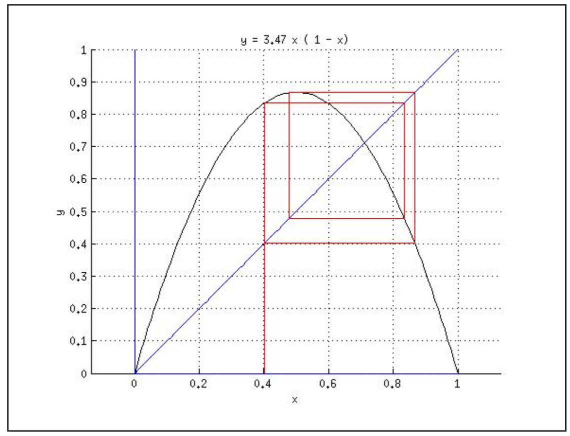
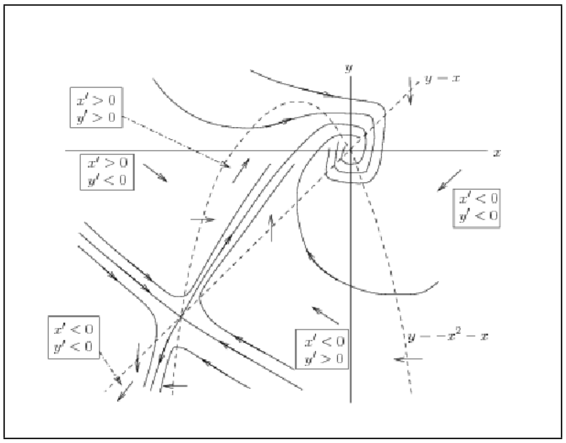




Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I

2021 édition

Benoit Dionne
Université d'Ottawa

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Avant-propos

Les notes de cours que vous avez en main représente un ouvrage inachevé, qui est en constante évolution. Il ne faut donc pas être surpris d'y retrouver des fautes d'orthographe, des coquilles, etc. Les corrections seront apportées au cours du temps suite au commentaires des lecteurs. L'auteur prend entière responsabilité pour les erreurs ; comment pourrait-il faire autrement ?

Le contenu du premier chapitre est principalement une révision des principaux sujets normalement enseignés au secondaire. Certains sujet seront convers en plus grande profondeur qu'au secondaire.

Les chapitres 2 et 3 contiennent du matériel présenté au secondaire mais aussi plusieurs sujets qui ne sont pas abordé au secondaire. La matière des cours de calcul différentiel et intégral au niveau universitaire débute avec certaines sections de ces chapitres selon le cours de calcul différentiel et intégral auquel vous êtes inscrit.

Ces notes peuvent être utilisées pour trois des variantes des cours de calcul différentiel et intégral qui sont offertes à l'Université d'Ottawa.

— **Calcul différentiel et intégral (pour les étudiants en génie)** : Les items marqués par le symbole 🔧 sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1720 et MAT1722.
— **Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie** Les items marqués par le symbole 🌲 sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1730 et MAT1732.
— **Méthodes mathématiques I (pour les étudiants en administration)** : Les items marqués par le symbole 📈 sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent le cour MAT1700.

Les items qui n'ont aucun de ces symboles sont requis pour les trois variantes des cours de calcul différentiel et intégral.

Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie

Comme les principaux utilisateurs de ces notes sont les étudiants dans les cours de Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie, nous offrons un aperçu du cours.

Le but principal du premier cours (MAT1730) est de développer les outils nécessaires pour l'étude des «systèmes dynamiques discrets». Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés entre autre pour décrire certaines caractéristiques des populations animales mesurées à intervalles réguliers. Le deuxième cours (MAT1732) présente certains outils mathématiques pour l'étude des «systèmes dynamiques». Les systèmes dynamiques sont des systèmes d'équations différentielles ; c'est-à-dire, des équations qui contiennent une fonction inconnue et sa dérivée. Ces systèmes sont utilisés pour modéliser les réactions chimiques, la croissance des individus, le mouvement des populations, etc.

Avertissement : Les modèles mathématiques utilisés dans les questions pour le cours de calcul pour les sciences de la vie ne représentent pas toujours des situations réelles. Pour obtenir des modèles mathématiques qui soient intéressants et utilisent la théorie présentée dans les notes, tout en étant accessibles pour le niveau du cours, nous avons dû créer des modèles qui ne sont pas basés sur des données scientifiques. Nous avons quand même essayé d'avoir des modèles qui soient qualitativement valables.

Théorie

Les items marqués par le symbole 👁 sont spécifiquement pour les étudiants intéressés à la théorie et la rigueur en mathématique. Plusieurs de ces items demandent une connaissance de la notion de « démonstration » que la majorité des étudiants n'auront probablement pas vu au secondaire. Ces items sont généralement optionnel. Ils sont pour les étudiants curieux qui voudrait en savoir plus sur les méthodes enseignées en classe. On espère que certains étudiants seront intéressés par la rigueur mathématiques et voudront poursuive cette direction dans leur études.

Il y a plusieurs mentions du nombre d'Euler e. On donne plusieurs façons équivalentes de le définir. On mentionne indirectement le lien entre le nombre e et les fonctions trigonométriques, donc le nombre π, lors d'une des démonstrations de la règle d'addition pour les fonctions sin et cos. On espère que les étudiants seront fascinés par le fait que les nombres e et π sont reliés.

Notation

Définition
Les ensembles suivants seront fréquemment utilisés dans le présent document.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels.
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels positifs.
3. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers.
4. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels ; c'est-à-dire, les nombres de la forme n/m où $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
5. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

En français, la virgule est utilisée pour séparer la partie entière de la partie décimale d'un nombre et on utilise un espace pour séparer les multiples de 10^3. Ainsi,

$$105\ 456\ 263,456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000} \, .$$

Cependant, dans le présent document, nous utiliserons la notation anglaise. Le point sépare la partie entière de la partie décimale d'un nombre et la virgule sépare les multiples de 10^3. On écrit donc

$$105,456,263.456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000} \, .$$

La raison principale de ce choix est que la grande majorité des données utilisées dans ce document proviennent de documents en anglais qui utilisent cette notation. De plus, les logiciels sont tous en anglais et utilisent aussi cette notation. Pour être consistent, on a donc choisi d'utiliser la notation anglaise.

Remerciements

J'aimerais remercier Yves Bourgault et Wadii Hajji, deux collègues de travail, dont les suggestions ont améliorées la présentation de la matière.

De plus, j'aimerais remercier Paméla Touchette-Giroux pour son excellent travail de révision des textes pour la première édition de ces notes. Il n'en reste pas moins que je prends toute la responsabilité pour les fautes que l'on peut trouver dans le texte.

 [1]

Fonction 1

Ce chapitre présente les objets fondamentaux sur lesquels nous allons travailler dans les prochains chapitres. Ces objets sont les fonctions. Les principales propriétés des fonctions sont aussi définies dans ce chapitre. On termine le chapitre avec une introduction à quelques unes des fonctions de base : les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques. Les fonctions exponentielles sont définies de façon intuitive dans ce chapitre. Elles sont revues de façon rigoureuse dans le chapitre suivant.

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définiton 1.1.1
Une **fonction** f est une opération d'un ensemble X à un ensemble Y qui, à chaque élément de X, associe un seul élément de Y. On écrit $f : X \to Y$ pour désigner une fonction f de X dans Y.

Exemple 1.1.2
À la figure 1.1, on définit à l'aide d'un diagramme une fonction f d'un ensemble X de pays à un ensemble Y de villes. La fonction f donne la capitale du pays. À chacun des pays de X est associé une unique capitale dans Y.

Il n'est pas nécessaire que toutes les villes de Y soient des capitales de pays. Par exemple, Toronto n'est pas la capitale d'un pays mais d'une province.

On écrit

$$f(\text{Canada}) = \text{Ottawa} \quad , \quad f(\text{Angleterre}) = \text{Londres} \quad , \quad \text{etc.}$$

♣

Exemple 1.1.3
Le tableau suivant définit une fonction g qui, à chaque nombre entier plus grand que 1 (ligne du haut), associe les diviseurs premiers de ce nombre entier (ligne du bas).

x	2	3	$\ldots$	6	$\ldots$	27	$\ldots$	1372455084	$\ldots$
$g(x)$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\ldots$	$\{2,3\}$	$\ldots$	$\{3\}$	$\ldots$	$\{2,3,7,11,13,17,47\}$	$\ldots$

1. L'entête de chaque chapitre est accompagné d'une image. Ces images sont quelques unes des illustrations produites par Tenniel pour la version originale du livre **Alice's Adventures in Wonderland** par Lewis Carroll

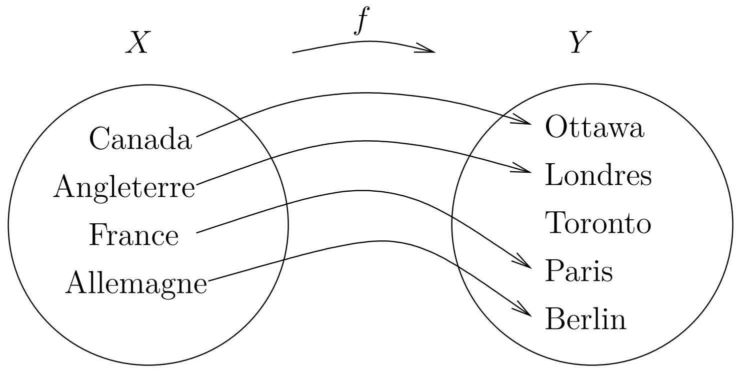


FIGURE 1.1 – Définition d'une fonction f à l'aide d'un diagramme

La fonction g est donc une fonction qui va de l'ensemble X des nombres entiers plus grand que 1 à l'ensemble Y des ensembles de nombres premiers.

On écrit

$$g(2) = \{2\} \quad , \ldots , \quad g(1372455084) = \{2, 3, 7, 11, 13, 17, 47\} \quad , \ldots$$

♣

Exemple 1.1.4
La fonction h qui suit est définie à l'aide d'une expression algébrique.

$$h(x) = x^3 - 2x + 1 \ .$$

La fonction h est définie pour $x \in X = \mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) et $h(x) \in Y = \mathbb{R}$. On dit alors que h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on écrit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On écrit

$$h(1) = 0 \quad , \quad h(2) = 5 \quad , h(\pi) = 12.26706787812110\ldots \quad , \quad \ldots$$

Pour la valeur $h(\pi)$, les points de suspension après le dernier 0 indiquent qu'il y a une infinité de chiffres qui suivent.

Dans l'expression

$$y = h(x) = x^3 - 2x + 1 \ ,$$

la variable x est appelée la **variable indépendante** et la variable y est appelée la **variable dépendante** car elle dépend de x. ♣

Définiton 1.1.5
Si f est une fonction qui va d'un ensemble X à un ensemble Y, on définit le **graphe de la fonction** f comme étant l'ensemble

$$\text{graphe de } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \ .$$

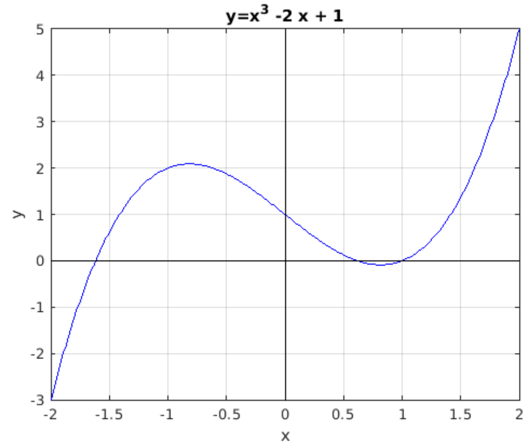


FIGURE 1.2 – Graphe de $y = h(x) = x^3 - 2x + 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

Pour une fonction qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il est plus fréquent de représenter le graphe de cette fonction par la courbe du plan cartésien qui est tracée par l'ensemble des points du graphe. Le graphe est donc un sous-ensemble du plan cartésien.

