \Delta y .$$

Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y \right) dy .$$

Donc, si k tend vers l'infini, on trouve que le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est donnée par

$$W = \int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y \right) dy .$$

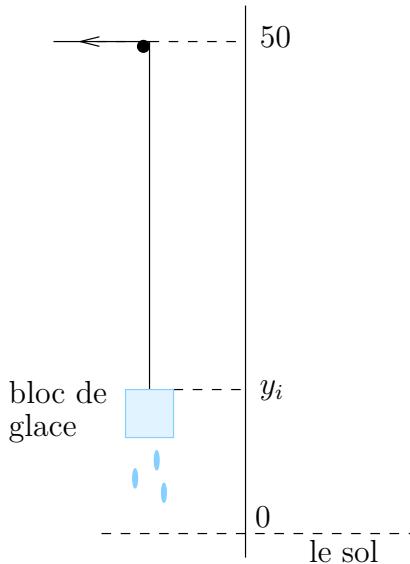


FIGURE 7.21 – Travail pour lever à la vitesse de 1.5 m/min un bloc de glace qui font à une vitesse de 4 kg/min. On veut lever le bloc jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Il faut aussi tenir compte dans ce problème de la masse de la corde qui est de 0.5 kg/m.

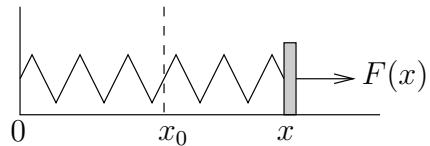


FIGURE 7.22 – Lois de Hooke pour les ressorts

On trouve donc

$$W = 9.8 \left(125y - \frac{19}{12} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{50} = 22,458.3 \text{ J} .$$



Une autre situation où l'on peut avoir à calculer le travail pour déplacer une objet est lorsque cet objet est attaché à un ressort.

On considère un mécanisme comme à la Figure 7.22 où l'on ignore toute friction et où la gravité peut être négligée. La **lois de Hooke** pour les ressorts dit que la force $F(x)$ nécessaire pour maintenir un ressort à un longueur de x m est $F(x) = k(x - x_0)$, où x_0 est la longueur du ressort au repos et k est une constante positive. Si $x > x_0$, la force est dans la direction positive alors que, si $x < x_0$, la force est dans la direction négative.

Exemple 7.5.4

Une force de 20 N est nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de 10 m. Si la longueur au repos du ressort est 5 m, calculer le travail nécessaire pour étirer le ressort de

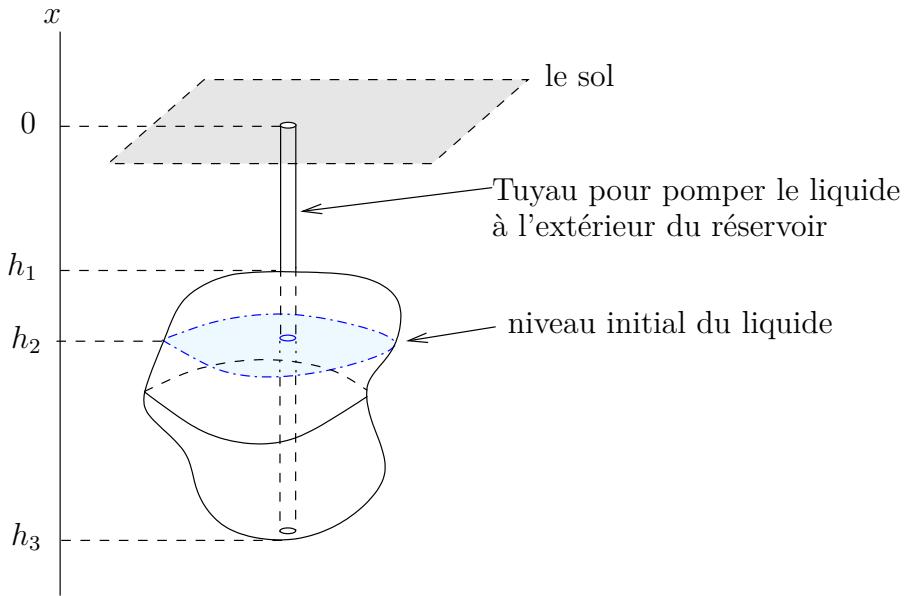


FIGURE 7.23 – Un réservoir de forme quelconque est enfoui à h_1 mètres sous le sol.

15 à 20 m.

Si $F(x) = k(x - 5)$ est la force nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de x m, on obtient de $F(10) = 20 = 5k$. Donc $k = 4$. Le travail nécessaire pour étirer le ressort de 15 à 20 m est

$$W = \int_{15}^{20} 4(x - 5) dx = 2(x - 5)^2 \Big|_{15}^{20} = 2(15^2 - 10^2) = 250 \text{ J} .$$



7.5.2 Travail pour vider un réservoir

Un réservoir rempli d'un liquide non-visqueux est enfoui h_1 m sous le sol. Ce réservoir est représenté à la figure 7.23. Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial du liquide est à h_2 m sous le sol? Pour les besoins de la discussion, la distance positive est vers le haut et 0 est le niveau du sol. Tout autre choix serait acceptable et conduirait à des formules équivalentes.

Pour obtenir une formule qui nous permettra de trouver le travail fait pour vider le réservoir, on divise l'intervalle $h_3 \leq x \leq h_2$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$. Chaque sous-intervalle est de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

On peut utiliser (7.5.1) pour estimer le travail fait pour retirer du réservoir la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} . Cette mince couche de liquide est représentée à la figure 7.24.

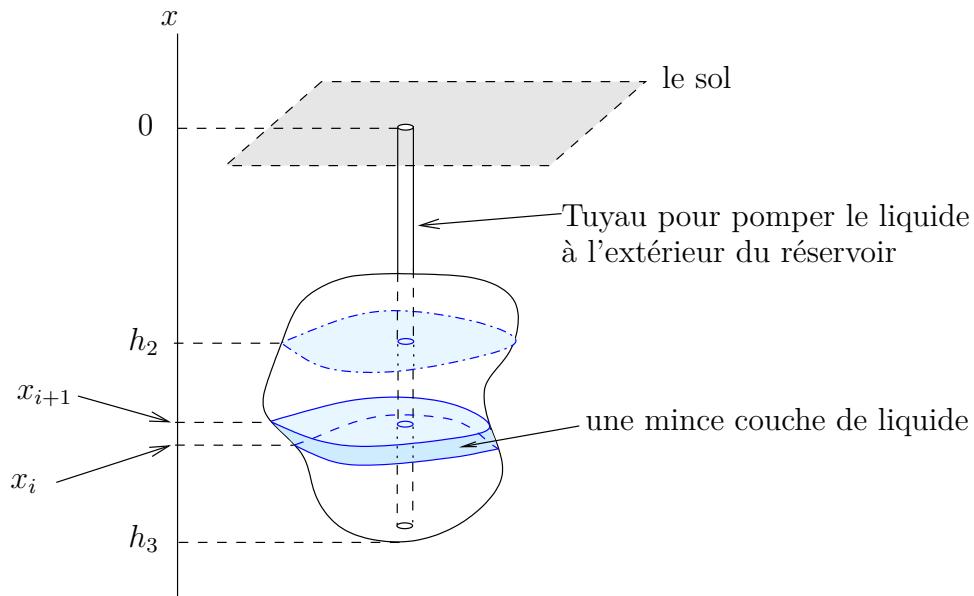


FIGURE 7.24 – Une mince couche de liquide pour x entre x_i et x_{i+1}

Soit x_i^* un point de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si Δx est très petit, on peut estimer le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} qui est représentée à la figure 7.24 est le volume du solide V_i que l'on retrouve à la figure 7.25. V_i est un solide borné par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et dont la paroi verticale est définie par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir. Les sections horizontales de V_i sont alors identiques à la section produite par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir.

Le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} est donc approximativement le volume du solide V_i ; c'est-à-dire,

$$A(x_i^*)\Delta x \quad (7.5.2)$$

où $A(x_i^*)$ est l'aire de la section produite par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir.

En supposant que la densité $\rho(x)$ du liquide à x m sous le sol ne varie presque pas pour x entre x_i et x_{i+1} , on peut assumer que la densité du liquide dans la mince couche est constante et égale à $\rho(x_i^*)$. Ainsi la masse de la mince couche entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$.

La force nécessaire pour déplacer la mince couche de liquide est approximativement

$$-9.8\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$$

où 9.8 m/s^2 est l'accélération terrestre. On utilise le signe négatif car la direction positive est vers le haut, dans la direction opposée à l'attraction terrestre.

Grâce au résultat (7.5.1), le travail fait pour déplacer la mince couche de liquide jusqu'au niveau du sol (donc pour retirer cette couche de liquide du réservoir) est approximativement $-9.8(0 - x_i^*)\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$.

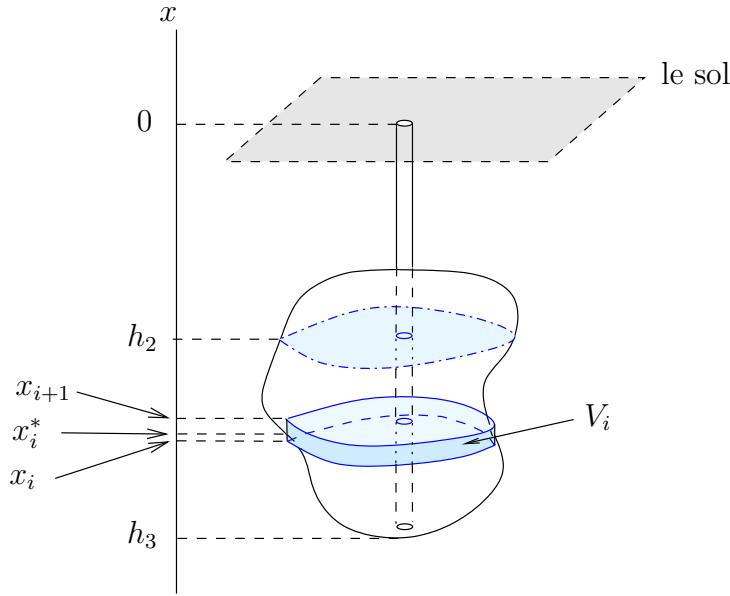


FIGURE 7.25 – Le volume de la mince couche de liquide de la figure 7.24 peut être estimé par le volume du solide V_i bornée par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et une paroi verticale.

Si on fait cela pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on trouve que le travail W fait pour vider le réservoir est approximativement

$$W \approx -9.8 \sum_{i=0}^{k-1} x_i^* \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$-9.8 \int_{h_3}^{h_2} x \rho(x) A(x) dx .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, on trouve que le travail fait pour vider le réservoir est

$$W = -9.8 \int_{h_3}^{h_2} x \rho(x) A(x) dx . \quad (7.5.3)$$

Remarque 7.5.5

Lors de la discussion précédente, on a assumé que la densité du liquide variait seulement en fonction de la profondeur. Cette hypothèse est réaliste. Le lecteur a certainement déjà remarqué la séparation qui se produit dans les vinaigrettes à salade où l'eau, le vinaigre et l'huile se partage en couches bien distinctes.

De plus, on suppose qu'il y a une prisse d'aire, non-inclusse avec le dessin du réservoir à la figure 7.23, pour permettre à l'aire d'occuper l'espace libérée par le liquide qui s'échappe du réservoir par le tuyau. Autrement, le réservoir se déformerait suite au retrait du liquide.

Finalement, le liquide est aspiré près du fond du réservoir. On pourrait croire que le calcul du travail fait pour retirer la mince couche de liquide à la profondeur x_i^* devrait être fait sur une distance plus grande que x_i^* . Ce n'est pas le cas. La pression dû à l'attraction terrestre maintient à égalité le niveau du liquide dans le réservoir et dans le tuyau. Le niveau du liquide est la profondeur de la mince couche de liquide qui est retirée du réservoir à ce moment. Aucun travail n'est fait par la pompe pour amener le liquide dans le tuyau au niveau du liquide dans le réservoir.



Exemple 7.5.6

Un réservoir d'eau de forme sphérique est représenté à la figure 7.26. Ce réservoir est enfoui à 3 m sous le sol. Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial de l'eau est au trois quarts du réservoir. La densité de l'eau est constante et égale à 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), on a que $h_3 = -7$, $h_2 = -4$ et $\rho(x) \equiv 1000$. Il ne manque que $A(x)$ qui, dans le cas présent, représente l'aire d'une section où x est constant. Comme on peut le voir à la figure 7.26, cette section est un cercle de rayon $r(x) = \sqrt{2^2 - (-5 - x)^2}$. Ainsi,

$$A(x) = \pi r^2(x) = \pi(2^2 - (-5 - x)^2) = \pi(-21 - 10x - x^2).$$

Le travail fait pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= -9,800\pi \int_{-7}^{-4} x(-21 - 10x - x^2) dx = -9,800\pi \left(-\frac{21}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_{x=-7}^{-4} \\ &= \pi(4.6305 \times 10^5) \text{ J}. \end{aligned}$$



Exemple 7.5.7

Un réservoir en forme de cône inversé est enfoui à 2 m sous le sol. La base du cône à un rayon de 3 m et le cône à une hauteur de 5 m (voir figure 7.27). Si le cône est rempli d'eau dont la densité est de 1000 kg/m^3 , déterminer le travail nécessaire pour vider ce réservoir.

Dans la formule (7.5.3), on a $h_2 = -2$, $h_3 = -7$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des cercles de rayon $r = \frac{3}{5}(7 + x)$. Donc, $A(x) = \frac{9\pi}{25}(7 + x)^2$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-7}^{-2} 9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) x(7 + x)^2 dx \\ &= -9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) \int_{-7}^{-2} (x^3 + 14x^2 + 49x) dx \\ &= -9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) \left(\frac{x^4}{4} + \frac{14x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} \right) \Big|_{-7}^{-2} = \pi(4.7775 \times 10^5) \text{ J}. \end{aligned}$$



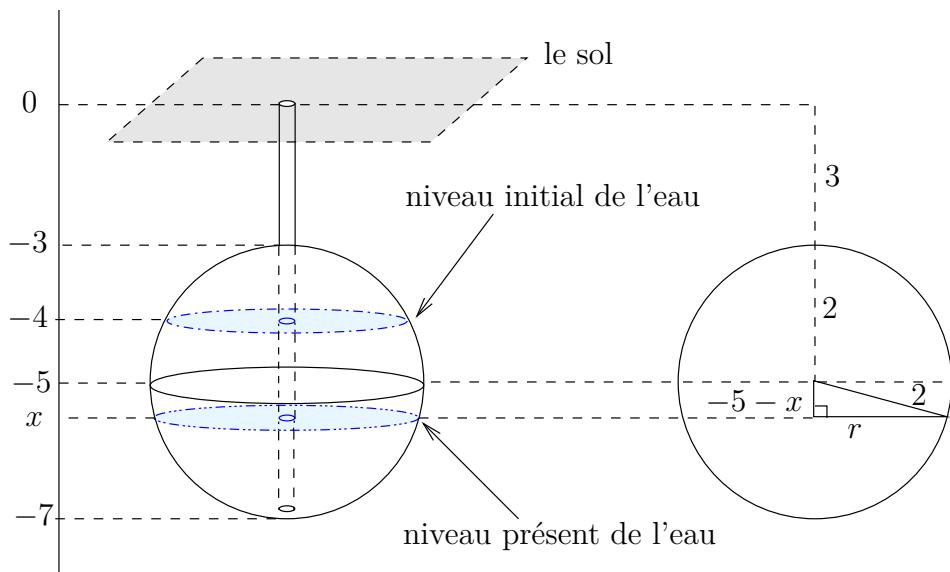


FIGURE 7.26 – Un réservoir sphérique de 2 mètres de rayon enfoui à 3 mètres sous le sol.

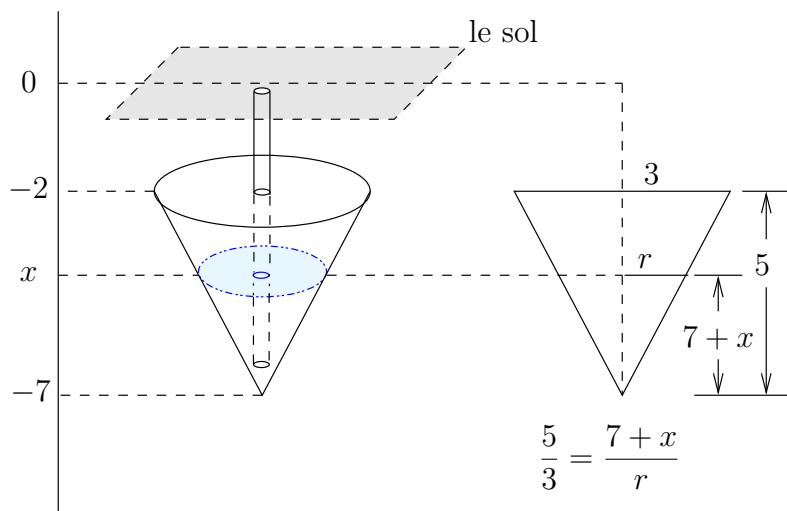


FIGURE 7.27 – Un réservoir conique dont la base à 3 mètres de rayon et la hauteur est de 5 mètres est enfoui à 2 mètres sous le sol.

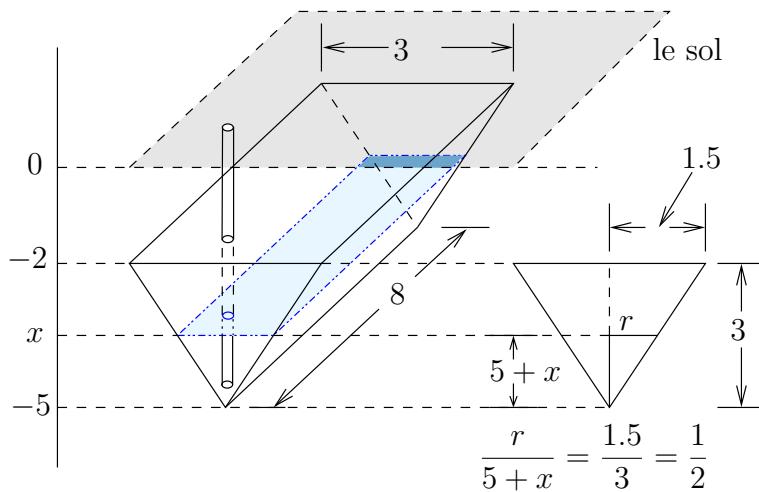


FIGURE 7.28 – Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles est enfoui à 2 m sous le sol. Les triangles ont une hauteur de 3 m et une basse de 3 m.

Exemple 7.5.8

Le réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles renversés comme on retrouve à la figure 7.28 est enfoui à 2 m sous le sol. Si le niveau d'eau initial dans le réservoir est au 2/3 d'eau, quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir ? La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), on a $h_2 = -3$ car le réservoir est rempli au 2/3, $h_3 = -5$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 8 m de long et le deuxième est de $2r = 5 + x$ m de long. Donc, $A(x) = 8(5 + x)$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-5}^{-3} 9,800(8x(5+x)) dx = -9,800 \times 8 \int_{-5}^{-3} (x^2 + 5x) dx \\ &= -9,800 \times 8 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-5}^{-3} = 5.74933\bar{3} \times 10^5 \text{ J}. \end{aligned}$$



Exemple 7.5.9

Un réservoir cylindrique (voir figure 7.29) est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur. Le cylindre a un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres. Si on suppose que le cylindre est rempli d'eau, déterminer le travail nécessaire pour vider le réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), on a $h_2 = -5$, $h_3 = -9$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 9 m de long et le deuxième est de $2r = 2\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$ m de long. Donc, $A(x) = 18\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-9}^{-5} 9,800 \left(18x \sqrt{2^2 - (x+7)^2} \right) dx \\ &= -9,800 \times 18 \int_{-2}^2 (u-7) \sqrt{2^2 - u^2} du \end{aligned}$$

où on a utilisé la substitution $u = x + 7$ qui donne $u = -2$ lorsque $x = -9$, $u = 2$ lorsque $x = -7$ et $du = dx$. Or,

$$\int_{-2}^2 u \sqrt{2^2 - u^2} du = 0$$

car $u\sqrt{2^2 - u^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine. Pour évaluer $-7 \int_{-2}^2 \sqrt{2^2 - u^2} du$, on pose $u = 2 \sin(t)$ pour $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Donc $u = -2$ pour $t = -\pi/2$, $u = 2$ pour $t = \pi/2$ et $du = 2 \cos(t) dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -7 \int_{-2}^2 \sqrt{2^2 - u^2} du &= -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \sin^2(t)} 2 \cos(t) dt \\ &= -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2(t) dt = -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1 + \cos(2t)) dt \\ &= -14 \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -14\pi. \end{aligned}$$

Donc,

$$W = -9,800 \times 18 \times (-14\pi) = 2469600\pi \text{ j}.$$



7.6 Force et pression hydrostatique

Pour un liquide donné (e.g. l'eau dans l'océan), plus on est profond plus la pression exercée par le liquide augmente. Si $\rho(x)$ est la densité d'un liquide en kg/m^3 à une profondeur de x mètres et 9.8 m/s^2 est l'attraction terrestre en m/s^2 , alors la pression $p(x)$ en N/m^2 à une profondeur de x mètres est donnée par la formule

$$p(x) = 9.8 x \rho(x).$$

La force en Newtons exercée sur une surface de *très petite hauteur* à la profondeur de x mètres est approximativement

$$F(x) = p(x)A(x)$$

où $A(x)$ est l'aire en m^2 de la surface. On a supposé dans le raisonnement précédent que la *hauteur* de la surface est très petite. Si la *hauteur* de la surface est grande comme à la figure 7.30, il faut décomposer la surface en minces tranches horizontales de *très petite hauteur* et calculer la force sur chacune de ces tranches.

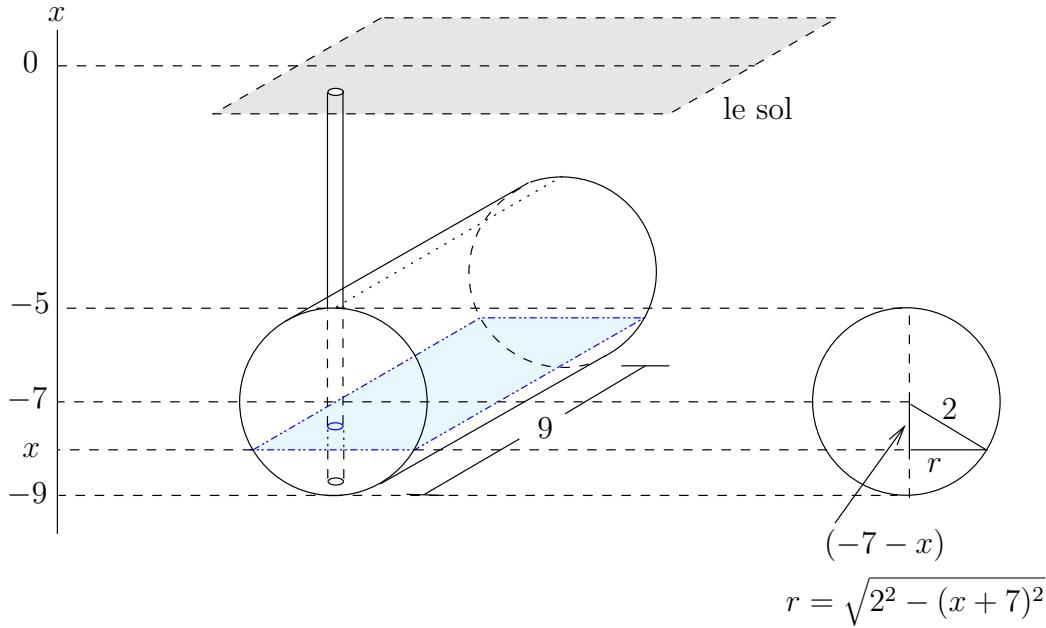


FIGURE 7.29 – Un réservoir cylindrique est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur. Le cylindre à un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres.

Supposons que l'origine soit à la surface du liquide et la direction positive soit vers le haut comme on la fait pour le calcul du travail à la section précédente. On désire calculer la force exercée sur une surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur.

On partage le segment $[h_3, h_2]$ en k sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

la pression à une profondeur de x_i^* mètres, où $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$, est

$$p(x_i^*) = -9.8 x_i^* \rho(x_i^*) .$$

On utilise le signe négatif car la direction positive est vers le haut, dans la direction opposée à l'attraction terrestre. On obtient que la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement

$$F(x_i^*) = p(x_i^*)A(x_i^*) = -9.8 x_i^* \rho(x_i^*)A(x_i^*) .$$

où $A(x_i^*)$ est approximativement l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres. Puisque l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres tend vers 0 lorsque la longueur $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, on peut exprimer $A(x_i^*)$ comme le produit $S(x_i^*)\Delta x$ où S est une fonction qu'il faut déterminer pour chaque type de surfaces. Dans les cas simples, $S(x_i^*)$ sera une longueur mais ce ne sera pas toujours le cas comme on verra dans les exemples qui suivent.

Si on fait la somme de la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, on trouve que la force F exercée sur la surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est approximativement

$$F \approx \sum_{j=0}^{k-1} -9.8 x_j^* \rho(x_j^*) S(x_j^*) \Delta x .$$

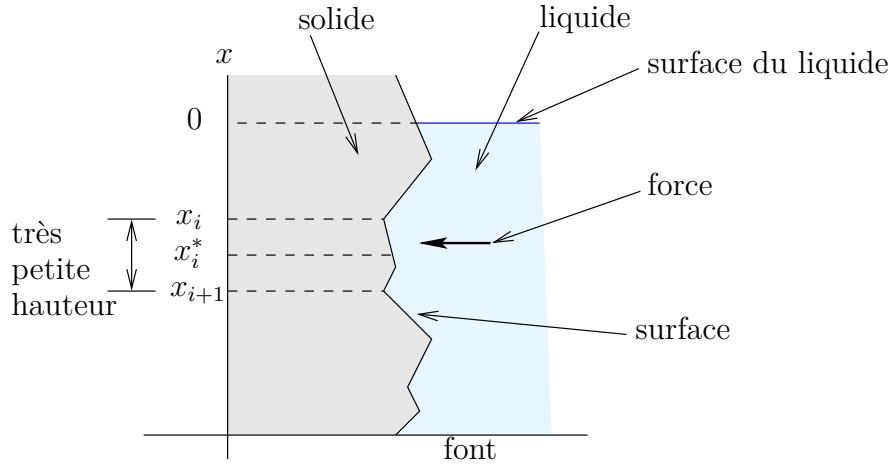


FIGURE 7.30 – Vue transversale d'une surface verticale soumise à la force exercée par la pression.

La somme dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$-\int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx .$$

Ainsi, si on regarde la limite lorsque k tend vers plus l'infini, on trouve que la force F exercée sur la surface verticale entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est

$$F = -\int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx . \quad (7.6.1)$$

Exemple 7.6.1

Un réservoir de forme cylindrique repose sur le côté au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur. Le réservoir a 2 mètres de diamètre et 5 mètres de longueur. Si le réservoir est vide, calculer la force sur les deux extrémités du réservoir et sur le long du cylindre. Utiliser le fait que l'attraction terrestre est de 9.8 m/s^2 et la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

- i) Si on utilise l'information fournie à la figure 7.31, on a que l'aire $A(x_i^*)$ de la surface de l'extrémité du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement l'aire du rectangle R_i de base $2\sqrt{1 - (x_i^* + 29)^2}$ et de hauteur Δx . Donc, $A(x_i^*) \approx S(x_i^*)\Delta x$ où

$$S(x) = 2\sqrt{1 - (x + 29)^2} .$$

La formule (7.6.1) avec $h_3 = -30$ et $h_2 = -28$ nous donne la force F exercée sur une des extrémités du réservoir.

$$F = -\int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx = -2 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} x \sqrt{1 - (x + 29)^2} dx .$$

Si on pose $y = x + 29$. Alors, $dy = dx$. De plus, $y = -1$ pour $x = -30$ et $y = 1$ pour $x = -28$. Donc,

$$F = -19,600 \int_{-1}^1 (y - 29) \sqrt{1 - y^2} dy$$

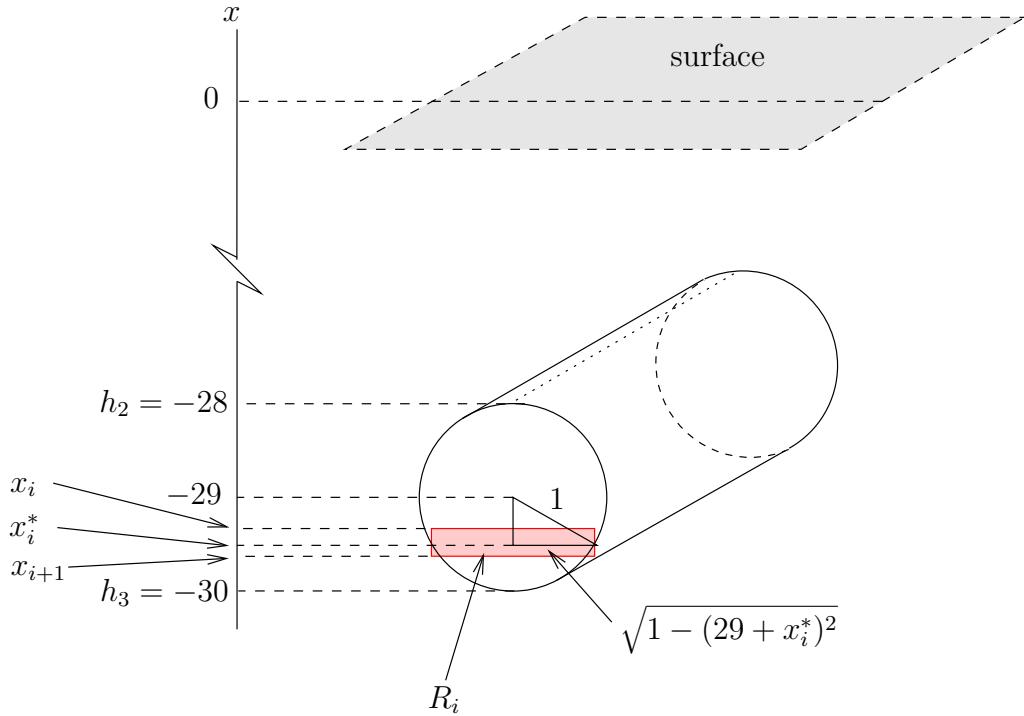


FIGURE 7.31 – Le calcul de la force exercée sur une des extrémités d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur.

$$= -19,600 \int_{-1}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy + 19,600 \times 29 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy .$$

Or $y\sqrt{1 - y^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine. Donc,

$$\int_{-1}^1 y \sqrt{1 - y^2} dy = 0 .$$

Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy ,$$

il suffit de noter que c'est la formule pour calculer l'aire d'une demi-disque de rayon 1. Donc, sa valeur est $\pi/2$. On peut aussi vérifier cela en utilisant la substitution trigonométrique $y = \sin(\theta)$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Ainsi, $dy = \cos(\theta) d\theta$. De plus, $\sin(\pi/2) = -1$ et $\sin(-\pi/2) = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(-\pi) \right) = \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

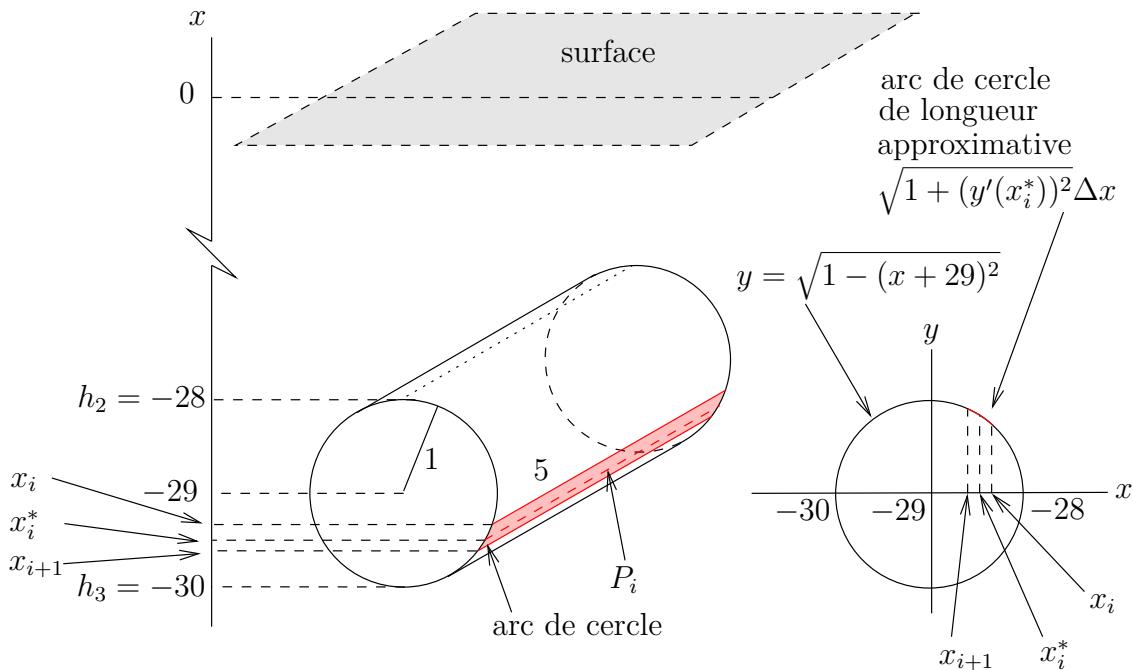


FIGURE 7.32 – Le calcul de la force exercée sur la surface courbée externe d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur.

On trouve que $F = 19,600 \times 29 \times \frac{\pi}{2} = 284,200\pi$ Newtons.

ii) Pour calculer la force exercée sur le côté courbé illustré à la figure 7.32, il faut calculer l'aire $A(x_i^*)$ de la surface courbée P_i du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres. Cette surface représente un rectangle dont deux des côtés ont 5 mètres de longueur et la longueur des deux autres côtés est la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x + 29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} .

On montre à la section sur le calcul de la longueur d'une courbe que, si Δx est assez petit, la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x + 29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \Delta x$ pour un nombre x_i^* entre x_i et x_{i+1} . Donc,

$$A(x_i^*) \approx 5\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \Delta x = \frac{5}{\sqrt{1 - (x_i^* + 29)^2}} \Delta x$$

car $y'(x) = -(x + 29)/\sqrt{1 - (x + 29)^2}$.

Ainsi, $A(x_i^*) \approx S(x_i^*) \Delta x$ où

$$S(x) = \frac{5}{\sqrt{1 - (x + 29)^2}}.$$

Il découle de (7.6.1) avec $h_3 = -30$ et $h_2 = -28$ que la force exercée sur l'un des deux

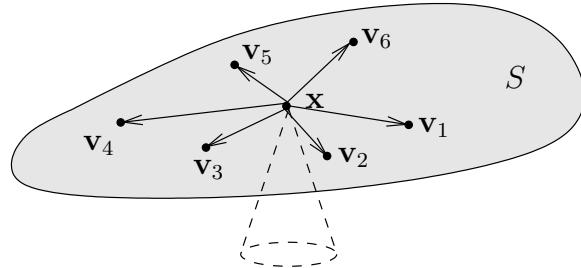


FIGURE 7.33 – Centre de masse d'une surface plane dont la masse est concentrée en un nombre fini de points

côtés courbés est

$$F = - \int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx = -5 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} \frac{x}{\sqrt{1-(x+29)^2}} dx .$$

Si on pose $y = x + 29$, on a $dy = dx$, $y = -1$ pour $x = -30$ et $y = 1$ pour $x = -28$. Donc,

$$F = -49,000 \int_{-1}^1 \frac{y-29}{\sqrt{1-y^2}} dy = -49,000 \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy + 49,000 \times 29 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy .$$

Puisque $y/\sqrt{1-y^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine, on a

$$\int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0 .$$

De plus,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arctan(y) \Big|_{y=-1}^1 = \pi .$$

On trouve que $F = 49,000 \times 29 \pi = 1,421,000\pi$ Newtons.



7.7 Centre de masse

Pour cette section, on assume que le lecteur sait ce qu'est un vecteur et connaît les opérations de bases sur les vecteurs. Le matériel que l'on retrouve dans les deux premières sections du chapitre 9 suivit amplement.

Le **centre de masse** d'une mince surface plane S est le point de la surface pour lequel la surface sera en état d'équilibre si on la dépose sur un cône de telle sorte que la pointe du cône soit en contact avec ce point.

On suppose que la masse de la surface plane S est concentrée en n points de S (voir figure 7.33). Si m_j est la masse au point \mathbf{v}_j pour $1 \leq j \leq n$, on cherche le point \mathbf{x} de S tel que

$$\sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{x}) = \mathbf{0} . \quad (7.7.1)$$

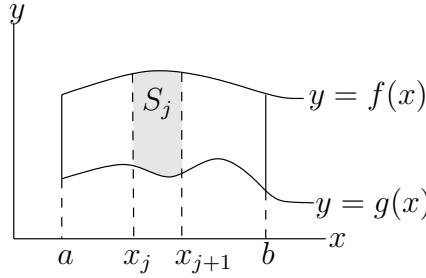


FIGURE 7.34 – Centre de masse d'une surface plane de densité constante

La somme des forces exercées sur le point \mathbf{x} est nulle. Si $\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, on obtient des coordonnées de (7.7.1) que

$$\sum_{j=1}^n m_j(p_j - p) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n m_j(q_j - q) = 0 .$$

Donc,

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n m_j p_j}{\sum_{j=1}^n m_j} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sum_{j=1}^n m_j q_j}{\sum_{j=1}^n m_j} .$$

$M_x = \sum_{j=1}^n m_j q_j$ est le **moment par rapport à l'axe des x** et $M_y = \sum_{j=1}^n m_j p_j$ est le **moment par rapport à l'axe des y**. La masse totale est $m = \sum_{j=1}^n m_j$. Le **centre de masse** est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$.

On suppose maintenant que la surface plane S est de densité constante. De plus, on suppose que la surface S est de la forme $\{(x, y) : g(x) \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ pour deux fonctions continues f et g .

On veut estimer le moment par rapport à l'axe des y de S . On partage le segment $[a, b]$ en k sous intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ de longueur $\Delta x = (b - a)/k$ où $x_i = a + j\Delta x$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On choisit $x_j^* \in [x_j, x_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$. On a donc

$$M_y \approx \sum_{j=0}^{k-1} x_j^* \rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x$$

où ρ est la densité de S car x_j^* est la distance approximative entre l'axe des y et les points de la portion $S_j = \{(x, y) : g(x) \leq y \leq f(x), x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$ de S et $\rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S .

De même, on peut estimer le moment par rapport à l'axe des x de S à l'aide de la formule

$$M_x \approx \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f(x_j^*) + g(x_j^*))}{2} \rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x = \sum_{j=0}^{k-1} \rho \frac{1}{2} \left(f^2(x_j^*) - g^2(x_j^*) \right) \Delta x$$

où $(f(x_j^*) + g(x_j^*)) / 2$ est la distance moyenne entre l'axe des x et les points de la portion S_j de S et, comme précédemment, $\rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S .

La masse de S peut être estimée à l'aide de la formule

$$m \approx \sum_{j=0}^{k-1} \rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x .$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, on obtient les formules

$$M_y = \rho \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx \quad \text{et} \quad M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

pour le **moment par rapport à l'axe des x** et le **moment par rapport à l'axe des y** respectivement. La masse de S est donnée par

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx .$$

Le **centre de masse** est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$.

Exemple 7.7.1

Trouver le centre de masse de la surface bornée par les courbes $y = 1 - x^2$ et $y = 0$. La densité de la surface est $\rho = 10$.

La courbe $y = 1 - x^2$ coupe l'axe des x aux points $x = -1$ et $x = 1$. Donc, la masse de la surface est

$$m = \int_{-1}^1 10(1 - x^2) dx = 10 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3} .$$

Le moment par rapport à l'axe des x est

$$M_x = \frac{10}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = 5 \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 5 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3} .$$

et le moment par rapport à l'axe des y est

$$M_y = 10 \int_{-1}^1 x(1 - x^2) dx = 0$$

car la fonction $h(x) = x(1 - x^2)$ est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe des y . Ce n'est pas surprenant que $M_y = 0$ car la surface est symétrique par rapport à l'axe des y et elle est de densité constante.

Le centre de masse est $(0, 2/5)$.



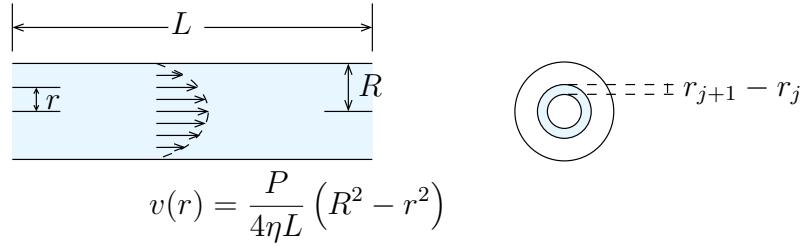


FIGURE 7.35 – La distribution de vélocité d'après le modèle de Poiseuille

7.8 Débit sanguin

Le modèle de Poiseuille pour la distribution de vélocité d'un liquide visqueux et incompressible qui s'écoule dans un tube de rayon constant R cm et de longueur L cm (voir figure 7.35) est

$$v(r) = \frac{P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad , \quad 0 \leq r \leq R ,$$

où $v(r)$ cm/s est la vélocité du liquide à une distance r cm de l'axe central du tube, P dyn/cm² est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et η est le coefficient de viscosité du liquide. Dans ce modèle, on suppose que la vélocité varie seulement en fonction de la distance par rapport à l'axe du tube. On suppose de plus que la vélocité est nulle sur la paroi du tube. Ce sont de bonnes suppositions si le tube est un vaisseau sanguin et le liquide est du sang.

La formule pour la vélocité donnée ci-dessus est une approximation de la solution de l'équation de Navier et Stokes en mécanique des fluides (voir [2]).

On veut calculer le débit dans le tube ; c'est-à-dire, le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps. Pour ce faire, on utilise la technique des sommes de Riemann.

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta r = R/k$ et $r_j = j\Delta r$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[0, R]$ en sous-intervalles de la forme $[r_j, r_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

On considère l'anneau défini par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$. Pour estimer D_j , le volume de liquide qui passe au travers de cet anneau par unité de temps, on suppose que la vélocité du liquide est constante dans cet anneau. L'aire de l'anneau défini par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$ est

$$\pi r_{j+1}^2 - \pi r_j^2 = 2\pi \left(\frac{r_{j+1} + r_j}{2} \right) (r_{j+1} - r_j) = 2\pi r_j^* \Delta r ,$$

où $r_j^* = (r_{j+1} + r_j)/2$. Ainsi,

$$D_j \approx 2\pi r_j^* v(r_j^*) \Delta r .$$

On a donc que D , le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps est donné approximativement par

$$D = \sum_{j=0}^{k-1} D_j \approx 2\pi \sum_{j=0}^{k-1} r_j^* v(r_j^*) \Delta r .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_0^R rv(r) dr .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$D = 2\pi \int_0^R rv(r) dr .$$

Pour le modèle de Poiseuille, le débit est donc donné par la formule

$$D = 2\pi \int_0^R rv(r) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta L} .$$

Les unités de D sont les cm^3/s .

Exemple 7.8.1

Supposons que l'on veuille mesurer le diamètre de l'aorte ascendante d'une patiente pour déterminer le risque de celle-ci d'avoir un accident cardio-vasculaire. On ne veut pas avoir recours à une chirurgie.

Si on peut déterminer le débit cardiaque D , le débit sanguin dans l'aorte ascendante, alors la formule $D = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}$ peut être utilisée pour déterminer le rayon R de l'aorte car la pression sanguine P peut être mesurée, η est une constante connue pour le sang, et L est la longueur de l'aorte ascendante. Pour un adulte de grandeur moyenne, $L \approx 6 \text{ cm}$, $P \approx 106,658 \text{ dyn/cm}^2$ et $\eta \approx 0.027 \text{ s} \times \text{dyn/cm}^2$.

Pour mesurer expérimentalement le débit cardiaque, on injecte A mg d'un produit de contraste dans le cœur (naturellement, pas directement dans le cœur) et on mesure le débit sanguin dans l'aorte ascendante. On estime qu'il faut T s pour que le cœur de la patiente se vide du produit de contraste. On va utiliser les sommes de Riemann pour calculer la quantité total du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante pendant la période de temps T .

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_j = j\Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Soit $c(t)$ la concentration du produit de contraste en mg/cm^3 au temps t s dans l'aorte ascendante. Si on suppose que la concentration du produit de contraste est constante entre t_j et t_{j+1} , la quantité Q_i du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante entre t_i et t_{i+1} est approximativement

$$Q_i \approx c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t$$

car $\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t$ représente le volume de sang qui passe par l'aorte ascendante durant la période de temps Δt . La quantité total Q du produit de contraste qui passe par l'aorte

ascendante durant les T s est donc donnée approximativement par

$$Q = \sum_{i=0}^{k-1} Q_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \int_0^T c(t) dt .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \int_0^T c(t) dt .$$

Or, après T s seconde on a $Q = A$. Donc, le débit est

$$D = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} = A \left/ \left(\int_0^T c(t) dt \right) \right. .$$

Supposons que 6 mg du produit de contraste est injecté dans le coeur de la patiente. On mesure la concentration du produit de contraste à intervalle régulier pour obtenir les données suivantes.

t	(s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$c(t)$	(mg/cm ³)	0	0.021	0.045	0.073	0.058	0.036	0.028	0.014	0.006	0.002	0

Évaluer le débit sanguin avec les sommes à droite. De plus, si $P \approx 106,658$ dyn/cm², $L = 6$ cm et $\eta \approx 0.027$, déterminer le diamètre de l'aorte ascendante de cette patiente.

Posons $t_i = \frac{i}{2}$ pour $i = 0, 1, \dots, 10$. On a

$$\int_0^5 c(t) dt \approx \sum_{i=1}^{10} c(t_i) \Delta t = \frac{1}{2} (0.021 + 0.045 + \dots + 0) = 0.1415 \text{ s mg/cm}^3 .$$

Donc, le débit est

$$D = \frac{6}{0.1415} \approx 42.4028 \text{ cm}^3/\text{s} .$$

On déduit de la formule $D = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}$ que

$$R = \left(\frac{8\eta L D}{\pi P} \right)^{1/4} \approx 0.11317 \text{ cm} .$$

Donc, le diamètre de l'aorte ascendante est approximativement 0.2263 cm. Pour un adulte de grandeur normale, le diamètre de l'aorte ascendante est beaucoup plus grand (au moins 10 fois plus grand). La patiente est à risque.

7.9 Applications à l'économie ↗

Avant de donner un exemple de l'utilité de l'intégrale en économie, il faut introduire quelques concepts de base.

Si on dépose dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de $I\%$ par année, après un an on aura

$$M_1 = M_0 + \frac{I}{100} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right) \text{ dollars.}$$

C'est le montant en banque au début de l'année plus les intérêts pour l'année. Après deux ans on aura

$$M_2 = M_1 + \frac{I}{100} M_1 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100}\right) \text{ dollars.}$$

C'est le montant en banque au début de la deuxième année plus les intérêts pour l'année. Donc,

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 \text{ dollars.}$$

Par induction, après n années on aura le résultat suivant.

Méthode 7.9.1

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé annuellement** au taux de $I\%$, alors le montant M_n dans le compte après n années est donnée par la formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n \text{ dollars,}$$

où

Si on dépose dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de $I\%$ par année calculé k fois par année, à la fin de la première période de l'année (i.e. au premier versement des intérêts), on aura

$$M_{0,1} = M_0 + \frac{I}{100k} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right) \text{ dollars.}$$

C'est le montant en banque au début de la première période plus les intérêts pour la période qui sont $1/k$ des intérêts de l'année. À la fin de la deuxième période de l'année (i.e. au deuxième versement des intérêts), on aura

$$M_{0,2} = M_{0,1} + \frac{I}{100k} M_{0,1} = M_{0,1} \left(1 + \frac{I}{100k}\right) \text{ dollars.}$$

C'est le montant en banque au début de la deuxième période plus les intérêts pour la période qui sont encore $1/k$ des intérêts de l'année. Il est naturellement assumé que l'année est divisée en k périodes de même durées. On a donc

$$M_{0,2} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^2 \text{ dollars.}$$

Par induction, à la fin de l'année (c'est à dire à la fin de la k^e période ou, si vous préférez, au k^e versement) on aura

$$M_1 = M_{0,k} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^k \text{ dollars .}$$

De même, à la fin de la deuxième année on aura

$$M_2 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^k \text{ dollars .}$$

Donc,

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{2k} \text{ dollars .}$$

Par induction, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.9.2

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé k fois par année** au taux de $I\%$, alors le montant M_n que l'on aura après n années est donnée par la formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{nk} \text{ dollars .}$$

Dans le cas précédent où l'intérêt est composé k fois par année, si le nombre k de périodes devient de plus en plus grand (tend vers plus l'infini) on obtient la formule suivante.

Méthode 7.9.3

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé de façon continue** au taux $I\%$ par année, alors le montant M_n dans le compte après n année est donnée par la formule

$$M_n = M_0 e^{(nI)/100} . \quad (7.9.1)$$

Dans le cas continue, n peut être un nombre réel. On n'est plus limité aux entiers comme dans les deux premiers cas.

Pour démontrer la formule (7.9.1), il suffit de noter que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} M_0 \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100k/I}\right)^{100k/I}}_{\rightarrow e \text{ lorsque } k \rightarrow \infty} \right)^{nI/100} = M_0 e^{nI/100} .$$

7.9.1 Valeurs présentes et futures

Définition 7.9.4

La **valeur future** d'un montant M_0 est le montant obtenu après t années si le montant M_0 est placé aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de $I\%$ par année.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur future après n année est $M_n = M_0 e^{nI/100}$.

Définition 7.9.5

La **valeur présente** d'un montant M_t est le montant M_0 qu'il faut placer aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de $I\%$ pour obtenir M_t dans t années.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur présente de M_t dollars dans t années est $M_0 = M_t e^{-I n/100}$. Si l'intérêt est composé k fois par année, la valeur présente de M_n dollars dans n années est $M_0 = M_n \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{-kn}$.

Exemple 7.9.6

Vous venez de gagner \$1,000,000 à la loterie. Le montant vous est donné en quatre versements égaux ; le premier versement aujourd'hui, le deuxième dans un an à partir d'aujourd'hui, le troisième dans deux ans à partir d'aujourd'hui, etc. Avez-vous réellement gagné \$1,000,000 ? Assumez que le taux d'intérêt pour les prochaines années est de 4% composé de façon continue.

Il faut déterminer la valeur présente de l'argent qui vous est donné. La valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans un an est $250,000 e^{-4/100}$, la valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans deux ans est $250,000 (e^{-4/100})^2$, etc.

Donc, la valeur présente de montant que vous avez gagné à la loterie est

$$\begin{aligned} & 250,000 + 250,000 e^{-4/100} + 250,000 (e^{-4/100})^2 + 250,000 (e^{-4/100})^3 \\ &= 250,000 \left(\frac{1 - (e^{-4/100})^4}{1 - e^{-4/100}} \right) = 942,706.56 \text{ dollars.} \end{aligned}$$



En raison de leur très grand volume de vente, on peut supposer que le taux de revenu d'une grande entreprise (e.g. Une chaîne de restaurants ou de magasins à rayons) est donné par une fonction continue $R(t)$ où t est le temps. Puisque $R(t)$ est un taux de revenu, ses unités sont des dollars/jour, des dollars/année, des euros/mois, etc. Le temps t utilise les

mêmes unités de temps que ceux utilisé pour le taux de revenu. Par exemple, si le taux de revenu est en dollars/jour, le temps t sera en jours.

Si l'entreprise investi ses revenus dans un compte dont le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, quelle sera la valeur future V_f des placements de cette entreprise au temps T ?

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, on choisit t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur future de ces revenus est alors approximativement $e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t$ car ces revenus sont investis pour une période d'environ $T - t_i^*$.

La somme des valeurs futures estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivant de la valeur future V_f des placements de l'entreprise pour une période T .

$$V_f \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t .$$

On remarque de plus que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.9.7

Si $R(t)$ représente est le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, alors la valeur future V_f des investissements après une période T est donnée par la formule

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt .$$

De façon semblable, on peut obtenir la valeur présente V_p des gains d'une grande entreprise pour une période de temps T . On assume que le taux d'intérêt sur les placements est de $I\%$ composé de façon continue.

Soit k , un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. On obtient une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, on choisit t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur présente de ces revenus est alors approximativement $e^{-I t_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t$.

La somme des valeurs présentes estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivant de la valeur présente V_p des revenus de l'entreprise pour une période T .

$$V_p \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{-I t_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t .$$

On remarque de plus que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{-I t/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 7.9.8

Si $R(t)$ représente est le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, alors la valeur présente V_p des investissement pour une période T est donnée par la formule

$$V_p = \int_0^T e^{-I t/100} R(t) dt .$$

Exemple 7.9.9

Si le taux de revenus d'une chaîne de locations de voitures est $R(t) = 10,000$ dollars/jour, quelle sera la valeur future des revenus de cette chaîne de locations dans 10 ans si elle investi ses revenus pour obtenir un taux d'intérêt est de 5% composé de façon continue.

On a que la valeur future V_f est

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt ,$$

où $T = 10$, $I = 5$ et $R(t) = 10,000$ pour tout t . Donc,

$$\begin{aligned} V_f &= \int_0^{10} 10,000 e^{5(10-t)/100} dt = -2 \times 10^5 e^{5(10-t)/100} \Big|_{t=0}^{10} \\ &= -2 \times 10^5 (1 - e^{0.5}) \approx 129,744.25 \text{ dollars.} \end{aligned}$$



7.9.2 Surplus du consommateur et du producteur

Soit $D(q)$ le prix par unité que le consommateur est prêt à payer s'il y a q unités disponibles sur le marché et soit $P(q)$ le prix par unité que le producteur ou manufacturier est prêt a demander s'il y a q unités disponibles sur le marché.

Il est raisonnable de penser que D est une fonction décroissante. Quand le nombre d'unités disponibles sur le marché est grand, les consommateurs espèrent que les vendeurs vont

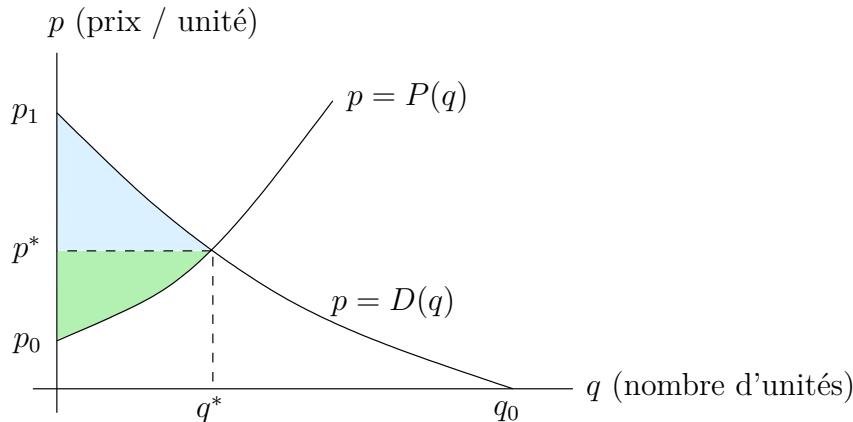


FIGURE 7.36 – La région en bleu représente le surplus du consommateur alors que la région en vert représente le surplus du producteur.

baisser le prix par unité pour pouvoir écouler leur stock. Par contre, la fonction P sera probablement croissante. Si les marchands commandent un grande nombre d'unités pour vendre, les producteurs ou manufacturiers vont augmenter le prix par unité pour bénéficier de l'enjouement pour le produit et pour pouvoir augmenter leur production.

On retrouve à la figure 7.36 le graphe de D et celui de P . Dans cette figure, q_0 est le nombre maximal d'unité que le marché peut supporter (tous ceux susceptibles d'acheter le produit en ont déjà fait l'achat), p_0 est le prix minimal par unité que le producteur ou manufacturier est prêt à demander, et p_1 est le prix maximal par unité que le consommateur est prêt à payer. Le point q^* est le **point d'équilibre** pour le nombre d'unités sur le marché. À ce point, les consommateurs et les producteurs ou manufacturiers sont en accord sur le prix par unité p^* .

Le **surplus du consommateur** S_c est le montant économisé par les consommateurs s'ils payent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à payer normalement pour $q < q^*$.

$$S_c = \int_0^{q^*} D(q) dq - p^* q^* .$$

C'est l'aire de la région en bleu dans la figure 7.36.

Le **surplus du producteur** S_p est le revenu additionnel fait par les producteurs ou manufacturiers s'ils demandent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à demander normalement pour $q < q^*$.

$$S_p = p^* q^* - \int_0^{q^*} P(q) dq .$$

C'est l'aire de la région en vert dans la figure 7.36.

Exemple 7.9.10

En mai 2003, on retrouvait sur le marché 50 unités d'un modèle de voiture de lux que le consommateur (pour ce genre de voitures) était prêt à acheter pour \$370,000 l'unité. On a estimé que le point d'équilibre pour le nombre d'unités était de 350 voitures au prix de

\$250,000 par unités. Quelle a été le surplus du consommateur si le prix par unité que le consommateur est prêt à payer est une fonction affine du nombre d'unités disponibles ?

Le graphe de D est une droite qui passe par les points $(50, 370,000)$ et $(q^*, p^*) = (350, 250,000)$. L'équation de cette droite est

$$P(q) = \frac{370,000 - 250,000}{50 - 350} (p - 350) + 250,000 = -400(p - 350) + 250,000.$$

Le surplus du consommateur est

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{350} (-400(p - 350) + 250,000) \, dp - 350 \times 250,000 \\ &= \left(-200(p - 350)^2 + 250,000p \right) \Big|_{p=0}^{350} - 350 \times 250,000 = 24,500,000 \text{ dollars.} \end{aligned}$$



7.10 Test de l'intégrale

Il est possible de déterminer si une série de termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge à l'aide d'une intégrale impropre.

Théorème 7.10.1 (Le test de l'intégrale)

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction continue et décroissante. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série dont les termes sont donnés par $a_n = f(n)$ pour tout n , alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ converge.

La démonstration de ce théorème est simple et repose sur les deux graphiques donnés à la figure 7.37.

Posons $T_n = \int_1^n f(x) \, dx$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Les sommes S_n sont les sommes partielles de la série.

La région en gris dans le graphe à gauche dans la figure 7.37 représente la valeur de la somme $\sum_{k=2}^6 a_k = S_6 - a_1$ alors que la région en gris dans le graphe à droite dans la figure 7.37

représente la valeur de la somme $S_6 = \sum_{k=1}^6 a_k$.

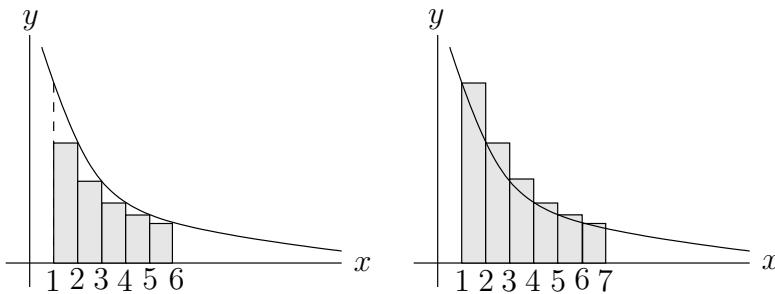


FIGURE 7.37 – La justification du test de l'intégrale pour déterminer si une série converge.

A) Supposons que $\int_1^\infty f(x) dx$ diverge. Cela implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$. Or, à partir du graphe à droite dans la figure 7.37, on obtient que $0 \leq T_n \leq S_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = +\infty$$

et on conclut que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Cela implique que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x) dx$ converge.

B) Supposons que $\int_1^\infty f(x) dx$ converge. Cela implique que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ existe et est réel. Or, à partir du graphe de gauche à la figure 7.37, on obtient que $0 \leq S_n - a_1 \leq T_n$ pour tout $n \geq 2$. Donc, $0 \leq S_n \leq T_n + a_1$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante (car $a_n \geq 0$ pour tout n) et bornée par

$$a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = a_1 + \int_1^\infty f(x) dx$$

Il découle du théorème 2.1.20 que la suite $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. C'est à dire que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Exemple 7.10.2

Démontrons le proposition 2.2.16

Si $p \leq 0$, on a que la suite $\{n^{-p}\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers zéro. Donc, par le théorème 2.2.20, on a que la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge.

On peut donc supposer que $p > 0$. La proposition 2.2.16 est alors une conséquence immédiate du résultat que l'on a obtenu à la proposition 6.5.4; c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge si seulement et seulement si $p > 1$.

On considère $f(x) = 1/x^p$. On a que $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f(x)$ est un fonction continue et décroissant pour $x > 0$ car $f'(x) = -px^{-p+1} < 0$ pour $x > 0$. On peut donc utiliser le test

de l'intégrale pour conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge} \Leftrightarrow p > 1 .$$



Exemple 7.10.3

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge ou diverge.

Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = n5^{-n}$. Posons $f(x) = x5^{-x}$. On a que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 1$ et f est une fonction continue et décroissante ; en fait, $f'(x) = (1 - x\ln(5))5^{-x} < 0$ pour $x \geq 1$. De plus, $a_n = f(n)$ pour tout $n \geq 1$.

On considère l'intégrale $\int_1^q x5^{-x} dx$. Cette dernière intégrale se calcul à l'aide de la méthode d'intégration par parties. Si $u(x) = x$ et $v'(x) = 5^{-x}$, alors $u'(x) = 1$, $v(x) = -5^{-x}/\ln(5)$ et

$$\begin{aligned} \int_1^q x5^{-x} dx &= \int_1^q u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_{x=1}^q - \int_1^q u'(x)v(x) dx \\ &= -\frac{x5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^q + \int_1^q \frac{5^{-x}}{\ln(5)} dx = -\frac{x5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^q - \frac{5^{-x}}{(\ln(5))^2} \Big|_{x=1}^q \\ &= -\frac{q5^{-q}}{\ln(5)} + \frac{1}{5\ln(5)} - \frac{5^{-q}}{(\ln(5))^2} + \frac{1}{5(\ln(5))^2}. \end{aligned}$$

Grâce à la Règle de l'Hospital, on a $\lim_{q \rightarrow \infty} q5^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q}{5^q} = 0$. De plus, $\lim_{q \rightarrow \infty} 5^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{5^q} = 0$. Donc,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q x5^{-x} dx = \frac{1}{5\ln(5)} + \frac{1}{5(\ln(5))^2}.$$

Puisque $\int_1^q x5^{-n} dx$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge.



Exemple 7.10.4

Déterminer si la série suivante converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} .$$

Cette série est de la forme $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. Posons $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$. On a que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 2$ et f est une fonction continue et décroissante car $x \ln(x)$ est croissante pour $x \geq 2$. De plus, $a_n = f(n)$ pour tout $n \geq 2$.

On considère l'intégrale $\int_2^q \frac{1}{x \ln(x)} dx$. Cette dernière intégrale se calcule à l'aide de la méthode de substitution. Si $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x} dx$, $u = \ln(q)$ lorsque $x = q$ et $u = \ln(2)$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\int_2^q \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(q)} \frac{1}{u} du .$$

Or, cet intégrale diverge d'après la proposition 6.5.4 ; c'est le cas $p = 1$. Donc, grâce au test de l'intégrale, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. 

7.11 Exercices

Question 7.1

Calculez l'aire de chacune des régions décrites ci-dessous.

- a) La région entre la droite $y = 2x$ et la courbe $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 2$.
- b) La région entre la droite $y = 2x$ et la courbe $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 4$.
- c) La région entre les courbes $y = e^x$ et $y = \frac{e^{2x}}{2}$ pour $0 \leq x \leq 1$.
- d) La région bornée par la droite $y = \frac{3}{2} + x$ et la courbe $y = \frac{x^2}{2}$.
- e) La région bornée par la droite $y = x$ et la courbe $y = 7x - 3x^2$.
- f) La région bornée par la courbe $y^2 = x$ et la droite $x - y = 2$.
- g) La région bornée par la courbe $y = f(x) = \frac{x}{1+x}$ et la droite $y = g(x) = \frac{x}{2}$.
- h) La région bornée par les courbes $y = (x - 2)^2$ et $y = 10 - x^2$.

Question 7.2

Trouvez l'aire entre les courbes $y = f(x) = \sin(2x)$ et $y = g(x) = \cos(2x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

Question 7.3

Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - x^3$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Tracez le graphe de f sur l'intervalle $[-1, 1]$ et la droite horizontale qui représente la valeur moyenne.

Question 7.4

Le taux (instantané) auquel l'eau est versé dans un bocal après t minutes est donné par la formule $r(t) = 4t(3 - t)$ litres/minute.

- a) Quelle est le volume d'eau qui a été versé dans le bocal au cours des deux premières minutes (i.e. $0 \leq t \leq 2$) ?
- b) Quelle est le taux moyen auquel l'eau est versé dans le bocal au cours des deux premières minutes ?
- c) Comparez le taux moyen calculé en (b) avec le taux au cours de la première minute $0 \leq t \leq 1$ minute. Lequel est le plus grand ?

d) Tracez le graphe du taux instantané en fonction du temps (i.e. de r) et la droite horizontale qui correspond au taux moyen durant les deux premières minutes.

Question 7.5

Le taux (instantané) auquel l'eau entre un réservoir varie dans le temps et est donné par la formule $r(t) = 360t - 39t^2 + t^3$ où t est en heures et r est en litres/heure. Quelle est le volume d'eau qui a entré dans le réservoir au cours des 15 premières heures (i.e. pour $0 \leq t \leq 15$) ? Quelle est le taux moyen au cours des 15 premières heures ?

Question 7.6 🔧

Si le taux d'énergie produite par une réaction (chimique) au temps t en heures est donnée par $E(t) = |360t - 39t^2 + t^3|$ joules/heure, Calculer l'énergie totale produite entre $t = 0$ heure et $t = 24$ heures. Calculez le taux moyen de production d'énergie durant cette période.

Suggestion : Les racines du polynôme $360t - 39t^2 + t^3$ sont 0, 15 et 24.

Question 7.7 🌲

Un très mince fils de 2 mètres de longueur est formé d'une substance organique dont la densité linéaire à une distance de x cm d'une de ses extrémités est de $\rho(x)$ g/cm où

$$\rho(x) = 1 + 2 \times 10^{-8} x^2(240 - x) .$$

- a) Trouvez la densité maximale et minimale le long du fils. À quel endroit a-t-on la plus forte densité ?
- b) Quelle est la masse totale du fils ?
- c) Quelle est la densité linéaire moyenne du fils ? Comparez avec la valeur maximale et minimale que vous avez trouvée en (a).
- d) Dans une même figure, tracez le graphe de la densité et la droite horizontale qui correspond à la densité moyenne.

Question 7.8 🔧

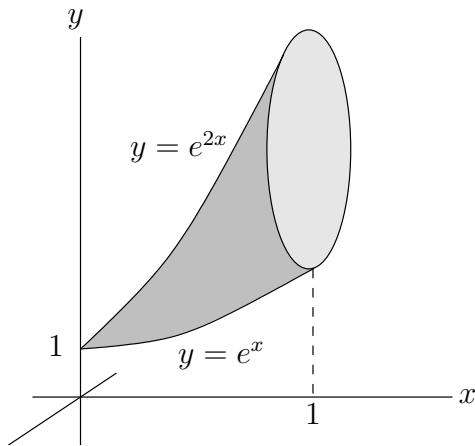
Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume du cône droit de hauteur 3 dont la base est un disque de rayon 2.

Question 7.9 🔧

Utilisez la méthode des tranches pour trouver un somme de Reimann qui approche le volume d'un cône de hauteur h dont la base est un disque de rayon r . Déduire de votre somme une formule exacte pour calculer le volume d'un cône.

Question 7.10 🔧

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume de la corne représenté dans la figure suivante pour $0 \leq x \leq 1$. Les sections transverses sont des cercles

**Question 7.11** 

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume d'un ballon de football (ayant la forme d'un ellipsoïde) de 30 cm de longueur et de 18 cm de diamètre dans sa partie la plus large. Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du volume du ballon de football pour en déduire une intégrale définie pour le volume du ballon de football.

Question 7.12 

a) Trouvez le volume du solide dont la base est la région $\{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des y sont des demi-cercles.

b) Trouvez le volume du solide dont la base est la région $\{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

Question 7.13 

On considère la région R bornée par l'axe des x , la courbe $y = x^{1/3}$ et la droite $x = 1$.

a) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de l'axe des x .

b) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite $y = -3$.

c) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite $y = 7$.

d) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

e) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

Question 7.14 

Pour chacun des problèmes suivants, trouvez le volume du solide produit par la rotation de la région donnée autour de l'axe donné.

a) La région est bornée par la courbe $y = \cos(x)$, l'axe des x , et les droites $x = 0$ et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x .

- b)** La région est bornée par la courbe $y = \cos(x/2)$, l'axe des x , et les droites $x = -\pi$ et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x .
- c)** La région est bornée par la courbe $y = x^{3/2}$, l'axe des x et la droite $x = 1$. L'axe de rotation est l'axe des x .
- d)** On utilise la même région qu'en (c). L'axe de rotation est l'axe des y .
- e)** La région est bornée par la courbe $y = 1/x$, l'axe des x , et les droites $x = 1$ et $x = 2$. L'axe de rotation est l'axe des x .

Question 7.15 

Trouvez le volume du solide que l'on obtient dans chacun des cas suivants.

- a)** Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = x$ autour de l'axe $y = -1$.
- b)** Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = \sqrt{x}$ et la droite $y = x$ autour de l'axe des x .
- c)** Si on fait la rotation de la région bornée par les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$ autour de l'axe des y ?
- d)** Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 6x + 9$ et la droite $y = 4$ autour de l'axe $x = -1$.
- e)** Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 8x + 16$ et la droite $y = 4$ autour de l'axe $x = -2$.
- f)** Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = -x^2 + 10x - 25$ et la droite $y = -4$ autour de l'axe $x = -1$.
- g)** Si on fait la rotation de la région bornée par les courbes $x = y^2 - 4y + 2$ et $x = -y^2 + 4y - 4$ autour de la droite $x = 1$.

Question 7.16 

Si on fait la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ autour de l'axe $y = 3$, on obtient un tore (une figure de la forme d'un bagel). Quelle est le volume de ce tore ?

Question 7.17 

La densité de l'huile à une distance de r mètres du centre d'une nappe d'huile circulaire sur la surface de l'océan est donnée par $\rho(r) = 50/(1+r)$ kg/m².

- a)** Si la nappe d'huile a un rayon de 1,000 m, donnez une somme de Riemann qui approche la masse total de l'huile dans la nappe.
- b)** En transformant la somme donnée en (a) en une intégrale, trouvez la valeur exacte de la masse totale d'huile dans la nappe.
- c)** Quelle est la valeur de r pour laquelle on a la moitié de la masse totale d'huile.

Question 7.18 

Trouvez la position du centre de masse de la région plane bornée par la courbe $y = x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$. La densité est constante.

Question 7.19 

Trouvez la position du centre de masse de la région bornée par les courbes $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$. La densité est constante et égale à 3 kg/m².

Question 7.20 

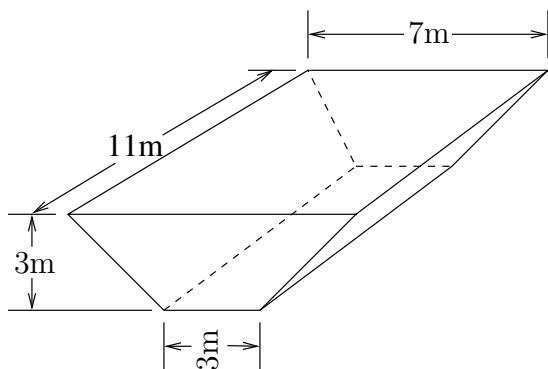
Un travailleur est en haut d'un échafaudage de 30 mètres de hauteur. Il doit lever à l'aide

d'une corde une chaudière de ciment à partir du sol jusqu'à une hauteur de 10 mètres. La chaudière a une masse de 50 kg et la corde a une masse de 0.5 kg/m. Trouvez le travail total nécessaire pour lever cette chaudière.

Question 7.21 🔧

Une piscine (voir la figure ci-dessous) est remplie d'eau. Calculez le travail nécessaire pour vider cette piscine. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.



Question 7.22 🔧

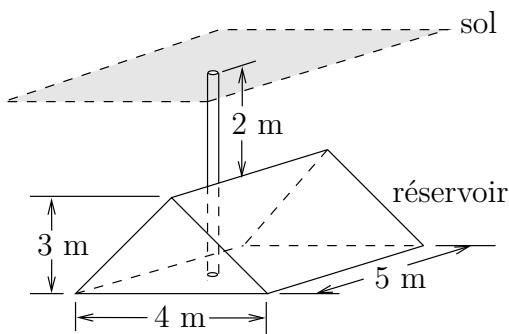
Une citerne de forme rectangulaire possède les dimensions suivantes : 3 m de long, 1 m de large et 2 m de haut. La citerne est plein d'eau. Calculez le travail nécessaire pour pomper la moitié de l'eau à une hauteur de 1 m au-dessus du citerne. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 7.23 🔧

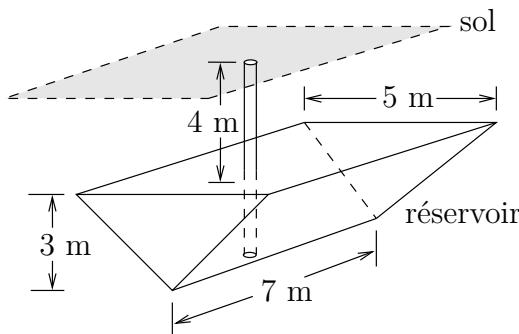
Les réservoirs ci-dessous sont plein d'huile dont la densité est de 570 kg/m^3 . Quelle est le travail nécessaire pour vider chacun des réservoirs ?

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale.

- a) le réservoir est enfoui 2 mètres sous le sol.



- a) le réservoir est enfoui 4 mètres sous le sol.



Question 7.24 🔧

Un réservoir cylindrique de deux mètres de rayon et de six mètres de hauteur (donc l'axe du cylindre est vertical) est à moitié rempli d'eau. Trouvez le travail nécessaire pour vider le réservoir si on pompe l'eau à partir d'un point trois mètres au dessus réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération due à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 7.25 🔧

Un réservoir rectangulaire de 20 mètres de longueur, 10 mètres de largeur et 15 mètres de profondeur est rempli d'eau. Quelle est la force totale exercée sur le fond et sur chaque côté du réservoir ?

Question 7.26 🔧

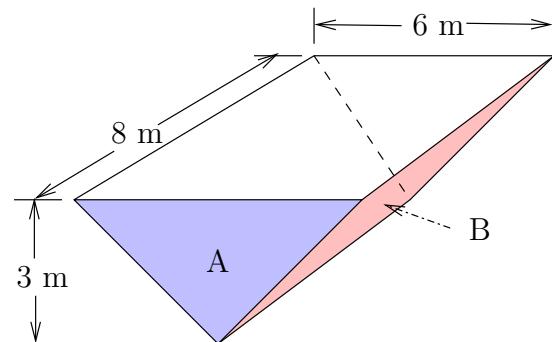
Un réservoir a un barrage à une extrémité. Le barrage forme un mur rectangulaire de 50 m de longueur et 20 m de hauteur. Quelle est la force exercée sur ce barrage ?

Question 7.27 🔧

Une piscine (voir la figure ci-dessous) est remplie d'eau. Calculez la force exercée par la pression sur les deux côtés suivants de la piscine.

Dans chacun des cas, vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation de la force exercée sur le côté et en déduire une intégrale définie pour la force exercée sur le côté. Finalement, vous devez évaluer cette intégrale. Prenez soin de bien définir toutes vos variables.

- a) Pour le côté A de la piscine
- b) Pour le côté B de la piscine.



Question 7.28 

Un cylindre fermé aux extrémités se retrouve sur le côté au fond d'un lac. Le diamètre du cylindre est de 10 cm et sa longueur de 20 cm. Si la profondeur du lac est de 6 mètres, quelle est la force exercée sur les extrémités du cylindre ? Il faut se rappeler que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 . Bien identifier les variables utilisées dans votre solution.

Question 7.29 

Le taux de croissance (instantané) d'une population de bactéries au temps t en minutes est donné par la formule $r(t) = \frac{1000}{(2 + 3t)^{3/4}}$ bactéries/heure.

- Si la population initiale est de 10^6 bactéries, quelle est le nombre de bactéries après T minutes ?
- Est-ce que cette population de bactéries peut supporter ce taux de croissance ? En d'autre mots, est-ce que le nombre de bactéries tend vers une valeur finie lorsque T tend vers plus l'infini ?
- Si la population initiale est toujours de 10^6 bactéries comme en (a), combien de temps s'écoule-t-il avant que l'on atteigne 2×10^6 bactéries ? Est-ce que ce résultat pourrait justifier une réponse différente en (b) ?

Question 7.30 

Si \$5000 est investit à un taux de 7% d'intérêt, quelle est la valeur de l'investissement après 2 ans si l'intérêt est calculé mensuellement ? De façon continue ?

Question 7.31 

Un placement garantie un revenu de $100 + 10t$ dollars par année pour une période de dix ans où t est le nombre d'années depuis la date du placement que l'on assume comme étant aujourd'hui. Trouvez la valeur présente de ce placement à la fin des dix ans si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue.

Question 7.32 

On sait qu'un bon vin prend de la valeur avec l'âge. Supposer que vous êtes un marchant de vin et que vous savez que le prix d'une bouteille de votre vin sera de $P(1 + 20\sqrt{t})$ dollars dans t années où P dollars est le prix présent d'une bouteille de votre vin. Si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue, qu'elle est le meilleur temps pour vendre votre vin ?

Question 7.33 

On vous doit une certaine somme d'argent. On vous offre deux options pour vous rembourser. Pour la première option, on vous offre de payer cette dette en quatre versements de \$5,000 chacun sur une période de trois ans en commençant maintenant avec le premier versement de \$5,000. Pour la deuxième option, on vous offre de payer la dette en un seul versement de \$23,000 dans exactement trois ans à partir de maintenant. Si on suppose que le taux d'intérêt est de 6% par année, composé de façon continue, quelle option de remboursement est le plus profitable ?

Question 7.34 

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n^2}$ converge ou diverge ?



Équations différentielles



8

8.1 Introduction

Exemple 8.1.1

Un des plus simples modèles de croissance de population est celui où l'on assume que le taux de croissance (instantané) d'une population est proportionnel au nombre d'individus dans la population. Si $p(t)$ est le nombre d'individus au temps t , alors la supposition précédente se traduit mathématiquement par

$$p'(t) = kp(t)$$

pour tout t , où k est la constante de proportionnalité. La constante k est appelée le **taux de croissance relatif** car on a $k = \frac{p'(t)}{p(t)}$; le taux de croissance divisé par la taille de la population.

L'équation $p'(t) = kp(t)$ est ce que l'on appelle une équation différentielle. C'est une équation qui contient une fonction et des dérivées de cette fonction.

Quelles sont les fonctions qui satisfont l'équation $p'(t) = kp(t)$ pour tout t ? La fonction $\phi(t) = C e^{kt}$, où C est une constante, satisfait cette équation car $\phi'(t) = kC e^{kt}$ et ainsi

$$\phi'(t) - k\phi(t) = kC e^{kt} - kC e^{kt} = 0$$

pour tout t . La fonction ϕ est appelée une solution de l'équation différentielle $p'(t) = kp(t)$.



Exemple 8.1.2

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0$$

est une autre équation différentielle.

La fonction $\phi(t) = \sin(\sqrt{5}t)$ est une solution de l'équation différentielle $g''(t) + 5g(t) = 0$ car $\phi'(t) = \sqrt{5} \cos(\sqrt{5}t)$ et $\phi''(t) = -5 \sin(\sqrt{5}t)$. Ainsi,

$$\phi''(t) + 5\phi(t) = -5 \sin(\sqrt{5}t) + 5 \sin(\sqrt{5}t) = 0$$

pour tout t . Vérifier que $\phi(t) = \cos(\sqrt{5}t)$ est aussi une solution de $g''(t) + 5g(t) = 0$.



Combien de solutions peut avoir une équation différentielle? On a vu que $\phi(t) = Ce^{kt}$, où C est une constante arbitraire, est une solution de $p'(t) = kp(t)$. On trouve donc un

nombre infini de solutions, une pour chaque valeur de C . On montrera prochainement que toutes les solutions de $p'(t) = k p(t)$ sont de cette forme. La possibilité d'avoir un nombre infini de solutions est en fait très bénéfique comme on peut le constater à l'exemple qui suit.

Exemple 8.1.3

Soit une population de bactéries ayant un taux de croissance relatif de 1.1. C'est-à-dire que $p'(t) = 1.1p(t)$ où $p(t)$ est le nombre de bactéries au temps t . Si on suppose que le temps t est mesuré en heures et qu'initiallement on a 10^5 bactéries, combien de bactéries aurons-nous après 2 heures ?

Il faut trouver la fonction ϕ qui satisfait l'équation différentielle $p'(t) = 1.1p(t)$ et la condition initiale $\phi(0) = 10^5$. On a vu que ϕ était de la forme $\phi(t) = C e^{1.1t}$ pour une constante arbitraire C . La constante C est utilisée pour satisfaire la condition initiale $\phi(0) = 10^5$. On a $\phi(0) = C = 10^5$. La solution est donc $\phi(t) = 10^5 e^{1.1t}$.

À $t = 2$ heures, on trouve $\phi(2) = 10^5 e^{2.2} \approx 902,501$ bactéries. 

Il y a un type d'équations différentielles que nous pouvons résoudre à l'aide des techniques d'intégration que nous avons étudiées. Les équations de la forme

$$f'(t) = g(t),$$

où g est une fonction connue, sont des équations différentielles. L'intégrale de g nous donne la fonction f . Cette fonction f contient une constante d'intégration qui est utilisée pour satisfaire une condition initiale.

Exemple 8.1.4

Supposons que le taux instantané d'évaporation de l'eau contenu dans un lac soit décrit par la formule $r(t) = \alpha t(24 - t)$ l/h où t en heures varie de 0 à 24 heures et $\alpha > 0$ est une constante qui peut dépendre de l'ensoleillement, du taux d'humidité dans l'air, etc. Plus la journée sera ensoleillée et sèche, plus α sera grand.

On remarque que le taux d'évaporation est nul à minuit (lorsque $t = 0$ ou 24 heures) et qu'il est maximal à midi (lorsque $t = 12$ heures). Supposons qu'un ruisseau déverse β l/h d'eau dans le lac. La constante β dépend entre autres du niveau d'eau dans le ruisseau.

Donner une équation différentielle pour le taux de variation instantanée du volume d'eau $V(t)$ dans le lac au temps t . Résolvez cette équation pour obtenir une formule pour $V(t)$ qui dépendra des paramètres α et β . Si $\alpha = 1.1$, combien de litres d'eau par heure devront être déversés dans le lac par le ruisseau pour que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée ? La valeur de β peut être utilisée pour contrôler le niveau d'eau dans le ruisseau.

L'équation différentielle qui décrit le volume d'eau $V(t)$ dans le lac au cours de la journée est

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\alpha t(24 - t) + \beta$$

pour $0 \leq t \leq 24$. Le signe négatif qui précède le terme $\alpha t(24 - t)$ indique une diminution du volume d'eau dans le lac dû à l'évaporation.

Ainsi,

$$\begin{aligned} V(t) &= \int (-\alpha t(24-t) + \beta) dt = -24\alpha \int t dt + \alpha \int t^2 dt + \beta \int 1 dt \\ &= -12\alpha t^2 + \frac{\alpha t^3}{3} + \beta t + C, \end{aligned}$$

où C est la constante d'intégration. La valeur de C est déterminé par la condition initiale $V(0) = V_0$, la quantité initiale d'eau dans le lac. Dans le cas présent, $C = V_0$.

Pour déterminer la valeur de β qui fera que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée, il faut résoudre pour β l'équation $V(0) = V(24)$ avec $\alpha = 1.1$. C'est-à-dire, il faut trouver β tel que

$$V_0 = -12 \times 1.1 \times 24^2 + \frac{1.1}{3} \times 24^3 + 24\beta + V_0.$$

On obtient $\beta = 105.6$ l/h. ♣

Définition 8.1.5

Une **équation différentielle** est une équation de la forme

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0 \quad , \quad a < x < b \quad (8.1.1)$$

où G est une équation de plusieurs variables et y est une fonction inconnue qui satisfait l'équation pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$.

Le but est de trouver cette ou ces fonctions y .

Exemple 8.1.6

L'équation $p'(t) = kp(t)$ est de la forme $G(t, p(t), p'(t)) = 0$. En effet, si $G(t, u_1, u_2) = u_2 - ku_1$, on obtient $G(t, p(t), p'(t)) = p'(t) - kp(t) = 0$ si et seulement si $p'(t) = kp(t)$. ♣

Exemple 8.1.7

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0 \quad (8.1.2)$$

est une équation différentielle car (8.1.2) est de la forme $G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = 0$.

En effet, si $G(t, u_1, u_2, u_3) = u_3 + 5u_1$, on obtient $G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = g''(t) + 5g(t) = 0$ si et seulement si $g''(t) + 5g(t) = 0$. ♣

Définition 8.1.8

Une fonction ϕ est une **solution** de l'équation différentielle (8.1.1) si cette équation est satisfaite pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$ lorsque y est remplacé par ϕ .

Exemple 8.1.9

Les trois équations suivantes sont des équations différentielles pour la fonction inconnue y .

$$y'(x) = y(x), \quad (8.1.3)$$

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \quad (8.1.4)$$

et

$$y''(x) + 4y(x) = 5e^{-x}. \quad (8.1.5)$$

L'équation (8.1.3) est de la forme (8.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3) = u_3 - u_2$, l'équation (8.1.4) est de la forme (8.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_3 + 4u_2$, et l'équation (8.1.5) est de la forme (8.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_2 - 5e^{-u_1}$.

La fonction $\phi(x) = e^x$ est une solution de (8.1.3) car

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x = \phi(x)$$

pour tout x .

La fonction $\phi(x) = e^{-2x}$ est une solution de (8.1.4) car

$$\phi''(x) + 4\phi'(x) + 4\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2}(e^{-2x}) + 4\frac{d}{dx}(e^{-2x}) + 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 8e^{-2x} + 4e^{-2x} = 0$$

pour tout x . De même, $\phi(x) = xe^{-2x}$ est une solution de (8.1.4). Toutes les solutions de (8.1.4) sont de la forme $\phi(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ où A et B sont des constantes. Il y a donc un nombre infini de solutions de (8.1.4).

Finalement, $\phi(x) = \cos(2x) + e^{-x}$ est une solution de (8.1.5) car

$$\begin{aligned} \phi''(x) + 4\phi(x) &= \frac{d^2}{dx^2}(\cos(2x) + e^{-x}) + 4(\cos(2x) + e^{-x}) \\ &= -4\cos(2x) + e^{-x} + 4\cos(2x) + 4e^{-x} = 5e^{-x} \end{aligned}$$

pour tout x . De même, $\phi(x) = \sin(2x) + e^{-x}$ est une solution de (8.1.5) ainsi que toutes les fonctions de la forme $\phi(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + e^{-x}$ où A et B sont des constantes. ♣

Définition 8.1.10

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal des dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle.

Ainsi, (8.1.3) est d'ordre un alors que (8.1.4) et (8.1.5) sont d'ordre deux.

L'étude des équations différentielles (i.e. trouver si une solution existe, trouver les solutions, décrire le comportement des solutions, etc) est un vaste domaine qui est toujours en évolution.

La prochaine section montre comment résoudre un type simple d'équations différentielles du premier ordre que l'on appelle équations différentielles séparables.

8.2 Équations différentielles séparables

Définition 8.2.1

Une **équation différentielle séparable** est une équation différentielle de la forme

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad (8.2.1)$$

où f et g sont deux fonctions.

Si on intègre par rapport à x des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int f(x) dx .$$

L'intégrale du côté gauche de l'égalité est

$$\int g(y) dy$$

après la substitution $y = y(x)$ et $dy = y'(x) dx$. On obtient donc

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx .$$

Si on intègre des deux côtés de l'égalité et résout pour y en fonction de x (si cela est possible), on obtient une famille de solutions paramétrées par la constante d'intégration.

Les équations différentielles de la forme (8.2.1) sont dites séparables car on peut les réduire à une égalité où l'un des côtés dépend seulement de la variable dépendante et l'autre seulement de la variable indépendante.

Exemple 8.2.2

Trouver une famille de solutions pour

$$y' = y^3 .$$

Il est commun de ne pas mentionner explicitement la dépendance de y par rapport à x . Ainsi, on écrit seulement y mais il faut sous-entendre $y(x)$.

Si on sépare les variables, on obtient

$$\frac{y'}{y^3} = 1 .$$

Si on intègre par rapport à x des deux côtés de l'égalité, on trouve

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{y'(x)}{y^3(x)} dx = \int dx .$$

Ainsi

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si on résout pour y en fonction de x on obtient

$$y = \frac{1}{\sqrt{-2(x+C)}}$$

pour $x < -C$. On a une solution différente pour chaque valeur de C . 

Exemple 8.2.3

Trouver une famille de solutions pour

$$x^3y' + y = 0 . \quad (8.2.2)$$

Si on sépare les variables, on obtient

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^3} .$$

Si on intègre par rapport à x , on trouve

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = - \int x^{-3} dx .$$

Ainsi,

$$\ln |y| = \frac{x^{-2}}{2} + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$|y| = e^{1/(2x^2)+C} = e^C e^{1/(2x^2)} = D e^{1/(2x^2)}$$

où $D = e^C > 0$ est une constante. Donc,

$$y = \pm D e^{1/(2x^2)} .$$

L'expression $\pm D$ avec $D > 0$ désigne une constante E qui peut être positive ou négative. En fait, on peut aussi accepter que E soit nul car $y(x) = 0$ pour tout x est une solution de (8.2.2). On obtient la famille de solutions

$$y = E e^{1/(2x^2)}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. 

On peut spécifier une solution particulière de la famille de solutions d'une équation différentielle en ajoutant une condition initiale.

Définition 8.2.4

Une **condition initiale** pour une équation différentielle $G(x, y(x), y'(x)) = 0$ d'ordre un est une condition de la forme $y(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des valeurs données.

Exemple 8.2.5

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

avec la condition initiale $y(0) = 1/2$.

On commence par trouver la famille de solutions de l'équation différentielle. Si on sépare les variables et intègre par rapport à x , on trouve

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2(x)}} y'(x) dx = \int dx .$$

Ainsi

$$\arcsin(y) = x + C .$$

La condition initiale $y(0) = 1/2$ implique que $\pi/6 = \arcsin(1/2) = 0 + C$. Donc, $C = \pi/6$ et on trouve la solution

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .$$

**Exemple 8.2.6**

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$ye^{-x}y' = x$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Si on sépare les variables et intègre par rapport à x , on obtient

$$\int y dy = \int y(x)y'(x) dx = \int xe^x dx .$$

Ainsi,

$$\frac{y^2}{2} = xe^x - e^x + C .$$

La condition initiale $y(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} = -1 + C$. Donc, $C = \frac{3}{2}$ et on obtient la solution

$$y = \sqrt{2xe^x - 2e^x + 3} . \quad (8.2.3)$$

Notez que $y = -\sqrt{2xe^x - 2e^x + 3}$ est aussi une solution de l'équation différentielle mais elle ne satisfait pas $y(0) = 1$; on a $y(0) = -1$ dans ce cas.

De plus, la solution en (8.2.3) est définie pour tout x car $g(x) = 2xe^x - 2e^x + 3 \geq 1$ pour tout x . Pour démontrer cela, il suffit de trouver le minimum absolu de g . On a $g'(x) = 2xe^x$. Donc, $g'(x) < 0$ pour $x < 0$, $g'(x) = 0$ à $x = 0$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. g a donc un minimum absolu à $x = 0$ qui est $g(0) = 1$.

**Exemple 8.2.7**

La loi de Newton pour la chaleur affirme que le taux de variation de la température d'un

objet, qui se trouve dans un milieu où la température est constante, est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante.

Mathématiquement, la **loi de Newton** pour la chaleur affirme que

$$y'(t) = K(M - y(t)) \quad (8.2.4)$$

où $y(t)$ est la température d'un objet au temps t , M est la température ambiante du milieu dans lequel se trouve l'objet et K est une constante positive qui dépend de la conductivité thermique de l'objet et de sa surface exposée. La loi de Newton est valable si la différence de température entre la température ambiante et la température de l'objet n'est pas trop grande. Si y et M sont en degrés centigrades et t est en minutes alors les unités de la constante K sont des min^{-1} .

L'équation de la chaleur est séparable. Si on sépare les variables et intègre des deux côtés par rapport à t , on trouve

$$\int \frac{1}{M - y} dy = \int \frac{1}{M - y(t)} y'(t) dt = \int K dt .$$

Ainsi,

$$-\ln |M - y| = Kt + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si on multiplie par -1 des deux côtés et prend l'exponentielle, on obtient

$$|M - y| = e^{-Kt-C} = De^{-Kt}$$

où $D = e^{-C} > 0$ est une constante. Donc,

$$y = M - \pm De^{-Kt}$$

où $\pm D$ désigne une nombre positif ou négatif que l'on désigne par E . Comme E peut aussi être nul, car $y(t) = M$ pour tout t est une solution de (8.2.4), on obtient la famille de solutions

$$y = M - Ee^{-Kt}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante qui est déterminée par la condition initiale.

Si t est en minutes, $M = 10^\circ\text{C}$ et $K = 0.5 \text{ min}^{-1}$, on obtient

$$y = 10 - Ee^{-0.5t} .$$

Si on suppose que la température de l'objet est de 30°C lorsque $t = 0$ min., alors E est déterminé par l'équation $30 = 10 - E$. Ainsi, $E = -20$ et la solution cherchée est

$$y = 10 + 20e^{-0.5t} .$$



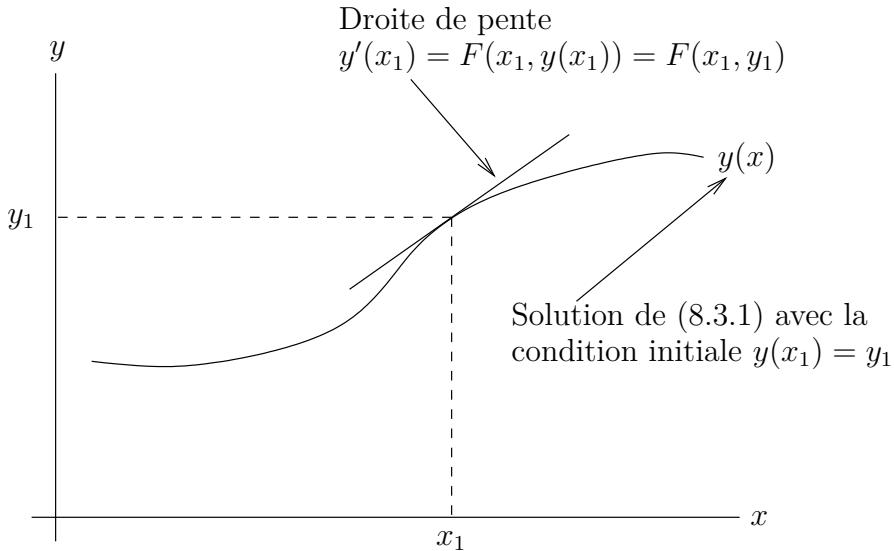


FIGURE 8.1 – Le graphe possible de la solution y de (8.3.1) qui passe par (x_1, y_1) .

8.3 Étude qualitative des équations différentielles – Équations non-autonomes

Bien souvent il est très difficile et même impossible de trouver une solution explicite pour une équation différentielle. Il est alors préférable (et bien souvent suffisant) d'étudier le comportement qualitatif des solutions.

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad , \quad a < x < b , \quad (8.3.1)$$

où F est une fonction de deux variables. Soit $y(x)$, la solution de (8.3.1) qui passe par le point (x_1, y_1) ; c'est-à-dire que $y(x_1) = y_1$. Un graphe possible pour la solution y est tracé à la figure 8.1. La pente de la droite tangente à la solution y au point $(x_1, y(x_1)) = (x_1, y_1)$ est $y'(x_1) = F(x_1, y(x_1)) = F(x_1, y_1)$.

Sans connaître la solution qui passe par le point (x_1, y_1) , on peut déterminer la direction de cette solution (i.e. la pente de la tangente à cette solution au point (x_1, y_1)) simplement en évaluant $F(x_1, y_1)$.

On peut donc déterminer l'aspect qualitatif des solutions à l'aide d'un **champ de pentes** pour l'équation différentielle. Pour dessiner un champ de pentes, on choisit un ensemble de points du plan x, y et à chacun de ces points (x, y) on trace une courte droite de pente $F(x, y)$. On donne un champ de pentes possible pour (8.3.1) à la figure 8.2.

À la figure 8.2, si une solution passe dans une région où les courtes droites ont une pente positive, cette solution doit être croissante car la pente d'une droite tangente à cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être positive (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage). De même, une solution qui passe dans une

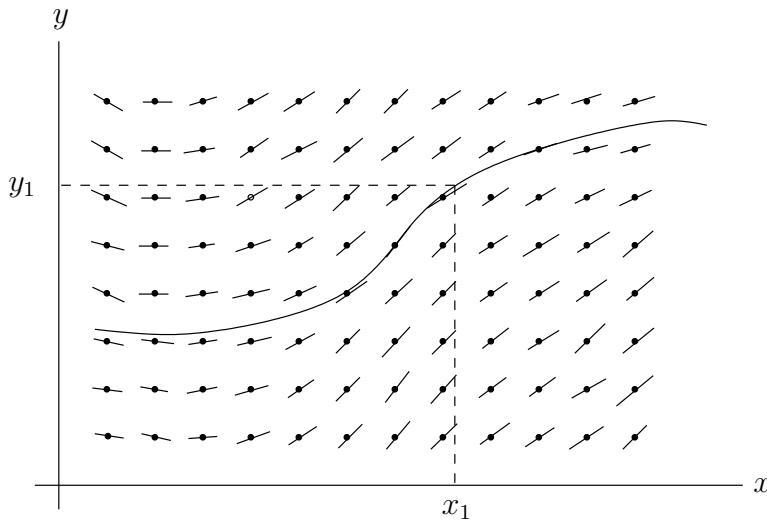


FIGURE 8.2 – Un champ de pentes possible pour (8.3.1)

région où les courtes droites ont une pente négative doit être décroissante car la pente d'une droite tangente à cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être négative (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage).

Exemple 8.3.1

Dessiner un champ de pentes pour l'équation différentielle

$$y' = xe^{xy} . \quad (8.3.2)$$

Cette équation différentielle n'est pas séparable. On ne peut donc pas utiliser la méthode introduite précédemment pour trouver les solutions de (8.3.2).

On retrouve un champ de pentes pour (8.3.2) à la figure 8.3. Quatres solutions ont été tracées : les solutions qui passent par $(0, -2)$, $(0, -1)$, $[0, 0]$ et $(-1, 1)$. Les solutions ont été tracées à l'aide d'une méthode numérique comme la méthode d'Euler que nous verrons dans une prochaine section. 

Exemple 8.3.2

On donne à la figure 8.4, le champ de pentes associé à l'équation différentielle

$$y'(x) = (x - 1)^2 - y - 1 .$$

- a) Tracez approximativement la solution qui passe par le point $(-1, 1)$. Est-ce que cette solution augmente lorsque $x = -1$? Lorsque $x = 2$?
- b) Existe-t-il une solution dont le graphe est une parabole?
- c) Quelles sont les valeurs de x_0 et y_0 pour que la solution qui passe par (x_0, y_0) ait un minimum à $x = x_0$?
- d) Est-ce que pour tout x_0 il existe au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) sera concave à $x = x_0$?

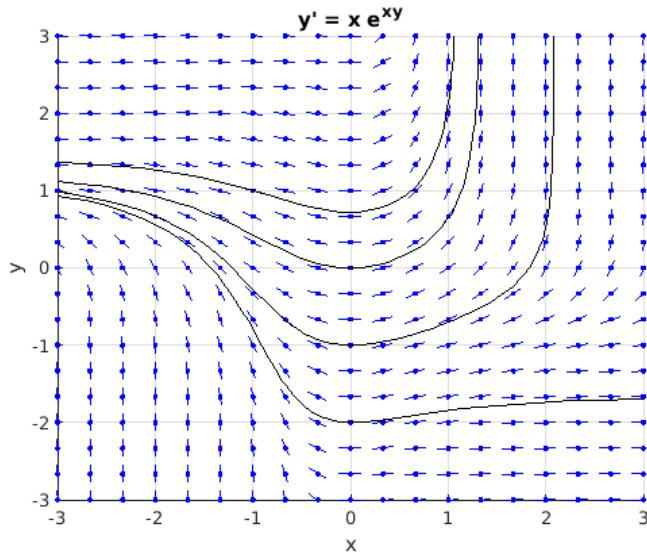


FIGURE 8.3 – Un champ de pentes pour l'équation différentielle en (8.3.2)

Nous répondons à chacune de ces questions.

- a) À la figure 8.4, on a tracé à l'aide du champ de pentes le graphe possible de la solution qui passe par le point $(-1, 1)$. La solution est croissante lorsque $x = -1$ alors qu'elle est décroissante lorsque $x = 2$.
- b) On cherche une solution de la forme $y = ax^2 + bx + c$. Si on substitue dans l'équation différentielle, on trouve

$$2ax + b = (x - 1)^2 - (ax^2 + bx + c) - 1 = (1 - a)x^2 - (b + 2)x - c .$$

Si on regroupe les constantes et les coefficients de x et de x^2 , on obtient

$$0 = (1 - a)x^2 - (b + 2 + 2a)x - (c + b) .$$

Comme cette équation doit être satisfaite pour tout x , on a $1 - a = 0$, $b + 2 + 2a = 0$ et $c + b = 0$. On obtient $a = 1$, $b = -4$ et $c = 4$. Il y a une seule solution dont le graphe est une parabole et cette solution est $y = x^2 - 4x + 4$.

- c) La solution aura un minimum au point x_0 si $y'(x_0) = 0$ et $y''(x_0) > 0$. Or,

$$y'(x_0) = (x_0 - 1)^2 - y(x_0) - 1$$

et

$$\begin{aligned} y''(x_0) &= 2(x_0 - 1) - y'(x_0) = 2(x_0 - 1) - \left((x_0 - 1)^2 - y(x_0) + 1 \right) \\ &= -x_0^2 + 4x_0 - 4 - y(x_0) . \end{aligned}$$

De $y'(x_0) = 0$, on trouve $y(x_0) = (x_0 - 1)^2 - 1 = x_0^2 - 2x_0$. Si on substitue cette valeur de $y(x_0)$ dans l'équation pour y'' , on obtient

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 4 - (x_0^2 - 2x_0) = -2x_0^2 + 6x_0 - 4 = -2(x_0 - 2)(x_0 - 1) .$$

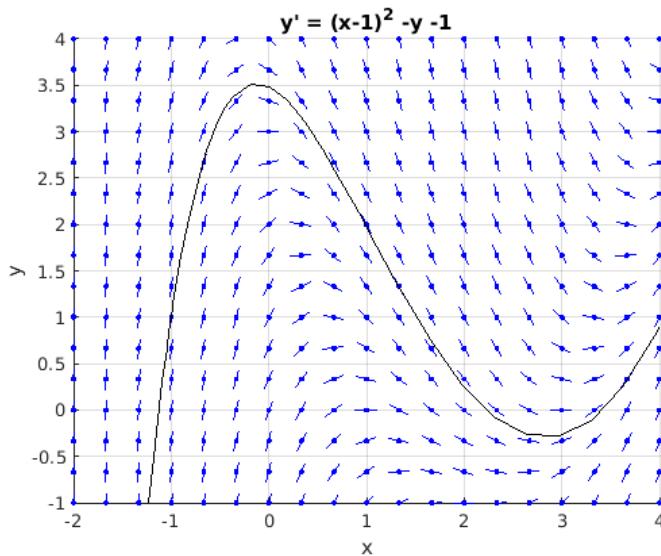


FIGURE 8.4 – Champ de pentes de l'équation différentielle $y' = (x - 1)^2 - y + 1$. La courbe est le graphe de la solution qui satisfait $y(-1) = 1$.

Donc, $y''(x_0) > 0$ pour $x_0 < 1$ ou $x_0 > 2$. Les solutions qui passent par les points $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2 - 2x_0)$ lorsque $x_0 < 1$ ou $x_0 > 2$ auront donc un minimum local en ce point.

d) On rappelle que la solution sera concave au point x_0 si $y''(x_0) < 0$. Or, on vient de montrer que

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 4 - y(x_0).$$

Il suffit donc de prendre $y_0 = y(x_0)$ assez grand pour que $x_0^2 - 4x_0 + 4 + y(x_0) > 0$. Il existe donc au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) est concave à $x = x_0$. 

8.4 Existence et unicité des solutions

Avant de continuer l'étude des équations différentielles, il faut donner des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions. Il est inutile d'essayer de trouver une solution si la théorie nous dit qu'aucune solution existe.

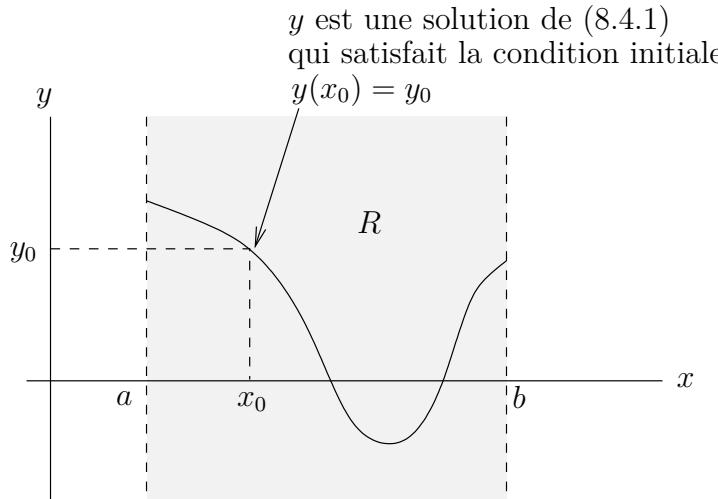


FIGURE 8.5 – Domaine d’existence et d’unicité des solutions avec la solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$

Théorème 8.4.1 (Existence et Unicité)

On considère l’équation différentielle

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad (8.4.1)$$

avec la condition initiale

$$y(x_0) = y_0 .$$

Soit

$$R = \{(x, y) : a < x < b \text{ et } -\infty < y < \infty\} .$$

Cette région est représentée à la figure 8.5. Si la fonction F est différentiable sur R et $(x_0, y_0) \in R$ alors, il existe une et une seule solution de l’équation différentielle (8.4.1) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exemple 8.4.2

Existe-t-il une solution de l’équation différentielle

$$x y' = 2y \quad (8.4.2)$$

avec $y(0) = 1$?

Cette équation différentielle est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{2}{x} dx .$$

Ainsi,

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C$$

où C est une constante d'intégration. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, on obtient $|y| = e^C x^2$. On a donc que $y = \pm e^C x^2$. Si on remplace $\pm e^C$ par une constante $D \in \mathbb{R}$, on obtient la famille de solutions

$$y = Dx^2$$

où D est une constante. Cependant, la condition $y(0) = 1$ implique que $1 = 0$ quel que soit D . Il n'y a donc pas de solution qui puisse satisfaire $y(0) = 1$.

Si on remplace la condition initiale par $y(0) = 0$ alors on a un nombre infini de solutions pour (8.4.2) avec $y(0) = 0$. Toutes les solutions de la forme $y = Dx^2$ avec $D \in \mathbb{R}$ satisfont $y(0) = 0$.

On remarque que (8.4.2) peut être écrite de la forme $y' = F(x, y)$ où $F(x, y) = 2y/x$. Cette dernière fonction n'est pas différentiable par rapport à x à l'origine. 

Exemple 8.4.3

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' = y^2 - 4 \quad (8.4.3)$$

avec la condition initiale $y(0) = -2$.

Cette équation différentielle est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y^2 - 4} dy = \int \frac{1}{y^2(x) - 4} y'(x) dx = \int dx . \quad (8.4.4)$$

Pour évaluer l'intégrale en y , on remarque que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} \right) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - 4} dy &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{y-2} dy - \frac{1}{4} \int \frac{1}{y+2} dy = \frac{1}{4} \ln |y-2| - \frac{1}{4} \ln |y+2| + E \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| + E \end{aligned}$$

où E est une constante d'intégration. On a donc de (8.4.4) que

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = x + C$$

où C est une constante. Si on multiplie chacun des côtés de cette égalité par 4 et l'on prend l'exponentielle, on obtient

$$\left| \frac{y-2}{y+2} \right| = e^{4C} e^{4x} .$$

Donc,

$$\frac{y-2}{y+2} = D e^{4x}$$

où $D = \pm e^{4C}$ est une constante réelle. Si on résout pour y en fonction de x , on trouve

$$y = 2 \frac{1 + De^{4x}}{1 - De^{4x}}.$$

La condition $y(0) = -2$ donne

$$-2 = 2 \frac{1 + D}{1 - D}.$$

Donc, $-2(1 - D) = 2(1 + D)$ et l'on trouve $-2 = 2$.

Il semble qu'il n'y ait pas de solution avec la condition initiale $y(0) = -2$. Cependant, (8.4.3) est de la forme $y' = F(x, y)$ avec $F(x, y) = y^2 - 4$. La fonction F est différentiable pour tout x et y . Le théorème d'existence et d'unicité des solutions nous dit qu'il devrait y avoir une solution unique.

En fait la solution est $y(x) = -2$ pour tout x . La méthode de séparation des variables ne peut être utilisé quand $y = 2$ ou $y = -2$ car $1/(y^2 - 4)$ donnerait une division par zéro.

Il faut donc être prudent avec les méthodes de résolution des équations différentielles, elle peuvent ne pas donner toutes les solutions. ♣

8.5 Étude qualitative des équations différentielles – Équations autonomes 3

Les équations différentielles de la forme

$$y'(x) = F(y(x)) \quad , \quad a < x < b , \quad (8.5.1)$$

sont très fréquentes et possèdent des propriétés que les équations différentielles de la forme (8.3.1) n'ont pas. On remarque que le côté droit de (8.5.1) ne dépend pas explicitement de x .

Définition 8.5.1

Une équation différentielle de la forme (8.5.1) (i.e. dont le côté droit ne dépend pas explicitement de x) est dite **autonome**.

8.5.1 Points d'équilibre

Certaines solutions d'une équation différentielle autonome jouent un rôle particulièrement important. C'est le cas des points d'équilibre.

Si $F(p) = 0$, alors $\phi(x) = p$ pour tout x est une solution de (8.5.1) car $\phi'(x) = 0$ et $F(\phi(x)) = F(p) = 0$ pour tout x .

Définition 8.5.2

Une solution constante de l'équation différentielle autonome (8.5.1) est appelée un **point d'équilibre** ou **état d'équilibre**.

Pour apprécier l'importance des points d'équilibre, il faut considérer le portrait de phases de l'équation différentielle (8.5.1). Le portrait de phases explique aussi pourquoi les solutions constantes sont appelées des points d'équilibre.

Définition 8.5.3

L'orbite d'une solution ϕ d'une équation différentielle autonome (8.5.1) est l'image

$$\{\phi(x) : a < x < b\}$$

de cette solution. C'est donc un ensemble de points que l'on peut tracer sur la droite réelle (et auquel on ajoute une flèche pour indiquer la direction parcourue quand x augmente). Le **portrait de phases** d'une équation différentielle autonome est l'ensemble des orbites représentées sur la droite réelle.

Remarque 8.5.4 

Une conséquence importante du théorème d'existence et d'unicité des solutions est que si R_1 est l'image d'une solution ϕ_1 et R_2 est l'image d'une solution ϕ_2 d'une équation différentielle autonome alors $R_1 = R_2$ ou $R_1 \cup R_2 = \emptyset$.

En effet, si $R_1 \cup R_2 \neq \emptyset$ alors il existe x_1 et x_2 tels que $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$. Si on définit la fonction ϕ_3 par $\phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x , alors ϕ_3 est une solution de l'équation différentielle autonome (on laisse au lecteur le soin de vérifier cet énoncé) avec la même condition initiale que ϕ_1 car

$$\phi_3(x_1) = \phi_2(x_1 + x_2 - x_1) = \phi_2(x_2) = \phi_1(x_1).$$

Il découle du théorème d'existence et d'unicité des solutions que $\phi_1(x) = \phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x et ainsi $R_1 = R_2$. 

La meilleure façon de comprendre ce qu'est un portrait de phases est avec un exemple.

Exemple 8.5.5

Considérons la loi de Newton pour la chaleur que l'on a vue à l'exemple 8.2.7. C'est-à-dire,

$$y'(t) = K(M - y(t)) \tag{8.5.2}$$

où $y(t)$ est la température d'un objet au temps t , M est la température du milieu dans lequel se trouve l'objet et K est une constante positive.

La fonction constante $\phi(t) = M$ pour tout t est une point d'équilibre pour la loi de Newton. Si on substitue $y = M$ dans (8.5.2), on obtient 0 des deux côtés du signe d'égalité.

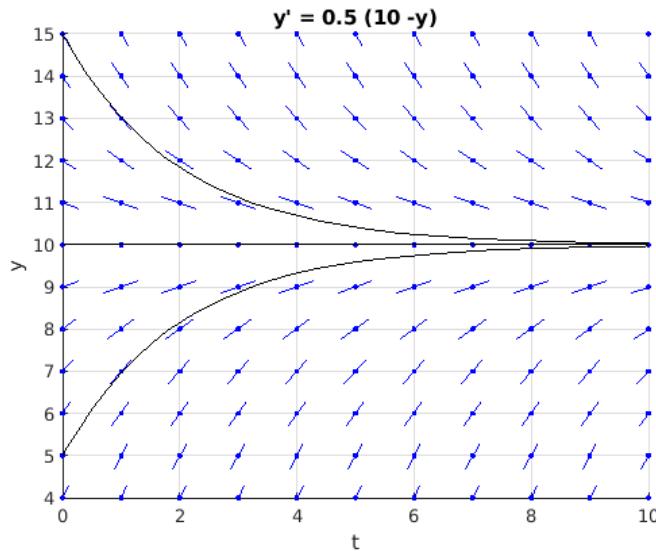


FIGURE 8.6 – Le champ de pentes pour l'équation différentielle (8.5.2) qui gouverne la loi de Newton pour la chaleur, où $M = 10$ et $K = 0.5$. De plus, on retrouve dans la figure les solutions avec les conditions initiales $y(0) = 5$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 15$.

L'existence du point d'équilibre M ne devrait pas surprendre le lecteur car cela veut seulement dire que si l'objet est à la température du milieu alors sa température ne changera pas.

On donne à la figure 8.6 le champ de pentes pour la loi de Newton dans le cas où $M = 10$ et $K = 0.5$. On voit que toute solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 est décroissante alors que toute solution qui débute avec une valeur plus petite que 10 est croissante. Toutes les solutions approchent la droite $y = 10$ lorsque t tend vers plus l'infini.

Le portrait de phases de l'équation différentielle pour la loi de Newton est donné à la figure 8.7. Il nous permet de visualiser facilement le comportement des solutions. Les flèches indiquent la direction parcourue quand t augmente. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur plus petite que 10 augmentent et approchent 10 alors que celles qui débutent avec une valeur plus grande que 10 diminuent et approchent 10.

Puisque $y'(t) = F(y(t))$, le signe de $F(y)$ détermine si la solution $y(t)$ est croissante ou décroissante. Si $F(y) > 0$, on a $y'(t) > 0$ et $y(t)$ est croissante. Si $F(y) < 0$, on a $y'(t) < 0$ et $y(t)$ est décroissante. C'est ce que l'on observe à la figure 8.7 pour la solution de l'équation différentielle pour la loi de Newton. ♣

Remarque 8.5.6 ☺

Dans l'exemple précédent, serait-il possible qu'une solution ϕ qui débute avec une valeur plus grande que 10 à $t = 0$ atteigne une valeur plus petite que 10 pour une valeur positive de t ? Dans un milieu où la température est constante, il est intuitivement claire que si un objet débute à une température supérieure à celle du milieu, l'objet va refroidir en approchant de plus en plus la température du milieu. L'objet n'atteindra jamais une température inférieure

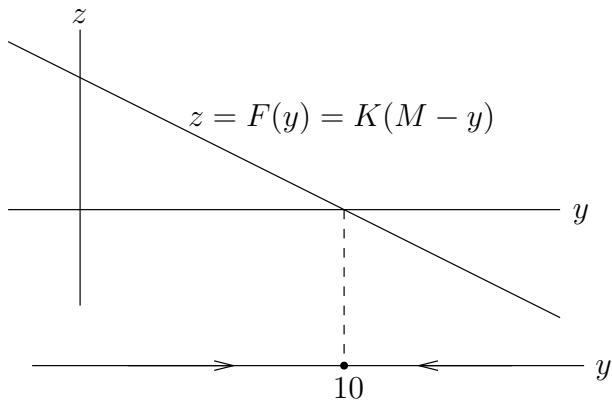


FIGURE 8.7 – Le portrait de phases de l'équation différentielle (8.5.2) qui gouverne la loi de Newton pour la chaleur, où $M = 10$ et $K = 0.5$. On a aussi tracé le graphe de $F(y) = K(M - y)$ pour $M = 10$ et $K = 0.5$.

à celle du milieu. On peut obtenir la même conclusion en utilisant des arguments purement mathématiques. On a démontré à la remarque 8.5.4 que l'image d'une solution est soit identique à ou distincte de l'image d'une autre solution. Ainsi l'image d'une solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 ne pourra jamais avoir la valeur 10 dans son image car 10 est l'image de la solution constante $y(t) \equiv 10$ pour tout x . ♠

Définition 8.5.7

Un point d'équilibre p pour (8.5.1) est **stable** si toute solution de (8.5.1) avec une condition initiale assez près de p demeure près de p lorsque x augmente. Si p n'est pas stable, on dit que p est **instable**.

Un point d'équilibre p pour (8.5.1) est **asymptotiquement stable** s'il est stable et de plus, toutes solutions de (8.5.1) avec une condition initiale assez près de p tend vers p lorsque x tend vers plus l'infini.

Exemple 8.5.8

Dans le cas de la loi de Newton pour la chaleur qui a été étudiée à l'exemple 8.5.5, le portrait de phases de l'équation différentielle (8.5.2) donné à la figure 8.7 montre que le point d'équilibre 10 est asymptotiquement stable. ♣

Il y a une façon simple de déterminer si un point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 8.5.9

Si p est un point d'équilibre de (8.5.1), alors p est asymptotiquement stable si $F'(p) < 0$. Si $F'(p) > 0$, le point d'équilibre est instable.

Exemple 8.5.10

L'équation différentielle pour la loi de Newton pour la chaleur est de la forme $y' = F(y)$ où

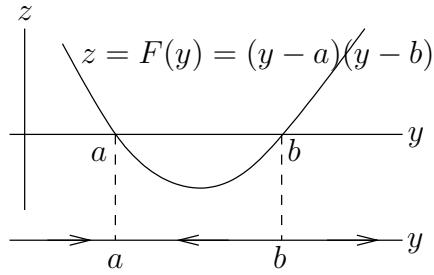


FIGURE 8.8 – Le portrait de phases de l'équation différentielle $y' = F(y)$. On a aussi tracé le graphe de $F(y) = (y - a)(y - b)$.

$F(y) = K(M - y)$. Ainsi, $F'(M) = -K < 0$ et M est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Puisque $F'(M) < 0$, donc F est décroissante, et $F(M) = 0$, on a que $F(t) > 0$ pour $t < M$ et $F(t) < 0$ for $t > M$. C'est ce que l'on retrouve pour le graphe de la fonction F à la figure 8.7,



Exemple 8.5.11

L'équation différentielle $y' = F(y) = (y - a)(y - b)$ où $a < b$ a deux points d'équilibre. Puisque $F'(y) = (y - b) + (y - a)$, on a que $F'(a) = a - b < 0$ et $F'(b) = b - a > 0$. Ainsi, a est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors que b est instable.

On retrouve le portrait de phases du système $y' = F(y)$ à la figure 8.8.



Exemple 8.5.12

On considère l'équation différentielle

$$y' = y^3 - 4y^2 - y + 4$$

- a) Trouvez les points d'équilibre.
- b) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre (théorème 8.5.9).
- c) Tracez le portrait de phases.
- d) Tracez la solution qui possède la condition initiale $y(0) = 3$.

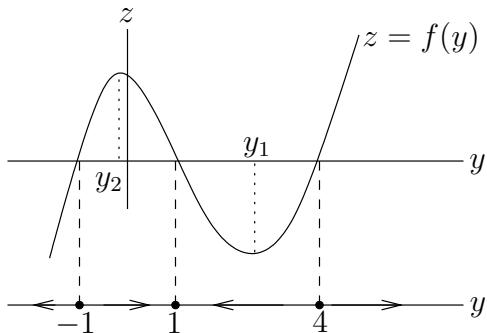
On a l'équation différentielle $y' = f(y)$ où $f(y) = y^3 - 4y^2 - y + 4 = (y + 1)(y - 1)(y - 4)$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(y) = 0$. On obtient trois points d'équilibre $y = -1$, $y = 1$ et $y = 4$. Ce qui répond à la question en (a).

Pour déterminer la stabilité des points d'équilibre que nous avons trouvés, il faut utiliser $f'(y) = 3y^2 - 8y - 1$. Puisque $f'(-1) = 10 > 0$, le point d'équilibre $y = -1$ est instable. Il en est de même pour le point d'équilibre $y = 4$ car $f'(4) = 15 > 0$. Par contre, le point d'équilibre $y = 1$ est stable car $f'(1) = -6 < 0$. Ce qui répond à la question en (b).

Le portrait de phases demandé en (c) est

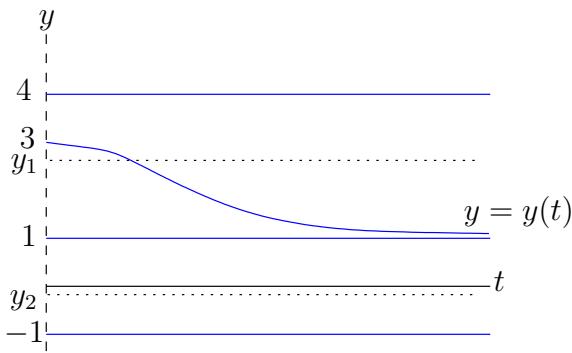


Pour déterminer la direction des flèches, on peut utiliser la stabilité des points d'équilibre que l'on a trouvés ci-dessus ou le graphe suivant.



Puisque $y' = f(y)$, on a que y augmente lorsque $f(y) > 0$ car $y' > 0$ alors que y diminue lorsque $f(y) < 0$ car $y' < 0$. On note que f a une minimum local au point $y_1 \approx 2.7862996$ et un maximum local au point $y_2 \approx -0.119633$. Ce sont les points critiques de f ; c'est-à-dire, les solutions de $f'(y) = 3y^2 - 8y - 1 = 0$.

Finalement, pour répondre à la question en (d), on utilise le fait que la solution avec la condition initiale $y(0) = 3$ va se trouver entre 1 et 4. Donc, la solution est décroissante car $y' = f(y)$ est négative lorsque y est entre 1 et 4, et tend vers 1 lorsque t tend vers plus l'infini. On obtient



Si on regarde le graphe de la solution avec $y(0) = 3$, on remarque que la concavité change lorsque $y = y_1$. Pourquoi peut-on dire cela ? Pour comprendre pourquoi la concavité change, il faut regarder le graphe de la fonction f ci-dessus. À partir de $y = 4$, $f(y)$ devient de plus en plus négative lorsque y diminue jusqu'à ce que f atteigne son minimum local à $y = y_1$. Si y continue à diminuer, $f(y)$ devient de moins en moins négative, mais toujours négative, et approche 0 lorsque y approche 1. Donc, la pente $y' = f(y)$ de y diminue lorsque y approche y_1 par la droite et augmente après avoir passé y_1 . Ce que l'on vient de d'écrire est une point d'inflexion pour y ; la pente y' diminue puis augmente lorsque t augmente.

Donc, le graphe d'une solution à un point d'inflexion lorsque f atteint un minimum local. Un raisonnement semblable montre que c'est aussi vrai lorsque f atteint un maximum local.



8.5.2 L'équation logistique

Un modèle mathématique simple pour décrire une population animale est donné par l'équation différentielle

$$y'(t) = ky(t) \quad (8.5.3)$$

où $y(t)$ est le nombre d'individus dans la population au temps t et k est le **taux de croissance relatif** de la population. C'est-à-dire, k est la constante de proportionnalité entre le **taux de croissance (absolu)** de la population (i.e. y') et la taille de la population (i.e. y).

Dans le modèle précédent, on doit assumer que la population animale est très grande pour justifier l'utilisation de fonctions continues pour décrire cette population. De plus, bien souvent, $y(t)$ décrit une densité de population pour une superficie ou un volume donnée.

L'équation différentielle (8.5.3) est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{y(t)} y'(t) dt = \int k dt$$

Ainsi,

$$\ln |y| = kt + C$$

où C est une constante. Si on résout pour y , on trouve

$$y = \pm e^C e^{kt}$$

où $\pm e^C$ désigne un nombre positif ou négatif que l'on représente par la lettre E . Comme $E = 0$ est aussi acceptable, on obtient la solution

$$y = E e^{kt} \quad (8.5.4)$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante.

Pour $k > 0$, ce modèle est valide pour une courte période de temps (en particulier pour les populations de bactéries qui augmentent très rapidement au début de leur période de croissance) mais n'est pas valide lorsque t tend vers plus l'infini car on aurait que $y(t)$ (la population au temps t) augmente sans borne supérieure.

On doit donc modifier le modèle précédent pour tenir compte du nombre maximal d'individus d'une population que le milieu peut supporter.

Soit M , le nombre maximal d'individus qu'un milieu peut supporter. Le **modèle logistique** de croissance d'une population est donné par l'équation différentielle autonome

$$y'(t) = ky(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) \quad (8.5.5)$$

où $y(t)$ est le nombre d'individus dans la population au temps t et k est le taux de croissance relatif de la population s'il n'y a pas de contraintes imposées par le milieu (i.e. $M \rightarrow \infty$).

La solution constante $y(t) = M$ pour tout t est un point d'équilibre pour (8.5.5). Il en est de même pour la solution constante $y(t) = 0$ pour tout t . L'équation logistique est de la

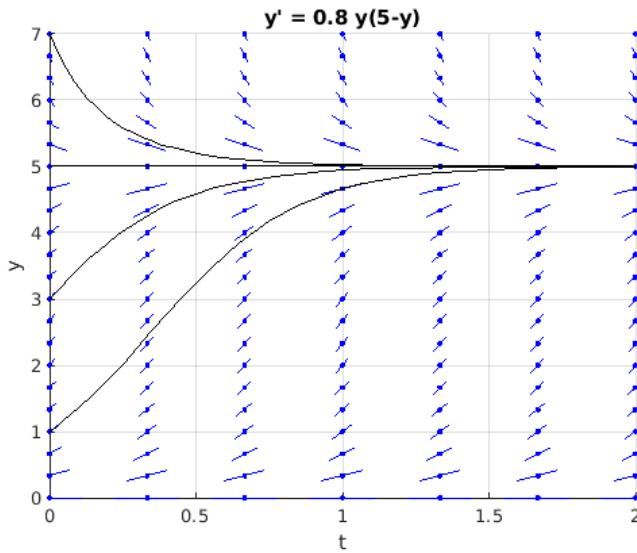


FIGURE 8.9 – Le champ de pentes pour l'équation logistique (8.5.5) où $M = 5$ et $k = 0.8$. On retrouve aussi dans cette figure les solutions avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y(0) = 3$, $y(0) = 5$ et $y(0) = 7$.

forme $y' = F(y)$ où $F(y) = ky(1 - y/M)$. Puisque $F'(y) = k - 2ky/M$, on a $F'(M) = -k < 0$ et $F'(0) = k > 0$. Ainsi, M est un point d'équilibre asymptotiquement stable et 0 est un point d'équilibre instable.

On peut aussi déterminer la stabilité des points d'équilibre directement à partir de l'équation différentielle (8.5.5). Si le nombre d'individus $y(t)$ est initialement supérieur à M alors $y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) < 0$ pour $t \geq 0$ et y est une fonction décroissante qui approche le point d'équilibre M . Par contre, si le nombre d'individus $y(0)$ est initialement inférieur à M (et supérieure à 0) alors $y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) > 0$ pour $t \geq 0$ et y est une fonction croissante qui approche le point d'équilibre M .

À la figure 8.9, on retrouve le champ de pentes¹ pour l'équation logistique (8.5.5) dans le cas où $k = 0.8$ et $M = 5$. On assume que $y(t)$ est le nombre d'individus en unité de milles (ou plus) au temps t .

Le portrait de phases de l'équation logistique se trouve à la figure 8.10. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur plus petite que 5 augmentent et approchent 5 alors que celles qui débutent avec une valeur plus grande que 5 diminuent et approchent 5. Le point d'équilibre 5 est asymptotiquement stable.

La solution avec la condition initiale $y(0) = 1$ possède un point d'inflexion. On peut déterminer la valeur de y où la solution a un point d'inflexion. On cherche en premier les

1. Les segments de droites que l'on trace pour produire le champ de pentes sont de même longueur. Cependant, comme l'axe horizontal et l'axe vertical ne sont pas de la même échelle, l'axe horizontal va seulement de 0 à 2 alors que l'axe vertical va de 0 à 7, les segments paraissent de moins en moins longs lorsque la pente augmente. Si on avait utilisé la même échelle pour les deux axes, les solutions auraient convergé trop rapidement vers $y = 5$.

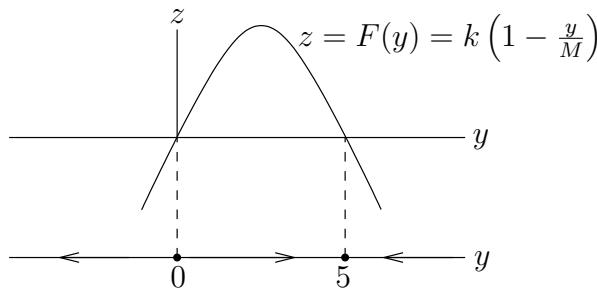


FIGURE 8.10 – Le portrait de phases de l'équation logistique (8.5.5) où $M = 5$ et $k = 0.8$. On a aussi tracé le graphe de $F(y) = ky(1 - y/M)$ pour nous aider à déterminer les régions où y est croissante et celles où y est décroissante.

valeurs de y où $F(y) = ky(1 - y/M)$ a un maximum ou un minimum local. Le graphe de $F(y)$ est une parabole concave vers le bas car le coefficient de y^2 est $-k/M < 0$. Comme les racines du polynôme $ky(1 - y/M)$ sont $y = 0$ et $y = M$, ce polynôme a un seul maximum local (qui est aussi un maximum global) au point $y = M/2$. Donc, lorsque la solution $y(t)$ passe d'une valeur plus petite à une valeur plus grande que $M/2$, $y'(t) = F(y(t))$ augmente pour atteindre son maximum lorsque $y(t) = M/2$ puis diminue.

Dans le cas de la figure 8.9 où $M = 5$, on a que la solution avec la condition initiale $y(0) = 1$ a un point d'inflexion lorsque $y = 2.5$. Les solutions qui traversent la droite $y = 2.5$ ont un point d'inflexion au temps t où elles coupent la droite $y = 2.5$. Les solutions qui ne coupent pas la droite $y = 2.5$ n'ont pas de point d'inflexion.

Sans résoudre l'équation logistique, on a été capable de tirer les conclusions les plus importantes de cette équation. On peut résoudre l'équation logistique car c'est une équation séparable.

Si on sépare les variables de (8.5.5) et intègre par rapport à t , on obtient

$$M \int \frac{1}{y(M-y)} dy = M \int \frac{1}{y(t)(M-y(t))} y'(t) dy = \int k dt. \quad (8.5.6)$$

Pour calculer l'intégrale à gauche, il faut utiliser la méthode des fractions partielles. Puisque

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right)$$

on a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(M-y)} dy &= \frac{1}{M} \int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{M} \int \frac{1}{M-y} dy = \frac{1}{M} (\ln|y| - \ln|M-y|) \\ &= \frac{1}{M} \ln \left| \frac{y}{M-y} \right| + E, \end{aligned}$$

où E est une constante. Ainsi, (8.5.6) donne

$$\ln \left| \frac{y}{M-y} \right| = kt + C$$

où C est une constante. Si on prend l'exponentielle des deux côtés, on trouve

$$\left| \frac{y}{M-y} \right| = e^C e^{kt}$$

et ainsi

$$\frac{y}{M-y} = Q e^{kt}$$

où $Q = \pm e^C$. En fait, on peut simplement assumer que $Q \in \mathbb{R}$ car $Q = 0$ est aussi acceptable et donne la solution $y = 0$. Si on résout pour y , on trouve

$$y = \frac{MQe^{kt}}{1 + Qe^{kt}}.$$

Il y a une solution qui n'est pas donnée par cette formule. La solution $y(t) = M$ pour tout t n'est pas donnée par cette formule. La constante Q est déterminée par la condition initiale.

Exemple 8.5.13

Un lac peut supporter 10^4 truites. On ensemence le lac avec 1,000 truites et un an plus tard on compte 2,000 truites. Combien de truites y aura-t-il dans le lac après 5 ans ? Combien d'années faut-il avant d'atteindre $3/4$ de la population de truites que le lac peut supporter ?

Si on assume que le nombre de truites $y(t)$ au temps t en années est gouverné par le modèle logistique avec $M = 10^4$ donnée dans l'énoncé du problème, alors

$$y(t) = \frac{10,000Qe^{kt}}{1 + Qe^{kt}}.$$

La condition initiale $y(0) = 1,000$ donne

$$1,000 = \frac{10,000Q}{1 + Q} \dots$$

Ainsi $Q = 1/9$. Pour déterminer k , on utilise l'information $y(1) = 2000$ donnée dans l'énoncé du problème pour obtenir

$$\begin{aligned} 2,000 &= \frac{10,000(1/9)e^k}{1 + (1/9)e^k} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{e^k}{9 - e^k} \Rightarrow 9 - e^k = 5e^k \\ &\Rightarrow e^k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$y(t) = \frac{10,000e^{t \ln(3/2)}}{9 + e^{t \ln(3/2)}}.$$

La réponse à la première question est

$$y(5) = \frac{10,000e^{5 \ln(3/2)}}{9 + e^{5 \ln(3/2)}} = \frac{10,000(3/2)^5}{9 + (3/2)^5} \approx 4.576271186 \times 10^3$$

ou approximativement 4,576 truites.

Pour répondre à la seconde question, il faut trouver t tel que

$$7500 = \frac{10,000e^{t \ln(3/2)}}{9 + e^{t \ln(3/2)}} .$$

Si on résout pour t on trouve

$$t = \frac{3 \ln(3)}{\ln(3/2)} = 8.12853387 \dots \text{ ans};$$

soit un peu plus de 8 ans.



8.6 Applications aux sciences physiques, biologiques et économiques

Exemple 8.6.1

La diffusion d'une substance chimique au travers de la paroi d'une cellule est gouvernée par une équation différentielle semblable à celle de la loi de Newton pour la chaleur. En effet, le taux de variation de la concentration d'une substance chimique à l'intérieur d'une cellule est proportionnel à la différence de concentration de cette substance chimique à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule.

Dans le modèle le plus simple, la proportionnalité est constante et dépend de la substance chimique et du type de membrane qui forme la paroi de la cellule. De plus, on assume qu'il n'est pas plus difficile pour la substance chimique de sortir de la cellule que d'y entrer.

Si $C_i(t)$ est la concentration au temps t de la substance chimique à l'intérieur de la cellule et $C_o(t)$ est la concentration au temps t de cette même substance chimique à l'extérieur de la cellule, alors

$$C'_i(t) = K(C_o(t) - C_i(t))$$

où K est une constante positive.

Dans la majorité des situations, les cellules baignent dans un vaste milieu. On peut donc supposer que la concentration C_o de la substance chimique à l'extérieur de la cellule est constante – La quantité de substance chimique à l'intérieur de la cellule représente une infime partie de la quantité à l'extérieur de la cellule.

Un modèle un peu plus compliqué tient compte du fait qu'il est généralement plus facile pour la substance chimique de sortir de la cellule que d'y entrer. Ainsi on a deux constantes $K_i > K_o$ telles que

$$C'_i(t) = K_o C_o - K_i C_i(t) .$$

Finalement, un modèle plus précis va tenir compte du fait que K_o n'est pas une constante mais une fonction de la concentration $C_i(t)$ au temps t . Plus la concentration de la substance chimique dans la cellule est grande, plus il devient difficile pour la substance chimique d'entrer

dans la cellule. Si C_m est la concentration maximale de la substance chimique que l'on peut retrouver dans la cellule, alors

$$C'_i(t) = K_u(C_m - C_i(t))C_o - K_iC_i(t)$$

où K_u est une nouvelle constante et $0 \leq C_i(t) \leq C_m$.

Normalement, on normalise la concentration de la substance chimique dans la cellule ; c'est-à-dire que l'on remplace $C(t)$ par $C(t)/C_m$. Si on divise l'équation différentielle précédente par C_m , on obtient

$$\frac{C'_i(t)}{C_m} = K_u \left(1 - \frac{C_i(t)}{C_m}\right) C_o - K_i \frac{C_i(t)}{C_m}.$$

Si on pose $q(t) = C(t)/C_m$ pour tout t , on obtient

$$q'(t) = K_u(1 - q(t))C_o - K_iq(t) = K_uC_o - (K_uC_o + K_i)q(t)$$

où $0 \leq q(t) \leq 1$ pour tout t . 

Exemple 8.6.2

Un modèle pour la propagation d'une maladie infectieuse causée par un microbe est donné par l'équation différentielle

$$m'(t) = \alpha m(t)(1 - m(t)) - \beta m(t) \quad (8.6.1)$$

où $m(t)$ est la fraction de la population totale qui porte le microbe au temps t . On assume qu'il n'y a pas d'individus qui puissent être porteur du microbe sans être malade. Pour étudier un tel problème, il faudrait deux inconnus et deux équations différentielles. C'est un sujet que nous aborderons prochainement.

Le premier terme du côté droit de l'équation (8.6.1) représente le taux auquel le microbe est transmis des individus qui sont malades à ceux qui ne le sont pas. Le produit $m(t)(1 - m(t))$ représente les contacts entre les individus malades et ceux qui ne le sont pas. La constante positive α est déterminée en tenant compte de la vitesse et de la facilité à laquelle le microbe est transmis d'un individu à un autre.

Le deuxième terme du côté droit de l'équation (8.6.1) représente le taux auquel les individus guérissent. La constante positive β est déterminée par la rapidité à laquelle les individus malades guérissent.

Il y a deux points d'équilibre pour (8.6.1). Si $0 = \alpha m(1 - m) - \beta m$, on trouve $m = 0$ et $m = 1 - \beta/\alpha$.

Lorsque $\beta > \alpha$, le graphe de $y = \alpha m(1 - m) - \beta m$ ainsi que le portrait de phases de (8.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 8.11. On considère seulement les valeurs positives de $m(t)$ car $m(t) < 0$ n'a pas de sens réel. La fraction $m(t)$ de la population qui est malade tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie va disparaître. Puisque $\beta > \alpha$, le taux de guérison est supérieur au taux auquel la maladie est transmise. Il n'est pas nécessaire d'éliminer le taux de propagation de la maladie (i.e.

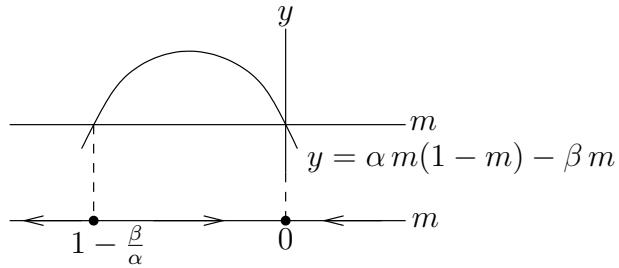


FIGURE 8.11 – Comportement de la fraction $m(t)$ de la population qui porte le microbe lorsque $\beta > \alpha$

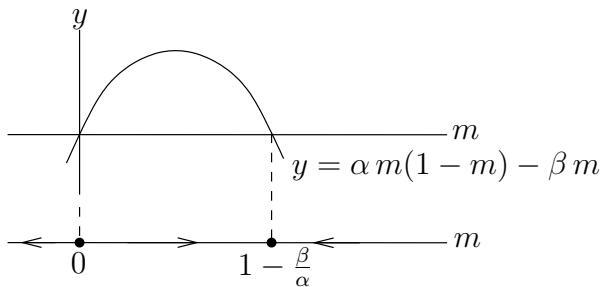


FIGURE 8.12 – Comportement de la fraction $m(t)$ de la population qui porte le microbe lorsque $\beta < \alpha$

d'avoir $\alpha = 0$) pour enrayer la maladie. Lorsque $\beta < \alpha$, le graphe de $y = \alpha m(1 - m) - \beta m$ ainsi que le portrait de phases de (8.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 8.12. Comme précédemment, on considère seulement les valeurs positives de $m(t)$. La fraction $m(t)$ de la population qui est malade tend vers $1 - \beta/\alpha$ lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie ne disparaîtra pas mais touchera toujours une fraction $1 - \beta/\alpha$ de la population. On dit que la maladie est **endémique**. ♣

Exemple 8.6.3

On a vu à l'exemple 5.9.23 un modèle pour déterminer le facteur d'efficacité des pêcheurs pour maximiser la récolte de poissons capturés lors des futures années de pêche.

On considère une question semblable à celle de l'exemple 5.9.23. Au lieu d'utiliser un système dynamique discret pour décrire la population de poissons en fonction du temps, nous utiliserons une équation différentielle.

Soit $x(t)$ le nombre de poissons au temps t en années. L'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps est construite à partir de l'équation logistique à laquelle on ajoute l'effet de la pêche.

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{M}\right) - hx , \quad (8.6.2)$$

où $M > 0$ est le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, $r > 0$ est le taux de croissance relatif de la population de poissons si le milieu peut supporter un nombre infini de poissons et il n'y a pas de pêche, et $h > 0$ est le facteur d'efficacité des pêcheurs.

On veut maximiser la récolte de poissons à long termes ; c'est-à-dire, on veut maximiser $R(h) = hp(h)$ où $p(h)$ est un point d'équilibre positif pour l'équation différentielle (8.6.2).

Les points d'équilibre de (8.6.2) sont les solutions de

$$rp\left(1 - \frac{p}{M}\right) - hp = 0 ,$$

Le seul point d'équilibre positif est $p(h) = M\left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Donc,

$$R(h) = Mh\left(1 - \frac{h}{r}\right) .$$

On a donc que $R'(h) = M(1 - 2h/r)$ et le seul point critique est $h = r/2$. On résume dans le tableau suivant l'information que l'on a au sujet de la fonction R .

h	$0 < h < r/2$	$r/2$	$r/2 < h < r$
$R(h)$	+	$Mr/4$	+
$R'(h)$	+	0	-
max. local			

On conclut que $h = r/2$ nous donnera la plus grande récolte de poissons pour les futures années de pêche. 

Remarque 8.6.4

Un modèle plus réaliste devrait assumer que la pêche est bien souvent saisonnière ; la pêche n'est généralement pas permise toute l'année mais seulement durant une partie de l'année. Par exemple, si la pêche n'est pas permise pour une portion S de l'année, l'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps en années pourrait être de la forme

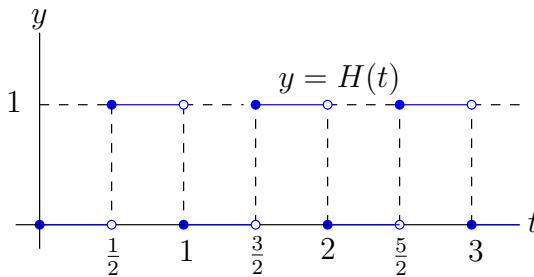
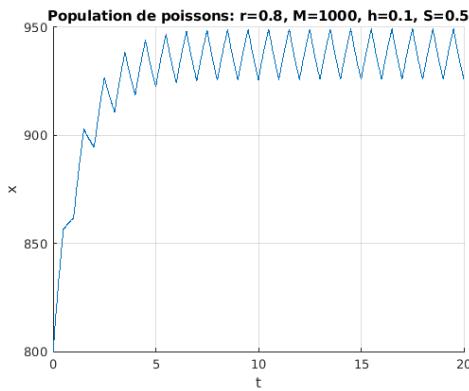
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right) - H(t)hx , \quad (8.6.3)$$

où

$$H(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t - \lfloor t \rfloor < S \\ 1 & S \leq t - \lfloor t \rfloor < 1 \end{cases} \quad (8.6.4)$$

et $\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que t . Voir le graphe de H à la figure 8.13. Une équation de la forme (8.6.3) n'a pas de points d'équilibre. Le côté droit de (8.6.3) n'est pas une fonction continue car H est discontinue à $t = n$ et $t = n - S$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. On peut utiliser une méthode numérique pour résoudre ce type d'équations différentielles en portant une attention toute particulière aux points où le côté droit de l'équation différentiel n'est pas continu. Ce n'est pas le sujet du cours.

On retrouve à la figure 8.14 le graphe de la solution de (8.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.1$ et $x(0) = 800$. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 938 poissons et l'amplitude est environ 12. Il faudrait

FIGURE 8.13 – Graphe de la fonction H définie en (8.6.4) avec $S = 1/2$.FIGURE 8.14 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (8.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.1$ et $x(0) = 800$.

une analyse mathématique plus poussée pour prouver que c'est effectivement ce que l'on observe graphiquement. Si on utilise la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, on trouve $R(0.1) = 0.1 \times 938 = 93.8$.

À l'exemple 8.6.3, on a trouvé que la valeur optimale de h pour maximiser la récolte de poissons pour les futures années de pêche est $h = r/2$. Si on utilise cette valeur lorsque $r = 0.8$, on obtient $h = 0.4$. On retrouve à la figure 8.15 le graphe de la solution de (8.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.4$ et $x(0) = 800$. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 751 poissons et l'amplitude est environ 37. Si on utilise la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, on trouve $R(0.4) = 0.4 \times 751 = 300.4$.

On peut montrer qu'il existe une valeur de h qui maximise $R(h)$. On a donc une population de poissons qui a un bon taux de reproduction et qui peut supporter de bonnes saisons de pêche. ♠

Exemple 8.6.5 🔑

Un réservoir contient 40 litres d'eau pure. On verse dans ce réservoir une saumure (solution saline) qui contient 0.125 kg de sel par litre. Le débit auquel on verse la saumure dans le réservoir est de 8 litres/minute. On suppose que le contenu du réservoir est instantanément bien mélangé (homogène). Si le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant

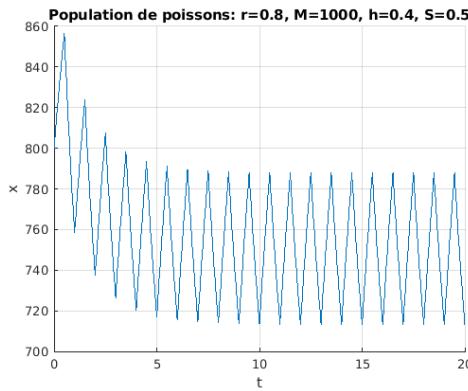


FIGURE 8.15 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (8.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.4$ et $x(0) = 800$.

de 8 litres/minute, à quel moment le mélange dans le réservoir contiendra-t-il 0.0625 kg de sel par litre ?

Il est généralement plus simple de travailler avec la quantité de sel dans le réservoir que la concentration de sel. Soit $q(t)$ la quantité de sel en kg dans le réservoir au temps t en minutes.

Si on verse 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors on ajoute $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

S'il s'échappe 8 litres du mélange par minute de façon constante et puisque le volume du mélange est maintenu à 40 litres, on perd $8/40$ de la quantité de sel dans le réservoir par minute.

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 1 - \frac{8}{40} q(t) = 1 - \frac{q(t)}{5} = \frac{5 - q(t)}{5}$$

où $q'(t)$ est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le réservoir au temps t .

C'est une équation différentielle séparable. Si on sépare les variables et intègre par rapport à t on obtient

$$\int \frac{5}{5 - q} dq = \int \frac{5}{5 - q(t)} q'(t) dt = \int dt .$$

Ainsi,

$$-5 \ln |5 - q| = t + C$$

où C est une constante. Si on divise par -5 des deux côtés de l'égalité et prend l'exponentielle, on obtient

$$5 - q = \pm e^{-C/5} e^{-t/5}$$

où $\pm e^{-C/5}$ représente une constante positive ou négative que l'on appelle E . Donc,

$$q = 5 - E e^{-t/5}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut accepter $E = 0$. Pour $E = 0$, on trouve le point d'équilibre 5. Si initialement on avait 5 kg de sel dans le réservoir, l'ajout de sel provenant de la saumure que l'on ajoute au contenu du réservoir serait exactement compensé par la quantité du sel qui s'échappe du réservoir. Pour déterminer la valeur de la constante E , on utilise l'hypothèse qu'initialement on a de l'eau pure dans le réservoir. Donc, $q(0) = 0$ kg de sel. D'où $0 = 5 - E$ et $E = 5$. La quantité de sel au temps t est donc donnée par

$$q(t) = 5 \left(1 - e^{-t/5}\right).$$

Pour répondre à la question, il faut trouver la valeur de t telle que $q(t) = 40 \times 0.0625 = 2.5$ kg. On trouve $t = 5 \ln(2) \approx 3.47$ min. ♣

Exemple 8.6.6 🔑

Si à l'exemple précédent, on suppose que le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant de 6 litres/minute seulement, donnez une équation différentielle satisfait par la quantité de sel $q(t)$ (en kilogrammes) au temps t en minutes. Pouvez-vous résoudre cette équation ? On suppose que le réservoir est assez grand pour accommoder l'augmentation de volume du mélange (du moins pour un certain temps).

Comme à l'exemple précédent, si on verse 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors on ajoute $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

Par contre, s'il s'échappe seulement 6 litres du réservoir par minute, la volume V_r du mélange dans le réservoir va augmenté et sera de $V_r(t) = 40 + 2t$ litres après t minutes. Le volume V_m du mélange qui aura échappé du réservoir après t minutes sera $V_m(t) = 6t$. Donc, au temps t , le taux de variation instantané de la quantité de sel est

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{V_m(t)}{V_r(t)} \right) q(t) = \frac{-60}{(20+t)^2} q(t) \text{ kg/min}.$$

Le signe négatif est parce que le mélange s'échappe du réservoir.

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t)$$

où $q'(t)$ est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le mélange au temps t .

On n'est pas en mesure de résoudre cette équation différentielle car elle n'est pas séparable. La méthode d'Euler que l'on verra dans une prochaine section va nous permettre de tracer le graphe de q . ♣

Exemple 8.6.7 🔑

Un réservoir contient 10^8 litres d'eau pour l'alimentation d'une ville. À chaque jour, la consommation de la ville est de 10^6 litres, et le réservoir reçoit 0.9×10^6 litres d'eau de source et 10^5 litres d'eau d'une rivière qui se déverse dans le réservoir. L'eau de la rivière contient 0.0001 kg de sel par litre alors que l'eau de source ne contient pas de sel. On suppose qu'initialement il n'y a pas de sel dans le réservoir et que le sel se mélange instantanément

et uniformément à l'eau du réservoir. Ceci est raisonnable si la prise d'eau de la ville est à une extrémité du réservoir et la rivière se déverse à l'autre extrémité du réservoir. De plus, on suppose que la consommation de la ville est répartie uniformément durant la journée. Donnez une équation différentielle qui sera satisfaite par la concentration $C(t)$ de sel dans l'eau du réservoir au temps t en jours. Résolvez cette équation différentielle.

Lorsque le volume d'eau est constant, ce qui est le cas dans ce problème car il se déverse dans le réservoir autant d'eau qu'il en sort, il est généralement plus simple de commencer par donner une équation différentielle pour $q(t)$, la quantité de sel en kilogrammes dans le réservoir au temps t en jours. Une division de cette équation différentielle par le volume d'eau dans le réservoir (i.e. 10^8 kg) donnera l'équation différentielle pour la concentration $C(t)$ au temps t en jour.

Le réservoir reçoit 10^6 litres d'eau par jour. De ces 10^6 litres, 0.9×10^6 litres ne contiennent pas de sel et 10^5 litres contiennent 0.0001 kg de sel par litre. Donc, l'influx d'eau ajoute 10 kg de sel par jour dans le réservoir.

Par contre, il s'échappe aussi 10^6 litres d'eau par jour du réservoir, donc le réservoir perd

$$\frac{10^6}{10^8} q(t) = \frac{q(t)}{100} \text{ kg/jour}$$

de sel au temps t .

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 10 - \frac{q(t)}{100}$$

où $q'(t)$ est le taux de variation de la quantité de sel dans le réservoir au temps t .

Si on divise l'équation différentielle précédente par 10^8 , on obtient l'équation différentielle satisfaite par la concentration $C(t) = q(t)/10^8$; c'est-à-dire,

$$C'(t) = 10^{-7} - \frac{C(t)}{100} = \frac{10^{-5} - C(t)}{100}.$$

C'est une équation différentielle séparable. Si on sépare les variables et intègre par rapport à t on obtient

$$\int \frac{10^2}{10^{-5} - C} dC = \int \frac{10^2}{10^{-5} - C(t)} C'(t) dt = \int dt.$$

Ainsi,

$$-10^2 \ln |10^{-5} - C| = t + D$$

où D est une constante. Si on divise par -10^2 des deux côtés de l'égalité et calcul l'exponentielle des deux côtés, on obtient

$$10^{-5} - C = \pm e^{-D/100} e^{-t/100}$$

où $\pm e^{-D/100}$ représente une constante positive ou négative que l'on appelle E . Donc,

$$C = 10^{-5} - E e^{-t/100}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut accepter $E = 0$. Pour $E = 0$, on trouve le point d'équilibre 10^{-5} . Si initialement on avait 10^{-5} % de sel dans le réservoir, la quantité de sel perdu par l'utilisation de la ville serait exactement compensée par l'ajout de sel provenant de la rivière.

Pour déterminer la valeur de la constante E , on utilise l'hypothèse qu'initialement l'eau du réservoir ne contient pas de sel. Donc, $C(0) = 0$ % de sel; c'est-à-dire que $0 = 10^{-5} - E$ et ainsi $E = 10^{-5}$. La concentration de sel au temps t en jours est donc donnée par

$$C(t) = 10^{-5} (1 - e^{-t/100}) .$$



Exemple 8.6.8 ↗

Si le revenu d'un compte en banque est proportionnel au montant dans le compte, donnez une équation différentielle pour $m(t)$, le montant en dollars dans le compte au temps t en années, qui décrit cette relation. Interprétez l'équation différentielle que vous obtenez.

Puisque $m'(t)$ représente le revenu au temps t (le taux de croissance au temps t), on obtient de l'énoncé du problème que

$$m'(t) = km(t)$$

où k est une constante. C'est l'équation différentielle (8.5.3) (où l'on remplace y par m) qui possède la solution donnée en (8.5.4). Donc,

$$m(t) = E e^{kt}$$

où E est le montant initial dans le compte et k le taux d'intérêt composé de façon continue (i.e. le compte rapporte $100k$ % par année, composé de façon continue).



Exemple 8.6.9 🔑

On considère une personne qui saute en parachute. Une des lois de la physique dit que la résistance de l'air est proportionnel au carré de la vitesse du parachutiste. La constante de proportionnalité représente la surface du parachute qui est soumise à la résistance de l'air et le poids du parachute.

Si $v(t)$ est la vitesse (en m/s) du parachutiste t secondes après avoir ouvert son parachute, alors v satisfait l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + dv^2 , \quad (8.6.5)$$

où l'on assume que la direction positive du déplacement est vers le haut, m est la masse (en kg) du parachutiste et $g = 9.8$ m/s² est l'accélération dû à la gravité.

Le premier terme à droite du signe d'égalité dans l'équation (8.6.5) est une conséquence de la loi de Newton qui dit que la force exercée par l'attraction terrestre sur le parachutiste est de $-mg$ N. Le signe négatif pour l'accélération indique que la force est dans la direction opposée à la direction positive.

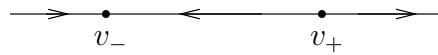
Quelles sont les unités de la constante de proportionnalité d pour que l'équation différentielle soit cohérente ? Si on traduit l'équation différentielle en termes des unités de ses composantes, on obtient

$$\text{kg m/s}^2 = -\text{kg m/s}^2 + \text{unités de } d \times \text{m}^2/\text{s}^2 .$$

Donc, les unités de d doivent être des kg/m .

Les points d'équilibre de l'équation différentielle (8.6.5) sont les solutions de $f(v) = -mg + dv^2 = 0$. On trouve $v_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{mg}{d}}$. Si le poids du parachutiste est de 75 km, donc $m = 75$, et $d = 50$, on obtient les points d'équilibre $v_{\pm} = \pm\sqrt{14.7} \approx \pm 3.834$.

Puisque $f(v) > 0$ pour $v < v_-$ et $v > v_+$, et $f(v) < 0$ pour $v_- < v < v_+$, on obtient le portrait de phases suivant.



La vitesse initiale v_0 du parachutiste est inférieure à v_+ car il saute d'un avion. En fait, on a probablement $v_0 \leq 0$ lorsque le parachute ouvre. Ne pas oublier que la direction positive est vers le haut. Donc, $v(t)$ tend $v_- = -3.834$ lorsque t tend vers l'infini. C'est-à-dire que la vitesse de descente du parachutiste approchera 3.834 m/s quand il arrivera au sol si, naturellement, il est assez loin du sol lorsqu'il ouvre son parachute.

On aurait pu trouver la solution de l'équation différentielle (8.6.5) car c'est une équation séparable. En fait, on a

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} = -mg + dv^2 &\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} \frac{dv}{dt} = -\frac{d}{m} \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} dv = -\int \frac{d}{m} dt . \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Si on pose $k^2 = mg/d$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} dv &= \int \frac{1}{k^2 - v^2} dv = \int \frac{1}{(k-v)(k+v)} dv \\ &= \frac{1}{2k} \int \left(\frac{1}{k-v} + \frac{1}{k+v} \right) dv = \frac{1}{2k} (-\ln|k-v| + \ln|k+v|) + E \\ &= \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+v}{k-v} \right| + E \end{aligned}$$

grâce à la méthode d'intégration par fractions partielles. Donc, on obtient de (8.6.6) que

$$\frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+v}{k-v} \right| = -\frac{d}{m} t + C .$$

Si on résout pour v , on trouve

$$v = \frac{k(De^{-2kdt/m} - 1)}{De^{-2kdt/m} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{d}} \left(\frac{(De^{-2t\sqrt{gd/m}} - 1)}{De^{-2t\sqrt{gd/m}} + 1} \right) ,$$

où $D = \pm e^{2kC}$. Comme c'est bien souvent le cas, la cas $D = 0$ est aussi acceptable et on peut donc assumer que $D \in \mathbb{R}$. On a bien que $v(t) \rightarrow -\sqrt{\frac{mg}{d}}$ lorsque t tend vers l'infini.

Comme on peut voir, l'analyse qualitative avec le portrait de phases nous a fourni toute l'information nécessaire au sujet du comportement à long terme de $v(t)$ sans avoir à faire de long calculs pour résoudre l'équation différentielle (8.6.5). ♣

Exemple 8.6.10 🔧

Une personne se trouve dans une pièce de 3 m de profondeur, 2 m de largeur et 2.5 m de hauteur. On suppose que la pièce ne bénéficie pas d'un bon système d'aération. On sait que la quantité d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne dépend linéairement de la concentration d'oxyde de carbone dans l'air. Si une personne aspire 0.015 m³/minute d'oxyde de carbone lorsqu'il y a 0.04% d'oxyde de carbone dans l'air et deux fois plus d'oxyde de carbone lorsque qu'il y a 0.3% d'oxyde de carbone dans l'air, et si de plus l'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré, donnez une équation différentielle pour la concentration d'oxyde de carbone $C(t)$ (en pourcentage) dans l'air au temps t minutes. Résolvez l'équation que vous avez trouvée.

On commence par trouver une formule pour la quantité y (en m³) d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne en fonction de la concentration C d'oxyde de carbone dans l'air. On sait que la relation entre ces deux quantités est linéaire. Donc, $y = mC + b$ pour deux constantes m et b . Dans la question, on donne $y = 0.015$ m³/minute pour $C = 0.0004$ et $y = 0.03$ m³/minute pour $C = 0.003$. On obtient le système

$$0.015 = 0.0004m + b$$

$$0.03 = 0.003m + b$$

dont la solution est $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

Puisque l'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré, on a donc que la variation instantanée de la quantité d'oxyde de carbone $q(t)$ (en m³) dans l'air au temps t en minutes satisfait

$$q'(t) = 0.04(mC(t) + b) .$$

Puisque le volume d'air dans la pièce est la valeur constante $3 \times 2 \times 2.5 = 15$ m³, la concentration d'oxyde de carbone dans la pièce au temps t est donc donnée par $C(t) = q(t)/15$. Si on divise les deux côtés de l'équation différentielle précédente par 15, on trouve l'équation différentielle satisfaisante par la concentration d'oxyde de carbone $C(t)$ dans la pièce au temps t ; c'est-à-dire,

$$C'(t) = \frac{q'(t)}{15} = \frac{0.04}{15} (mC(t) + b) = \frac{m}{375} C(t) + \frac{b}{375} .$$

C'est une équation différentielle séparable. On a

$$\int \frac{375}{mC + b} dC = \int \frac{375}{mC(t) + b} C'(t) dt = \int dt.$$

Donc,

$$\frac{375}{m} \ln(mC + b) = t + K$$

où K est une constante d'intégration. Si on résout pour C , on trouve

$$C(t) = -\frac{b}{m} + \frac{De^{mt/375}}{m}$$

où D est une constante qui est déterminée par la concentration initiale d'oxyde de carbone dans la pièce, et $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

On note que le modèle précédent n'est pas valide pour tout t . Il est claire qu'à un moment donné, la quantité d'oxyde de carbone dans la pièce sera trop élevée pour que la personne puisse survivre dans cette pièce. Heureusement, nos maisons ne sont pas isolées au point de ne pas permettre l'aire d'entrer. Donc, les chances d'empoisonnement sont nulles sauf s'il y a une autre source d'oxyde de carbone. C'est là qu'un bon détecteur d'oxyde de carbone est utile. 

8.7 Famille de courbe orthogonales

Définition 8.7.1

Une équation de la forme $F(x, y, c) = 0$, où c est une paramètre réel, représente une **famille de courbes** dans le plan.

Exemple 8.7.2

L'équation $F(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ définit la famille des cercles centrés à l'origine et de rayon r . L'équation $G(x, y, c) = x^2 - y + c = 0$ définit la famille des paraboles $y = x^2 + c$. L'équation $F(x, y, r) = y - ce^x = 0$ définit la famille des courbes $y = ce^x$. 

Définition 8.7.3

Une famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ est **orthogonale** à une autre famille de courbes $G(x, y, d) = 0$ si, en tout point où une courbe de la première famille coupe une courbe de la deuxième famille, les tangentes à ces deux courbes sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Exemple 8.7.4

La famille des cercles de rayon r centrés à l'origine $F(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est orthogonale

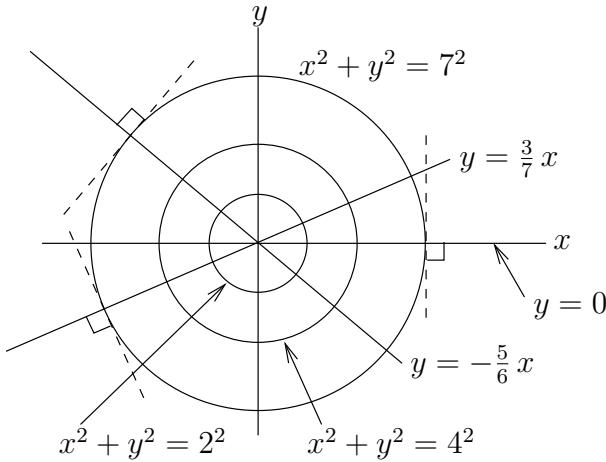


FIGURE 8.16 – Les cercles centrées à l'origine forment une famille de courbes orthogonales à la famille des droites qui passent par l'origine.

à la famille des droites qui passe par l'origine $G(x, y, m) = y - mx = 0$. Ces droites sont des rayons pour les cercles centrés à l'origine. Voir la figure 8.16. ♣

On peut utiliser les équations différentielles pour trouver une famille de courbes orthogonales à une famille donnée de courbes. Il faut se rappeler que si une droite ℓ_1 de pente m_1 coupe perpendiculairement une autre droite ℓ_2 de pente m_2 alors $m_1m_2 = -1$.

Si y_c est une courbe de la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ et (x_0, y_0) est un point de cette courbe, alors la pente de la tangente à la courbe y_c au point (x_0, y_0) est $y'_c(x_0)$ (sauf si la tangente est verticale à ce point). Si la famille de courbe $G(x, y, d) = 0$ est orthogonale à la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ et y_d est une courbe de la famille $G(x, y, d) = 0$ qui coupe la courbe y_c de la famille $F(x, y, c) = 0$ au point (x_0, y_0) , alors la pente de la tangente à la courbe y_d au point (x_0, y_0) est $y'_d(x_0) = \frac{-1}{y'_c(x_0)}$.

C'est ce raisonnement qui nous permet d'utiliser la méthode suivante pour trouver une famille de courbes orthogonale à une famille donnée de courbes.