Exemple 1.1.6
On retrouve à la figure 1.2, la représentation dans le plan cartésien du graphe de la fonction h définie à l'exemple 1.1.4. ♣

1.2 Image et domaine d'une fonction

Définiton 1.2.1
L'**image** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble des éléments $y \in Y$ pour lesquelles il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On écrit :

$$\text{Im}\ f \equiv \{y \in Y : f(x) = y \quad \text{pour au moins un élément} \quad x \in X\} \ .$$

Exemple 1.2.2
Pour l'exemple 1.1.2, l'image de f est l'ensemble

$$\text{Im}\ f = \{\text{Berlin, Londres, Paris, Ottawa}\} \ .$$

♣

Remarque 1.2.3
Pour l'exemple 1.1.3, on ne connaît pas tous les éléments de l'image de g et il n'existe pas de formule pour les générer. ♠

Exemple 1.2.4
Pour l'exemple 1.1.4, l'image de h est l'ensemble des nombres réels comme on peut le voir à

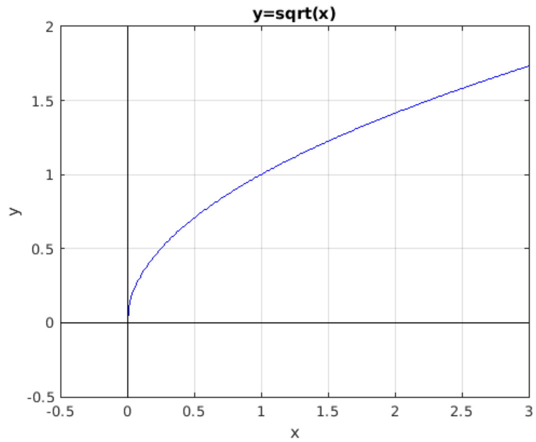


FIGURE 1.3 – Graphe de $y = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 3$

partir du graphe de h à la figure 1.2. On écrit :

$$\text{Im } h = \mathbb{R} \ .$$

♣

Définiton 1.2.5
Le **domaine** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble X sur lequel la fonction f est définie. On écrit :

$$\text{Dom } f = X \ .$$

Exemple 1.2.6
Pour l'exemple 1.1.2, la fonction f est définie pour tous les pays de l'ensemble X. Donc, le domaine de f est l'ensemble X au complet.

$$\text{Dom } f = X = \{\text{Allemagne, Angleterre, Canada, France}\} \ .$$

♣

Exemple 1.2.7
On peut facilement voir que la fonction h de l'exemple 1.1.4 est définie pour tous les nombres réels. Donc, le domaine de h est $\mathbb{R}$. ♣

Exemple 1.2.8
Le graphe de la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est donné à la figure 1.3. On voit que

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \ .$$

♣

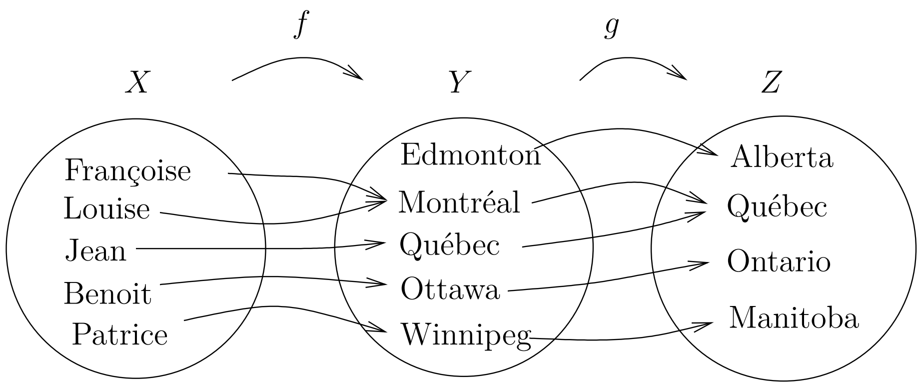


FIGURE 1.4 – Définition des fonctions f et g pour l'exemple 1.3.2

1.3 Composition de fonctions

Définiton 1.3.1
Si f est une fonction qui va de l'ensemble X à l'ensemble Y et g est une fonction qui va de l'ensemble Y à l'ensemble Z, on peut définir une nouvelle fonction $g \circ f$ qui va aller de l'ensemble X à l'ensemble Z en posant

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$$

pour tous les éléments x dans l'ensemble X. La nouvelle fonction $g \circ f$ est appelée la **composition** des fonctions f et g.

Exemple 1.3.2
On définit deux fonctions à la figure 1.4. La fonction f donne la ville où demeure chacune des personnes de l'ensemble X et la fonction g donne la province où se situe chacune des villes de l'ensemble Y. La composition $g \circ f$ est donc la fonction qui donne la province où demeure chacune des personnes de l'ensemble X. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\text{Françoise}) &= g(f(\text{Françoise})) = g(\text{Montréal}) = \text{Québec} ,\\ (g \circ f)(\text{Patrice}) &= g(f(\text{Patrice})) = g(\text{Winnipeg}) = \text{Manitoba} ,\\ &\dots\end{aligned}$$

♣

Exemple 1.3.3
Soit F la fonction qui donne pour chaque personne sa mère biologique et soit M la fonction qui donne pour chaque personne son père biologique.

La composition des fonctions F et M, dénotée $F \circ M$, est la fonction qui donne pour chaque personne la mère biologique du père biologique de cette personne (une des grand-mères de la personne). Rappelons que dans la composition $F \circ M$, la fonction M est exécutée en premier

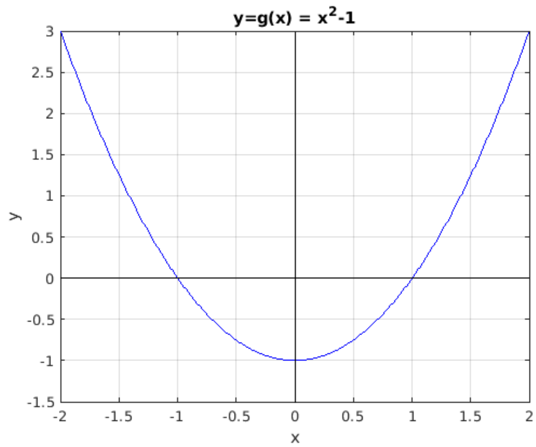


FIGURE 1.5 – Graphe de $y = g(x) = x^2 - 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$

et la fonction F en second. La fonction M donne le père biologique de la personne donnée initialement. Puis, la fonction F avec comme argument le père biologique de la personne donnée initialement donne la mère biologique de ce père.

Quel est le résultat de la composition $F \circ M \circ F$? ♣

Exemple 1.3.4
Regardons un exemple de fonctions dont le domaine et l'image font parties des nombres réels. Plus précisément, considérons les fonctions $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 3x - 2$. Ainsi,

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 3 = 9x^2 - 12x + 7$$

et

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2 + 3) = 3(x^2 + 3) - 2 = 3x^2 + 7 \ .$$

On voit que ces compositions donnent bien des fonctions différentes du produit fg qui est

$$(fg)(x) \equiv f(x)g(x) = (x^2 + 3)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 \ .$$

♣

Exemple 1.3.5
On peut composer les fonctions $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = \sqrt{x}$ pour obtenir de nouvelles fonctions. Le graphe de g se retrouve à la figure 1.5. On a que le domaine de g est $\mathbb{R}$ et l'image de g est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$. De plus, le domaine de h est $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et l'image de h est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Pour définir la composition $h \circ g$, il faut avoir

$$\text{Im}\ g \subset \text{Dom}\ h \ . \tag{1.3.1}$$

Ce qui n'est pas le cas présentement. On doit donc restreindre g à l'ensemble des x tels que $x^2 - 1 \geq 0$ (c'est à dire, $|x| \geq 1$) pour satisfaire (1.3.1). Ainsi, si on restreint g à l'ensemble

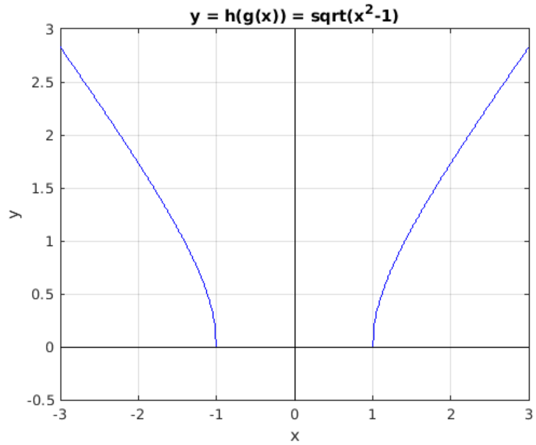


FIGURE 1.6 – Graphe de $y = h(g(x)) = \sqrt{x^2-1}$ pour $1 \leq |x| \leq 3$

$\{x : |x| \geq 1\}$ on a

$$\text{Im } g = \{x : x \geq 0\} = \text{Dom } h \tag{1.3.2}$$

et la composition $h \circ g$ est définie par

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2-1) = \sqrt{x^2-1}\ , \quad |x| \geq 1\ .$$

Il découle de (1.3.2) que l'image de $h \circ g$ est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$, l'image de h. Le graphe de $h \circ g$ se trouve à la figure 1.6. Le domaine de $h \circ g$ est $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ et l'image de $h \circ g$ est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Puisque

$$\text{Im } h = \{y | y \geq 0\} \subset \mathbb{R} = \text{Dom } g\ ,$$

La fonction $g \circ h$ est définie par

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 = x - 1\ ,\ x \geq 0\ .$$

Le domaine de $g \circ h$ est déterminé par le domaine de la racine carrée. Puisque h peut atteindre toutes les valeurs réelles plus grandes ou égales à zéro, on a que l'image de $g \circ h$ est l'image de g. On a donc

$$\text{Dom } g \circ h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } g \circ h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}\ .$$

Le graphe de $g \circ h$ se trouve à la figure 1.7. ♣

Remarque 1.3.6

Il serait tentant de dire que $(g \circ h)(x) = x - 1$ pour tout x mais cela est vrai seulement si $x \geq 0$ car la fonction h n'est pas définie pour les nombres négatifs et on ne peut donc pas définir $g(h(x))$ pour $x < 0$; l'expression $(\sqrt{x})^2 - 1$ n'est pas définie pour $x < 0$.

La fonction $f(x) = x - 1$ n'est pas la fonction $g \circ h$. Il est vrai que $(g \circ h)(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$ mais f est définie pour toutes les valeurs réelles de x alors que $g \circ h$ ne l'est pas.

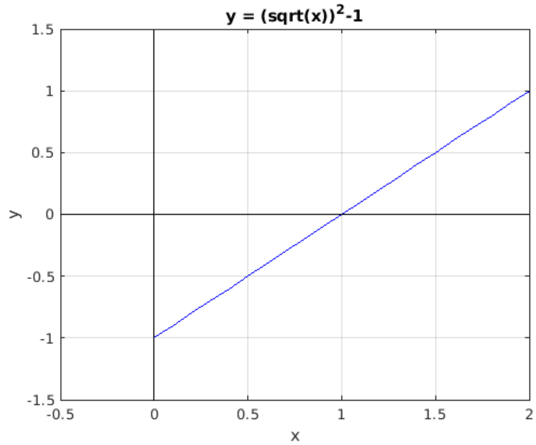


FIGURE 1.7 – Graphe de $y = g(h(x)) = x - 1$ pour $0 \leq x \leq 2$

On dit que f est une **extension** de la fonction $g \circ h$. Il ne faut donc pas utiliser l'extension d'une fonction pour déterminer le domaine et l'image de celle ci car cela peut conduire à des erreurs. Dans le cas présent, on a

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } f = \mathbb{R}\ ,$$

ce qui est différent du domaine et de l'image de $g \circ h$. ♠

1.4 Fonctions inverses (réciproques)

Commençons par revoir la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, cela nous sera utile pour bien comprendre ce qu'est l'inverse d'une fonction.

1.4.1 Inverse additif d'un nombre réel

Le nombre 0 est **l'élément neutre** pour l'addition ; c'est le nombre y tel que $y + x = x + y = x$ pour tout nombre réel x.

Exemple 1.4.1
On a $5 + 0 = 0 + 5 = 5$, $\frac{27}{4} + 0 = 0 + \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$ et $\pi + 0 = 0 + \pi = \pi$. ♣

On définit **l'inverse additif** d'un nombre réel x comme le nombre réel z tel que $x + z = z + x = 0$.

Exemple 1.4.2
L'inverse additif de 5 est -5 car $5 + (-5) = 0$. De même, l'inverse additif de π est $-\pi$ car $\pi + (-\pi) = 0$. ♣

1.4.2 Inverse multiplicatif d'un nombre réel

Le nombre 1 est **l'élément neutre** pour la multiplication ; c'est le nombre y tel que $y \times x = x \times y = x$ pour tout nombre réel x.

Exemple 1.4.3
On a $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$, $\frac{27}{4} \times 1 = 1 \times \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$ et $\pi \times 1 = 1 \times \pi = \pi$. ♣

On définit **l'inverse multiplicatif** d'un nombre réel $x \neq 0$ comme le nombre réel z tel que $x \times z = z \times x = 1$.

Exemple 1.4.4
L'inverse multiplicatif de 5 est 0.2 car $5 \times 0.2 = 0.2 \times 5 = 1$. De même, l'inverse multiplicatif de π est $\pi^{-1} = 0.318309886\ldots$ car $\pi \times \pi^{-1} = \pi^{-1} \times \pi = 1$. ♣

Remarque 1.4.5
Le nombre 0 n'a pas d'inverse multiplicatif car il n'existe pas de nombre réel y tel que $0 \times y = 1$. ♠

1.4.3 Inverse (réciproque) d'une fonction

Avant de définir l'inverse d'une fonction, il faut bien comprendre que l'opération pour laquelle on veut définir un inverse n'est pas l'addition ou la multiplication de fonctions mais la composition de fonctions.

L'addition et la multiplication de fonctions sont en fait des opérations sur les éléments de l'image des fonctions (à valeurs réelles). La composition de fonctions est indépendante des opérations d'addition et de multiplication des fonctions.

Comme on l'a fait pour l'inverse additif et l'inverse multiplicatif, il faut définir l'élément neutre de la composition de fonctions.

Définiton 1.4.6
La fonction qui joue le rôle **d'élément neutre** pour la composition de fonctions est la **fonction identité** , dénotée I, qui est définie par $\mathrm{I}(z) = z$ pour tout élément z du domaine. Pour chaque élément z du domaine, la fonction identité redonne cet élément z.

Si f est une fonction d'un ensemble X dans un ensemble Y, on peut facilement voir que

$$f \circ \mathrm{I} = f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I} \circ f = f\ .$$

C'est à dire, $(f \circ \mathrm{I})(x) = f(\mathrm{I}(x)) = f(x)$ et $(\mathrm{I} \circ f)(x) = \mathrm{I}(f(x)) = f(x)$ pour tout x.

On remarque la similarité avec la propriété de l'élément neutre pour l'addition (i.e. $0+x = x+0 = x$ pour tout x) et de l'élément neutre pour la multiplication (i.e. $1 \times x = x \times 1 = x$ pour tout x).

Exemple 1.4.7
La fonction I, qui à une personne redonne cette même personne, est l'élément neutre pour

la composition de fonctions qui agissent sur les personnes comme les fonctions F et M de l'exemple 1.3.3.