1. À partir de l'équation $F(x, y, c) = 0$, déduire une équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y).$$

On doit éliminer la constante c à l'aide de l'équation $F(x, y, c) = 0$ qui définit la famille de courbe – Autrement, on trouve une famille de courbes orthogonale à une seule courbe de la famille $F(x, y, c) = 0$.

2. On résout l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{-1}{f(x, y)} \quad (8.7.1)$$

pour trouver une famille de courbe $G(x, y, d) = 0$ orthogonale à la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$.

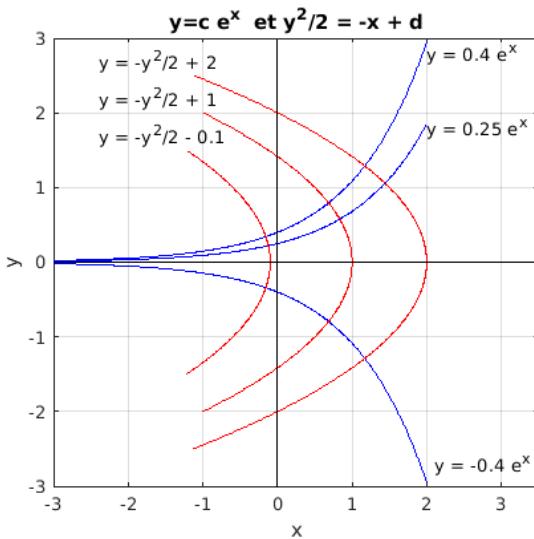


FIGURE 8.17 – Quelles courbes des familles de courbes $y = ce^x$ et $\frac{y^2}{2} = -x + d$. Ces deux familles de courbes sont mutuellement orthogonales.

La constante d de la famille $G(x, y, d) = 0$ est la constante d'intégration que l'on obtient lorsque l'on résout l'équation différentielle (8.7.1) sans condition initiale.

Exemple 8.7.5

Trouver la famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y = ce^x$.

Si on dérive $y = ce^x$, on obtient $y' = ce^x$. Or $ce^x = y$. Donc, $y' = y$. C'est une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = y$ qui ne dépend pas de c .

La famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y = ce^x$ est donnée par la solution de l'équation différentielle séparable

$$y' = -\frac{1}{y}.$$

On a

$$\int y \, dy = - \int dx.$$

Donc, $\frac{y^2}{2} = -x + d$ est la famille de courbes cherchée. Quelques courbes des deux familles sont représentées à la figure 8.17. 

8.8 Méthode d'Euler

Soit l'équation différentielle avec une condition initiale

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) & , & x_0 \leq x \leq x_f \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{8.8.1}$$

où f est une fonction de deux variables.

Avant même d'essayer de trouver une solution (numérique ou algébrique) de (8.8.1), il faut se poser les questions suivantes :

1. Est-ce qu'il existe une solution ?
2. S'il en existe une, est-elle unique ?
3. De plus, pour une solution numérique de (8.8.1), est-ce qu'une petite perturbation de (8.8.1) entraîne un énorme changement de la solution ?

La raison pour la première question est évidente. Il est inutile de chercher une solution de (8.8.1) s'il en n'existe pas. La raison pour la deuxième question est plus subtile. S'il y a plusieurs solutions pour une équation différentielle avec une condition initiale, on peut questionner la valeur et véracité de cette équation pour modéliser un phénomène (physique, biologique, etc), en particulier si les expériences montrent qu'un seul comportement est possible. De plus, comment peut-on savoir si la solution que l'on trouve est vraiment la solution qui décrit le phénomène que nous voulons analyser ? Nous avons répondu aux deux premières questions à la section 8.4.

La troisième question est fondamentale lorsque l'on veut résoudre numériquement des équations différentielles. Puisque les calculs numériques ne sont jamais exacts, il ne faut pas que les erreurs de troncature produisent des résultats qui sont très loin des valeurs exactes qui devraient être obtenues.

Il y a aussi une raison pratique pour la troisième question. Comme les modèles mathématiques sont souvent construits à partir d'expériences en laboratoire, les équations différentielles utilisées pour la modélisation sont bien souvent des approximations des équations différentielles qui gouvernent vraiment les phénomènes observés. On veut donc que deux équations différentielles qui sont presque identiques aient des solutions qui soient presque identiques.

On dit qu'une équation différentielle avec une condition initiale, comme en (8.8.1), est **bien-posée** si la solution existe et est unique, et si une petite perturbation de (8.8.1) entraîne seulement un petit changement de la solution de (8.8.1).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que (8.8.1) soit bien posée.

Théorème 8.8.1

Soit

$$R = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_f \text{ et } -\infty < y < \infty\}.$$

Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, alors (8.8.1) est bien posé.

La méthode numérique que nous allons introduire dans le reste de cette section n'est pas très efficace mais elle est simple et permet d'illustrer clairement les difficultés que l'on retrouve lors de la résolution numérique d'équations différentielles. À partir de maintenant, on suppose que (8.8.1) est bien posée.

La procédure générale pour **résoudre numériquement** une équation différentielle comme (8.8.1) est la suivante :

1. Choisir un entier positif N .
2. Choisir $N + 1$ **noeuds** $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = x_f$. Pour les méthodes simples comme la méthode d'Euler que l'on verra ci-dessous, on utilise la même distance entre les noeuds x_{i-1} et x_i pour $i = 1, 2, \dots, N$.
3. On trouve une approximation w_i de $y_i = y(x_i)$ for $i = 1, 2, \dots, N$.
4. On utilise une interpolation linéaire entre les points (x_i, w_i) pour estimer les valeurs $y(x)$ de la solution de (8.8.1) aux autres points x de l'intervalle $[x_0, x_f]$ (voir figure 8.18).

La **méthode d'Euler** est une méthode simple pour résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre un avec une condition initiale ; c'est-à-dire, des problèmes de la forme (8.8.1).

Méthode 8.8.2 (Méthode d'Euler)

Soit y , la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale comme on retrouve en (8.8.1)

La méthode d'Euler se résume ainsi : Soit $h = (x_f - x_0)/N$ et $x_i = x_0 + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$. L'approximation w_i de $y(x_i)$ provient de la solution de l'équation aux différences finies

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h f(x_i, w_i) \\ w_0 &= y_0 \end{aligned} \tag{8.8.2}$$

pour $i = 1, 2, \dots, N$.

Remarque 8.8.3

On peut justifier la méthode d'Euler de la façon suivante. Grâce au théorème de Taylor, on a

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2$$

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Si on substitue $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, $y_i = y(x_i)$ et $h = x_{i+1} - x_i$ dans cette équation, on obtient

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Finalement, si on suppose que $y''(\xi_i)h^2/2$ est beaucoup plus petit que $y_i + f(x_i, y_i)h$ pour tout i (i.e. si h est assez petit), on obtient

$$y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i)h$$

qui nous permet d'écrire (8.8.2)



Remarque 8.8.4

Pour évaluer la qualité d'une méthode numérique, on utilise souvent **l'erreur absolue**, qui est la différence $|y_i - w_i|$, et **l'erreur relative**, qui est $|y_i - w_i|/|y_i|$.

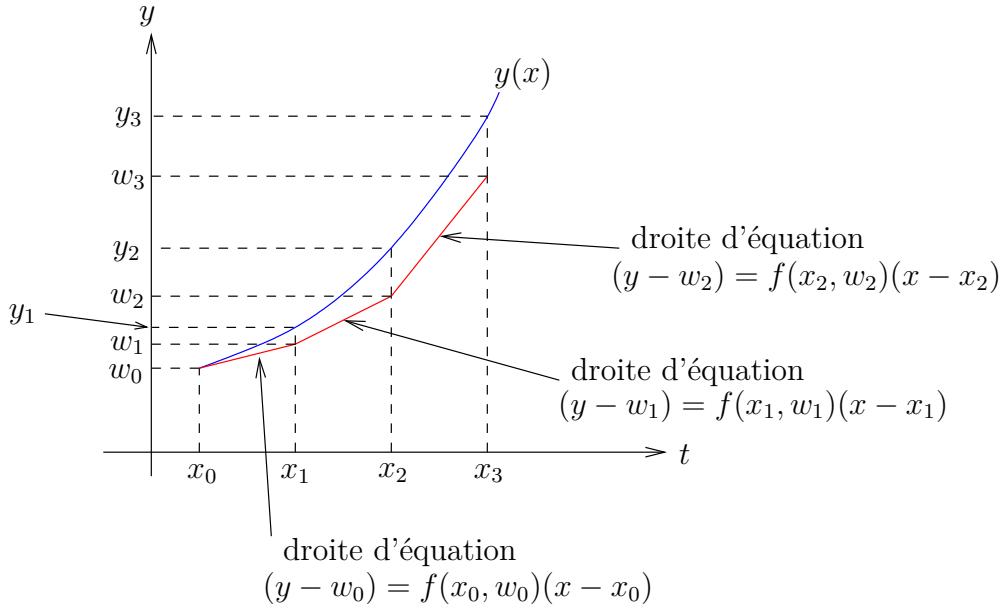


FIGURE 8.18 – Le graphe d'une solution possible y de (8.8.1) et de la solution calculée avec la méthode d'Euler.

L'erreur relative donne une meilleure idée de l'erreur des approximations w_i car elle donne le pourcentage d'erreur (après multiplication par 100) par rapport à la valeur exacte y_i . En effet, une erreur absolue de 0.1 est énorme si les valeurs cherchées y_i sont plus petites que 1 en valeurs absolues. Par contre, une erreur absolue de 0.1 est minuscule si les valeurs cherchées sont plus grandes que 10^7 en valeurs absolues. ♠

Exemple 8.8.5

Utiliser la méthode d'Euler avec $N = 5$ pour estimer la solution y de

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0.2xy \quad , \quad 1 \leq x \leq 1.5 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \tag{8.8.3}$$

On a $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$, $y_0 = 1$ et $f(x, y) = 0.2xy$. Ainsi $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + i h = 1 + 0.1 i$ et les approximations w_i de $y_i \equiv y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.02(1 + 0.1 i)w_i \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, 4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + hf(x_0, w_0) = w_0 + 0.02w_0 = 1.02 \\ w_2 &= w_1 + hf(x_1, w_1) = w_1 + 0.02(1 + 0.1)w_1 = 1.04244 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant :

i	x_i	w_i	y_i	erreur absolue	erreur relative
0	1.00	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.10	1.02	1.0212220516	0.0012220516	0.0011966561
2	1.20	1.04244	1.0449823549	0.0025423549	0.0024329166
3	1.30	1.06745856	1.0714362091	0.0039776491	0.0037124461
4	1.40	1.0952124826	1.100759064	0.0055465814	0.0050388696
5	1.50	1.1258784321	1.1331484531	0.007270021	0.006415771

Comme l'équation différentielle (8.8.3) est séparable, on peut trouver la solution exacte de (8.8.3). On trouve $y(x) = e^{0.1x^2 - 0.1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$ qui ont été utilisées pour calculer l'erreur absolue et l'erreur relative. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ 0.64 %. C'est bon.



Exemple 8.8.6

Utiliser la méthode d'Euler avec $N = 5$ pour estimer la solution y de

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2xy \quad , \quad 1 \leq x \leq 1.5 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \tag{8.8.4}$$

Comme à l'exemple précédent, on a $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$ et $y_0 = 1$. Cependant, $f(x, y) = 2xy$. Ainsi $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + i h = 1 + 0.1i$ et les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.2(1 + 0.1i)w_i \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, 4$. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant :

i	x_i	w_i	y_i	erreur absolue	erreur relative
0	1.0	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.1	1.2000	1.23367806	0.03367806	0.0272989048
2	1.2	1.4640	1.5527072185	0.0887072185	0.0571306795
3	1.3	1.81536	1.9937155332	0.1783555332	0.0894588673
4	1.4	2.2873536	2.6116964734	0.3243428734	0.1241885789
5	1.5	2.927812608	3.4903429575	0.5625303495	0.1611676435

Comme l'équation différentielle (8.8.4) est séparable, on peut trouver la solution exacte de (8.8.4). On trouve $y(x) = e^{x^2 - 1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ 16.12 %. Ce n'est pas bon. Comme on peut constater à partir de l'erreur relative, la méthode d'Euler ne donne pas de bonnes approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 5$.



Remarque 8.8.7

On pourrait penser qu'en prenant h assez petit on peut obtenir la précision désirée mais ce

n'est pas le cas. En fait, l'erreur absolue satisfait

$$|w_i - y_i| \approx \frac{1}{L} \left(\frac{Mh}{2} + \frac{\delta}{h} \right) \left(e^{L(x_i - x_0)} - 1 \right)$$

où L et M sont des constantes qui dépendantes de la fonction f et δ est la précision de l'ordinateur utilisé pour les calculs. Ainsi, si h tend vers 0, l'erreur absolue tend vers $+\infty$ due au terme δ/h



Exemple 8.8.8

On a obtenu l'équation différentielle suivante à l'exemple 8.6.6.

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t) \quad , \quad q(0) = 0 ,$$

où $q(t)$ est la quantité de sel en kilogrammes dans un mélange au temps t en minutes. Comme cette équation n'est pas séparable, on ne peut pas la résoudre exactement. C'est une équation différentielle linéaire. Ceux qui poursuivrons leurs études des mathématiques verront comment on peut résoudre cet équation. Pour l'instant, nous allons utiliser la méthode d'Euler pour estimer la solution sur l'intervalle $[0, 10]$.

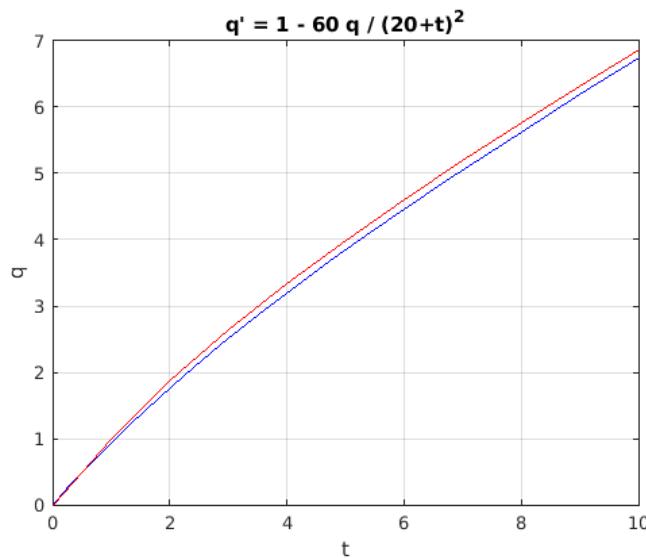
L'équation différentielle est de la forme $q'(t) = f(t, q(t))$ avec $f(t, q) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q$. Si on choisit $N = 10$, on a $x_0 = 0$, $x_{10} = 10$, $h = (x_{10} - x_0)/10 = 1$, et $x_i = x_0 + h i = 1 + 0.1 i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 \\ w_{i+1} &= w_i + h f(x_i, w_i) = w_i + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+t_i)^2} w_i \right) \end{aligned}$$

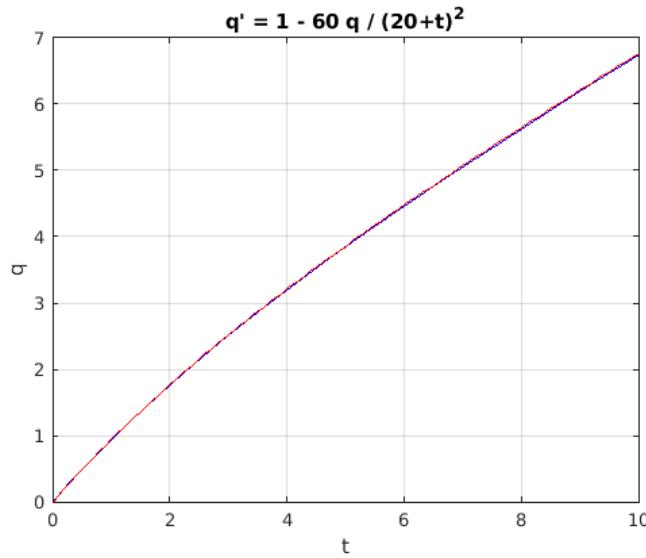
pour $i = 0, 1, \dots, 9$. Les premières valeurs de w_i sont données ci-dessous.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + h f(x_0, w_0) = 0 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0)^2} \times 0 \right) = 1 \\ w_2 &= w_1 + h f(x_1, w_1) = 0.1 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0.1)^2} \times 0.1 \right) \approx 1.863945578 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

On retrouve dans la figure suivante le graphe de la solution exacte en bleu ainsi que le graphe de l'approximation de la solution en rouge donnée par la méthode d'Euler dans le cas où $N = 10$.



On a répété les calculs avec $N = 100$ pour obtenir une seconde approximation de la solution avec la méthode d'Euler. On peut voir dans la figure suivante que l'approximation est très bonne. La méthode d'Euler est assez bonne quand la solution varie lentement.



8.9 Exercices

Question 8.1

Répondre à chacune des questions suivantes de deux façons : (1) en calculant une intégrale définie et (2) en utilisant le Théorème fondamental du calcul différentiel.

- a) Si $L(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dL}{dt} = 6.48e^{-0.09t}$ avec $L(0) = 5$, quelle est la variation de L entre $t = 1$ et $t = 5$?
- b) Si $P(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = 5.0e^{-2.0t}$ avec $P(0) = 2$, quelle est la variation de P entre $t = 5$ et $t = 10$?
- c) Si $A(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dA}{dt} = 523.8(t - 1981)^2$ avec $A(1981) = 13,400$, quelle est la variation de A entre $t = 1985$ et $t = 1987$?

Question 8.2

Expliquez pourquoi, à la question 1, la solution ne dépend pas de la condition initiale.

Question 8.3 

Un été chaud et humide provoque une invasion de moustiques dans le voisinage immédiat d'un lac. Le nombre moyen de moustiques par km^2 croît à un taux de $2200 + 10e^{0.8t}$ moustiques par jour où t est le nombre de jours depuis le début des mesures. Quel a été l'augmentation du nombre de moustiques par km^2 entre le 5^e et le 9^e jours ?

Question 8.4

Quelle est le déplacement entre 1 et 5 secondes d'une pierre qui tombe si la position $p(t)$ en mètres au temps t en secondes est donnée par l'équation différentielle $\frac{dp}{dt} = -9.8t - 5.0$.

Question 8.5 

Un guépard se trouve dans une savane. Il repère un zèbre qui se trouve à 200 m de lui et part à la course vers le zèbre. Si la vitesse du guépard est $v(t) = e^t$ m/s après t secondes,

- a) Tracez le graphe de la vitesse v du guépard en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du guépard en fonction du temps t .
- c) Trouvez la solution de cette équation différentielle.
- d) Tracez le graphe de la position du guépard en fonction du temps.
- e) Combien de temps faudra-t-il au guépard pour atteindre le zèbre si celui-ci demeure immobile ?

Notez que c'est un guépard végétarien qui veut seulement jouer avec le zèbre, donc le zèbre n'en a pas peur. La fonction exponentiel n'est pas un bon modèle pour la vitesse du guépard. Il est vrai que la vitesse du guépard augmente très rapidement au départ. Cependant, le guépard atteint sa vitesse maximale très rapidement. Pouvez-vous penser à une autre fonction qui pourrait décrire plus précisément la vitesse du guépard ?

Question 8.6 

Un escargot traverse un trottoir de 1 mètre de large. Sa vitesse après t min. est de $v(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$ m/min.

- a) Tracez un graphe de la vitesse en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle pour la position $x(t)$ de l'escargot en fonction du temps t .

c) Trouvez la solution de l'équation différentielle que vous avez donné en (b). On peut supposer que la position initial de l'escargot est $x(0) = 0$. L'escargot est au bord du trottoir.

d) Dessinez le graphe de la position en fonction du temps.

e) Combien de temps va prendre l'escargot pour traverser le trottoir.

Question 8.7

Pour chacune des équations différentielles suivantes, utilisez l'intégrale indéfinie pour trouver la solution particulière qui satisfait la condition initiale donnée, tracez le graphe de cette solution ainsi que celui de son taux de variation instantanée.

- | | |
|---|--|
| a) $\frac{dp}{dt} = 5t^2 + \frac{5}{t^2}$ avec $p(1) = 12$ | b) $\frac{dM}{dt} = t^3 + t^{-3}$ avec $M(2) = 8$ |
| c) $\frac{dp}{dt} = -0.25t^3$ avec $p(0) = 5$ | d) $\frac{dM}{dt} = 2t^{-1/2}$ avec $M(0) = 5$ |

Question 8.8

La fonction $L(t)$ est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 t(365 - t) .$$

Si $L(100) = 1000$, quelle sera la valeur de $L(200)$.

Question 8.9

La fonction $L(t)$ est déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 T(t) \quad \text{où} \quad T(t) = 20 + 10 \cos\left(\frac{2\pi(t - 90)}{182.5}\right) .$$

- a)** Tracez le graphe de $T(t)$ en fonction du temps pour deux périodes.
- b)** Si $L(0) = 0.1$, quelle sera la valeur de $L(30)$?
- c)** Si $L(150) = 0.1$, quelle sera la valeur de $L(300)$?

Question 8.10

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes pour la condition initiale qui est donnée. Décrire ce qui arrive quand $t \rightarrow \infty$ dans chacun des cas. Il pourrait être utile de tracer le graphe de la solution.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{dP}{dt}(t) = \frac{5}{1+2t}$ avec $P(0) = 5$ | b) $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{(1+t)^2}$ avec $P(0) = 0$ |
|---|---|

Question 8.11

La fonction $W(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dW}{dt} = (4t - t^2)e^{-3t} , \quad W(0) = 0 .$$

- a)** Résoudre cette équation différentielle et déterminé la valeur de $W(2)$.
- b)** À quel moment W augmente-t-elle le plus rapidement ?

- c) Quelle serait la valeur de $W(2)$ si le taux de croissance de W était constant et égale au taux maximal calculé en (a). On assume toujours que la condition initiale est $W(0) = 0$.

Question 8.12

La fonction $M(t)$ est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dM}{dt} = (1 + t^2)e^{-2t}, \quad M(0) = 1.$$

- a) Résoudre cette équation différentielle et déterminer la valeur de $M(1)$.
 b) Quelle est le taux de croissance maximal ?
 c) Si le taux de croissance était constant et égal à la valeur maximale trouvée en (b), quelle serait la valeur de $M(1)$?

Question 8.13

Une expérience réalisée par une sonde spatial lors de son atterrissage sur une planète, et lorsqu'elle se trouve à une distance de 100 m du sol, est de lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s par rapport au sol. L'attraction dû à la gravité de cette planète est $g = -10.5 \text{ m/s}^2$. Le signe négatif indique que les objets sont attirés vers la planète. On suppose que la direction positive du déplacement est vers le haut.

- a) Trouvez la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.
 b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
 c) Combien de temps s'écoule avant que l'objet revienne à une distance de 100 m de la planète après avoir été lancé. Quelle est sa vitesse à ce moment ?
 d) Combien de temps s'écoule avant que l'objet frappe le sol (où la sonde qui vient de se poser) ? Quelle est sa vitesse à ce moment ?
 e) Dessinez le graphe de la position et de la vitesse en fonction du temps.

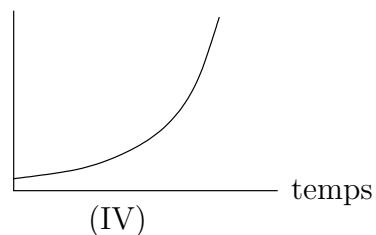
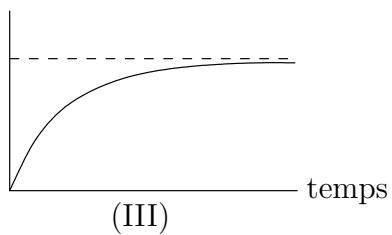
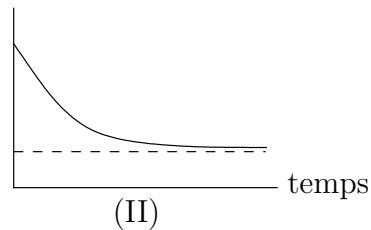
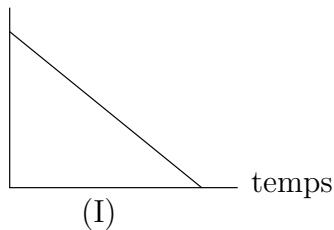
Question 8.14

Une cellule meure lorsque la concentration d'une certaine toxine dans la cellule dépasse 30 $\mu\text{mol/l}$. Est-ce qu'une cellule peut survivre si la concentration initiale de la toxine dans la cellule est de 10 $\mu\text{mol/l}$ et la concentration augmente à un taux de $50e^{-2t} \mu\text{mol/l/s}$?

Question 8.15

Associez chacun des graphiques ci-dessous à une des descriptions suivantes et donnez un équation différentielle possible pour chacun des cas.

- a) La température d'un verre d'eau glacé que l'on a laissé sur le comptoir.
 b) Le montant dans un compte avec intérêt composé de façon continue dans lequel on a déposé 100 dollars.
 c) La vitesse d'une voiture qui a une décélération constante.
 d) La température d'une pièce de métal chaude qu'on laisse refroidir.

**Question 8.16**

Montrez que $x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $x'(t) = 1 + 2x(t)$ et satisfait la condition initiale $x(0) = 1$.

Question 8.17

On considère l'équation différentielle $g'(t) = g^2(t) + 2t$. Est ce que la solution g de cette équation est croissante ou décroissante à $t = 0$ si $g(0) = 1$?

Question 8.18

Montrez que $b(t) = \ln(t)$ est une solution de l'équation différentielle $b'(t) = e^{-b(t)}$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante ? Justifiez votre réponse.

Question 8.19

Montrez que $b(t) = 3e^{2t} - 0.5$ satisfait l'équation différentielle $b'(t) = 1 + 2b(t)$ et la condition initiale $b(0) = 2.5$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante ? Justifiez votre réponse.

Question 8.20

Montrez que $b(t) = e^{-t}$ satisfait l'équation différentielle $b'(t) = -b(t)$ et la condition initiale $b(0) = 1$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction décroissante ? Justifiez votre réponse.

Question 8.21

Montrez que $b(t) = 5 + 20e^{-2t}$ est une solution de l'équation différentielle $b'(t) = 10 - 2b(t)$ avec la condition initiale $b(0) = 25$. Est-ce que la solution est croissante ou décroissante ? Justifiez votre réponse précédente de deux façons, un argument qui utilise la formule pour b et un argument qui ne l'utilise pas.

Question 8.22

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation.

- a) $y'' - y = 0$
 b) $x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0$
 c) $x^2 y'' - 6y = 0$

- I) $y = e^x$
 II) $y = x^3$
 III) $y = e^{-x}$
 IV) $y = x^{-2}$

Question 8.23

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation. k est une constante arbitraire.

- | | |
|--|-------------------|
| a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ | I) $y = kx$ |
| b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}$ | II) $y = x^k$ |
| c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x \ln x}$ | III) $y = e^{kx}$ |

Question 8.24

La demi-vie du Césium 137 est 30 ans. Le taux de décomposition du Césium 137 est proportionnel à la quantité de Césium 137 présent. Si au départ on a 50 mg, combien en restera-t-il au temps t ? Combien de Césium 137 reste-t-il après 50 ans?

Question 8.25

Résoudre les problèmes aux valeurs initiales suivants à l'aide de la méthode de séparation des variables.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{dy}{dt} = 2y$, $y(0) = 3$ | b) $\frac{dx}{dt} = 3tx^2$, $x(1) = -0.4$ |
| c) $\frac{dh}{dt} = 1000 - h$, $h(0) = 500$ | d) $\frac{dg}{dx} = \frac{5}{1+2g}$, $g(0) = 0$ |
| e) $\frac{dq}{dt} = tq^2 \sin(t^2)$, $q(0) = 1$ | f) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+x^2}$, $y(0) = 2$ |
| g) $\frac{dy}{dx} = (y-1)(x+2)$, $y(1) = 0$ | |

Question 8.26

On considère l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = 2x + \frac{1}{x}.$$

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- b) Si $y = x^2$, trouvez une équation différentielle satisfaite par y .
- c) Résolvez l'équation différentielle en y que vous avez trouvée en (b).
- d) Montrez que l'on peut obtenir la solution que vous avez trouvée en (a) à partir de la solution que vous avez trouvée en (c).

Question 8.27

La loi de Fick dit que la diffusion d'une solution au travers de la membrane d'une cellule

est décrite par l'équation différentielle

$$c'(t) = \frac{kA}{V} (C - c(t))$$

où $c(t)$ est la concentration de la solution à l'intérieur de la cellule au temps t , A est l'aire de la surface représentée par la membrane de la cellule, V est le volume de la cellule, C est la concentration de la solution à l'extérieur de la cellule (que l'on suppose constante), et k est une constante de proportionnalité. Trouvez $c(t)$ si la concentration initiale de la solution dans la cellule est de c_0 .

Question 8.28

Un médicament est administré de façon continue à un patient à un taux de r mg/hr. Ce médicament est éliminé de l'organisme à un taux qui est proportionnel à la quantité du médicament présent dans l'organisme. Supposons que cette constante de proportionnalité soit α .

- a) Donner et résoudre une équation différentielle qui décrit la quantité $Q(t)$ du médicament dans l'organisme en milligrammes par rapport au temps en heures. Votre solution va dépendre de r et α .
- b) Dessiner le graphe de $Q(t)$. Quelle est la valeur, Q_∞ , de $Q(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?
- c) Qu'arrive-t-il à Q_∞ si on double r ?
- d) Qu'arrive-t-il à Q_∞ si on double α ?

Question 8.29

Résoudre le problème aux valeurs initiales $\frac{dy}{dt} = y^{1.1}$ avec $y(0) = 100$ à l'aide de la méthode de séparation des variables. Tracez le graphe de cette solution. Trouver les valeurs de t où la solution approche l'infini.

Question 8.30

On considère le problème aux valeurs initiales $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+x}$ avec $x(0) = 1$.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème ci-dessus. Vous ne serez pas capable d'exprimer x en fonction de t .
- b) Exprimez t en fonction de x et tracez le graphe de t en fonction de x pour $0 \leq x \leq 10$.
- c) Utilisez (b) pour tracer le graphe de x en fonction de t .

Question 8.31

On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$. Utilisez la substitution $y = 2x - 1$ pour réduire l'équation différentiel précédente en une équation différentiel plus simple. Utilisez cette dernière équation différentielle pour résoudre l'équation différentielle initiale $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$.

Question 8.32

Une tasse de café dont la température est de 60°C est laissée dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 22°C .

- a) D'après la Loi de Newton pour la chaleur, quelle est l'équation différentielle satisfait par la température $T(t)$ du café au temps t ?

- b) Résoudre l'équation différentielle que vous avez trouvez en (a).
 c) Si la température du café est de 40°C après 20 minutes, quelle est la température du café après une heure ?

Question 8.33

Une panne d'électricité se produit au milieu de janvier. Votre maison possède seulement un système de chauffage électrique. La panne débute à une heure de l'après-midi. À ce moment, la température à l'intérieur de votre maison est de 20°C . À dix heures du soir, il n'y a toujours pas d'électricité et la température à l'intérieur de votre maison est de 15°C . Vous notez que la température à l'extérieur est de -12°C .

- a) Si on suppose que la température T à l'intérieur de votre maison satisfait la loi de la chaleur de Newton, donnez l'équation différentielle satisfaite par cette température. Quelle hypothèse devez-vous faire sur la température extérieure ?
 b) Résoudre l'équation différentielle en (a) et déterminez la température dans la maison à sept heures le matin suivant si la panne n'est toujours pas terminée.
 c) Étant donné l'hypothèse que vous avez faite en (a), est-ce que la température dans votre maison sera plus élevée ou plus basse que la valeur que vous avez trouvé en (b) ?

Question 8.34

Si $b(t)$ est le nombre d'individus d'une population et $\lambda(t) = 1/(1+t)$ est le taux de reproduction par individu au temps t (le taux de reproduction n'est pas constant), alors

$$\frac{db}{dt} = \lambda(t) b$$

est une équation différentielle qui décrit le nombre d'individus.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
 b) Tracez le graphe de la solution avec la condition initial $b(0) = 10^6$.

Question 8.35

La **Lois de Torricelli** pour l'écoulement d'un fluide (non-visqueux) hors d'un cylindre dont le fond est percé dit que le taux auquel le fluide s'échappe du cylindre est proportionnel à la racine carrée de la profondeur du fluide dans le cylindre. Mathématiquement, si $y(t)$ est la profondeur en centimètres du fluide au temps t en secondes, on a que

$$\frac{dy}{dt} = c\sqrt{y}$$

où c est une constante. Si le fluide est de l'eau, on a $c = -2.0 \text{ cm}^{1/2}/\text{s}$. On assume pour le reste de la question que le fluide est de l'eau.

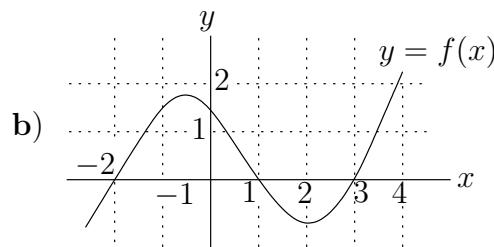
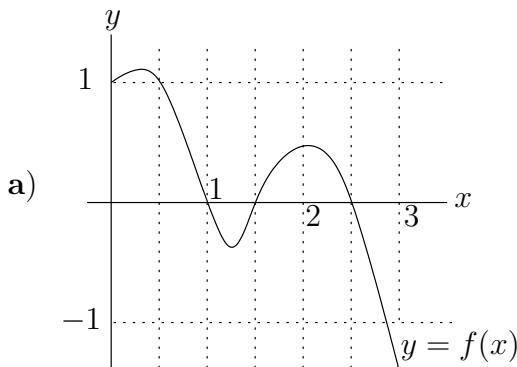
- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
 b) Tracez le graphe de la solution avec la condition initial $y(0) = 16$ (on a initialement 16 cm d'eau dans le cylindre).
 c) Déterminez le temps nécessaire pour vider le cylindre. (i.e. Pour quelle valeur de t a-t-on $y(t) = 0$?)

d) Quelle serait la profondeur de l'eau dans le cylindre après le nombre de secondes que vous avez trouvé en (c) si la loi qui gouverne l'écoulement de l'eau était

$$\frac{dy}{dt} = -2y .$$

Question 8.36

Pour chacun des graphes de f donnés ci-dessous, tracez le portrait de phases de l'équation différentielle $x' = f(x)$. Déterminez la stabilité des points d'équilibre.



Question 8.37

Trouvez les points d'équilibre de chacune des équations différentielles suivantes et déterminez si possible leur stabilité à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.

a) $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2 \quad$ b) $\frac{dy}{dt} = \alpha e^{\beta y} - 1$ avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

Question 8.38

Pour chacune des équations différentielles :

I: Trouvez les points d'équilibres et déterminez leur stabilité.

II: Tracez le portrait de phase.

III: Trouvez la solution qui satisfait la condition initiale donnée.

a) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 4x + 3$ et $x(0) = 5 \quad$ b) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 7x + 10$ et $x(0) = 7$

Question 8.39

Une équation différentielle de la forme $x' = f(x)$ possède le portrait de phases suivant :



Les points 2, 4 et 6 sont trois points d'équilibre de l'équation différentielle. Tracez un graphe possible pour la solution x qui possède la condition initiale $x_0 = 5$.

Question 8.40

On considère l'équation différentielle autonome $\frac{dy}{dt} = y(y^2 - 6y + 5)$.

- a) Trouver les trois points d'équilibre.
 b) Déterminer la stabilité des points d'équilibre en (a) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.
 c) Dessiner le portrait de phase du système. Soyez aussi précis que possible.
 d) Sans résoudre l'équation différentielle, tracer un graphe possible pour la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 4$.

Question 8.41

Déterminez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$. Tracez le portrait de phases de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$ pour $-\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

Question 8.42

Trouvez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x^2$. Tracez le graphe de $f(x) = x^2$ et le portrait de phases de ce système. Déterminez la stabilité des points d'équilibre. Est-ce que cela contredit le théorème de stabilité des points d'équilibre ?

Question 8.43

Est-il possible d'avoir un portrait de phases avec deux points d'équilibre asymptotiquement stables qui sont côte à côte ? Justifiez votre réponse à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Question 8.44

En chimie, une **équation de réaction-diffusion** est une équation différentielle qui décrit la concentration d'un produit chimique sous l'effet d'une réaction chimique et de la diffusion. Un exemple simple d'une telle équation est

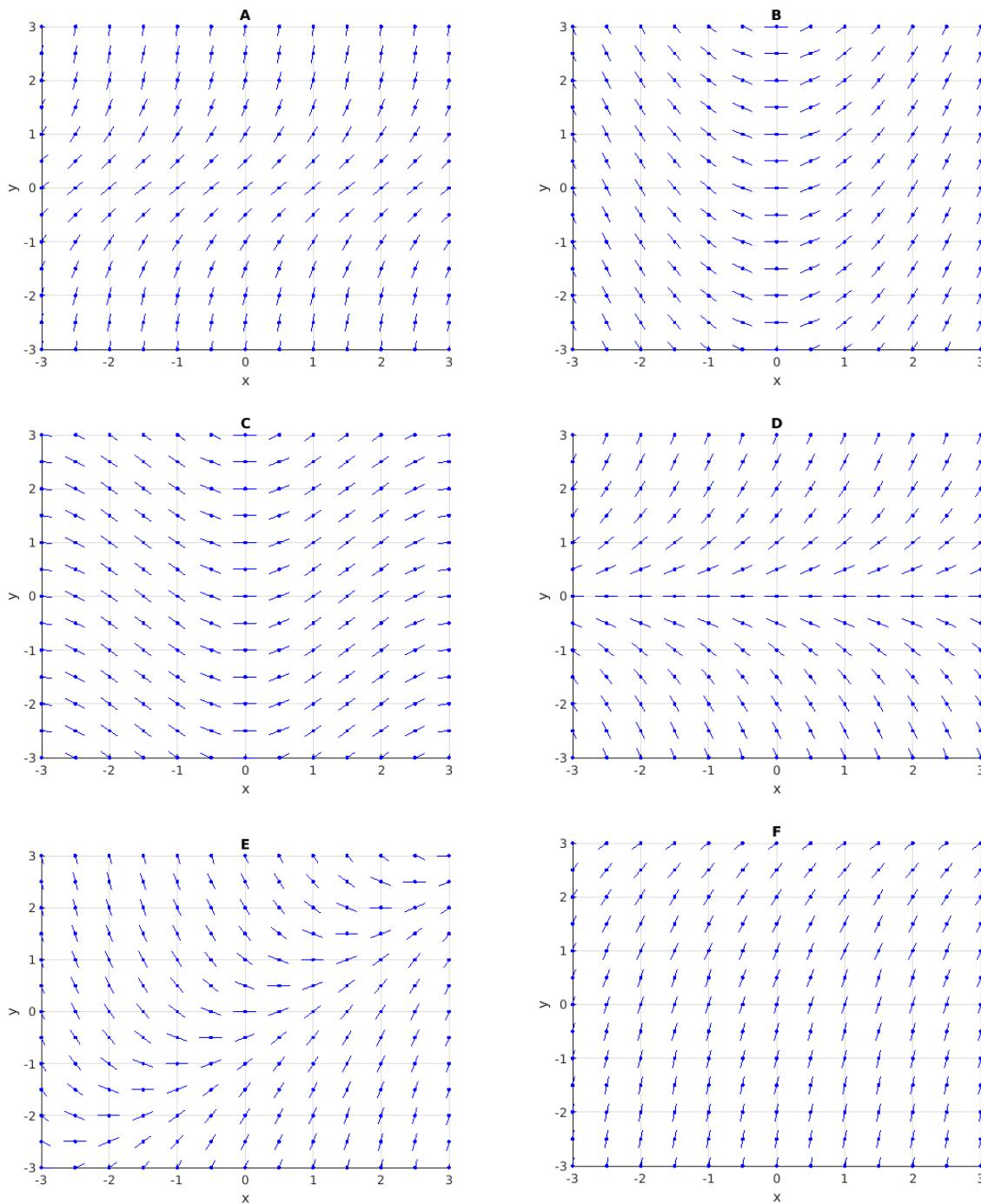
$$\frac{dC}{dt} = \beta(\gamma - C) + \frac{C}{2+C}$$

où le terme $\beta(\gamma - C)$ représente la diffusion et le terme $\frac{C}{2+C}$ représente la réaction chimique. les unités de la constante β sont les m^{-1} et les unités de la constante γ sont les mol/l . Si $\beta = 1$ et $\gamma = 5$, trouvez les points d'équilibre et déterminez leur stabilité.

Question 8.45

Associez à chacune des équations différentielles suivantes un des champs de pentes ci-dessous.

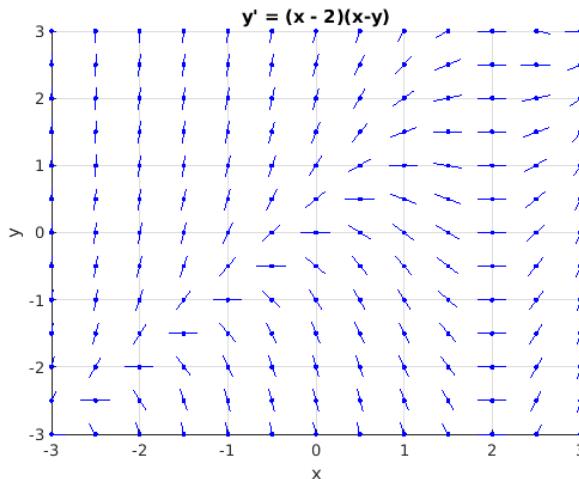
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $y' = \sin(x)$ | b) $y' = y$ | c) $y' = x$ |
| d) $y' = 4 - y$ | e) $y' = 1 + y^2$ | f) $y' = x - y$ |

**Question 8.46**

Le champs de pentes de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = (x - 2)(x - y)$$

est donné dans la figure ci-dessous.



- a) Tracez (de façon aussi précise que possible) le graphe de la solution qui passe par le point $(0, 0)$.
- b) Pour quelle valeur de x la solution particulière qui passe par le point $(0, 0)$ a-t-elle un minimum local ? Un maximum local ? Justifiez vos réponses.
- c) Pour quelles régions du champs de pentes a-t-on que la pente est positive. Justifiez votre réponse en utilisant seulement l'équation différentielle ; sans utiliser le champ de pentes.

Question 8.47

On considère l'équation différentielle $y' = -y/x$.

- a) Dessinez le champ de pentes de cet équation différentielle.
- b) Dessinez sur la même figure que celle pour votre champ de pentes plusieurs solutions de cette équation différentielle.
- c) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle.
- d) Que ce passe-t-il lorsque $x = 0$?

Question 8.48

L'équation différentielle suivante décrit la concentration $C(t)$ d'un produit chimique au temps t dans une cellule.

$$\frac{dC}{dt} = \beta(\Gamma - C) + 0.5C . \quad (8.9.1)$$

Le terme $0.5C$ représente la réaction en réponse à un facteur externe (la cellule fabrique le produit chimique) et le terme $\beta(\Gamma - C)$ représente la diffusion au travers de la membrane de la cellule. C'est un exemple d'une **équation de réaction diffusion**.

Répondez aux questions suivantes pour $\beta = 1.0 \text{ min}^{-1}$ et $\Gamma = 5.0 \text{ mol/l}$.

- a) Quelles sont les points d'équilibre ?
- b) Utilisez le théorème sur la stabilité des points d'équilibre pour déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- c) Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- d) Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.

e) Quelles seraient les points d'équilibre s'il n'y avait pas le terme de réaction (i.e. $0.5C$) dans l'équation différentielle ci-dessus. ?

Question 8.49

Un troupeau de gnous (de la famille des antilopes) habite une réserve faunique. La population initiale est de 1000 gnous. Après un an, la population est de 1100 gnous. La population satisfait le modèle logistique de croissance avec une capacité optimale pour le milieu de 1800 gnous. Combien de temps faut-il pour que la population atteigne 1500 gnous ?

Question 8.50

Pour une certaine population, le nombre d'individus $N(t)$ en unités de cent individus au temps t satisfait

$$\frac{dN}{dt} = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N. \quad (8.9.2)$$

- a) Quelles sont les points d'équilibre ?
- b) Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- c) Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- d) Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.
- e) Déterminez le seuil de la population pour que celle-ci augmente ?

Question 8.51

Le modèle suivant est appelé le modèle de métapopulation de Levins. Pour étudier une population animale habitant un territoire, on divise le territoire en petites sections. Soit p la fraction des sections qui sont habitées et d la fractions des sections qui sont détruites (e.g. par une développeur immobilier). On suppose que les sections détruites ne sont pas habitées (et habitables). La fraction $1 - p$ est donc la fraction des sections qui ne sont pas habitées et $1 - p - d$ est la fraction des sections qui ne sont pas habitées mais habitables.

La fraction de sections habitées est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-d-p) - mp$$

où $m = 1$ est le taux auquel les animaux d'une section habitée quittent cette section et $c = 2$ est le taux auquel les animaux s'installent dans une section inhabitée et habitable.

Pour que le modèle soit consistant, on doit avoir $0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq d \leq 1$. De plus, on doit avoir $1 - p - d \geq 0$. Donc, on doit avoir en fait $0 \leq p \leq 1 - d$.

- a) Trouvez les deux points d'équilibre de l'équation différentielle. Un des points d'équilibre va dépendre du paramètre d . Pour quelles valeurs de d ce point d'équilibre a-t-il un sens biologique ?
- b) Tracez le graphe de la fonction qui génère l'équation différentielle et tracez le portrait de phases lorsque $d = 1/4$ et $d = 3/4$.
- c) Utilisez le test de la dérivée pour déterminer la stabilité des deux points d'équilibres. La stabilité va dépendre de d .

d) Est-ce que la population va survivre si $1/4$ des sections (i.e. $d = 1/4$) sont détruites ? Si $3/4$ des sections sont détruites ?

Question 8.52 🔔

La concentration de sel dans un réservoir de 1000 litres d'eau salée est de 0.025 kg par litre. De l'eau salée dont la concentration de sel est de 0.01 kg par litre est ajoutée au réservoir à raison de 10 litres par minute. De plus, 10 litres d'eau salée par minute s'échappe du réservoir. Si on suppose que le contenu du réservoir est bien mélangé, combien de temps s'écoule-t-il avant que l'on atteigne une concentration de 0.02 kg de sel par litre ?

Question 8.53 🔔

Un réservoir contient 1000 litres d'eau pure. Une saumure contenant 0.1 kg de sel par litre d'eau est versée dans le réservoir au taux de 5 litres par minute. Une saumure contenant 0.05 kg de sel par litre est aussi versée dans le réservoir au taux de 15 litres par minute. En supposant que le contenu du réservoir est toujours bien mélangé et que le réservoir perd 20 litres par minutes, quelle est la quantité de sel dans le réservoir après t minutes ? quelle est la concentration de sel dans le réservoir après t minutes ?

Question 8.54 🌲

On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = ax - x^2$ où a est un paramètre.

- a) Trouvez les points d'équilibre de cette équation différentielle. Un des points d'équilibre devrait dépendre de a .
- b) Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de a pour a au voisinage de l'origine. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stables et une ligne hachurée pour les points d'équilibre instables.
- c) Que ce passe-t-il au voisinage de l'origine ? Ce genre de phénomène est appelé bifurcation. Dans le cas présent, on parle de bifurcation transcritique.

Question 8.55 🌲

On considère l'équation logistique

$$\frac{db}{dt} = b(1 - b) - hb \quad (8.9.3)$$

pour une population animale où h est la fraction de la population qui a été récolté.

- a) Trouvez les points d'équilibre de (8.9.3). Un des points d'équilibre va dépendre de h .
- b) Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de h pour $0 \leq h \leq 2$. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stable et une ligne hachurée pour les point d'équilibre instable. Même s'ils n'ont pas de sens biologique, inclure les valeurs négative des points d'équilibre.
- c) Quelle type de bifurcation obtenez-vous ?

Question 8.56 👀

On considère l'équation différentielle $y'(x) = f(x)$ avec $y(0) = 0$. Expliquer pourquoi l'approximation de $y(x)$ donnée par la méthode d'Euler correspond à une somme de Reimann à

droite associée à l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$.

Question 8.57 

- a) Utiliser la méthode d'Euler pour trouver une approximation de la solution $y(t)$ de

$$\frac{dy}{dt} = 1/t$$

à $t = 2$. Commencer à $(t, y) = (1, 0)$ et utiliser 10 sous-intervalles.

- b) Trouver la valeur exacte de $y(t)$ à $t = 2$.

- c) Est-ce que votre approximation de $y(t)$ à $t = 2$ est plus petite ou plus grande que la valeur exacte à $t = 2$. Utiliser le champ de pentes (i.e. la courbure de la solution) pour expliquer la différence.

Question 8.58 

Utilisez la méthode d'Euler avec 10 sous-intervalles pour résoudre numériquement l'équation différentielle

$$y' = \frac{y+t}{t} \quad , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0$$

Est-ce que les valeurs données par la méthodes d'Euler sont des surestimations ou des sous-estimations de la solution y ?

Question 8.59 

- a) Utilisez la méthode d'Euler avec $h = 0.25$ pour trouver une approximation de $y(0.5)$ où y est la solution de l'équation différentielle $y' = 2xy$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

- b) Trouvez la solution exacte de l'équation différentielle $y' = 2xy$ avec $y(0) = 1$.

- c) Quelle est l'erreur de l'approximation de $y(0.5)$ trouvée en (a) ?



Dans ce chapitre, nous revoyons rapidement quelques notions de géométrie analytique que le lecteur devrait avoir étudié à l'école secondaire. Une grande partie des concepts présentés dans ce chapitre seront utilisés lors de l'étude des fonctions de plusieurs variables dans un prochain chapitre.

9.1 Vecteurs

Définition 9.1.1

On peut associer un **vecteur** \mathbf{p} à tout point $P = (p_1, p_2)$ du plan \mathbb{R}^2 ; c'est-à-dire, une flèche qui part de l'origine $(0, 0)$ dans le plan et se termine au point P . Puisque chaque vecteur \mathbf{p} est associé à un unique point $P = (p_1, p_2)$ et vice-versa, on écrit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

De même, on peut associer un **vecteur** \mathbf{p} à tout point $P = (p_1, p_2, p_3)$ de l'espace \mathbb{R}^3 ; c'est-à-dire, une flèche qui part de l'origine $(0, 0, 0)$ dans l'espace et se termine au point P . On écrit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Puisqu'il y a une bijection entre les vecteurs et les points, nous utiliserons à partir de maintenant la notation \mathbf{p} pour désigner un point ou un vecteur. Le contexte déterminera comment on doit interpréter \mathbf{p} .

Exemple 9.1.2

On retrouve à la figure 9.1 la représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$.



Définition 9.1.3

La **longueur (euclidienne)** du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est

$$\|\mathbf{p}\| \equiv \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} .$$

Cette définition découle du théorème de Pythagore qui affirme que le carré de l'hypoténuse d'un triangle droit est égal à la somme des carrés des deux côtés adjacents à l'angle droit. La justification de la formule pour la longueur d'un vecteur est donnée à la figure 9.2.

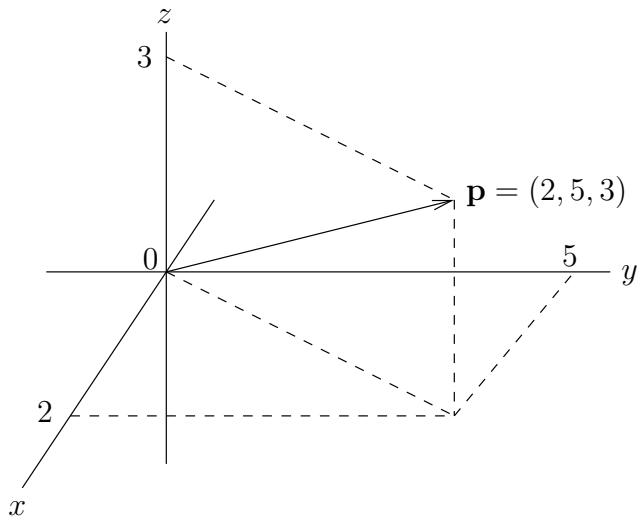


FIGURE 9.1 – Représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$ de l'espace

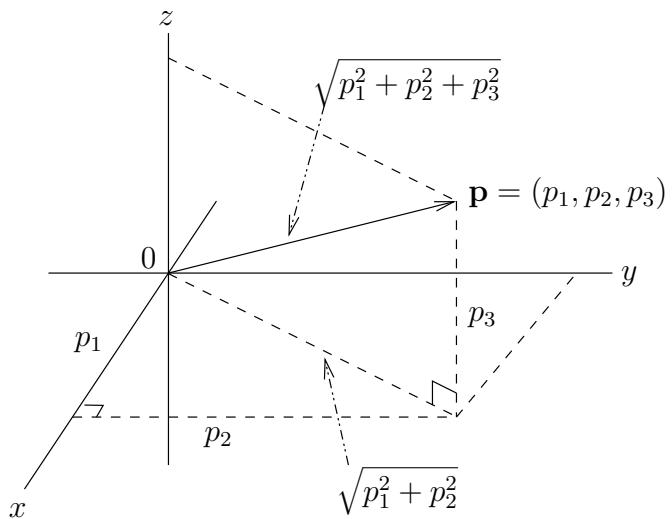


FIGURE 9.2 – Longueur du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$

9.2 Opérations sur les vecteurs

On peut définir des opérations algébriques sur les vecteurs comme ils en existent pour les nombres. De plus, on peut aussi définir des opérations sur les vecteurs qui ont une importante signification géométrique comme on verra dans les prochaines sections.

On commence par définir deux opérations algébriques sur les vecteurs : le produit d'un vecteur par un nombre réel et la somme de vecteurs.

Par la suite, nous définirons deux opérations sur les vecteurs, le produit scalaire et le produit vectoriel, qui jouent des rôles majeurs dans l'analyse géométrique.

9.2.1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition 9.2.1

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et ρ est un nombre réel. On définit le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} comme étant le vecteur

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2) = (\rho p_1, \rho p_2).$$

De même, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et ρ est un nombre réel. On définit le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} comme étant le vecteur

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2, p_3) = (\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3).$$

Le vecteur \mathbf{q} est de longueur $|\rho| \|\mathbf{p}\|$ et pointe dans la même direction que \mathbf{p} si $\rho > 0$ et dans la direction opposée à \mathbf{p} si $\rho < 0$.

Exemple 9.2.2

Le vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$, où \mathbf{p} est le vecteur donné à l'exemple 9.1.2, est dessiné à la figure 9.3. On a

$$\mathbf{q} = -2\mathbf{p} = -2(2, 5, 3) = (-4, -10, -6).$$



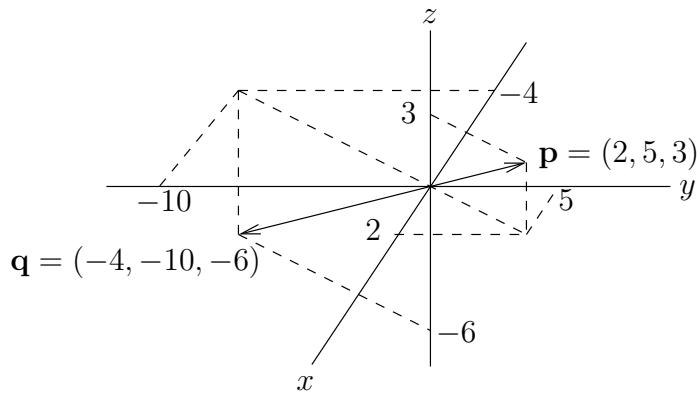


FIGURE 9.3 – Représentation du vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$ où le vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$ est représenté à la figure 9.1

9.2.2 Somme de vecteurs

Définition 9.2.3

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, on définit la **somme** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2).$$

De même, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, on définit la **somme** des deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3).$$

Exemple 9.2.4

Le résultat $\mathbf{r} = (5, 9, 4)$ de la somme des vecteurs $\mathbf{p} = (6, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (-1, 3, 2)$ est illustré à la figure 9.4.

On remarque que les trois vecteurs \mathbf{p} , \mathbf{q} et \mathbf{r} sont tous dans le même plan. On verra à la section 9.2.5 sur le produit vectoriel comment on peut facilement vérifier cette affirmation.



9.2.3 Notation vectorielle classique

Les vecteurs suivants sont fondamentaux en analyse vectorielle. Pour cette raison, ils ont leur propre notation.

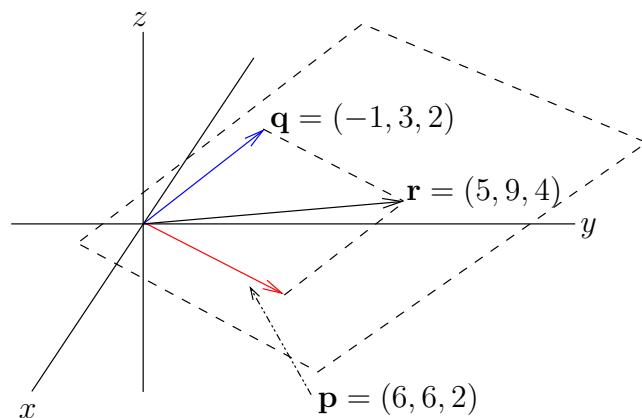
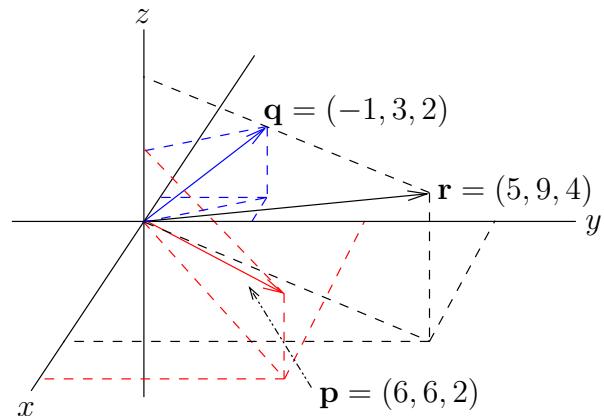


FIGURE 9.4 – Ces figures illustrent l'aspect géométrique de la somme des deux vecteurs donnés à l'exemple 9.2.4

Définition 9.2.5

Dans le plan, les vecteurs $\mathbf{i} = (1, 0)$ et $\mathbf{j} = (0, 1)$ sont appelés les **vecteurs canoniques**. On remarque que si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, alors $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}$.

De même, dans l'espace à trois dimensions, les **vecteurs canoniques** sont les vecteurs $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, on a $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$.

Dans les livres de mathématiques, on utilise aussi la notation \mathbf{e}_1 pour \mathbf{i} , \mathbf{e}_2 pour \mathbf{j} et \mathbf{e}_3 pour \mathbf{k} .

9.2.4 Produit scalaire 

Alors que le produit d'un vecteur par un nombre réel et l'addition de vecteurs ont un rôle principalement algébrique, le produit scalaire est l'une des deux opérations sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique ; l'autre opération étant le produit vectoriel.

Définition 9.2.6

On définit le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, comme étant le nombre réel

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 .$$

De même, on définit le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, comme étant le nombre réel

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 .$$

On utilise aussi la notation $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ pour le produit scalaire des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} quand cela ne cause pas de confusion.

Pourquoi définir un produit de deux vecteurs comme on vient de le faire ? N'aurions-nous pas pu définir le produit de deux vecteurs composante par composante comme on l'a fait pour la somme de deux vecteurs ? En fait, on aurait pu le faire mais cela n'a pas d'intérêt car il n'y a pas d'interprétations géométriques du produit de deux vecteurs composante par composante. Par contre, le produit scalaire défini ci-dessus a une interprétation géométrique très importante.

Définition 9.2.7

Le cosinus de l'angle entre les vecteurs non-nuls \mathbf{p} et \mathbf{q} (et ainsi l'angle entre ces vecteurs) est déterminé par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|}. \quad (9.2.1)$$

C'est cette définition qui fait le lien entre l'opération algébrique qu'est le produit scalaire de deux vecteurs et l'interprétation géométrique que l'on a des vecteurs.

Remarque 9.2.8

On remarque que la longueur d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur par lui-même. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, on a que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \|\mathbf{p}\|^2.$$

Si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, alors le cosinus entre les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est 0. On a donc que l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\pi/2$ ($+n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$). Ceci justifie la définition suivante. ♠

Définition 9.2.9

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} , deux vecteurs. On dit que \mathbf{p} est **perpendiculaire** ou **orthogonal** à \mathbf{q} (et vice-versa) si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

Remarque 9.2.10

Vous avez probablement appris que le produit des pentes de deux droites orthogonales est -1 . Il est facile à l'aide des vecteurs de vérifier cette énoncé. Supposons que $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_1 et que $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_2 . Si les droites ℓ_1 et ℓ_2 sont perpendiculaires, alors il en est de même pour les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} , et vice-versa. On a donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0.$$

Ainsi

$$\frac{p_2}{p_1} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

Puisque $m_1 = \frac{p_2}{p_1}$ est la pente de la droite ℓ_1 et $m_2 = \frac{q_2}{q_1}$ est celle de la droite ℓ_2 , on obtient

que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. ♠

Remarque 9.2.11

Nous justifierons ci-dessous la définition 9.2.7 dans le plan. La justification est identique pour les vecteurs dans l'espace.

Commençons par un petit rappel. À la figure 9.5, on retrouve le triangle $\triangle ABC$. La **loi des cosinus** dit que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

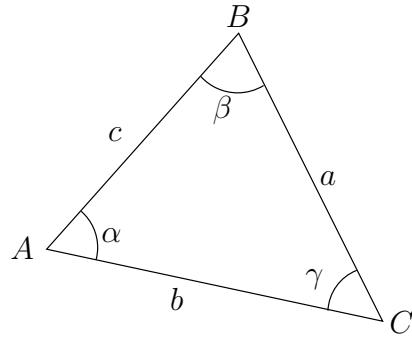


FIGURE 9.5 – La loi des cosinus dit que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

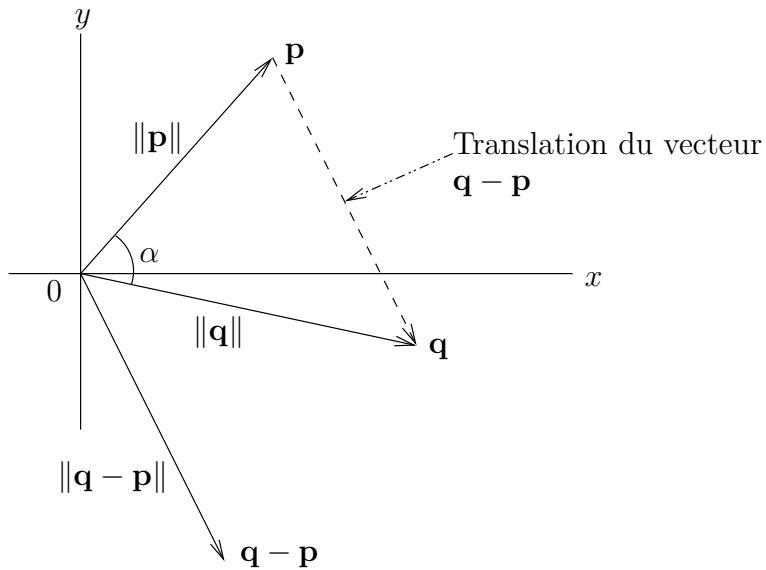


FIGURE 9.6 – Interprétation géométrique du produit scalaire

Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$.

De la loi des cosinus, on déduit que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \cos(\alpha) \quad (9.2.2)$$

où α est l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} (voir figure 9.6).

Puisque $\mathbf{q} - \mathbf{p} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$, on a que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 &= (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 \\ &= (p_1^2 + p_2^2) + (q_1^2 + q_2^2) - 2(p_1 q_1 + p_2 q_2) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle . \end{aligned}$$

Ainsi, (9.2.2) devient

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \cos(\alpha) .$$

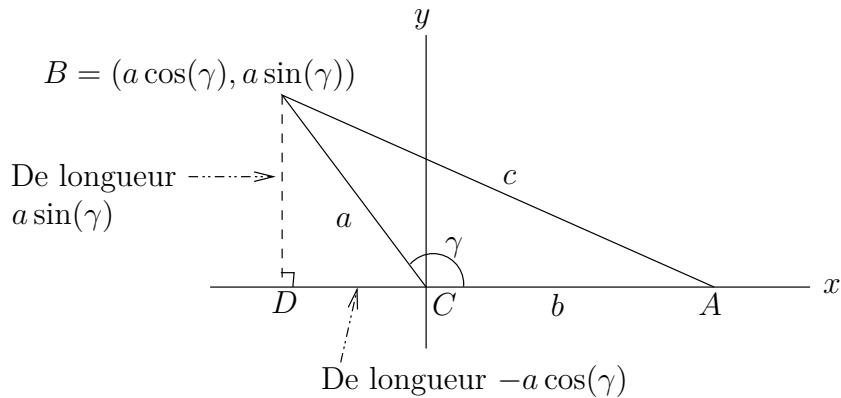


FIGURE 9.7 – Démonstration de la loi des cosinus

Après avoir simplifié les termes identiques de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\alpha) .$$

Si on isole $\cos(\alpha)$, on retrouve la définition 9.2.7. ♠

Remarque 9.2.12 ☺

Il est facile de démontrer la loi des cosinus en utilisant les coordonnées cartésiennes.

Pour démontrer la loi des cosinus pour l'angle au sommet C d'un triangle $\triangle ABC$. on place le sommet C à l'origine et le sommet A (ou B) sur l'axe des x comme on peut le voir à la figure 9.7.

Les coordonnées du point B sont donc $(a \cos(\gamma), a \sin(\gamma))$ et celle du point A sont $(b, 0)$. Le triangle $\triangle DAB$ a un angle droit au sommet D . Le théorème de Pythagore nous donne donc

$$c^2 = (a \sin(\gamma))^2 + (-a \cos(\gamma) + b)^2 .$$

Si on développe le côté droit de cette équation, on trouve

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 \sin^2(\gamma) + a^2 \cos^2(\gamma) - 2ab \cos(\gamma) + b^2 \\ &= a^2 (\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)) + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{aligned}$$

puisque $\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1$. ♠

9.2.5 Produit vectoriel 🔧

Le produit vectoriel est une opération sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique.

Définition 9.2.13

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ sont deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires (i.e. un multiple l'un de l'autre), on définit le **produit vectoriel** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i} + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k}. \quad (9.2.3)$$

Donc, $\mathbf{m} = (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1)$.

Le vecteur qui résulte du produit vectoriel de deux vecteurs a une relation géométrique très particulière avec les deux vecteurs du produit.

Proposition 9.2.14

Le vecteur $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Pour vérifier que $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire à \mathbf{p} , il suffit de vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle &= \langle (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1), (p_1, p_2, p_3) \rangle \\ &= p_1(p_2 q_3 - p_3 q_2) + p_2(p_3 q_1 - p_1 q_3) + p_3(p_1 q_2 - p_2 q_1) \\ &= p_1 p_2 q_3 - p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1 - p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 - p_2 p_3 q_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même, on peut vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle = 0$.

Définition 9.2.15

La direction du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est déterminée par la **règle de la main droite**. C'est-à-dire, si la paume de votre main droite entoure la droite qui contient le vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ de telle sorte que vos doigts indiquent la plus petite direction angulaire de \mathbf{p} à \mathbf{q} , alors votre pouce pointe dans la direction de $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ (voir la figure 9.8).

Exemple 9.2.16

On peut facilement vérifier avec la règle de la main droite que $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ et $-\mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{i}$. ♣

Quelques manipulations algébriques vont nous permettre de trouver une formule pour la longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$. Soit θ , le plus petit angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} (donc, $0 < \theta < \pi$). On a déjà vu que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\theta).$$

Ainsi,

$$\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\|^2 = (p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2$$

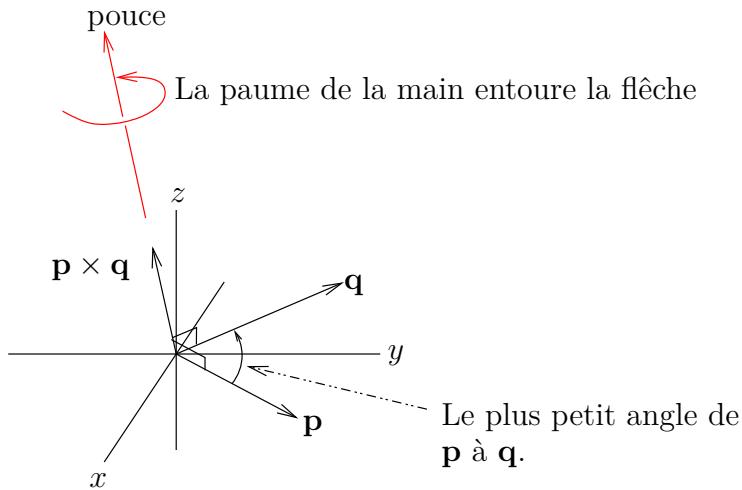


FIGURE 9.8 – Le vecteur obtenu du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan généré par ces deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
 &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 \\
 &= \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 - (\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle)^2 = \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 \cos^2(\theta) \\
 &= \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2(1 - \cos^2(\theta)) = \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 \sin^2(\theta).
 \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 9.2.17

$$\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$$

où $0 < \theta < \pi$ est l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Exemple 9.2.18

On a que le plus petit angle entre les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} est $\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = \|\mathbf{i}\|\|\mathbf{j}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

comme il se doit. ♣

Il y a une interprétation géométrique très intéressante de la longueur du vecteur obtenu d'un produit vectoriel. On remarque à la figure 9.9 que $\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme défini par \mathbf{p} et \mathbf{q} . Donc, la longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est l'aire de ce parallélogramme.

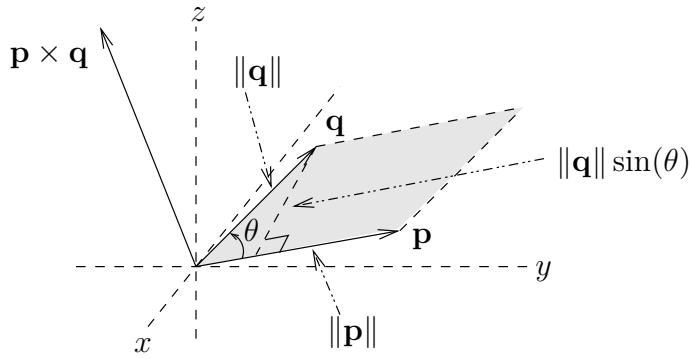


FIGURE 9.9 – L'aire du parallélogramme définie par les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$.

9.3 Équation d'une droite

On peut utiliser les vecteurs pour décrire les droites.

La droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} (voir figure 9.10) est formé des points \mathbf{r} où

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} \quad (9.3.1)$$

et α prend toutes les valeurs réelles.

Rappelons que l'on utilise la même notation pour désigner un point ou un vecteur. On peut donc faire référence au point \mathbf{r} et à ses coordonnées quand cela est nécessaire à un certain moment et traiter \mathbf{r} comme un vecteur à d'autres moments.

Définition 9.3.1

La formule (9.3.1) est la **représentation vectorielle** de la droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} .

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ et $\mathbf{r} = (x, y, z)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ sont

$$x = p_1 + \alpha q_1, \quad y = p_2 + \alpha q_2 \quad \text{et} \quad z = p_3 + \alpha q_3. \quad (9.3.2)$$

Définition 9.3.2

la formule (9.3.2) est la **représentation paramétrique** de la droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} . Le **paramètre** est α .

Si on suppose que q_1 , q_2 et q_3 sont non nuls et que l'on résout chacune des trois équations de la représentation paramétrique pour α , on obtient

$$\frac{x - p_1}{q_1} = \frac{y - p_2}{q_2} = \frac{z - p_3}{q_3}. \quad (9.3.3)$$

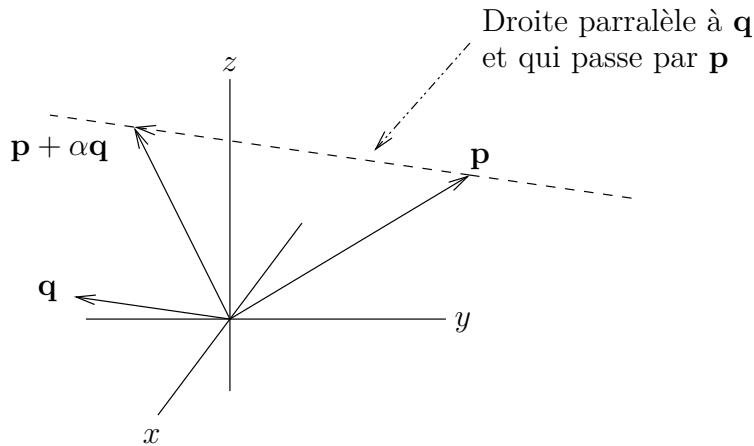


FIGURE 9.10 – Représentation vectorielle d'une droite

Si q_2 et q_3 sont non nuls mais $q_1 = 0$, on obtient

$$\frac{y - p_2}{q_2} = \frac{z - p_3}{q_3} \quad \text{et} \quad x = p_1. \quad (9.3.4)$$

C'est une droite dans le plan $x = p_1$. Le lecteur est invité à analyser les autres cas possibles.

Définition 9.3.3

Les formules (9.3.3) et (9.3.4) sont des **représentations standard** d'une droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} .

Remarque 9.3.4

On peut déduire de la figure 9.11 que, dans le plan, les points \mathbf{r} de la droite passant par le point \mathbf{p} et perpendiculaire au vecteur \mathbf{q} sont donnés par

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0.$$



Exemple 9.3.5

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{q} = (-1, 2, 2)$, alors l'ensemble des points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de la droite passant par \mathbf{p} et parallèle à \mathbf{q} est donnée par la relation

$$(x, y, z) = \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} = (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) = (1 - \alpha, 2 + 2\alpha, 3 + 2\alpha).$$

On a donc la représentation paramétrique

$$x = 1 - \alpha, \quad y = 2 + 2\alpha \quad \text{et} \quad z = 3 + 2\alpha,$$

et la représentation standard

$$-(x - 1) = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{2}.$$

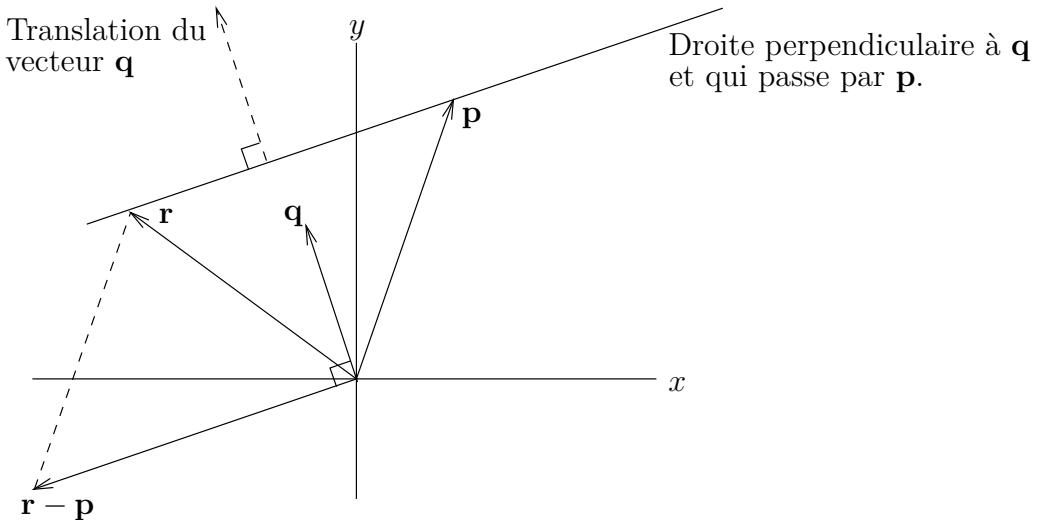


FIGURE 9.11 – L'équation d'une droite du plan passant par un point \mathbf{p} et perpendiculaire à un vecteur \mathbf{q} est $\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.



Remarque 9.3.6

La représentation classique d'une droite dans le plan est $y = mx + b$ où m est la pente de la droite et b est l'abscisse à l'origine.

Quel est la relation entre la représentation paramétrique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} , et la représentation standard de l'équation de cette droite ? On va répondre à cette question à l'aide d'un exemple.

Soit $\mathbf{p} = (2, 3)$ et $\mathbf{q} = (4, 3)$. Pour trouver l'équation classique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} , il faut premièrement trouver la pente de la droite qui passe par l'origine et \mathbf{q} ; c'est-à-dire, la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . La pente de cette droite est $3/4$.

La forme **point-pente** de la droite cherchée est donc

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2) .$$

On obtient la représentation classique

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

de la droite.

L'ensemble des points $\mathbf{r} = (x, y)$ de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} est donnée par

$$(x, y) = \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} = (2, 3) + \alpha(4, 3) = (2 + 4\alpha, 3 + 3\alpha) .$$

Une représentation paramétrique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} est donc

$$x = 2 + 4\alpha \quad \text{et} \quad y = 3 + 3\alpha .$$

De la première équation, on obtient que $\alpha = (x - 2)/4$. Si on substitue cette expression pour α dans l'équation $y = 3 + 3\alpha$, on obtient

$$y = 3 + 3 \frac{x - 2}{4} = 3 + \frac{3}{4}(x - 2) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

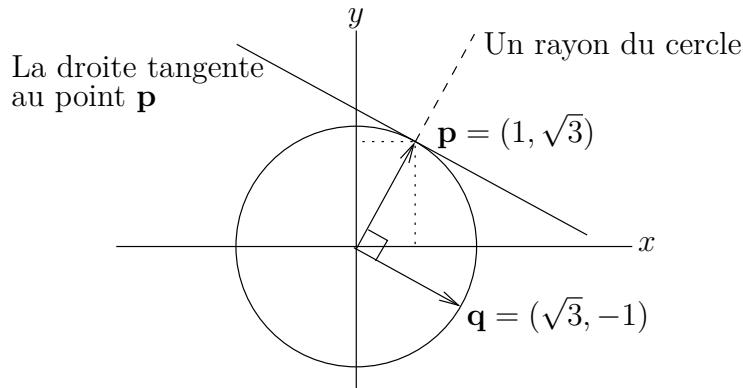
et on retrouve la représentation classique de la droite.



9.3.1 Droites tangentes

Exemple 9.3.7

Trouver l'équation de la droite tangent au point $\mathbf{p} = (1, \sqrt{3})$ du cercle de rayon 2 centré à l'origine



On présente trois solutions à ce problème.

a) On remarque que le vecteur \mathbf{p} est perpendiculaire à la droite tangente au cercle. Donc \mathbf{p} représente un rayon. Donc, les points $\mathbf{r} = (x, y)$ de la droite tangente cherchée satisfont

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x - 1, y - \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = (x - 1) + \sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0 .$$

Si on résout pour y , on obtient

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}} ;$$

la représentation classique pour la droite tangente.

b) Une autre solution fait appel à la représentation paramétrique d'une droite. Premièrement, on trouve un vecteur parallèle à la tangent au cercle au point \mathbf{p} . C'est-à-dire que l'on cherche un vecteur perpendiculaire au vecteur $\mathbf{p} = (1, \sqrt{3})$. Il est facile de voir que $\mathbf{q} = (\sqrt{3}, -1)$ est perpendiculaire au vecteur \mathbf{p} car $\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = 0$. Ainsi, les points $\mathbf{r} = (x, y)$ de la droite tangent au cercle au point \mathbf{p} satisfont

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} .$$

La représentation paramétrique de la droite tangent au cercle au point $(1, \sqrt{3})$ est alors

$$x = 1 + \alpha \sqrt{3} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{3} - \alpha$$

pour tout nombre réel α .

Si on résout pour α la première équation de la représentation paramétrique, on trouve $\alpha = (x - 1)/\sqrt{3}$. Si on substitue cette expression pour α dans la deuxième équation de la représentation paramétrique, on obtient la représentation classique pour l'équation d'une droite tangente.

$$y = \sqrt{3} - \frac{x - 1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

c) La façon traditionnelle de trouver l'équation de la tangente au point \mathbf{p} est de commencer par trouver la pente de la tangente. Pour cela, on note que la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} est $m_1 = \sqrt{3}$. Comme la droite tangente est perpendiculaire à la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} , sa pente est donc

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

La forme **pente-point** de l'équation de la tangente au cercle au point \mathbf{p} est donc

$$y - \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1).$$

Donc,

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$



9.3.2 Intersection de deux droites

Dans le plan, deux droites non-parallèles se coupent en un point. Dans l'espace, deux droites non-parallèles ne se coupent généralement pas en un point. L'exemple suivant illustre une méthode pour trouver l'intersection de deux droites si cette intersection existe.

Exemple 9.3.8

Trouver l'intersection (s'il y en a une) des droites ℓ et ℓ' données par les représentations paramétriques suivantes. La droite ℓ possède la représentation paramétrique

$$x = 2s - 3, \quad y = s - 1 \quad \text{et} \quad z = -s + 5$$

pour $s \in \mathbb{R}$, et la droite ℓ' possède la représentation paramétrique

$$x = t - 3, \quad y = -2t + 1 \quad \text{et} \quad z = t - 1,$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

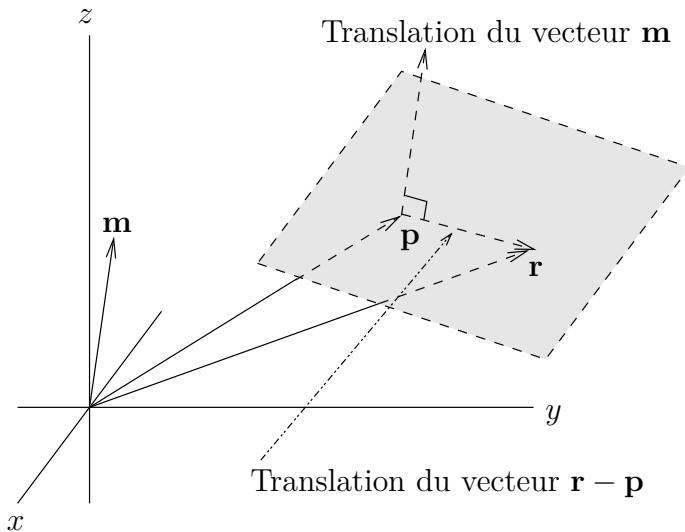


FIGURE 9.12 – Représentation vectorielle d'un plan

Ces deux droites ne sont pas parallèles car ℓ est parallèle au vecteur $(2, 1, -1)$ et ℓ' au vecteur $(1, -2, 1)$, et ces deux vecteurs ne sont pas parallèles. Pour que ces deux droites se coupent en un point (x, y, z) commun, il faut qu'ils existent s et t tels que

$$t - 3 = 2s - 3 \quad , \quad -2t + 1 = s - 1 \quad \text{et} \quad t - 1 = -s + 5 .$$

La première équation donne $t = 2s$. Si on substitue cette expression pour t dans la deuxième équation, on trouve $-4s + 1 = s - 1$ et donc $s = 2/5$. On obtient de $t = 2s$ que $t = -4/5$. Malheureusement, si on substitue $s = 2/5$ dans la troisième équation, on obtient $t = 28/5$. Donc, il n'y a pas de valeurs de s et t qui satisfont les trois équations simultanément. Les deux droites ne se coupent pas. ♣

9.4 Équation d'un plan

Proposition 9.4.1

Le plan qui passe par un point **p** et qui est perpendiculaire au vecteur **m** (voir la figure 9.12) est l'ensemble des points **r** tels que le vecteur **r - p** est perpendiculaire à **m**. Si on utilise le produit scalaire, on peut définir ce plan comme l'ensemble des points **r** tels que

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0 .$$

Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, la formule donnée à la proposition (9.4.1) devient

$$m_1(x - p_1) + m_2(y - p_2) + m_3(z - p_3) = 0 \tag{9.4.1}$$

ou simplement

$$m_1x + m_2y + m_3z - d = 0 \quad (9.4.2)$$

où $d = m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$. On pourrait penser que la valeur de d va changer si on choisit différents points \mathbf{p} du plan. En fait, ce n'est pas le cas. Soit \mathbf{t} un autre point du plan. Puisque $\mathbf{t} - \mathbf{p}$ est un vecteur parallèle au plan et donc perpendiculaire à \mathbf{m} , on a

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle - \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{t} - \mathbf{p} \rangle = 0$$

Ainsi $\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$.

Définition 9.4.2

la formule (9.4.1) (ou (9.4.2)) est la **représentation standard** d'un plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{m} . On dit que le vecteur \mathbf{m} est orthogonal ou perpendiculaire au plan.

Si $m_3 \neq 0$ on peut écrire

$$z = z_0 - \frac{m_1}{m_3}(x - x_0) - \frac{m_2}{m_3}(y - y_0) .$$

Si $m_3 = 0$ et $m_2 \neq 0$, l'équation du plan est simplement

$$y = y_0 - \frac{m_1}{m_2}(x - x_0)$$

et z est libre (i.e. z varie entre $-\infty$ et ∞). C'est un plan qui est parallèle à l'axe des z . On laisse aux lecteurs l'étude des autres cas possibles.

Exemple 9.4.3

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{m} = (1, -2, 4)$, l'ensemble des points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan est donnée par la relation

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x, y, z) - (1, 2, 3), (1, -2, 4) \rangle = (x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0 .$$

Si on résout pour z on trouve

$$z = 3 - \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 2) .$$



Exemple 9.4.4

Trouver l'équation du plan tangent au point $\mathbf{p} = (1, 2, 2)$ de la sphère de rayon 3 centré à l'origine.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent de la sphère au point \mathbf{p} est donné par le vecteur \mathbf{p} lui-même. Ainsi, les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan tangent cherché satisfont l'équation

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x - 1, y - 2, z - 2), (1, 2, 2) \rangle = (x - 1) + 2(y - 2) + 2(z - 2) = 0 .$$

Si on résout pour z , on trouve

$$z = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - (y - 2) .$$



On sait qu'un plan est déterminé par trois points non-alignés. Comment peut-on trouver l'équation du plan qui passe par trois points non-alignés ? On reformule la question de la façon suivante. Étant donné trois points non-alignés, comment peut-on trouver un vecteur normal au plan qui contient ces trois points ? La réponse à cette question nous est fournie par le produit vectoriel.

Proposition 9.4.5

Si \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} sont trois points non-alignés d'un plan, alors $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p}$ et $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p}$ sont deux vecteurs parallèles au plan qui ne sont pas colinéaires, et $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$ est un vecteur perpendiculaire au plan. Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est un point du plan, la représentation standard du plan est alors donnée par

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0 .$$

Exemple 9.4.6

Trouvons l'équation du plan qui contient les trois points $(2, 1, 3)$, $(1, -2, 3)$ et $(1, 5, 4)$.

On peut choisir $\mathbf{p} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ et $\mathbf{v} = (1, 5, 4)$. Tout autre choix pour \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} est valable.

Ainsi,

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p} = (1, -2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, -3, 0)$$

et

$$\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p} = (1, 5, 4) - (2, 1, 3) = (-1, 4, 1) .$$

On obtient

$$\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t} = (-3, 1, -7) .$$

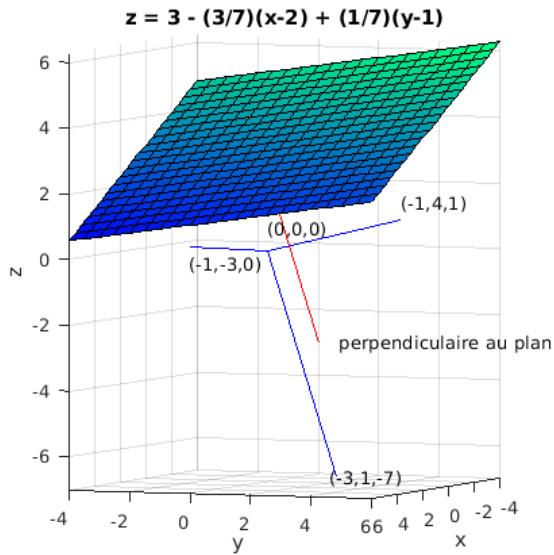
Les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan contenant \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} satisfont donc l'équation

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x, y, z) - (2, 1, 3), (-3, 1, -7) \rangle = -3(x - 2) + (y - 1) - 7(z - 3) = 0 .$$

On peut résoudre pour z pour obtenir

$$z = 3 - \frac{3}{7}(x - 2) + \frac{1}{7}(y - 1) .$$

Le graphe (d'une partie) du plan est présenté dans la figure suivante.



On remarque que $\mathbf{m} = (-3, 1, -7)$ satisfait bien la règle de la main droite avec les vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 3, 0)$ et $\mathbf{t} = (-1, 4, 1)$. 

9.4.1 Représentations vectorielles et paramétriques du plan

Comme pour la droite dans le plan, il existe des représentations vectorielles et paramétriques pour le plan.

Le plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires (voir la figure 9.13) est formé des points $\mathbf{r}(x, y, z)$ de la forme

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t} \quad (9.4.3)$$

où α et β prennent toutes les valeurs réelles.

Définition 9.4.7

La formule (9.4.3) est une **représentation vectorielle** du plan qui contient le point \mathbf{p} et est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ et $\mathbf{r} = (x, y, z)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t}$ sont

$$x = p_1 + \alpha s_1 + \beta t_1 \quad (9.4.4a)$$

$$y = p_2 + \alpha s_2 + \beta t_2 \quad (9.4.4b)$$

$$z = p_3 + \alpha s_3 + \beta t_3 \quad (9.4.4c)$$

pour α et β des nombres réels.

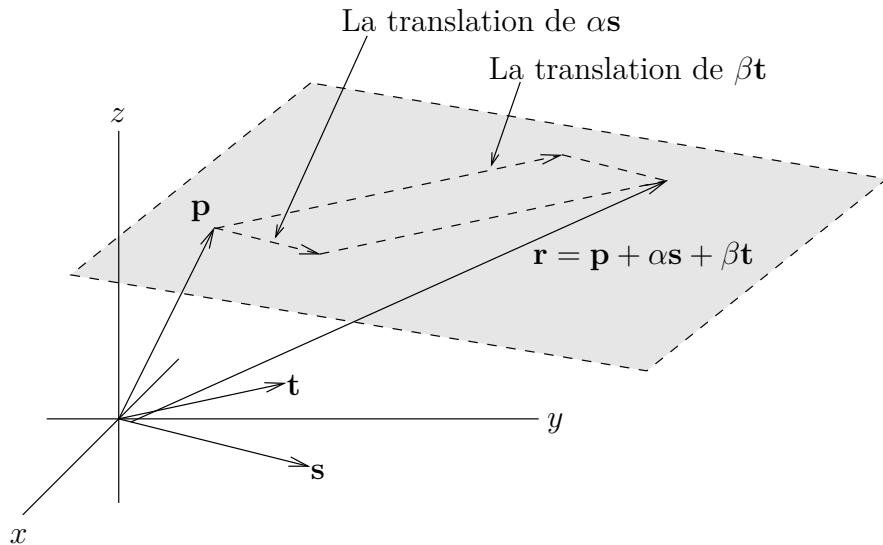


FIGURE 9.13 – Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires

Définition 9.4.8

L'ensemble des formules en (9.4.4) est une **représentation paramétrique** du plan contenant \mathbf{p} et parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires. Les **paramètres** sont α et β .

Exemple 9.4.9

Les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan contenant $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et parallèle aux vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 2, 2)$ et $\mathbf{t} = (1, -1, 2)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{s} + \beta\mathbf{t}, \\ &= (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) + \beta(1, -1, 2) \\ &= (1 - \alpha + \beta, 2 + 2\alpha - \beta, 3 + 2\alpha + 2\beta).\end{aligned}$$

On a donc la représentation paramétrique

$$x = 1 - \alpha + \beta, \quad y = 2 + 2\alpha - \beta \quad \text{et} \quad z = 3 + 2\alpha + 2\beta.$$



Remarque 9.4.10

Il existe une relation entre la représentation paramétrique et standard du plan.

Si on soustrait (9.4.4b) multipliée par t_1 de (9.4.4a) multipliée par t_2 , on obtient

$$xt_2 - yt_1 = (p_1t_2 - p_2t_1) + \alpha(s_1t_2 - s_2t_1).$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x t_2 - y t_1 - p_1 t_2 + p_2 t_1) = \frac{t_2}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x - p_1) - \frac{t_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (y - p_2)$$

si $s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0$.

Si on soustrait (9.4.4b) multipliée par s_1 de (9.4.4a) multipliée par s_2 , on obtient

$$x s_2 - y s_1 = (p_1 s_2 - p_2 s_1) + \beta (t_1 s_2 - t_2 s_1) .$$

Ainsi

$$\beta = \frac{1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x s_2 - y s_1 - p_1 s_2 + p_2 s_1) = \frac{s_2}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x - p_1) - \frac{s_1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (y - p_2)$$

si $s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0$.

Si on substitue α et β dans (9.4.4c), on trouve

$$\begin{aligned} z &= p_3 + \frac{t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x - p_1) - \frac{t_1 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (y - p_2) + \frac{s_2 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x - p_1) \\ &\quad - \frac{s_1 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (y - p_2) \\ &= p_3 - \frac{s_2 t_3 - t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x - p_1) - \frac{t_1 s_3 - s_1 t_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (y - p_2) . \end{aligned}$$

On peut récrire cette expression sous la forme suivante.

$$(s_2 t_3 - t_2 s_3) (x - p_1) + (t_1 s_3 - s_1 t_3) (y - p_2) + (s_1 t_2 - s_2 t_1) (z - p_3) = 0 .$$

C'est la représentation vectorielle donnée en (9.4.1) où $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$. 

9.4.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Si une droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} , alors la droite coupe le plan en un point. La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si le produit scalaire d'un vecteur \mathbf{q} parallèle à la droite ℓ avec un vecteur \mathbf{m} perpendiculaire au plan est 0 car le plan \mathcal{M} est une translation de l'ensemble des vecteurs \mathbf{u} tels que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle = 0$ (voir la figure 9.14).

Exemple 9.4.11

Considérons la droite ℓ définie par la représentation standard

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - 1}{2} = z + 2$$

et le plan \mathcal{M} donné par $x + 2y + z = 4$. Trouvez l'intersection (s'il y en a une) de la droite ℓ et du plan \mathcal{M} .

Une représentation paramétrique de la droite ℓ est

$$x = 3\alpha + 5, \quad y = 2\alpha + 1 \text{ et } z = \alpha - 2 .$$

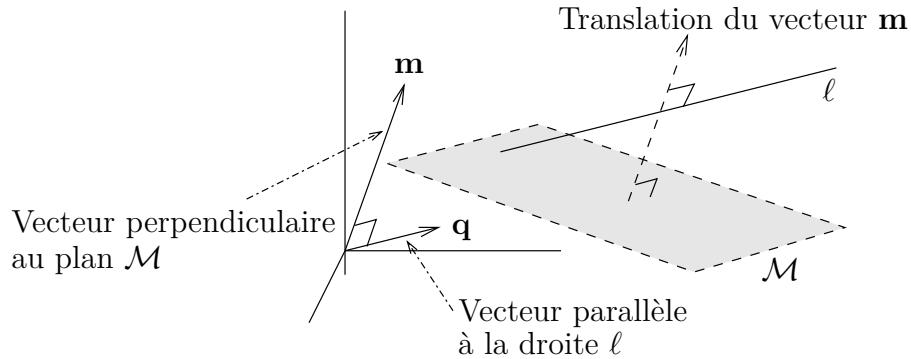


FIGURE 9.14 – La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si $\langle \mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle = 0$ où le vecteur \mathbf{q} est parallèle à la droite ℓ et \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

Le point (x, y, z) de la droite ℓ qui appartient aussi au plan \mathcal{M} doit satisfaire

$$(3\alpha + 5) + 2(2\alpha + 1) + (\alpha - 2) = 4 .$$

On obtient $\alpha = -1/8$. Les coordonnées du point d'intersection sont donc

$$x = 3\left(\frac{-1}{8}\right) + 5 = \frac{37}{8} , \quad y = 2\left(\frac{-1}{8}\right) + 1 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad z = \left(\frac{-1}{8}\right) - 2 = -\frac{17}{8} .$$



Remarque 9.4.12

Il est facile de trouver un vecteur tangent à la droite ℓ de l'exemple 9.4.11 et un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

À partir de la représentation standard ou paramétrique de la droite ℓ , on déduit la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (5, 1, -2)$ et $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$. Le vecteur $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$ est parallèle à la droite ℓ .

Un vecteur $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ perpendiculaire au plan \mathcal{M} est donné par les coefficients de x , y et z dans l'équation $x + 2y + z - 4 = 0$. En effet, $x + 2y + z - 4 = 0$ est la représentation standard (voir 9.4.2) du plan \mathcal{M} . Ainsi, $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ et $\langle \mathbf{s}, \mathbf{m} \rangle = 4$ pour \mathbf{s} un point du plan \mathcal{M} .

Puisque $\langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle = 8 \neq 0$, on a que la droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} , et donc coupe le plan \mathcal{M} .



9.4.3 Intersection de deux plans

Deux plans distincts non-parallèles vont se couper en une droite. Si \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} et \mathbf{n} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{N} , alors les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont parallèles si les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} sont colinéaires ; c'est-à-dire, un multiple l'un de l'autre.

Si le plan \mathcal{M} est représenté par l'équation $m_1x + m_2y + m_3z = k_m$ et le plan \mathcal{N} par $n_1x + n_2y + n_3z = k_n$, l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} est donc l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfont ces deux équations simultanément. En d'autres mots, l'intersection des deux plans est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires

$$m_1x + m_2y + m_3z = k_m \quad (9.4.5a)$$

$$n_1x + n_2y + n_3z = k_n \quad (9.4.5b)$$

Les deux plans sont parallèles

Si les deux plans sont parallèles, alors $\mathbf{m} = \lambda\mathbf{n}$ pour un nombre réel λ .

1. Si $k_m \neq \lambda k_n$, il ne peut pas y avoir de points (p_1, p_2, p_3) qui satisfassent (9.4.5a) et (9.4.5b) simultanément. Si c'était le cas, alors on aurait

$$m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = k_m$$

$$n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = k_n$$

avec $m_i = \lambda n_i$. Si on soustrait λ fois la deuxième équation de la première équation, on obtient $0 = k_m - \lambda k_n$. Ce qui contredit notre hypothèse. Donc, on a deux plan distincts et parallèles.

2. Si $k_m = \lambda k_n$ alors l'équation (9.4.5a) est un multiple par λ de l'équation (9.4.5b) et tout point (x, y, z) qui satisfait (9.4.5b) satisfait aussi (9.4.5a) et vice-versa. Les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont en fait un seul et même plan.

Les deux plans ne sont pas parallèles

Si les deux plan ne sont pas parallèles, \mathbf{m} n'est pas un multiple de \mathbf{n} . Nous verrons lors de l'étude de l'algèbre linéaire que les solutions du système d'équations linéaires donné par (9.4.5a) et (9.4.5b) représente alors une droite ℓ . Puisque cette droite est contenue dans les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} , elle doit être perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} . Donc, ℓ est parallèle au vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Si \mathbf{p} est un point de ℓ , donc une solution du système d'équations linéaires donné par (9.4.5a) et (9.4.5b), alors l'équation de la droite d'intersection ℓ est donnée par

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle = r_1(x_1 - p_1) + r_2(x_2 - p_2) + r_3(x_3 - p_3) = 0 .$$

Donc, le problème est de trouver au moins une solution du système d'équations linéaires donné par (9.4.5a) et (9.4.5b). En fait, trouver une solution n'est pas plus difficile que de trouver toutes les solutions et donc l'équation de la droite d'intersection. C'est ce que nous décrivons ci-dessous.

Si (9.4.5a) définit un plan dans l'espace, ces coefficients m_i ne peuvent pas tous être nuls. Supposons que $m_1 \neq 0$; le raisonnement est semblable si m_2 ou m_3 est non-nul. Si on soustrait le produit de (9.4.5a) par n_1/m_1 de (9.4.5b), on obtient

$$\frac{n_2m_1 - n_1m_2}{m_1}y + \frac{m_1n_3 - n_1m_3}{m_1}z = \frac{k_n m_1 - n_1 k_m}{m_1} . \quad (9.4.6)$$

Puisque l'on suppose que \mathbf{m} et \mathbf{n} ne sont pas colinéaires, les coefficients de y et z ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons que le coefficient de y est non-nul. Le raisonnement est semblable si le coefficient de z est non-nul. On peut alors résoudre pour y .

$$y = C_1 + C_2 z , \quad (9.4.7)$$

où $C_1 = \frac{k_n m_1 - n_1 k_m}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_2 = -\frac{m_1 n_3 - n_1 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Si on substitue y dans (9.4.5a) par (9.4.7), et on résout pour x , on trouve

$$x = C_3 + C_4 z , \quad (9.4.8)$$

où $C_3 = \frac{k_m n_2 - m_2 k_n}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_4 = -\frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Notez que C_2 et C_4 ne peuvent pas être tous les deux nuls pour la même raison que les coefficients de y et z dans (9.4.6) ne peuvent pas être tous les deux nuls.¹

On obtient donc la représentation paramétrique

$$x = C_3 + C_4 \alpha , \quad y = C_1 + C_2 \alpha \quad \text{et} \quad z = \alpha$$

pour la droite d'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

Il ne faut surtout pas essayer de mémoriser les formules ci-haut pour trouver la représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans. L'exemple suivant illustre comment trouver l'intersection de deux plans.

Exemple 9.4.13

Trouver, si elle existe, l'intersection des plans représentés par les équations suivantes.

$$\mathcal{M} : x + 2y + z = 5 \quad (9.4.9a)$$

$$\mathcal{N} : 2x + y + z = 3 \quad (9.4.9b)$$

Le vecteur $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} et le vecteur $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{N} . Comme ils ne sont pas colinéaires (on ne peut pas écrire \mathbf{m} comme un multiple de \mathbf{n}), les deux plans se coupent en une droite ℓ .

1^{er} méthode: Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = (1, 1, -3)$ est parallèle à la droite ℓ . Il est facile de vérifier que $(0, 2, 1)$ est un point de la droite ℓ puisque c'est un point qui appartient aux deux plans. La représentation standard de ℓ est donc

$$x = y - 2 = \frac{z - 1}{-3} \quad (9.4.10)$$

2^e méthode: Si on soustrait deux fois l'équation (9.4.9a) de l'équation (9.4.9b), on trouve $-3y - z = -7$. Ainsi,

$$y = \frac{z - 7}{-3} = -\frac{1}{3}z + \frac{7}{3} .$$

1. On verra dans le chapitre sur l'algèbre linéaire que, si la matrice de dimension 2×3 dont les lignes sont données par les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} est de rang 2, alors au moins deux des expressions $m_1 n_2 - n_1 m_2$, $m_2 n_3 - n_2 m_3$ et $m_1 n_3 - n_1 m_3$ sont non-nuls.

Si on substitue cette expression pour y dans (9.4.9a), on obtient

$$x + 2 \left(\frac{z - 7}{-3} \right) + z = 5 .$$

Ceci donne

$$x = -2 \left(\frac{z - 7}{-3} \right) - z + 5 = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3} .$$

On obtient donc la représentation paramétrique suivante pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} , \quad y = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad z = \alpha . \quad (9.4.11)$$

3^e méthode: On aurait tout aussi bien pu résoudre $-3y - z = -7$ pour z . On trouve $z = -3y + 7$. Si on substitue cette expression dans (9.4.9a), on obtient $x + 2y + (-3y + 7) = 5$. Ainsi, $x = y - 2$. On obtient une nouvelle représentation paramétrique pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x = \beta - 2 , \quad y = \beta \quad \text{et} \quad z = -3\beta + 7 . \quad (9.4.12)$$

(9.4.10), (9.4.11) et (9.4.12) sont trois représentations équivalentes de la droite d'intersection ℓ .

On a bien obtenu des représentations équivalentes de la droite ℓ . En effet, on note que les trois représentations décrivent des droites qui ont la même direction : $(1, 1, -3)$, $(-1/3, -1/3, 1)$ et $(1, 1, -3)$ respectivement. De plus, ils contiennent tous le point $(0, 2, 1)$. On obtient $(0, 2, 1)$ avec $\alpha = 1$ dans (9.4.11) et $\beta = 2$ dans (9.4.12). Puisque les trois représentations décrivent des droites parallèles qui passent par le même point, on a donc la même droite.

On remarque de plus, que si on substitue $\alpha = -3\beta + 7$ dans (9.4.11), on obtient (9.4.12). De même, si on substitue $\beta = -(\alpha - 7)/3$ dans (9.4.12), on obtient (9.4.11). Ainsi, l'ensemble des points produits par la représentation (9.4.11) est le même que l'ensemble des points produits par la représentation (9.4.12). Par exemple, si $\alpha = 1$ dans la représentation (9.4.11), on obtient $(x, y, z) = (0, 2, 1)$. La représentation (9.4.12) donne ce même point avec $\beta = -(1 - 7)/3 = 2$. Si $\beta = 1$ dans la représentation (9.4.12), on obtient $(x, y, z) = (-1, 1, 4)$. La représentation (9.4.11) donne ce même point avec $\alpha = -3(1) + 7 = 4$. 

9.4.4 Intersection de trois plans

Les exemples suivants montrent comment on peut résoudre un système de trois équations avec trois inconnues en utilisant la technique de substitution. Malheureusement, cette méthode ne nous permet pas de classifier les cas possibles d'intersections ; c'est-à-dire, une intersection vide, une droite ou un plan.

L'algèbre linéaire que nous verrons dans un prochain chapitre simplifiera grandement l'étude des cas possibles d'intersections de trois plans.

Exemple 9.4.14

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + y + z = 3 \quad (9.4.13a)$$

$$3x + 2y + z = 5 \quad (9.4.13b)$$

$$x + y - 2z = 1 \quad (9.4.13c)$$

De (9.4.13a) on obtient $z = 3 - x - y$ que l'on substitue dans (9.4.13b) et (9.4.13c) pour obtenir

$$2x + y = 2 \quad (9.4.14a)$$

$$3x + 3y = 7 \quad (9.4.14b)$$

De (9.4.14a) on obtient $y = 2 - 2x$ que l'on substitue dans (9.4.14b) pour obtenir $-3x = 1$. Ainsi $x = -1/3$, $y = 2 - 2x = 8/3$ et $z = 3 - x - y = 2/3$. Le point $(-1/3, 8/3, 2/3)$ est le seul point commun (i.e. qui appartient) au trois plans. ♣

Exemple 9.4.15

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + 2y + z = 5 \quad (9.4.15a)$$

$$2x - y + z = 2 \quad (9.4.15b)$$

$$3x + y + 2z = 7 \quad (9.4.15c)$$

De (9.4.15a) on obtient $z = 5 - x - 2y$ que l'on substitue dans (9.4.15b) et (9.4.15c) pour obtenir $x - 3y = -3$ dans les deux cas. Ainsi $y = x/3 + 1$ et $z = 5 - x - 2y = -5x/3 + 3$. On trouve la représentation paramétrique

$$x = \alpha, \quad y = \frac{\alpha}{3} + 1 \quad \text{et} \quad z = -\frac{5\alpha}{3} + 3$$

d'une droite ℓ . La droite ℓ est l'ensemble des points commun au trois plans. ♣

Exemple 9.4.16

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + 2y + z = 5 \quad (9.4.16a)$$

$$2x - y + z = 2 \quad (9.4.16b)$$

$$-x + 3y = 7 \quad (9.4.16c)$$

De (9.4.16a) on obtient $z = 5 - x - 2y$ que l'on substitue dans (9.4.16b) pour obtenir $x - 3y = -3$. Ainsi, $y = x/3 + 1$. Malheureusement, si on substitue cette expression pour y dans (9.4.16c), on trouve $3 = 7$. Ce qui est absurde. Il n'existe donc aucun point (x, y, z) qui satisfasse les trois équations simultanément ; c'est-à-dire, qui est commun au trois plans. ♣

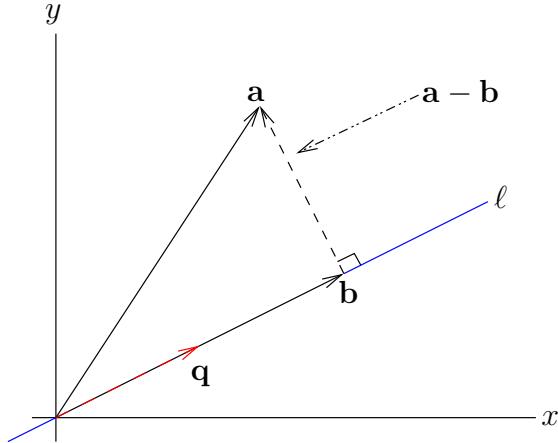


FIGURE 9.15 – Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ passant pas l'origine.

9.5 Projections

9.5.1 Plus courte distance entre un point et une droite

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et une droite ℓ qui passe par l'origine ? Pour répondre à cette question, nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} comme on peut le voir à la figure 9.15.

Soit \mathbf{q} un vecteur contenu dans la droite ℓ . Pour trouver les coordonnées de \mathbf{b} , on remarque que $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{q}$ pour un certain nombre réel α . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à \mathbf{q} . On a donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle .$$

Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} . \quad (9.5.1)$$

On a donc trouvé que

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} .$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, on a le résultat suivant.

Définition 9.5.1

Soit ℓ une droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . Si \mathbf{a} un point quelconque, la **projection (orthogonale)** du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ est le vecteur

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à la droite ℓ . La plus courte distance entre \mathbf{a} et la droite ℓ est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Exemple 9.5.2

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ et la droite ℓ donnée par $x = 4y = 2z$.

Il faut premièrement trouver la projection \mathbf{b} du vecteur $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ sur la droite ℓ . Pour cela, il faut choisir un vecteur \mathbf{q} sur la droite ℓ . Comme on considère seulement des droites qui passent par l'origine, il suffit de prendre le vecteur qui donne la direction de la droite dans l'une des représentations de la droite. Par exemple, la représentation standard de la droite ℓ est

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1/4} = \frac{z}{1/2}.$$

Donc $\mathbf{q} = (1, 1/4, 1/2)$ est un bon choix. En fait, tout multiple non nul de \mathbf{q} est acceptable. Ainsi,

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = \frac{4}{3} \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ est donc

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left\| \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

**Exemple 9.5.3**

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a} = (2, 7, 6)$ et la droite ℓ donnée par la représentation standard

$$x - 1 = y - 6 = \frac{z - 2}{-3}.$$

On remarque que la droite ℓ ne passe pas par l'origine. On ne peut donc pas utiliser directement les formules précédentes. Que peut-on faire ? Il suffit de faire une translation du point \mathbf{a} et de la droite ℓ par un vecteur \mathbf{c} de telle sorte que la nouvelle droite ℓ' passe par l'origine. La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' obtenus de la translation par le vecteur \mathbf{c} sera égale à la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ car les translations préservent la distance entre les objets. Voir la figure 9.16.

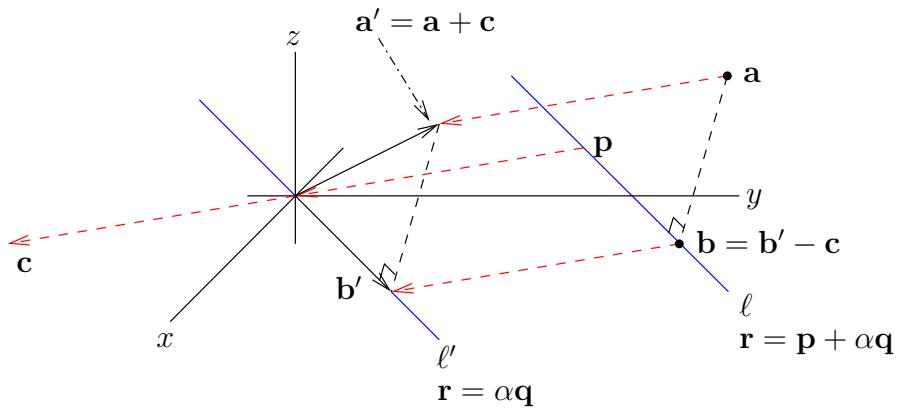


FIGURE 9.16 – Le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' résultent d'une translation par le vecteur \mathbf{c} du point \mathbf{a} et de la droite ℓ respectivement.

La droite ℓ a la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (1, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$. Si on fait une translation par $\mathbf{c} = -\mathbf{p}$, on obtient la droite ℓ' donnée par la formule $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{q}$ et le point

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = (1, 1, 4).$$

La droite ℓ' passe par l'origine car, avec cette translation, le point \mathbf{p} de la droite ℓ est envoyé à l'origine. Notez que ℓ et ℓ' sont parallèles comme il se doit pour deux droites dont l'une est la translation de l'autre.

Le vecteur $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$ est naturellement sur la droite ℓ' . La projection \mathbf{b}' du vecteur \mathbf{a}' sur la droite ℓ' est

$$\mathbf{b}' = \frac{\langle \mathbf{a}', \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = -\frac{10}{11}(1, 1, -3) = \left(-\frac{10}{11}, -\frac{10}{11}, \frac{30}{11}\right).$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' (et donc entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ) est

$$\|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| = \left\| \left(\frac{21}{11}, \frac{21}{11}, \frac{14}{11} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} = \frac{7\sqrt{22}}{11}.$$



9.5.2 Plus courte distance entre un point et un plan de l'espace

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et un plan \mathcal{M} qui contient l'origine ? La méthode utilisée pour répondre à cette question est très semblable à la méthode utilisée pour trouver la plus courte distance entre un point et une droite.

Nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} comme on peut le voir à la figure 9.17.

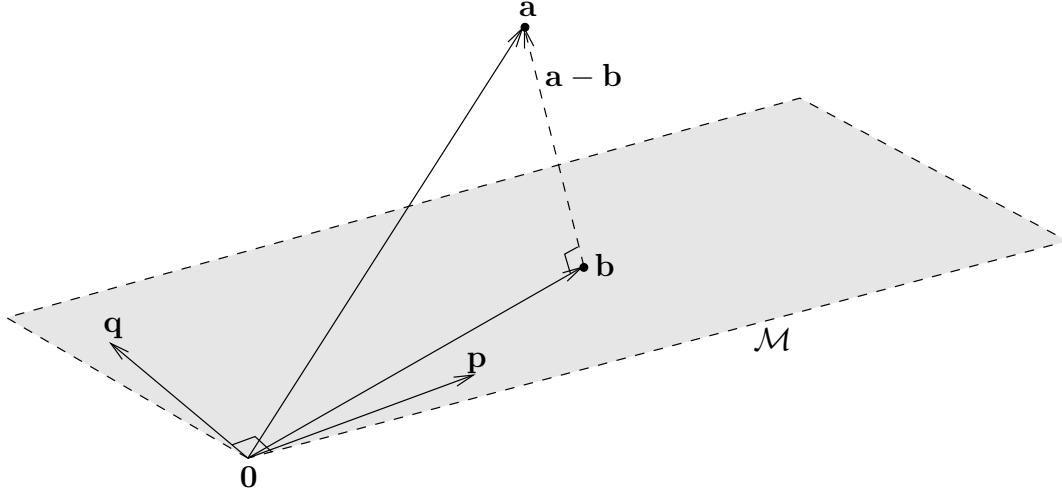


FIGURE 9.17 – Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur le plan \mathcal{M} contenant l'origine.

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} deux vecteurs perpendiculaires contenus dans le plan \mathcal{M} . On choisit deux vecteurs perpendiculaires pour simplifier les calculs qui vont suivre. Il est en général plus simple de travailler avec un système de coordonnées orthogonales.

Pour trouver les coordonnées de \mathbf{b} , on remarque que $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$ pour deux nombres réels α et β . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire au deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} . On a donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$$

et

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

car $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}. \quad (9.5.2)$$

Donc,

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, on a le résultat suivant.

Définition 9.5.4

Soit \mathcal{M} un plan qui contient deux vecteurs perpendiculaires \mathbf{p} et \mathbf{q} . Si \mathbf{a} est un point quelconque, la **projection (orthogonale)** du vecteur \mathbf{a} dans le plan \mathcal{M} est le vecteur

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} . La plus courte distance entre \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

9.6 Exercices

Question 9.1

Donnez une représentation de la droite qui passe par les points $(2, -5, 5)$ et $(-4, 3, 4)$.

Question 9.2

Trouvez l'équation du plan parallèle au plan $2x+3x-z=1$ et qui passe par le point $(2, 3, 2)$.

Question 9.3

Trouvez l'équation du plan \mathcal{M} qui contient la droite ℓ définie par

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

et le point $(1, 2, 1)$.

Question 9.4

Déterminez si les deux plans suivants se coupent et, si c'est le cas, trouvez l'intersection des deux plans.

$$2x + 5z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + z + 2 = 0.$$



10.1 Systèmes d'équations linéaires

Exemple 10.1.1

On a eu à quelques reprises dans le passé à résoudre des systèmes d'équations linéaires comme, par exemple,

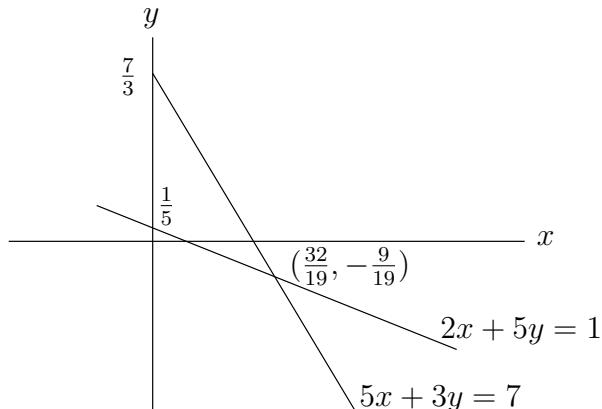
$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 7 \\ 2x + 5y &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

Pour résoudre un tel système, on résout la première équation pour y . On trouve $y = (7 - 5x)/3$. Puis, on substitue cette dernière expression pour y dans la deuxième équation pour obtenir

$$2x + 5(7 - 5x)/3 = 1.$$

Après simplification, on trouve $x = 32/19$ et donc $y = (7 - 5x)/3 = -9/19$.

On peut donner une interprétation graphique à la solution $(x, y) = (32/19, -9/19)$ du système d'équations linéaires précédent. Chacune des équations du système d'équations linéaires ci-dessus est l'équation d'une droite dans le plan et la solution $(x, y) = (32/19, -9/19)$ de ce système est le point d'intersection de ces deux droites comme on peut le voir dans la figure suivante.



Les coordonnées du point d'intersection satisfont les deux équations linéaires simultanément puisque que ce point appartient aux deux droites. ♣

Nous présentons une autre façon de résoudre un système d'équations linéaires.

Méthode 10.1.2

Pour résoudre les systèmes d'équations linéaires comme celui en (10.1.1), on peut utiliser les trois opérations suivantes pour réduire (avec une bonne combinaison de ses opérations) le système initial en un système plus simple qui possède les mêmes solutions.

1. On peut multiplier une équation par un nombre réel.
2. On peut additionner une équation à une autre équation.
3. On peut échanger l'ordre des équations.

Les opérations (1) et (2) peuvent être combinées pour permettre l'addition d'un multiple d'une équation à une autre équation.

Exemple 10.1.3

Résoudre le système d'équations linéaires (10.1.1) à l'aide des opérations sur les équations.

Si on multiplie la première équation de (10.1.1) par $1/5$, on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (10.1.1).

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{5}y &= \frac{7}{5} \\ 2x + 5y &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.2}$$

Si on soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.2), on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède toujours les mêmes solutions que (10.1.1).

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{5}y &= \frac{7}{5} \\ \frac{19}{5}y &= -\frac{9}{5} \end{aligned} \tag{10.1.3}$$

Si on multiplie la deuxième équation de (10.1.3) par $5/19$, on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (10.1.1).

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{5}y &= \frac{7}{5} \\ y &= -\frac{9}{19} \end{aligned} \tag{10.1.4}$$

Finalement, si on soustrait $3/5$ fois la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (10.1.4), on obtient la solution de (10.1.1).

$$\begin{aligned} x &= \frac{32}{19} \\ y &= -\frac{9}{19} \end{aligned}$$



10.1.1 Systèmes d'équations linéaires avec deux inconnues

Exemple 10.1.4

Résoudre si possible le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 1 \\ 4x - 10y &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.5}$$

Pour résoudre ce système, on procède comme on a fait pour le système d'équations linéaires de l'exemple de la section précédente. Si on multiplie la première équation de (10.1.5) par 1/2, on obtient le système d'équations linéaires suivant.

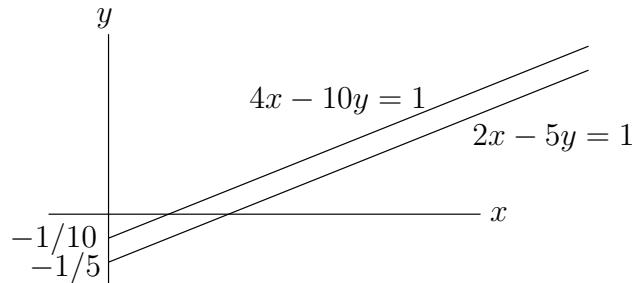
$$\begin{aligned} x - \frac{5}{2}y &= \frac{1}{2} \\ 4x - 10y &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

Si on soustrait 4 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.6), on obtient le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{aligned} x - \frac{5}{2}y &= \frac{1}{2} \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

Ce système est absurde. Cela veut dire qu'il n'y a pas de solutions pour le système (10.1.5).

Graphiquement, ce n'est pas une surprise qu'il n'y ait pas de solutions car les deux droites sont parallèles comme on peut le voir dans la figure suivante. Elles ne se couperont donc jamais.



Exemple 10.1.5

Le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ 1.5x - 2.5y &= 0.5 \end{aligned} \tag{10.1.7}$$

a un nombre infini de solutions. Ce sont tous les points (x, y) de la droite $y = 3x/5 - 1/5$. En effet, si on soustrait 1/2 fois la première équation de la seconde équation, on obtient le système

$$3x - 5y = 1$$

$$0 = 0$$

Les deux équations du système (10.1.7) représentent donc la même droite dans le plan. Tous les points de cette droite satisfont les deux équations linéaires. La forme paramétrique de cette droite est $(x, y) = (s, 3s/5 - 1/5)$ pour $s \in \mathbb{R}$. 

Jusqu'à maintenant, on a considéré des systèmes d'équations linéaires formés de seulement deux équations linéaires. Il pourrait y avoir plus de deux équations linéaires.

Exemple 10.1.6

Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ x - 2y &= 4 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned} \tag{10.1.8}$$

On échange la première et deuxième équation du système d'équations linéaires (10.1.8) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 1 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned} \tag{10.1.9}$$

On soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.9) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 7y &= -7 \\ 7y &= -7 \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la troisième équation dans ce dernier système d'équations linéaires pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 7y &= -7 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

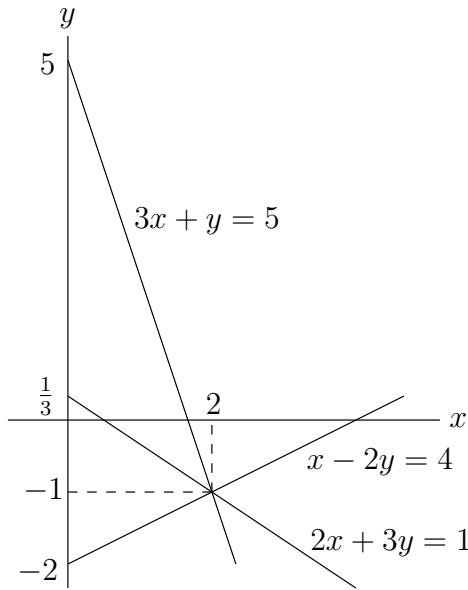
On peut éliminer la troisième équation du système d'équations linéaires (10.1.10) car elle est évidemment toujours satisfaite. De plus, on peut diviser la deuxième équation par 7 pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ y &= -1 \end{aligned} \tag{10.1.11}$$

Finalement, si on additionne 2 fois la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (10.1.11), on obtient la solution de (10.1.8).

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

On voit dans la figure suivante que le point $(2, -1)$ est le point d'intersection des trois droites $2x + 3y = 1$, $x - 2y = 4$ et $3x + y = 5$.



Les exemples précédents semblent indiquer que pour un système d'équations linéaires à deux inconnues, on retrouve une des situations suivantes : le système n'a pas de solutions, le système a une seule solution, ou le système a une nombre infini de solutions. C'est en fait ce que l'interprétation graphique démontre. En géométrie Euclidienne, deux droites distinctes peuvent être parallèles, et donc elles ne se coupent pas, ou elles peuvent se couper en un seul point.

10.1.2 Systèmes d'équations linéaires avec plus de deux inconnues

Exemple 10.1.7

Résoudre si possible le système d'équations linéaires avec trois inconnues

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.12}$$

Pour résoudre un tel système, on peut utiliser la méthode classique de substitution. De la première équation, on obtient

$$z = 1 - 2x - y. \tag{10.1.13}$$

Si on substitue cette expression pour z dans la deuxième équation, on obtient

$$x + 2y + (1 - 2x - y) = -x + y + 1 = 1.$$

Après simplification, on trouve

$$y = x . \quad (10.1.14)$$

Si on substitue (10.1.14) dans (10.1.13), on trouve

$$z = 1 - 3x . \quad (10.1.15)$$

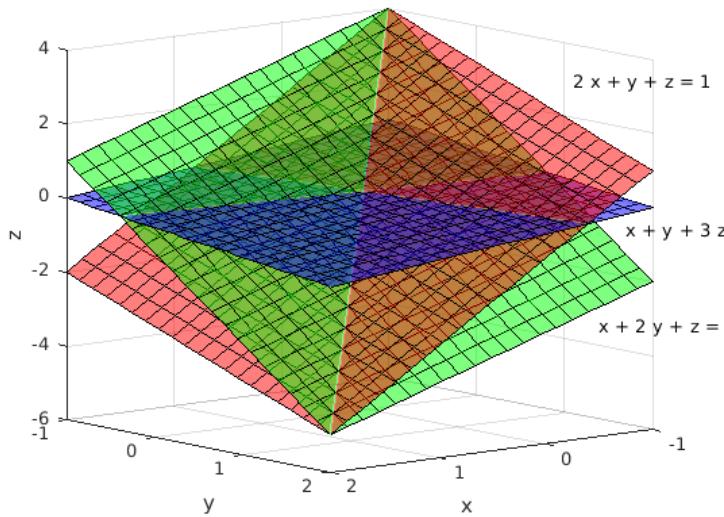
Finalement, si on substitue (10.1.14) et (10.1.15) dans la troisième équation, on trouve

$$x + y + 3z = x + x + 3(1 - 3x) = 1 .$$

Ce qui donne $x = 2/7$. Si on substitue cette valeur de x dans (10.1.14) et (10.1.15), on trouve $y = 2/7$ et $z = 1/7$.

On a donc la solution $(x, y, z) = (2/7, 2/7, 1/7)$.

On peut interpréter graphiquement la solution du système d'équations linéaires ci-dessus. Chaque équation est l'équation d'un plan. La solution est le point d'intersection des trois plans. On peut constater dans la figure suivante qu'il est difficile de repérer le point d'intersection des trois plans.



On peut aussi utiliser les opérations sur les équations pour résoudre le système d'équations linéaires (10.1.12).

Exemple 10.1.8

Résoudre le système d'équations linéaires (10.1.12) à l'aide des opérations sur les équations.

On échange la première et troisième équation de (10.1.12) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned} \quad (10.1.16)$$

On soustrait la première équation de la deuxième équation et on soustrait 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.16) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ y - 2z &= 0 \\ -y - 5z &= -1 \end{aligned} \tag{10.1.17}$$

On additionne la deuxième équation à la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.17) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ y - 2z &= 0 \\ -7z &= -1 \end{aligned}$$

On multiplie la troisième équation de ce système d'équations linéaires par $-1/7$ pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ y - 2z &= 0 \\ z &= 1/7 \end{aligned} \tag{10.1.18}$$

On additionne 2 fois la troisième équation à la deuxième équation et on soustrait 3 fois la troisième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (10.1.18) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + y &= 4/7 \\ y &= 2/7 \\ z &= 1/7 \end{aligned} \tag{10.1.19}$$

Finalement, on soustrait la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (10.1.19), pour obtenir la solution du système d'équations linéaires (10.1.12) que l'on a trouvé ci-haut ; c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} x &= 2/7 \\ y &= 2/7 \\ z &= 1/7 \end{aligned}$$



Exemple 10.1.9

Résoudre si possible le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \tag{10.1.20}$$

On échange la première et troisième équation de (10.1.20) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.21}$$

On soustrait la première équation de la deuxième équation et on soustrait 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.21) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3y + z &= 1 \\ 3y + z &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.22}$$

On soustrait la deuxième équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.22) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3y + z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

On peut éliminer la troisième équation. Si on multiplie la deuxième équation de ce système par $1/3$, on obtient le système

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{10.1.23}$$

On additionne la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (10.1.23) pour obtenir le système

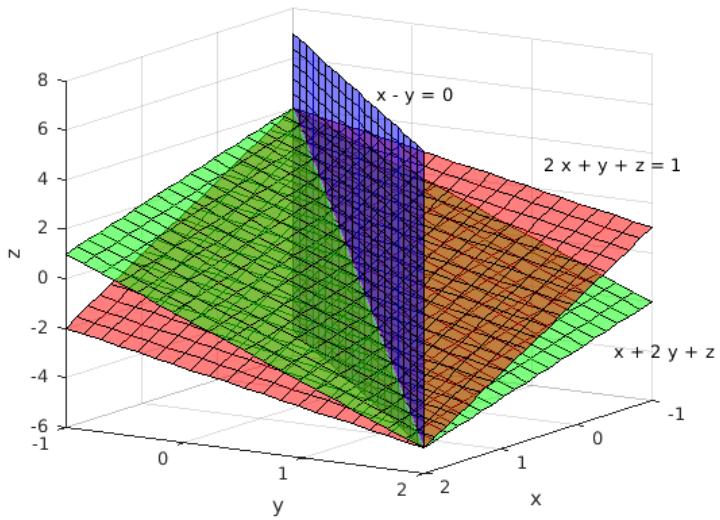
$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{10.1.24}$$

On ne peut plus simplifier le système. On a $x = 1/3 - z/3$ et $y = 1/3 - z/3$. Les points (x, y, z) qui résolvent le système d'équations linéaires (10.1.20) forment donc une droite dont la représentation paramétrique est

$$(x, y, z) = (-s/3 + 1/3, -s/3 + 1/3, s)$$

pour $s \in \mathbb{R}$.

On peut voir dans la figure suivante que les solutions du système d'équations linéaires forment une droite dans l'espace qui représente l'intersection des trois plans.



Cette droite possède la représentation paramétrique $(x, y, z) = (-s/3 + 1/3, -s/3 + 1/3, s)$ pour $s \in \mathbb{R}$. La forme standard pour cette droite est $x = y = \frac{z - 1}{-3}$.



Exemple 10.1.10

On laisse au lecteur la tâche de montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 4x + 2y + 2z &= 2 \\ -2x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

possède un nombre infini de solutions de la forme $(x, y, z) = (s, t, 1 - 2s - t)$ pour tout s et t réels. L'ensemble des solutions forme le plan $z = 1 - 2x - y$. En fait, les trois équations linéaires du système sont trois équations qui représentent le même plan.



Exemple 10.1.11

Montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 3x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.25}$$

n'a pas de solution.

On échange la première et deuxième équation de (10.1.25) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ 3x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned} \tag{10.1.26}$$

On soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (10.1.26) pour obtenir le

système

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\ -3y - z &= -3 \\ -3y - z &= -5\end{aligned}\tag{10.1.27}$$

Il est impossible de satisfaire simultanément la deuxième et la troisième équation du système d'équations linéaires (10.1.17) ; si on soustrait la deuxième équation de la troisième équation on obtient $0 = -2$ qui est impossible.



L'interprétation des solutions de systèmes d'équations linéaires à l'aide de plan dans l'espace nous permet de conclure qu'un système d'équations linéaires (avec trois inconnues et trois équations) peut avoir aucune solution, une seule solution, un nombre infini de solutions qui forment une droite, ou un nombre infini de solutions qui forment un plan.

Avec trois inconnues, on a déjà atteint les limites de la visualisation graphique des systèmes d'équations linéaires. De plus, il devient laborieux de résoudre algébriquement de tels systèmes. On doit donc introduire une nouvelle approche pour résoudre les systèmes d'équations linéaires qui nous permettra de travailler avec plus de trois inconnues. Ce nouvel outil est l'algèbre linéaire.

10.2 Matrices

À la section précédente, on a constaté que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec trois équations et trois inconnues demandait beaucoup d'attention. On peut facilement imaginer que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec plus que trois inconnues et trois équations devient rapidement très ardu.

Nous devons donc développer des outils qui nous permettront de résoudre efficacement les systèmes avec un grand nombre d'inconnues et d'équations. Notre premier but est de représenter de façon simple et claire les systèmes d'équations linéaires. En fait, cette notation va grandement influencer le développement des outils pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Définition 10.2.1

Une **matrice** A est un tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a n lignes et m colonnes. On dit que c'est une **matrice de dimension** $n \times m$. Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés les **composantes** ou **éléments** de la matrice A . Le nombre $a_{i,j}$ est la composante sur la i^e ligne et dans la j^e colonne.

On dit que la matrice A est **carrée** lorsque $n = m$; on a le même nombre de lignes et colonnes.

Exemple 10.2.2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \pi & 5 & 2.3 \\ 0 & 4 & -7.56 & 1 & -10 \\ -7 & e^2 & 10^6 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension 3×5 alors que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension 1×4 . On a que $a_{1,3} = \pi$, $a_{3,2} = e^2$, $a_{3,5} = \sqrt{5}$, $b_{1,1} = 1$, $b_{1,3} = 7$, etc. ♣

10.2.1 Opérations sur les matrices

Avant de définir des opérations sur les matrices, il faut définir quand deux matrices sont égales.

Définition 10.2.3

On dit que deux matrices A et B sont **égales**, dénoté $A = B$, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. A et B ont le même nombre de lignes et de colonnes.
2. Si n est le nombre de lignes et m est le nombre de colonnes, alors $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

On veut définir des opérations sur les matrices qui prolongeront les opérations sur les vecteurs que l'on connaît déjà ; c'est-à-dire, le produit d'un vecteur par un scalaire, la somme de deux vecteurs et le produit scalaire de deux vecteurs.

Définition 10.2.4

Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est une flèche de l'origine à un point (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n . On identifie un vecteur par le point (x_1, x_2, \dots, x_n) où le vecteur se termine. On écrit

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.2.1)$$

ou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (10.2.2)$$

La représentation du vecteur \mathbf{x} en (10.2.1) est associée à l'aspect géométrique des vecteurs alors que la représentation de \mathbf{x} en (10.2.2) est associée à l'aspect algébrique des vecteurs. En effet, la représentation de \mathbf{x} en (10.2.2) représente une matrice de dimension $n \times 1$. Par la suite, on parlera souvent du vecteur \mathbf{x} quand, en fait, on fera référence à la matrice que l'on retrouve en (10.2.2). C'est le contexte qui déterminera quelle interprétation doit être donnée à \mathbf{x} .

Le produit d'un vecteur \mathbf{x} par un scalaire α et la somme des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} prennent alors la forme suivante :

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire sont des extensions de ces mêmes opérations pour les vecteurs.

Définition 10.2.5

Soit A et B deux matrices de dimension $n \times m$ et α un nombre réel.

1. La **somme** de A et B , dénotée $A + B$, est la matrice C de dimension $n \times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

2. Le **produit** du scalaire α et de la matrice A , dénoté αA , est la matrice C de dimension $n \times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

On remarque que la somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas les mêmes dimensions. La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire possèdent les propriétés suivantes.

Proposition 10.2.6

1. $A + B = B + A$ pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ (commutativité de l'addition).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ pour toutes matrices A , B et C de dimension $n \times m$ (associativité de l'addition).
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α (distributivité du produit scalaire sur la somme de matrices).
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α et β .
5. $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha \beta)A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α et β .

Exemple 10.2.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} C = A + 2B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -10 & 4 \\ 4 & -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+4 & -1+4 & 3+4 & 1-2 \\ -4-6 & 5+2 & -7-10 & 2+4 \\ 3+4 & 6-8 & 9+10 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & -1 \\ -10 & 7 & -17 & 6 \\ 7 & -2 & 19 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Avant d'introduire le produit de deux matrices, revoyons le produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, on aura besoin de la notion de transposée d'une matrice.

Définition 10.2.8

Soit A une matrice de dimension $n \times m$, la **transposée de A** , dénotée A^\top , est la matrice de dimension $m \times n$ dont les éléments $a_{i,j}^\top$ sont $a_{i,j}^\top = a_{j,i}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

La première ligne de A est la première colonne de A^\top . La deuxième ligne de A est la deuxième colonne de A^\top , etc.

Exemple 10.2.9

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$



Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} , deux vecteurs de \mathbb{R}^n que l'on représente sous la forme de matrices de dimension $n \times 1$. On définit le produit de \mathbf{x}^\top et \mathbf{y} de la façon suivante :

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right).$$

La matrice \mathbf{x}^\top est de dimension $1 \times n$, la matrice \mathbf{y} est de dimension $n \times 1$, et le produit $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ est la matrice de dimension 1×1 définie par $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)$.

La tradition veut qu'une matrice (z) de dimension 1×1 soit simplement dénotée z , la valeur de son unique composante. Avec cette convention, le produit de \mathbf{x}^\top et \mathbf{y} est

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \quad (10.2.3)$$

C'est cette présentation du produit scalaire de deux vecteurs que l'on prolonge pour définir le produit de deux matrices.

Définition 10.2.10

Soit A et B deux matrices. La matrice A est de dimension $n \times m$ et la matrice B est de dimension $m \times q$. Le produit AB est la matrice C de dimension $n \times q$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^m a_{i,k} b_{k,j} \quad (10.2.4)$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$.

Les rectangles dans le produit suivant indiquent la ligne de A et la colonne de B qui sont utilisées pour calculer $c_{3,2}$.

$$C = AB = \left(\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \boxed{a_{3,1}} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} b_{1,1} & \boxed{b_{1,2}} & b_{1,3} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,q} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,q} \end{array} \right).$$

On a $c_{3,2} = a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} + \dots + a_{3,m}b_{m,2}$.

La formule (10.2.4) est le produit scalaire du vecteur formé par les composantes de la i^e ligne de A avec le vecteur formé de composantes de la j^e colonne de B . En effet, si

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,m} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix},$$

alors $c_{i,j} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$.

Exemple 10.2.11

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

alors

$$C = AB = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ \boxed{-4} & 5 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & \boxed{2} & -1 \\ -3 & 1 & \boxed{-5} & 2 \\ 2 & -4 & \boxed{5} & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 11 & -11 & 22 & -9 \\ -37 & 25 & \boxed{-68} & 28 \\ 6 & -24 & 21 & -9 \end{array} \right).$$

On a $c_{2,3} = (-4) \times 2 + 5 \times (-5) + (-7) \times 5 = -68$.

Le produit BA est impossible car on ne peut pas faire le produit scalaire d'une ligne de B qui a 4 composantes avec une colonne de A qui a seulement 3 composantes. ♣

Exemple 10.2.12

Si A est une matrice de dimension 3×4 et B est une matrice de dimension 4×2 , alors AB est une matrice de dimension 3×2 . Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (i.e. 2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (i.e. 3). ♣

Le produit de matrices possède les propriétés suivantes :

Proposition 10.2.13

1. $A(BC) = (AB)C$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et toute matrice C de dimension $q \times p$ (associativité du produit de matrices).
2. $A(B+C) = AB + AC$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et toutes matrices B et C de dimension $m \times q$ (distributivité du produit de matrices sur la somme de matrices).
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et tout nombre réel α .

Le produit de nombres réels est commutatif; c'est-à-dire que $ab = ba$ pour tous les nombres réels a et b . On ne retrouve pas cette propriété dans la liste ci-dessus car elle n'est pas vraie pour le produit de matrices.

Pour pouvoir parler de commutativité du produit de matrices, il faut que les matrices soient carrées; si A et B sont des matrices carrées de dimension $n \times n$, alors il est possible de multiplier A à droite par B pour obtenir AB et de multiplier A à gauche par B pour obtenir BA . Malheureusement, même si A et B sont deux matrices carrées de dimension $n \times n$, il est rare que l'on ait $AB = BA$. L'exemple suivant illustre ce fait.

Exemple 10.2.14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux matrices carrées de dimension 2×2 . On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc, $AB \neq BA$.



On termine cette section avec une proposition qui lie la transposée d'une matrice au produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant qui, en lieu même, est très important. La démonstration de ce résultat est une simple mais fastidieuse conséquence de la définition du produit de matrices. On laisse donc le soin aux lecteurs de s'en convaincre.

Proposition 10.2.15

Si A est une matrice de dimension $n \times m$ et B est une matrice de dimension $m \times q$ alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Proposition 10.2.16

Soit A , une matrice de dimension $n \times m$, alors

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

pour tout vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^m et tout vecteur \mathbf{y} de \mathbb{R}^n

Comme les expressions de la forme $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jouent un rôle prédominant en algèbre linéaire, nous allons prouver cette proposition.

Grâce à la relation (10.2.3), on a

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top A^\top) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A^\top \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

où nous avons utilisé la proposition 10.2.15 pour obtenir la deuxième égalité.

Une autre façon de prouver la proposition précédente est de développer chacun des côtés de l'égalité donnée à la proposition précédente. Posons $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$. Les composantes de \mathbf{z} sont

$$z_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. Ainsi,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i y_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j \right) y_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} x_j y_i. \quad (10.2.5)$$

De plus, posons $\mathbf{w} = A^\top \mathbf{y}$. Les composantes de \mathbf{w} sont

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i$$

pour $j = 1, 2, \dots, m$. Ainsi,

$$\langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^m x_j w_j = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} x_j y_i. \quad (10.2.6)$$

Il découle de (10.2.5) et (10.2.6) que la conclusion de la proposition précédente est vraie.

Exemple 10.2.17

Vérifier que

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{z}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8.$$

De plus,

$$\mathbf{w} = A^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -8.$$



Pour conclure cette section, on présente une dernière opération sur les matrices. Celle-ci est valide seulement pour les matrices carrées. Elle ne jouera pas un grand rôle dans ce manuel mais elle est utile en algèbre linéaire, en analyse numérique, etc.

Définition 10.2.18

Soit la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

la **Trace** de la matrice A , dénotée $\text{tr}(A)$, est la somme des éléments sur la diagonale de A ; c'est-à-dire, $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$.

10.2.2 Inverse additif et multiplicatif d'une matrice

On sait que 0 est un élément neutre pour l'addition de nombres réels; c'est-à-dire que $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout nombre réel a . De même, le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication de nombres réels; c'est-à-dire que $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout nombre réel a . Est-ce que l'addition de matrices possède un élément neutre? De même, est-ce que le produit de matrices possède un élément neutre? Pour l'addition, la réponse est simple.

Définition 10.2.19

0 dénote une matrice dont les composantes sont toutes nulles.

Proposition 10.2.20

La matrice 0 de dimension $n \times m$ est l'élément neutre pour l'addition de matrices de dimension $n \times m$. C'est-à-dire que $0 + A = A + 0 = A$ pour toutes matrices A de dimension $n \times m$.

Définition 10.2.21

L'inverse additif d'une matrice A de dimension $n \times m$ est la matrice B de dimension $n \times m$ telle que $A + B = B + A = 0$ où 0 est la matrice nulle de dimension $n \times m$.

Comme l'addition de matrices est définie par l'addition composante par composante, on a $b_{i,j} = -a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. La matrice B est dénotée $-A$. On a $-A = (-1)A$.

L'inverse additif d'une matrice A est unique. En effet, si B et C sont deux inverses additifs de A alors

$$B = B + 0 = B + \underbrace{(A + C)}_{=0} = \underbrace{(B + A)}_{=0} + C = 0 + C = C.$$

Toute matrice A a un seul inverse additif.

Pour définir un élément neutre I pour le produit de matrices, il faut considérer seulement les matrices carrées car cet élément neutre doit satisfaire $IA = AI = A$ pour toutes matrices A . Les deux produits IA et AI sont définis si et seulement si I et A ont le même nombre de lignes et de colonnes.

Certaines composantes d'une matrice carrée jouent un rôle particulier dans l'étude des matrices, c'est le cas des composantes qui forment la diagonale de la matrice.

Définition 10.2.22

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La **diagonale** de la matrice A est l'ensemble des éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ de A .

Définition 10.2.23

I dénote une matrice carrée dont les composantes sur la diagonale sont 1 et les autres composantes sont nulles. La matrice I est appelée la **matrice identité**.

Proposition 10.2.24

La matrice I de dimension $n \times n$ est l'élément neutre pour la multiplication de matrices carrées de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que $IA = AI = A$ pour toutes matrices carrées A de dimension $n \times n$.

Exemple 10.2.25

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A$$

et

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A.$$



Maintenant que l'on a un élément neutre pour le produit de matrices carrées, il est naturel de chercher à définir ce que serait l'inverse d'une matrice. Commençons par revoir la définition de l'inverse multiplicatif pour les nombres réels. L'inverse multiplicatif pour le nombre réel a est le nombre réel b tel que $ba = ab = 1$. Sauf pour $a = 0$, tout nombre réel a possède un inverse multiplicatif.

Exemple 10.2.26Si $a = 4$, alors $b = 0.25$ est l'inverse de a car $ab = ba = 1$.

Comme pour la multiplication de nombres réels, on peut définir l'inverse d'une matrice carrée.

Définition 10.2.27

S'il existe, l'inverse (multiplicatif) d'une matrice carrée A de dimension $n \times n$ est la matrice B de dimension $n \times n$ telle que $AB = BA = I$. La matrice B est dénotée A^{-1} . On dit que la matrice carrée A est **inversible** si A possède un inverse.

Contrairement aux nombres réels, les matrices carrées ne possèdent pas toutes des inverses. Par contre, si la matrice carrée A a un inverse B alors cet inverse est unique. En effet, si C est une autre matrice telle que $AC = CA = I$ alors

$$B = BI = B \underbrace{(AC)}_{=I} = \underbrace{(BA)C}_{=I} = IC = C.$$

Exemple 10.2.28

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a que $AB = BA = I$. Donc, $A^{-1} = B$.



Exemple 10.2.29

Par contre, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

n'a pas d'inverse. Supposons que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

soit l'inverse de A . On doit donc avoir que $AB = I$; c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-2c & -b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est impossible de trouver a et b tels que $a + 2c = 1$ et $-a - 2c = 0$ simultanément. De même, il est impossible de trouver b et d tels que $b + 2d = 0$ et $-b - 2d = 1$. On ne peut donc pas trouver d'inverse pour A .



Il est généralement très difficile de déterminer si une matrice possède un inverse et de trouver cet inverse s'il existe. Dans une prochaine section, nous donnerons une méthode pour trouver l'inverse d'une matrice si cet inverse existe.

10.3 Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires

Les matrices nous permettent de développer une méthode pour déterminer si un système d'équations linéaires possède une solution, un nombre infini de solutions ou aucune solution. Nous commençons par une méthode qui nous permet de trouver les solutions d'un système d'équations linéaires quand celui-ci a des solutions.

Considérons le système d'équations linéaires suivant avec m inconnues et n équations.

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ &\vdots && \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{aligned} \tag{10.3.1}$$

On peut exprimer ce système d'équations linéaires à l'aide des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Alors, le système d'équations linéaires (10.3.1) peut être exprimé sous la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{B}. \tag{10.3.2}$$

Proposition 10.3.1

Résoudre (10.3.1) est équivalent à trouver les vecteurs \mathbf{x} qui satisfont (10.3.2) s'il y en a.

La matrice A est la matrice des coefficients de \mathbf{x} dans le système d'équations linéaires (10.3.1).

10.3.1 Méthode d'élimination de Gauss**Définition 10.3.2**

La **matrice augmentée** associée au système d'équations linéaires (10.3.1) est la matrice

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right).$$

Au lieu d'effectuer les opérations sur les équations du système d'équations linéaires (10.3.1) présentées à la méthode 10.1.2, on effectue les mêmes opérations sur les lignes de la matrice augmentée. À fin de simplifier la description des opérations sur les lignes, nous utiliserons la terminologie suivante :

1. R_i désigne la i^e ligne.
2. Multiplier la i^e ligne par α est dénoté $\alpha R_i \rightarrow R_i$.
3. Additionner α fois la j^e ligne à la i^e ligne est dénoté $\alpha R_j + R_i \rightarrow R_i$.
4. Échanger les i^e et j^e lignes est dénoté $R_i \leftrightarrow R_j$.

Exemple 10.3.3

Utiliser la notation matricielle pour résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 2 \\ x + y + 2z &= -2 \\ -2x - y + z &= 1 \end{aligned} \tag{10.3.3}$$

La matrice augmentée associée à ce système d'équations linéaires est

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ et $2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right).$$

$-R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_2$ et $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

$(1/4)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 - R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$(A | B) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19/4 \\ 0 & 1 & 0 & -37/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right).$$

Puisque la première, deuxième et troisième colonne de la matrice augmentée sont respectivement associées à x , y et z , on obtient la solution

$$x = 19/4, \quad y = -37/4 \quad \text{et} \quad z = 5/4$$

du système d'équations linéaires (10.3.3). ♣

10.3.2 Matrices inverses

Avec cette nouvelle notation pour les systèmes d'équations linéaires, on peut maintenant donner une méthode pour trouver la matrice inverse d'une matrice carrée si un tel inverse existe.

Soit A et B deux matrices carrées tel que $B = A^{-1}$. On peut déduire de l'égalité $AB = I$ que

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Par exemple, on obtient de

2^e colonne

2^e colonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|ccc} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \cdots & b_{n,n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \\ \vdots \\ b_{n,2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right).$$

La deuxième colonne de la matrice I est A multiplié à droite par la deuxième colonne de la matrice B . En générale, la k^e colonne de la matrice identité I est A multiplié à droite par la k^e colonne de la matrice B .

Chaque colonne de B donne un vecteur (i.e. une matrice de dimension $n \times 1$). La k^e colonne de B donne le vecteur

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{pmatrix}.$$

De même, la k^e colonne de I donne le vecteur \mathbf{e}_k dont les composantes sont 0 sauf pour la k^e qui est 1. Par exemple,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc reformuler la remarque du paragraphe précédent par $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \leq k \leq n$. C'est cette dernière propriété qui justifie la méthode suivante pour trouver l'inverse d'une matrice carrée si celui-ci existe.

Proposition 10.3.4

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ qui possède une matrice inverse, alors la k^e colonne \mathbf{b}_k de la matrice A^{-1} est la solution de l'équation

$$A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$$

pour $1 \leq k \leq n$. De plus, si A est une matrice de dimension $n \times n$ et une des équations $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \leq k \leq n$ n'a pas de solution, alors A n'est pas inversible.

Soit A une matrice inversible (i.e. qui a un inverse) de dimension $n \times n$. Pour trouver les n colonnes de la matrice inverse A^{-1} , il faut résoudre n équations de la forme $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$. Pour chaque valeur de k , il faut donc réduire la matrice augmentée $(A | \mathbf{e}_k)$ à une forme simple qui donnera la k^e colonne \mathbf{b}_k de A^{-1} . Comme A est une matrice carrée inversible de dimension $n \times n$, on peut assumer que la forme simple qui résulte de la réduction de la matrice augmentée $(A | \mathbf{e}_k)$ remplace A par la matrice identité de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que la forme simple finale est $(I | \mathbf{b}_k)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait qu'une des équations $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ n'a pas de solutions.

Or, pour les n matrices augmentées $(A | \mathbf{e}_k)$ pour $1 \leq k \leq n$, les mêmes opérations sur les lignes sont effectuées pour réduire la matrice A à la matrice identité. On peut donc regrouper les n matrices augmentées en une large matrice augmentée

$$(A | I) = (A | \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Si on réduit la matrice A à la matrice identité I de dimension $n \times n$, on obtient

$$(I | B) = (I | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n).$$

\mathbf{b}_1 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, \mathbf{b}_2 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$, etc. Ainsi,

$$A^{-1} = B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n).$$

Exemple 10.3.5

Trouver l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice augmentée

$$(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A | I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R_3 - 5R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$(A | I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right).$$

$(1/2)R_2 \rightarrow R_2$ et $(1/10)R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$(A | I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

$R_2 + (1/2)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A | I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$(A | I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

L'inverse de la matrice A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

On invite le lecteur à vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. 

Proposition 10.3.6

Si A est une matrice inversible de dimension $n \times n$ et \mathbf{b} est un vecteur de dimension $n \times 1$, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution et cette solution est unique. Cette solution est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

En effet, si A est inversible, une solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ car

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

De plus, si \mathbf{y} est une solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alors

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}(A\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow I\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

De la proposition précédente on déduit que si A est une matrice inversible alors la seule solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ce qui est un peu plus surprenant est que l'inverse est aussi vrai.

Proposition 10.3.7

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ telle que la seule solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors A est inversible.

10.3.3 Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3

Lors de l'étude des vecteurs, nous avons donné quelques exemples où il fallait déterminer si trois plans se coupaient simultanément et, si oui, déterminer l'intersection de ces trois plans.

Considérons les trois plans suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 : \quad & m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 = b_1 , \\ \mathcal{M}_2 : \quad & m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 = b_2\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{M}_3 : \quad m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 = b_3 .$$

Les points \mathbf{x} qui appartiennent à l'intersection des trois plans doivent satisfaire le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 &= b_1 \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 &= b_2 \\ m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

C'est un système de la forme $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & b_1 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & b_2 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & b_3 \end{array} \right) .$$

Il y a quatre possibilités :

1. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solutions. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 n'ont aucun point en commun.
2. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une seule solution. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 ont un seul point commun.
3. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent d'un paramètre. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est une droite donnée par la représentation paramétrique des solutions.
4. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent de deux paramètres. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est un plan. C'est le cas où les trois équations linéaires sont des multiples l'une de l'autre et représentent le même plan.

10.4 Déterminant

Dans cette section, nous définissons une fonction qui, à toute matrice carrée A , associe un nombre réel dénoté $\det(A)$ (certains auteurs écrivent simplement $\det A$ mais nous ne ferons pas comme eux). Cette fonction permettra en théorie de déterminer si une matrice possède un inverse. L'expression « en théorie » indique qu'il est en fait très onéreux d'évaluer cette fonction. En pratique, pour les matrices de grandes dimensions, on utilise d'autres méthodes (par exemple, la proposition 10.3.7) pour déterminer si une matrice est inversible.

10.4.1 introduction

Pour définir ce qu'est le déterminant d'une matrice $n \times n$, nous devons premièrement définir ce qu'est une permutation des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Définition 10.4.1

Comme le nom l'indique, une **permutation** des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est tout simplement une liste ordonnée $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de tous les éléments de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. En termes mathématiques, $\sigma_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ et $\sigma_i \neq \sigma_j$ pour $i \neq j$.

Par exemple, les permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$ sont $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$. Quelles seront les 24 permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$?

On dénote par S_2 l'ensemble $\{(1, 2), (2, 1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$. On dénote par S_3 l'ensemble $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. En générale, on dénote par S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Définition 10.4.2

Inverser deux éléments d'une permutation est appelé une **transposition** sur une permutation.

Par exemple, inverser le deuxième et troisième élément de $(1, 3, 2)$ donne $(1, 2, 3)$, inverser le troisième et quatrième élément de $(1, 4, 3, 2, 5)$ donne $(1, 4, 2, 3, 5)$, et inverser le deuxième et quatrième élément de $(1, 4, 3, 2)$ donne $(1, 2, 3, 4)$.

Définition 10.4.3

Le **signe d'une permutation** de S_n est définie par

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut effectuer un nombre pair de transpositions pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{s'il faut effectuer un nombre impair de transpositions pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{sgn}(2, 1) = -1$ car une seule transposition est nécessaire pour réduire $(2, 1)$ à $(1, 2)$; il suffit d'inverser le premier et deuxième élément. On a que $\operatorname{sgn}(2, 3, 1) = 1$ car deux transpositions sont nécessaires pour réduire $(2, 3, 1)$ à $(1, 2, 3)$; on inverse le deuxième et troisième élément de $(2, 3, 1)$ pour obtenir $(2, 1, 3)$ et on inverse le premier et deuxième élément de $(2, 1, 3)$ pour obtenir $(1, 2, 3)$.

Définition 10.4.4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant** de la matrice A , dénoté $\det(A)$, est défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}. \end{aligned}$$

Exemple 10.4.5

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

alors $\det(A) = 1 \times 5 - 2 \times (-1) = 7$. ♣

Définition 10.4.6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Le **déterminant** de la matrice A , dénoté $\det(A)$, est défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} a_{3, \sigma_3} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ &\quad + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \end{aligned}$$

Exemple 10.4.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 5 \times 4 - 1 \times 3 \times (-5) - 2 \times (-2) \times 4 + 2 \times 3 \times (-3) \\ &\quad + (-1) \times (-2) \times (-5) - (-1) \times 5 \times (-3) = 8. \end{aligned}$$



En générale, le déterminant est définie de la façons suivante.

Définition 10.4.8

Si A est une matrice de dimension $n \times n$, le **déterminant** de A , dénoté $\det(A)$, est définie par

$$\det(A) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} \cdots a_{n, \sigma_n}.$$

10.4.2 Le signe d'une permutation 

Est-ce que le déterminant est bien défini ? En particulier, il y a plusieurs choix possibles de transpositions pour réduire une permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ à la permutation trivial $(1, 2, \dots, n)$. Est-ce que le nombre de transpositions pour chaque choix est toujours pair ou impair ? Il faut une réponse affirmative à cette question si on veut que le signe d'une permutation soit indépendant du choix de transpositions utilisées pour réduire cette permutation à la permutation trivial.

On commence par donner une définition plus précise d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Définition 10.4.9

Une **permutation** sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est une fonction injective de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans lui-même.

L'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est dénoté S_n .

Une **transposition** est une permutation $\tau \in S_n$ qui est définie de la façon suivante. Ils existent i et j dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tels que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Théorème 10.4.10

Si σ est une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ alors il existe des transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_s .$$

La représentation de σ en termes de transpositions n'est pas unique. Par contre, si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ est un autre ensemble de transpositions telles que

$$\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_t$$

alors t est pair si et seulement si s est pair (donc, t est impair si et seulement si s est impair).

Ce dernier théorème nous permet donc de définir sans ambiguïté le signe d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Définition 10.4.11

Le **signe** d'une permutation $\sigma \in S_n$, dénoté $\text{sgn}(\sigma)$, est définie par

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut un nombre pair de transpositions pour représenter } \sigma \\ -1 & \text{s'il faut un nombre impair de transpositions pour représenter } \sigma \end{cases} .$$

Maintenant que l'on sait que le signe d'une permutation est bien défini, on peut dire que le déterminant d'une matrice carré est bien défini.

10.4.3 Calcul du déterminant

Il y a un lien entre la formule pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 2×2 et celle pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 3×3 .

Soit A une matrice de dimension 3×3 et posons

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} .$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\ &= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3}) . \end{aligned}$$

De façon semblable, on peut démontrer la proposition suivante

Proposition 10.4.12

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension 2×2 obtenue d'une matrice A de dimension 3×3 en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j}) \quad (10.4.1)$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k}) \quad (10.4.2)$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3\}$.

La somme en (10.4.1) est un développement selon une ligne pour calculer le déterminant de A alors que la somme en (10.4.2) est un développement selon une colonne pour calculer le déterminant de A . Un bon choix de développement peut grandement simplifier le calcul du déterminant.

Exemple 10.4.13

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

il est très avantageux de développer selon la deuxième ligne. On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= -a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{2,2} \det(A_{2,2}) - a_{2,3} \det(A_{2,3}) \\ &= -0 \times \det(A_{2,1}) + 5 \times \det(A_{2,2}) - 0 \times \det(A_{2,3}) \\ &= 5 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 5(3 \times 7 - (-1) \times (-2)) = 95. \end{aligned}$$

Les matrices $A_{i,j}$ proviennent de la matrice A à laquelle on a enlevé la i^e ligne et la j^e colonne.

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{provient de } A = \begin{pmatrix} \blacksquare & 2 & -1 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -\blacksquare & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ A_{2,2} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{provient de } A = \begin{pmatrix} 3 & \blacksquare & -1 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -2 & \blacksquare & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{provient de } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -\blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -2 & 4 & \blacksquare \end{pmatrix}.$$



La proposition 10.4.12 a une version équivalent pour les matrices de dimension $n \times n$ avec n un entier positif.

Proposition 10.4.14

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenue d'une matrice A de dimension $n \times n$ en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, on a que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j})$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

On peut utiliser cette proposition récursivement pour calculer le déterminant d'une matrice.

Exemple 10.4.15

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on développe selon la troisième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{3,1} \det(A_{3,1}) - a_{3,2} \det(A_{3,2}) + a_{3,3} \det(A_{3,3}) - a_{3,4} \det(A_{3,4}) + a_{3,5} \det(A_{3,5}) \\ &= 0 \times \det(A_{3,1}) - 3 \det(A_{3,2}) + 0 \times \det(A_{3,3}) - 0 \times \det(A_{3,4}) + 0 \times \det(A_{3,5}) \\ &= -3 \det(A_{3,2}). \end{aligned}$$

Posons

$$B = A_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on développe la matrice B selon la deuxième ligne, on obtient

$$\det(B) = -b_{2,1} \det(B_{2,1}) + b_{2,2} \det(B_{2,2}) - b_{2,3} \det(B_{2,3}) + b_{2,4} \det(B_{2,4})$$

$$\begin{aligned}
 &= -0 \times \det(B_{2,1}) + 0 \times \det(B_{2,2}) - 0 \times \det(B_{2,3}) + 3 \det(B_{2,4}) \\
 &= 3 \det(B_{2,4}) .
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\det(A) = -3 \det(B) = -9 \det(B_{2,4}) .$$

Posons

$$C = B_{2,4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si on développe selon la deuxième ligne de C (toute autre choix de ligne ou colonne serait valable), on obtient

$$\begin{aligned}
 \det(C) &= -c_{2,1} \det(C_{2,1}) + c_{2,2} \det(C_{2,2}) - c_{2,3} \det(C_{2,3}) \\
 &= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= 2(1 - 3) + 7(-3 - 3) - 5(3 + 1) = -66 .
 \end{aligned}$$

Ainsi.

$$\det(A) = -9 \det(C) = -9 \times (-66) = 594 .$$



Exemple 10.4.16

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ,$$

il est très avantageux de développer selon la première colonne. On a

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{3,1} \det(A_{3,1}) \\
 &= 3 \det(A_{1,1}) - 0 \times \det(A_{2,1}) + 0 \times \det(A_{3,1}) \\
 &= 3 \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times 5 \times 4 = 60 .
 \end{aligned}$$



La matrice de l'exemple précédent est d'un type particulier.

Définition 10.4.17

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire supérieure** si les composantes de A qui sont sous la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire inférieure** si les composantes de A qui sont au-dessus de la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$.

L'exemple précédent montre que le déterminant des matrices triangulaires supérieures (de dimensions 2×2 ou 3×3) est le produit des éléments sur la diagonale. Il en est de même pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 10.4.18

Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure) de dimension $n \times n$, alors

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

C'est-à-dire que le déterminant de A est le produit des éléments sur la diagonale de A .

Remarque 10.4.19 

La démonstration de cette proposition est très simple. Le seul terme de la forme

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

dans la définition 10.4.8 du déterminant qui ne contient possiblement pas un facteur nul est donné par la permutation $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toutes les autres permutations σ vont avoir $\sigma(k) < k$ pour au moins une valeur de k . ♠

Le déterminant possède les propriétés suivantes.

Proposition 10.4.20

Soit A un matrice de dimension $n \times n$.

1. Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de A , on obtient une matrice B telle que $\det(B) = -\det(A)$.
2. Si on ajoute une ligne de A à une autre ligne de A , on obtient une matrice B telle que $\det(B) = \det(A)$.
3. Si on ajoute une colonne de A à une autre colonne de A , on obtient une matrice B telle que $\det(B) = \det(A)$.
4. Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par une nombre α , on obtient une matrice B telle que $\det(B) = \alpha \det(A)$.

On peut utiliser ces propriétés pour calculer le déterminant d'une matrice. Dans l'exemple qui suit, on dénote la i^e ligne par R_i et la j^e colonne par C_j , comme on l'a fait précédemment.

Exemple 10.4.21

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On utilise les opérations sur les lignes et colonnes de A pour réduire le calcul du déterminant de A au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

$R_1 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $-(1/3)R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\det(A) = -(3)(-3) \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

$R_2 + R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\det(A) = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \end{pmatrix} .$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \end{pmatrix} .$$

$C_2 + C_3 \rightarrow C_2$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{pmatrix} .$$

Finalement,

$$\det(A) = -9 \times 1 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{10}{3} = 40 .$$



Les propriétés énoncées à la proposition 10.4.20 sont vrais pour toutes les valeurs positives de n . Pour calculer le déterminant d'une matrice A , on n'utilise pas la définition du déterminant mais on utilise les propriétés données à la proposition 10.4.20 pour réduire la matrice A à un matrice triangulaire supérieure. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est alors très simple à calculer, c'est le produit des éléments sur sa diagonale.

On conclut cette section en remplissant la promesse que nous avons fait au premier paragraphe de la section.

Théorème 10.4.22

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

10.5 Suites dans \mathbb{R}^n

Dans les exemples qui suivent, nous aurons besoin de la notion de convergence dans \mathbb{R}^n . Soit $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$, une suite de vecteurs dans \mathbb{R}^n . Que veut-on dire par la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$ tend vers un vecteur \mathbf{w} ?

Définition 10.5.1

On dit que la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ converge (ou tend) vers \mathbf{w} si $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}\| \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow \infty$. On écrit $\mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{w}$ lorsque $j \rightarrow \infty$ ou $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{v}_j = \mathbf{w}$.

Dans la définition précédente, nous avons utilisé la formule pour calculer la longueur d'un vecteur introduite en (9.1.3) pour calculer la distance entre deux vecteurs. Plus précisément, nous avons utilisé la formule

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 10.5.2

La suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ converge vers \mathbf{w} si et seulement si la i^{th} composante de \mathbf{v}_j converge vers la i^{th} composante de \mathbf{w} lorsque $j \rightarrow \infty$ pour tout i .