Par exemple, on a $\mathrm{I} \circ F = F$ car F donne pour chaque personne sa mère biologique et par la suite I redonne cette mère. ♣

Exemple 1.4.8
Pour la composition de fonctions dont le domaine et l'image sont des sous-ensembles des nombres réels, l'élément neutre I est la fonction qui à chaque nombre réel x redonne le nombre réel x. Ainsi, si $p(x) = x^2 + 5x$, on a que $\mathrm{I} \circ p = p \circ \mathrm{I} = p$ car $(\mathrm{I} \circ p)(x) = \mathrm{I}(p(x)) = p(x)$ et $(p \circ \mathrm{I})(x) = p(\mathrm{I}(x)) = p(x)$ pour tout nombre réel x. ♣

En s'inspirant de la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, on définit l'inverse pour la composition de fonctions.

Définiton 1.4.9
L'inverse d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction g qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$f \circ g = \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{I} \, ,$$

C'est-à-dire, $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$ et $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$. On dénote par f^{-1} la fonction g qui est l'inverse de f.

On suppose ici que l'image de f est Y.

Cette définition est équivalente à l'énoncé suivant qui est souvent utilisé comme définition de l'inverse d'une fonction.

Définiton 1.4.10
L'inverse de la fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction f^{-1} qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{si et seulement si} \qquad y = f(x) \, .$$

En effet, si $y = f(x)$ alors $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et si $x = f^{-1}(y)$ alors $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ par définition de l'inverse d'une fonction.

Exemple 1.4.11
On retrouve à la figure 1.8 la définition d'une fonction f qui à chaque pays dans X assigne sa capitale dans Y. La fonction inverse f^{-1} est donc la fonction qui, à chaque capitale dans Y, assigne le pays dont elle est la capitale dans X.

La fonction f^{-1} est définie à la figure 1.8 par les flèches formées de tirets. ♣

Exemple 1.4.12
Vérifions que l'inverse de la fonction $f(x) = x/3 + 1$ est la fonction $g(x) = 3x - 3$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 3 = x = \mathrm{I}(x)$$

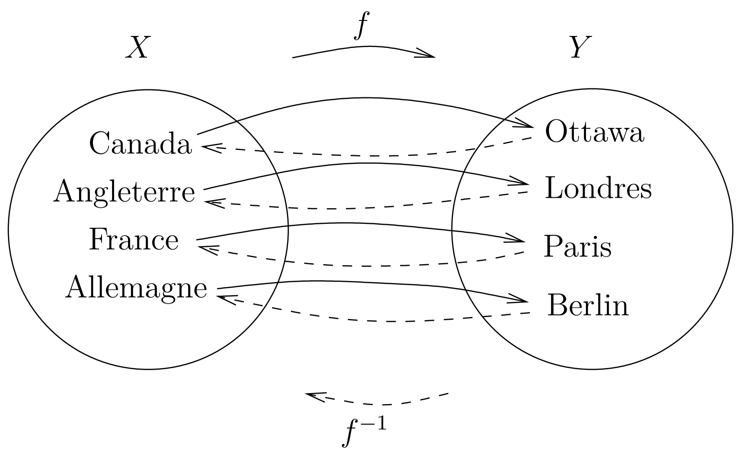


FIGURE 1.8 – Définition des fonctions f et f^{-1} de l'exemple 1.4.11

pour tout x. De même, on peut vérifier que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \mathrm{I}(x)$ pour tout x.

Ainsi, pour $f(x) = x/3 + 1$, on obtient $f^{-1}(x) = 3x + 3$. ♣

On a vu que 0 n'avait pas d'inverse multiplicatif mais que tous les autres nombres réels avaient un inverse multiplicatif. La situation est encore plus complexe pour les fonctions car elles n'ont pas toutes un inverse.

Exemple 1.4.13
Par exemple, la fonction F de l'exemple 1.3.3 qui donne pour chaque personne sa mère biologique n'a pas d'inverse. Si on donne une mère, alors on ne peut pas déterminer uniquement la personne pour qui elle est la mère sauf si cette mère a eu un seul enfant. ♣

Remarque 1.4.14
En Ontario, on utilise très fréquemment l'expression **la réciproque d'une fonction** pour désigner l'inverse d'une fonction. Ce n'est pas le cas dans tous les pays de la francophonie. Les anglophones utilisent l'inverse d'une fonction. ♠

1.4.4 Comment déterminer si une fonction a un inverse

Pour déterminer si une fonction f (en tant que fonction de son domaine à son image) a un inverse il faut vérifier que pour chaque élément y de son image il existe un seul et unique élément x du domaine de f tel que la fonction f évaluée à x donne y (i.e. $f(x) = y$). On donne un nom spéciale aux fonctions qui possèdent cette propriété.

> **Définiton 1.4.15**
> Une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est **injective** si $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$.

Exemple 1.4.16
Une fonction f est définie par le diagramme de la figure 1.9. On peut voir que cette fonction

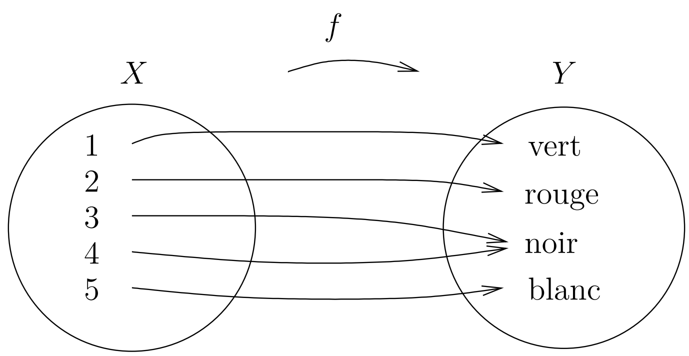


FIGURE 1.9 – Définition d'une fonction f qui n'a pas d'inverse. Cette fonction est discutée à l'exemple 1.4.16

n'a pas d'inverse car les nombres 3 et 4 donnent tous les deux la couleur noir. On ne peut donc pas définir une fonction inverse de Y dans X pour f ; quelle serait alors la valeur assignée à la couleur noir ? ♣

Il y a plusieurs façons de vérifier si une fonction est injective ; c'est-à-dire que pour chaque valeur y dans l'image d'une fonction f il existe une seule valeur x dans le domaine de cette fonction f qui satisfasse $f(x) = y$.

Une autre notion important dans le contexte générale de l'étude des fonctions est la notion suivante.

Définiton 1.4.17
Une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est **surjective** si, pour tout $y \in Y$, il existe au moins un $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

En d'autres mot, une fonction $f : X \to Y$ est surjective si $\text{Im}\ f = Y$; tous les éléments de Y sont dans l'image de la fonction. Ce concept jouera un rôle secondaire dans notre recherche de fonctions inverses car nous considérerons seulement les fonctions $f : X \to Y$ avec $Y = \text{Im}\ f$.

Méthode algébrique

On illustre cette méthode à l'aide d'un exemple.

Exemple 1.4.18
Considérons la fonction $f(x) = x/3 + 1$ que l'on a vu précédemment. On suppose que x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Le but est de montrer que $x_1 = x_2$ et que l'on avait en fait évalué la fonction f au même point pour obtenir y.

Si on développe $f(x_1) = f(x_2)$, on trouve $x_1/3 + 1 = x_2/3 + 1$. Si on soustrait 1 de chaque côté de l'égalité, on trouve $x_1/3 = x_2/3$. Si on multiplie par 3 des deux cotés de cette nouvelle

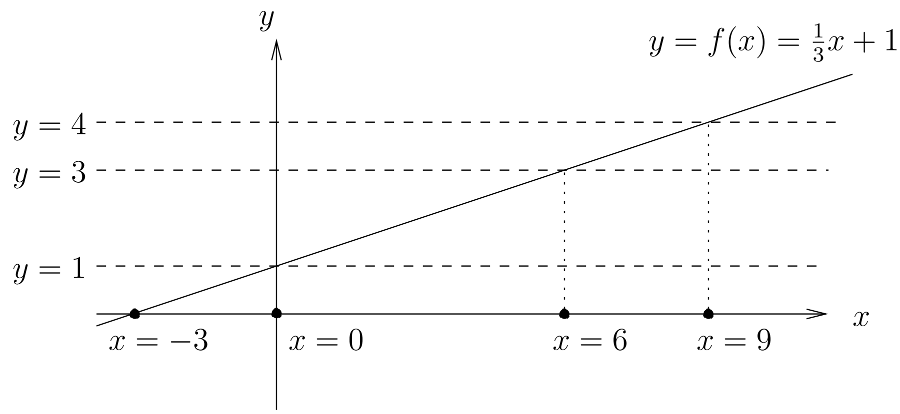


FIGURE 1.10 – On retrouve sur cette figure le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et de quelques droites horizontales

égalité, on trouve $x_1 = x_2$, ce que l'on voulait démontrer. ♣

Exemple 1.4.19

Est-ce que la fonction $f(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$ a un inverse sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$, son domaine ?

Montrons que f est injective. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{1+3x_1}{5-2x_1} = \frac{1+3x_2}{5-2x_2} \\ &\Leftrightarrow (1+3x_1)(5-2x_2) = (1+3x_2)(5-2x_1) \\ &\Leftrightarrow 5 + 15x_1 - 2x_2 - 6x_1x_2 = 5 + 15x_2 - 2x_1 - 6x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow 15x_1 - 2x_2 = 15x_2 - 2x_1 \\ &\Leftrightarrow 17x_1 = 17x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \ . \end{aligned}$$

♣

Test de la droite horizontale

Cette fois-ci, on utilise le graphe de la fonction f et on vérifie que chaque droite horizontale (i.e. y est constant) coupe le graphe de la fonction f en un seul point. L'abscisse x de ce point est la seule valeur du domaine de f telle que $f(x) = y$.

Exemple 1.4.20

À la figure 1.10, on a tracé le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et quelques droites horizontales pour nous convaincre que chaque droite horizontale coupe le graphe de la fonction en un seul point. ♣

1.4.5 Comment trouver l'inverse d'une fonction

Après avoir vérifié qu'une fonction est injective et donc qu'un inverse existe, on peut chercher son inverse.

Méthode algébrique

Si $y = f(x)$, il faut résoudre pour x en fonction de y. L'exemple suivant va illustrer cette méthode.

Exemple 1.4.21
Dans le cas simple de la fonction $f(x) = x/3 + 1$, on pose $y = f(x) = x/3 + 1$ et on résout pour x. On soustrait 1 de chaque côté de l'égalité précédente pour obtenir $y - 1 = x/3$. Puis on multiplie les deux côtés de cette nouvelle égalité par 3 pour obtenir $x = 3y - 3$. Donc, $x = f^{-1}(y) = 3y - 3$.

La tradition veut que l'on utilise y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante. On échange donc x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = 3x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$. ♣

Exemple 1.4.22
Même si f est donnée par un simple polynôme, il n'est pas toujours possible de trouver une expression algébrique pour l'inverse de f.

Par exemple, soit $f(x) = x^6 + x^2 + 3$. Il est facile de tracer le graphe de f et de remarquer que f satisfait le test de la droite horizontale. On est donc certain que l'inverse de f existe.

Cependant, on ne peut résoudre l'équation $y = x^6 + x^2 + 3$ pour x en fonction de y afin d'obtenir $x = f^{-1}(y)$. En fait, il a été démontré par Evariste Galois, un mathématicien français du 18^e siècle, qu'il n'existe pas de formule générale pour trouver les racines d'un polynôme de degré plus grand que quatre comme c'est le cas pour les polynômes de degré deux. ♣

Exemple 1.4.23
À l'exemple 1.4.19, on a montré que la fonction $f(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$ était injective. Il existe donc un inverse de f en tant que fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$. On va trouver cet inverse.

Puisque

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{1+3x}{5-2x} &\Leftrightarrow y(5-2x) = 1+3x \Leftrightarrow 5y - 2xy = 1 + 3x \\ &\Leftrightarrow 5y - 1 = 2xy + 3x = (2y+3)x \Leftrightarrow x = \frac{5y-1}{2y+3} , \end{aligned}$$

on a $x = f^{-1}(y) = \dfrac{5y-1}{2y+3}$. Comme la tradition veut que l'on utilise y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante. On échange x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = \dfrac{5x-1}{2x+3}$. La fonction f^{-1} a comme domaine l'image de la fonction f qui est $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$. ♣

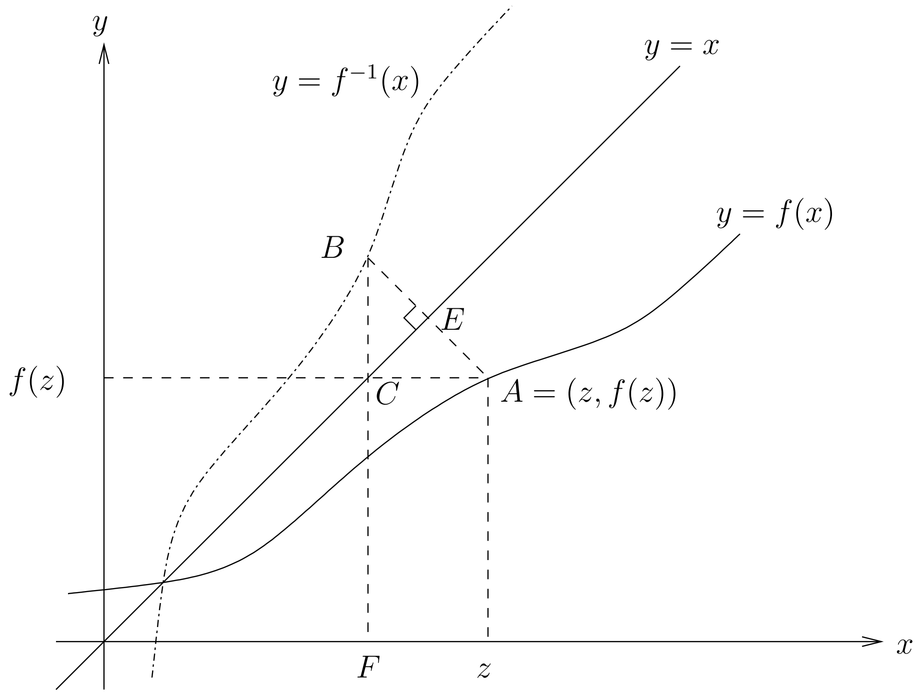


FIGURE 1.11 – Graphe de f^{-1} obtenu par réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$

Méthode graphique

Méthode 1.4.24
Si f est une fonction qui possède une fonction inverse f^{-1}, alors on obtient le graphe de f^{-1} en faisant la réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

Remarque 1.4.25 👁
Pour justifier cet énoncé, on utilise la figure 1.11. On fixe z. On cherche les coordonnées du point B qui est le point symétrique au point $A = (z, f(z))$ par rapport à la droite $y = x$. On veut montrer que les coordonnées du point B sont $(f(z), z)$, un point du graphe de f^{-1} car $z = f^{-1}(f(z))$.