10.6 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 10.6.1

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Le nombre λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur non nul \mathbf{v} tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Les vecteurs non nuls \mathbf{v} qui satisfont $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ sont appelés les **vecteurs propres** de A associés à la valeur propre λ .

Notons que si \mathbf{v} est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $\alpha\mathbf{v}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En effet,

$$A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}).$$

Il y a donc un nombre infini de vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée A , on remarque que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$$

donne l'équation

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (10.6.1)$$

Le nombre λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul qui satisfait (10.6.1). Or, il découle de la proposition 10.3.6 qu'une condition nécessaire pour que (10.6.1) ait une solution non nulle est que $A - \lambda I$ n'ait pas d'inverse. Grâce au théorème 10.4.22, $A - \lambda I$ n'a pas d'inverse si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$. On obtient ainsi la méthode suivante pour trouver les valeurs propres d'une matrice carré.

Proposition 10.6.2

Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines du **polynôme caractéristique**

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Pour trouver un vecteur propre \mathbf{v} associé à une valeur propre λ , il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Rappelons ce qu'est un nombre complexe. Cela va être nécessaire pour bien comprendre les valeurs propres.

Définition 10.6.3

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$$z = a + b i$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la **partie réelle** de z , $b \in \mathbb{R}$ est la **partie imaginaire** de z et $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est dénoté \mathbb{C} .

On a que i est la racine carrée de -1 . Pour cette raison, il est fréquent de voir l'énoncé $i = \sqrt{-1}$. Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle représentent les nombres réelles. Pour cette raison, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 10.6.4

Les opérations d'addition et de multiplication pour les nombres complexes $a_1 + b_1 i$ et $a_2 + b_2 i$ sont définies par :

1. $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$
2. $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

Définition 10.6.5

Le **complexe conjugué** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$.

Définition 10.6.6

La **valeur absolue** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est définie par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si $z = a + bi$ et $b = 0$ (i.e. $z \in \mathbb{R}$), alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. La valeur absolue pour les nombres complexes est donc une extension de la valeur absolue pour les nombres réelles. Puisque $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$, on a que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Remarque 10.6.7

Toute les matrices A que nous allons considérer ont seulement des composantes réelles. Néanmoins, les racines du polynôme caractéristique associé à A , et donc les valeurs propres de A , peuvent être des nombres complexes. Si λ est une valeur propre complexe (i.e. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) pour une matrice dont toutes les composantes sont réelles, alors les composantes d'un vecteur propre associé à λ seront généralement complexes. ♠

Exemple 10.6.8

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$. Ce sont les deux valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 4$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

on obtient le système

$$(A - 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6.2)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/3)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (10.6.2) satisfont donc $x_1 - x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$. Tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_1 associé à λ_1 .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A + I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6.3)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (10.6.3) satisfont donc $2x_1 + 3x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_2 = -2x_1/3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha/3 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 3$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. Comme pour la valeur propre λ_1 , tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_2 associé à λ_2 . 

Exemple 10.6.9

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 .$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i .$$

et

$$\lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i = \overline{\lambda_1} .$$

Il est normal que λ_2 soit le complexe conjugué de λ_1 car, pour les polynômes avec coefficients réels, si z est une racine du polynôme alors \bar{z} est aussi une racine du polynôme. λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

on obtient le système

$$(A - (1 + 2i)I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (10.6.4)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -1 & 0 \\ 4 & -2i & 0 \end{array} \right) .$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array} \right) .$$

$(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array} \right) .$$

Finalement, $R_2 + 2iR_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (10.6.4) satisfont donc $x_1 - (i/2)x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = (i/2)x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i/2)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien $A\mathbf{x}_1 = (1 + 2i)\mathbf{x}_1$.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1 - 2i$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - (1 - 2i) \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.6.5)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 0 \\ 4 & 2i & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/4) R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 - (2i) R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (10.6.5) satisfont donc $x_1 + (i/2)x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = -(i/2)x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(i/2)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien $A\mathbf{x}_2 = (1 - 2i)\mathbf{x}_2$. 

À l'exemple précédent, on aurait pu trouver un vecteur propre associé à λ_2 sans faire de calculs grâce au résultat de la proposition qui suit. Si \mathbf{v} est un vecteur dont les composantes sont les nombres complexes v_1, v_2, \dots, v_n . On définit le **complexe conjugué** du vecteur \mathbf{v} comme étant le vecteur $\bar{\mathbf{v}}$ dont les composantes sont $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

Proposition 10.6.10

Soit A une matrice de dimension $n \times n$ avec des composantes réelles. Si λ est une valeur propre complexe de A et \mathbf{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et $\bar{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.

À l'exemple précédent, on a trouvé le vecteur propre $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$. Il découle de la proposition précédente que $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ est une valeur propre et $\mathbf{x}_2 = \bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre associé à λ_2 . C'est effectivement ce que l'on a trouvé à l'exemple précédent.

Exemple 10.6.11

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 - \lambda & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-0.5 - \lambda)((1 - \lambda)(1.5 - \lambda) - 3) + (3(1.5 - \lambda) + 4.5) + 3.5(-3 - 1.5(1 - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \end{aligned}$$

où on a calculé le déterminant en développant selon la première ligne. Il y a une formule pour calculer les racines d'un polynôme de degré trois mais elle n'est pas simple. Il a été prouvé qu'il n'existe pas de formule générale pour calculer les racines d'un polynôme de degré plus grand que quatre. Après avoir essayé certaines valeurs entières, on trouve que 1 est une racine. On peut alors diviser le polynôme caractéristique par $\lambda - 1$ pour obtenir

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 3$. Ce sont les trois valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.6.6)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1.5 & -1 & 0.5 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

$-(1/2)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 + 1.5R_2 + R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (10.6.6) satisfont donc $x_1 - x_3 = 0$ et $x_2 - 2x_3 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_3$ et $x_2 = 2x_3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De façon semblable à ce que nous venons de faire pour λ_1 , on trouve que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 2x_3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On trouve que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = x_3$ et $x_2 = 0$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Remarque 10.6.12 ☺

La recherche de vecteurs propres est plus complexe que les exemples précédents semblent indiquer.

Supposons que le polynôme caractéristique après factorisation d'une matrice A de dimension $n \times n$ soit

$$p(\lambda) = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_s)^{n_s}.$$

Les racines distinctes de ce polynôme sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Comme p est un polynôme de degré n , on a que

$$n = \sum_{j=1}^s n_j.$$

On dit que n_j est la **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ_j .

Si $n_j > 1$, on peut s'attendre à ce que l'ensemble E_j des vecteurs propres de A associé à la valeur propre λ_j ne soit pas seulement une ligne dans l'espace qui passe par l'origine mais un plan qui contient l'origine ou un espace plus grande si $n_j \geq 3$. La dimension de E_j est la **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ_j .

Il n'est pas rare que la multiplicité géométrique soit plus petite que la multiplicité algébrique. Il faut alors parler de **vecteurs propres généralisées**. Cela est pour un futur cours d'algèbre linéaire.



10.7 Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires

Exemple 10.7.1

On considère le **système dynamique discret** en deux dimensions

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{n+1} &= A\mathbf{v}_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_4 &= A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ -61/324 \end{pmatrix} \\ &\vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

On semble avoir $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (chacune des composantes de \mathbf{v}_n semble tendre vers 0). Mais ! En est-on certain ? Existe-t-il une façon de répondre à cette question sans avoir à calculer les vecteurs \mathbf{v}_n ?

On pourrait penser que $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ car tous les éléments de la matrice A sont plus petit que 1 en valeur absolue. Mais l'exemple suivant montre que ce n'est pas une bonne raison.

On considère le système dynamique discret en deux dimensions

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{n+1} &= A\mathbf{v}_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.728 \\ 2.736 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \quad \vdots \\
 \mathbf{v}_{40} &= A\mathbf{v}_{39} \approx \begin{pmatrix} 1469.77156796909\dots \\ 1763.72588156290\dots \end{pmatrix} \\
 &\vdots \quad \vdots \\
 \mathbf{v}_{100} &= A\mathbf{v}_{99} \approx \begin{pmatrix} 8.28179745220147\dots \times 10^7 \\ 9.93815694264176\dots \times 10^7 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \quad \vdots
 \end{aligned}$$

On ne semble pas avoir $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il est donc nécessaire de trouver un critère infaillible pour déterminer si l'origine est stable ; c'est-à-dire, pour déterminer si $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la condition initial \mathbf{v}_0 . ♣

Exemple 10.7.2

On a vu que l'on pouvait estimer périodiquement le nombre d'individus (par km^2) d'une population à l'aide d'un système dynamique discret de la forme

$$p_{k+1} = rp_k \tag{10.7.1}$$

où p_k est le nombre d'individus à la fin de la k^e période et r est le taux de croissance relatif. Cette formule ne tient pas compte du fait que le taux de reproduction peut varier avec l'âge. Le taux de croissance r utilisé dans la formule ci-dessus est une moyenne pour l'ensemble de la population.

Supposons que l'on a une population que l'on peut diviser en quatre groupes d'âge. Le premier groupe est formé des jeunes individus qui ne peuvent pas encore se reproduire. Le deuxième groupe est formé des individus qui sont les plus « performants » au niveau reproductif. Le troisième groupe est formé des individus dont les capacités de reproduction déclinent. Finalement, le quatrième groupe est formé des individus qui sont trop âgés pour pouvoir se reproduire.

On possède les statistiques suivantes pour une période donnée (e.g. une année).

groupe	taux de reproduction	taux de décès	taux de transfert au groupe suivant
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.2
3	0.1	0.1	0.2
4	0	0.4	0

Le taux de reproduction des jeunes individus est 0 car ils ne peuvent pas encore se reproduire. Le taux de reproduction des individus les plus âgés est aussi 0 car ils ont passé la période de reproduction. Le deuxième groupe a le taux de reproduction le plus élevé. On note qu'à la fin de chaque période, plusieurs individus d'un groupe ont atteint l'âge requise pour passer au groupe suivant. On indique ce transfert d'un groupe au groupe suivant dans la dernière colonne du tableau ci-dessus.

On aimerait prédire le nombre d'individus dans chacun des quatre groupes à la fin de chaque période.

Posons

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k,1} \\ v_{k,2} \\ v_{k,3} \\ v_{k,4} \end{pmatrix}$$

où $v_{k,i}$ est le nombre d'individus du groupe i après k périodes. On déduit les équations suivantes des statistiques ci-dessus.

$$\begin{aligned} v_{k+1,1} &= 0.7v_{k,1} + 0.2v_{k,2} + 0.1v_{k,3} \\ v_{k+1,2} &= 0.2v_{k,1} + 0.7v_{k,2} \\ v_{k+1,3} &= 0.2v_{k,2} + 0.7v_{k,3} \\ v_{k+1,4} &= 0.2v_{k,3} + 0.6v_{k,4} \end{aligned}$$

Par exemple, pour obtenir la première équation, on note qu'il reste $0.7v_{k,1}$ individus du premier groupe après une période : $0.1v_{k,1}$ individus sont décédés et $0.2v_{k,1}$ ont transférés au deuxième groupe. Par contre, durant cette période, $0.2v_{k,2}$ individus et $0.1v_{k,3}$ individus se sont ajoutés au premier groupe grâce aux naissances provenant du deuxième et troisième groupes respectivement. En raisonnant de façon semblable, on arrive aux trois autres équations.

On peut exprimer ces équations sous la forme du système dynamique discret

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k \tag{10.7.2}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Si \mathbf{v}_0 est donné, on peut calculer les autres vecteurs \mathbf{v}_k récursivement.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_0) = A^2\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{v}_2 = A(A^2\mathbf{v}_0) = A^3\mathbf{v}_0 \\ &\vdots \quad \vdots \\ \mathbf{v}_k &= A^k\mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Soit

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5,000 \\ 20,000 \\ 15,000 \\ 4,000 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 15000 \\ 14500 \\ 5400 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 10750 \\ 12300 \\ 13150 \\ 6140 \end{pmatrix}, \dots \\ \mathbf{v}_{20} &= A\mathbf{v}_{19} \approx \begin{pmatrix} 4562.7737 \\ 3828.2253 \\ 3215.0260 \\ 1907.2974 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{30} = A\mathbf{v}_{29} \approx \begin{pmatrix} 2413.1867 \\ 2025.3504 \\ 1699.8553 \\ 1005.0093 \end{pmatrix}, \dots\end{aligned}$$

où les valeurs ont été arrondies à quatre décimales. Les résultats numériques semblent indiquer que chacune des composantes de \mathbf{v}_k tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Si c'est le cas, la population va disparaître ?

Est-il possible qu'avec des conditions initiales \mathbf{v}_0 différentes, on ait que la population ne disparaît pas ?

Pour le système dynamique discret (10.7.1), on a que la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ tend vers 0 si $|r| < 1$ et la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne converge pas si $|r| > 1$.

Pour le système dynamique discret (10.7.2), peut-on trouver une condition qui nous permettra de conclure que toute orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ approche $\mathbf{0}$. Donc, quelle que soit la condition initiale, la population va disparaître. ♣

L'étude du comportement asymptotique (i.e. lorsque $k \rightarrow \infty$) des orbites $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ du système dynamique discret (10.7.2) est beaucoup plus complexe que l'étude du comportement asymptotique des orbites p_0, p_1, p_2, \dots du système dynamique discret (10.7.1). Dans le cas de (10.7.1), la condition $|r| < 1$ est suffisante (et nécessaire) pour montrer que toutes les orbites approchent l'origine. On aimerait bien avoir un résultat équivalent pour (10.7.2). L'étude des valeurs propres et vecteurs propres va nous permettre d'obtenir un tel résultat. En fait, la valeur absolue de valeurs propres va nous permettre de déterminer si toutes les orbites de (10.7.2) vont converger vers $\mathbf{0}$.

Proposition 10.7.3

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. On considère le système dynamique discret $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont plus petites que 1 en valeur absolue, alors les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendent vers l'origine (i.e. $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $k \rightarrow \infty$) quel que soit le choix de \mathbf{v}_0 .

Exemple 10.7.4 (suite de l'exemple 10.7.2)

Si on revient au système dynamique discret (10.7.2) du début de la section et que l'on calcule les valeurs propres de A , on trouve les quatre valeurs propres : $\lambda_1 \approx 0.9382976$, $\lambda_2 \approx 0.6$, $\lambda_3 \approx 0.58085121 + 0.050885178i$ et $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$. Puisque toutes les valeurs propres de A sont plus petite que 1 en valeur absolue, on aura que les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendront vers $\mathbf{0}$ quelle que soit la condition initiale \mathbf{v}_0 . 

Remarque 10.7.5 

Si les valeurs propres d'une matrice A de dimension $n \times n$ ne sont pas toutes plus petites que 1 en valeur absolue, une étude détaillée des vecteurs propres (généralisés) associés aux valeurs propres qui sont plus petites que 1 en valeur absolue nous permettrait de déterminer la région de l'espace où choisir la condition initiale \mathbf{v}_0 pour que l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ du système $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ tend vers l'origine. L'étude des espaces propres (généralisés) est le sujet d'un cours plus avancé d'algèbre linéaire.

En fait, la région mentionnée au paragraphe précédent est un sous-espace de dimension plus petite que n dans \mathbb{R}^n . Si \mathbf{v}_0 est dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ tendra vers l'origine. Par contre, si \mathbf{v}_0 n'est pas dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne tendra pas vers l'origine. Ce sous-espace est très petit dans le sens suivant. Si vous choisissez au hasard un point de \mathbb{R}^n , il est presque certain que ce point ne sera pas dans le sous-espace. Pour bien comprendre l'explication donnée précédemment, considérons \mathbb{R}^2 . Un sous-espace de dimension 1 dans \mathbb{R}^2 est une droite dans \mathbb{R}^2 qui passe par l'origine. Si vous choisissez un point au hasard de \mathbb{R}^2 , les chances sont nulles que ce soit un point de cette droite. 

Nous ferons appel aux valeurs propres lors de l'étude de la stabilité des points d'équilibre des systèmes d'équations différentielles. Mais avant de quitter cette section, nous étudierons une application importante des valeurs propres et vecteurs propres.

10.8 Chaînes de Markov

Exemple 10.8.1

On considère la population d'une région donnée que l'on peut diviser en deux groupes : les citadins et les paysans. On suppose que la population totale de la région ne change pas.

Soit x_j le nombre de citadins à la j^e année et y_j le nombre de paysans à la j^e année. Comme on suppose que la population totale ne change pas, on a que $x_j + y_j$ est constant en fonction de j .

Une étude montre que 10% des citadins déménagent à la campagne chaque année et 20%

des paysans déménagent dans les villes. Étant donné x_j et y_j , on peut donc déterminer la population des villes et de la campagne l'année suivante.

Après un an, 0.9 des citadins demeurent dans les villes (0.1 des citadins quittent pour la campagne) et 0.2 des paysans déménagent dans les villes pour donner le total de x_{j+1} citadins. De même, après un an, 0.8 des paysans demeurent à la campagne (0.2 des paysans quittent pour les villes) et 0.1 des citadins déménagent à la campagne pour donner le total de y_{j+1} paysans. En termes mathématiques, on a le système dynamique discret

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= 0.9x_j + 0.2y_j \\y_{j+1} &= 0.1x_j + 0.8y_j\end{aligned}$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. On peut récrire ce système sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}.$$

Notez que

$$x_{j+1} + y_{j+1} = (0.9x_j + 0.2y_j) + (0.1x_j + 0.8y_j) = x_j + y_j.$$

Donc, effectivement, la population totale ne change pas.

On suppose que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où les populations sont en unités de un million par exemple.

Qu'arrivera-t-il dans 10, 20, ..., 100 ans ? Qu'arrivera-t-il lorsque j tend vers l'infini ? Est-ce qu'on aura un équilibre entre le nombre de paysans et le nombre de citadins ? Est-ce le nombre de paysans et le nombre de citadins vont toujours osciller ? On peut répondre à ces questions à l'aide des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Avant de répondre à ces questions, nous allons étudier les matrices comme la matrice A qui ont une structure assez spéciale. ♣

La matrice A de l'exemple précédent a deux caractéristiques fondamentales que l'on présente dans la définition suivante.

Définition 10.8.2

Une matrice A de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice de Markov** si les composantes $a_{i,j}$ satisfont :

1. $a_{i,j} \geq 0$ for $1 \leq i, j \leq n$, et
2. $\sum_{i=0}^n a_{i,j} = 1$.

Une **chaîne de markov** ou **procédure de Markov** est une système dynamique discret $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ où A est une matrice de Markov.

Les chaînes de Markov ont une propriété très particulière.

Proposition 10.8.3

Un matrice de Markov A possède toujours la valeur propre 1. Si on considère la chaîne de Markov $\mathbf{v}_{j+1} = A\mathbf{v}_j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots$ avec une condition initiale \mathbf{v}_0 donnée, l'orbite $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ tend vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Exemple 10.8.4 (Suite de l'exemple 10.8.1)

On considère la chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

où $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition précédente, $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers un vecteur propre associé à la valeur propre 1 lorsque j tend vers l'infini. Trouvons ce vecteur propre.

En premier, vérifions que 1 est bien une valeur propre de A . Pour trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

on considère le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.9 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.02 = \lambda^2 - 1.7\lambda - 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0.7$. On a bien la valeur propre 1 comme il a été prédit par la proposition précédente.

Pour trouver les vecteurs propres de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ où

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ suivie de $-10R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} du système $(A - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 - 2v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_1 = 2v_2$. Ainsi, les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 vers lequel $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ converge lorsque j tend vers l'infini. Il faut utiliser le fait que la population total est constante. Or, au départ, on a 2 millions de personnes : $x_0 = 1$ million de citadins et $y_0 = 1$ million de paysans. Donc, le vecteur propre que l'on cherche est $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ où $2a + a = 2$ (en unités de un million). Donc $a = 2/3$ et

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini



Remarque 10.8.5

À l'exemple précédent, on peut vérifier que $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini quelque soit la condition initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $x_0 + y_0 = 2$.

Pour ce faire, nous aurons besoin des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.7. Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0.7$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = (A - 0.7 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - 0.7 \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $10R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} de $(A - 0.7\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 + v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_2 = -v_1$. Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0.7 sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour b un nombre réel. On a que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour $a = 2/3$ et $b = -1/3$. Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

car $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. De plus, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.7. De même,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

De façon générale,

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^j}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour $j = 1, 2, 3, \dots$. Puisque $\lim_{j \rightarrow \infty} 0.7^j = 0$, on obtient bien

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{lorsque } j \rightarrow \infty .$$



10.9 Exercices

Question 10.1

Résoudre les systèmes d'équation linéaires suivants :

a)
$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 9 \\2x + 4y - 3z &= 1 \\3x + 6y - 5z &= 0\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}5x + 2y + 6z &= 0 \\-2x + y + 3z &= 1\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_3 &= 1 \\3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\6x_1 + x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}3x + 2y - z &= -15 \\3x + y + 3z &= 11 \\-6x - 4y + 2z &= 30\end{aligned}$$

Question 10.2

Montrez que le système

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \\x + z &= b \\2x + y + 3z &= c\end{aligned}$$

possède au moins une solution seulement si $c = a + b$.

Question 10.3

Pour chacun des systèmes d'équations linéaires suivant, donnez les valeurs de a et b pour que le système ait :

I: Une seule solution.

II: Un nombre infini de solutions.

III: Aucune solution.

a)
$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\2x + 3y &= b\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\b + 5y &= 2\end{aligned}$$

Question 10.4

On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= -1 \\x + y + 4z &= h \\2x - 3y + hz &= 2\end{aligned}$$

Donnez les valeurs de h pour que le système ait :

- a) Une seule solution.
- b) Aucune solution.
- c) Un nombre infini de solutions.

Question 10.5

Deux espèces d'insectes, X et Y, se nourrissent de deux espèces de plantes, A et B. L'espèce X consomme 5 unités de A et 3 unités de B par jour, et l'espèce Y consomme 2 unités de A et 4 unités de B par jour. Si l'on fournit 900 unités de A et 960 unités de B par jour. combien d'individus des espèces X et Y doit-on avoir dans notre insectarium pour que toutes les unités de A et B soient consommées à chaque jours.

Question 10.6

Un manufacturier vent trois types d'engrais (*I*, *II* et *III*) qui sont des mélanges de trois produits (*A*, *B* et *C*). L'engrais de type *I* contient 10 kg de *A*, 30 kg de *B* et 60 kg de *C* par sac. L'engrais de type *II* contient 20 kg de *A*, 30 kg de *B* et 50 kg de *C* par sac. Finalement, l'engrais de type *III* contient 50 kg de *A* et 50 kg de *C* par sac ; cet engrais de contient pas de produit *B*. On a présentement en entrepôt 1600 kg de *A*, 1200 kg de *B* et 3200 kg de *C*. Combien de sacs de chaque type d'engrais doivent être produit par le manufacturier si celui-ci veut utiliser tous les produits *A*, *B* et *C* dans son entrepôt ?

Question 10.7

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Évaluez si possible les expressions suivantes :

- | | | | | | | | |
|----|-------------------|----|---------------------|----|--------------------|----|-----------------|
| a) | $D + E$ | b) | $D - E$ | c) | $5C$ | d) | $-7C$ |
| e) | $2B - C$ | f) | $4E - 2D$ | g) | $-3(D + 2E)$ | h) | $A - A$ |
| i) | $\text{tr}(D)$ | j) | $\text{tr}(D - 3E)$ | k) | $\text{tr}(A)$ | l) | $2A^\top + C$ |
| m) | $D^\top - E^\top$ | n) | $(D - E)^\top$ | o) | $B^\top + 5C^\top$ | p) | $B - B^\top$ |
| q) | AB | r) | BA | s) | $(3E)D$ | t) | $A(BC)$ |
| u) | $(AB)C$ | v) | CC^\top | w) | $(DA)^\top$ | x) | $E^\top D^\top$ |
| y) | $(DE)^\top$ | z) | $(C^\top B)A^\top$ | | | | |

Question 10.8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Évaluez A^2 .
- b) Évaluez A^3 .

c) Quelle sera la forme générale de A^n ?

Question 10.9

Déterminez si les matrices suivantes ont un inverse. Pour celles qui ont un inverse, trouvez cet inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Question 10.10

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 9 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrez que $AB \neq BA$.

b) Évaluez $\det(2A - 3B^\top - C)$.

c) Montrez que C n'a pas d'inverse.

d) Trouvez A^{-1} .

Question 10.11

Trouvez les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes et donnez la multiplicité algébrique de chacune des valeurs propres.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 7 & -7 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Question 10.12

Pour chacune des matrices A ci-dessous.

- I:** Montrez que le déterminant de A est différent de 0.
- II:** Trouvez l'inverse multiplicatif A^{-1} de A .
- III:** Résoudre le système d'équations linéaires $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour le vecteur \mathbf{b} donné.
- IV:** Trouvez les valeurs propres de A .
- V:** Pour chaque valeur propre, trouvez un ensemble de vecteurs propres linéairement indépendant.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} & \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} & \text{d)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Question 10.13

Une compagnie de location de voitures possède deux succursales : succursale S et succursale T. Un analyse des inventaires à chacune des succursales à la fin de chaque mois révèle que 70% des voitures louées à la succursale S sont retournées à la succursale S alors que les autres voitures (30%) sont retournées à la succursale T. De plus, 80% des voitures louées à la succursale T sont retournées à la succursale T alors que les autres voitures (20%) sont retournées à la succursale S.

Soit x_0 et y_0 le nombre de voitures au début du mois aux succursales S et T respectivement, et soit x_1 et y_1 le nombre de voitures à la fin du mois aux succursales S et T respectivement.

- a) Exprimez le nombre de voitures à chaque succursale à la fin du mois en fonction du nombre de voitures à chaque succursale au début du mois sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

pour une matrice A .

- b) Évaluez A^2 .
- c) Si au début de mars on a 60 voitures à la succursale S et 40 voitures à la succursale T, Combien de voitures y aura-t-il dans chaque succursale au début d'avril ? Au début de mai ?
- d) Quel est le nombre de voitures que la compagnie devrait avoir à chaque succursale au début du mois pour qu'elle retrouve le même nombre de voiture à chaque succursale à la fin du mois ? Vous devez premièrement écrire le problème sous la forme d'un problème de valeurs et vecteurs propres.

Question 10.14

Une île est divisée en 1000 lots dans le but de faire une étude écologique. Chaque année, un certain nombre de lots sont choisis pour une observation. La probabilité qu'un lot soit choisi une année est de 20% si le lot a été choisi l'année précédente et de 50% si le lot n'a pas été choisi l'année précédente.

- a) Donnez la matrice de transition A pour cette procédure de markov.
- b) Combien de lots seront choisis l'année prochaine si on a choisi 300 lots cette année ?
- b) Combien de lots seront choisis dans deux ans si on a choisi 300 lots cette année ?
- c) Combien de lots seront choisis à long terme si on a choisi 300 lots cette année ? En d'autre mots, combien de lots devrait-on choisir si on veut que le nombre de lots choisis chaque année soit constant ?

Question 10.15 ↗

On divise une population de femelles en trois groupes.

1. Groupe I : Ceux dont le poids à la naissance était inférieure au poids minimal recommandé.
2. Groupe II : Ceux dont le poids à la naissance était entre le poids minimal et le poids maximal recommandés.
3. Groupe III : Ceux dont le poids à la naissance était supérieure au poids maximal recommandé.

On observe que les femelles du groupe I donnent naissance dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 45% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 5% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. De même, on observe que les femelles du groupe II donnent naissance dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. Finalement, on observe que les femelles du groupe III donnent naissance dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 40% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III.

Déterminez la tendance à long terme pour la distribution des poids à la naissance pour les femelles.

Note : Ce problème demande une connaissance (intuitive) des probabilités conditionnelles.

Question 10.16 ↗

Chaque jour, une épicerie offre en solde une variété de pommes parmi trois variétés possibles : Cortland, McIntosh and Spartan. L'épicerie a la politique de vente suivante :

1. Les pommes McIntosh ne sont jamais en vente deux jours de suite.
2. Si les pommes McIntosh sont en vente une journée, alors les pommes Cortland et Spartan ont la même probabilité d'être en vente le jour suivant.
3. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il y a une chance sur deux qu'ils seront en vente la journée suivante.
4. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il a une chance sur trois que les pommes McIntosh seront en vente le jour suivant.

Pour chaque item, déterminez la probabilité (ne faite pas les calculs) qu'il soit en vente après 100 jours si les items avaient une probabilité égale d'être en vente la première journée ? Pour chaque item, déterminez la probabilité qu'il soit en vente dans un future éloigné ?



Représentation paramétrique des courbes



11

Les deux premières sections de ce chapitre sont nécessaires pour l'étude des systèmes d'équations différentielles que nous ferons dans un prochain chapitre. Les solutions d'un système d'équations différentielles satisfaisant une condition initiale sont en fait des courbes paramétriques.

Les dernières sections de ce chapitre offrent plus d'information sur la représentation paramétrique des courbes et peuvent servir de matériel optionnel pour les étudiant.e.s en génie.

11.1 Définition

Définition 11.1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-intervalle de la droite réelle. De plus, soit $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ un ensemble de n fonctions continues à valeurs réelles définies sur I .

L'ensemble des points

$$\Gamma = \{(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) : t \in I\}$$

définit une courbe (voir figure 11.1) dans l'espace \mathbb{R}^n . Les n fonctions $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ définissent une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$. L'image de ϕ est la courbe Γ . La fonction ϕ est une **représentation paramétrique** de la courbe Γ .

Puisque les éléments de \mathbb{R}^n sont bien souvent représentés par des matrices colonnes avec une colonne et n ligne, on utilise bien souvent la notation suivante

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}.$$

La première notation est généralement associée à la représentation géométrique alors que la seconde est associée à la représentation algébrique.

Exemple 11.1.2

Une représentation paramétrique pour le cercle de rayon 1 centré à l'origine est donnée par la définition des fonctions trigonométriques $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. La courbe Γ est le cercle que l'on retrouve dans la figure suivante et une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$.

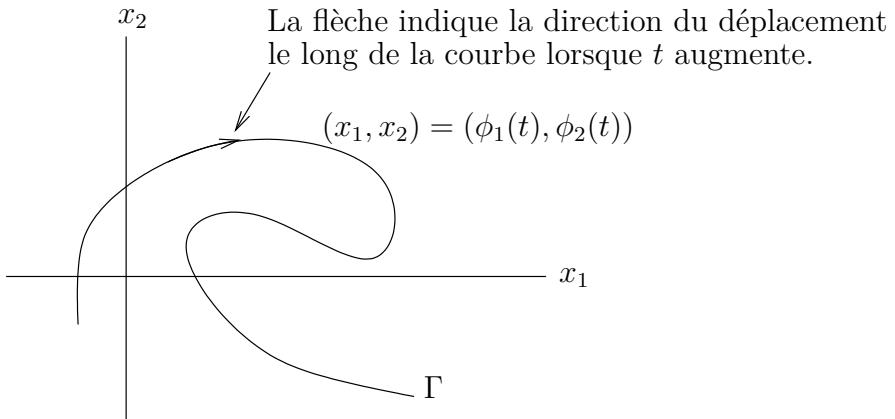
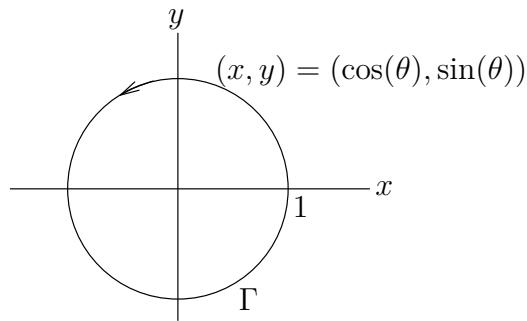


FIGURE 11.1 – Une courbe dans le plan donnée par une représentation paramétrique $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. On indique à l'aide d'une flèche le déplacement le long de la courbe lorsque t augmente.



Lorsque θ augmente, on parcourt le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des fonctions périodiques de période 2π , on parcourt la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de 2π . ♣

Exemple 11.1.3

Une autre représentation paramétrique pour le cercle Γ de rayon 1 centré à l'origine est donnée par

$$(x, y) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Lorsque θ augmente, on parcourt le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ sont des fonctions périodiques de période π , on parcourt la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de π . Cette représentation permet de parcourir la courbe Γ deux fois plus rapidement que la représentation donnée à l'exemple précédent. ♣

Les deux exemples précédents montrent qu'une courbe Γ a plus qu'une représentation paramétrique.

Exemple 11.1.4

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\sec(\theta), \tan(\theta))$$

pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

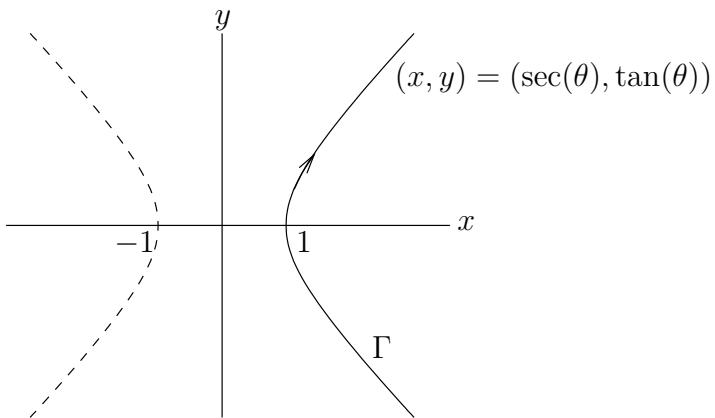
Puisque $\cos(\theta) = 1/x$, on a

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Ainsi,

$$y^2 = \tan^2(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = x^2 - 1$$

Sur la courbe Γ , on a que $x^2 - y^2 = 1$. Donc, la courbe Γ fait partie de la courbe décrite par $x^2 - y^2 = 1$. L'équation $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation d'une hyperbole dont l'axe est la droite horizontale $y = 0$ et les sommets sont aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. On représente cette hyperbole dans la figure suivante.



Par contre, la représentation paramétrique ne représente pas toute l'hyperbole. On a $x = \sec(\theta) > 0$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \sec(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \tan(\theta) = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow -\pi/2^+} \sec(\theta) = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow -\pi/2^+} \tan(\theta) = -\infty$ et $(\sec(0), \tan(0)) = (1, 0)$. La courbe Γ est donc la branche de l'hyperbole à droite de l'axe des y que l'on parcourt de bas en haut lorsque θ augmente. ♣

Exemple 11.1.5

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

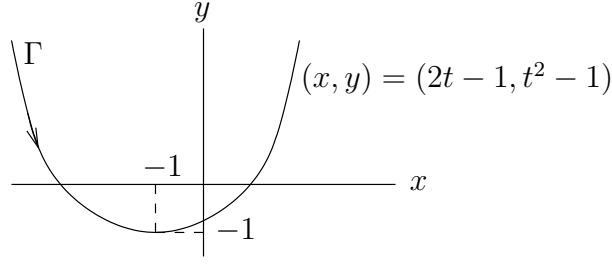
$$(x, y) = (2t - 1, t^2 - 1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

De l'équation $x = 2t - 1$, on trouve $t = (x + 1)/2$. Si on substitue cette expression pour t dans l'équation $y = t^2 - 1$, on trouve $y = (x + 1)^2/4 - 1$. Cette dernière équation donne

$$(x + 1)^2 = 4(y + 1),$$

C'est l'équation d'une parabole convexe dont l'axe est la droite verticale $x = -1$ et le sommet est au point $(-1, -1)$. On représente cette parabole dans la figure suivante.



Puisque $x = 2t - 1$ augmente de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque t augmente de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe est parcourue de gauche à droite. ♣

11.2 Droite tangente à une courbe

Supposons qu'une courbe Γ possède la représentation paramétrique

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

ou, plus explicitement,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_i :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables. On ne demande pas seulement que les fonctions ϕ_i soient continues mais qu'elles soient aussi différentiables.

Pour trouver la direction de la droite tangente à la courbe Γ au point

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) ,$$

on considère la sécante qui passe par les points

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) \text{ et } \phi(t_0 + h) = (\phi_1(t_0 + h), \phi_2(t_0 + h), \dots, \phi_n(t_0 + h))$$

où h est petit. Le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= \frac{1}{h} (\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)) \\ &= \frac{1}{h} (\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0), \phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)) \\ &= \left(\frac{\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0)}{h}, \frac{\phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0)}{h}, \dots, \frac{\phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)}{h} \right) \end{aligned}$$

est parallèle à la sécante qui passe par les points $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$.

Lorsque h tend vers 0, le vecteur \mathbf{v}_h approche un vecteur parallèle à la droite tangente à Γ au point $\phi(t_0)$. Or, cette limite est

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}_h &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)}{h} \right) \\ &= (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0)) , \end{aligned}$$

On a donc le résultat suivant :

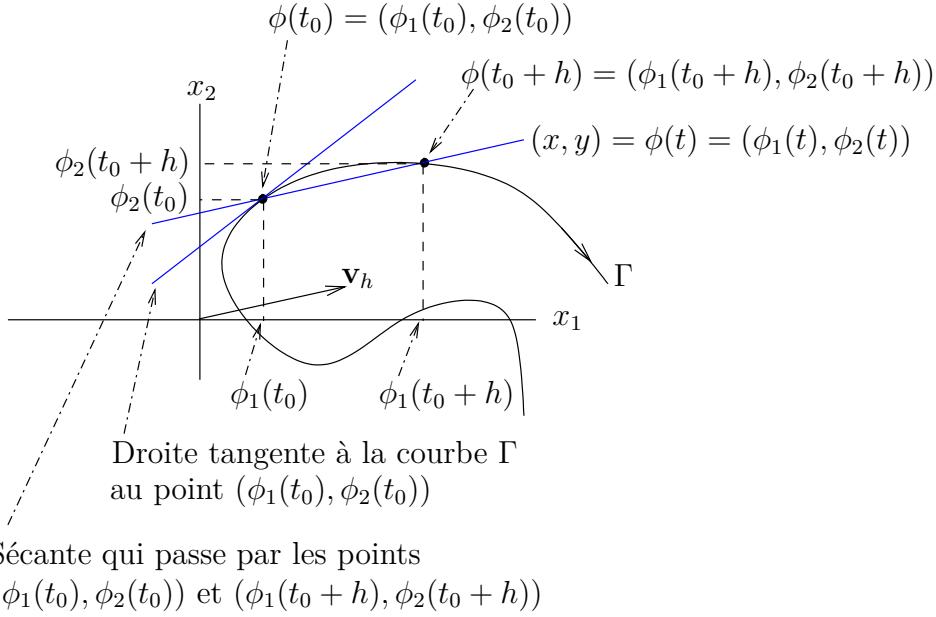


FIGURE 11.2 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x_1, x_2) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a aussi dessiné la sécante qui passe par $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$, et la tangente à la courbe au point $\phi(t_0)$.

Proposition 11.2.1

Soit Γ , une courbe qui possède la représentation paramétrique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_i :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables. Le vecteur

$$\phi'(t_0) = (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0))$$

est parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$. De plus, le vecteur $\phi'(t_0)$ pointe dans la direction associée à t croissant.

Lorsque les éléments de \mathbb{R}^n sont représentés par des matrices colonnes, on utilise la notation

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi'(t) = \begin{pmatrix} \phi'_1(t) \\ \phi'_2(t) \\ \vdots \\ \phi'_n(t) \end{pmatrix}$$

Le contexte déterminera la notation à utiliser.

Ainsi, la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$ possède la représentation paramétrique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t_0) + \alpha \phi'(t_0)$$

$$\begin{aligned}
&= (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) + \alpha(\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0)) \\
&= (\phi_1(t_0) + \alpha\phi'_1(t_0), \phi_2(t_0) + \alpha\phi'_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0) + \alpha\phi'_n(t_0))
\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 11.2.2

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 (i.e. $n = 2$ dans la discussion précédente) qui possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables.

Si $\phi'_1(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est verticale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0)) = (0, \phi'_2(t_0))$.

Si $\phi'_2(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est horizontale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0)) = (\phi'_1(t_0), 0)$. ♠

Remarque 11.2.3

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 (i.e. $n = 2$ dans la discussion précédente) qui possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables.

Il est possible de démontrer que si $\phi'_1(t_0) \neq 0$ alors on peut représenter Γ près du point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ par une expression de la forme $y = f(x)$ où f est aussi différentiable. En effet, si $\phi'_1(t_0) \neq 0$ alors ϕ_1 est localement inversible et on peut écrire $t = \phi_1^{-1}(x)$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Si on substitue cette expression dans $y = \phi_2(t)$ on trouve $y = f(x) \equiv \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Cette situation est représenté à la figure 11.3.

À la figure 11.3, il est impossible de définir une fonction f pour x près de $\phi_1(t_1)$ de telle sorte que $y = f(x)$ représenterait la courbe Γ près du point $(\phi_1(t_1), \phi_2(t_1))$. ♠

Exemple 11.2.4

Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe Γ au point $(0, -\pi)$ si Γ possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (t \sin(t), t \cos(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

Il faut trouver t tel que $t \sin(t) = 0$ et $t \cos(t) = -\pi$. De la première équation, on trouve $t = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Parmi ces valeurs, seul $t = \pi$ satisfait la deuxième équation. On a donc que $(0, \pi)$ est donné par $t = \pi$ dans la représentation paramétrique.

Posons $\phi_1(t) = t \sin(t)$ et $\phi_2(t) = t \cos(t)$, la représentation paramétrique de la droite tangente à Γ au point $(\phi_1(\pi), \phi_2(\pi)) = (0, -\pi)$ est

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (\phi_1(\pi) + \alpha\phi'_1(\pi), \phi_2(\pi) + \alpha\phi'_2(\pi)) \\
&= \left(\alpha(\sin(\pi) + t \cos(\pi)) \Big|_{t=\pi}, -\pi + \alpha(\cos(\pi) - t \sin(\pi)) \Big|_{t=\pi} \right) = (-\alpha\pi, -\pi - \alpha)
\end{aligned}$$

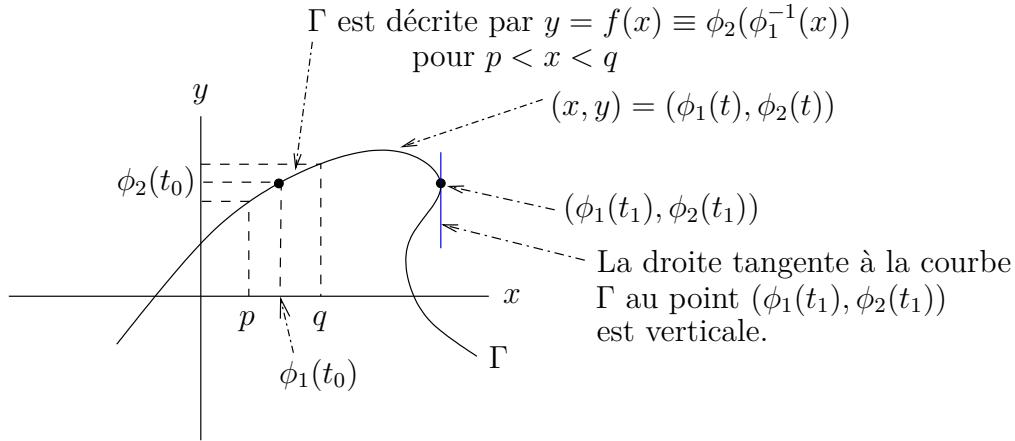


FIGURE 11.3 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour x près de $\phi_1(t_0)$, on peut représenter la courbe Γ par $y = f(x)$.

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on élimine α des deux équations $x = -\alpha \pi$ et $y = -\pi - \alpha$, on trouve l'équation de la droite tangente

$$y = \frac{1}{\pi} x - \pi ,$$



Exemple 11.2.5

Tracer la courbe qui possède la représentation paramétrique

$$x = t^3 - 3t^2 \quad , \quad y = t^3 - 3t ,$$

Commençons par trouver les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontal si $y' = 3t^2 - 3 = 0$. Donc, $t = \pm 1$. Pour $t = 1$ on obtient le point $(-2, -2)$ et pour $t = -1$ on obtient le point $(-4, 2)$.

La tangente est verticale si $x' = 3t^2 - 6t = 0$. Donc, $t = 0$ ou $t = 2$. Pour $t = 0$ on obtient le point $(0, 0)$ et pour $t = 2$ on obtient le point $(-4, 2)$.

On a que la courbe passe deux fois par le point $(-4, 2)$. De plus, $x'(t)$ et $y'(t)$ ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles $]-\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$, $] 1, 2[$ et $] 2, \infty[$.

On peut déterminer la pente de la tangente à la courbe au point $(x(t), y(t))$ à l'aide du rapport $y'(t)/x'(t)$ si $x'(t) \neq 0$. Mais cela ne donne pas la courbure de la courbe. Pour déterminer la courbure, il faut utiliser la représentation locale $y = f(x)$ de la courbe. Alors $f''(x)$ va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Grâce au théorème de la dérivée de fonctions composées, on a que

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 - 6t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment (où $x'(t) \neq 0$). De plus,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}(x(t)) \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3t^2 - 6t} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t} \right) = \frac{-2(t^2 - t + 1)}{3(t^2 - 2t)(t^2 - 2t)^2}$$

pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents intervalles.

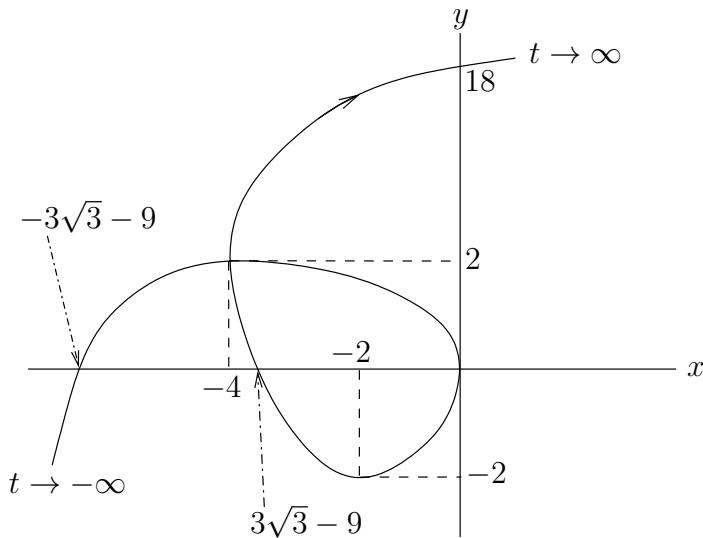
t	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	description
$] -\infty, -1[$	+	-	croissante et concave
$] -1, 0[$	-	-	décroissante et concave
$] 0, 1[$	+	+	croissante et convexe
$] 1, 2[$	-	+	décroissante et convexe
$] 2, \infty[$	+	-	croissante et concave

Notons que la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ n'est jamais nulle et est définie pour tout t sauf 0, 1 et 2.

Donc, $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans les intervalles considérés ci-dessus.

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y (quand cela est possible). La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = t^3 - 3t^2 = 0$) lorsque $t = 0$ et 3. On obtient les deux points $(0, 0)$ et $(0, 18)$. La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = t^3 - 3t = 0$) lorsque $t = 0$ et $\pm\sqrt{3}$. On obtient les trois points $(0, 0)$ et $(-\sqrt{3}, -9)$ et $(\sqrt{3}, -9)$.

Le dessin de la courbe est donné dans la figure suivante.



Exemple 11.2.6

Tracer la courbe qui possède la représentation paramétrique

$$x = \sin(2t), \quad y = \sin(t),$$

Puisque cette représentation paramétrique est périodique de période 2π , on peut supposer que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Commençons par trouver les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontal si $y' = \cos(t) = 0$; c'est-à-dire, si $t = \pi/2$ ou $3\pi/2$. On obtient les points suivants.

t	(x, y)
$\pi/2$	$(0, 1)$
$3\pi/2$	$(0, -1)$

La tangente est verticale si $x' = 2\cos(2t) = 0$; c'est-à-dire, si $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$. On obtient les points suivants.

t	(x, y)
$\pi/4$	$(1, \sqrt{2}/2)$
$3\pi/4$	$(-1, \sqrt{2}/2)$
$5\pi/4$	$(1, -\sqrt{2}/2)$
$7\pi/4$	$(-1, -\sqrt{2}/2)$

On a que la courbe passe trois fois par le point $(0, 0)$, lorsque $t = 0, \pi$ et 2π . De plus, $x'(t)$ et $y'(t)$ ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles de la forme $]n\pi/4, (n+1)\pi/4[$.

Pour déterminer la courbure, il faut utiliser la représentation locale $y = f(x)$ de la courbe. Alors $f''(x)$ va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Grâce au théorème de la dérivée de fonctions composées, on a que

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\cos(t)}{2\cos(2t)}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}(x(t)) \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\cos(2t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos(t)}{2\cos(2t)} \right) \\ &= \frac{(2\cos^2(t) + 1)\sin(t)}{4\cos^3(2t)} \end{aligned}$$

pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Pour simplifier le numérateur, les identités trigonométriques suivantes ont été utilisées : $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$. Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents

intervalles.

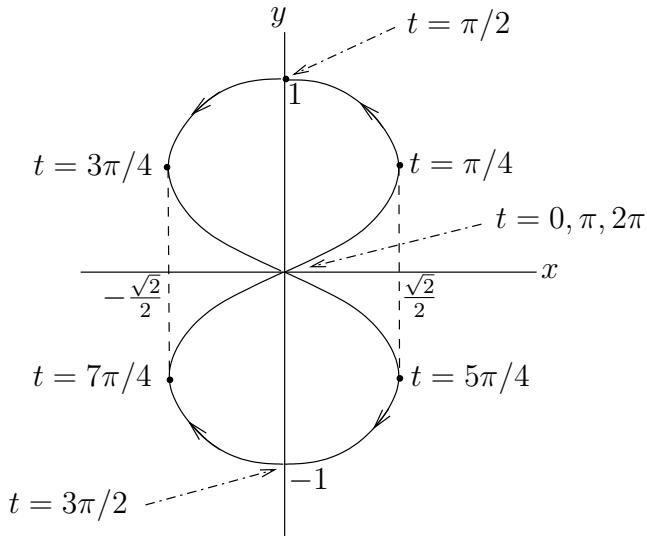
t	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	description
$]0, \pi/4[$	+	+	croissante et convexe
$]\pi/4, \pi/2[$	-	-	décroissante et concave
$]\pi/2, 3\pi/4[$	+	-	croissante et concave
$]3\pi/4, \pi[$	-	+	décroissante et convexe
$]\pi, 5\pi/4[$	-	-	décroissante et concave
$]5\pi/4, 3\pi/2[$	+	+	croissante et convexe
$]3\pi/2, 7\pi/4[$	-	+	décroissante et convexe
$]7\pi/4, 2\pi[$	+	-	croissante et concave

Notons que $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = 0$ n'est jamais nul et est définie pour tout t autre que $(2n+1)\pi/4$.

Donc, $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans les intervalles considérés ci-dessus.

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y (quand cela est possible). La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = \sin(2t) = 0$) lorsque $t = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$. On obtient seulement trois points, $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = \sin(t) = 0$) lorsque $t = 0, \pi$ et 2π . Dans les trois cas, on obtient l'origine.

Le dessin de la courbe est donné dans la figure suivante.



11.3 Longueur d'une courbe

Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique d'une courbe Γ dans le plan. On peut estimer la longueur de la courbe Γ en approchant cette courbe par une courbe formée

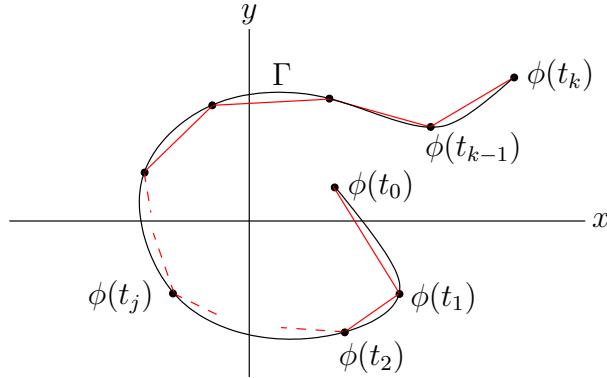


FIGURE 11.4 – Une courbe dans le plan que l'on approche avec des segments de droites.

de petits segments de droite comme on peut voir à la figure 11.4. La somme de la longueur de chacun des petits segments va donner une approximation de la longueur de la courbe qui ira en s'améliorant si on prend des segments de plus en plus petits.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta t = (b - a)/k$ et $t_j = a + j \Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On a que $t_0 = a$ et $t_k = b$. L'intervalle $[a, b]$ est partagé en sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$. La longueur du segment de droite qui joint les points

$$\phi(t_j) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_j) \\ \phi_2(t_j) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(t_{j+1}) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_{j+1}) \\ \phi_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}$$

est

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}$$

grâce au théorème de Pythagore. Ainsi, la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour $j = 0, 1, \dots, k - 1$ est

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}, \quad (11.3.1)$$

Si on utilise le théorème de la moyenne, on peut trouver α_j et β_j entre x_j et x_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi'_1(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi'_1(\alpha_j)\Delta t$$

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi'_2(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi'_2(\beta_j)\Delta t.$$

Ainsi, La longueur du segment de droite qui joint les points $\phi(t_j)$ et $\phi(t_{j+1})$ est

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} = \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j)\Delta t)^2 + (\phi'_2(\beta_j)\Delta t)^2}$$

$$= \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j))^2 + (\phi'_2(\beta_j))^2} \Delta t .$$

Si on substitue cette expression dans (11.3.1) on obtient la formule suivante pour la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour $j = 0, 1, \dots, k - 1$.

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j))^2 + (\phi'_2(\beta_j))^2} \Delta t . \quad (11.3.2)$$

Si α_j était égale à β_j , on aurait une somme de Riemann mais α_j n'est généralement pas égal à β_j . De façon non-rigoureuse, on va quand même procéder comme si on avait une somme de Riemann car α_j et β_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, si $k \rightarrow \infty$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 11.3.1

La longueur L d'une courbe Γ qui possède la représentation paramétrique $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'_1(t))^2 + (\phi'_2(t))^2} dt . \quad (11.3.3)$$

Remarque 11.3.2 ☺

Si on utilisait la définition rigoureuse de l'intégrale de Riemann donnée à la section 6.3.5, on pourrait démontrer rigoureusement que la formule (11.3.3) est vrai. ♠

On peut démontrer à l'aide de la règle de substitution pour l'intégration que la formule (11.3.3) est indépendante de la représentation paramétrique de la courbe Γ qui est utilisées.

Remarque 11.3.3

Lorsque l'on calcul la longueur d'une courbe décrite par une représentation paramétrique, il faut vérifier que celle-ci ne parcourt pas une section de la courbe plus d'une fois. Par exemple, les deux représentations paramétriques suivantes tracent le cercle unité.

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} , \quad 0 \leq t \leq 2\pi ,$$

et

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Cependant,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\phi'_1(t))^2 + (\phi'_2(t))^2} dt = 2\pi$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\psi'_1(t))^2 + (\psi'_2(t))^2} dt = 4\pi .$$

La représentation paramétrique ψ parcourt deux fois le cercle unité. Ce qui fait que l'intégrale donne deux fois la circonférence du cercle unité. ♠

Exemple 11.3.4

Calculer la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = t^3$ et $y = t^2$ pour $0 \leq t \leq 4$.

Cette longueur est

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^4 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^4 t \sqrt{9t^2 + 4} dt$$

Si on pose $u = 9t^2 + 4$, on a $du = 18t dt$. De plus, $u = 4$ lorsque $t = 0$ et $u = 148$ lorsque $t = 4$. Ainsi,

$$L = \frac{1}{18} \int_4^{148} u^{1/2} du = \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_4^{148} = \frac{8}{27} (37^{3/2} - 1) .$$



Dans le cas particulier où la courbe Γ peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur une intervalle $[a, b]$, on peut utiliser la représentation $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\phi_1(x) = x$ et $\phi_2(x) = f(x)$ pour obtenir le résultat suivant directement de (11.3.3).

Proposition 11.3.5

La longueur L d'une courbe Γ qui peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx . \quad (11.3.4)$$

Exemple 11.3.6

Trouver la longueur de la courbe donnée par le graphe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ pour $\pi/6 \leq x \leq \pi/3$. Puisque $f'(x) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$, on obtient la longueur

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + \cot^2(x)} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\csc^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x dx \\ &= -\ln(\csc(x) + \cot(x)) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \ln(2 + \sqrt{3}) . \end{aligned}$$

car $\csc(x) = 1/\cos(x) > 0$ pour $\pi/6 \leq x \leq \pi/3$.



Exemple 11.3.7

Calculer la longueur de la courbe définie par $y = (x - 1)^2$ entre les points (1.0) et $(2, 1)$.

La courbe dont l'on veut calculer la longueur est la partie de la parabole $y = (x - 1)^2$ pour $1 \leq x \leq 2$. Si on pose $f(x) = (x - 1)^2$, on a $f'(x) = 2(x - 1)$. La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} + \frac{1}{4} \ln \left| 2(x - 1) + \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} \right| \right) \Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln |2 + \sqrt{5}| . \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale précédente demande plusieurs substitutions et une intégration par parties. Nous donnons les détails dans le paragraphe qui suit.

Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx ,$$

on pose $x = 1 + \frac{1}{2} \tan(\theta)$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. On a que

$$\sqrt{1 + 4(x-1)^2} = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \sec(\theta)$$

car $\sec(\theta) > 0$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De plus, $dx = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx &= \int \sec(\theta) \left(\frac{1}{2} \sec^2(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) d\theta . \end{aligned}$$

À l'exemple 6.2.22, on a montré que

$$\int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \tan(\theta) \sec(\theta) + \frac{1}{4} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C . \end{aligned}$$

Puisque $\tan(\theta) = 2(x-1)$ et $\sec(\theta) = \sqrt{1 - 4(x-1)^2}$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, on a

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx &= \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{1 - 4(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \ln |2(x-1) + \sqrt{1 - 4(x-1)^2}| + C . \end{aligned}$$



Exemple 11.3.8

Calculer la longueur de la courbe définie par $y = \ln(1 - x^2)$ pour $0 \leq x \leq 1/2$.

Si on pose $f(x) = \ln(1 - x^2)$, on a $f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$. La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{1-x^2} dx = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

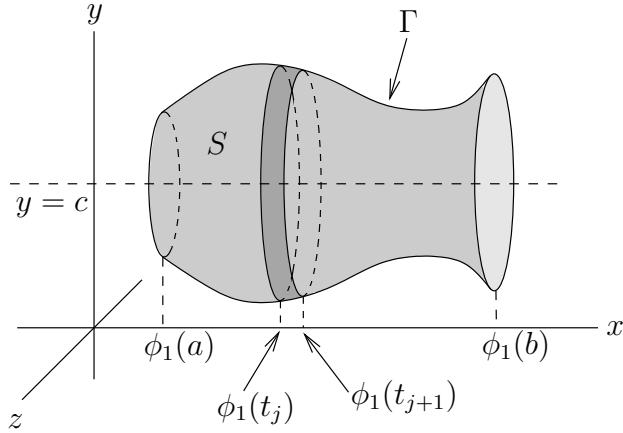


FIGURE 11.5 – Une surface produite par la rotation de la courbe Γ autour d'un axe horizontal $y = c$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = (-x - \ln|x-1| + \ln(x+1)) \Big|_0^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(3) . \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale précédente a demandé une intégration par fractions partielles.



11.4 Aire d'une surface

Soit Γ une courbe dans le plan possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} , \quad a \leq t \leq b .$$

La rotation autour d'un axe de cette courbe Γ produit une surface S dans l'espace comme celle que l'on retrouve à la figure 11.5. Il est possible de calculer l'aire de cette surface.

Avant de développer la formule pour calculer l'aire de la surface S que l'on retrouve à la figure 11.5, nous devons rappeler que l'aire d'une section horizontale d'un cône dont l'axe est vertical, comme celle que l'on retrouve à la figure 11.6, est $2\pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) L$.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta t = (b-a)/k$ et $t_j = a + j \Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On a que $t_0 = a$ et $t_k = b$. L'intervalle $[a, b]$ est partagé en sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

La section de la surface S entre t_j et t_{j+1} , voir figure 11.7, représente approximativement une section d'un cône comme celui donné à la figure 11.6. L'aire de cette section est donc approximativement

$$2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} .$$

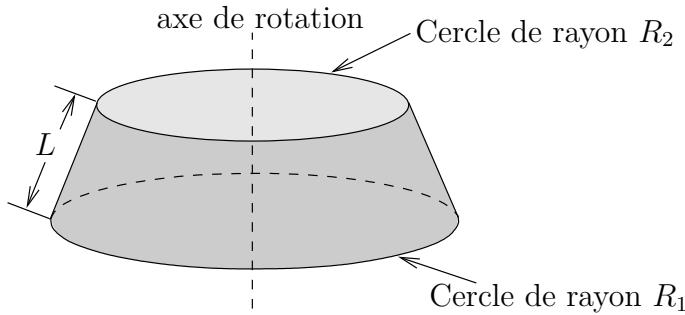
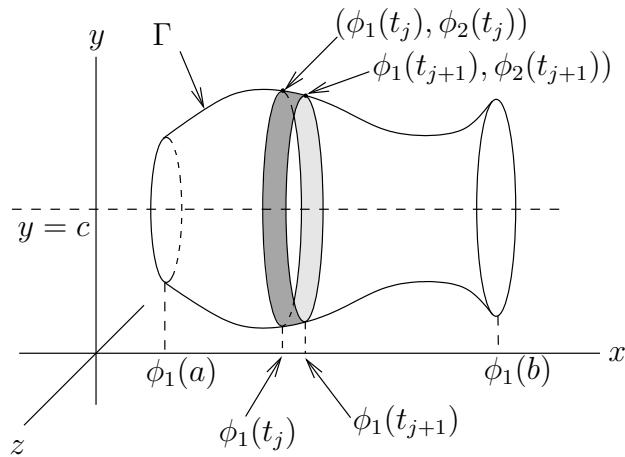


FIGURE 11.6 – Une section horizontal d'un cône dont l'axe est vertical.

FIGURE 11.7 – La section de la surface S de la figure 11.5 pour $t_j \leq x \leq t_{j+1}$ est approximativement une section d'un cône comme celle que l'on trouve à la figure 11.6.

L'aire total A de la surface S est donc donné approximativement par

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) \times \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} .$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe α_j et β_j entre t_j et t_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi'_1(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi'_1(\alpha_j) \Delta t$$

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi'_2(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi'_2(\beta_j) \Delta t .$$

Donc,

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} = \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j) \Delta t)^2 + (\phi'_2(\beta_j) \Delta t)^2}$$

$$= \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j))^2 + (\phi'_2(\beta_j))^2} \Delta t$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. De plus, le théorème des valeurs intermédiaires donne γ_j entre t_j et t_{j+1} tel que

$$\left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) = |\phi_2(\gamma_j) - c| .$$

L'aire A de la surface S est donc approximativement

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi |\phi_2(\gamma_j) - c| \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j))^2 + (\phi'_2(\beta_j))^2} \Delta t .$$

Si α_j , β_j et γ_j étaient égaux, on aurait une somme de Riemann mais α_j , β_j et γ_j ne sont généralement pas égaux. De façon non-rigoureuse, on va quand même procéder comme si on avait une somme de Riemann car α_j , β_j et γ_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, si $k \rightarrow \infty$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 11.4.1

Soit S une surface produite par la rotation autour d'un axe $y = c$ d'une courbe Γ possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} , \quad a \leq t \leq b .$$

L'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_a^b |\phi_2(t) - c| \sqrt{(\phi'_1(t))^2 + (\phi'_2(t))^2} dt . \quad (11.4.1)$$

Si S est une surface produite par la rotation autour d'un axe $x = c$ de la courbe Γ , alors l'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_a^b |\phi_1(t) - c| \sqrt{(\phi'_1(t))^2 + (\phi'_2(t))^2} dt .$$

Remarque 11.4.2

Comme pour le calcul de la longueur d'une courbe, lorsque que l'on calcul l'aire d'une surface produite par la rotation d'une courbe autour d'un axe, il faut vérifier que la représentation paramétrique de la courbe ne parcourt pas une section de la courbe plus d'une fois. ♠

Si la courbe Γ est donnée par le graphe d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en prenant la représentation paramétrique

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} , \quad a \leq x \leq b ,$$

on obtient le résultat suivant.

Proposition 11.4.3

Soit Γ une courbe représentée par le graphe d'une fonction différentiable f sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire A de la surface S produite par la rotation de Γ autour de l'axe $y = c$ est

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx . \quad (11.4.2)$$

Exemple 11.4.4

Trouver l'aire A de la surface S obtenue de la rotation autour de l'axe des x de la courbe Γ ayant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} , \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Si $x = t^3$ et $y = t^2$, et on résout pour y en fonction de x , on trouve que la courbe Γ est le graphe de la fonction $y = f(x) = x^{2/3}$ avec $0 \leq x \leq 1$. On pourrait donc utiliser (11.4.2) pour calculer l'aire de la surface S . Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. Nous calculerons l'aire de la surface S à l'aide de (11.4.1).

Puisque $\phi'_1(t) = 3t^2$ et $\phi'_2(t) = 2t$, on a

$$A = 2\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^2 + 4} dt .$$

Si on utilise la substitution $u = 9t^2 + 4$, alors $u = 4$ pour $t = 0$, $u = 13$ pour $t = 1$ et $du = 18t dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^2 + 4} dt = \frac{\pi}{9} \int_0^1 t^2 (9t^2 + 4)^{1/2} 18t dt \\ &= \frac{\pi}{9} \int_4^{13} \frac{u-4}{9} u^{1/2} du = \frac{\pi}{81} \int_4^{13} (u^{3/2} - 4u^{1/2}) du \\ &= \frac{\pi}{81} \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{8}{3}u^{3/2} \right) \Big|_{u=4}^{13} = \frac{16\pi(39\sqrt{13} + 8)}{1215} \approx 6.14837865 . \end{aligned}$$



11.5 Coordonnées polaires

Chaque point P du plan est uniquement déterminé par ses coordonnées cartésiennes (x, y) où x est le déplacement horizontal et y est le déplacement vertical pour se rendre de l'origine O au point P .

Le système de coordonnées polaires est une autre façon d'identifier les points du plan. Ce système de coordonnées est très utile lorsque l'on travaille avec un objet qui exécute un mouvement circulaire.

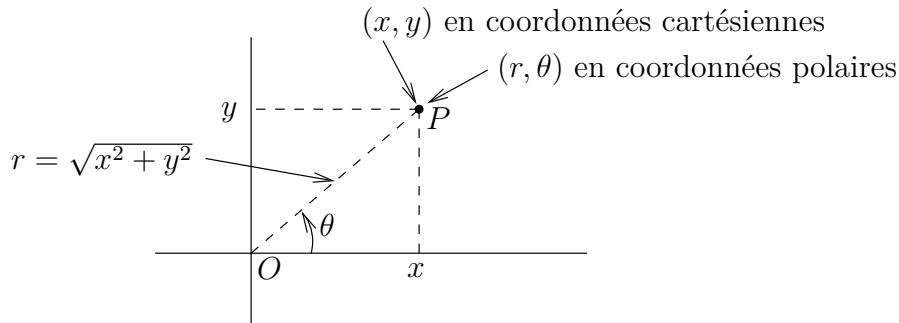


FIGURE 11.8 – Relation entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes d'un point P .

Dans le système de coordonnées polaires, le point P est représenté par le couple (r, θ) où r est la distance entre le point P et l'origine O et θ est l'angle entre l'axe des x et la droite OP mesuré dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. La définition des coordonnées polaires d'un point P est illustrée à la figure 11.8.

Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point du plan ne sont pas uniques. Si (r, θ) représente un point P , alors $(r, \theta + 2n\pi)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ représentent aussi le point P . L'origine est encore plus problématique car $(0, \theta)$ représente l'origine quel que soit θ .

Si (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point P , alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de ce point sont données par

$$x = r \cos(\theta) \quad , \quad y = r \sin(\theta) .$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ sont les coordonnées cartésiennes d'un point P , alors les coordonnées polaires (r, θ) de ce point (modulo un multiple de 2π pour θ) sont donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ,$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} .$$

Puisque $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \neq 0$ et y , on a que θ donnée par la formule précédente satisfait $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Remarque 11.5.1

Il est permis d'avoir des coordonnées polaires de la forme (r, θ) où $r < 0$. Dans ce cas, il est sous-entendu que $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$. C'est-à-dire que (r, θ) avec $r < 0$ est la réflexion par rapport à l'origine du point $(|r|, \theta)$.



Exemple 11.5.2

Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point P dont les coordonnées polaires sont $(3, -\pi/3)$?

On a $x = 3 \cos(-\pi/3) = 3/2$ et $y = 3 \sin(-\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$. Les coordonnées cartésiennes de P sont donc $(3/2, -3\sqrt{3}/2)$. ♣

Exemple 11.5.3

Quelles sont les coordonnées polaires du point P dont les coordonnées cartésiennes sont $(-1, -\sqrt{3})$?

On a $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Puisque $x < 0$, on a

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \arctan(\sqrt{3}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Les coordonnées polaires de P sont donc $(2, 4\pi/3)$. ♣

11.5.1 Équations en coordonnées polaires

Commençons notre apprentissage des courbes décrites par des équations en coordonnées polaires par l'étude de quelques équations élémentaires ; c'est-à-dire, r constant ou θ constant.

Exemple 11.5.4

Quelle est la courbe décrite par l'équation $r = 3$ et celle décrite par $r = -3$?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur l'angle θ dans l'équation $r = 3$, l'angle θ est libre. En d'autres mots, l'équation $r = 3$ est vrai quelle que soit la valeur de θ . La courbe représentée par cette équation est le cercle de rayon 3 centré à l'origine ; c'est l'ensemble de tous les points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) satisfont $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$. Lorsque θ augmente, on parcourt le cercle de rayon 3 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

L'équation $r = -3$ décrit aussi le cercle de rayon 3 centré à l'origine car c'est la courbe qui est la réflexion par rapport à l'origine du cercle $r = 3$. ♣

Exemple 11.5.5

Quelle est la courbe décrite par l'équation $\theta = \pi/4$?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur le rayon r dans l'équation $\theta = \pi/4$, le rayon r est libre. En d'autres mots, l'équation $\theta = \pi/4$ est vrai quelle que soit la valeur de $r \in \mathbb{R}$. La courbe représentée par cette équation est la droite de pente $\pi/4$ qui passe par l'origine ; c'est-à-dire, la droite $y = x$ au complet car on accepte les valeurs négatives de r . Lorsque r augmente, x et y vont de $-\infty$ à $+\infty$. ♣

Exemple 11.5.6

Quelle est la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2 \sin(\theta)$? Trouver l'équation cartésienne qui décrit cette courbe.

Si on multiplie l'équation $r = 2 \sin(\theta)$ par r on obtient $r^2 = 2r \sin(\theta)$. Or $r^2 = x^2 + y^2$ et $y = r \sin(\theta)$. On a donc $x^2 + y^2 = 2y$. On obtient l'équation en coordonnées cartésiennes

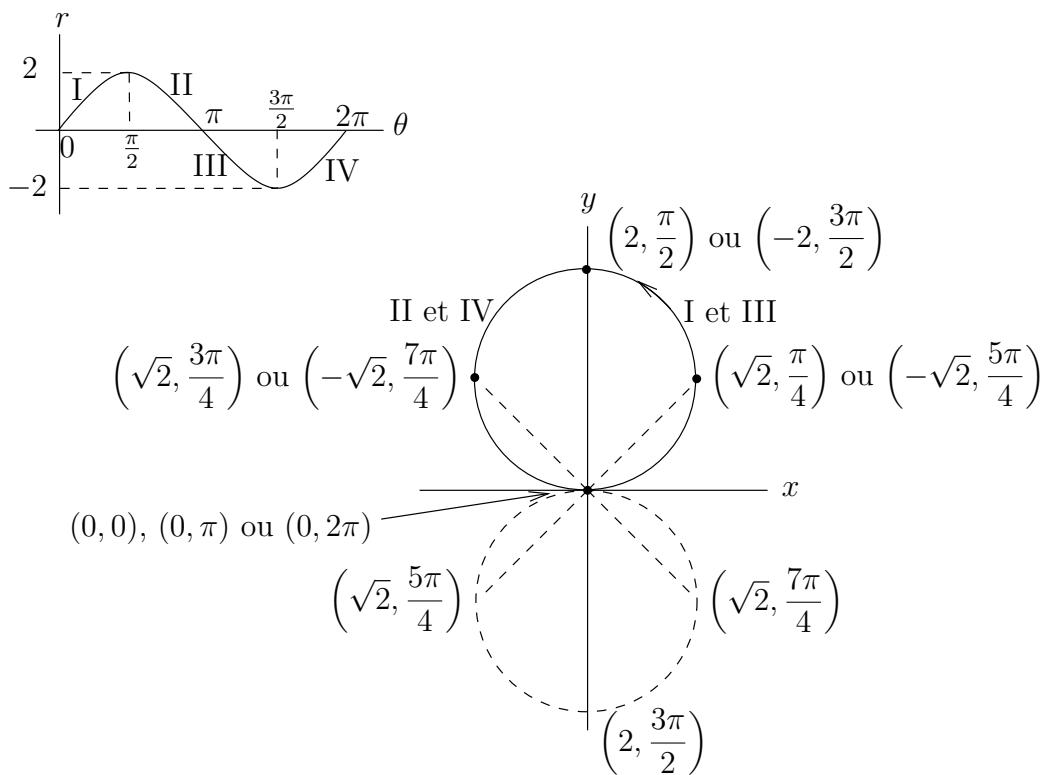
$$1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + (y - 1)^2.$$

Γ est le cercle de rayon 1 centré au point $(0, 1)$.

On a tracé la courbe décrite par $r = 2 \sin(\theta)$ dans la figure ci-dessous. En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0

On a indiqué ces points sur la courbe Γ dans la figure suivante.



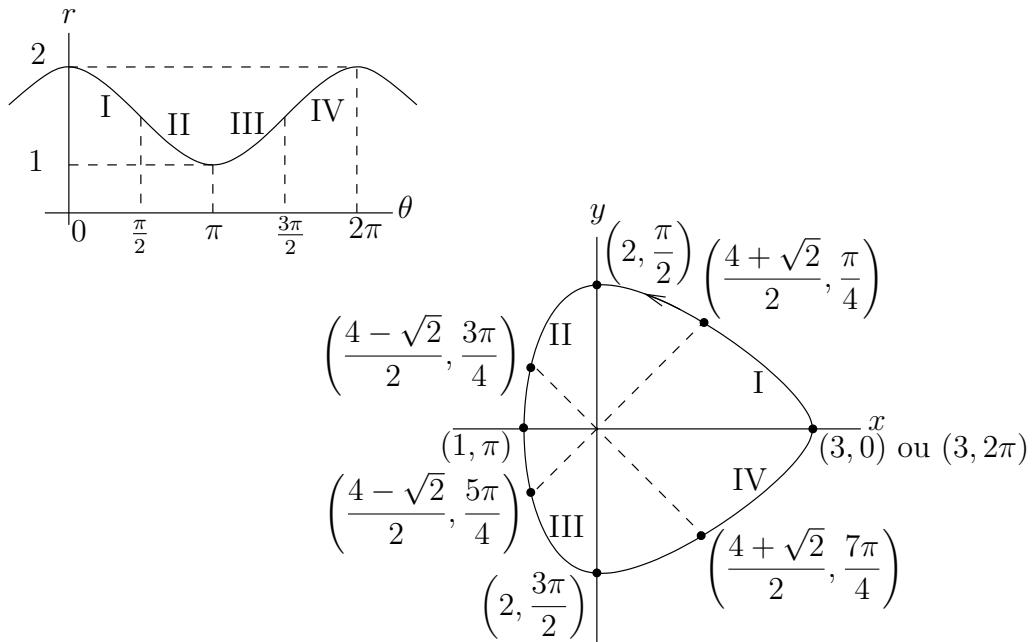
On parcourt la courbe Γ deux fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.



Exemple 11.5.7

Tracer la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2 + \cos(\theta)$.

On a tracé la courbe décrite par $r = 2 + \cos(\theta)$ dans la figure suivante.



En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

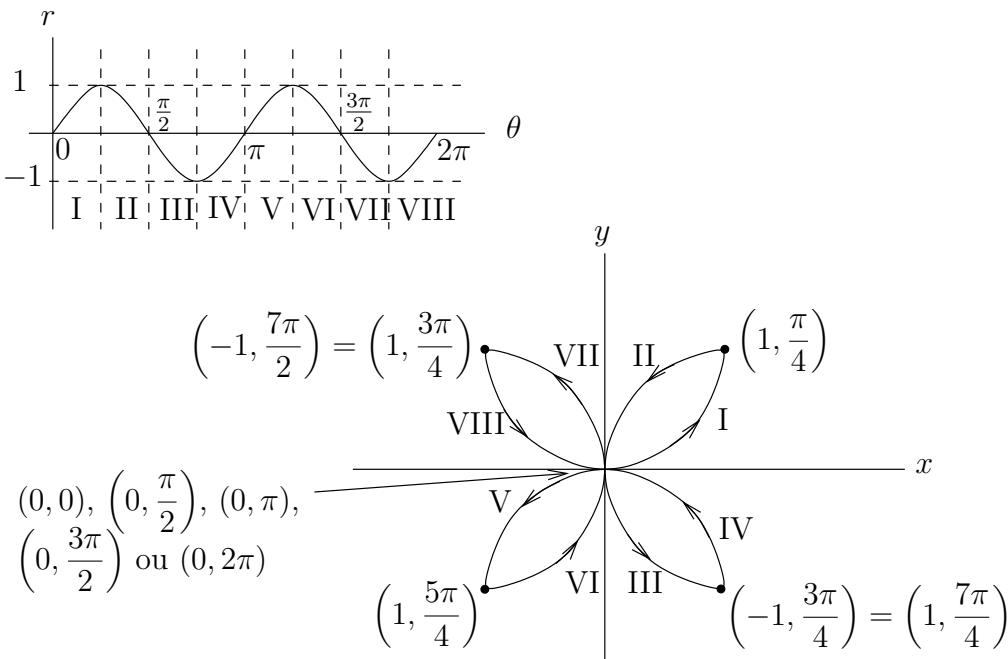
θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/2$	2π
r	3	$\frac{4+\sqrt{2}}{2} \approx 2.7071$	2	$\frac{4-\sqrt{2}}{2} \approx 1.29289$	1	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{4+\sqrt{2}}{2}$	0

On retrouve la courbe Γ dans la figure ci-dessus. On parcourt la courbe Γ une fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. ♣

Exemple 11.5.8

Tracer la courbe Γ décrite par l'équation $r = \sin(2\theta)$.

On a tracé le graphe de r en fonction de θ dans la figure suivante.



En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

On retrouve la courbe Γ dans la figure ci-dessus. On parcourt la courbe Γ en suivant l'ordre des intervalles I, II, III, ..., VIII. ♣

Remarque 11.5.9

Les courbes que nous avons obtenues aux exemples 11.5.6, 11.5.7 et 11.5.8 ont certaines symétries. La courbe de l'exemple 11.5.6 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y . La courbe de l'exemple 11.5.7 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x . La courbe de l'exemple 11.5.8 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x , à l'axe des y , à la droite $x = y$, à la droite $y = -x$ et à l'origine. Elle est de plus inchangée par une rotation autour de l'origine de $\pi/2$, π ou $3\pi/2$. En fait, on dit que la courbe de l'exemple 11.5.8 à la symétrie d'un carré car les opérations qui transforment un carré en lui-même vont aussi transformer cette courbe en elle-même.

Résumons comment déterminer les principales symétries d'une courbe donnée en coordonnées polaires. Soit Γ une courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $f(r, \theta) = 0$.

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x si $f(r, \theta) = f(r, -\theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(-r, \pi - \theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y si $f(r, \theta) = f(r, \pi - \theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(-r, -\theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'origine (cela correspond aussi à une rotation par π) si $f(r, \theta) = f(-r, \theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(r, \pi + \theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = \pi/4$ (i.e. $y = x$) si $f(r, \theta) = f\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, -\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$).

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = -\pi/4$ (i.e. $y = -x$) si $f(r, \theta) = f\left(r, -\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$).
- La courbe Γ est inchangée par une rotation centrée à l'origine de $\pi/2$ dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre si $f(r, \theta) = f\left(r, \frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, -\frac{\pi}{2} + \theta\right)$).

Les conditions entre parenthèses dans la liste précédente sont données car ils sont parfois plus simples à vérifier que les conditions standards.



11.5.2 Longueur d'une courbe donnée par une équation en coordonnées polaires

On suppose qu'un courbe Γ est décrite par l'équation en coordonnées polaires $f(r, \theta) = 0$. On suppose de plus que l'on peut résoudre cette équation pour r en fonction de θ . Dans ce cas, une représentation paramétrique pour la courbe Γ est donnée par

$$x = \phi_1(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \quad , \quad y = \phi_2(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \quad \text{pour } a \leq \theta \leq b .$$

Puisque

$$\phi'_1(\theta) = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \phi'_2(\theta) = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta) ,$$

on a

$$\begin{aligned} (\phi'_1(\theta))^2 + (\phi'_2(\theta))^2 &= (r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta))^2 + (r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta))^2 \\ &= (r'(\theta))^2 \cos^2(\theta) - 2 r'(\theta) r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^2 \sin^2(\theta) \\ &\quad + (r'(\theta))^2 \sin^2(\theta) + 2 r'(\theta) r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^2 \cos^2(\theta) \\ &= (r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2 , \end{aligned}$$

Ainsi, la formule (11.3.3) pour calculer la longueur d'une courbe devient

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'_1(\theta))^2 + (\phi'_2(\theta))^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta .$$

On a donc le résultat suivant.

Proposition 11.5.10

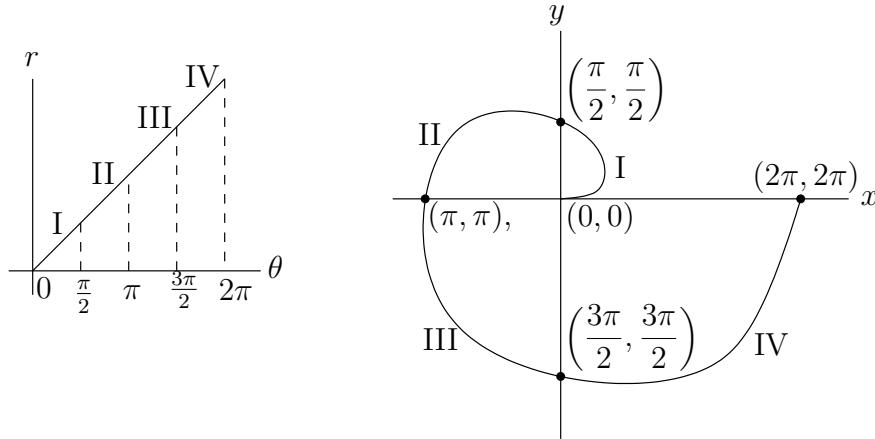
Soit Γ une courbe donnée par une équation en coordonnées polaire $r = r(\theta)$ pour $a \leq \theta \leq b$. La longueur L de cette courbe est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta . \quad (11.5.1)$$

Exemple 11.5.11

Quelle est la longueur de la courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $r = \theta$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Tracer cette courbe.