Si B est le point qui est symétrique au point A par rapport à la droite $y = x$, alors les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont des angles droits et les segments $\overline{AE}$ et $\overline{BE}$ sont de même longueur.

On trace la droite horizontale $y = f(z)$ qui coupe la droite $y = x$ en C. Puisque les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle BCE$ sont congruents (les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont égaux et les côtés $\overline{AE}$ et $\overline{CE}$ adjacents à l'angle $\angle AEC$ sont respectivement de même longueur que les côtés $\overline{BE}$ et $\overline{CE}$ adjacents à l'angle $\angle BEC$), ainsi les segments $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$ sont de même longueur et les angles $\angle ACE$ et $\angle BCE$ sont égaux.

Puisque $\angle ACE = \pi/4$ (la droite $y = x$ fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe des x), on a

$\angle ACB = \pi/2$ et donc que la droite qui passe par B et C est verticale. Comme les coordonnées du point C sont $(f(z), f(z))$, on a donc que l'abscisse du point B est $f(z)$.

Le point d'intersection de la droite qui passe par B et C avec l'axe des x est $F = (f(z), 0)$. Pour trouver l'ordonnée du point B, on utilise le fait que la longueur du segment $\overline{BC}$, qui est aussi la longueur du segment $\overline{AC}$, est $z - f(z)$. Donc, l'ordonnée du point B est la somme des longueurs des segments $\overline{FC}$ et $\overline{CB}$. C'est-à-dire que l'ordonnée du point B est $f(z) + (z - f(z)) = z$. Ce qui confirme que les coordonnées de B sont $(f(z), z)$. ♠

1.4.6 Influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse

Une question que l'on n'a pas abordée précédemment est l'influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse.

Exemple 1.4.26
Considérons la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour toutes les valeurs réelles de x. Cette fonction n'a pas d'inverse car elle n'est pas injective. Par exemple, $f(-1) = f(1) = 0$. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de f que cette fonction ne satisfait pas le test de la droite horizontale.

Par contre, si on considère $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ seulement, alors f a un inverse qui est $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$. On présente à la figure 1.12 les graphes de f et f^{-1}.

Si on utilise la méthode algébrique pour trouver l'inverse de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$, on commence par poser
$$y = f(x) = x^2 - 1 \ .$$
On additionne 1 de chaque côté de cette égalité pour obtenir
$$y + 1 = x^2$$
puis on prend la racine carrée des deux côtés de cette nouvelle égalité pour obtenir
$$x = \sqrt{y+1} \ .$$
Donc, $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$ pour $y \geq -1$.

Par tradition, on échange x et y pour obtenir
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} \ , \ x \geq -1 \ .$$

Sans l'hypothèse que $x \geq 0$, on aurait obtenu $x = \pm\sqrt{y+1}$. Or, cette formule ne peut pas définir une fonction car on a deux valeurs pour chaque valeur de y. ♣

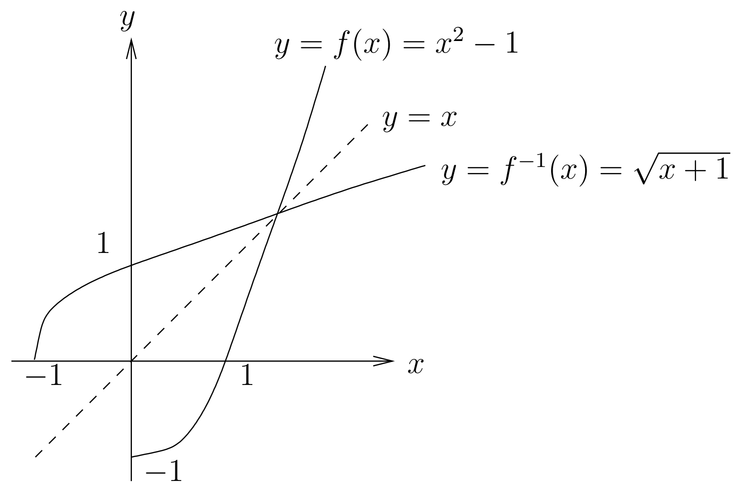


FIGURE 1.12 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ et de $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$.

1.5 Fonctions trigonométriques 🌲🔧

Vous avez probablement vu la définition du cosinus et sinus d'un angle à partir d'un triangle droit. Si $\triangle ABC$ est un triangle avec un angle droit au sommet C et θ est l'angle au sommet A (voir figure 1.14), alors le cosinus et le sinus de θ sont définis par

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$$

où $|\overline{AC}|$, $|\overline{BC}|$ et $|\overline{AB}|$ sont les longueurs des segments $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ respectivement. Cette définition est excellente pour les angles aiguës (moins de 90°) mais comment définir le cosinus ou sinus d'un angle obtus (plus de 90°).

Une autre façon de définir le **cosinus et sinus d'un angle en radians** est avec le cercle unité.

Définiton 1.5.1
Soit D, l'intersection du cercle de rayon 1 centré à l'origine avec la droite émanant de l'origine et qui forme un angle θ avec l'axe des x lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (voir la figure 1.13). L'abscisse du point D est $\cos(\theta)$ et l'ordonnée du point D est $\sin(\theta)$.

À partir de maintenant, au lieu de calculer les angles en degrés, on calcule les angles en radians. N'oubliez pas que le nombre π est le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre. Ainsi, 360° correspond a 2π radians (la circonférence d'un cercle de rayon 1).

Les deux définitions que nous venons de donner du cosinus et sinus sont équivalentes. Si le sommet A du triangle $\triangle ABC$ (voir figure 1.14) est à l'origine, $\overline{AC}$ repose sur l'axe des x,

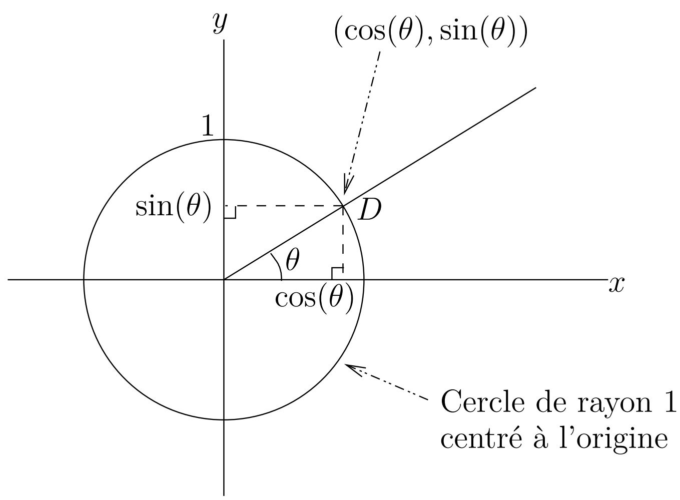


Figure 1.13 – Définition du sinus et cosinus de l'angle θ à partir du cercle unité.

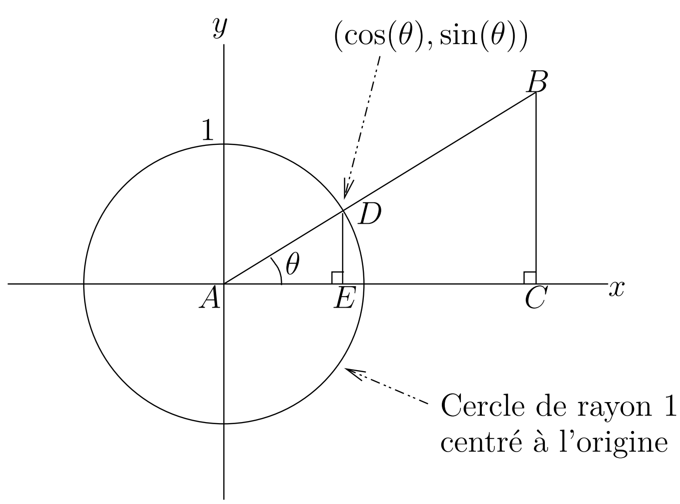


Figure 1.14 – Définition du sinus et cosinus de l'angle θ à partir d'un triangle.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

TABLE 1.1 – Valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour quelques valeurs de θ.

D est le point d'intersection de la droite contenant le segment $\overline{AB}$ avec le cercle de rayon 1 centré à l'origine, et E est le point d'intersection de la droite perpendiculaire à $\overline{AC}$ passant par D, alors les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables. Ainsi

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{AE}| \quad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{DE}|$$

car $|\overline{AD}| = 1$.

Il faut bien comprendre que l'angle positif θ représenté aux figures 1.13 et 1.14 est l'angle mesuré lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x.

Le Tableau 1.1 donne quelques valeurs du sinus et cosinus qu'il faut mémoriser. On verra plus tard que l'on peut utiliser les identités trigonométriques pour trouver d'autres valeurs du sinus et cosinus.

Si $\triangle ABC$ est le triangle de la figure 1.14 avec un angle droit en C et θ est l'angle en radians au sommet A. Pour $\theta \neq n\pi + \pi/2$ où $n \in \mathbb{Z}$, la tangente de l'angle θ est définie par

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \ .$$

On peut aussi définir la tangente de l'angle θ à l'aide du cercle unité. Si on utilise le triangle $\triangle ABC$ de la figure 1.14, alors la **tangente de l'angle** θ est

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AE}|} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad , \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Il ne faut pas oublier que l'angle positif θ est l'angle mesuré lorsque l'on se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x.

Il y a trois autres fonctions trigonométriques qui peuvent être utiles de temps à autre. Nous donnons leurs définitions à l'aide de la figure 1.14.

La **cotangente d'un angle** θ est définie par la relation

$$\cot(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \ , \ \theta \neq n\pi \text{ et } n \in \mathbb{Z} \ .$$

La **sécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\sec(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AE}|} = \frac{1}{\cos(\theta)} \ , \ \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z} \, .$$

Finalement, la **cosécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\csc(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DE}|} = \frac{1}{\sin(\theta)} \ , \ \theta \neq n\pi \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z} \, .$$

Remarque 1.5.2
Il faut noter que $\cos(\theta) \neq \cos(\theta)$.

Dans le cours de **Fonctions** de 11^e année qui prépare pour l'université, vous avez défini une fonction $\cos(x)$ où x est mesuré en degrés. Puis, dans le cours de **Fonctions Avancées** de 12^e année qui prépare aussi pour l'université, vous avez redéfini une fonction $\cos(x)$ où x est mesuré en radians.

La même notation a été utilisée pour dénoter deux différentes fonctions. Par exemple, $\cos(10) \neq \cos(10)$ si l'angle du premier cosinus est 10 degrés et celui du deuxième cosinus est 10 radians. Il est aussi mélangeant d'écrire $\cos(10) = \cos\left(10(\pi/180)\right)$; il faut comprendre que l'angle du premier cosinus est 10 degrés alors que celui du deuxième cosinus est $10(\pi/180)$ radians.

Si on dénote par $\cos_d$ le cosinus où l'angle est mesuré en degrés et par cos le cosinus où l'angle est mesuré en radians, alors il est maintenant clair que $\cos_d(10) \neq \cos(10)$ et $\cos_d(10) = \cos\left(10(\pi/180)\right)$.

Il aurait été préférable de donner des noms différents au cosinus pour les angles en degrés et au cosinus pour les angles en radians. Malheureusement, la tradition veut que l'on utilise le même nom (i.e. cos) dans les deux cas.

À moins d'avis contraire, l'argument des fonctions trigonométriques sera toujours mesuré en radians. Il sera très clairement spécifié si jamais on doit utiliser les fonctions trigonométriques où les angles sont mesurés en degrés.

Cette nuance entre le cosinus où les angles sont mesurés en degrés et celui où les angles sont mesurés en radians aura des conséquences très importante lors de l'étude du calcul différentiel et intégral pour les fonctions trigonométriques.

La remarque précédente au sujet du cosinus est aussi valable pour les autres fonctions trigonométriques. ♠

Remarque 1.5.3
On remarquera que $\sin\theta \neq \theta\sin$. En fait, cette dernière expression n'a aucun sens. Il faut noter qu'un grand nombre d'auteurs utilisent la notation $\sin\theta$ pour indiquer $\sin(\theta)$. C'est donc le sinus qui est évalué à θ et non pas le produit du sinus par le monôme θ.

L'utilisation de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ pour désigner $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ respectivement est une tradition que nous éviterons dans le présent document. De cette façon, nous ne risquerons pas de retrouver une expression du genre $\sin\theta + 1$. Est-ce $\sin(\theta+1)$ ou $\sin(\theta)+1$? ♠

1.5.1 Identités trigonométriques

Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnés d'un point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, on a :

Proposition 1.5.4

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad , \quad \theta \in \mathbb{R} \ .$$

Puisque θ et $\theta + 2\pi$ représentent le même point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, on a :

Proposition 1.5.5

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R} \ .$$

On a les mêmes égalités si 2π est remplacé par -2π, 4π, -4π, etc. On dit que le cosinus et le sinus sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π.

Il est facile de déduire plusieurs identités trigonométriques à partir du cercle unité.

Puisque les triangles $\triangle 0BE$, $\triangle OCG$, $\triangle ODG$ et $\triangle OAE$ de la figure 1.15 sont congruents, on obtient les identités suivantes :

Proposition 1.5.6

.

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(-\theta) & \qquad \sin(\theta) &= -\sin(-\theta) \\ \cos(\theta) &= -\cos(\pi - \theta) & \qquad \sin(\theta) &= \sin(\pi - \theta) \\ \cos(\theta) &= -\cos(\pi + \theta) & \qquad \sin(\theta) &= -\sin(\pi + \theta) \end{aligned}$$

quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque les triangles $\triangle 0AB$ et $\triangle ODC$ de la figure 1.16 sont congruents, on obtient les identités suivantes :

Proposition 1.5.7

$$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

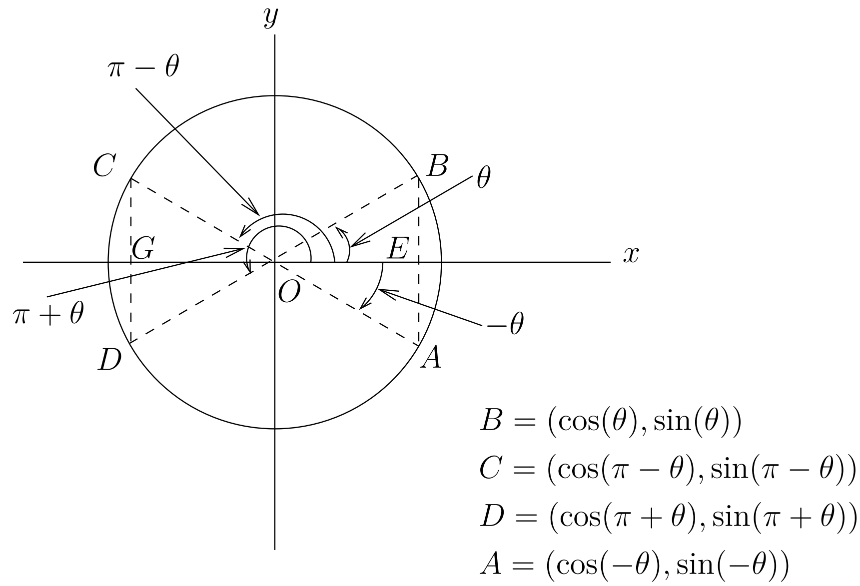


FIGURE 1.15 – Identités trigonométriques provenant de réflexions par rapport aux axes

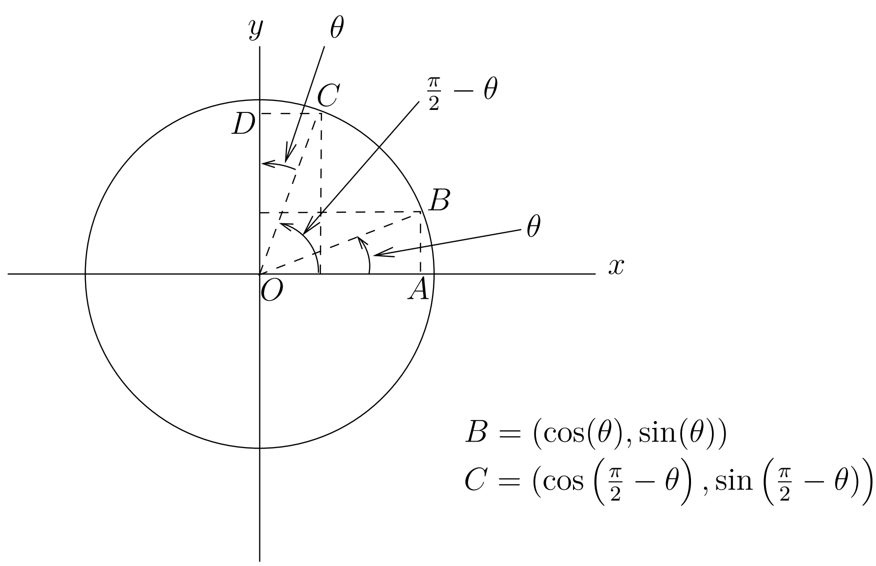


FIGURE 1.16 – Identités trigonométriques provenant d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$

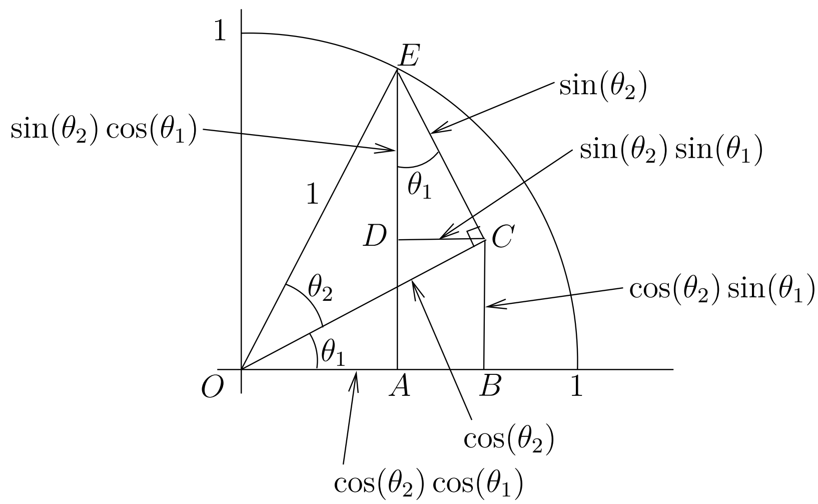


FIGURE 1.17 – Cette figure sert à la première démonstration de la règle d'addition pour les sinus et cosinus qui est donnée à la remarque 1.5.9.

Ce sont seulement quelques unes des identités trigonométriques que l'on peut déduire à partir du cercle unité.

Finalement, les **formules d'addition** suivantes seront d'une très grande utilité lors de la résolution d'équations impliquant les cosinus et sinus. Elles sont aussi utilisées pour simplifier les intégrales (voir chapitre 6) que l'on retrouve souvent dans les applications.

Proposition 1.5.8

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \quad , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \quad , \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Remarque 1.5.9 👁
On entend souvent dire qu'il n'y a qu'une et une seule façon de résoudre un problème en mathématiques. Nous donnons plusieurs démonstrations différentes des formules d'addition pour le sinus et le cosinus. Toutes ces démonstrations sont bonnes. Il est donc possible d'avoir plus d'une bonne façon de résoudre un problème mathématique.

Première démonstration: On utilise le dessin de la figure 1.17. On assume donc que θ_1 et θ_2 sont entre 0 et $\pi/2$. Pour les autres valeurs de θ_1 et θ_2, la démonstration peut être réduite au présent cas à l'aide des identités trigonométriques données au propositions 1.5.6 et 1.5.7.

Le triangle $\triangle OBC$ est semblable au triangle $\triangle EDC$. En particulier, $\angle COB = \angle CED$. Si on considère le triangle $\triangle OCE$, on trouve que la longueur de l'hypoténuse $\overline{EC}$ du triangle $\triangle EDC$ est $\sin(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{ED}| = \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$ et $|\overline{DC}| = \sin(\theta_2)\sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle droit. De même, si on considère le triangle

$\triangle OCE$, on trouve que la longueur de l'hypoténuse $\overline{OC}$ du triangle $\triangle OBC$ est $\cos(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{OB}| = \cos(\theta_2)\cos(\theta_1)$ et $|\overline{BC}| = \cos(\theta_2)\sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle droit.

On a donc

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = |\overline{AE}| = |\overline{BC}| + |\overline{DE}| = \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$$

et

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = |\overline{OA}| = |\overline{OB}| - |\overline{DC}| = \cos(\theta_2)\cos(\theta_1) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_1)\ .$$

Deuxième démonstration: Cette démonstration fait appel aux nombres complexes que le lecteur n'a probablement pas vu. Nous donnons quand même cette démonstration puisqu'elle est très courte et élégante, en espérant que cela pourra inciter certains lecteurs à approfondir leurs connaissances en mathématiques au delà du cours de calcul différentiel et intégral.

Puisque $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{(\theta_1+\theta_2)i} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \tag{1.5.1}$$

et

$$\begin{aligned} e^{(\theta_1+\theta_2)i} &= e^{\theta_1 i}e^{\theta_2 i} = \Big(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\Big)\Big(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\Big) \\ &= \Big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\Big) + \Big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\Big)i \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Si on compare la partie réelle et imaginaire de (1.5.1) et (1.5.2), on obtient

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

et

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\ .$$

Évidemment, cette démonstration est très courte mais fait appel à l'identité $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ qui n'est pas triviale à démontrer.

♠

Exemple 1.5.10
Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/3)$?

Puisque $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$, on trouve

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

où la dernière égalité provient du Tableau 1.1. ♣

Exemple 1.5.11
Quelle est la valeur de $\sin(7\pi/12)$?

Puisque $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$, on obtient de la formule d'addition pour le sinus que

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right) \ .\end{aligned}$$

♣

Exemple 1.5.12
Montrez que

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right) \tag{1.5.3}$$

quel que soit θ.

Si on prend la formule d'addition pour le cosinus et on y remplace θ_1 et θ_2 par θ, on trouve

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \ .$$

Puisque $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, on trouve

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \ . \tag{1.5.4}$$

D'où

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right) \ .$$

♣

On peut obtenir une formule pour $\sin^2(\theta)$ qui est semblable à celle donnée en (1.5.3). La proposition suivante inclus ces deux formules.

Proposition 1.5.13

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right) \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right) \ .$$

La première formule est la **formule de l'angle double pour le cosinus** alors que la deuxième formule est la **formule de l'angle double pour le sinus**

On laisse au lecteur la tâche de vérifier la formule de l'angle double pour le sinus, comme on l'a fait pour la formule de l'angle double pour le cosinus.

Remarque 1.5.14
Les deux formules données à la proposition (1.5.13) vont s'avérer très utiles pour évaluer certaines intégrales au chapitre 6. ♠

Pour terminer, nous mentionnons deux identités trigonométriques qui font appel à la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. Si nous divisons l'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ tour à tour par $\cos^2(\theta)$ et par $\sin^2(\theta)$, nous obtenons les deux identités suivantes :

Proposition 1.5.15

$$\begin{aligned} 1+\tan^2(\theta) &= \sec^2(\theta) \quad , \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \text{ et } n\in\mathbb{Z} \ . \\ \cot^2(\theta)+1 &= \csc^2(\theta) \quad , \quad \theta \neq n\pi \text{ et } n\in\mathbb{Z} \ . \end{aligned}$$

1.5.2 Graphes des fonctions trigonométriques

Le cosinus et le sinus sont deux fonctions définies pour tous les nombres réels. On trace le graphe de ces fonctions à la figure 1.18.

On déduit à partir de leurs définitions que

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

quel que soit l'angle θ. Ainsi,

$$\text{Dom } \cos = \text{Dom } \sin = \mathbb{R} \qquad \textit{et} \qquad \text{Im } \cos = \text{Im } \sin = \{x : -1 \leq x \leq 1\} \ .$$

Puisque $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ pour tout θ, le graphe du cosinus est une translation par $\pi/2$ vers le gauche du graphe du sinus.

La tangente est une fonction qui n'est pas définie pour tous les angles. Le graphe de la tangente est donnée à la figure 1.19. On remarque que

$$\text{Dom } \tan = \left\{\theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \ , \quad n\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } \tan = \mathbb{R} \ .$$

De plus, $\tan(\theta) = \tan(\theta+\pi)$ quel que soit $\theta \neq n\pi + \pi/2$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La tangente est donc une fonction **périodique** de **période** π.

On retrouve le graphe de la cotangente, de la sécante et de la cosécante à la figure 1.20. On remarque que

$$\begin{aligned} &\text{Dom } \cot = \{\theta : \theta \neq n\pi \ , \quad n\in\mathbb{Z}\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } \cot = \mathbb{R} \ , \\ &\text{Dom } \sec = \left\{\theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \quad , \quad n\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } \sec = \{y : |y| \geq 1\} \ , \end{aligned}$$

et

$$\text{Dom } \csc = \{\theta : \theta \neq n\pi \quad , \quad n\in\mathbb{Z}\} \qquad \text{et} \qquad \text{Im } \cot = \{y : |y| \geq 1\} \ .$$

Comme la tangente, la cotangente est une fonction **périodique** de **période** π. La sécante et la cosécante sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π.