La représentation graphique de la courbe se trouve dans la figure suivante.



C'est une spirale. Puisque $r(\theta) = \theta$ et $r'(\theta) = 1$, la longueur L de cette courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta .$$

On a montré à l'aide d'une substitution trigonométrique à l'exemple 6.2.22 que

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \frac{1}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| + C .$$

Ainsi,

$$L = \left(\frac{1}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln |2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}| .$$



11.5.3 Aire d'une région bornée par une courbe définie à l'aide d'une équation en coordonnées polaires

Supposons que l'on veuille calculer l'aire de la région R de la figure 11.9. La région R est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/k$ et $\theta_j = \alpha + j \Delta\theta$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. On a que $\theta_0 = \alpha$ et $\theta_k = \beta$. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ est partagé en sous-intervalles de la forme $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

Pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, on choisit θ_j^* entre θ_j et θ_{j+1} . L'aire de la région bornée par les droites $\theta = \theta_j$ et $\theta = \theta_{j+1}$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$, est approximativement

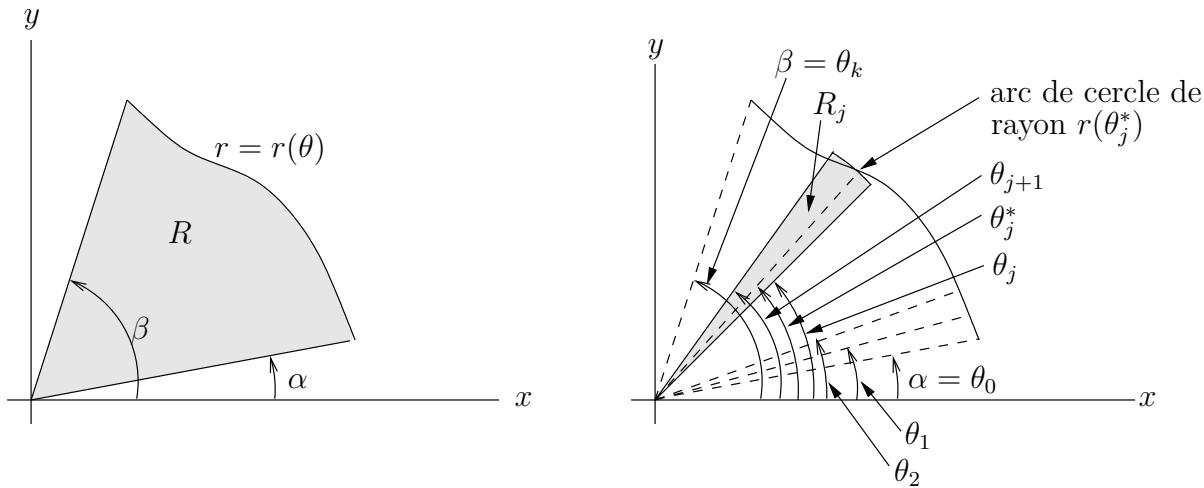


FIGURE 11.9 – La région R du plan est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$

l'aire A_j de la région R_j bornée par les droites $\theta = \theta_j$ et $\theta = \theta_{j+1}$, et l'arc de cercle $r = r(\theta_j^*)$ pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$. La région R_j est une pointe de tarte dont l'aire est

$$A_j = \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta\theta_j^*$$

car R_j représente $\Delta\theta_j^*/2\pi$ du disque de rayon $r(\theta_j^*)$ dont l'aire est $\pi r^2(\theta_j^*)$.

Ainsi, l'aire A de la région R est approximativement la somme de l'aire de chacune des régions R_j .

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} A_j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta\theta_j^*. \quad (11.5.2)$$

La somme précédente représente une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

Si k tend vers plus l'infini en (11.5.2), on obtient le résultat suivant.

Proposition 11.5.12

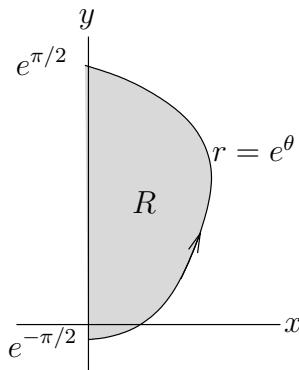
Soit R une région bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$. L'aire A de R est

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

Exemple 11.5.13

Tracez le dessin de la région R bornée par la courbe $r = e^\theta$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ et l'axe des y . Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région R dans la figure suivante.



L'aire A de R est donnée par

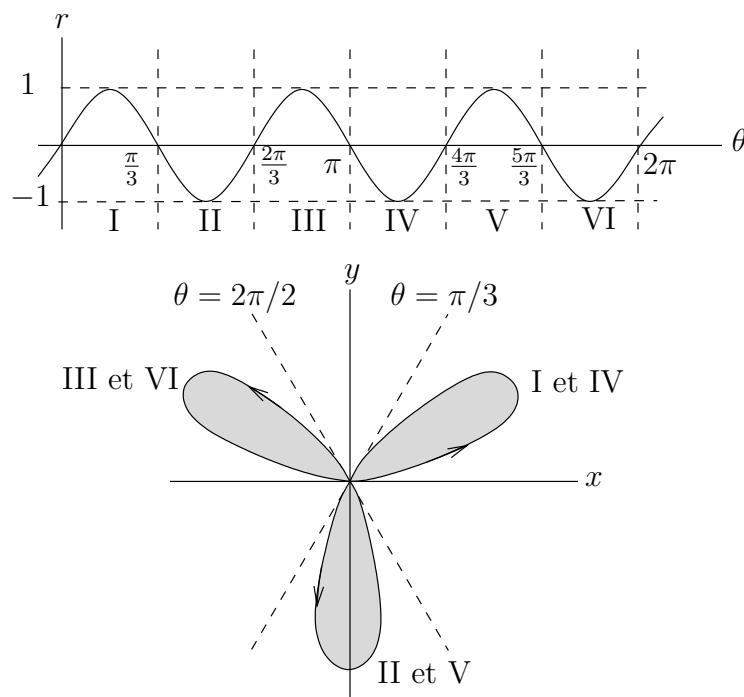
$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4} e^{2\theta} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} (e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{1}{2} \sinh(\pi) .$$



Exemple 11.5.14

Tracez le dessin de la région R bornée par la courbe $r = \sin(3\theta)$. Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région R dans la figure ci-dessous.



On parcourt la contour de R deux fois lorsque θ augmente de 0 à 2π . De plus, on remarque que la courbe $r = \sin(3\theta)$ est invariante pour la rotation de $2\pi/3$ car

$$r = \sin(3\theta) \Rightarrow \sin\left(3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3\theta + 2\pi) = \sin(3\theta) = r.$$

Il suffit donc de calculer l'aire de la partie de la région R dans le premier quadrant et de multiplier le résultat par 3 pour trouver l'aire A de R .

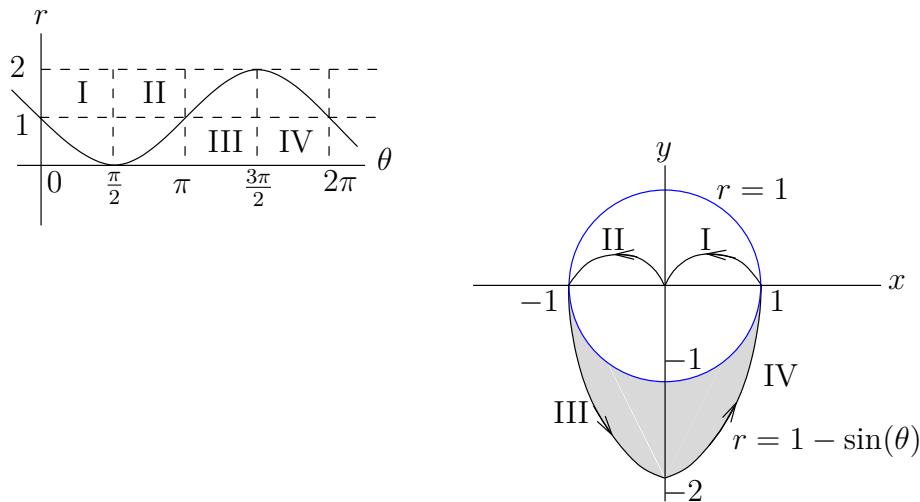
$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2(3\theta) d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(6\theta)) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \left(\theta - \frac{1}{6} \sin(6\theta) \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Exemple 11.5.15

Tracez le dessin de la région R qui est à l'intérieur de la courbe $r = 1 - \sin(\theta)$ et à l'extérieur du cercle $r = 1$. Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région R dans la figure suivante.



Pour obtenir l'aire A de la région R , il suffit de soustraire l'aire de la partie du disque de rayon 1 sous l'axe des x de l'aire de la région bornée par la courbe $r = 1 - \sin(\theta)$ pour $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ et l'axe des x . C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - \sin(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - 2\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left(1 - 2\sin(\theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\sin(\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) \right) d\theta - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \theta + 2 \cos(\theta) - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} + 4 \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2 .
 \end{aligned}$$



11.6 Exercices

Question 11.1

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = t^2$, $y = 1 + t^3$ qui va du point $(0, 1)$ au point $(4, 9)$?

Question 11.2

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ pour $0 \leq t \leq \pi/2$?

Question 11.3

Quelle est la longueur de la courbe $y = 1 + 2x^{3/2}$ pour $1 \leq x \leq 3$?

Question 11.4

Quelle est la longueur de la courbe $y = \ln |\cos(x)|$ pour $0 \leq x \leq \pi/4$?

Question 11.5

On considère la région R bornée par l'axe des x , la courbe $y = x^{1/3}$ et la droite $x = 1$. Calculez le périmètre de cette région avec une précision de 0.001 .



Fonctions de plusieurs variables



12

Dans ce chapitre, nous étudierons les fonctions de plusieurs variables.

Définition 12.0.1

Une **fonction** f de n variables ($n > 1$) est une opération d'un sous-ensemble D de \mathbb{R}^n à l'ensemble \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) qui, à chaque élément de D , associe un seul élément de \mathbb{R}^m . On écrit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ pour désigner une fonction f de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m .

Les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ sont généralement définies par m fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Lorsque l'on écrit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, on résume la formule suivante

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

Les définitions du domaine et de l'image d'une fonction que nous avons vues précédemment prennent la forme suivante dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.

Définition 12.0.2

Le **domaine** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ où la fonction f est définie. On écrit

$$\text{Dom } f = D.$$

L'**image** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des éléments $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ pour lesquels il existe au moins un élément $\mathbf{x} \in D$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. On écrit

$$\text{Im } f \equiv \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = \mathbf{z} \text{ pour au moins un élément } \mathbf{x} \in D\}.$$

Remarque 12.0.3

Pour être consistant avec la notation algébrique, on devrait représenter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par la matrice

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de dimension $n \times 1$. Par contre, la tradition veut que l'on utilise la notation géométrique

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour les fonctions à valeurs réelles sur \mathbb{R}^n . Le lecteur devrait toujours garder en tête la notation algébrique car c'est celle-ci qui doit être utilisée pour l'étude des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où $m > 1$.



Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on a

$$\text{Dom } f = \bigcap_{i=1}^m \text{Dom } f_i.$$

C'est-à-dire que f est définie au point \mathbf{x} si tous les f_i 's sont définis au point \mathbf{x} .

Sans en être conscient, nous avons déjà travaillé avec des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Soit A une matrice de dimension $m \times n$. On peut utiliser cette matrice pour définir une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la façon suivante :

$$f(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, cette fonction associe à un vecteur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n le vecteur $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ dans \mathbb{R}^m .

Les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définies par le produit d'une matrice avec un vecteur satisfont la définition suivante :

Définition 12.0.4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée une **fonction linéaire** ou **application linéaire** si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ pour tout vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n .

Exemple 12.0.5

La matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

peut définir une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Essayons de voir quelle est l'action de cette fonction sur un vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

le vecteur \mathbf{y} est de même longueur que \mathbf{x} . car

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{(a \cos(\theta) - b \sin(\theta))^2 + (a \sin(\theta) + b \cos(\theta))^2}$$

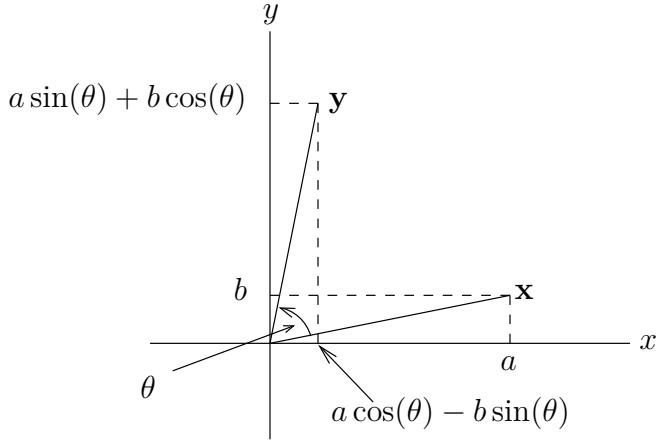


FIGURE 12.1 – Le vecteur \mathbf{y} est obtenu par la rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre et par un angle θ du vecteur \mathbf{x} lorsque $\theta > 0$.

$$\begin{aligned} &= \sqrt{a^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + b^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

où nous avons évidemment utilisé l'identité trigonométrique $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour tout θ . De plus,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + b^2) \cos(\theta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta). \end{aligned}$$

C'est exactement la formule (9.2.1) qui détermine le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . L'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} est donc θ .

L'image par f d'un vecteur \mathbf{x} est donc la rotation par θ radians du vecteur \mathbf{x} comme on peut le voir à la figure 12.1. Si $\theta > 0$, on a une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre et si $\theta < 0$ on a une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

Par exemple, si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\theta = \pi/3$, on a

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_{\pi/3} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs de longueur 2. Le vecteur \mathbf{y} est le résultat d'une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre par $\pi/3$ radians de \mathbf{x} ; le vecteur \mathbf{x} forme un angle de $\pi/6$ avec l'axe des x alors que \mathbf{y} forme un angle de $\pi/2$ avec l'axe des x . ♣

Exemple 12.0.6

Nous avons déjà travaillé avec des fonctions de la forme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Les représentations paramétriques des courbes dans \mathbb{R}^m sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m . C'est le cas où $n = 1$.

Par exemple, la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par les fonctions

$$\phi_1(t) = 2 \cos(t), \quad \phi_2(t) = 2 \sin(t), \quad \phi_3(t) = t$$

est une représentation paramétrique d'un ressort de longueur infinie (car ϕ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$) en trois dimensions. 

Exemple 12.0.7

Les fonctions

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

et

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

définissent une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Le vecteur $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ possède les coordonnées

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

et

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ de la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$$

car f_2 n'est pas définie pour $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 

12.1 Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Dans cette section, nous considérons les fonctions à valeurs réelles ; c'est-à-dire, $m = 1$.

Exemple 12.1.1

La température maximale (en degrés centigrades) au point de longitude x et latitude y (en degrés) définit une fonction $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque point de coordonnées (x, y) associe la température maximale $T(x, y)$ à ce point. L'ensemble D est l'ensemble des coordonnées ; c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 360 \text{ et } -90 \leq y \leq 90\}$$

où on suppose que $y < 0$ dans l'hémisphère sud. 

Exemple 12.1.2

Une fonction de plusieurs variables peut être définie à l'aide d'un tableau comme c'est le cas

dans le tableau suivant qui donne l'indice de température en fonction de la température et du niveau d'humidité.

		Température en C°		
		20	22	24
Humidité en %	0	18	20	22
	10	19	21	23
	20	19.5	21.5	23.5
	30	20	22	25

Ce tableau définit une fonction $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x, y) : x = 20, 22, 24 \text{ et } y = 0, 10, 20, 30\}.$$

On a $I(0, 22) = 20^\circ\text{C}$, $I(20, 22) = 21.5^\circ\text{C}$, etc. ♣

Exemple 12.1.3

On peut définir une fonction à l'aide d'une expression algébrique. Par exemple,

$$f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$$

définit une fonction sur l'ensemble des points (x, y) tel que $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$. Ainsi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}.$$

C'est la région du plan bornée par l'ellipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. ♣

Pour les fonctions de plusieurs variables, la définition du graphe d'une fonction s'énonce de la façon suivante :

Définition 12.1.4

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. On définit le **graphe de la fonction** f comme étant le sous-ensemble

$$\text{graphe de } f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

de \mathbb{R}^{n+1} .

Seules les fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ pourront être représentées par un dessin (jusqu'au jour où quelqu'un imaginera une façon de visualiser un objet dans un espace de dimension plus grande que trois). On retrouve à la figure 12.2 le graphe d'une possible fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$.

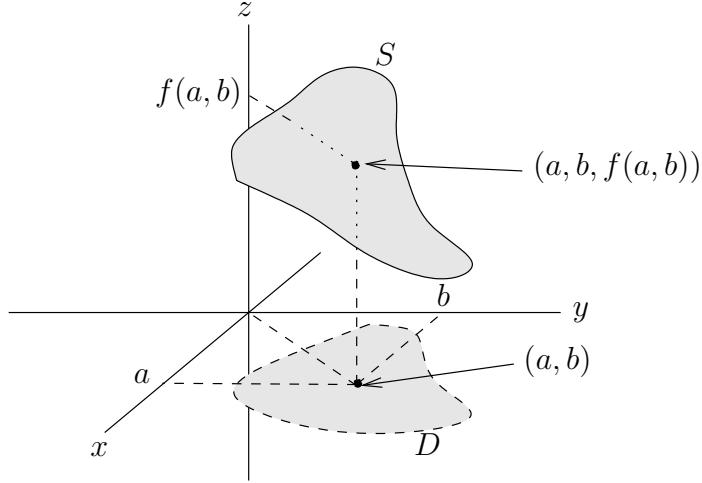


FIGURE 12.2 – Pour obtenir le graphe de la fonction f , on trace dans le système de coordonnées cartésiennes l'ensemble des points $(x, y, f(x, y))$ pour $(x, y) \in D$.

Définition 12.1.5

Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$ où m_1, m_2 et b sont des constantes.

Si $b = 0$, on obtient une fonction linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} puisque f satisfait alors la définition 12.0.4.

On reconnaît l'équation d'un plan dans l'espace. Après les fonctions constantes, les fonctions linéaires sont les fonctions les plus simples à dessiner.

Exemple 12.1.6

Le tableau suivant donne quelques valeurs d'une fonction affine f . Trouver la formule $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$ pour cette fonction.

$y \setminus x$	0	1	2	3
-1	1.5	3.5	5.5	7.5
0	1	3	5	7
1	0.5	2.5	4.5	6.5
2	0	2	4	6

1. On présente premièrement une approche géométrique pour résoudre ce problème. Comme l'intersection de deux plans est une droite, l'intersection du graphe de f et du plan $x = 1$ est une droite qui contient les points $(y, z) = (-1, 3.5), (0, 3)$, $(1, 2.5)$ et $(2, 2)$. C'est donc une droite de pente $\frac{3.5 - 3}{-1 - 0} = -0.5$. Or, si $x = 1$ dans $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$, on obtient la formule $z = m_2 y + m_1 + b$ pour la droite d'intersection. Donc, $m_2 = -0.5$.

L'intersection du graphe de f et du plan $y = 2$ est une droite qui contient les points $(x, z) = (0, 0), (1, 2), (2, 4)$ et $(3, 6)$. C'est donc une droite de pente $\frac{2-0}{1-0} = 2$. Or, si $y = 2$ dans $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$, on obtient la formule $z = m_1 x + 2m_1 + b$ pour la droite d'intersection. Donc, $m_1 = 2$.

On a donc trouvé que $z = f(x, y) = 2x - 0.5y + b$. Pour déterminer b , prenons le point $(1, 1, 2.5)$ du graphe de f (tout autre point du graphe serait acceptable). On doit avoir $2.5 = f(1, 1) = 2 - 0.5 + b$. Ainsi, $b = 1$.

La formule algébrique pour f est $z = f(x, y) = 2x - 0.5y + 1$.

2. La deuxième approche pour résoudre le problème est purement algébrique.

On sait qu'un plan est déterminé par trois points non-colinéaires (i.e. qui ne sont pas sur la même droite). On choisit les trois points non-colinéaires $(1, -1, 3.5)$, $(1, 2, 2)$ et $(2, 1, 4.5)$ (tout autre choix de trois points non-colinéaires aurait été aussi bon). Ces trois points doivent satisfaire simultanément les trois équations linéaires suivantes :

$$3.5 = m_1 - m_2 + b, \quad 2 = m_1 + 2m_2 + b \quad \text{et} \quad 4.5 = 2m_1 + m_2 + b.$$

On doit donc résoudre ce système d'équations linéaires pour m_1 , m_2 et b . Sous la forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

On a la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4.5 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 3 & -1 & -2.5 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $-R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 - R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

On trouve donc $m_1 = 2$, $m_2 = -1/2$ et $b = 1$ comme pour la première méthode.



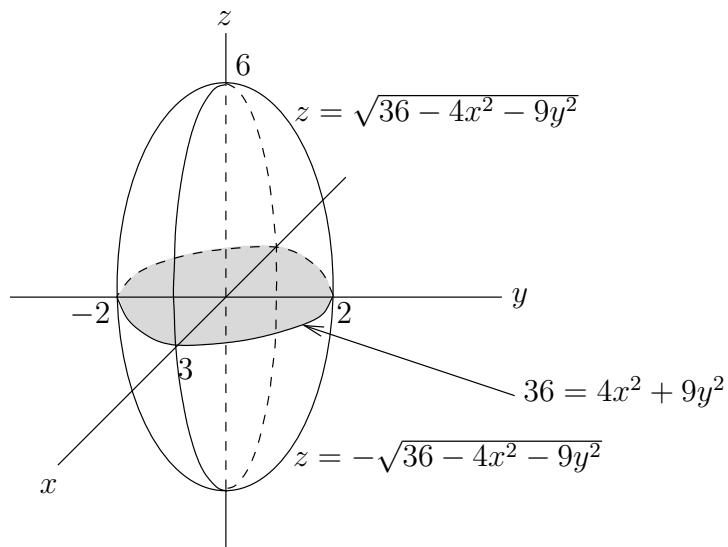
Exemple 12.1.7

À l'exemple 12.1.3, le domaine de f est

$$\text{Dom } f = \{(x, y) : \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1\}.$$

Montrer que l'image de f est l'intervalle $[0, 6]$.

Si on pose $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$, on obtient l'équation de l'ellipsoïde $z^2 + 4x^2 + 9y^2 = 36$ que l'on a représentée dans la figure ci-dessous.



La partie de l'ellipsoïde au-dessus du plan x, y est le graphe de f . La plus grande valeur de f est 6 lorsque $(x, y) = (0, 0)$ et la plus petite valeur de f est 0 lorsque $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$. La fonction f prend toutes les valeurs entre 0 et 6.



Exemple 12.1.8

Tracer le graphe de la fonction $f(x, y) = 5 - \sqrt{36 - 9(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2}$.



Même pour les fonctions de deux variables, il est souvent fort difficile de tracer le graphe d'une fonction. On a donc besoin de méthodes pour représenter l'information fournie par une fonction.

Définition 12.1.9

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$. Une **courbe de niveaux** de f est une courbe $C \subset D$ définie par l'équation $f(x_1, x_2) = k$ où k est une constante ; c'est-à-dire, $C = \{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = k\}$.

Si on trace plusieurs courbes de niveau d'une fonction f sur une même figure, on peut obtenir de l'information sur les maximums et minimums locaux de cette fonction ainsi que

sur les régions où cette fonction est croissante ou décroissante.

Exemple 12.1.10

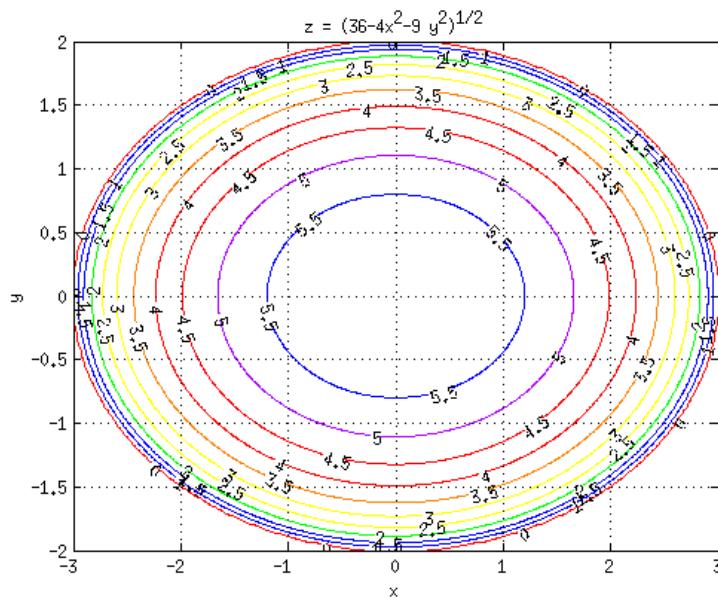
On veut tracer plusieurs courbes de niveau pour la fonction

$$f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} .$$

Si $f(x, y) = k$, on obtient

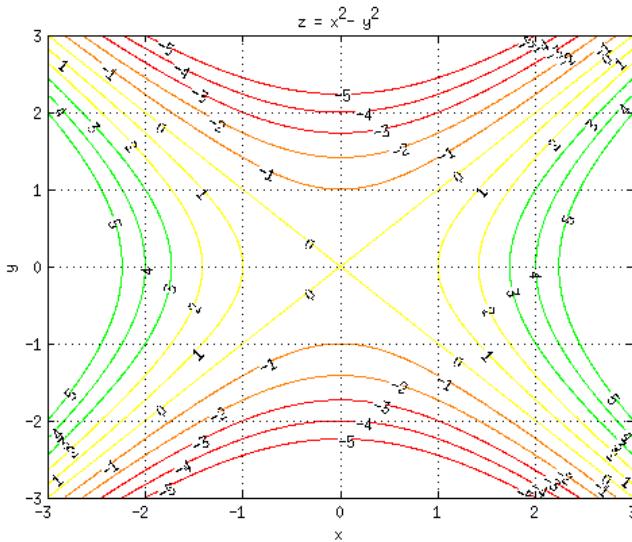
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 - \frac{k^2}{6^2} .$$

Les seules courbes de niveau sont pour $|k| \leq 6$ car $x^2/3^2 + y^2/2^2 \geq 0$ pour tout x et y . Les courbes de niveau sont des ellipses. On obtient la figure suivante.



Exemple 12.1.11

On veut tracer plusieurs courbes de niveau pour la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$. Les courbes de niveau $f(x, y) = k$ sont définies pour tout k . Les courbes de niveau sont des hyperboles sauf pour $k = 0$ où l'on obtient les droites $y = \pm x$. On obtient la figure suivante.



Exemple 12.1.12

Trouver le domaine et tracer quelques courbes de niveau pour chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x, y) = \ln(xy - 1)$
- b) $f(x, y) = \sqrt{(x + y)/(x - y)}$



Définition 12.1.13

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ et $M \subset \mathbb{R}^3$ un plan défini par $x_2 = m x_1 + b$. Une **section verticale** de f est une courbe $C \subset M$ définie par l'intersection de M avec le graphe de f ; c'est-à-dire,

$$C = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : x_2 = m x_1 + b \text{ et } (x_1, x_2) \in D\} .$$

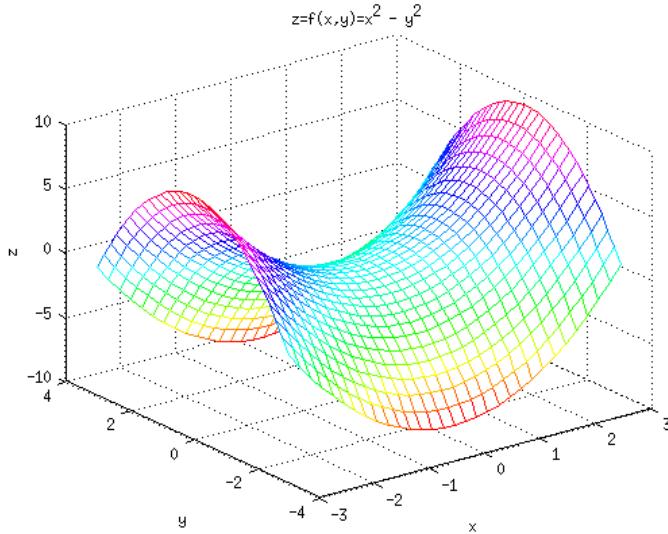
Deux plans verticaux sont plus fréquemment utilisés que les autres pour produire des sections verticales : les plans $x_1 = k_1$ et $x_2 = k_2$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

Exemple 12.1.14

Décrire les sections verticales $x = k_1$ et $y = k_2$ de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Si $x = k_1$, on obtient l'équation $z = f(k_1, y) = k_1^2 - y^2$. Ce sont des paraboles ouvertes vers le bas. Si $y = k_2$, on obtient l'équation $z = f(x, k_2) = x^2 - k_2^2$. Ce sont des paraboles ouvertes vers le haut.

Le graphe de f est représenté dans la figure suivante.



On retrouve à la figure 12.3 quelques courbes dans le plan que l'on peut retrouver comme courbes de niveau ou sections verticales d'une fonction.

12.2 Limites et fonctions continues

La définition de la limite d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ à un point \mathbf{c} de $D \subset \mathbb{R}^n$ ainsi que la définition de la continuité de la fonction f au point \mathbf{c} sont presqu'identiques aux définitions que l'on a données pour ces concepts à la section 3.1 dans le cas des fonctions d'une variable. La seule différence est que la valeur absolue est remplacée par la norme euclidienne.

Sur la droite réelle, la distance entre un point x et l'origine est donnée par la valeur absolue $|x|$ de ce nombre. La distance entre deux points x et y est donnée par la valeur absolue $|x - y|$.

La distance Euclidienne dans \mathbb{R}^n joue le rôle de la valeur absolue dans \mathbb{R} . On a vue à la définition 9.1.3 que la longueur d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (ou sa **norme euclidienne**) est donnée par

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

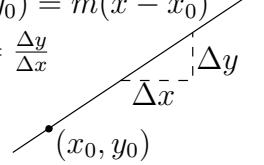
Le symbole $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^n remplace le symbole $|\cdot|$ pour la valeur absolue dans \mathbb{R} .

La distance euclidienne entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} de \mathbb{R}^n est la longueur du vecteur pour se rendre d'un point à l'autre. Ainsi, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} est

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

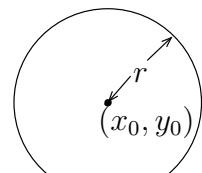
On retrouve à la figure 12.4 une représentation de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 . On voit que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ est la distance entre \mathbf{a} et \mathbf{b} que l'on obtient à l'aide du théorème de Pythagore.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$


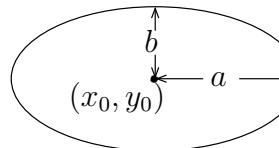
(x_0, y_0)

Équation d'une droite



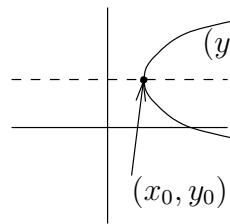
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Équation d'un cercle



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Équation d'une ellipse

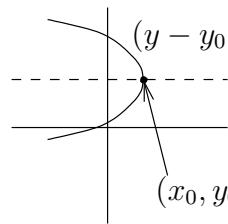


$$(y - y_0)^2 = m(x - x_0)$$

$$m > 0$$

(x_0, y_0)

Équation d'une parabole
Axe parallèle à l'axe des x

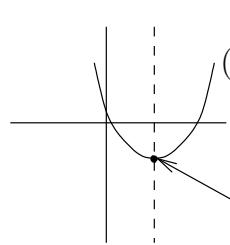


$$(y - y_0)^2 = m(x - x_0)$$

$$m < 0$$

(x_0, y_0)

Équation d'une parabole
Axe parallèle à l'axe des x

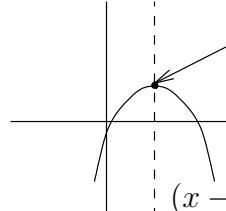


$$(x - x_0)^2 = m(y - y_0)$$

$$m > 0$$

(x_0, y_0)

Équation d'une parabole
Axe parallèle à l'axe des y

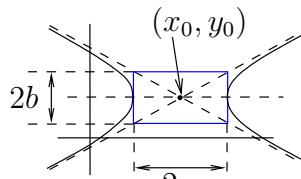


$$(x - x_0)^2 = m(y - y_0)$$

$$m < 0$$

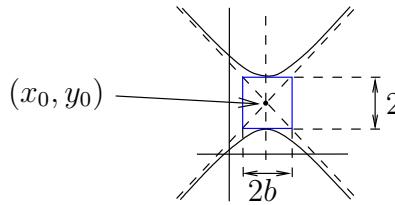
(x_0, y_0)

Équation d'une parabole
Axe parallèle à l'axe des y



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Équation d'une hyperbole
Axe parallèle à l'axe des x



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Équation d'une hyperbole
Axe parallèle à l'axe des y

FIGURE 12.3 – Voici quelques courbes élémentaires dans le plan qui peuvent représenter des courbes de niveau ou des sections verticales d'une fonction.

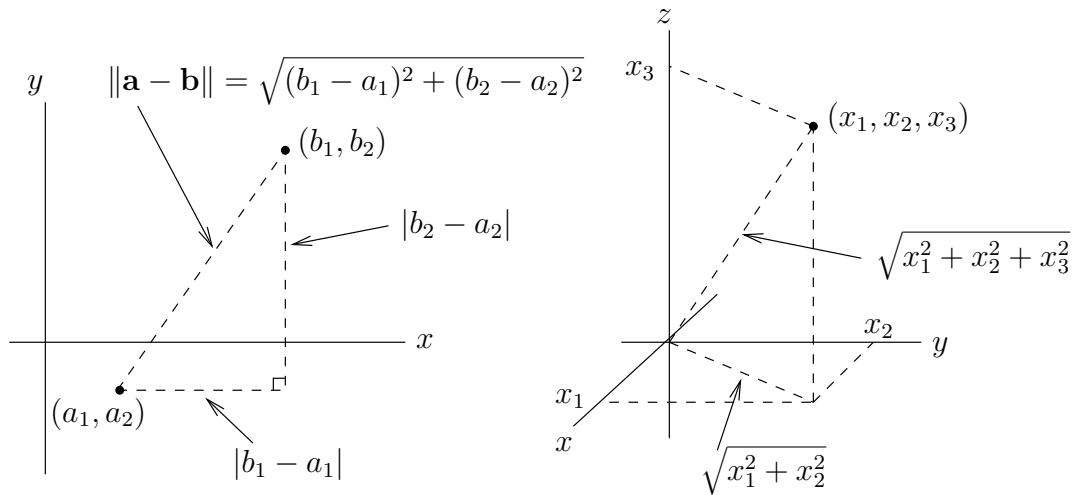


FIGURE 12.4 – Illustrations de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 dans la figure de gauche et de la longueur d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans la figure de droite.

On commence par définir la notion de convergence d'une suite de points dans \mathbb{R}^n .

Définition 12.2.1

On dit qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n converge (ou tend) vers un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si la distance euclidienne entre \mathbf{x}_k et \mathbf{c} approche 0 lorsque k tend vers plus l'infini. En d'autres mots,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| = 0 .$$

On écrit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{c} .$$

On dit que \mathbf{c} est la limite de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

La définition précédente de limite d'une suite est équivalente à la définition suivante en termes de ϵ et δ .

Définition 12.2.2

On dit qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n converge (ou tend) vers un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe un entier $K > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| < \epsilon \quad \text{si} \quad k > K .$$

On écrit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{c} .$$

On dit aussi que \mathbf{c} est la limite de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

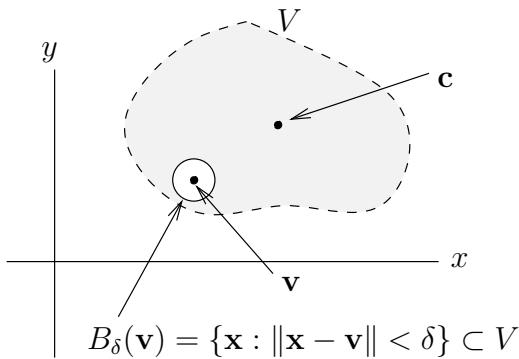


FIGURE 12.5 – V est un voisinage possible pour le point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Quel que soit le point \mathbf{v} de V que l'on choisit, on peut toujours trouver une boule $B_\delta(\mathbf{v})$ de rayon δ centrée à \mathbf{v} qui soit à l'intérieur de V . Plus \mathbf{v} sera près de la frontière de V , plus δ devra être choisi petit.

Avant de définir la limite, la continuité et la dérivée d'une fonction de plusieurs variables à un point, il faut généraliser le concept d'intervalles que l'on retrouve sur la droite réelle.

Définition 12.2.3

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si quel que soit $\mathbf{v} \in V$ on peut trouver $\delta > 0$ (qui peut dépendre de \mathbf{v}) tel que

$$B_\delta(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| < \delta\} \subset V .$$

$B_\delta(\mathbf{v})$ est la boule de rayon δ centrée au point \mathbf{v} (voir figure 12.5).

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est un **voisinage** d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si $\mathbf{c} \in V$ et V est ouvert. L'ensemble $V \setminus \{\mathbf{c}\}$, l'ensemble V auquel on a enlevé le point \mathbf{c} , est alors appelé un **voisinage troué** de \mathbf{c} .

On note que les boules $B_\delta(\mathbf{v})$ ne contiennent pas leur frontière $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \delta\}$. Cette propriété permet de dire qu'une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ où V est un voisinage est définie «autour» de tout point $\mathbf{v} \in V$. C'est un détail subtil qui nous permet de bien définir la limite et la dérivée d'une fonction en un point.

Il est parfois utile de trouver la frontière d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . Il est facile de voir que la frontière de la boule $B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ est la sphère $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 2\}$. Malheureusement, ce n'est pas toujours aussi facile que cela de déterminer la frontière d'un ensemble de \mathbb{R}^3 (L'étude des frontières d'ensembles est le sujet principal de la géométrie fractale). En fait, il faut commencer par définir ce qu'est la frontière d'une ensemble dans \mathbb{R}^n .

Définition 12.2.4

Soit S un sous ensemble de \mathbb{R}^n . La **frontière** de S , dénotée ∂S , est l'ensemble des points \mathbf{x} tels que, pour tout $\delta > 0$, on a $B_\delta(\mathbf{x}) \cap S \neq \emptyset$ et $B_\delta(\mathbf{x}) \cap S^c \neq \emptyset$, où $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$ est le complément de l'ensemble S . En d'autres mots, pour tout voisinage V de \mathbf{x} , $V \cap S \neq \emptyset$ et $V \cap S^c \neq \emptyset$.

Exemple 12.2.5

Soit

$$S_o = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 2 \text{ et } x_3 > 0 \right\}$$

et

$$S_f = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq 2 \text{ et } x_3 \geq 0 \right\} .$$

La frontière de S_o est

$$\partial S_o = S_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2 \text{ et } x_3 > 0, \text{ ou } \|\mathbf{x}\| \leq 2 \text{ et } x_3 = 0 \right\} .$$

On note que $\partial S_o \cap S_o = \emptyset$, la frontière de S_o n'appartient pas à S_o . Par contre, la frontière de S_f est aussi S_1 et on a $S_1 \subset S_f$. On pourrait aussi donner des exemples d'ensembles qui contiennent une partie seulement de leur frontière, une partie qui n'est pas l'ensemble vide et qui n'est pas la frontière au complet. Les ensembles qui contiennent leur frontière sont très importants et on leurs donne un nom.

**Définition 12.2.6**

Les ensembles $S \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\partial S \subset S$ sont appelés des **ensembles fermés**.

**Remarque 12.2.7**

Les intervalles fermés de la droite réelle sont des exemples d'ensembles fermés. De même, la balle $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ et la sphère $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2\}$ sont fermées. On note que $\partial B = S$ et $\partial S = S$.

**Exemple 12.2.8**

L'exemple de voisinage le plus important, et celui que le lecteur devrait toujours avoir en tête lorsque l'on parle de voisinage, est

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < r\} .$$

Pour $n = 2$, c'est le disque de rayon r centré au point \mathbf{c} . Pour $n = 3$, c'est la sphère de rayon r centrée au point \mathbf{c} ,

L'ensemble

$$V' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < r\}$$

est un voisinage trouvé de \mathbf{c} car le point \mathbf{c} a été enlevé du voisinage V .



Définition 12.2.9

Soit D un voisinage trouvé d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On écrit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

s'il existe un unique point $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{w}$$

quelle que soit la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} .

Dans la limite ci-dessus, les points \mathbf{x}_k sont tous différents de \mathbf{c} car $\mathbf{c} \notin D$. De plus, il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

On dit que $f(\mathbf{x})$ converge (ou tend) vers le point \mathbf{w} lorsque \mathbf{x} tend vers \mathbf{c} .
On dit aussi que \mathbf{w} est la limite de f au point \mathbf{c} .

Comme pour la définition de limite d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à un point c , on peut donner une définition équivalente à la définition précédente en termes de ϵ et δ .

Définition 12.2.10

Soit D un voisinage trouvé d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On écrit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

pour $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \delta, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, $\mathbf{x} \neq \mathbf{c}$ car $\mathbf{c} \notin D$. De plus, Il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

On dit que $f(\mathbf{x})$ converge (ou tend) vers le point \mathbf{w} lorsque \mathbf{x} tend vers \mathbf{c} .
On dit aussi que \mathbf{w} est la limite de f au point \mathbf{c} .

Exemple 12.2.11

Quelle est la valeur de la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$?

On a vu que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1.$$

Puisque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x+y = 0$, on a que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$.

Pour être plus précis, si $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers l'origine lorsque k converge vers plus l'infini, alors $\{x_k + y_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers 0 lorsque n converge vers plus l'infini. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = 1.$$

Puisque cela est vrai pour tout suite $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers l'origine lorsque k converge vers plus l'infini, on peut conclure que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1.$$



Exemple 12.2.12

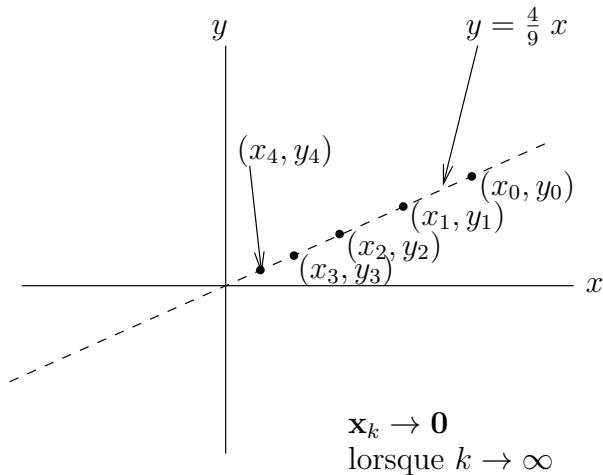
Soit $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Si on approche l'origine avec des points (x_k, y_k) le long de la droite $y = mx$, alors $y_k = mx_k$ pour tout k et on obtient

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{x_k^2 + (m x_k)^2} = \frac{1}{1 + m^2} \rightarrow \frac{1}{1 + m^2}$$

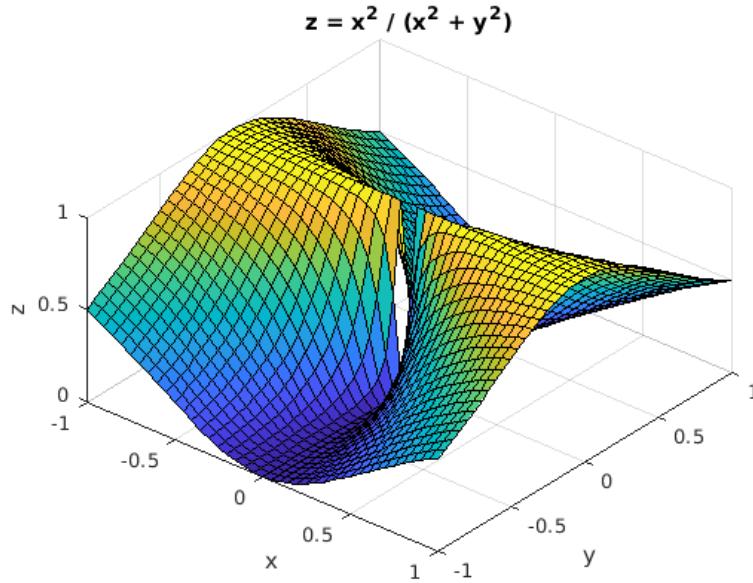
lorsque k tend vers l'infini.

Dans la figure suivante (x_k, y_k) converge vers l'origine le long de la droite $y = 4x/9$ lorsque k tend vers l'infini.



Comme on a des limites différentes pour différentes valeurs de $m > 0$ (i.e. lorsque l'on approche l'origine le long de différentes droites), on conclut que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

Le graphe de f est donné dans la figure ci-dessous.



Exemple 12.2.13

Évaluer la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x}{x^2 + y^2 - 2y + 1} .$$

(Suggestion : $\frac{xy - x}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \frac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$ avec $y-1 = mx$.)



Définition 12.2.14

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. Comme $\mathbf{c} \in D$, on a que f est définie au point \mathbf{c} . La fonction f est **continue au point \mathbf{c}** si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}) .$$

En d'autres mots,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{c})$$

quelle que soit la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} .

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, on dit que f **est continue sur D** .

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous permet d'écrire la définition suivante pour la continuité d'une fonction à un point. Cette définition est évidemment équivalente à la définition précédente de la continuité.

Définition 12.2.15

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est **continue** au point \mathbf{c} si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \delta, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, on dit que f est **continue sur D** .

Comme pour les fonctions d'une variable, on a que les fonctions de plusieurs variables qui sont formées à partir de polynômes, de fonctions trigonométriques, de fonctions exponentielles et logarithmiques, ... sont continues en tout point où elles sont définies (où il n'y a pas de divisions par zéro, de racines carrés de nombres négatifs, ...). En particulier, il est possible (sous certaines conditions) de composer les fonctions de plusieurs variables qui sont continues pour produire des fonctions continues.

Théorème 12.2.16

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles ouverts. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions continues. Si $f(V) \subset W$, alors $g \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction continue.

Exemple 12.2.17

La fonction $f(x, y) = e^{\sqrt{x+2y}}$ est continue sur l'ensemble $D = \{(x, y) : x + 2y \geq 0\}$. En fait, D est le domaine de f . Ainsi, puisque $(1, 4) \in D$, on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} f(x, y) = f(1, 4) = e^3.$$

**Exemple 12.2.18**

Soit

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Cette fonction est définie et continue à tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

Montrons que si on définit f au point $(0, 0)$ par $f(0, 0) = 0$, alors f est une fonction continue pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque

$$\left| \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 y^2}{y^2} \right| = |x^3| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, on a que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Ainsi,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . ♣

Exemple 12.2.19

Est-ce que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue en tout point (x, y) ? ♣

La définition de limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est associée à la limite de chacune des composantes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ de la fonction f . Il en est de même pour la continuité.

Proposition 12.2.20

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = w_i$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Il découle de cette proposition que si $\mathbf{c} \in D$, alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c})$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{c})$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$. On a donc la proposition suivante.

Proposition 12.2.21

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est continue au point \mathbf{c} si et seulement si les fonctions f_i pour $i = 1, 2, \dots, m$ sont continues au point \mathbf{c} .

Exemple 12.2.22

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie par les deux fonctions à valeurs réelles suivantes

$$f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

et

$$f_2(x, y) = 4 + e^{-(x^4+y^4)}.$$

Alors,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \begin{pmatrix} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 4 + e^{-(x^4+y^4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

car $4 + e^{-(x^4+y^4)}$ est continue à l'origine. La limite de la première composante est donnée à l'exemple 12.2.11. 

12.3 Propriétés des fonctions continues

Les fonctions continues de plusieurs variables possèdent plusieurs des propriétés que nous avons énoncées pour les fonctions continue d'une variable.

Certaines des propriétés, comme le Théorème des valeurs intermédiaires (3.3.5) peut être généralisé aux fonctions de plusieurs variables. Pour ce faire, il faudrait introduire la notion d'ensembles séparables. Pour ne pas trop s'éloigner du but de ces notes, nous n'aborderons pas ce sujet.

Il y a un résultat qui nous sera très utile par la suite et qui ne demande pas d'introduire de nouveaux concepts.

Théorème 12.3.1 (Théorème des valeurs extrêmes)

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et fermé, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors, il existe **a** et **b** dans D tels que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ pour tout \mathbf{x} dans D .

Le résultat précédent est une conséquence du fameux **Théorème de Bolzano-Weierstrass** qui est un des piliers de l'analyse réel.

Ce théorème sera d'une très grande utilité quand nous chercherons les valeurs extrêmes d'une fonction à l'aide de la dérivée au prochain chapitre.

Nous verrons au prochain chapitre la généralisation du Théorème de la moyenne aux fonctions de plusieurs variables.

12.4 Exercices

Question 12.1

Quelle est l'équation de la fonction $f(x, y) = mx + ny + c$ dont l'intersection du graphe avec le plan x, z est la droite $z = 3x + 4$ et l'intersection du graphe avec le plan y, z est la droite $z = y + 4$?

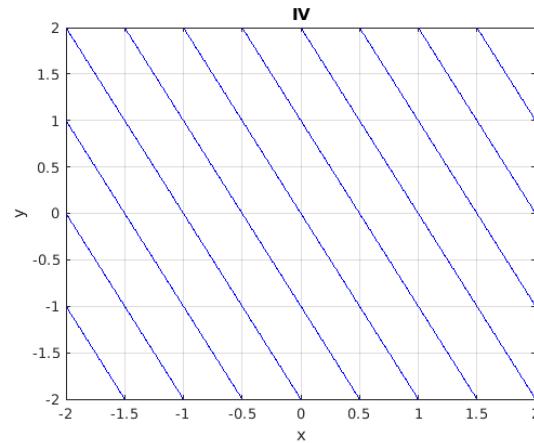
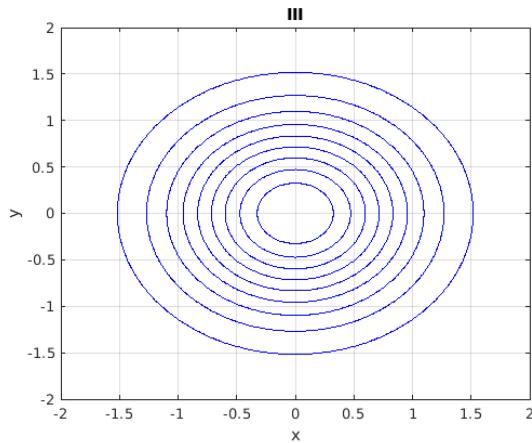
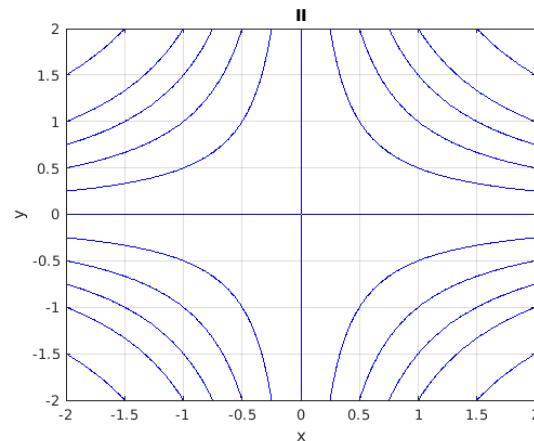
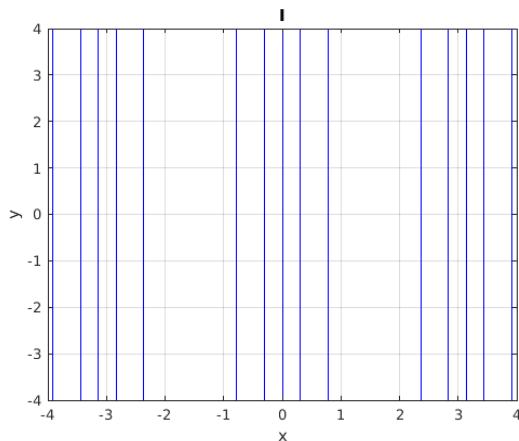
Question 12.2

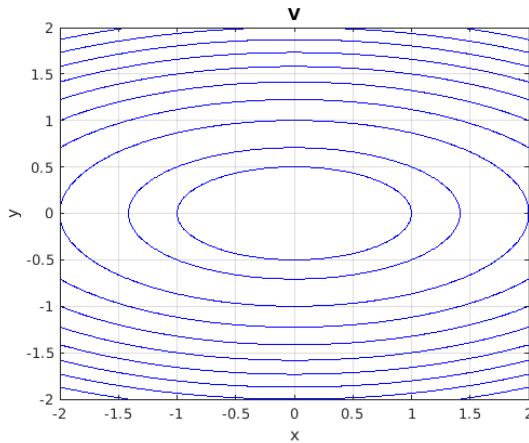
Les courbes de niveau de $f(x, y) = y - x^2$ représentent quel type de courbe ?

Question 12.3

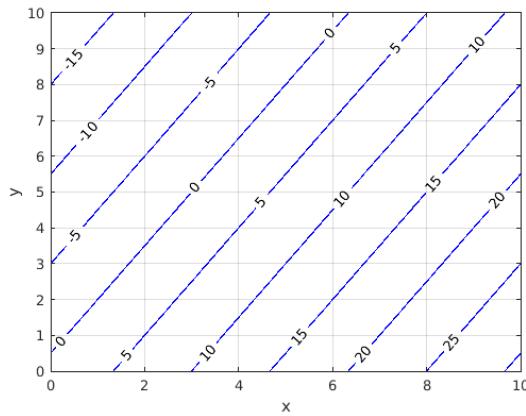
Associez à chacune des fonctions suivantes un des diagrammes de courbes de niveau donnés ci-dessous. Expliquez votre choix.

- a) $z = x^2 + 4y^2$
- b) $z = 1 - 2x - y$
- c) $z = \sin(x)$
- d) $z = xy$
- e) $z = e^{-(x^2+y^2)}$



**Question 12.4**

Trouvez l'équation de plan qui a le diagramme de courbes de niveau donné dans la figure suivante

**Question 12.5**

Trouvez l'équation de plan qui produit les données du tableau suivant.

$\downarrow x \setminus y \rightarrow$	10	20	30
5	-22	-62	-102
10	-7	-47	-87
15	8	-32	-72

Question 12.6

Trouvez le domaine et l'image, et tracez quelques courbes de niveau pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

Question 12.7

Dessinez quelques courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

et utilisez ces courbes pour tracer le graphe de la fonction.

Question 12.8

Est-ce que la fonction suivante est continue au point $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Justifiez votre réponse.



Dérivée de fonctions de plusieurs variables



13

On commence par prolonger aux fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles la notion de dérivée que l'on a vue pour les fonctions d'une variable. La seconde étape consiste à étudier la dérivée d'une fonction de plusieurs variables selon une direction donnée. Comme on a fait pour les fonctions d'une variable, nous étudierons l'approximation locale des fonctions de plusieurs variables et les points critiques des fonctions de plusieurs variables dans le but de pouvoir déterminer les valeurs extrêmes de ces fonctions avec ou sans contraintes. On termine le chapitre avec la dérivée d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où m et n sont plus grands que 1.

13.1 Dérivées partielles

Pour les prochaines sections, nous allons seulement considérer les fonctions à valeurs réelles. De plus, sans perte de généralité, on assume que les fonctions sont des fonctions de deux variables seulement. Sauf pour une légère modification des énoncés (e.g. remplacer (x_1, x_2) par (x_1, x_2, \dots, x_n)), les définitions et résultats sur les fonctions de deux variables que nous présentons demeurent valides pour les fonctions de plus de deux variables.

Définition 13.1.1

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

La dérivée partielle de f au point \mathbf{c} par rapport à la variable x_1 est définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{c}) = f_{x_1}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

La dérivée partielle de f au point \mathbf{c} par rapport à la variable x_2 est définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{c}) = f_{x_2}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1, c_2 + h) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans les limites précédentes, on assume que h est assez petit pour que $(c_1 + h, c_2)$ et $(c_1, c_2 + h)$ soient dans V et donc que f soit définie à ces points.

Comme pour les fonctions d'une variable, si on considère tous les points où la dérivée partielle d'une fonction f existe, on peut définir une fonction que l'on appelle la dérivée partielle de la fonction f .

Définition 13.1.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si la dérivée partielle de f par rapport à x_1 existe en tout point de V , la **dérivée partielle de f par rapport à x_1 sur V** est la fonction définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V .

De même, si la dérivée partielle de f par rapport à x_2 existe en tout point de V , la **dérivée partielle de f par rapport à x_2 sur V** est la fonction définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = f_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V .

Puisque x_2 est fixe dans la définition de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, cette dérivée partielle est la dérivée d'une fonction d'une seule variable (i.e. x_1) qui dépend d'un paramètre (i.e. x_2). De même, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ est la dérivée d'une fonction d'une seule variable (i.e. x_2)

qui dépend d'un paramètre (i.e. x_1). Donc, toutes les règles de dérivation pour les fonctions d'une variable sont valides si on traite comme une constante la variable qui n'est pas la variable de dérivation.

Exemple 13.1.3

Si $f(x, y) = \sin(y - x)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(y - x) \frac{\partial}{\partial x}(y - x) = -\cos(y - x)$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(y - x) \frac{\partial}{\partial y}(y - x) = \cos(y - x).$$

En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 4) = -\cos(4 - 2) = -\cos(2).$$



Exemple 13.1.4

Si $f(x, y) = (3xy^2 - x^4 + 1)^4$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - x^4 + 1) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (3y^2 - 4x^3)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - x^4 + 1) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (6xy).$$



Par induction, on peut définir des dérivées partielles d'ordre deux.

Définition 13.1.5

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles d'ordre un sur V . Les **dérivées partielles d'ordre deux de f sur V** sont définies par

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(x_1, x_2), \\ f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2), \\ f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et

$$f_{x_2 x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(x_1, x_2)$$

si toutes ces dérivées partielles (d'ordre un) existent sur V .

On pourrait aussi définir des dérivées partielles d'ordre supérieure à deux. Par exemple, si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$f_{x_2 x_2 x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right)(x_1, x_2).$$

si les dérivées d'ordre un et deux existent pour tout $(x_1, x_2) \in V$.

Définition 13.1.6

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k si les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont continues. On écrit $f \in C^k(E)$

Si $f \in C^k(E)$, puisque les dérivées partielles d'ordre k de f existent, il s'en suit que toutes les dérivées partielles de f d'ordre inférieure à k existent et sont continues.

Exemple 13.1.7

Soit $f(x, y) = \cos(5x + 3y)$. On a

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -5 \sin(5x + 3y), \\ f_y(x, y) &= -3 \sin(5x + 3y), \\ f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-5 \sin(5x + 3y)) = -25 \cos(5x + 3y), \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (-3 \sin(5x + 3y)) = -9 \cos(5x + 3y), \end{aligned}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (-3 \sin(5x + 3y)) = -15 \cos(5x + 3y)$$

et

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (-5 \sin(5x + 3y)) = -15 \cos(5x + 3y) .$$



À l'exemple précédent, on a montré que $f_{xy} = f_{yx}$. Ce n'est pas toujours le cas mais il y a une très grande classe de fonctions f pour lesquelles $f_{xy} = f_{yx}$,

Proposition 13.1.8

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possède des dérivées partielles d'ordre deux qui sont continues, alors $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$.

Exemple 13.1.9

Montrer que les fonctions suivantes satisfont l'équation des ondes $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ où a et k sont des constantes.

a)

$$u(x, t) = \sin(k x) \sin(ak t) = \frac{1}{2} (\cos(k x - ak t) - \cos(k x + ak t))$$

b)

$$u(x, t) = \sin(x - a t) + \ln(x + a t)$$

c)

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

où f et g sont deux fonctions qui possèdent des dérivées d'ordre deux.

a) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} (ak \sin(k x) \cos(ak t)) = -a^2 k^2 \sin(k x) \sin(ak t)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} (k \cos(k x) \sin(ak t)) = -k^2 \sin(k x) \sin(ak t) ,$$

on obtient

$$u_{tt} = -a^2 k^2 \sin(k x) \sin(ak t) = a^2 u_{xx} .$$

b) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \cos(x - a t) + \frac{a}{x + a t} \right) = -a^2 \sin(x - a t) - \frac{a^2}{(x + a t)^2}$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(x - at) + \frac{1}{x + at} \right) = -\sin(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2},$$

on obtient

$$u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2} = a^2 u_{xx}.$$

c) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} (a f'(x + at) - a g'(x - at)) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} (f'(x + at) + g'(x - at)) = f''(x + at) + g''(x - at),$$

on obtient

$$u_{tt} = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at) = a^2 u_{xx}.$$



La règle pour dériver la composition de fonctions d'une variable peut être utilisée pour dériver la composition de fonctions de plusieurs variables.

Proposition 13.1.10

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f et $g_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ possèdent des dérivées partielles, alors la fonction $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h = f \circ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ possède aussi des dérivées partielles. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t_i}(\mathbf{t}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_k}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_n}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

pour $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ et $1 \leq i \leq m$.

Remarque 13.1.11

1. On a déjà utilisé cette proposition pour $n = 1$ et $m = 2$ dans plusieurs exemples précédents.
2. Un cas important de la proposition précédente est lorsque $m = 1$. On a alors la formule

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \frac{dg_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)) \frac{dg_2}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \frac{dg_n}{dt}(t) \quad (13.1.1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

**Exemple 13.1.12**

Soit $z = e^x \cos(y)$, $x = t^2$ et $y = \sin(t)$, évaluez $\frac{dz}{dt}$.

La notation $\frac{dz}{dt}$ peut porter à confusion car z n'est pas explicitement une fonction de t . Soit $\rho_1(t) = t^2$, $\rho_2(t) = \sin(t)$, $f(x, y) = e^x \cos(y)$ et $h(t) = f(\rho_1(t), \rho_2(t))$. Il faut interpréter $\frac{dz}{dt}$ comme étant $\frac{dh}{dt}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_2}{dt}(t) \\ &= (e^x \cos(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (2t) + (-e^x \sin(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (\cos(t)) \\ &= 2t e^{t^2} \cos(\sin(t)) - e^{t^2} \sin(\sin(t)) \cos(t). \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

Si on pose

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dh}{dt}(t) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) , \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d\rho_1}{dt}(t) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\rho_2}{dt}(t) , \end{aligned}$$

alors (13.1.2) peut s'écrire

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Cette notation est souvent utilisé en mathématiques appliquées (physique, génie, etc).

**Exemple 13.1.13**

Soit $z = \sin(x) \cos(y^2)$, $x = t^2 + s^2$ et $y = e^{st}$, évaluez $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Comme à l'exemple précédent, la notation $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ peut porter à confusion. Soit $\rho_1(t, s) = t^2 + s^2$, $\rho_2(t, s) = e^{st}$, $f(x, y) = \sin(x) \cos(y^2)$ et $h(t, s) = f(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s))$. Les expressions $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ représentent respectivement $\frac{\partial h}{\partial t}$ et $\frac{\partial h}{\partial s}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t, s) \\ &= (\cos(x) \cos(y^2)) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} (2t) + (-2y \sin(x) \sin(y^2)) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} (se^{st}) \\ &= 2t \cos(t^2 + s^2) \cos(e^{2st}) - 2se^{2st} \sin(t^2 + s^2) \sin(e^{2st}) \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial s}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t, s) \quad (13.1.4) \\ &= (\cos(x) \cos(y^2)) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{ts}} (2s) + (-2y \sin(x) \sin(y^2)) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} (te^{st}) \\ &= 2s \cos(t^2 + s^2) \cos(e^{2st}) - 2te^{2st} \sin(t^2 + s^2) \sin(e^{2st}).\end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{dh}{dt}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) , \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t, s) ,\end{aligned}$$

alors (13.1.3) et (13.1.4) s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$



13.2 Plan tangent à une surface (forme explicite)

13.2.1 Surface donnée par une fonction de x et y

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une région du plan. L'ensemble

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

définit une surface dans \mathbb{R}^3 comme celle que l'on retrouve à la figure 12.2.

Les dérivées partielles de f au point $(a, b) \in D$ vont nous permettre de trouver l'équation du plan tangent à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$.

La courbe produite par l'intersection du plan $y = b$ avec la surface S est donnée par $z = f(x, b)$ et $y = b$ (voir la figure 13.1). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x, y, z) = (\alpha, b, f(\alpha, b))$$

pour tout α tel que $(\alpha, b) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point $(a, b, f(a, b))$ (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{d}{d\alpha} \alpha \Big|_{\alpha=a}, \frac{d}{d\alpha} b \Big|_{\alpha=a}, \frac{d}{d\alpha} f(\alpha, b) \Big|_{\alpha=a} \right) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right).$$

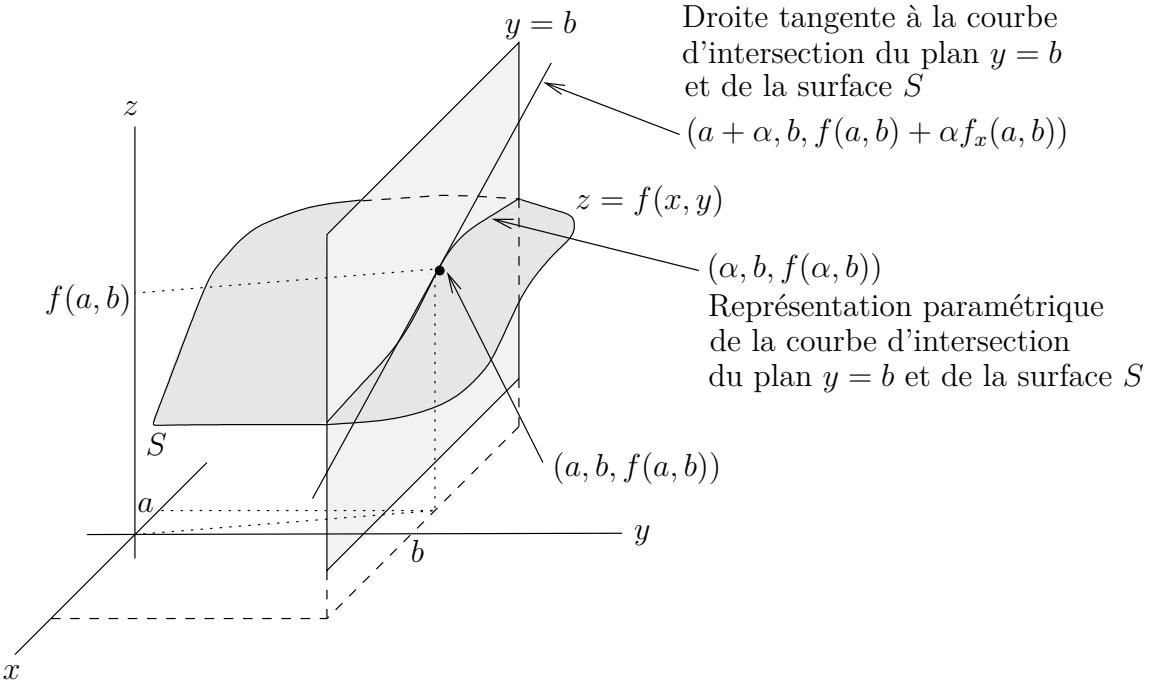


FIGURE 13.1 – Courbe produite par l’intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $y = b$.

La courbe produite par l’intersection du plan $x = a$ avec la surface S est donnée par $z = f(a, y)$ et $x = a$ (voir la figure 13.2). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x, y, z) = (a, \beta, f(a, \beta))$$

pour tout β tel que $(a, \beta) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point $(a, b, f(a, b))$ (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{d}{d\beta} a \Big|_{\beta=b}, \frac{d}{d\beta} \beta \Big|_{\beta=a}, \frac{d}{d\beta} f(a, \beta) \Big|_{\beta=a} \right) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent Π à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$ (voir figure 13.3) est donné par le produit vectoriel de deux vecteurs non-colinéaires et parallèles à ce plan. C’est le cas des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 que l’on vient de définir. Donc, le vecteur

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{df}{dx}(a, b), -\frac{df}{dy}(a, b), 1 \right)$$

est perpendiculaire au plan Π .

L’équation du plan Π tangent à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$ est

$$\langle \mathbf{n}, ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) \rangle = -\frac{\partial f}{\partial x} f(a, b) (x - a) - \frac{\partial f}{\partial y} f(a, b) (y - b) + (z - f(a, b)) = 0.$$

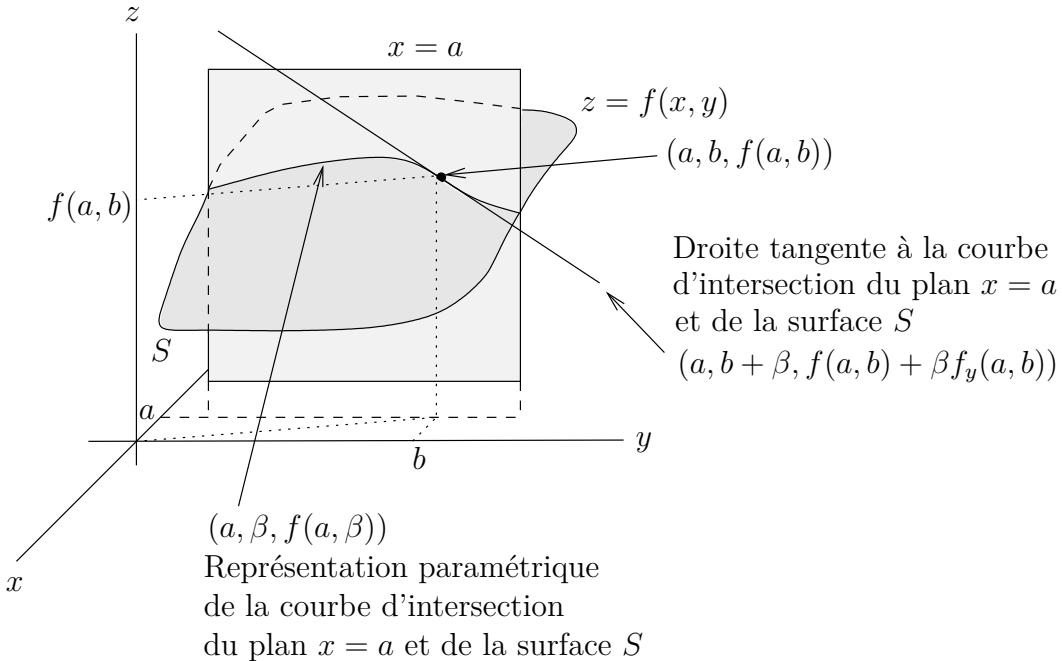


FIGURE 13.2 – Courbe produite par l’intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $x = a$

L’équation du plan tangent à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$ est souvent présentée sous la forme

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, f(a, b)) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, f(a, b)) (y - b) . \quad (13.2.1)$$

Exemple 13.2.1

Trouver l’équation du plan tangent à la surface décrise par $z = x \sin(x^2 y)$ au point $(1, \pi/2, 1)$.

L’équation du plan tangent est donnée par (13.2.1) où $f(x, y) = x \sin(x^2 y)$, $a = 1$, $b = \pi/2$ and $f(a, b) = \sin(\pi/2) = 1$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2 y) + 2x^2 y \cos(x^2 y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos(x^2 y) ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi/2) &= \sin(\pi/2) + \pi \cos(\pi/2) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi/2) &= \cos(\pi/2) = 0 , \end{aligned}$$

Ainsi, l’équation du plan tangent est $z = 1 + (x - 1) = x$.

Exemple 13.2.2

Trouver l’équation du plan tangent au point $P = (1, 2, \sqrt{2})$ de l’ellipsoïde $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

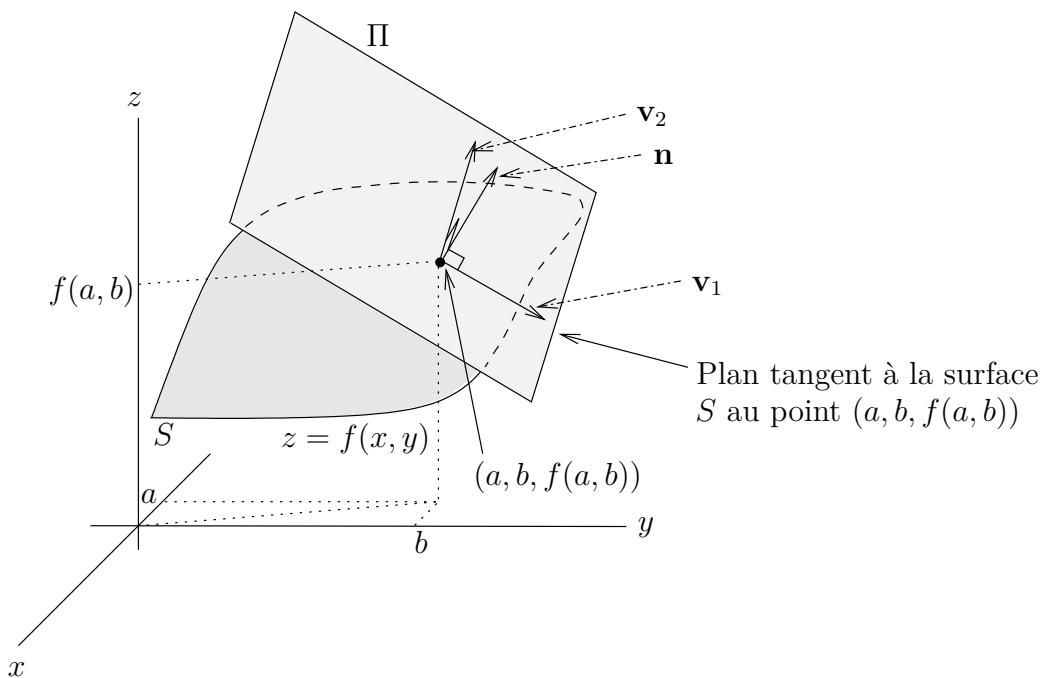


FIGURE 13.3 – Plan tangent à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$. Les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont parallèles au plan Π et \mathbf{n} est perpendiculaire au plan Π . Pour illustrer la relation entre les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{n} et le plan Π , nous avons tracé les vecteurs à partir du point $(a, b, f(a, b))$. Normalement, on devrait tracer ces vecteurs à partir de l'origine.

Si, dans l'équation de l'ellipsoïde, on assume que z est une fonction de x et y , et on dérive implicitement cette équation par rapport à x et par rapport à y , on trouve

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x}{z}$$

et

$$\frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

L'équation du plan tangent est

$$z = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y - 2).$$



13.2.2 Surface donnée par une représentation paramétrique

Ce ne sont pas toutes les surfaces qui sont décrite par l'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Il suffit de penser à la sphère ou au taure. Ce genre de surface possède une représentation paramétrique.

Définition 13.2.3

Une fonction $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la représentation paramétrique d'une surface S dans \mathbb{R}^3 si :

1. r_i est de classe C^1 pour $i = 1, 2$ et 3 .
2. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ sont deux vecteurs linéairement indépendant dans \mathbb{R}^3 pour tout (u, v) .

La deuxième condition est requise pour assurer qu'il y a un vecteur normal (perpendiculaire) à la surface S en tout point $\mathbf{r}(u, v)$ de la surface. On peut vérifier, comme on le fait à la section 11.2 pour la représentation paramétrique des courbes, que les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v) \right)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

sont tangent à la surface S au point $\mathbf{r}(u, v)$. Ainsi, $\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ est un vecteur normal à la surface S au point $\mathbf{r}(u, v)$ de la surface. On a que $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ car \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sont linéairement indépendants.

Exemple 13.2.4

On cherche le plan tangent à la surface S donnée par la représentation paramétrique $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u \sin(v), v \cos(u))$ au point $(2\pi, 0, -\pi)$.

Notons premièrement que $\mathbf{r}(u, v) = (2\pi, 0, -\pi)$ si et seulement si $u = \pi$ et $v = \pi$. En effet, $u \sin(v) = 0$ est vrai si $u = 0$ ou si $v = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

$u + v = 2\pi$ donne $v = 2\pi$ pour $u = 0$. Mais alors, $v \cos(u) = 2\pi \neq -\pi$.

$u + v = 2\pi$ donne $u = 2\pi - n\pi$ pour $v = n\pi$. On a donc

$$v \cos(u) = n\pi \cos(2\pi - n\pi) = n\pi \cos(n\pi) = (-1)^n n\pi$$

et $v \cos(u) = -\pi$ si et seulement si $n = 1$; c'est-à-dire, $v = \pi$.

Pour trouver un vecteur normal \mathbf{m} à la surface S au point $(2\pi, 0, \pi)$, on utilise les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(\pi, \pi) = (1, \sin(v), -v \sin(u)) \Big|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (1, 0, \pi)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(\pi, \pi) = (1, u \cos(v), \cos(u)) \Big|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (1, -\pi, -1) .$$

On trouve

$$\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \pi \\ 1 & -\pi & 1 \end{pmatrix} = \pi^2 \mathbf{i} - \mathbf{j} - \pi \mathbf{k} = (\pi^2, -1, -\pi) .$$

Ainsi, l'équation du plan tangent à la surface S au point $(2\pi, 0, \pi)$ est donnée par

$$\langle \mathbf{m}, (x - 2\pi, y, z - \pi) \rangle = \pi^2(x - 2\pi) - y - \pi(z + \pi) = 0 .$$



13.3 Dérivées selon une direction donnée

Si on regarde les figures 13.1 et 13.2, on remarque que le calcul des dérivées partielles assume que le déplacement ce fait seulement selon une direction parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y . Il n'y a aucune raison de se limiter à ces deux seules directions.

En fait, il est très utile de définir des dérivées selon d'autres directions.

Définition 13.3.1

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de longueur 1. La **dérivée de f selon la direction \mathbf{u} au point \mathbf{a}** , que l'on dénote $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$, est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}))$$

si cette limite existe. Dans la limite précédente, on assume que h est assez petit pour que $\mathbf{a} + h\mathbf{u} \in V$ et ainsi que f est définie à $\mathbf{a} + h\mathbf{u}$.

On peut donner une interprétation graphique de la dérivée selon une direction semblable à celle que l'on connaît pour la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Les figures 13.4 et 13.5 fournissent cette interprétation pour les fonctions de deux variables. Si $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{a} = (a, b)$, alors $\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (a + hu, b + hv)$. On retrouve à la figure 13.4 la sécante qui passe par les points $(a, b, f(a, b))$ et $(a + hu, b + hv, f(a + hu, b + hv))$.

Soit Π le plan qui est parallèle au vecteur (u, v) et à l'axe des z , et qui contient le point (a, b) . La pente de cette sécante dans le plan Π est

$$\frac{1}{h} (f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})) .$$

À la limite, lorsque h tend vers 0, on obtient la pente dans le plan Π de la droite tangente à la courbe d'intersection du plan Π et de la surface $z = f(x, y)$ (voir figure 13.5).

Exemple 13.3.2

Calculer la dérivée de la fonction $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ selon la direction $(1, 1)$ au point $(1, 0)$.

On remarque que le vecteur $(1, 1)$ n'est pas de longueur 1. C'est un abus de langage qui est très commun dans la littérature scientifique. Il faut alors comprendre que l'on demande de calculer la dérivée selon la direction d'un vecteur \mathbf{u} de longueur 1 qui pointe dans la même direction que le vecteur donné.

Le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pointe dans la même direction que le vecteur $(1, 1)$ et ait de longueur 1. On calcul la dérivée de f au point $(1, 0)$ selon la direction \mathbf{u} .

Si on pose $\mathbf{a} = (1, 0)$, alors

$$\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (1, 0) + h(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1 + h/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) - f(1, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(1 + h/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})}{(1 + h/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{2} + h/2}{h^2 + h\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

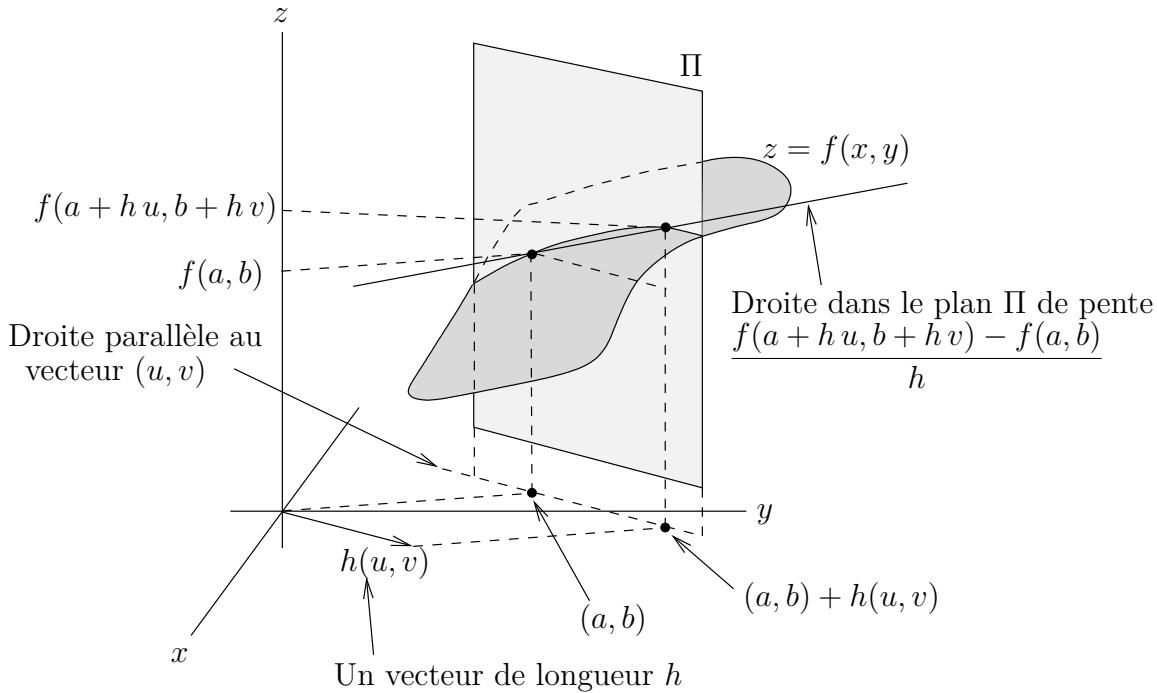


FIGURE 13.4 – La sécante qui passe par les points $(a, b, f(a, b))$ et $(a + h u, b + h v, f(a + h u, b + h v))$ qui font parties du plan Π . Ce plan est parallèle au vecteur $\mathbf{u} = (u, v)$ et à l'axe des z , et contient le point $\mathbf{a} = (a, b)$.