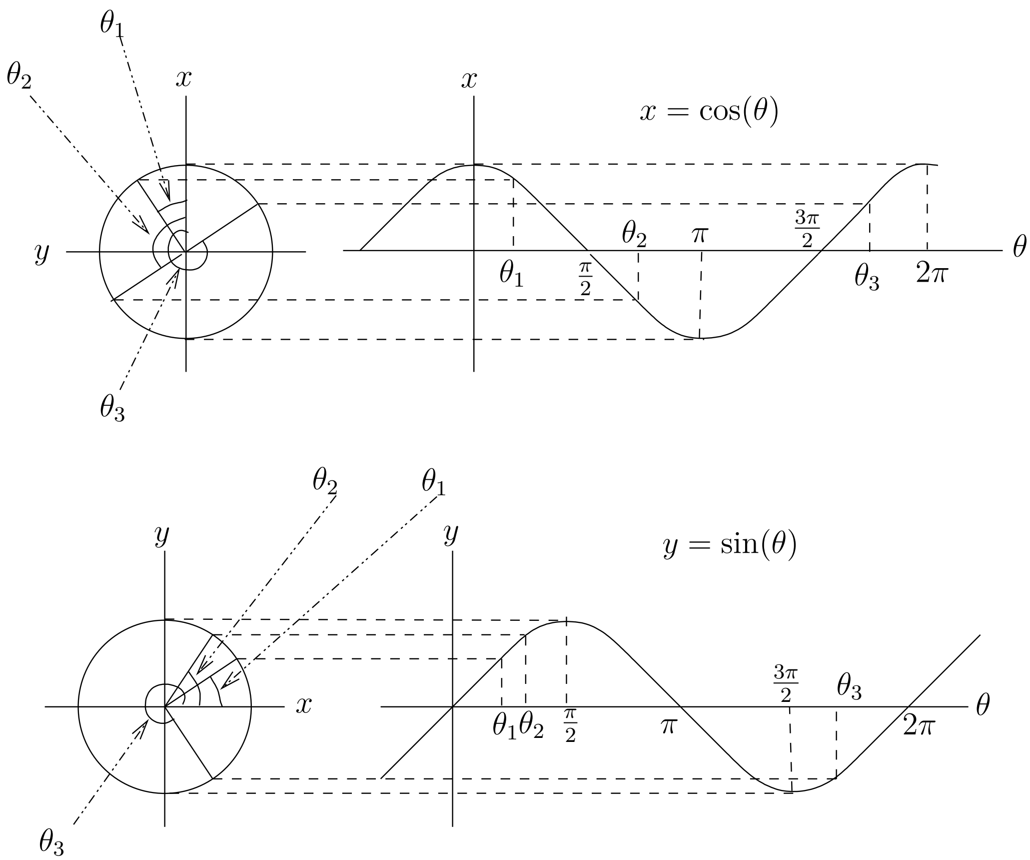


FIGURE 1.18 – Graphes de $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$

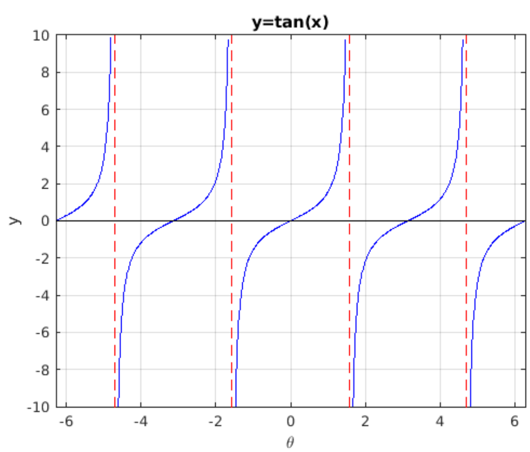


FIGURE 1.19 – Graphe de $y = \tan(\theta)$

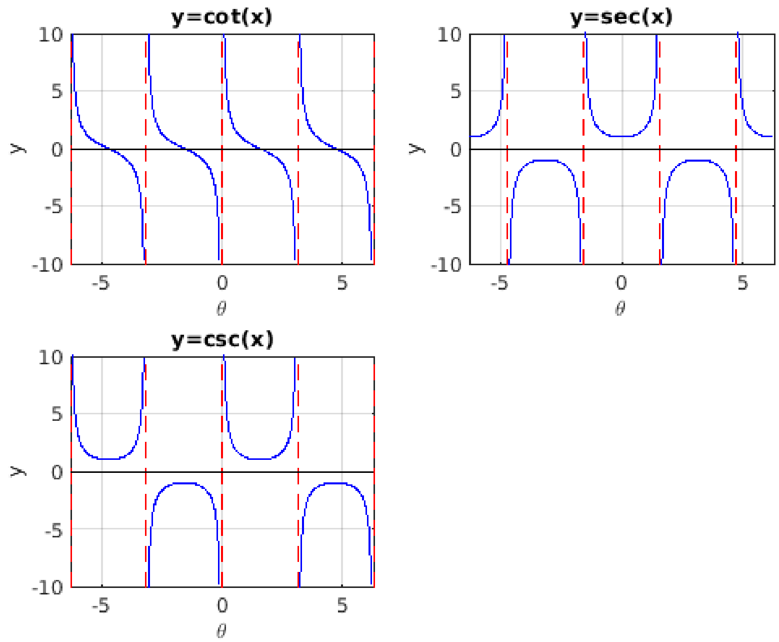


FIGURE 1.20 – Graphe de $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$, et $y = \csc(\theta)$

Définiton 1.5.16
Lorsque l'on parle de **fonctions sinusoïdales**, on parle de fonctions de la forme

$$y = M + A\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}\,(x - X)\right) \tag{1.5.5}$$

où M, A, P et X sont des constantes. On donne le sens graphique de ces constantes à la figure 1.21. La constante M est la **moyenne** de la fonction sinusoïdale, la constante A est l'**amplitude** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale, la constante P est la **période** et la constante X est la **phase** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale.

Dans certains livres, le sinus est utilisé pour définir les fonctions sinusoïdales. C'est-à-dire que l'on utilise

$$y = M + A\ \sin\left(\frac{2\pi}{P}\,(x - X)\right) \ .$$

En changeant seulement la phase, on peut produire avec cette formule n'importe laquelle des ondes données par la formule (1.5.5).

Exemple 1.5.17
Tracer le graphe de la fonction $y = f(x) = 3 + 5\cos((2\pi/7)(x + 4))$.

La moyenne de cette fonction sinusoïdale est $M = 3$, son amplitude est $A = 5$, sa période est $P = 7$ et sa phase est $X = -4$. On a tracé le graphe d'une période de cette fonction à la figure 1.22. ♣

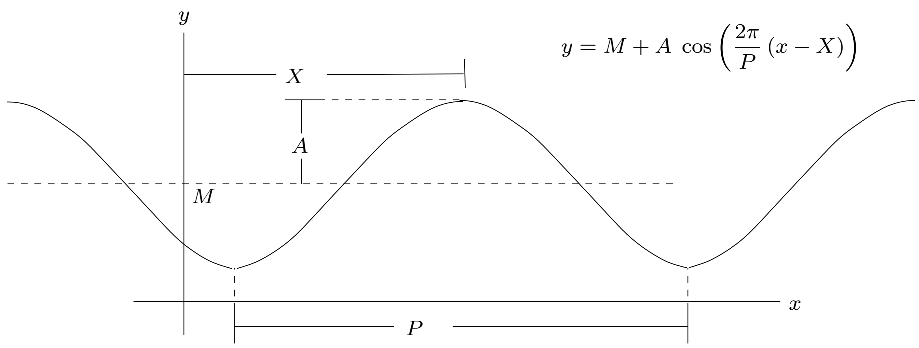


Figure 1.21 – Graphe d'une fonction sinusoïdale

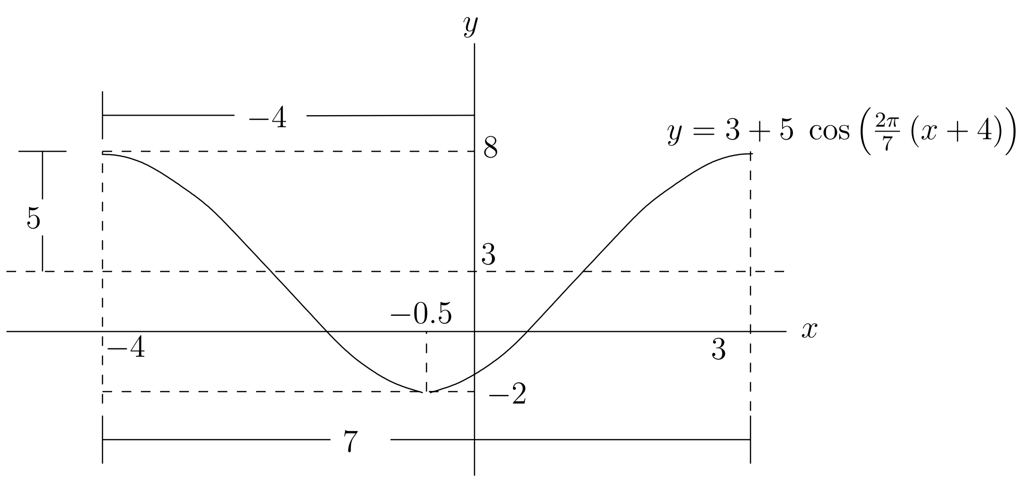


Figure 1.22 – Graphe de $y = f(x) = 3 + 5\cos((2\pi/7)(x + 4))$

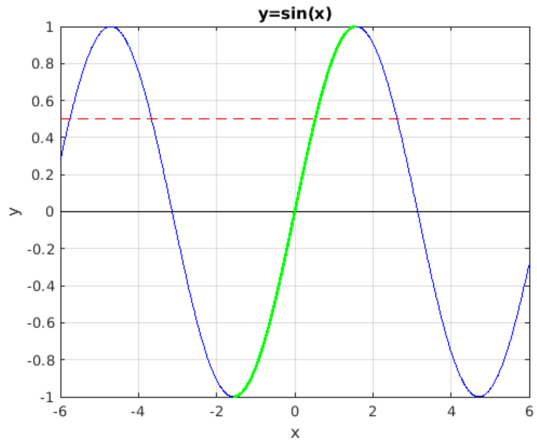


FIGURE 1.23 – Graphe de $y = \sin(x)$ pour $-6 \leq x \leq 6$

Exemple 1.5.18
La température moyenne du corps chez la femme pour une période de 24 heures est de 36.8°C avec un minimum de 36.5°C à 2h00 et un maximum de 37.1°C à 14h00. Si on suppose que la température T du corps chez la femme en fonction du temps t est décrite par une fonction sinusoïdale, quelle est cette fonction ?

Dans la formule (1.5.5), la moyenne est $M = 36.8$, l'amplitude est $A = (37.1 - 36.5)/2 = 0.3$, la phase est $X = 14$ heures et la période est naturellement $P = 24$ heures. On trouve donc

$$T = 36.8 + 0.3\cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 14)\right)$$

où T est la température en degrés centigrades et t est le temps en heures. ♣

1.5.3 Fonctions trigonométriques inverses

Le graphe de la fonction sinus se trouve à la figure 1.23. On voit facilement par le test des droites horizontales que cette fonction n'est pas injective et donc n'a pas d'inverse.

Mais ! Il y a bien une fonction $\sin^{-1}$ sur la calculatrice. Quelle est cette fonction ?

On définit la fonction inverse pour le sinus en restreignant le domaine du sinus à l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. C'est la courbe tracée en vert que l'on retrouve à la figure 1.23.

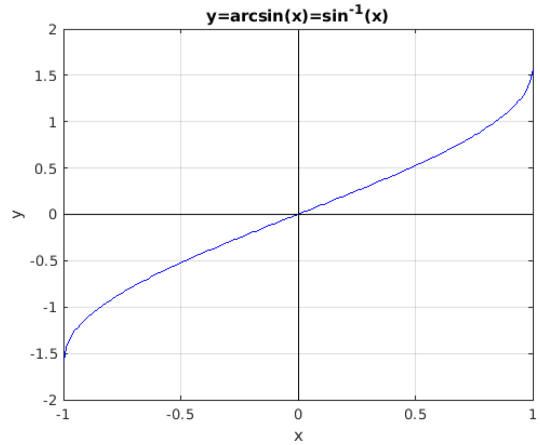


FIGURE 1.24 – Graphe de $y = \sin^{-1}(x)$ pour $-1 \le x \le 1$

Définiton 1.5.19
Sur l'intervalle $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, la fonction sin est bien injective et on peut définir son inverse $\sin^{-1}$ par la formule standard

$$x = \sin^{-1}(y) \qquad \text{si et seulement si} \qquad y = \sin(x)$$

pour $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ et $-1 \le y \le 1$. La fonction $\sin^{-1}$ est appelée l'**arcsinus** et est aussi dénotée arcsin ; c'est-à-dire, $\sin^{-1}(x) \equiv \arcsin(x)$.

En d'autres mots, $x = \sin^{-1}(y)$ est l'angle en radians entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ qu'il faut pour que $\sin(x) = y$.

La définition de $\sin^{-1}$ explique pourquoi cette fonction sur votre calculatrice n'acceptera jamais d'arguments plus petits que -1 et plus grands que 1.

On retrouve à la figure 1.24, le graphe de la fonction $\sin^{-1}$. Le lecteur peut vérifier que le graphe de $\sin^{-1}$ est bien obtenu d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$ du graphe de sin.

De même, on peut définir un inverse pour le cosinus.

Définiton 1.5.20
Sur l'intervalle $0 \le x \le \pi$, la fonction cos est bien injective et on peut définir son inverse $\cos^{-1}$ par la formule standard

$$x = \cos^{-1}(y) \qquad \text{si et seulement si} \qquad y = \cos(x)$$

pour $0 \le x \le \pi$ et $-1 \le y \le 1$. La fonction $\cos^{-1}$ est appelée **arccosinus** et est aussi dénotée arccos ; c'est-à-dire, $\cos^{-1}(x) \equiv \arccos(x)$.

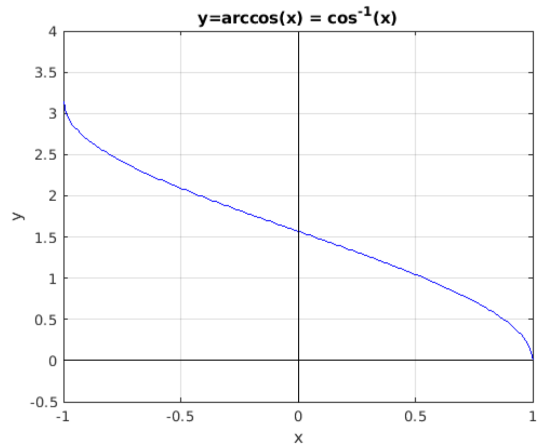


FIGURE 1.25 – Graphe de $y = \cos^{-1}(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$

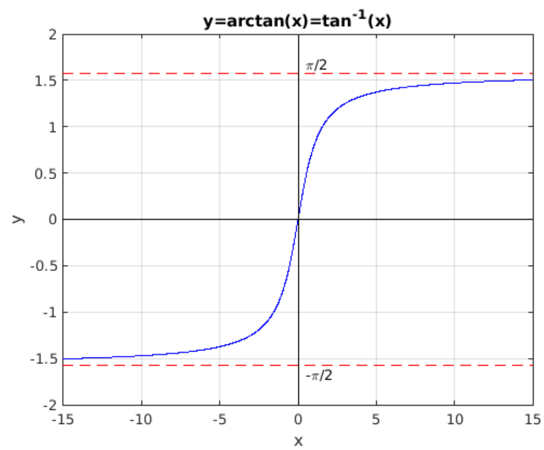


FIGURE 1.26 – Graphe de $y = \tan^{-1}(x)$ pour x réels

Finalement, on peut définir un inverse pour la tangente.

Définiton 1.5.21
Sur l'intervalle $-\pi/2 < x < \pi/2$, la fonction tan est bien injective et on peut définir son inverse $\tan^{-1}$ par la formule standard

$$x = \tan^{-1}(y) \qquad \text{si et seulement si} \qquad y = \tan(x)$$

pour $-\pi/2 < x < \pi/2$ et y réels. La fonction tan^{-1} est appelée l'**arctangente** et est aussi dénotée arctan ; c'est-à-dire, $\tan^{-1}(x) \equiv \arctan(x)$.

Le graphe de $\cos^{-1}$ est donné à la figure 1.25 et celui de $\tan^{-1}$ est donné à la figure 1.26.

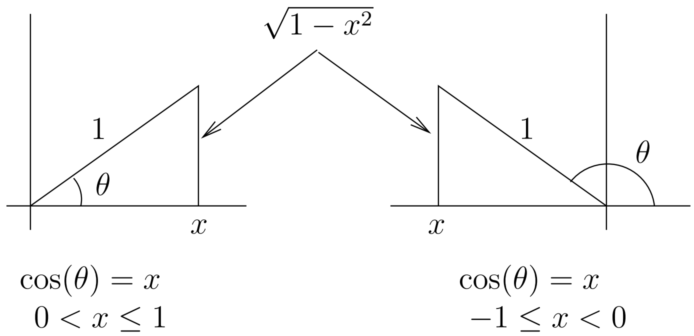


FIGURE 1.27 – Représentation graphique de $\cos(\theta) = x$ pour $-1 \le x \le 1$ et $0 \le \theta \le \pi$.

Remarque 1.5.22
On remarquera que $\sin^{-1} \neq \sin^{-1}$

Il faut bien comprendre que $\sin^{-1}$ sur la calculatrice n'est pas égale à $(\sin(x))^{-1} = 1/\sin(x)$. Par exemple,

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0.52359877559830$$

alors que

$$\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.08582964293349\ .$$

♠

Exemple 1.5.23
Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $-1 \le x \le 1$.

Soit $\theta = \arccos(x)$ où $0 \le \theta \le \pi$. Grâce à la figure 1.27, on a $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$. ♣

1.6 Fonctions exponentielles et logarithmiques

1.6.1 Fonctions exponentielles

Le but de cette section est de donner un sens à l'expression b^p pour le plus grand nombre de **base** b et d'**exposant** p. Nous résumons ci-dessous ce qui est connu au sujet de l'exponentiel d'un nombre.

— L'expression b^p n'est pas définie pour $b = p = 0$.
— $b^p = 1$ pour $b > 0$ et $p = 0$. Par exemple, $\pi^0 = 1$.
— Si $b \in \mathbb{R}$ et p est un entier positif,

$$b^p = \underbrace{b \times b \times \ldots \times b}_{\text{p fois}}\ .$$

Par exemple, $\pi^3 = \pi \times \pi \times \pi$.

— Si $b \in \mathbb{R}$ et $p = 1/n$ où n est un nombre impair, $y = b^p$ est le nombre réel tel que $y^n = b$. Par exemple, $(-8)^{1/3} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.
— Si $b \geq 0$ et $p = 1/n$ où n est un nombre pair, $y = b^p$ est le nombre réel positif tel que $y^n = b$. Par exemple, $16^{1/4} = 2$ car $2^4 = 16$.
— Si $p = m/n$, on calcul $b^{1/n}$ si cela est possible puis on calcul $\left(b^{1/n}\right)^m$. Il est toujours avantageux de simplifier la fraction m/n avant de faire les calculs. Par exemple, $(-8)^{2/3} = 4$ car $(-8)^{1/3} = -2$ et $\left((-8)^{1/3}\right)^2 = (-2)^2 = 4$. De même, $16^{3/4} = 8$ car $16^{1/4} = 2$ et $\left(16^{1/4}\right)^3 = 2^3 = 8$.
— Si $p < 0$, on définit b^p par $1/b^{-p}$ si b^{-p} est définie. Par exemple, $\pi^{-3} = 1/\pi^3 = 1/(\pi \times \pi \times \pi)$.

Aucune définition n'est donnée pour b^p lorsque b est un nombre réel positif et p est un exposant réel quelconque. Comment peut-on définir une expression comme 4^π ? Comment calcule-t-on 4^π ? Pour calculer 4^2, il suffit de multiplier 4 par lui-même. Pour calculer $4^{1/2}$, il suffit de trouver le nombre positif y tel que $y^2 = 4$; dans le cas présent $y = 2$. Mais comment calcule-t-on 4^π ? On peut utiliser la définition suivante :

Définiton 1.6.1
Pour $b > 1$ et $p \in \mathbb{R}$, on définit le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus petit nombre réel[1] M tel que $M \geq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Pour $0 < b < 1$ et $p \in \mathbb{R}$, on définit le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Naturellement, si $b = 1$ on obtient $b^p = 1$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Ainsi, 4^π est le plus petit nombre réel M tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq \pi$. De même, $4^2 = 16$ car $M = 16$ est le plus petit nombre tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq 2$; le nombre 2 est une valeur possible pour r.

La définition du nombre exponentiel b^p, $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$, ci-dessus n'est pas facile à utiliser. Il faut généralement beaucoup de travail pour évaluer un nombre exponentiel avec cette définition. Pour l'instant, cette définition sera suffisante pour nos besoins.

En fait, cette définition d'un nombre exponentiel manque de rigueur. Il faudrait démontrer que cette définition est consistante. Par exemple, est-ce que cette définition de b^p pour $b > 1$ est équivalente à « b^p est le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \geq p$ » ? Comme on verra prochainement, cela revient à demander si les limites à droite et à gauche de b^r sont égales en $r = p$. Il y a bien d'autres questions de ce genre que l'on pourrait poser au sujet de cette définition. De plus, il est difficile de démontrer les propriétés des exposants avec cette définition.

Nous donnerons à la section **??** une définition équivalent du nombre exponentiel b^p, $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$, qui sera plus facile à manipuler que celle ci-dessus. Avec la définition

1. **L'Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure.

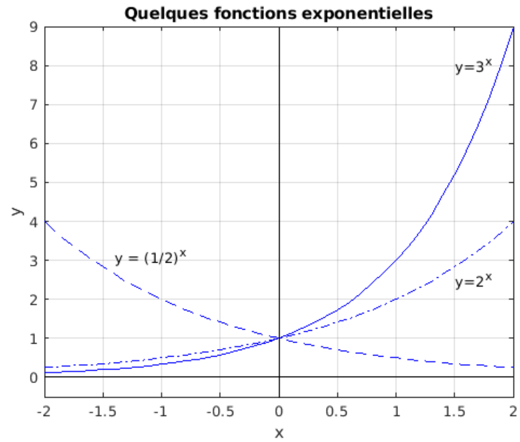


FIGURE 1.28 – Graphes de $y = 3^x$, $y = 2^x$ et $y = (1/2)^x$

présentée à la section **??**, il est facile de déduire les propriétés des exposants. De plus, les calculatrices et ordinateurs utilisent cette définition (avec quelques subtilités additionnelles) pour évaluer les nombres exponentiels.

Pour l'instant, la valeur d'un nombre exponentiel comme 4^π sera estimée par 4^r pour des valeurs rationnelles de r très près de π et inférieures à π. Quelle valeur de r, proche de π, doit-on utiliser pour obtenir une bonne approximation de 4^π ? Cette question ne sera pas abordée.

Définiton 1.6.2
Si b est un nombre réel positif, la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ définie par $f(x) = b^x$ pour tout x réel est appelée une **fonction exponentielle**.

Les fonctions exponentielles satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 1.6.3
Si a et b sont des nombres réels positifs et x et y sont des nombres réels, alors

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}\ , \quad a^x a^y = a^{x+y}\ , \quad a^x b^x = (ab)^x \text{ et } \quad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}\ .$$

On retrouve les graphes de quelques fonctions exponentielles à la figure 1.28.

Pour $f(x) = b^x$, on déduit de la figure 1.28 que le domaine de f est $\mathbb{R}$ et que son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. On remarque de plus que f est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $0 < b < 1$.

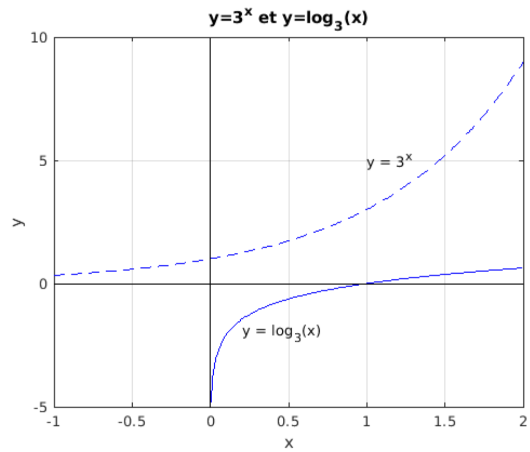


FIGURE 1.29 – Graphes de $y = 3^x$ (tirets) et de $y = \log_3(x)$ (pleine ligne)

1.6.2 Fonctions logarithmiques

La fonction logarithmique n'est rien d'autre que la fonction inverse de $f(x) = b^x$ où b, la **base**, est un nombre réel positif. Si on applique la définition de l'inverse d'une fonction à la fonction b^y, on obtient :

Définiton 1.6.4
La **fonction logarithmique** $\log_b$ est définie par

$$y = \log_b(x) \quad \text{si et seulement si} \quad b^y = x$$

pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

On donne à la figure 1.29, le graphe des fonctions $f(x) = b^x$ et $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ pour $b = 3$. Puisque le domaine de $f(x) = b^x$ est $\mathbb{R}$ et son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, on trouve bien que le domaine de $\log_b$ est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et son image est $\mathbb{R}$.

Puisque $y = \log_b(x)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir x (i.e. pour que $b^y = x$), il est alors simple de vérifier à partir de cet énoncé que les fonctions logarithmiques satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 1.6.5
Si a, b, x et y sont des nombres positifs réels et p est un nombre réel, on a :

$$\log_b(x^p) = p\log_b(x) \ , \tag{1.6.1}$$
$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \tag{1.6.2}$$

et

$$\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x) \ . \tag{1.6.3}$$

Exemple 1.6.6
Si b, x et y sont des nombres positifs réels, alors

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

car

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x\,y^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1}) = \log_b(x) - \log_b(y) \ ,$$

où la deuxième égalité provient de (1.6.2) et la troisième égalité provient de (1.6.1). ♣

Exemple 1.6.7
Démontrer à partir de la définition du logarithme que $\log_b(x^p) = p\log_b(x)$.

Si $y = \log_b(x^p)$ alors $b^y = x^p$ par définition du logarithme. Donc, $b^{y/p} = x$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_b(x) = y/p$. Ainsi, si on résout cette dernière équation pour y on trouve $p\log_b(x) = y = \log_b(x^p)$. ♣

Exemple 1.6.8
Démontrer que $\dfrac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x)$ à partir de la définition du logarithme.

Si $v = \log_a(x)$ et $w = \log_a(y)$, alors $a^v = x$ et $a^w = y$ par définition du logarithme. On obtient de $a^w = y$ que $a = y^{1/w}$. Si on substitue cette expression pour a dans $a^v = x$, on trouve $x = \left(y^{1/w}\right)^v = y^{v/w}$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_y(x) = \dfrac{v}{w} = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$ par définition de v et w. ♣

Exemple 1.6.9
Un modèle fréquemment utilisé pour décrire une population est de la forme $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$ où $P(t)$ est le nombre d'individus au temps t, P_0 est le nombre initial d'individus, et α est le « taux de croissance relatif ». Le taux de croissance relatif est défini comme étant le taux de croissance (instantané) au temps t divisé par le nombre total d'individus au temps t. Dans ce modèle, on suppose que ce rapport est constant et égale à α. Nous justifierons ce modèle au chapitre **??** sur les équations différentielles.

On veut déterminer le temps nécessaire pour que la population soit 2.5 plus grande si $\alpha = 1.5$. On suppose que le temps est mesuré en heures.