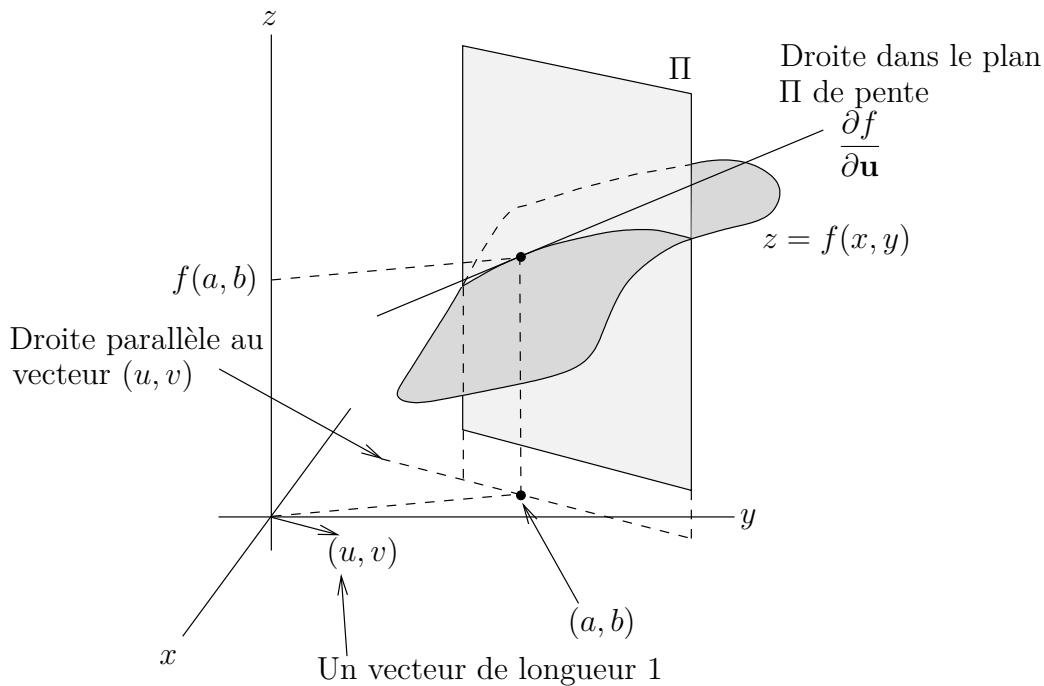


FIGURE 13.5 – La tangente à la courbe d'intersection du plan Π et de la surface $z = f(x, y)$ au point $(a, b, f(a, b))$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} .$$



Calculer la dérivée selon une direction donnée à partir de la définition n'est généralement pas simple. On peut utiliser notre connaissance des dérivées partielles pour calculer la dérivée selon une direction donnée.

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur de longueur 1 dans \mathbb{R}^n et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . De plus, soit $\mathbb{R}^n : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles.

Posons $g(t) = f(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n)$ on peut utiliser nos règles de dérivation de fonctions composée, en particulier (13.1.1), pour obtenir

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_2 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_n . \end{aligned}$$

Mais, par définition

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2, \dots, a_n + h u_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) . \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) u_n .$$

On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 13.3.3

Posons

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) . \quad (13.3.1)$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle . \quad (13.3.2)$$

$\nabla f(\mathbf{a})$ est appelé le **gradient** de f au point \mathbf{a} .

Remarque 13.3.4

Pour être consistant avec la représentation algébrique des vecteurs (i.e. un vecteur est une

matrice de dimension $n \times 1$), on devrait définir le gradient de f à $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^\top$ comme la matrice de dimension $1 \times n$

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} .$$

Puisque $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^\top$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \ \mathbf{u}$$

qui est le produit d'une matrice de dimension $1 \times n$ par une matrice de dimension $n \times 1$.



Exemple 13.3.5

Calculer la dérivée selon la direction $(1, \sqrt{3})$ de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ au point $(2, 1)$.

Puisque $(1, \sqrt{3})$ n'est pas de longueur 1 mais de longueur 2, on utilise le vecteur $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et on calcule la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (2, 1)$ est

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(2,1)}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(2,1)} \right) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}} (2 + \sqrt{3}) .$$



Exemple 13.3.6

Calculer la dérivée selon la direction $(1, -1, -1)$ de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ au point $(1, 1, 1)$.

Puisque $(1, -1, -1)$ n'est pas de longueur 1 mais de longueur $\sqrt{3}$, on utilise le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ et on calcule la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

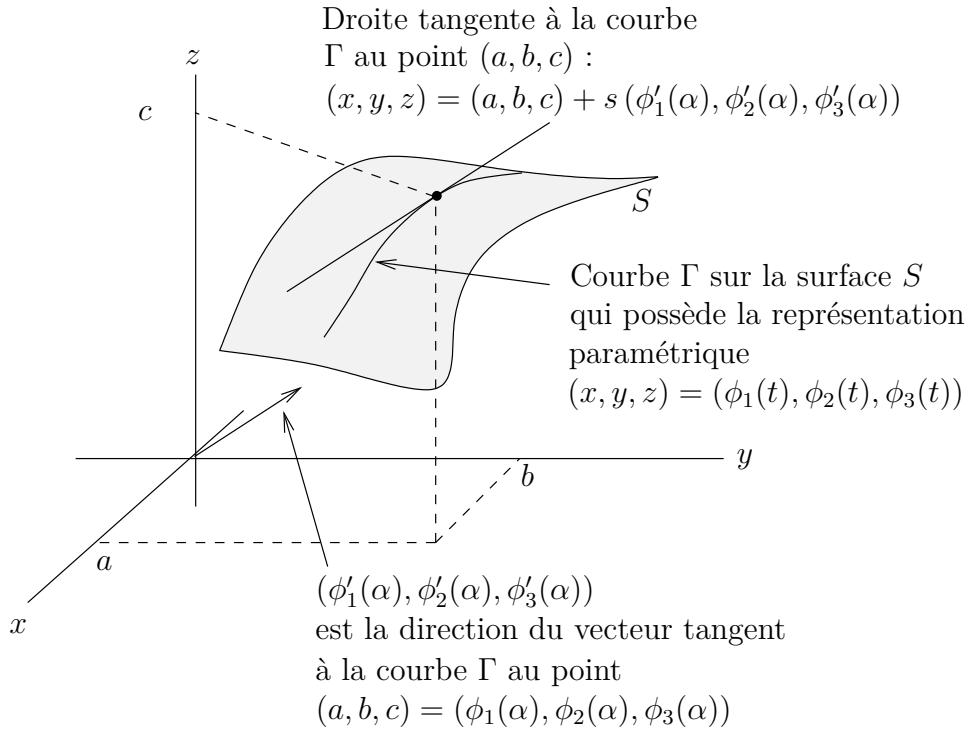
Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ est

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \left(2x \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2y \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2z \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \right) = (2, 2, 2) . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \left\langle (2, 2, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}} .$$



FIGURE 13.6 – La courbe Γ appartient à la surface S .

13.4 Propriétés du gradient

13.4.1 Plan tangent à une surface (forme implicite)

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Une équation de la forme $F(x, y, z) = C$ définit une surface S dans l'espace.

Exemple 13.4.1

Si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $C = 4$, alors $F(x, y, z) = 4$ est l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui représente une sphère de rayon 2 centrée à l'origine. ♣

Soit (a, b, c) un point de la surface S et Γ une courbe sur la surface S qui passe par (a, b, c) . Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de Γ . Supposons que $(a, b, c) = \phi(t)$ pour $t = \alpha$. On retrouve une représentation de S et Γ à la figure 13.6.

Puisque ϕ définit une courbe sur S , on a que

$$F(\phi(t)) = F(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = C$$

pour tout t . Si on dérive cette équation par rapport à t , on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t)) \phi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\phi(t)) \phi'_2(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\phi(t)) \phi'_3(t) = 0 .$$

Cette expression n'est nulle autre que

$$\langle \nabla F(\phi(t)), \phi'(t) \rangle = 0 .$$

À $t = \alpha$, on obtient

$$\langle \nabla F(a, b, c), \phi'(\alpha) \rangle = 0 .$$

Le vecteur $\nabla F(a, b, c)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha) = (a, b, c)$.

Puisque $\phi'(\alpha)$ est une vecteur parallèle au plan tangent à la surface S au point $\phi(\alpha) = (a, b, c)$ et que le raisonnement précédent est vrai quelle que soit la courbe Γ sur la surface S qui passe par (a, b, c) , on conclut que $\nabla F(a, b, c)$ est une vecteur perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point (a, b, c) (Voir la figure 13.7). On a donc le résultat suivant.

Proposition 13.4.2

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = C$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est une point de S , alors $\nabla F(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point \mathbf{a} . C'est-à-dire,

$$\langle \nabla F(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle = 0$$

pour tous les vecteurs \mathbf{v} qui sont parallèles au plan tangent.

Remarque 13.4.3

Le résultat précédent est aussi vrai dans \mathbb{R}^n où n est différent de 3. La démonstration ne change pas. Si $n \neq 3$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors $S = \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = 0\}$ définit une «surface» dans \mathbb{R}^n . Le cas $n = 2$ nous donne une courbe dans le plan. Nous reverrons le cas $n = 2$ à la prochaine section. ♠

Ayant un vecteur perpendiculaire à un plan, il est maintenant facile de donner une équation représentant ce plan.

Proposition 13.4.4

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation $F(x, y, z) = C$ et (a, b, c) est une point de S , alors l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c) est donnée par

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \rangle &= \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b)(z - c) &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 13.4.5

Soit S une surface donnée par $z = f(x, y)$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si on définit la fonction $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, alors la surface S est donnée par $F(x, y, z) = 0$.

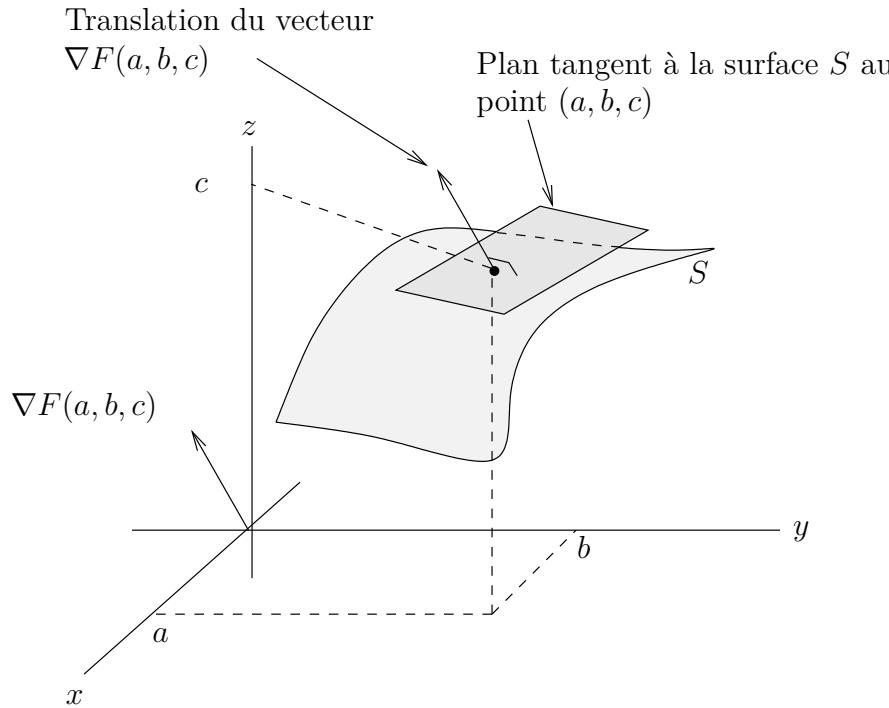


FIGURE 13.7 – Le vecteur $\nabla F(a, b, c)$ est perpendiculaire au plan S , le plan tangent à la surface S au point (a, b, c) .

Si $c = f(a, b)$, alors (a, b, c) est un point de S et l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c) est

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right), (x - a, y - b, z - c) \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - (z - c) \end{aligned}$$

que l'on peut récrire

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

C'est la formule (13.2.1) car $c = f(a, b)$. ♠

Exemple 13.4.6

Reprendons l'exemple 13.2.2. Trouver l'équation du plan tangent au point $P = (1, 2, \sqrt{2})$ de l'ellipsoïde $F(x, y, z) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point P est donnée par le gradient de F au point P . C'est-à-dire par

$$\mathbf{n} = \nabla F(1, 2, \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})} \right) \\
&= \left(\left(\frac{2x}{3} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2y}{9} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2z}{9} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})} \right) \\
&= \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9} \right).
\end{aligned}$$

L'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla F(1, 2, \sqrt{2}), (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9} \right), (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) \right\rangle \\
&= \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{4}{9}(y - 2) + \frac{2\sqrt{2}}{9}(z - \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$z = \sqrt{2} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}(x - 1) - \frac{4}{9}(y - 2) \right) = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y - 2).$$

C'est la réponse donnée à l'exemple 13.2.2.



13.4.2 Direction de croissance maximale

En plus d'être utile pour calculer des dérivées selon une direction donnée et pour trouver l'équation d'un plan tangent à une surface, le gradient d'une fonction a d'autres propriétés importantes que l'on ne peut pas ignorer.

Proposition 13.4.7

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un point quelconque. La valeur maximale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est $\nabla f(\mathbf{a})$ (le gradient de f à \mathbf{a}). La valeur maximale M est alors

$$M = \|\nabla f(\mathbf{a})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)^2}.$$

- De même, La valeur minimale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est donnée par $-\nabla f(\mathbf{a})$. La valeur minimale est $-M$.

Pour démontrer cette proposition (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), il faut utiliser un résultat que l'on a vu lors de l'étude des vecteurs. Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs et θ est le plus petit angle entre ces deux vecteurs, alors

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta).$$

Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{u} de longueur 1,

$$\frac{df}{du}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos(\theta) \quad (13.4.1)$$

où θ est le plus petit angle entre \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$. Il découle de (13.4.1) que la valeur maximale de $\frac{df}{du}(\mathbf{a})$ est lorsque $\theta = 0$. C'est-à-dire, lorsque \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$ pointent dans la même direction. Donc, puisque \mathbf{u} est de longueur 1, on doit avoir

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} \nabla f(\mathbf{a}).$$

De plus, il découle de (13.4.1) que la valeur maximale de la dérivée selon une direction donnée est $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ lorsque $\theta = 0$

La démonstration de la deuxième partie de la proposition précédente est très semblable à celle de la première partie et est laissée aux lecteurs.

On a montré à la section précédente que, pour toute surface S définie par $F(x, y, z) = C$ et tout point (a, b, c) sur cette surface, $\nabla F(a, b, c)$ est une vecteur perpendiculaire au plan tangent à S au point (a, b, c) . On a indiqué à la remarque 13.4.3 que ce résultat était aussi vrai pour \mathbb{R}^2 et que dans ce cas on doit remplacer les surfaces par des courbes. En d'autres mots :

Proposition 13.4.8

Soit Γ une courbe du plan définie par $f(x, y) = C$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et C est une constante. Si (a, b) est une point de cette courbe, alors $\nabla f(a, b)$ est perpendiculaire à la droite tangente à Γ au point (a, b) .

La démonstration de ce dernier résultat dans \mathbb{R}^2 est identique à la démonstration que nous avons donné dans \mathbb{R}^3 à la section précédente. Néanmoins, vu l'importance de ce résultat, nous répétons cette démonstration ci-dessous.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et

$$\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = C\}$$

une courbe dans l'espace (en fait une courbe de niveau de f). Supposons que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une représentation paramétrique de la courbe Γ . On a donc

$$f(\phi(t)) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) = C$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on dérivée cette expression par rapport à t , on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi'_2(t) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \right), (\phi'_1(t), \phi'_2(t)) \right\rangle \\ &= \langle \nabla f(\phi(t)), \phi'(t) \rangle . \end{aligned}$$

Si (a, b) est une point de la courbe Γ et $\phi(t) = (a, b)$ pour $t = \alpha$, alors

$$0 = \langle \nabla f(\phi(\alpha)), \phi'(\alpha) \rangle = \langle \nabla f(a, b), \phi'(\alpha) \rangle .$$

Or, $\phi'(\alpha)$ est une vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha) = (a, b)$. Donc, le gradient $\nabla f(a, b)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point (a, b) .

Si on combine le résultat énoncé ci-dessus et le résultat de la proposition 13.4.7 on obtient que :

Proposition 13.4.9

Soit Γ une courbe de niveau d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = C\}$$

où C est une constante. Soit (a, b) une point de Γ . À partir de (a, b) , la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement est perpendiculaire à la courbe de niveau Γ (voir figure 13.8.)

Exemple 13.4.10

Soit $f(x, y, z) = 5x^2z + 3x^2y + \sin(yz)$. Dans quelle direction la fonction f croît-elle le plus rapidement au point $(2, 1, 0)$ et quelle est ce taux de croissance maximal ?

La direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement est $\nabla f(2, 1, 0)$. Or

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= (10xz + 6xy, 3x^2 + z \cos(yz), 5x^2 + y \cos(yz)) \end{aligned}$$

Donc, $\nabla f(2, 1, 0) = (12, 12, 21)$ est la direction dans laquelle f croît le plus rapidement. Le taux de croissance maximal (i.e. le taux de croissance dans la direction $\nabla f(2, 1, 0)$) est

$$\|\nabla f(2, 1, 0)\| = \sqrt{12^2 + 12^2 + 21^2} = 27 .$$



Droite tangente à la trajectoire au point (a, b) le long de laquelle f croît le plus rapidement. Cette droite tangente est parallèle au vecteur $\nabla f(a, b)$

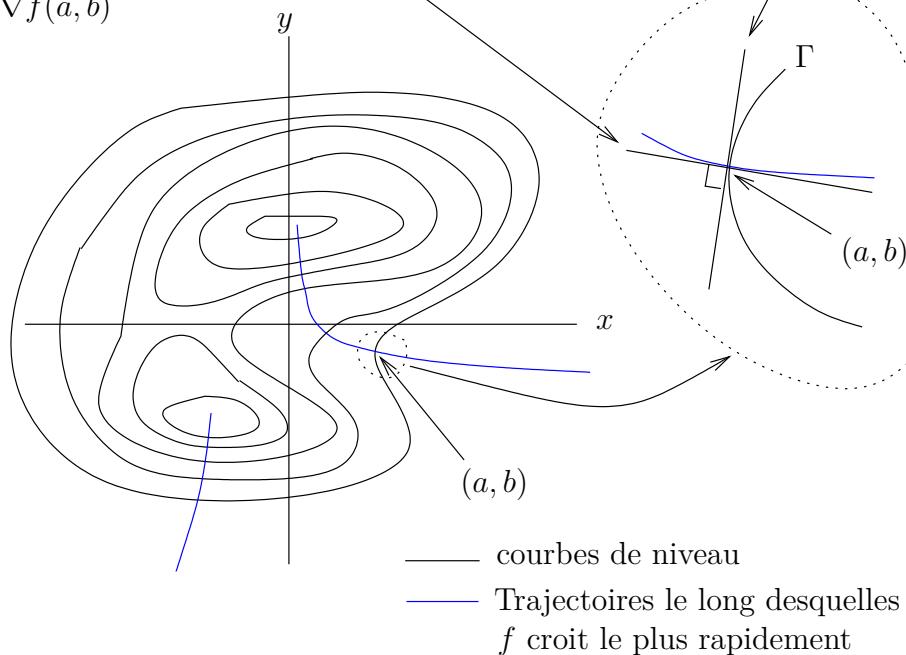


FIGURE 13.8 – Les trajectoires (i.e. courbes) le long desquelles f croît le plus rapidement coupent les courbes de niveau de f perpendiculairement.

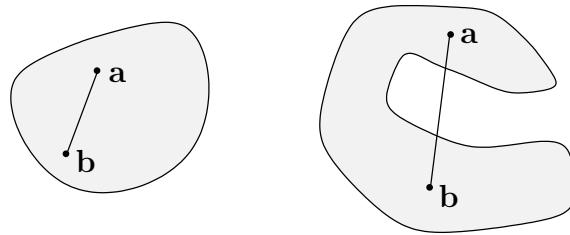


FIGURE 13.9 – L’ensemble à gauche est convexe alors que celui à droite ne l’est pas.

13.4.3 Théorème de la moyenne

le Théorème de la moyenne (4.4.6) pour les fonctions d’une variable à une généralisation aux fonctions de plusieurs variables.

Théorème 13.4.11 (Théorème de la moyenne)

Soit D , un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , qui contient les points \mathbf{a} et \mathbf{b} ainsi que le segment de droite L de \mathbf{a} à \mathbf{b} . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de L . Alors, il existe un point \mathbf{c} de L tel que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{c}), (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rangle$$

Pour énoncer le prochain résultat, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 13.4.12

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dira que D est un **ensemble convexe** si, quel que soit les points \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D , le segment de droite L de \mathbf{a} à \mathbf{b} est aussi inclus dans D .

Le concept d’ensembles convexes est illustré à la Figure 13.9.

Corollaire 13.4.13

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . S’il existe une constante M telle que $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq M$ pour tout $\mathbf{x} \in D$, alors $|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leq M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D .

On a vu que pour une fonction d’une variable f , si $f'(x) = 0$ pour tout x sur un intervalle, alors f est une fonction constante sur l’intervalle. Le corollaire précédent généralise ce concept aux fonctions de plusieurs variables.

Corollaire 13.4.14

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout \mathbf{x} dans D , alors f est constante sur D .

En effet, le Corrolaire 13.4.13o avec $M = 0$ donne $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D .

13.5 Approximation locale des fonctions de plusieurs variables

On a vue à la Section 5.6 que l'on pouvait estimer la valeur d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ à l'aide de l'approximation linéaire $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ pour x près de a . Cela correspondait à utiliser la droite tangente pour estimer les valeurs de $f(x)$ pour x près de a . De la même manière, on peut utiliser le plan tangent pour estimer la valeur d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \rangle \\ &= f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})(x_j - a_j) \end{aligned} \tag{13.5.1}$$

C'est un polynôme de degré un en x_1, x_2, \dots, x_n .

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut obtenir une meilleure approximation locale d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si on utilise un polynôme de degré plus grand que un. On a une version du Théorème de Taylor, Théorème 5.6.2, pour les fonctions de plusieurs variables. Avant d'énoncer cette version du théorème, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$; c'est-à-dire, α est un vecteur dont les composantes sont des nombres naturels. On pose

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \left(\cdots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right) \right) \right)$$

en respectant la convention que l'on ignore $\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ lorsque $\alpha_j = 0$.

De plus, on définit $\alpha!$, $|\alpha|$ et \mathbf{y}^α pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! , \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{y}^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} .$$

Exemple 13.5.1

Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha = (2, 0, 1, 3)$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_4^3} f \right) \right), \\ |\alpha| &= 2 + 0 + 1 + 3 = 6\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{y}^\alpha = y_1^2 y_2^0 y_3^1 y_4^3 = y_1^2 y_3 y_4^3.$$

**Théorème 13.5.2 (Théorème de Taylor)**

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+1} . Quel que soit \mathbf{x} et \mathbf{a} dans \mathbb{R}^n , il existe $\xi = \xi(k, \mathbf{a}, \mathbf{x})$ sur le segment de droite de \mathbf{x} à \mathbf{a} tel que

$$f(\mathbf{x}) = p_k(x) + r_k(x)$$

où

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha$$

et

$$r_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha} f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha.$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour x près de c** et r_k est l'**erreur de troncature**.

Par la suite, nous aurons besoin de seulement deux cas particuliers du Théorème de Taylor.

Pour $k = 1$, nous avons

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j).$$

C'est l'approximation linéaire que l'on a donné en (13.5.1).

Pour $k = 2$, nous avons

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Cette dernière expression possède une très jolie représentation algébrique qui nous sera très utile par la suite. Posons

$$D f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

et

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

La matrice $H(\mathbf{x})$ est appelée la **matrice Hessian** de f au point \mathbf{x} . Elle va jouer un rôle important quand nous ferons l'étude des valeurs extrêmes pour une fonction de plusieurs variables à la section suivante.

$D f(\mathbf{x})$ est seulement $\nabla f(\mathbf{x})$ dans le format utilisé en algèbre linéaire ; c'est-à-dire, une matrice de dimension $1 \times n$ (une ligne et n colonnes).

De même, si on représente le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sous la forme d'une matrice colonne utilisé en algèbre linéaire.

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix},$$

on peut alors écrire.

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + D f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

13.6 Points critiques et valeurs extrêmes

On a vu que pour trouver les minimums et maximums locaux d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il fallait trouver les points critiques de la fonction ; C'est-à-dire, les points p où soit que f n'est pas différentiable à p , ou soit que $f'(p) = 0$. Cette procédure est aussi valable pour les fonctions de plusieurs variables après avoir défini ce qu'est un point critique pour une fonction de plusieurs variables.

Définition 13.6.1

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possède un **point critique** $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si une des deux conditions suivantes est satisfaite.

1. Une des dérivées partielles de f n'existe pas à \mathbf{p} .
2. $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

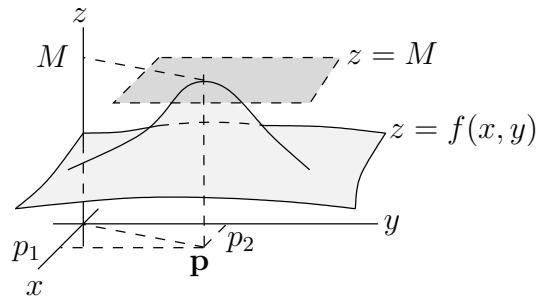


FIGURE 13.10 – La fonction f a un maximum local en \mathbf{p} . Le plan tangent à la courbe $y = f(\mathbf{x})$ au point $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est horizontal.

On a vu que si p est un maximum (ou minimum) local d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f'(0) = 0$. La droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(p, f(p))$ est horizontale donc sa pente est nulle. Le même raisonnement nous donne le résultat suivant.

Proposition 13.6.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si f a une maximum (ou minimum) local en un point \mathbf{p} , alors $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$; c'est-à-dire, \mathbf{p} est un point critique.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la Figure 13.10 qui possède un maximum local au point \mathbf{p} . On peut voir à la Figure 13.10 que le plan tangent à la courbe $y = f(x, y)$ au point $(x, y) = \mathbf{p}$ est donné par $z = M$ où $M = f(\mathbf{p})$ est la valeur maximale. On a donc que $\frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial y} f(\mathbf{p}) = 0$; c'est-à-dire, $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Pour compléter notre comparaison avec les fonctions d'une variable, on généraliser le test de la dérivée seconde, Proposition 5.2.11. Pour cela, on a besoin du développement de Taylor de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{a} de f . On suppose naturellement que la fonction est suffisamment différentiable au voisinage du point critique \mathbf{a} . On obtient du Théorème 13.5.2 que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= p_2(\mathbf{x}) + r_2(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r_2(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ au point critique \mathbf{a} .

Intuitivement, puisque $r_2(\mathbf{x})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha$ avec $|\alpha| = 3$ alors que $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha$

avec $|\alpha| = 2$, on peut supposer que cette dernière expression est dominante lorsque \mathbf{x} est prêt de \mathbf{a} . Ainsi, à toute fin pratique, on peut écrire

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

pour \mathbf{x} prêt de \mathbf{a} .

Donc, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, on aura que f possède le minimum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. De même, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, on aura que f possède le maximum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Mais comment peut-on savoir si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ est toujours négative ou positive pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Commençons par une définition.

Définition 13.6.3

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. On dit que A est **strictement définie positive** si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, et A est **strictement définie négative** si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

On peut résumer le contenu du paragraphe qui précédent cette définition en disant que f possède le minimum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ si $H(\mathbf{a})$ est strictement définie positive, et f possède le maximum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ si $H(\mathbf{a})$ est strictement définie négative.

Remarque 13.6.4

Vous noterez que l'on parle maintenant de $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et que l'on ne fait plus référence à \mathbf{x} prêt de $\mathbf{0}$. Cela est dû au fait que $q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 q(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, si \mathbf{x} est loin de $\mathbf{0}$, on peut choisir $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \mathbf{x}$ est suffisamment prêt de $\mathbf{0}$ pour avoir $q(\lambda \mathbf{x}) = 0$. Puisque $\lambda \neq 0$, il s'en suit que $q(\mathbf{x}) = 0$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si une matrice carré A est strictement définie positive ou négative.

Théorème 13.6.5

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est strictement définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives. La matrice A est strictement définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont négatives.

Il peut s'avérer difficile de trouver toutes les valeurs propres d'une matrice, en particulier si les dimensions de la matrice sont grandes. Le critère suivant donne une condition suffisante pour déterminer si une matrice est définie positive.

Proposition 13.6.6

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Soit A_k la matrice formée des k premières colonnes et rangés de A . La matrice A est strictement définie positive si $\det(A_k) > 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer une proposition semblable à la proposition précédente pour le cas d'une matrice strictement définie négative.

On conclut de la proposition précédente qu'un matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est définie positive si $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} > 0$. Dans le cas où la matrice A est la matrice Hessian

$$H(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment différentiable ayant un point critique en $(x, y) = \mathbf{a}$, on peut conclure que $H(\mathbf{a})$ est strictement définie positive si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) \right)^2 > 0 .$$

Dans ce cas, la fonction f possède un minimum local au point $(x, y) = \mathbf{a}$.

En raisonnant avec la matrice Hessian $H(\mathbf{a})$, on peut en fait obtenir plus d'information sur le comportement de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{a} de f .

Proposition 13.6.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^3 et \mathbf{a} un point critique de f .

1. Si $\det(H(\mathbf{a})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) \right)^2 < 0$, alors f à un col en $(x, y) = \mathbf{a}$ (voir Figure 13.11).
2. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0$ et $\det(H(\mathbf{a})) > 0$, alors f à un minimum local en $(x, y) = \mathbf{a}$.
3. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) < 0$ et $\det(H(\mathbf{a})) > 0$, alors f à un maximum local en $(x, y) = \mathbf{a}$.
4. Si $\det(H(\mathbf{a})) > 0$, alors on ne peut rien conclure (voir Figure 13.11).

Exemple 13.6.8

Soit $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$. On cherche les points critiques de cette fonction et, pour chacun d'eux, on détermine s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

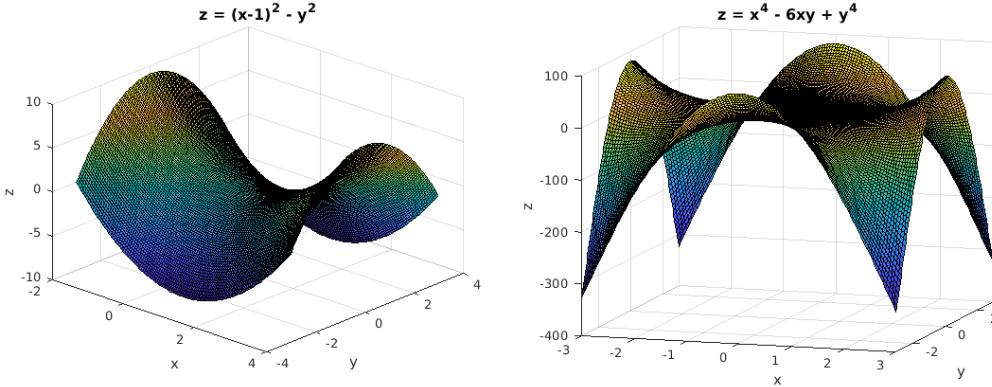


FIGURE 13.11 – À gauche : un col prédit par la première condition de la Proposition 13.6.7. À droite : un col que l'on ne peut pas prédire. C'est une situation possible lorsque la quatrième condition de la Proposition 13.6.7 est satisfaite.

Pour déterminer les points critiques, on considère $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6y = 0 \quad (13.6.1)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow -6x + 24y^2 = 0 \Rightarrow 2(x + 1)y = 0. \quad (13.6.2)$$

De (13.6.1), on a que $y = x^2/2$. Si on cette expression pour y dans (13.6.2), on obtient $-6x + 6x^4 = 6(x^3 - 1)x = 0$. Donc $x = 0$ ou 1 . Pour $x = 0$, on obtient le point critique $(0, 0)$ et pour $x = 1$ obtient le point critique $(1, 1/2)$.

Pour déterminer si on a un maximum local, un minimum local ou un col, on a besoin de la matrice Hessian.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

Pour $(0, 0)$, on a

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det H(0, 0) = -36 < 0$, on a un col.

Pour $(1, 1/2)$, on a

$$H(1, 1/2) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det H(1, 1/2) = 108 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1/2) = 6 > 0$, on a un minimum local à ce point.



13.7 Les multiplicateurs de Lagrange

À la Section 5.3, on a vu comment trouver le maximum et minimum (s'ils existent) d'une fonction $f(x, y)$ sous une contrainte $g(x, y) = 0$. Par exemple, on aurait pu vous demander dans cette section de trouver les points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 9$ qui sont les plus loin du point $(0, 1)$. Cela revient à vous demander de trouver les points (x, y) qui satisfont $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et qui donnent le maximum du carré de la distance au point $(0, 1)$; c'est-à-dire, le maximum de $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

La technique présentée à la Section 5.3 serait d'écrire y en fonction de x (ou l'inverse) à partir de $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et de substituer y dans $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ pour obtenir une fonction d'une variable en x dont on peut trouver le minimum absolu à l'aide des méthodes que l'on a vues pour les fonctions d'une variable.

Cette technique est valable dans le cas d'une fonction f de deux variables puisque le problème est réduit à l'étude d'une fonction d'une variable après la substitution. Si f est une fonction de plus de deux variables, la fonction obtenue après substitution aura toujours plus d'une variable. Le problème de trouver le maximum ou minimum absolu demeure difficile.

Considérons le problème de trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

l'équation $g(\mathbf{x}) = 0$ représente une surface S dans \mathbb{R}^n . Nous assumerons que f et g sont différentiables et que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in S$. Comme on a vu à la Section 13.4.1, cela implique que le plan tangent à la surface S est bien défini en tout point de S .

Supposons que la fonction f atteint son maximum absolu (et donc local) au point \mathbf{a} de la surface S . Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe sur S qui passe par \mathbf{a} ; c'est-à-dire, $g(\phi(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\phi(0) = \mathbf{a}$.

La fonction $g = f \circ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a donc un maximum local en $t = 0$. Donc, 0 est un point critique de g et, grâce à la Proposition 13.1.10, on a

$$0 = g'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\phi(0)) \frac{d}{dt} \phi_i(0) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \phi'(0) \rangle$$

Comme cela est vrai pour toute courbe de S qui passe par \mathbf{a} , on a que $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire à tous les vecteurs du plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc, $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} .

Or, on a vu que $\nabla g(\mathbf{a})$ est aussi perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc, $\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla g(\mathbf{a})$ sont parallèles. On a donc

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$$

pour un nombre réel λ . Le paramètre λ est appelé le **multiplicateur de Lagrange**.

Méthode 13.7.1 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) . \quad (13.7.1)$$

On trouve ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

a. On suppose que l'ensemble $\{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$ est fermé et borné

On remarque que (13.7.1) est un système de n équations avec $n+1$ inconnues : x_1, x_2, \dots, x_n et λ . On semble avoir compliqué le problème initial en ajoutant la variable λ . Cependant, dans plusieurs situations, il est plus simple de résoudre (13.7.1) que d'utiliser une méthode classique de substitution. Il ne faut pas oublier qu'il n'est généralement pas facile d'isoler une des variables de $g(\mathbf{x}) = 0$.

Exemple 13.7.2

Revenons à notre exemple du début de la section. Trouver les points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 9$ qui sont les plus loin du point $(0, 1)$. Comme on a mentionné, cela revient à trouver les points (x, y) qui satisfont $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et qui donnent le maximum du carré de la distance au point $(0, 1)$; c'est-à-dire, le maximum de $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Rightarrow 2x = 2\lambda x \Rightarrow x(1 - \lambda) = 0 \quad (13.7.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Rightarrow 2(y - 1) = 4\lambda y \Rightarrow y(1 - 2\lambda) = 1 \quad (13.7.3)$$

Si $\lambda \neq 1$, (13.7.2) donne $x = 0$. L'équation $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ devient $2y^2 = 9$ et on trouve $y = \pm 3/\sqrt{2}$. On obtient deux points : $(0, \pm 3/\sqrt{2})$.

Si $\lambda = 1$, (13.7.3) donne $y = -1$. L'équation $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ devient $x^2 = 7$ et on trouve $x = \pm\sqrt{7}$. On obtient deux autres points : $(\pm\sqrt{7}, -1)$.

Puisque l'ellipse S est un ensemble borné et fermé de \mathbb{R}^2 et que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut conclure du Théorème 12.3.1, Théorème des valeurs extrêmes, que f atteint sa valeur maximal (et minimal) en au moins un point de l'ellipse. Puisque le maximum absolu est aussi un maximum local, il faut donc que ce maximum absolu soit atteint à au moins un des quatre points que l'on a trouvé.

Or

$$f(0, 3/\sqrt{2}) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 \approx 1.25736$$

$$f(0, -3/\sqrt{2}) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 \approx 9.74264$$

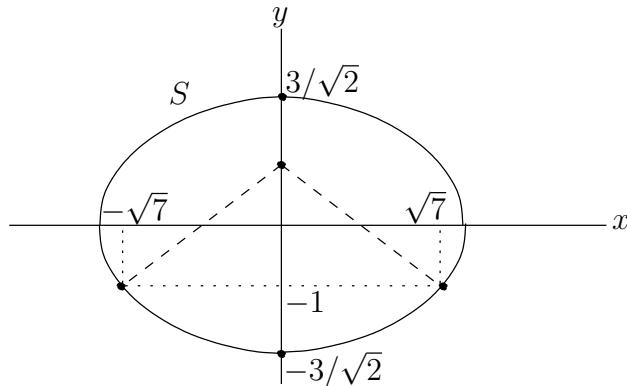
$$f(\sqrt{7}, -1) = (\sqrt{7})^2 + (-1 - 1)^2 = 11$$

et

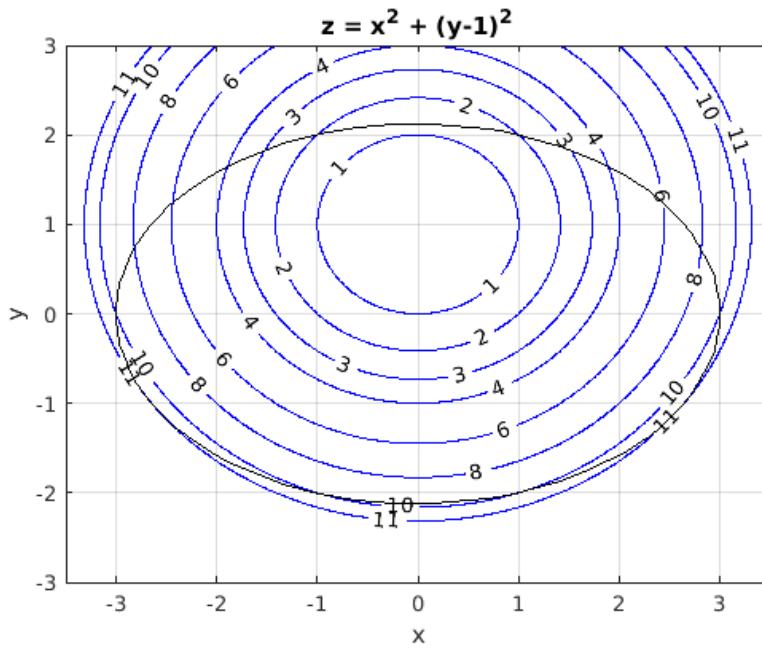
$$f(-\sqrt{7}, -1) = (-\sqrt{7})^2 + (-1 - 1)^2 = 11.$$

Donc la distance maximal est $\sqrt{11}$ aux points $(\pm\sqrt{7}, -1)$.

On représente les quatre points d'intérêt dans la figure suivante.



De plus, nous avons tracé l'ellipse S et quelques courbes de niveau de f dans la figure suivante.



On peut bien voir que f atteint son maximum absolu aux points $(\pm\sqrt{7}, -1)$. On note aussi que f a un minimum local au point $(0, -3/\sqrt{2})$ mais son minimum absolu est bien au point $(0, 3/\sqrt{2})$. ♣

En raisonnant comme on vient de la faire, on peut montrer que la méthode de Lagrange se généralise au cas où il y a plus d'une contrainte.

Méthode 13.7.3 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous les contraintes que $g_i(\mathbf{x}) = 0$ où $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ_i le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) .$$

On trouve ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

Pour la méthode précédente, on suppose que le système d'équations algébriques $g_i(\mathbf{x}) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$ a un ensemble de solutions non-triviales. Il n'y a malheureusement pas de méthode générale pour résoudre un système d'équations algébriques de degré plus grand que un comme on a pour les systèmes d'équations linéaires.

13.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

On aimerait bien que la définition de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit très semblable à la définition de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a une dérivée au point $c \in \mathbb{R}$, on a que (4.3.2) est satisfait. C'est-à-dire,

$$\frac{|f(c+h) - f(c) - f'(c)h|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 .$$

Donc, $f'(c)$ est le nombre A tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - Ah|}{|h|} = 0 . \quad (13.8.1)$$

C'est cette dernière formulation de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point c que nous généraliserons aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. On doit remplacer

1. $c \in \mathbb{R}$ par $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$,
2. $h \rightarrow 0$ dans \mathbb{R} par $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^n et
3. $|f(c+h) - f(c) - Ah|$ par $\|f(\mathbf{c}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}\|$ où A est une matrice de dimension $m \times n$.

La multiplication par une nombre réel A est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ainsi, lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a que Ah dans l'expression $|f(c+h) - f(c) - Ah|$ est le résultat de l'application linéaire A appliquée à h . Les matrices de dimensions $m \times n$ représentent les applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Ainsi, lorsque $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on a que $Ah \in \mathbb{R}^m$ dans l'expression $\|f(\mathbf{c}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}\|$ est le résultat de l'application linéaire A appliquée à $h \in \mathbb{R}^n$.

On a donc la définition suivante.

Définition 13.8.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une matrice A de dimension $m \times n$ telle que

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0, \quad (13.8.2)$$

on dit que f est **différentiable au point \mathbf{c}** et on écrit $Df(\mathbf{c}) = A$.

Si (13.8.2) est satisfait, on voit que $f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}$ converge vers $\mathbf{0}$ plus rapidement que \mathbf{y} lorsque \mathbf{y} converge vers $\mathbf{0}$. Donc, pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$, on a

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) \approx f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}.$$

En d'autres mots, $f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}$ est l'**approximation linéaire** de $f(\mathbf{c} + \mathbf{y})$ pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$. Si on pose $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{y}$, on peut reformuler l'expression précédente dans la forme bien connue

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{c}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

pour \mathbf{x} près de \mathbf{c} .

Il est très rare que l'on calcul la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ à partir de la définition. On utilise le résultat suivant pour calculer la dérivée.

Théorème 13.8.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable au point \mathbf{c} alors les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

existent. De plus,

$$Df(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est le plus près d'un énoncé dans le sens inverse du théorème précédent que l'on puisse avoir. C'est ce résultat qui est très utile pour calculer les dérivées de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Proposition 13.8.3

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}) \quad , \quad 1 \leq i \leq m, ; 1 \leq j \leq n ,$$

existent et sont continues sur V , alors f est différentiable pour tout $\mathbf{x} \in V$ et

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} .$$

Exemple 13.8.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \\ f_2(x, y) &= \sin(\pi(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Calculer la dérivée de f au point $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} , \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= 2x\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2y\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) , \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} \left. \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(1,2)} & \left. \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(1,2)} \\ \left. 2x\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \right|_{(x,y)=(1,2)} & \left. 2y\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \right|_{(x,y)=(1,2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/25 & -4/25 \\ -2\pi & -4\pi \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

**Remarque 13.8.5**

1. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, le cas $m = 1$, on a que

$$\mathrm{D}f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix} = \nabla f(\mathbf{c}) .$$

Donc, la définition de dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un prolongement de la définition du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, le cas $n = 1$, on a que ϕ est la représentation paramétrique d'une courbe dans \mathbb{R}^m . De plus, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ est en fait une nombre réel que l'on peut simplement appeler c . Ainsi,

$$\mathrm{D}\phi(c) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(c) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(c) \\ \vdots \\ \frac{d\phi_m}{dt}(c) \end{pmatrix} = \phi'(c)$$

où $\phi'(c) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur parallèle à la tangente à la courbe

$$\Gamma = \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

au point $\phi(c)$ comme on a vue lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes.



Définition 13.8.6

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe C^k si, pour tout i , les dérivées partielles d'ordre k de f_i existent et sont continues en tout point du domaine de f . On écrit $f \in C^k(U)$

13.9 Exercices

Question 13.1

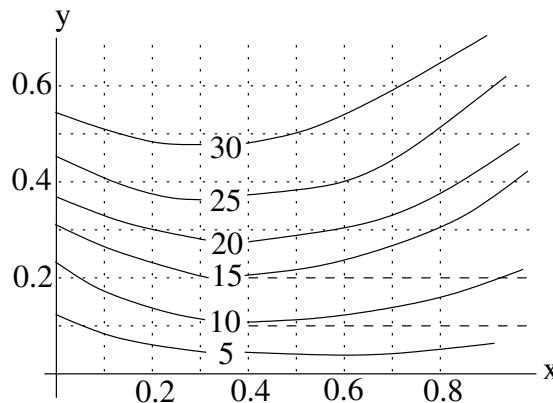
Évaluez toutes les dérivées premières des fonctions suivantes :

- | | | |
|---------------------------------|--|-------------------------|
| a) $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4$ | b) $f(x, y) = \frac{2x+y}{x-y}$ | c) $h(x, y) = f(x)g(y)$ |
| d) $h(x, y) = f(xy)$ | e) $h(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ | |

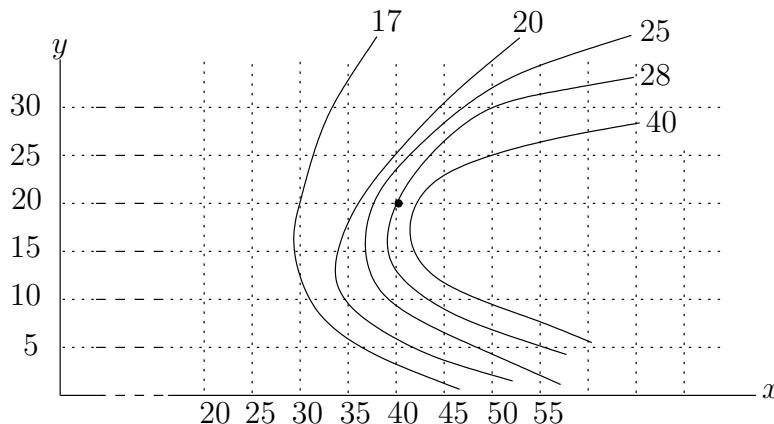
Question 13.2

Le graphique suivant donne quelques courbes de niveau de la fonction $f(x, y)$. Utiliser ce graphique pour estimer

$$\frac{\partial f(0.6, 0.4)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(0.2, 0.3)}{\partial y} .$$

**Question 13.3**

Quelques courbes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont données dans la figure suivante :



a) Utilisez cette information pour obtenir une équation approximative de l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x, y, z) = (40, 20, 28)$.

b) Utilisez le résultat en (a) pour estimer $f(43, 24)$.

Question 13.4 

Si $w = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^3$ où $x = s + t^2$, $y = st$ et $z = s^2 + t$, calculer $\frac{\partial w}{\partial s}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ au point $(s, t) = (1, 2)$.

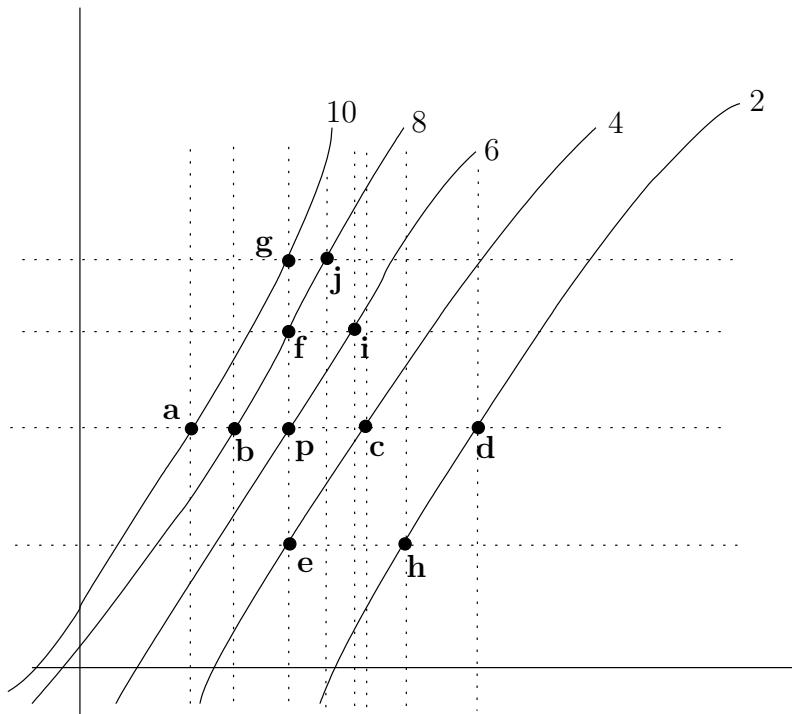
Question 13.5 

Calculez les dérivées partielles f_{xyy} et f_{xyz} de la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^2 + 3x^3y^2z^4 .$$

Question 13.6 

La figure suivante donne quelques courbes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Déterminez le signe (possible) des dérivées partielles suivantes.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$ | b) $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})$ | c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})$ |
| d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p})$ | e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ | |

Question 13.7 🔒

Les courbes $y = x^3$ et $x^2 + 3y^2 = 4$ se coupent aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Utilisez le gradient pour déterminer si elles se coupent orthogonalement.

Question 13.8 🔒

Pour chacune des surfaces données ci-dessous, trouvez l'équation du plan tangent au point donné.

- a) La surface $z = f(x, y) = \sin(xy)$ au point $(1, 0, 0)$.
- b) La surface $z = f(x, y) = 1 - \cos(x) + \sin(y)$ au point $(0, \pi, 0)$.

Question 13.9 🔒

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z^2 + x^2 - 4xy + y^2 = 2$ au point $(1, 1, 2)$.

Question 13.10 🔒

Soit S une surface donnée par la représentation paramétrique $x = u - v$, $y = u + v$ et $z = u^2$. Trouvez l'équation du plan tangent à cette surface au point $(0, 2, 1)$.

Question 13.11 🔒

Pour chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes, trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) donné, et déterminez dans quelle direction la fonction $f(x, y)$ augmente le plus rapidement à partir de (x_0, y_0) .

- a) $f(x, y) = x^2y^4$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$.
b) $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 3$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3)$

Question 13.12

Quels sont les points (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ dont le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) est parallèle au plan $3x - y + 3z = 1$?

Question 13.13

Si la dérivée de $f(x, y)$ au point $(1, 2)$ dans la direction $(1, 1)$ est 4 et la dérivée de $f(x, y)$ au point $(1, 2)$ dans la direction $(-1, 1)$ est 3, calculez le gradient $\nabla f(1, 2)$. De plus si $f(1, 2) = 5$, donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 2, 5)$.

Question 13.14

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculez la dérivée au point donnés et dans la direction données.

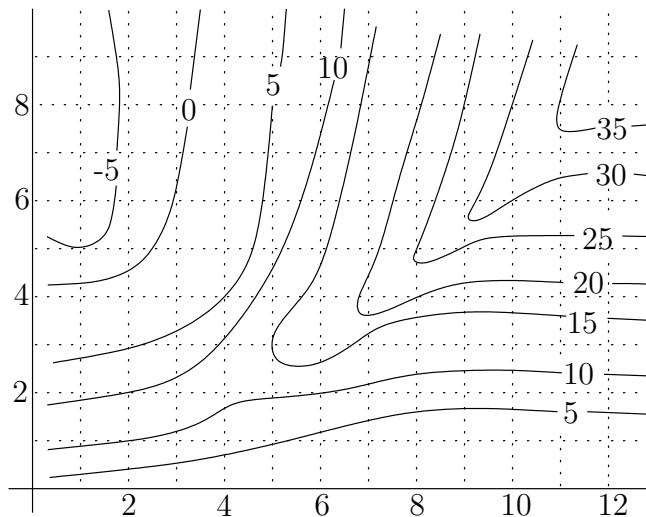
- a) $f(x, y) = x^2y + 4y^2$ au point $(2, 1)$ dans la direction du vecteur $(1, \sqrt{3})$.
b) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ au point $(1, 1, 2)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
c) $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{xyz}$ au point $(1, 0, 3)$ dans la direction du vecteur $(2, 1, -2)$.

Question 13.15

Soit $f(x, y) = xy$, utiliser la définition (avec la limite) de la dérivée selon une direction pour calculer la dérivée de $f(x, y)$ au point $(2, -1)$ dans la direction $\mathbf{u} = (1, -2)$.

Question 13.16

Utilisez les courbes de niveaux de la fonction $f(x, y)$ données dans la figure ci-dessous pour estimer la dérivée $f_{\mathbf{u}}(5, 3)$ de f dans la direction $\mathbf{u} = (-1, 1)$.



Question 13.17

Utilisez l'approximation linéaire de :

- a) $f(x, y) = 2x^2y^2 + 3xy + x$ au point $(1, 1)$ pour estimer $f(0.9, 1.1)$.
b) $f(x, y) = \ln\left(\frac{2x^2 + 5y^2}{7}\right)$ au point $(1, 1)$ pour estimer $f(0.98, 1.01)$.

c) $f(x, y) = (x^2 - y^5)^{4/3}$ au point $(3, 1)$ pour estimer $f(3.2, 1.2)$.

d) $f(x, y) = 1 - \frac{2x}{y} + 3y - 4xy^2 + e^{3x}$ au point $(0, 1)$ pour estimer $f(-0.1, 0.9)$.

Question 13.18

Soit $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$. Les points $(0, 1)$ et $(1/3, 1/3)$ sont des points critique de f . Pour chacun de ces points, déterminez s'il est un maximum local, un minimum local, un col ou autre chose.

Question 13.19

Pour chacune des fonctions suivantes, trouvez les points critiques de cette fonction et, pour chacun d'eux, déterminez s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

e) $h(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + \frac{1}{8}$

b) $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$

d) $h(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy + 290$

Question 13.20

L'aire d'une ellipse de demi axes a et b est donnée par $A = \pi ab$. Si $a + b = 2$, pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'aire maximale ?

Question 13.21

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le minimum et maximum absolu de la fonction sous la contrainte donnée.

a) $f(x, y) = xy$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 2$.

b) $f(x, y) = 9y^2 + 4x^2$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y, z) = x + 3y - z$ avec la contrainte $x^2 + 4y^2 + z^2 = 17$.

Question 13.22

Trouvez le volume maximal de la boîte ayant des côtés parallèles aux axes de coordonnées qui est contenu à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Question 13.23

La base d'un aquarium de volume V est faite de marbre et les côtés sont fait de verre. Le coût par unité de surface du marbre est cinq fois celui du verre. Trouvez les dimensions de l'aquarium qui minimisent le coût de l'aquarium.

Question 13.24

Trouvez la valeur maximale de la fonction $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sous la contrainte que $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Question 13.25

Pour chacune des fonctions suivante, déterminez si elle possède un maximum et minimum absolu sur le domaine D donnée. Si oui, trouvez ce maximum et minimum absolu.

a) $f(x, y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$ et $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $f(x, y) = y + x^2$ et $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Question 13.26

Est-ce que $f(x, y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$ a un maximum absolu sur le disque $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$? Si oui, trouvez ce maximum absolu.

Question 13.27 

Est-ce que $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ a un maximum absolu sur la région S bornée par l'axe des x , l'axe des y et la droite $y = 6 - x$. Si oui, trouvez ce maximum absolu.

Question 13.28  

Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ci-dessous,

I: Calculez la dérivée de la fonction f au point $(-1, 1)$.

II: Donnez l'approximation linéaire de f autour du point $(-1, 1)$

III: Comparez la valeur de f au point $(-0.9, 1.05)$ avec la valeur donnée par l'approximation linéaire au point $(-0.9, 1.05)$.

$$\mathbf{a}) \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x/y \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}) \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y + 2xe^y \\ \frac{x}{y} - 3ye^{-x} \end{pmatrix}$$



Systèmes d'équations différentielles



14

14.1 Introduction

Exemple 14.1.1 (Système prédateurs-proies)

L'exemple suivant provient de Murray [9].

L'exemple classique d'un système d'équations différentielles est le système qui décrit le nombre d'individus de deux espèces animales ; une espèce représentant les proies et l'autre représentant les prédateurs. Les deux espèces sont en compétition pour leur existence.

On peut imaginer que, si les prédateurs dévorent trop de proies, ces prédateurs mettront en danger leur propre existence en détruisant leur source de nourriture. Par contre, si le nombre de proies devient très grand, il sera facile pour les prédateurs de capturer des proies et le nombre de prédateurs va augmenter. Qu'arrivera-t-il à long terme ? Est-ce que les espèces vont disparaître ? Est-ce qu'il s'établira un équilibre entre le nombre de proies et de prédateurs ?

On peut décrire l'interaction entre les deux espèces à l'aide d'équations différentielles. Soit $q(t)$ le nombre de proies au temps t et $p(t)$ le nombre de prédateurs au temps t dans un espace donné. Le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des proies et prédateurs. Les unités de temps normalement utilisées pour les mammifères sont les années. Pour certains insectes on utilisera les heures.

Lotka et Volterra, deux biomathématiciens à une époque où on ne parlait pas de biomathématiques, développèrent séparément (en 1920 et 1926 respectivement) le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= q(a - bp) \\ \frac{dp}{dt} &= p(cq - d)\end{aligned}\tag{14.1.1}$$

où a , b , c et d sont des constantes positives. Ce système d'équations différentielles porte maintenant le nom de **système (d'équations différentielles) de Lotka-Volterra**.

Commençons par expliquer le rôle et la signification des constantes dans le système (14.1.1). S'il n'y a pas d'interaction entre les proies et les prédateurs, le nombre de proies et de prédateurs est décrit par les équations différentielles

$$\frac{dq}{dt} = aq \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = -dp.$$

Ces deux équations sont indépendantes et peuvent être résolues par la méthode de séparation des variables. La constante a représente le taux relatif de croissance pour les proies et la constante $-d$ représente le taux relatif de croissance pour les prédateurs. Dans ce dernier cas, le taux de croissance est négatif car les prédateurs vont disparaître par manque de nourriture si la population de proies est absente.

On représente le nombre de contacts entre les proies et les prédateurs par le produit pq . Ainsi, le terme $-bpq$ du côté droit de la première équation en (14.1.1) a un effet négatif sur le taux de croissance des proies car $-bpq \leq 0$. Par contre le terme cpq du côté droit de la deuxième équation en (14.1.1) a un effet positif sur le taux de croissance car $cpq \geq 0$. Cela est consistant avec le fait que lorsqu'un prédateur entre en contact avec une proie, c'est la proie qui est la grande perdante.

Le système (14.1.1) semble dépendre de quatre paramètres : a , b , c et d . Par contre, il existe une dépendance entre ces quatre paramètres qui cache la simplicité du système. Le raisonnement suivant est appelé **non-dimensionalisation** et permet de réduire le nombre de paramètres au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire la comportement qualitatif de (14.1.1).

Si on pose

$$q(t) = \frac{d}{c}u(at), \quad p(t) = \frac{a}{b}v(at) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{d}{a},$$

on obtient

$$q'(t) = \frac{d}{c} \frac{d}{dt}u(at) = \frac{da}{c}u'(at)$$

et

$$p'(t) = \frac{a}{b} \frac{d}{dt}v(at) = \frac{a^2}{b}v'(at).$$

Ainsi, (14.1.1) donne

$$\frac{da}{c}u'(at) = \frac{d}{c}u(at) \left(a - b \frac{a}{b}v(at) \right) = \frac{ad}{c}u(at)(1 - v(at)) \quad (14.1.2a)$$

et

$$\frac{a^2}{b}v'(at) = \frac{a}{b}v(at) \left(c \frac{d}{c}u(at) - d \right) = \frac{ad}{b}v(at)(u(at) - 1). \quad (14.1.2b)$$

Si on multiplie les deux côtés de (14.1.2a) par $\frac{c}{ad}$ et ceux de (14.1.2b) par $\frac{b}{a^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} u'(at) &= u(at)(1 - v(at)) \\ v'(at) &= \frac{d}{a}v(at)(u(at) - 1) = \alpha v(at)(u(at) - 1). \end{aligned}$$

Finalement, si on ajuste le temps en posant $\tau = at$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1 - v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u - 1)\end{aligned}\tag{14.1.3}$$

Qualitativement, (14.1.3) est équivalent à (14.1.1) ; c'est-à-dire que l'on peut représenter tous les types de solutions que (14.1.1) possède en variant le paramètre α seulement.

Dans ce chapitre, nous développerons des outils pour analyser les systèmes d'équations différentielles comme (14.1.3). ♣

Exemple 14.1.2 (Compétition – exclusion)

L'exemple suivant provient de Murray [9].

Le deuxième exemple de systèmes d'équations différentielles décrit le comportement de deux espèces animales, l'espèce P et l'espèce Q, restreintes à un même territoire et ayant la même source de nourriture.

Soit $p(t)$ le nombre d'individus de l'espèce P au temps t et $q(t)$ le nombre d'individus de l'espèce Q au temps t . Comme à l'exemple précédent, le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des deux espèces.

Si les deux espèces occupent des milieux distincts, ils n'entrent donc pas en compétition pour la nourriture, alors p est gouverné par une équation logistique et il en est de même pour q . Ce type d'équation a été étudié au chapitre sur les équations différentielles. On a

$$\frac{dp}{dt} = a p \left(1 - \frac{p}{M_p}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dt} = b q \left(1 - \frac{q}{M_q}\right).\tag{14.1.4}$$

La constante $a > 0$ est associée au taux de croissance relatif de l'espèce P et la constante $b > 0$ est associée à celui de l'espèce Q. M_p est le nombre maximal d'individus de l'espèce P que le milieu peut supporter et M_q est le nombre maximal d'individus de l'espèce Q que le milieu peut supporter.

Les équations différentielles ci-dessus décrivent la situation où la consommation de nourriture d'une espèce n'a pas d'effet sur l'autre espèce. Par contre, si les deux espèces occupent le même milieu, elles entrent en compétition pour la nourriture disponible. Pour décrire le nombre d'individus d'une espèce, il faut donc tenir compte du nombre d'individus de l'autre espèce.

On considère le système d'équations différentielles suivant

$$\frac{dp}{dt} = a p \left(1 - \frac{p + cq}{M_p}\right)\tag{14.1.5a}$$

$$\frac{dq}{dt} = b q \left(1 - \frac{q + dp}{M_q}\right)\tag{14.1.5b}$$

Les constantes positives c et d sont déterminées par la quantité de nourriture consommée par chacun des individus des deux espèces – Peut-être qu'un individu de l'espèce P a besoin pour

survivre du double de la quantité de nourriture qu'un individu de l'espèce Q a besoin pour survivre. Les constantes c et d peuvent aussi dépendre de l'état de la source de nourriture après le passage d'une espèce – Peut-être que les individus d'une espèce détruisent plus de nourriture qu'ils en consomment.

Le terme $(p + cq)/M_p$ du côté droit de (14.1.5a) joue le même rôle que le terme p/M_p dans l'équation logistique à gauche en (14.1.4). Il faut tenir compte de l'impact de l'espèce Q sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce Q a un effet qui est c fois celle d'un individu de l'espèce P. De même, le terme $(q + dp)/M_q$ du côté droit de (14.1.5b) joue le même rôle que le terme q/M_q dans l'équation logistique à droite en (14.1.4). Il faut maintenant tenir compte de l'impact de l'espèce P sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce P a un effet qui est d fois celle d'un individu de l'espèce Q.

Le nombre de contacts entre les deux espèces est représenté par le produit pq . On parle de contact lorsque les individus des deux espèces vont se nourrir aux mêmes endroits.

Le système (14.1.5) semble dépendre de six paramètres : a , b , c , d , M_p et M_q . On peut utiliser la technique de **non-dimensionalisation** pour éliminer certains des paramètres.

Si on pose

$$\begin{aligned} p(t) &= M_p u(at) \quad , \quad q(t) = M_q v(at) \quad , \\ \alpha &= \frac{b}{a} \quad , \quad \rho = \frac{c M_q}{M_p} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{d M_p}{M_q} \quad . \end{aligned}$$

et que l'on ajuste le temps en posant $\tau = at$, le système (14.1.5) devient le système

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - u - \rho v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(1 - v - \xi u) \end{aligned} \tag{14.1.6}$$

On a réduit le nombre de paramètres à trois. Comme à l'exemple précédent, (14.1.5) et (14.1.6) sont équivalents qualitativement. ♣

Exemple 14.1.3

L'exemple suivant provient de Borelli et Coleman [3].

Médicament contre le rhume

Pour qu'un médicament contre le rhume soit efficace, il faut que la quantité du médicament dans le sang du patient soit plus grande qu'une certaine valeur minimale pour une période suffisamment longue.

Nous analyserons deux médicaments contre le rhume : un décongestionnant et un anti-histaminique.

Une seule dose

Le nombre d'unités $x(t)$ d'un médicament dans l'estomac au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \tag{14.1.7}$$

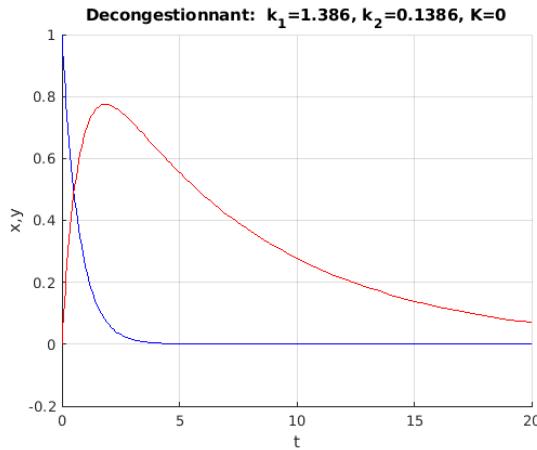


FIGURE 14.1 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge).

et le nombre d'unités $y(t)$ de ce médicament dans le sang au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y . \quad (14.1.8)$$

Les constantes k_1 et k_2 sont positives et déterminées par le médicament considéré.

$k_1x(t)$ est le taux d'assimilation du médicament au temps t par le sang qui traverse l'estomac et $k_2y(t)$ est le taux d'élimination du médicament au temps t par le foie et les reins.

Si initialement on a $x(0) = A$ unités du médicament (le patient avale une dose de A unités) et $y(0) = 0$ unité (c'est la première dose que le patient reçoit et il n'y a donc aucune trace du médicament dans le sang) la solution de (14.1.7) et (14.1.8) est

$$x(t) = Ae^{-k_1t} , \quad y(t) = -\frac{Ak_1e^{-k_1t}}{k_1 - k_2} + \frac{Ak_1e^{-k_2t}}{k_1 - k_2} .$$

Pour un décongestionnant, on estime que $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Si on suppose que le patient prend initialement $A = 1$ unité du médicament. On obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 14.1.

Pour un antihistaminique, on estime que $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$. Si on suppose encore que le patient prend initialement $A = 1$ unité du médicament. On obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 14.2.

Si on considère seulement les quantités de médicament dans le sang, l'antihistaminique semble avoir un plus long effet. Par contre, le décongestionnant semble agir plus rapidement.

Un médicament administré de façon continue

Certaines pilules sont formées d'un très grand nombre de petites boules qui se dissolvent dans l'estomac à des rythmes différents. Le résultat est que le médicament n'est pas absorbé

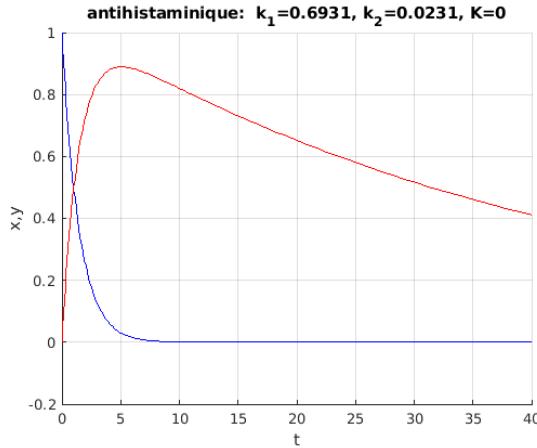


FIGURE 14.2 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge).

par l'estomac d'un seul coup comme dans le cas précédent mais il est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule).

Si on suppose que la fréquence à laquelle le patient prend une pilule est telle que le taux d'absorption dans l'estomac est constant à K unités par heure, alors le nombre d'unités $x(t)$ dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités $y(t)$ dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= K - k_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 x - k_2 y \end{aligned} \quad . \quad (14.1.9)$$

Dans le présent problème, on a $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ unité initialement. La condition $x(0) = 0$ ne veut pas dire que le patient ne prend pas de médicament. Il reçoit une dose de K unités par heure. La condition $x(0) = 0$ veut dire que le patient n'a pas de médicament dans l'estomac au départ. De même, $y(0) = 0$ veut dire que le patient n'a pas de médicament dans le sang au départ.

La solution de (14.1.9) est

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{K(-1 + e^{-k_1 t})}{k_1} \\ y(t) &= -\frac{K(-k_1 + k_2 - k_2 e^{-k_1 t} + k_1 e^{-k_2 t})}{k_2(k_1 - k_2)} \end{aligned}$$

La quantité $x(t)$ du médicament dans l'estomac converge vers $x = K/k_1$ lorsque t tend vers l'infini (on a aussi que $x'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$) et la quantité $y(t)$ du médicament dans le sang converge vers $y = K/k_2$ lorsque t tend vers plus l'infini (on a aussi que $y'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$).

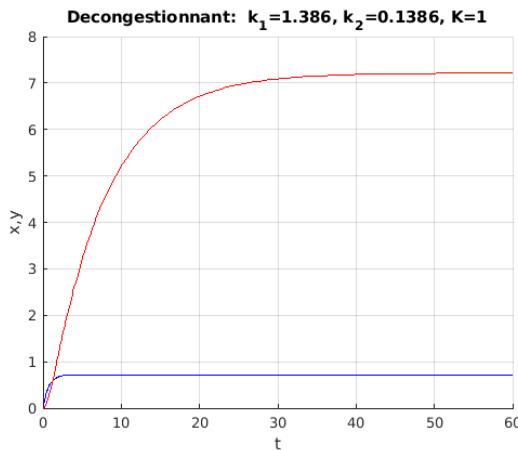


FIGURE 14.3 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication continue.

On a mentionné précédemment que $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$ pour un décongestionnant. Si on suppose que $K = 1$ unité par heure, on obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 14.3.

On a aussi mentionné précédemment que $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$ pour un antihistaminique. Si on suppose toujours que $K = 1$ unité par heure, on obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 14.4.

Le décongestionnant et l'antihistaminique ont des comportements semblables à long terme dans le présent cas. $x'(t) \rightarrow 0$ et $y'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Plus précisément, $x(t)$ est asymptotique à $x = K/k_1$ et $y(t)$ est asymptotique à $x = K/k_2$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si on considère seulement les quantités de médicament dans le sang, le décongestionnant commence à agir beaucoup plus rapidement que l'antihistaminique. Par contre, l'action de l'antihistaminique est beaucoup plus forte.

Un médicament administré à intervalle régulier

Dans l'exemple précédent, on a supposé que le médicament est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule) et que le patient prend une pilule à intervalle régulier de façon à maintenir le taux d'absorption constant à K unités par heure. C'est une situation idéale qui est presque impossible à saisir.

La situation suivante est plus réaliste. Supposons que le type de pilule utilisée est comme celui de la section précédente. Plus précisément, on suppose que le médicament entre dans l'estomac à un taux constant de $K = 12$ unités par heure durant une demi-heure. Après une demi-heure, la pilule a été complètement assimilée par l'organisme et il n'y a plus de médicament qui entre dans l'estomac. De plus, on suppose que le patient prend une pilule à toutes les six heures.

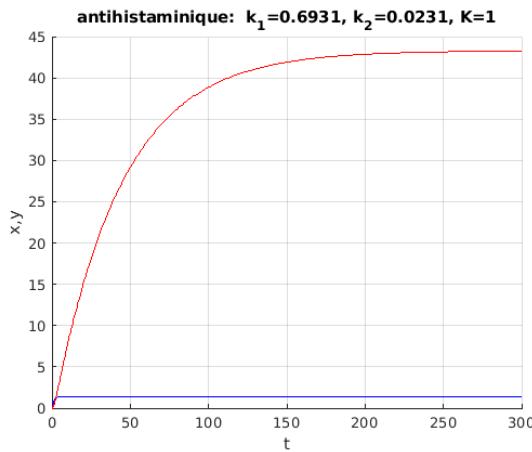


FIGURE 14.4 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication continue.

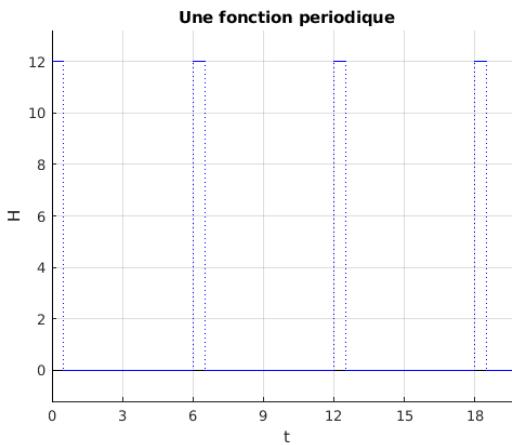


FIGURE 14.5 – Le taux d'absorption d'un médicament pris à intervalles réguliers.

Le taux d'absorption par l'estomac du médicament est décrit par la formule

$$F(t) = \sum_{n=0}^N K(H(t + 6n) - H(t - 0.5 + 6n))$$

où H est la fonction de Heaviside définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et $N + 1$ est le nombre de pilules prisent par le patient. Le graphe de F pour les quatre premières pilules (i.e. $N = 3$) est donné à la figure 14.5. C'est ce que l'on appelle une onde carrée.

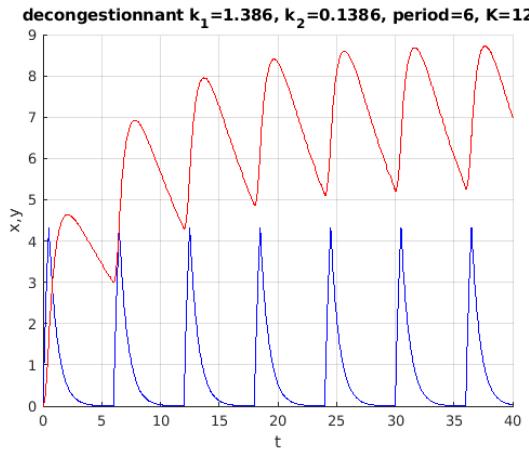


FIGURE 14.6 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administrée à intervalles réguliers.

Dans ce cas, le nombre d'unités $x(t)$ dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités $y(t)$ dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= -k_1 x(t) + F(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= k_1 x(t) - k_2 y(t)\end{aligned}\tag{14.1.10}$$

Reprendons les deux types de médicament que l'on a considérés précédemment ; à savoir le décongestionnant et l'antihistaminique.

On remarque que la première équation de (14.1.10) est indépendante de la fonction y . Cette équation peut donc être résolue à l'aide des transformations de Laplace ; c'est un des sujets que l'on retrouve dans un premier cours d'équations différentielles. Lorsque l'on a trouvé x , la deuxième équation de (14.1.10) devient une équation linéaire d'ordre un pour la fonction y . On pourrait (avec amplement de temps et de patience, ou avec un logiciel de calculs symboliques) trouver une expression pour x et y . Puisque l'on veut tracer le graphe des solutions x et y de (14.1.10), au lieu de trouver une expression pour x et y , on résout numériquement le système (14.1.10). Il faut porter une attention particulière aux points où le côté droit de l'équation (14.1.10) est discontinu.

Comme dans le cas de la médication continue, on suppose que $x(0) = 0$ unité et $y(0) = 0$ unité.

Pour le décongestionnant, on a $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Les graphes de x et y sont donnés à la figure 14.6.

Les graphes de la figure 14.6 suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 4.5 unités. De plus, la quantité de médication dans le sang semble tendre vers une fonction périodique de moyenne 7 unités et d'amplitude environ 1.8. On suppose ici que le patient ne cesse pas de prendre des pilules

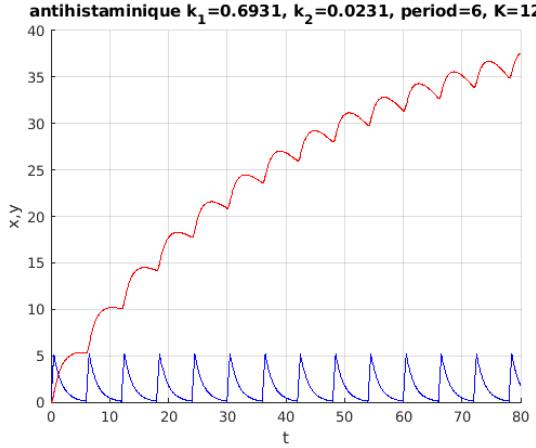


FIGURE 14.7 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administrée à intervalles réguliers.

et donc N augmente. Est-ce que le patient risque d'avoir une surdose du médicament ? Une analyse mathématique plus poussée est nécessaire pour montrer que le patient ne souffrira pas d'une surdose.

On trace le graphe de la quantité d'antihistaminique ($k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$) dans l'estomac et dans le sang en fonction du temps à la figure 14.6. On suppose toujours que $x(0) = 0$ unité et $y(0) = 0$ unité.

Comme dans le cas du décongestionnant, le graphe de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac en fonction du temps suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 5 unités. Par contre, la quantité d'antihistaminique dans le sang semble en moyenne augmenter sans borne supérieure. En fait, une étude plus poussée montre que la quantité d'antihistaminique dans le sang approche une fonction périodique de moyenne environ 43 unités et de période environ 1. Dépendant des unités utilisées, on risque d'intoxiquer le patient car la quantité d'antihistaminique dans le sang devient en moyenne 11 fois la quantité dans l'estomac. ♣

14.2 Énoncé du problème général

La forme générale d'un **système d'équations différentielles** dans \mathbb{R}^2 est

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{14.2.1}$$

où $f_i :]a, b[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1$ et 2 .

La majorité des définitions et résultats que nous allons énoncés ont un équivalent pour

les systèmes d'équations différentielles qui ont plus de deux équations différentielles. Nous allons nous limiter aux systèmes composés de deux équations différentielles.

Si f_1 et f_2 ne dépendent pas de t , nous obtenons le **système d'équations différentielles autonomes**

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{14.2.2}$$

où $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1$ et 2 . C'est ce genre de systèmes d'équations différentielles que nous considérons dans ce chapitre. Une forme brève pour (14.2.2) est

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{14.2.3}$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Le but est de trouver 2 fonctions, $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, telles que si on remplace x_1 par ϕ_1 et x_2 par ϕ_2 dans (14.2.2) alors l'équation est satisfaite pour tout $t \in]a, b[$.

Définition 14.2.1

Une fonction

$$\begin{aligned}\phi :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

est une **solution** du système d'équations différentielles (14.2.2) si

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt}(t) &= f_1(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t) &= f_2(\phi_1(t), \phi_2(t))\end{aligned}$$

pour tout $t \in]a, b[$.

Exemple 14.2.2

Soit le système d'équations différentielles autonome

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 5x_1 - 2x_2\end{aligned}\tag{14.2.4}$$

Les fonctions $\phi_1(t) = e^{3t} - 2e^{-4t}$ et $\phi_2(t) = e^{3t} + 5e^{-4t}$ satisfont (14.2.4) car

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{3t} - 2e^{-4t}) = 3e^{3t} + 8e^{-4t} \\ &= (e^{3t} - 2e^{-4t}) + 2(e^{3t} + 5e^{-4t}) = \phi_1(t) + 2\phi_2(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_2}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{3t} + 5e^{-4t}) = 3e^{3t} - 20e^{-4t} \\ &= 5(e^{3t} - 2e^{-4t}) - 2(e^{3t} + 5e^{-4t}) = 5\phi_1(t) - 2\phi_2(t)\end{aligned}$$

pour tout t . Nous verrons plus tard comment trouver ϕ_1 et ϕ_2 pour un système d'équations différentielles de la forme (14.2.4).

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 donne la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - 2e^{-4t} \\ e^{3t} + 5e^{-4t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de (14.2.4). ♠

Il est commun d'imposer une **condition initiale** au système d'équations différentielles (14.2.2). C'est-à-dire, de demander que la solution $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de (14.2.2) satisfasse

$$\phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

pour $t_0 \in]a, b[$ et $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ donnés.

Exemple 14.2.3

On peut montrer que

$$\phi(t) = a_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une solution du système d'équations différentielles (14.2.4) de l'exemple 14.2.2 quelles que soit les valeurs données aux constantes a_1 et a_2 .

Pour trouver la solution de (14.2.4) qui satisfasse la condition initiale

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (14.2.5)$$

on doit déterminer a_1 et a_2 tels que

$$\phi(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si on résout le système d'équations linéaires

$$a_1 - 2a_2 = 4, \quad a_1 + 5a_2 = -3$$

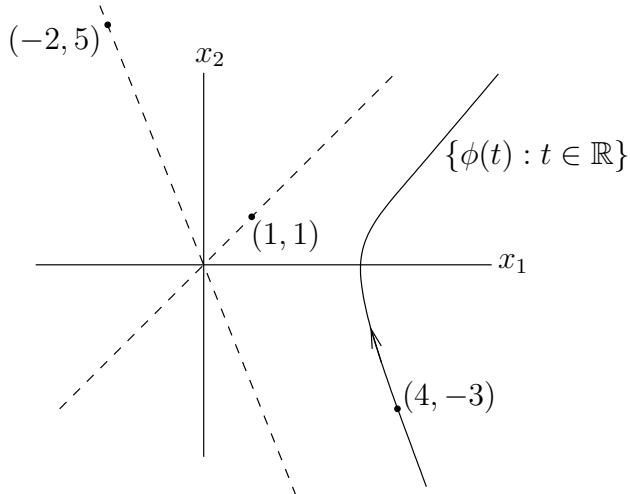


FIGURE 14.8 – L’orbite de la solution $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de l’équation différentielle de l’exemple 14.2.3. La flèche indique le déplacement le long de la courbe lorsque t augmente.

on trouve $a_1 = 2$ et $a_2 = -1$. La solution du système (14.2.4) qui satisfait la condition initiale (14.2.5) est

$$\phi(t) = 2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-4t} \\ 2e^{3t} - 5e^{-4t} \end{pmatrix}.$$



Définition 14.2.4

L’orbite d’une solution $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de (14.2.2) est l’image

$$\{\phi(t) : a < t < b\}$$

de cette solution dans le plan. L’orbite est une courbe dans le plan. Le **portrait de phases** de (14.2.2) est l’ensemble des orbites.

Exemple 14.2.5

Une partie de l’orbite de la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-4t} \\ 2e^{3t} - 5e^{-4t} \end{pmatrix}$$

de l’exemple 14.2.3 est la courbe donnée à la figure 14.8.



Puisque nous allons généralement étudier les systèmes d’équations différentielles de la forme (14.2.2) où f_1 et f_2 sont différentiables, le théorème suivant nous assure qu’il y aura toujours une et une seule solution étant donné une condition initiale.

Théorème 14.2.6

Si $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en (14.2.2) sont différentiables, et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ est une condition initiale donnée, alors il existe une et une seule solution ϕ de (14.2.2) qui satisfait la condition initiale $\phi(0) = \mathbf{x}_0$.

Remarque 14.2.7

Puisqu'il y a une et une seule solution de (14.2.2) qui passe par un point donné (i.e. qui satisfasse une condition initiale donnée), les orbites ne se coupent pas. ♠

Il est généralement très difficile de résoudre les systèmes d'équations différentielles. Très souvent, nous ne sommes pas directement intéressés aux solutions du système d'équations différentielles mais simplement à leur comportement lorsque l'on progresse dans le temps. Qu'arrive-t-il aux solutions lorsque l'on regarde très loin dans le temps ?

14.3 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Nous débutons notre étude des systèmes d'équations différentielles par l'étude d'une classe de systèmes qui sont très simples à analyser. Il ne faut pas en conclure que ces systèmes n'auront pas d'importance par la suite. C'est tout à fait le contraire. Ils joueront un rôle primordial dans l'analyse de systèmes d'équations différentielles beaucoup plus compliqués. Les résultats de la présente section et leur généralisation à \mathbb{R}^n sont des outils très fréquemment utilisés par les chercheurs en biomathématiques.

Un **système d'équations différentielles linéaires** dans \mathbb{R}^2 est un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a x_1 + b x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= c x_1 + d x_2\end{aligned}$$

où a, b, c et d sont des constantes. Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on peut récrire le système d'équations différentielles précédent sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{14.3.1}$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

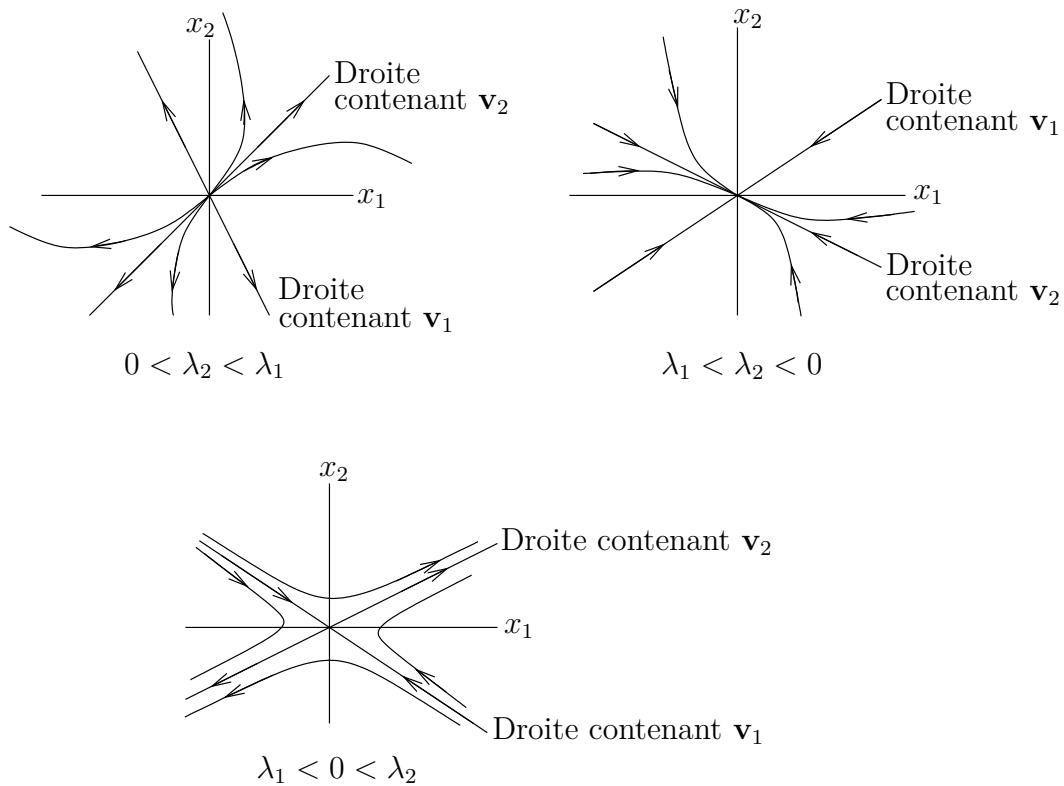


FIGURE 14.9 – Des portraits de phases possibles pour (14.3.1) si les valeurs propres sont distinctes.

Nos connaissances sur les valeurs et vecteurs propres vont nous permettre de résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires. En fait, les solutions possibles de (14.3.1), et donc les portraits de phases pour (14.3.1), peuvent être groupés en un petit nombre de classes selon le signe des valeurs propres de A et le nombre de vecteurs propres non-colinéaires. Nous résumons les résultats dans les trois propositions suivantes.

Proposition 14.3.1

Si la matrice A en (14.3.1) possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes. Soit \mathbf{v}_1 un vecteur propre associé à λ_1 et \mathbf{v}_2 un vecteur propre associé à λ_2 . Les solutions de (14.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (14.3.2)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. On retrouve à la figure 14.9 les portraits de phases possibles dans cette situation.

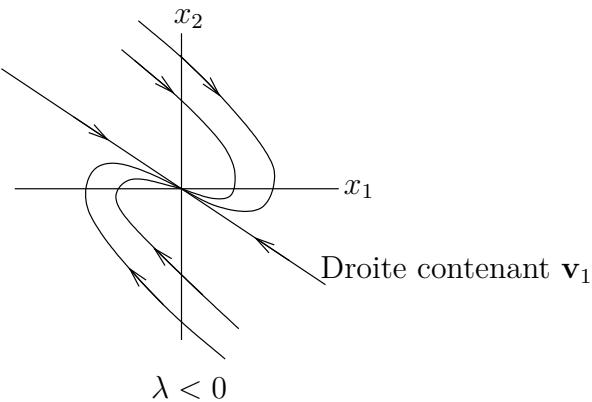


FIGURE 14.10 – Un portrait de phases possible s'il n'y a qu'une valeur propre et tous les vecteurs propres sont colinéaires.

Proposition 14.3.2

Si la matrice \$A\$ en (14.3.1) possède une seule valeur propre \$\lambda\$. On a deux cas possibles. S'ils existent deux vecteurs propres \$\mathbf{v}_1\$ et \$\mathbf{v}_2\$ associés à \$\lambda\$ qui ne sont pas colinéaires, alors la solution est donnée par (14.3.2). Si ce n'est pas le cas, donc les vecteurs propres associés à \$\lambda\$ sont tous colinéaires, alors les solutions de (14.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + a_2 e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

où \$a_1\$ et \$a_2\$ sont des constantes, \$\mathbf{v}\$ un vecteur propre associé à \$\lambda\$ et \$\mathbf{u}\$ est une solution de \$(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v}\$.

La figure 14.10 donne un exemple possible de portraits de phases dans ce dernier cas. Les solutions s'approchent de l'origine lorsque \$\lambda < 0\$ et s'éloignent de l'origine lorsque \$\lambda > 0\$.

Proposition 14.3.3

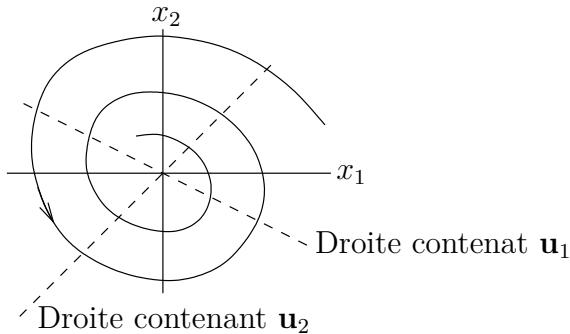
Si la matrice \$A\$ en (14.3.1) possède une paire de vecteurs propres complexes \$\lambda_1\$ et \$\lambda_2\$. Puisque les composantes de la matrice \$A\$ sont réelles, on doit avoir \$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2\$. Supposons que \$\lambda_1 = a + ib\$ avec \$b \neq 0\$.

Soit \$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2\$, avec \$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2\$, un vecteur propre associé à la valeur propre \$\lambda_1\$. les solutions de (14.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{at} (\cos(bt)\mathbf{u}_1 - \sin(bt)\mathbf{u}_2) + a_2 e^{at} (\sin(bt)\mathbf{u}_1 + \cos(bt)\mathbf{u}_2)$$

où \$a_1\$ et \$a_2\$ sont des constantes. On retrouve à la figure 14.11 un portrait de phases possible dans cette situation.

Exemple 14.3.4



$$a < 0 \text{ and } b > 0$$

FIGURE 14.11 – Un portrait de phases possible pour un système ayant une paire de valeurs propres complexes

Considérons le système d'équations différentielles linéaire $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On veut trouver la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres et un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres de A sont donnés dans le tableau suivant :

valeur propre	vecteur propre
$\lambda_1 = -1$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$
$\lambda_2 = 3$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$

Les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -a_1 e^{-t} + a_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}.$$

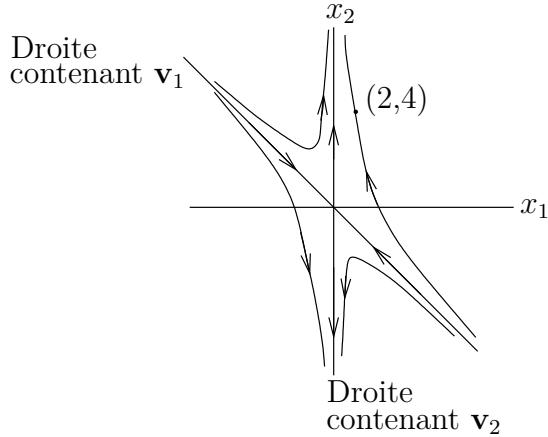


FIGURE 14.12 – Portrait de phases du système d'équations différentielles linéaires de l'exemple 14.3.4

Il est facile de tracer le portrait de phases de ce système. Remarquons premièrement que toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_1 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1$ pour une constante a_1 . Donc son orbite est sur la droite contenant \mathbf{v}_1 et approche l'origine quand $t \rightarrow \infty$. De même, toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_2 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_2 e^{-t} \mathbf{v}_2$ pour une constante a_2 . Donc son orbite est sur la droite contenant \mathbf{v}_2 et s'éloigne de l'origine quand $t \rightarrow \infty$. Il ne faut pas oublier que les orbites ne peuvent pas se couper en raison de l'unicité des solutions. Toutes les autres solutions de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{3t} \mathbf{v}_2$ vont s'approcher de la droite \mathbf{v}_2 mais s'éloigner de la droite \mathbf{v}_1 quand $t \rightarrow \infty$. On obtient le portrait de phase que l'on retrouve à la figure 14.12. ♣

Remarque 14.3.5

Il serait plus laborieux de tracer l'orbite associée à la solution de l'exemple précédent si on n'avait pas la proposition 14.3.3. Voici comment on devrait procéder. Lorsque t tend vers plus l'infini, la première composante $x_1(t) = 2e^{-t}$ tend vers 0 alors que la deuxième composante $x_2(t) = -2e^{-t} + 6e^{3t}$ tend vers plus l'infini. On a donc que $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement l'axe x_2 lorsque t tend vers plus l'infini. Lorsque t tend vers moins l'infini, la composante $x_1(t)$ tend vers plus l'infini alors que la composante $x_2(t)$ tend vers moins l'infini. Puisque

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t}}{-e^{-t} + 3e^{3t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-1 + 3e^{4t}} = -1$$

on a que $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement la droite $x_2 = -x_1$ lorsque t tend vers moins l'infini. Voir la figure 14.12. ♠

Définition 14.3.6

On considère le système d'équations différentielles linéaires (14.3.1). Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A .

- Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est appelé un **noeud stable**.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est appelé un **noeud instable**.
- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$), l'origine est appelé un **col**,
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a < 0$, l'origine est appelé un **foyer stable**.
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a > 0$, l'origine est appelé un **foyer instable**.
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a = 0$, l'origine est appelé un **centre**.

On peut classifier les différents portraits de phases pour (14.3.1) par rapport au signe du déterminant et de la trace de A .

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) .$$

On a que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}, \\ \text{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2\end{aligned}$$

et

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 .$$

Grâce à ces relations, on peut obtenir la classification des portraits de phases de (14.3.1) que l'on retrouve à la figure 14.13.

En résumé, nous avons

1. Toutes les solutions approchent de l'origine lorsque l'on a un noeud stable.
2. Toutes les solutions s'éloignent de l'origine lorsque l'on a un noeud instable.
3. Lorsque l'on a un col, les solutions dont la condition initiale est le long de la droite contenant les vecteurs propres associés à la valeur propre négative tendent vers l'origine. Les solutions dont la condition initiale n'est pas sur cette droite s'éloignent de l'origine.
4. Toutes les solutions approchent l'origine, en tournant autour, lorsque que l'on a un foyer stable
5. Toutes les solutions s'éloignent de l'origine, en tournant autour, lorsque que l'on a un foyer instable.
6. Les solutions tracent des ellipses autour de l'origine lorsque l'on a un centre.

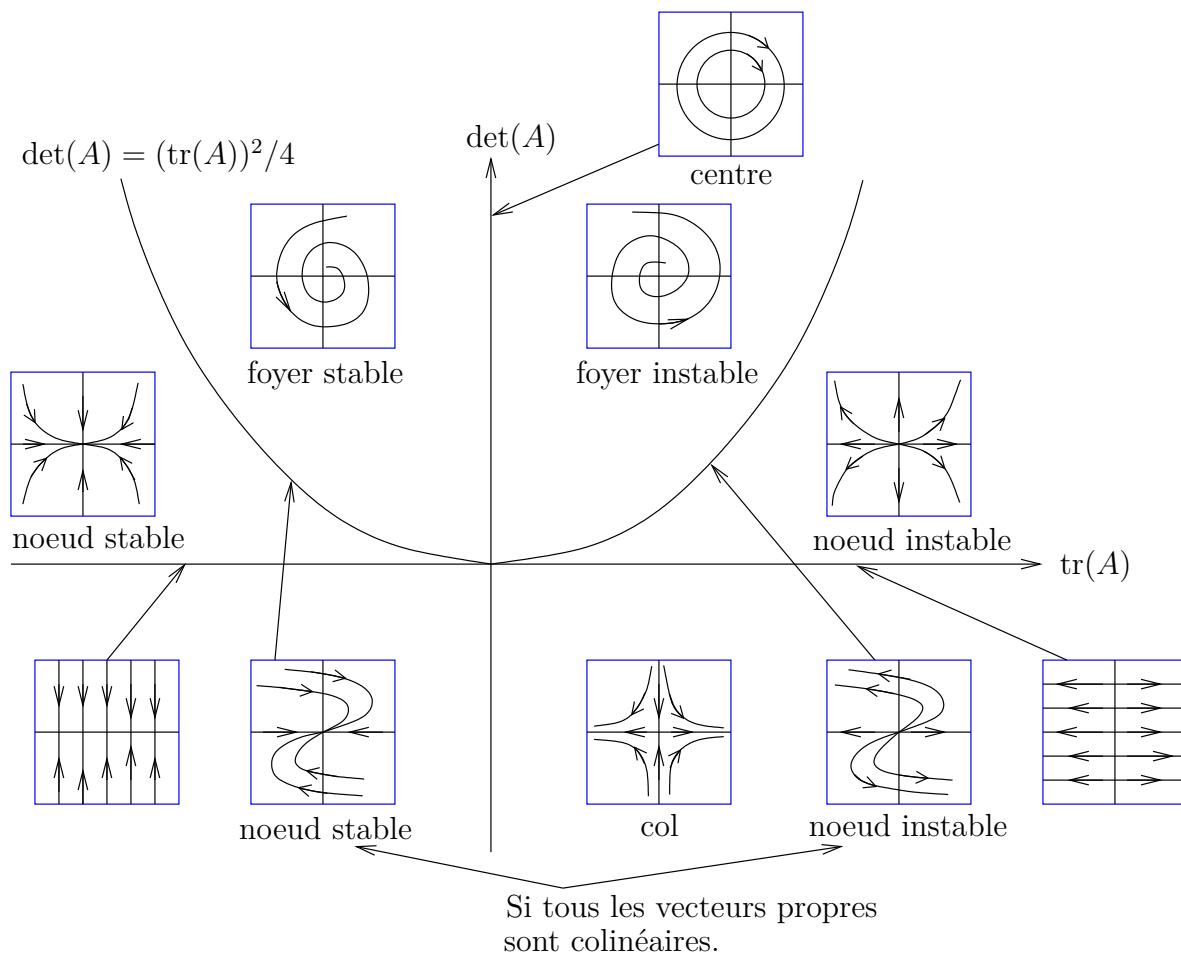


FIGURE 14.13 – Classification des portraits de phases pour le système d'équations différentielles (14.3.1).

Exemple 14.3.7

Considérons le système d'équations différentielles linéaire $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On cherche la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A a une seule valeur propre $\lambda = 2$. Un vecteur propre associé à cette valeur propre est

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tous les autres vecteurs propres associés à λ sont colinéaires au vecteur \mathbf{v} .

Il faut trouver un vecteur \mathbf{u} tel que $(A - 1\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$; c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si on résout ce système à l'aide de sa matrice augmentée, on trouve

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 e^{2t} + a_2(1+t)e^{2t} \\ -2a_1 e^{2t} - a_2(3+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -2a_1 - 3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On trouve $a_1 = 10$ et $a_2 = -8$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 10e^{2t} - 8(1+t)e^{2t} \\ -20e^{2t} + 8(3+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$



Exemple 14.3.8

Considérons le système d'équations différentielles linéaires $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède les valeurs propres et vecteurs propres complexes suivants :

valeur propre	vecteur propre
$\lambda_1 = 2 + 3i$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}^\top$
$\lambda_2 = 2 - 3i$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^\top$

On a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i \mathbf{u}_2$ où

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= a_1 e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + a_2 e^{2t} \left(\sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 \cos(3t) + a_2 \sin(3t) \\ a_1 \sin(3t) - a_2 \cos(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $a_1 = 2$ et $a_2 = -4$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) - 4 \sin(3t) \\ 2 \sin(3t) + 4 \cos(3t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Remarque 14.3.9

La matrice $\begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent est une matrice de rotation de $3t$ radians dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.



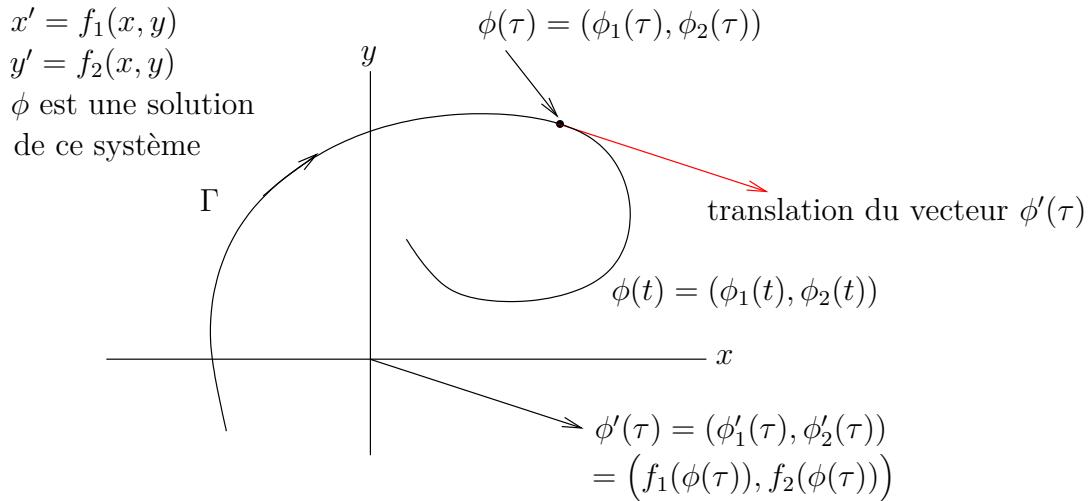


FIGURE 14.14 – La courbe Γ représente l'orbite associée à une solution ϕ du système d'équations différentielles (14.2.3). La direction de la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\tau)$ est donnée par le vecteur $\phi'(\tau)$.

14.4 Introduction à l'analyse globale

Nous allons utiliser dans les prochaines sections les concepts de point d'équilibre, stabilité et portrait de phases que nous avons introduits lors de l'étude des équations différentielles linéaires.

On considère le système d'équations différentielles (14.2.2) où f_1 et f_2 sont différentiables sur \mathbb{R}^2 . On a vu lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes que si $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe dans le plan, alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi'_1(\tau) \\ \phi'_2(\tau) \end{pmatrix}$$

est un vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$. Si, en particulier, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution de (14.2.2), alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi'_1(\tau) \\ \phi'_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \\ f_2(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \end{pmatrix} \quad (14.4.1)$$

est un vecteur parallèle à la droite tangente à l'orbite de la solution ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$ (voir figure 14.14). Donc, $f(x, y)$ est un vecteur parallèle à l'orbite qui passe par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On peut déterminer le comportement qualitatif des solutions à l'aide d'un **champ de vecteurs** \mathbf{f} associé au côté droit de (14.2.3). Pour dessiner un champ de vecteurs, on choisit

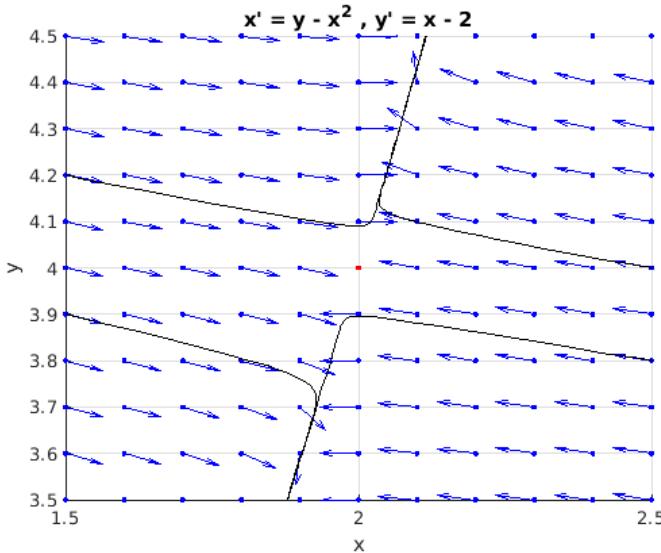


FIGURE 14.15 – Le champ de vecteurs pour le système (14.4.2) avec quelques orbites.

un ensemble de points du plan x, y (uniformément distribués) et à partir de chacun de ces points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on trace le vecteur $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$.

Exemple 14.4.1

Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y) = y - x^2 \\ y' &= f_2(x, y) = x - 2 \end{aligned} \tag{14.4.2}$$

On retrouve à la figure 14.15 le champ de vecteurs pour ce système. On y retrouve aussi les orbites qui passent par les points

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.8 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.0 \end{pmatrix}.$$

à $t = 0$. Pour mieux visualiser le champ de vecteurs, on a choisi de tracer tous les vecteurs de même longueur. Ce n'est pas le cas près du point $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ où les vecteurs sont beaucoup plus courts et indiquent une progression plus lente le long d'une orbite au voisinage de ce point. Nous verrons dans un instant que ce point, appelé un point d'équilibre, joue un rôle important dans l'étude du portrait de phases du système (14.4.2). La base des vecteurs est indiquée par un point ; le point est rouge si c'est un point d'équilibre. ♣

14.4.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système d'équations différentielles (14.2.3) jouent un rôle fondamental dans la production du portrait de phases de ce système.

Définition 14.4.2

Un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un **point d'équilibre** pour le système d'équation différentielles (14.2.3) si $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un point d'équilibre, alors $\phi(t) = \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pour tout t est une solution constante de (14.2.3).

On peut fréquemment déterminer le comportement des solutions près d'un point d'équilibre \mathbf{p} de (14.2.3) en étudiant le système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{p}) \mathbf{x} \quad (14.4.3)$$

où

$$D\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Si on développe le système précédent, on a

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2 \end{aligned}$$

Définition 14.4.3

Le système d'équations différentielles (14.4.3) est la **linéarisation du système** (14.2.3) au point d'équilibre \mathbf{p}

L'importance de l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires est une conséquence du résultat suivant.

Proposition 14.4.4

Soit (14.4.3) la linéarisation du système d'équations différentielles (14.2.3) au point d'équilibre \mathbf{p} de (14.2.3). Si les valeurs propres de la matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{p})$ ont des parties réelles non nulles, les orbites de (14.2.3) au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p} se comportent comme les orbites de (14.4.3) près de l'origine.

La meilleure façon de comprendre ce qu'est un portrait de phases est d'en dessiner un. Cependant, cela va demander beaucoup plus d'information que la seule connaissance des points d'équilibre. La prochaine section présente un ensemble de courbes qui permettent de déterminer systématiquement la direction du déplacement le long des orbites du système (14.2.3) lorsque t augmente.

14.4.2 Nullclines

Définition 14.4.5

Pour $j = 1$ ou 2 , les **nullclines** associés à la variable x_j sont les courbes définies par

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f_j(\mathbf{x}) = 0\}.$$

On obtient l'information suivante des nullclines.

L'intersection des nullclines associés à x_1 avec ceux associés à x_2 sont les points d'équilibre car si \mathbf{q} est un tel point d'intersection alors $f_1(\mathbf{q}) = f_2(\mathbf{q}) = 0$.

Les orbites qui coupent un nullcline associé à x_1 le font verticalement. Soit \mathbf{q} un point sur une des nullclines associés à x_1 et supposons que \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre. Soit ϕ la solution qui passe par le point \mathbf{q} et supposons que $\phi(t_s) = \mathbf{q}$ pour un certain $t_s \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{d\phi_1}{dt}(t_s) = f_1(\phi(t_s)) = f_1(\mathbf{q}) = 0$$

et

$$\frac{d\phi_2}{dt}(t_s) = f_2(\phi(t_s)) = f_2(\mathbf{q}) \neq 0.$$

Donc, la tangente au point \mathbf{q} de l'orbite produite par la solution ϕ est verticale car elle est parallèle à

$$\phi'(t_s) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(t_s) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t_s) \end{pmatrix}.$$

De même, **les orbites qui coupent un nullcline associé à x_2 le font horizontalement**. Soit \mathbf{q} un point sur un des nullclines associés à x_2 et supposons que \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre. Soit ϕ la solution qui passe par le point \mathbf{q} et supposons que $\phi(t_r) = \mathbf{q}$ pour un certain $t_r \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{d\phi_1}{dt}(t_r) = f_1(\phi(t_r)) = f_1(\mathbf{q}) \neq 0$$

et

$$\frac{d\phi_2}{dt}(t_r) = f_2(\phi(t_r)) = f_2(\mathbf{q}) = 0.$$

Donc, la tangente au point \mathbf{q} de l'orbite produite par la solution ϕ est horizontale car elle est parallèle à

$$\phi'(t_r) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(t_r) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(t_r) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les nullclines sont des courbes qui partagent le plan en régions dans lesquelles les vecteurs du champ de vecteurs pointent tous dans une «direction semblable». Que veut-on dire par «direction semblable»? Supposons que U soit une de ces régions et que \mathbf{p} et \mathbf{q} soient deux points dans U , alors $f_1(\mathbf{p})$ et $f_1(\mathbf{q})$ sont de même signe, et $f_2(\mathbf{p})$ et $f_2(\mathbf{q})$ sont de même signe. Les fonctions f_1 et f_2 peuvent possiblement changer de signe seulement lorsque l'on traverse les nullclines.

Exemple 14.4.6

Traçons le portrait de phase du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}x' &= y - x^2 \\y' &= x - 2\end{aligned}\tag{14.4.4}$$

La première étape est de trouver les nullclines.

Nullclines associés à x : On a $y - x^2 = 0$. Le long de la parabole $y = x^2$, les solutions vont satisfaire $\frac{dx}{dt} = 0$ et ainsi les orbites traverseront verticalement.

Nullclines associés à y : On a $x - 2 = 0$. Le long de la ligne $x = 2$, les solutions vont satisfaire $\frac{dy}{dt} = 0$ et les orbites traverseront horizontalement.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent un seul point d'équilibre $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour déterminer la direction générale du champ de vecteurs dans chacune des régions délimitées par les nullclines, il suffit de choisir un point \mathbf{q} dans cette région et de calculer $f(\mathbf{q})$. Comme on a déjà mentionné précédemment, f_1 et f_2 peuvent changer de signe seulement lorsque l'on traverse les nullclines.

La linéarisation de (14.4.4) au point \mathbf{p} est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles, $-2 + \sqrt{5} > 0$ et $-2 - \sqrt{5} < 0$. Les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à $-2 + \sqrt{5}$ et $-2 - \sqrt{5}$ respectivement.

Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p} est un col pour le système (14.4.4). Le portrait de phases est donné à la figure 14.16. ♣

Remarque 14.4.7

La proposition 14.4.4 est en fait beaucoup plus précise que l'énoncé que nous avons donné. Dans l'exemple précédent, soit Γ_1 la courbe formée des orbites qui partent du point d'équilibre \mathbf{p} et du point d'équilibre lui-même. La tangente à Γ_1 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_1 . De même, si Γ_2 est la courbe formée des orbites qui convergent vers le point d'équilibre \mathbf{p} et du point d'équilibre, alors la tangente à Γ_2 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_2 . Voir la figure 14.16. ♠

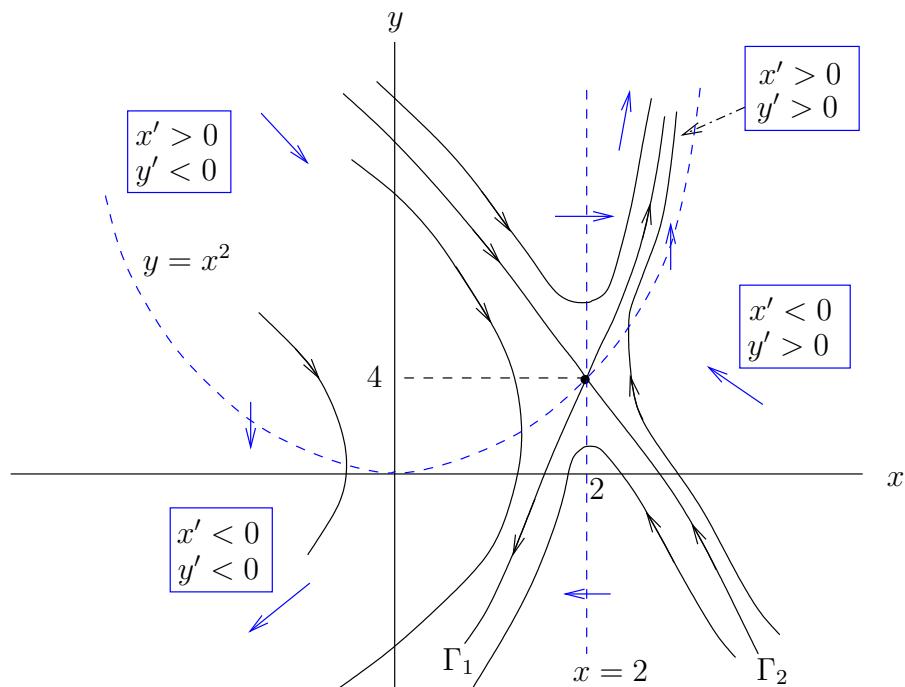


FIGURE 14.16 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (14.4.4). Les lignes hachurées sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Exemple 14.4.8

Traçons le portrait de phases du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= y - x \\ y' &= -x - x^2 - y \end{aligned} \quad (14.4.5)$$

On commence par tracer les nullclines.

Nullclines associés à x : On a $y - x = 0$. Le long de la droite $y = x$, on a que les solutions satisfont $\frac{dx}{dt} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y : On a $-x - x^2 - y = 0$. Le long de la parabole $y = -x^2 - x$, on a que les solutions satisfont $\frac{dy}{dt} = 0$ et les orbites sont horizontales.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre ;

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La linéarisation de (14.4.5) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres conjuguées : $-1 \pm i$. On a donc un foyer stable à l'origine pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_2 est un foyer stable pour le système (14.4.5).

La linéarisation de (14.4.5) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : $-1 \pm \sqrt{3}$. Puisque $-1 - \sqrt{3} < 0 < -1 + \sqrt{3}$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_1 est un col pour le système (14.4.5). Le portrait de phases est donné à la figure 14.17. ♣

Exemple 14.4.9

Le modèle compétition – exclusion présenté à l'exemple 14.1.2 se résume au système d'équations différentielles (14.1.6) ; c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x - \rho y) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(1 - y - \xi x) \end{aligned} \quad (14.4.6)$$

où on a remplacé u , v et τ dans (14.1.6) par x , y et t respectivement. Les constantes α , ρ et ξ sont positives.

Commençons par trouver les nullclines de (14.4.6).

Nullclines associés à x : On a $x(1 - x - \rho y) = 0$. Le long des droites $x = 0$ et $y = (1 - x)/\rho$, on a que les solutions satisfont $\frac{dx}{dt} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y : On a $\alpha y(1 - y - \xi x) = 0$. Le long des droites $y = 0$ et $y = 1 - \xi x$, on a que les solutions satisfont $\frac{dy}{dt} = 0$ et les orbites sont horizontales.

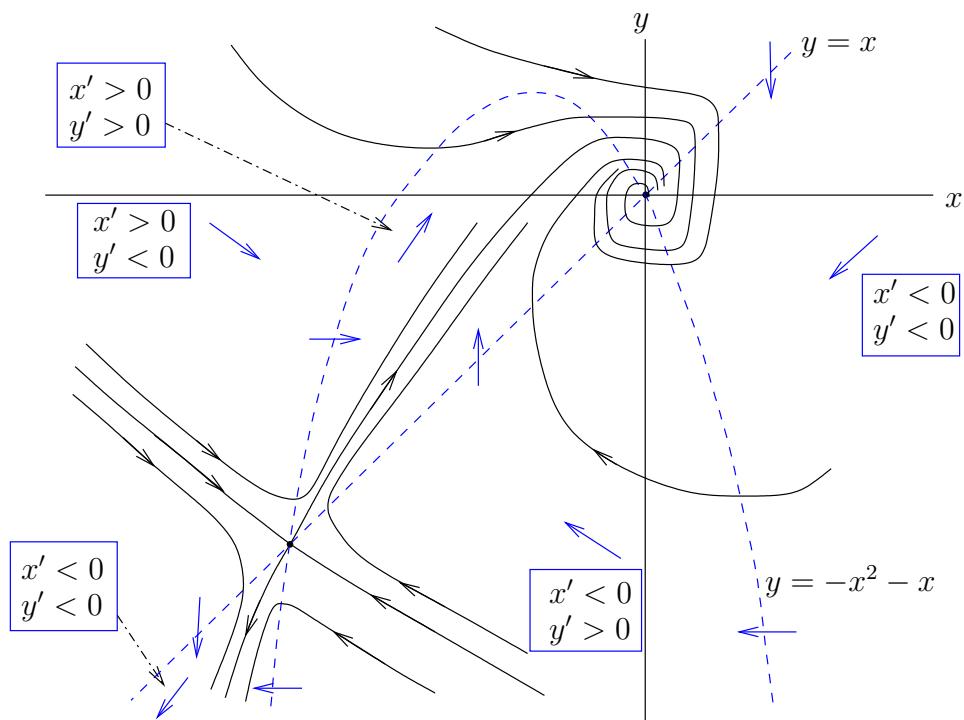


FIGURE 14.17 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (14.4.5). Les lignes hachurées sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Il y a plusieurs scénarios selon le choix des valeurs pour les paramètres α , ρ et ξ .

A) Prenons $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont alors $x = 0$ et $y = -x/2 + 1/2$, et ceux associés à y sont $y = 0$ et $y = -x/3 + 1$.

Puisque l'analyse des portraits de phases que nous ferons sera faite seulement pour x et y non-négatifs, car on ne peut pas avoir de population avec un nombre négatif d'individus, nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent trois points d'équilibre dans le premier quadrant.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour (14.4.6).

La linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : -1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un noeud stable pour le système (14.4.6).

Finalement, la linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_3 est un col pour le système (14.4.6).

Rappelons qu'une conséquence des transformations utilisées pour réduire le système d'équations différentielles (14.1.6) au système (14.4.6) est que $x(t)$ et $y(t)$ ne représentent pas le nombre d'individus de chaque espèce mais représentent une fraction du nombre maximum d'individus de chaque espèce que le milieu peut supporter.

Le portrait de phases de la figure 14.18 indique que l'espèce décrite par x va disparaître alors que l'espèce décrite par y va tendre vers 1.

B) Prenons $\rho = 1/2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont $x = 0$ et $y = -2x + 2$, et les nullclines associés à y sont $y = 0$ et $y = -x/3 + 1$.

Comme précédemment, nous tracerons le portrait de phases seulement pour x et y non-négatifs. Nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x et y donnent quatre points d'équilibre dans le premier quadrant.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

La linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour le système (14.4.6).

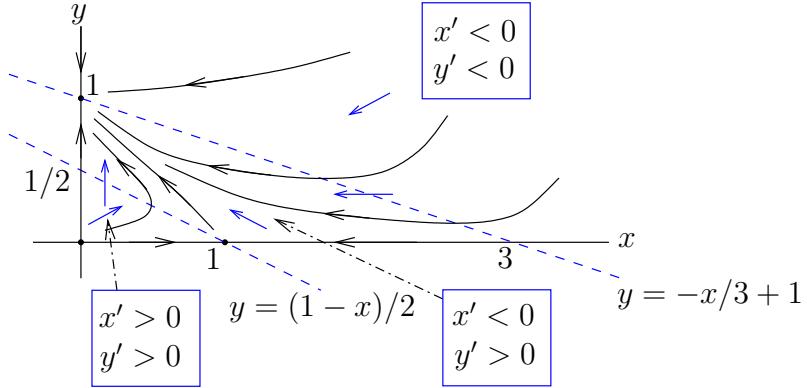


FIGURE 14.18 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (14.4.6) avec $\rho = 2$, $\xi = 1/3$ et $\alpha > 0$.

La linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_2 est un col pour le système (14.4.6).

La linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_3 est un col pour le système (14.4.6).

Finalement, la linéarisation de (14.4.6) au point \mathbf{p}_4 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -3/10 \\ -4\alpha/15 & -4\alpha/5 \end{pmatrix}$. Pour simplifier le problème, nous supposerons que $\alpha = 1$. Les valeurs propres de A sont alors $-2/5$ et -1 . L'origine est un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_4 est un noeud stable pour le système (14.4.6).

Le portrait de phases de la figure 14.19 indique que les deux espèces vont cohabiter. Ni l'une ni l'autre ne disparaîtra.



Exemple 14.4.10

[Bifurcation du type col-noeud] Étudier le comportement du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - \alpha xy) \\ y' &= y(1 - x - y) \end{aligned}$$

lorsque α est près de 4.



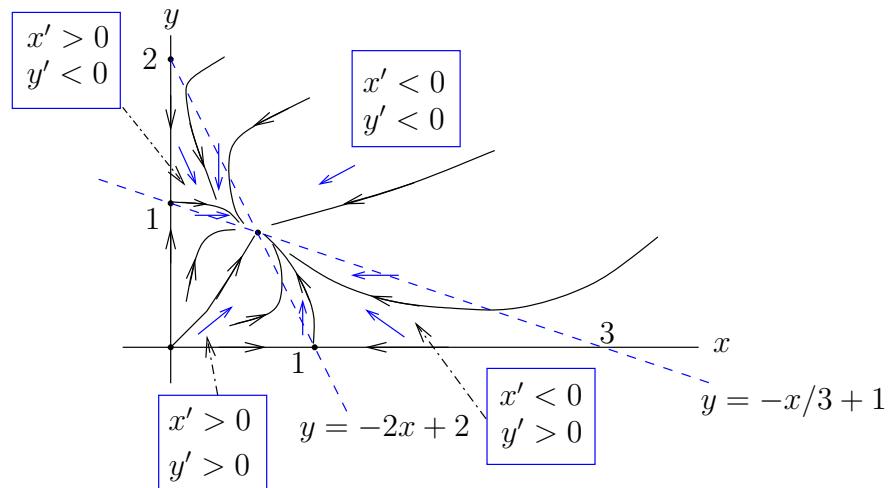


FIGURE 14.19 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (14.4.6) avec $\alpha = 1$, $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$.

14.5 Équation de Van der Pol

Jusqu'à maintenant, les solutions qui ont jouées un rôle fondamental lors de l'étude des portraits de phases ont été les points d'équilibre. Mais d'autres solutions jouent un rôle fondamental. C'est le cas des solutions périodiques que nous verrons à l'exemple qui suit.

Définition 14.5.1

Une solution ϕ d'un système d'équations différentielles

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

est une **solution périodique** s'il existe une constante T telle que $\phi(t+T) = \phi(t)$ pour tout t . La plus petite constante positive T telle que $\phi(t+T) = \phi(t)$ pour tout t est appelée la **période** de la solution. L'orbite tracée par cette solution est une **orbite fermée**.

Exemple 14.5.2

L'exemple suivant décrit un système d'équations différentielles qui possède une solution périodique.

L'équation de Van der Pol est

$$x'' + \epsilon x'(x^2 - 1) + x = 0 .$$

On peut transformer l'équation de Van der Pol en un système de deux équations différentielles

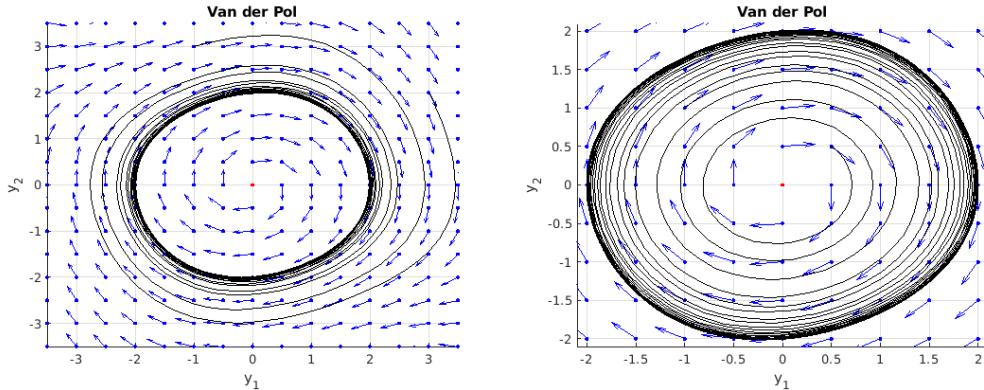


FIGURE 14.20 – Quatre orbites du système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol. Les orbites dans la figure à droite tracent des spirales vers l'extérieur alors que celles dans la figure à gauche tracent des spirales vers l'intérieur.

en posant $y_1 = x$ et $y_2 = x'$. On obtient

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -\epsilon y_2(y_1^2 - 1) - y_1 \end{aligned} \tag{14.5.1}$$

C'est un système d'équations différentielles non-linéaire. Il est généralement impossible de trouver une expression pour les fonctions y_1 et y_2 qui donnent la solution de (14.5.1). On utilise donc des méthodes numériques pour évaluer ces fonctions.

Comme aucun des coefficients de (14.5.1) ne dépend de t , il est généralement plus informatif de faire le graphe des orbites $\{(y_1(t), y_2(t)) : t \geq 0\}$ pour observer l'effet qu'une composante peut avoir sur l'autre.

la figure 14.20 contient quatre orbites de (14.5.1) où $\epsilon = 0.1$. Les quatre orbites ont respectivement les conditions initiales $(3, 2)$, $(-1, 3)$, $(-1, 1)$ et $(0.5, 0.5)$ à $t = 0$.

Il semble y avoir une solution périodique car les orbites avec les conditions initiales $(0.5, 0.5)$ et $(-1, 1)$ à $t = 0$ respectivement tracent des spirales vers l'extérieur alors que les deux autres orbites tracent des spirales vers l'intérieur. Comme les orbites ne peuvent pas se couper et qu'il n'y a pas de points d'équilibre autre que l'origine, on peut montrer à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il doit y avoir une solution périodique entre les orbites qui tracent des spirales vers l'intérieur et ceux qui tracent des spirales vers l'extérieur.

Avec la condition initiale $(1, 1)$ à $t = 0$ et une très longue période d'intégration en t , on trouve l'orbite de la figure 14.21. Comme cette orbite se rapproche de plus en plus de la solution périodique, on obtient «l'ombre» de la solution périodique qui est représenté par la courbe fermée, tracée à l'aide d'un pinceau plus épais.



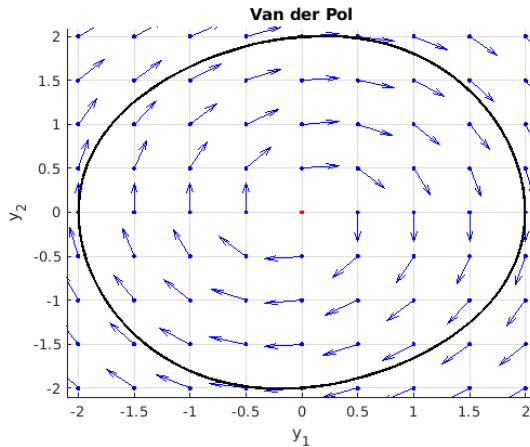


FIGURE 14.21 – L'ombre de la solution périodique pour le système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol

14.6 Système prédateurs-proies

14.6.1 Lotka-Voltera

Le modèle prédateurs-proies qui a été présenté à l'exemple 14.1.1 se résume au système d'équations différentielles (14.1.3) ; c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-y) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(x-1) \end{aligned} \quad (14.6.1)$$

où on a remplacé u , v et τ dans (14.1.3) par x , y et t respectivement. Le paramètre α est positif. Notons aussi que le changement de variable utilisé pour réduire le système (14.1.1) de Lotka-Voltera au système (14.6.1) a modifié l'ordre de grandeur de x et y . Les variables x et y ne représentent pas le nombre de proies et de prédateurs respectivement mais la fraction des populations de proies et prédateurs que le milieu peut supporter.

La première étape est de trouver les nullclines.

Nullclines associés à x : On a $x(1-y) = 0$. Le long des droites $x = 0$ et $y = 1$, on a que les solutions satisfont $\frac{dx}{dt} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y : On a $\alpha y(x-1) = 0$. Le long des droites $y = 0$ et $x = 1$, on a que les solutions satisfont $\frac{dy}{dt} = 0$ et les orbites sont horizontales.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La linéarisation de (14.6.1) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (14.6.1).

La linéarisation de (14.6.1) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\alpha > 0$, la matrice A a deux valeurs propres complexes : $\pm\alpha i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est nulles, on ne peut rien conclure (à partir du système linéarisé) au sujet du point d'équilibre \mathbf{p}_2 du système (14.6.1). Dans le portrait de phase de la figure 14.22, la stabilité du point \mathbf{p}_2 et le comportement des solutions dans le premier quadrant proviennent du fait que (14.6.1) est un **système conservateur**; c'est-à-dire que les orbites sont des courbes de niveau d'une certaine fonction que nous allons maintenant déterminer.

Commençons par remarquer que l'axe des x et l'axe des y sont des nullclines, alors les orbites dont la condition initiale est dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, une analyse détaillée du signe de x' et y' dans le premier quadrant nous permet de conclure que les orbites dans le premier quadrant font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Le système (14.6.1) peut être transformé en une équation différentielle séparable. Il suffit de diviser la deuxième équation de (14.6.1) par la première équation de (14.6.1). Puisque

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \frac{y(x-1)}{x(1-y)} .$$

Ainsi,

$$\int \frac{1-y}{y} dy = \alpha \int \frac{x-1}{x} dx .$$

Après intégration, on obtient

$$\ln(y) - y = \alpha(x - \ln(x)) + C$$

où C est une constante d'intégration. Donc, l'orbite $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ associée à la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ dans le premier quadrant est la courbe de niveau $F(x, y) = C$ où

$$F(x, y) = \ln(y) - y - \alpha(x - \ln(x))$$

et $C = F(x_0, y_0)$ ¹.

Nous tracerons les portraits de phases sur tout le plan x, y car ils sont intéressants, cependant nous ferons leur interprétation seulement pour x et y positifs car on ne peut pas avoir de population avec un nombre négatif d'individus.

1. En fait, l'argument donné permet seulement de conclure que l'orbite fait partie d'une courbe de niveau de F . Une preuve plus élaborée, qui utilise le fait qu'il n'y a pas de point d'équilibre autre que \mathbf{p}_2 dans le premier quadrant est nécessaire pour démontrer qu'une orbite est une courbe de niveau de F et vice-versa

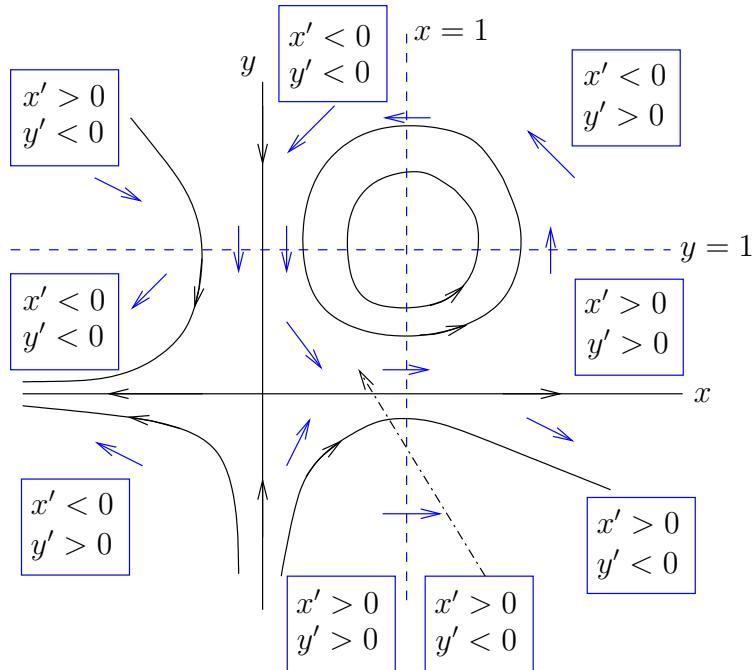


FIGURE 14.22 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (14.6.1) lorsque $\alpha > 0$.

Pour $\alpha > 0$, le portrait de phases de la figure 14.22 indique que les deux espèces ont un comportement périodique autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 . Le point \mathbf{p}_2 est un centre. Aucune des deux espèces n'est vouée à l'extinction.

Remarque 14.6.1

Même si la signification biologique est douteuse, il n'en reste pas moins que le cas $\alpha < 0$ est très intéressant du point de vue mathématique.

Si $\alpha < 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_1 . Ainsi, le point \mathbf{p}_1 (i.e. l'origine) est aussi un noeud instable pour le système (14.6.1). De plus, si $\alpha < 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_2 car la linéarisation de (14.6.1) au point \mathbf{p}_2 a les deux valeurs propres $\pm\sqrt{-\alpha}$. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un col pour le système (14.6.1).

Le portrait de phases de la figure 14.23 indique que l'une des espèces va croître sans borne supérieure alors que l'autre va disparaître. C'est la condition initiale qui détermine laquelle des populations croît sans borne supérieure et laquelle disparaît. La probabilité que les deux populations approchent le point d'équilibre \mathbf{p}_2 est presque nulle. Il faudrait que la condition initiale soit sur une des deux orbites qui approchent \mathbf{p}_2 , ce qui est improbable. ♠

14.6.2 Un meilleur modèle prédateurs-proies

Il existe deux problèmes majeurs avec le modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra.

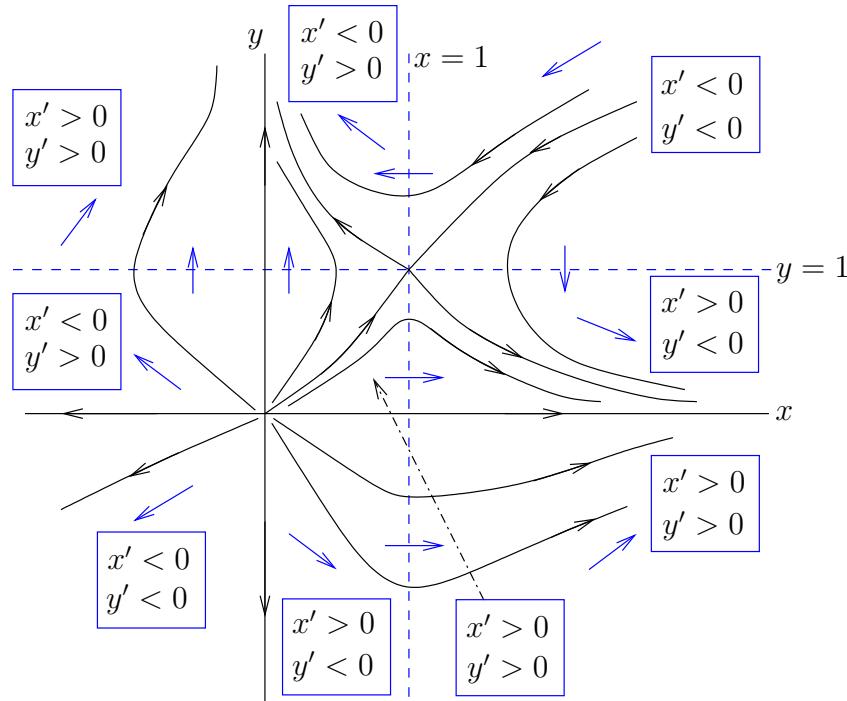


FIGURE 14.23 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (14.6.1) lorsque $\alpha < 0$

Le modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra n'est malheureusement pas un modèle «structurellement stable». Il existe une définition très rigoureuse de stabilité structurelle d'un système dynamique que nous ne donnerons pas. Nous donnerons seulement une explication intuitive de cette notion.

Supposons que l'on modifie légèrement le système (14.6.1) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - y) + 0.0001y \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(x - 1) \end{aligned} \tag{14.6.2}$$

On dit que le système (14.6.2) est une «perturbation» du système (14.6.1). Nous avons ajouté le terme $0.0001y$ au membre de droite de la première équation. Pour (x, y) près de \mathbf{p}_2 , le terme $0.0001y$ est très petit et ne devrait donc pas modifier les orbites de façon dramatique, n'est-ce pas?

On a tracé à la figure 14.24 deux orbites du système (14.6.2) avec $\alpha = 1$ pour $0 \leq t \leq 500$, une avec la condition initiale $(0.5, 1.5)$ et l'autre avec la condition initiale $(1.1, 1.2)$. Ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci. Les solutions au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p}_2 ne sont plus périodiques comme on avait avec le système (14.6.1).

On a répété l'expérience précédente pour le système (14.6.2) avec $\alpha = 0.1$. On a tracé à la figure 14.25 deux orbites du système (14.6.2) pour $0 \leq t \leq 500$, une avec la condition initiale

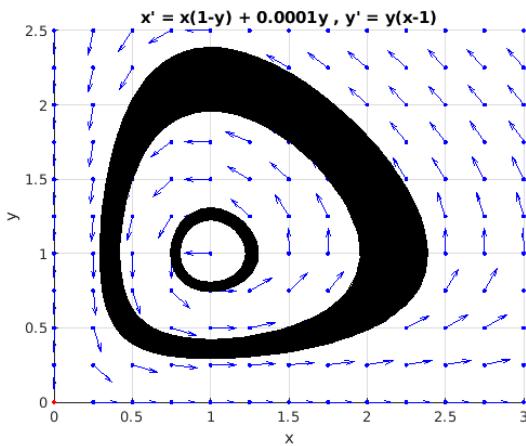


FIGURE 14.24 – Quelques orbites du système (14.6.2) obtenu du système prédateurs-proies (14.6.1) de Lotka-Volterra pour $\alpha = 1$.

(0.5, 1.5) et l'autre avec la condition initiale (1.1, 1.2). Comme dans le cas avec $\alpha = 1$, ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre p_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci.

Les orbites que l'on retrouve dans les deux dernières figures ne sont plus des solutions périodiques. Le portrait de phase a changé de façon «dramatique» en passant du système (14.6.1) au système (14.6.2). En fait, il existe des «perturbations» (aussi petites que l'on veuille) du système (14.6.1) qui produisent un portrait de phases très «différent» de celui du système (14.6.1). Pour cette raison, on dit que le système (14.6.1) n'est pas «structurellement stable».

La raison pour laquelle on exige que les systèmes d'équations différentielles que l'on utilise pour décrire des phénomènes biologiques, physiques, et autres soient structurellement stables est que ces systèmes sont seulement des approximations (que l'on espère très bonnes) des systèmes d'équations différentielles qui décrivent réellement les phénomènes étudiés. Si on utilise un système d'équations différentielles qui est structurellement stable, on peut espérer que son portrait de phases est qualitativement identique à celui du système qui décrit réellement le phénomène.

Un autre problème avec le système de Lotka-Volterra est qu'il n'existe pas une multitude de solutions périodiques. Il n'existe généralement qu'une seule solution périodique qui décrit l'équilibre entre les proies et les prédateurs. À la longue, le nombre y de prédateurs et le nombre x de proies vont tendre vers cet équilibre périodique quel que soit le nombre initial y_0 de prédateurs et le nombre initial x_0 de proies. En termes mathématiques, si la condition initiale (x_0, y_0) n'est pas sur cette unique solution périodique, l'orbite qui passe par (x_0, y_0) va «tendre» vers la solution périodique.

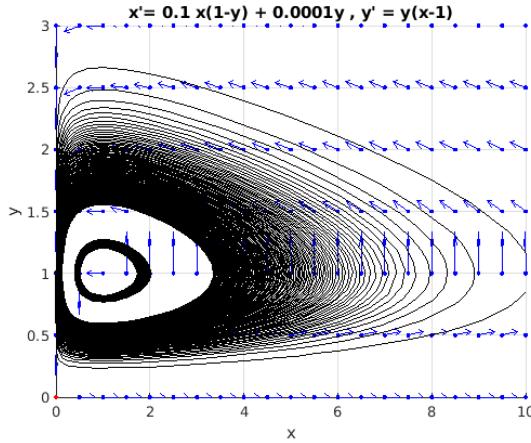


FIGURE 14.25 – Quelques orbites du système (14.6.2) obtenu du système prédateurs-proies (14.6.1) de Lotka et Volterra pour $\alpha = 0.1$.

On remplace le système (14.1.1) par un système de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= qf(p, q) \\ \frac{dp}{dt} &= pg(p, q) \end{aligned} \quad (14.6.3)$$

où $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

En s'inspirant du modèle logistique pour décrire une seule population animale dont la survie dépend des ressources du milieu, on déduit que la fonction f pourrait contenir un terme de la forme

$$a \left(1 - \frac{q}{Q} \right)$$

où a est le taux de croissance relatif de la population de proies lorsque qu'il n'y a pas le limite supérieur au nombre de proie que le milieu peut supporter, et Q est le nombre maximal de proies que le milieu peut supporter. De plus la fonction f pourrait contenir une terme de la forme $-ph(q)$ pour une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on déterminera dans quelques instants. On suppose que

$$f(p, q) = a \left(1 - \frac{q}{Q} \right) - ph(q) .$$

Le terme $-qph(q)$ que l'on a ajouté dans la première équation en (14.6.3) représente l'impact des prédateurs sur la croissance de la population de proies.

De plus, on suppose que la fonction g est de la forme

$$g(p, q) = b \left(1 - \frac{kp}{q} \right)$$

où b et k sont des constantes positives. La population de prédateurs augmente lorsque $q > kp$; le nombre de proies est k fois supérieur au nombre de prédateurs.

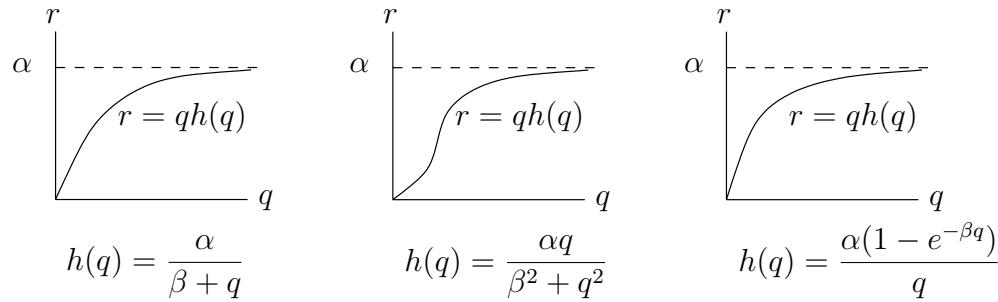


FIGURE 14.26 – Modèles possibles pour décrire le phénomène de saturation chez les prédateurs.

La fonction h doit tenir compte de l'effet de saturation chez les prédateurs. Ceux-ci ne peuvent pas maintenir un niveau de chasse constant quand la population de proies devient très grande (chaque prédateur a probablement un territoire qu'il protège contre l'intrusion d'autres prédateurs, il faut donner le temps aux prédateurs de se reproduire, ...)

Il y a plusieurs choix possibles pour h . Pour le système (14.1.1) de Lotka-Volterra, la fonction h est constante. Le terme $-bqp$ que l'on retrouve dans la première équation en (14.1.1) indique que le nombre de proies capturées par un prédateur dépend linéairement du nombre de proies et cela sans aucune borne supérieure sur le nombre de proies. On sait que ce n'est pas réaliste.

Les fonctions h les plus souvent utilisées sont

$$h(q) = \frac{\alpha}{q + \beta}, \quad h(q) = \frac{\alpha q}{q^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad h(q) = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta q})}{q}.$$

Voir la figure 14.26. Dans ces trois cas, on a que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} qh(q) = \alpha.$$

Le nombre de proies qu'un prédateur peut attraper est bornée par α .

Si on utilise la fonction $h(q) = \alpha/(\beta + q)$, on obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= q \left(a \left(1 - \frac{q}{Q} \right) - \frac{\alpha p}{\beta + q} \right) \\ \frac{dp}{dt} &= bp \left(1 - \frac{kp}{q} \right) \end{aligned} \tag{14.6.4}$$

On peut éliminer au moins trois paramètres du système précédent. Posons

$$u = \frac{q}{Q}, \quad v = \frac{kp}{Q} \quad \text{et} \quad \tau = bt.$$

Avec ces substitutions, le système précédent devient

$$\frac{du}{d\tau} = u \left(\frac{a}{b} (1 - u) - \frac{\frac{\alpha}{kb} v}{\frac{\beta}{Q} + u} \right)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = v \left(1 - \frac{v}{u} \right) .$$

Si on pose

$$A = \frac{a}{b}, \quad B = \frac{\alpha}{kb} \quad \text{et} \quad C = \frac{\beta}{Q},$$

on obtient le système

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u \left(A(1-u) - \frac{Bv}{C+u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{aligned} \quad (14.6.5)$$

Commençons par trouver les nullclines de (14.6.5).

Nullclines associés à u : On a

$$0 = u \left(A(1-u) - \frac{Bv}{C+u} \right) = \frac{u}{C+u} (A(1-u)(C+u) - Bv) .$$

Le long de la droite $u = 0$ (l'axe des v) et le long de la parabole $v = \frac{A}{B}(1-u)(C+u)$, on a que les solutions satisfont $\frac{du}{d\tau} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à v : On a

$$0 = v \left(1 - \frac{v}{u} \right) .$$

Le long des droites $v = 0$ (l'axe des u) et $u = v$, on a que les solutions satisfont $\frac{dv}{dt} = 0$ et les orbites sont horizontales.

En fait l'axe des v n'est pas vraiment un nullcline car l'équation différentielle

$$\frac{dv}{d\tau} = v \left(1 - \frac{v}{u} \right)$$

n'est pas définie pour $u = 0$. De même, l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\tau} = u \left(A(1-u) - \frac{Bv}{C+u} \right)$$

n'est pas définie pour $u = -C$. Cependant, on peut ignorer ce problème car $C > 0$ et on considère seulement $u > 0$.

Afin de simplifier la discussion, nous allons assumer que $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$. Le choix de ces valeurs n'est pas arbitraire. Ces valeurs ont été choisies pour obtenir une seule solution périodique vers laquelle les autres solutions «convergent». Nous avons donc le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u \left(5(1-u) - \frac{10v}{0.03+u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{aligned} \quad (14.6.6)$$

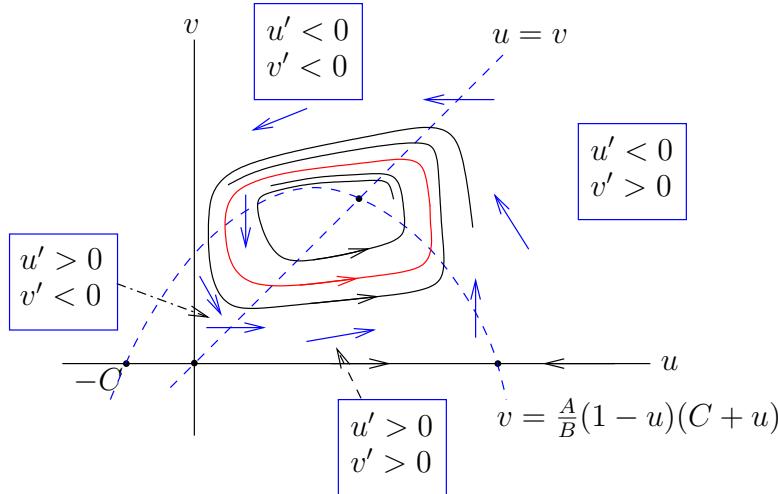


FIGURE 14.27 – Le portrait de phases du système (14.6.5) pour $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$ ressemble (i.e. est qualitativement équivalent) à celui dans la figure ci-dessus. La solution périodique est en rouge.

L'intersection des nullclines associés à u avec ceux associés à v donnent deux points d'équilibre pour $u > 0$ et $v \geq 0$.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{p}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.028346114 \\ 0.028346114 \end{pmatrix} .$$

Le point d'équilibre \mathbf{p}_2 provient de la solution positive de l'équation quadratique $2u^2 - 0.04u - 0.06 = 0$ que l'on obtient de l'intersection des nullclines $v = u$ et $v = \frac{A}{B}(1-u)(C+u) = 2(1-u)(0.03+u)$.

Avant de déterminer la stabilité des points d'équilibre, on trace les nullclines et analyse en détail le signe de x' et y' dans les quatre régions du premier quadrant qui sont découpées par les nullclines. Les résultats se retrouvent à la figure 14.27. On remarque en particulier que les orbites qui débutent dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, ces orbites font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Le côté droit du système (14.6.6) est

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u \left(5(1-u) - \frac{10v}{0.03+u} \right) \\ v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{pmatrix} .$$

Puisque

$$\mathbf{D} F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{du} & \frac{dF_1}{dv} \\ \frac{dF_2}{du} & \frac{dF_2}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-2u) - \frac{0.3v}{(0.03+u)^2} & -\frac{10u}{0.03+u} \\ \frac{v^2}{u^2} & 1 - \frac{2v}{u} \end{pmatrix} ,$$

la linéarisation de (14.6.6) au point \mathbf{p}_1 est

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{10}{1.03} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $1 > 0$ et $-5 < 0$. On a donc un col pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (14.6.5).

La linéarisation de (14.6.6) au point \mathbf{p}_2 est

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1 - 2\hat{u}) - \frac{0.3\hat{u}}{(0.03 + \hat{u})^2} & -\frac{10\hat{u}}{0.03 + \hat{u}} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où $\hat{u} \approx 0.028346114$. Donc,

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.218547616 & -4.858269396 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont approximativement $0.559133 \pm 1.506156i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est positive, \mathbf{p}_2 est un foyer instable. Les orbites qui débutent près de \mathbf{p}_2 s'éloignent de ce point. On pourrait montrer à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il doit exister au moins une solution périodique qui entoure le point \mathbf{p}_2 .

On retrouve à la figure 14.28 le dessin de quelques orbites qui tendent vers une solution périodique. Les conditions initiales utilisées dans la figure sont $(u, v) = (0.05; 0.05)$, $(0.2; 0.03)$, $(0.5, 0.3)$ et $(0.8, 0.35)$ avec $0 \leq \tau \leq 200$. Comme on peut observer, la convergence vers la solution périodique est très rapide.

14.7 Exercices

Question 14.1

Dessinez le portrait de phase du système d'équations différentielles linéaires $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ et trouvez la solution avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si

$$\mathbf{a}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 14.2

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants :

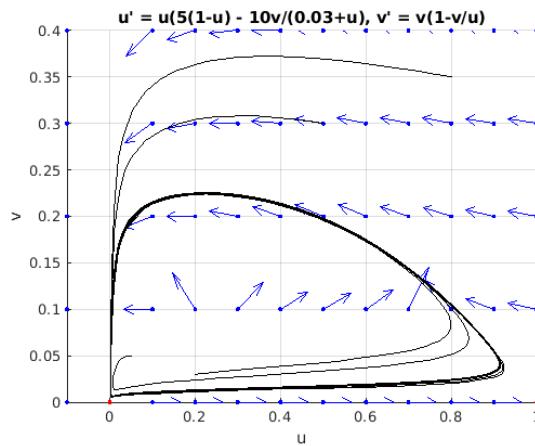


FIGURE 14.28 – Si $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$ dans le système prédateurs-proies donné en (14.6.5), les orbites tendent vers une solution périodique représentant l'équilibre périodique entre les populations de prédateurs et de proies.

- i: Trouvez les nulclines.
- ii: Trouvez le point d'équilibre.
- iii: Déterminez si possible le type de ce point d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles.
- iv: Tracez le portrait de phases.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dx}{dt} &= 4x + y + 25 \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 2y + 15 \end{aligned}$$

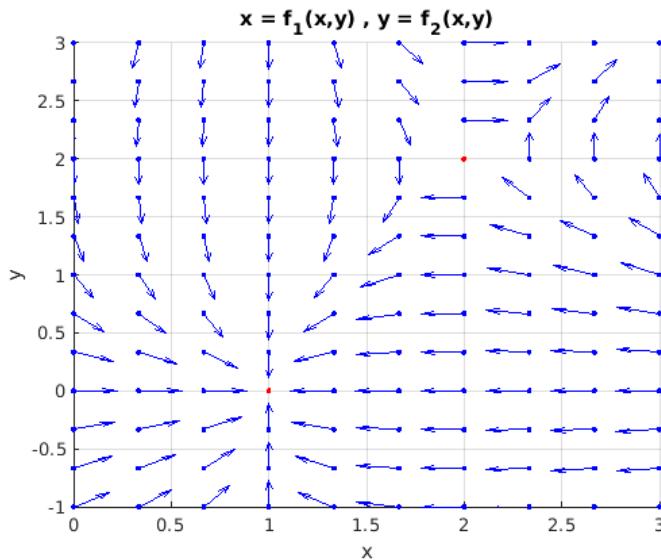
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{dx}{dt} &= 3x + 2y - 2 \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - y - 1 \end{aligned}$$

Question 14.3

Le système d'équation différentielles

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

possède le portrait de phase suivant.



Il y a deux points d'équilibre marqués par des points en rouge. Déterminez le type de chacun des points d'équilibre.

Question 14.4

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants :

- Trouvez les nulclines.
- Trouvez les points d'équilibre.
- Déterminez si possible le type de chacun des points d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles.
- Tracez le portrait de phases.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dx}{dt} &= \left(1 - x - \frac{y}{2}\right)x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{dx}{dt} &= (1 - x - 2y)x \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - 2x - y)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{dx}{dt} &= 20 - 5xy - 5x \\ \frac{dy}{dt} &= 5xy - 10y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{dx}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)y \end{aligned}$$

Question 14.5

Le système d'équation différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x)(x-0.5) - \frac{1}{8}xy \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + xy \end{aligned} \tag{14.7.1}$$

décrit un système prédateur-proies où x est la fraction des proies que le milieu peut supporter et y est la fraction des prédateurs que le milieu peut supporter.

- a) Donnez un sens biologique à chacun des termes de ce système.
- b) Quel est le seuil de survie des proies lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ?
- c) Trouvez les points d'équilibre et les nullclines.
- d) Pour quelles valeurs de d aurons-nous un état d'équilibre stable où les prédateurs et proies peuvent coexister.
- e) Tracez le portrait de phases dans le cas où $d = 0.9$.
- f) Tracez dans le portrait de phases en (e), la solutions qui possède la condition initiale $(1.3, 1)$.
- g) Tracez approximativement le graphe de chacune des composantes de la solution en (f) (i.e. x et y) en fonction du temps.

Bibliographie

- [1] F. R. Adler, **Modeling the Dynamics of Life : Calculus and Probability for Life Scientists**, Brooks/Cole, 2005.
- [2] D. Betounes, **Partial Differential Equations for Computational Science**, Springer-Verlag, 1998.
- [3] R. L. Borelli et C. S. Coleman, **Differential Equations, a Modeling Perspective**, Wiley, 1998.
- [4] L. Carroll, **Alice's Adventures in Wonderland**,
- [5] G. B. Folland, **Sdvanced Calculus**, Prentice Hall, 2002
- [6] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum et T. an Roode, **Mathemtical Modelling : A Case Studies Approach**, AMS, 2005.
- [7] S. Lipschutz, **Linear Alegebra**, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.
- [8] J. E. Marsden and A. J. Tromba, **Vector Calculus, 2nd edition**, W. H. Freedman and Company, 1981.
- [9] J. D. Murray, **Mathematical Biology, 1 : An Introduction, 3th edition**, Springer-Verlag, 2002.
- [10] C. Newhouser, **Calculus for Biology and Medecine 2nd Edition**, Prentice Hall, 2004
- [11] B. Noble and J. W. Daniel, **Applied Linear Algebra**, 3rd edition, Prentice-Hall, 1988.
- [12] M. Olinick, **An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences**, Addison-Wesley, 1978
- [13] D. A. Roff, **The Evolution of Life Histories**, Chapman and Hall, 1992

Index

- Élément neutre, 8, 9
Équation différentielle
 point d'équilibre
 asymptotiquement stable, 458
Équation de Van der Pol, 721
Équation de réaction diffusion, 495
Équation de réaction diffusion, 493
Équation différentielle, 443
 autonome, 455
 bien posée, 479
 modèle logistique, 461
 orbite d'une solution, 456
 point d'équilibre, 456
 stable, 458
 point d'équilibre
 instable, 458
 portrait de phases, 456
 séparable, 445
Équation logistique, 243

Application linéaire, 622
Approximation linéaire, 203, 204, 681
Approximation quadratique, 204
Arccosinus, 31
Arcsinus, 31
Arctangente, 32
Asymptote horizontale, 99
Asymptote verticale, 102, 104

Borne d'intégration, 316

Centre de masse, 419–421
Chaîne de Markov, 581
Champ de pentes, 449
Changement de variable, 286, 334
Comportement asymptotique à l'infini, 211
Comportement asymptotique à l'origine, 213
Comportement asymptotique semblable
 à l'infinité, 108

 au voisinage d'un point, 108
Condition initiale, 446
Coordonnées polaires, 609
Cosécante, 20
Cosinus, 17
Cotangente, 19
Courbe de niveaux, 628
Courbure, 176

Dérivée d'ordre supérieur, 178
Dérivée d'une fonction, 126, 681
Dérivée d'une fonction à un point, 120
Dérivée directionnelle, 658
Dérivée partielle, 646
 d'ordre supérieur, 648
Dérivée partielle en un point, 646
Dérivée seconde, 178
Déterminant, 559, 560
Distribution normale, 338
Droite sécante, 117
Droite tangent, 119

Ensemble convexe, 669
Ensemble fermé, 635
Ensemble ouvert, 634
Erreur absolue, 480
Erreur de troncature, 359, 363, 369, 671
Erreur relative, 480
espace propre généralisé, 580

Factoriel, 64
Famille de courbes, 476
Famille de courbes orthogonales, 476
Fonction, 1
 bornée, 315
 composition, 5
 concave, 176
 concave vers le bas, 176
 concave vers le haut, 176

- convexe, 176
Croissante, 113
Décroissante, 113
de plusieurs variables, 621
domaine, 4, 621
extension, 8
graphe, 2, 625
image, 3, 621
injective, 11
inverse, 10
Maximum absolu, 114
Maximum global, 114
Maximum local, 113
Minimum absolu, 114
Minimum global, 114
Minimum local, 113
Strictement croissante, 113
surjective, 12
variable dépendante, 2
variable indépendante, 2
Fonction affine, 626
Fonction continue
 en un point, 90, 93, 638, 639
 sur un intervalle, 92
Fonction continue par morceaux, 315
Fonction de classe C^k , 648, 683
Fonction exponentielle, 35
Fonction identité, 9
Fonction linéaire, 622
Fonction logarithmique, 36
Fonctions hyperboliques, 74
Fonctions sinusoïdales, 28
 amplitude, 28
 moyenne, 28
 période, 28
 phase, 28
Formule de l'angle double pour la tangente, 299
formule du binôme, 71
Formules d'addition en trigonométrie, 23
Formules de l'angle double, 25, 289
Frontière d'un ensemble, 635
Gradient, 660
Infimum, 187
Intégrable au sens de Riemann, 329
Intégrale définie, 316
Intégrale impropre
 convergence, 341, 346
 divergence, 341, 346
 pour une fonction non-bornée, 346
 sur un domaine non-borné, 341
Intégrale indéfinie, 282
Intégrande, 282, 316
Intégration par parties, 294
Intérêt
 Composé k fois par année, 426
 Composé annuellement, 425
 Composé de façon continue, 426
Intervalle d'intégration, 316
Inverse additif, 8
Inverse multiplicatif, 9
Limite d'une fonction, 81
 à droite, 82
 à gauche, 82
 à l'infini, 98, 105
 en un point, 85, 636
Limite infinie à l'infini, 107
Limite infinie d'une fonction, 101, 105
 à droite, 103
 à gauche, 103
Lois de Hooke, 407
Méthode d'élimination de Gauss, 552
Méthode de bisection, 230
Méthode de Lagrange, 678, 680
Méthode de Newton, 226
Méthode de Simpson, 369
Méthode des trapèzes, 363
Méthode du point milieu, 359
Masse, 404
Matrice, 541
 élément, 541
 augmentée, 552
 carrée, 541
 composante, 541
 diagonale d'une matrice, 549
 identité, 549
 inverse additif, 549

- inverse multiplicatif, 550
- inversible, 550
- matrices égales, 541
- produit de deux matrices, 544
- produit par un scalaire, 542
- somme de deux matrices, 542
- Trace, 548
- transposée, 543
- triangulaire inférieure, 564
- triangulaire supérieure, 564
- Matrice de Markov, 581
- Moment par rapport à l'axe des x , 420, 421
- Moment par rapport à l'axe des y , 420
- Moment par rapport à l'axe des y , 421
- Multiplicateur de Lagrange, 677
- Nombre complexe, 568
 - conjugué, 569
 - partie imaginaire, 568
 - partie réelle, 568
 - valeur absolue, 569
- Nombre d'Euler, 71
- Non-dimensionalisation, 690
- Norme euclidienne, 631
- Ordre d'une équation différentielle, 444
- Période, 21
- Période d'une fonction, 26
- Permutation, 560
 - signe, 561
- Point critique, 176, 672
- Point d'inflexion, 178
- Polynôme caractéristique, 568
- Polynôme de Taylor, 204, 671
- Primitive, 281
- Procédure de Markov, 581
- Projection orthogonale, 527, 530
- règle de dérivée du quotient, 148
- Règle de l'Hospital, 216
- Règle de la main droite, 508
- Règle de substitution, 286, 334
- Règle des valeurs marginales, 195, 196
- Racine d'une fonction, 226
- Représentation paramétrique d'une courbe, 592
- Représentation paramétrique d'une droite, 510
- Représentation paramétrique d'une surface, 656
- Représentation paramétrique du plan, 519
- Représentation standard d'un plan, 516
- Représentation standard d'une droite, 511
- Représentation vectorielle d'une droite, 510
- Représentation vectorielle du plan, 518
- Sécante, 20
- Série, 54
 - alternée, 66
 - convergence, 54
 - convergence absolue, 70
 - convergence conditionnelle, 70
 - divergence, 54
 - géométrique, 55
 - harmonique, 55
 - Somme partielle, 54
 - télescopique, 59
 - termes, 54
- Section Verticale, 630
- Sinus, 17
- Solution, 443
- Somme à droite, 313
- Somme à Gauche, 312
- Somme de Riemann, 316
- Somme de Riemann pour le point milieu, 317
- Somme inférieure, 329
- Somme supérieure, 329
- Suite, 43
 - bornée, 47
 - bornée inférieurement, 47
 - bornée supérieurement, 47
 - convergence, 44, 633
 - convergence à l'infini, 48
 - convergence dans \mathbb{R}^n , 633
 - croissante, 47
 - décroissante, 47
 - limite, 44, 633
 - terme, 43
- suite
 - convergence dans \mathbb{R}^n , 567

- Supremum, 187
Surplus du consommateur, 430
Surplus du producteur, 430
Système conservateur, 724
Système d'équations différentielles linéaire
 centre, 707
 col, 707
 foyer instable, 707
 foyer stable, 707
 noeud instable, 707
 noeud stable, 707
Système d'équations différentielles
 champ de vecteurs, 711
 orbite fermée, 721
 solution périodique, 721
Système d'équations différentielles, 698
 autonome, 699
 condition initiale, 700
 linéaire, 702
 nullcline, 714
 orbite, 701
 période, 721
 point d'équilibre, 713
 solution, 699
Système de Lotka-Volterra, 689
Système dynamique discret
 solution périodique, 253
Système dynamique discret, 232
 état d'équilibre, 240
 condition initiale, 232
 fonction génératrice, 232
 fonction itérative, 232
 graphe en forme de toile d'araignée, 236
 orbite périodique, 253
 orbite d'une solution, 235
 période d'une orbite, 253
 point périodique, 253
 point d'équilibre, 240
 asymptotique stabilité, 240
 instable, 240
 point fixe, 240
 portrait de phase, 236
 solution, 232
 solution périodique
asymptotique stabilité, 255
Tangent, 19
Taux de croissance absolu, 461
Taux de croissance relatif, 121, 441, 461
Taux de variation instantané, 117
Taux de variation moyen, 115
Test de l'intégrale, 431
Théorème de la moyenne, 131
Théorème de la moyenne de Cauchy, 217
Théorème de la moyenne pour l'intégrale, 386
Théorème de Taylor, 204, 671
Théorème des accroissement finis, 131
Théorème des gendarmes, 46, 88
Théorème des valeurs extrêmes, 187, 641
Théorème des valeurs intermédiaires, 97
Théorème fondamental du calcul, 331
Théorème fondamental du calcul, deuxième version, 337
Théorème sandwich, 46, 88
Transposition, 560
Travail, 405
Valeur future, 427, 428
Valeur moyenne, 385
Valeur présente, 427, 429
Valeur propre, 567
 multiplicité algébrique, 575
 multiplicité géométrique, 575
Valeur propre généralisée, 575
Variable aléatoire, 338
Variable d'intégration, 282, 316
Vecteur, 499
 canonique, 504
 longueur, 499
 orthogonal, 505
 orthogonal à un plan, 516
 perpendiculaire, 505
 perpendiculaire à un plan, 516
 produit avec un nombre réel, 501
 produit scalaire, 504
 produit vectoriel, 508
 somme de vecteurs, 502
Vecteur propre, 567
Voisinage, 634

Voisinage trouvé, 634

Zéro d'une fonction, 226