On cherche t tel que $P(t) = 2.5P_0$. C'est-à-dire, on cherche t tel que $P_0e^{1.5t} = 2.5P_0$. Ainsi,

$$P_0e^{1.5t} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{1.5t} = 2.5 \Rightarrow 1.5t = \ln\left(e^{1.5t}\right) = \ln(2.5) \Rightarrow t = \frac{\ln(2.5)}{1.5} \approx 0.61086 \ .$$

Il faut donc approximativement 0.61086 heure pour que la population soit 2.5 fois plus grande.

Si la population prend 3 jours pour être 2.5 plus grande, quel est le taux de croissance relatif ?

On a $P(3) = 2.5P_0$. Donc,

$$P_0e^{3\alpha} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{3\alpha} = 2.5 \Rightarrow 3\alpha = \ln\left(e^{3\alpha}\right) = \ln(2.5) \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2.5)}{3} \approx 0.3054 \ .$$

Quelle est le nombre initial d'individus si $\alpha = 0.5$ et on a 10^6 individus après 10 jours ?

On a $10^6 = P(10) = P_0e^{0.5\times 10}$. Donc, $P_0 = \dfrac{10^6}{e^5} \approx 6738$ individus. ♣

1.7 Exercices

Note : Quelques unes des questions feront usage du nombre d'Euler $e = 2.718281828459\ldots$ que nous définirons correctement à la section 2.3. Comme pour π, ce nombre se retrouve sur toutes les calculatrices scientifiques car il joue un rôle fondamental en mathématique.

Question 1.1
Simplifiez si possible les expressions suivantes :

a) $(3^4)^{0.5}$ **b)** $2^{2^3} \times 2^{2^2}$ **c)** $\log_3(1)$

d) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20)$ **e)** $\log_{10}(500) - \log_{10}(50)$ **f)** $\log_{42.3}(42.3^7)$

Question 1.2
Factorisez les polynômes suivants :

a) $x^2 + x - 6$ **b)** $3x^2 - 5x - 2$ **c)** $x^{3/2} + x^{1/2} - 12x^{-1/2}$

Question 1.3
Résolvez les équations suivantes :

a) $7 \times 5^{3x} = 21$ **b)** $4 \times 3^{-2x+1} = 7^{3x}$

Question 1.4
Résolvez les équations suivantes :

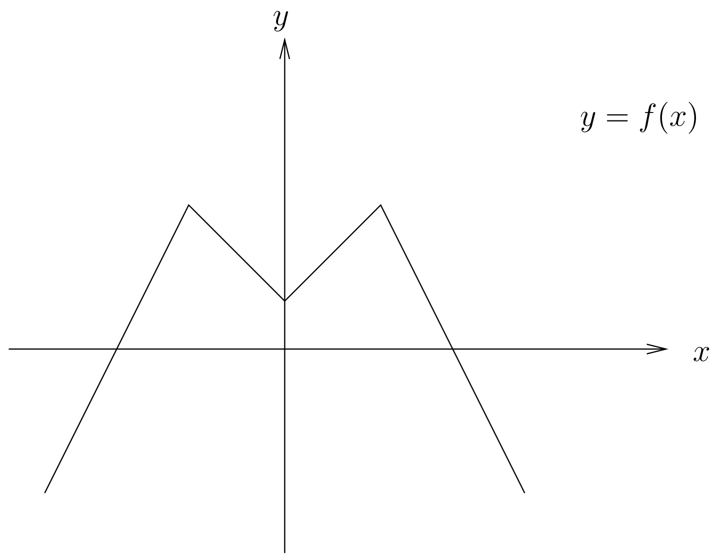


FIGURE 1.30 – La figure pour la question 6

a) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$ b) $\ln(x-3) + \ln(x-5) = \ln(2x-6)$

c) $|x-2| = 5$ d) $|x-2| = |2x-5|$

Question 1.5
Résolvez les inégalités suivantes.

a) $\dfrac{x^2}{x+2} < 1$ b) $\dfrac{x}{x-3} < \dfrac{-6}{x+1}$

c) $|x-2| < 5$ d) $|x^2 - 2x - 5| < |x-1|$

Question 1.6
Une fonction f est définie par le graphique de la figure 1.30. Déterminez si f est injective.

Question 1.7
Déterminez si les fonctions suivantes ont un inverse. Si une fonction a un inverse, trouvez cet inverse. Bien indiquer le domaine et l'image de la fonction et de son inverse.

a) $g(x) = 5^{x^3}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ c) $h(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{10}$

Question 1.8
Écrivez les fonctions suivantes comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x, $\log_b(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

a) $f(x) = \dfrac{5}{1+5^x}$ b) $h(t) = (1-t^2)^{-4}$

Question 1.9
Écrivez la fonction $g(x) = \cos(\sqrt{1+x^2})$ les fonctions suivantes comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x, $\log_b(x)$, $\cos(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

Question 1.10
Vérifiez les identités trigonométriques suivantes pour $\theta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ et π.

a) $\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$.

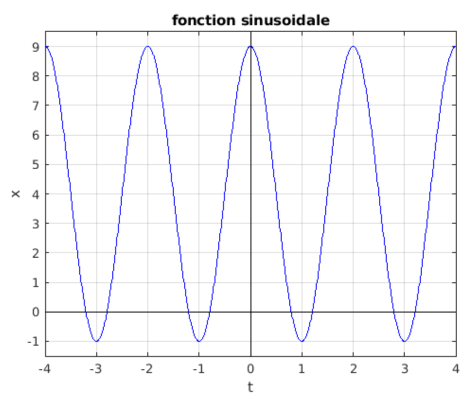
b) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Question 1.11
Récrivez les fonctions sinusoïdales suivantes sous la forme standard $f(t) = M + A\cos\left(\frac{2\pi}{P}(t-T)\right)$ où $A > 0$.

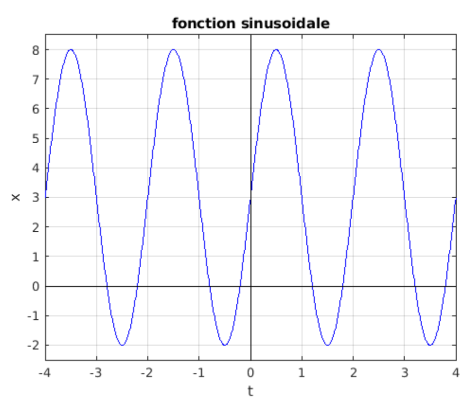
a) $f(t) = 2 - \cos(t)$
b) $g(t) = 2 + \sin(t)$

Question 1.12
Quelle est la moyenne, l'amplitude, la période et la phase de la fonction sinusoïdale qui possède le graphe suivant.

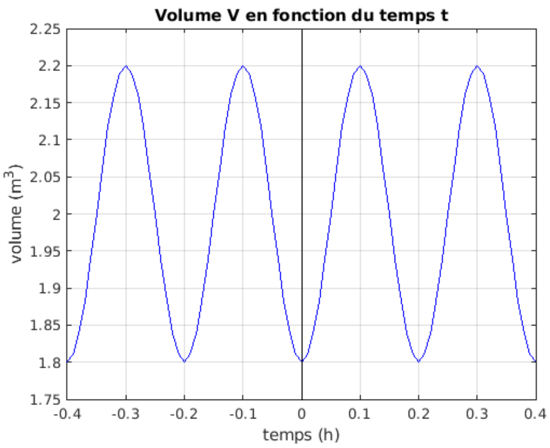
a)



b)



c)



Question 1.13

Pour chacune des fonctions sinusoïdale suivantes, déterminez la moyenne, l'amplitude, la période et la phase. De plus, Tracez le graphe de la fonction. Bien indiquer sur votre dessin la moyenne, l'amplitude, la période et la phase.

a) $h(z) = 1 + 5\cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$
b) $f(x) = 6\sin(3x - 6) - 4$
c) $W(y) = -2.0 + 3.0\cos\left(4\pi(y + 0.1)\right)$

Question 1.14

Montrez que $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $-1 < x < 1$.

Question 1.15

Quelques valeurs de deux fonctions sont données dans le tableau ci-dessous. Une des fonctions est linéaire (de la forme $mx + b$) et l'autre est exponentielle (de la forme pb^x). Trouvez une formule pour chacune des fonctions.

x	2	4	6	8
f(x)	0.75	0.1875	0.046875	0.011719
g(x)	5.7	10.3	14.9	19.5

Question 1.16

Tracez le graphe de la fonction $g(t) = e^t\cos(2\pi t)$ pour $0 < t < 3$. On ne cherche pas un graphe très précis mais un graphe qui décrit bien le comportement qualitatif de la fonction.

Question 1.17

Tracez le graphe de la fonction $W(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)$ pour $t \geq 0$. On ne cherche pas un graphe très précis mais un graphe qui décrit bien le comportement qualitatif de la fonction.

Question 1.18

Le poids S en kilogrammes d'un individu au temps t en jours est donnée par la formule $S(t) = S_0 10^{\alpha t}$ où le poids initial est $S_0 = S(0) = 2.34$ kg et le taux de croissance par rapport au poids de l'individu [2] est $\alpha = 0.693$. Combien de temps faut-il pour que le poids de l'individu double ? Pour que le poids soit 10 fois plus grand ?

Question 1.19
La population d'un territoire double à tous les 24 ans. Si la population initiale est de 500 individus (par km^2), quel sera le nombre d'individus (par km^2) après 12 années ? Il faut se rappeler que le nombre d'individus dans la population au temps t en années est donné par une formule de la forme $p(t) = p_0 e^{\alpha t}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et α est une constante représentant le taux de croissance par rapport à la taille de la population.

Suggestion : vous pouvez déterminer α à l'aide du temps nécessaire pour que la population double.

Question 1.20
Le volume (en cm^3) d'un organisme au temps t (en seconde) est donné par l'expression $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$. Quelles sont les unités de α ? Si $V_0 = 2$ et $\alpha = 0.1$, combien faut-il de temps pour que le volume double ? Pour qu'il quadruple ?

Question 1.21
La quantité de Carbone-14 (en atomes) que l'on retrouve dans les os d'un animal, t années après son décès, est donnée par $Q(t) = Q_0 e^{-0.000122\,t}$ où Q_0 est la quantité de carbone-14 au moment du décès. Quelle est la demie-vie du carbone-14 ?

Question 1.22
Si une population a une demie-vie de 43 ans et le nombre d'individus au départ est de 1600 (par m^2), combien de temps faut-il pour que la population soit de 200 individus (par m^2) ? Trouvez une formule pour le nombre $P(t)$ d'individus (par m^2) au temps t dans cette population. Combien faut-il de temps pour que la population soit de 437 individus (par m^2) ?

2. Le fait que α représente le taux de croissance par rapport au poids de l'individu sera justifié au chapitre **??** sur les équations différentielles.

Suites et séries

2

Au chapitre précédent, on a introduit les fonctions ; les objets sur lesquels nous travaillerons tout au long de cet ouvrage. Ce ne sont pas toutes les fonctions qui nous intéressent. Par exemple, on est intéressé aux fonctions qui peuvent représenter des phénomènes naturels qui évoluent de façon continue dans le temps et qui ont des comportements prévisibles. Les fonctions qui représentent ce genre de phénomènes sont généralement continues ou même différentiables. Pour définir ces propriétés, nous aurons besoin des concepts de limite d'une suite et de limite d'une fonction en un point. Certaines fonctions ne peuvent être définies de façon simple comme, par exemple, à l'aide d'une expression algébrique. Nous aurons besoin du concept de séries pour définir ces fonctions. C'est le cas en particulier de la fonction e^x. Ce sont ces concepts que nous présentons dans ce chapitre.

2.1 Suites

Définiton 2.1.1
Une **suite** est un ensemble infini et ordonné de nombres. Les nombres qui forment une suite sont appelés les **termes** de la suite. Par exemple, $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ représente une suite de nombres où a_1 est le **premier terme** de la suite, a_2 est le **deuxième terme** de la suite, ainsi de suite.

Les termes de la suite sont généralement donnés par une fonction $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$; c'est-à-dire, $a_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. On dénote alors la suite par $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Exemple 2.1.2
La suite $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est la suite formée des termes

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots\right\}$$

alors que la suite $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est la suite formée des termes

$$\left\{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\} .$$

♣

Exemple 2.1.3
La procédure pour générer certaines suites demande plus qu'une simple fonction $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. C'est le cas de la **suite de Fibonnacci**. On choisit a_1 et a_2. Les autres termes de la suites sont générés par $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour $n = 2, 3, 4, \ldots$. En d'autres mots, chaque terme de la suite est le résultat de la somme des deux termes qui le précède.

La suite de Fibonnacci la plus classique est lorsque $a_1 = a_2 = 1$. On obtient la suite

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\} .$$

♣

Nous sommes souvent intéressés par le comportement asymptotique des termes de la suite lorsque $n \to \infty$.

Définiton 2.1.4
On dit que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers un nombre L (lorsque n tend vers l'infini) si, pour chaque valeur $\epsilon > 0$, il existe un entier N (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad n \geq N .$$

En d'autre mots, Quel que soit le nombre ϵ qui est donné, on a que la distance entre L et a_n est plus petite que ϵ à partir d'un indice N. On écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L .$$

Le nombre L est appelé la **limite** de la suite.

S'il n'existe pas de valeur L qui satisfait la définition ci-dessus, on dit que la suite **diverge**.

Exemple 2.1.5
Il est intuitivement claire que la suite

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

tend vers 0. On peut vérifier que la définition de limite est satisfaite par $L = 0$. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $N > 1/\epsilon$ [1] pour obtenir que $|a_n - 0| = 1/n \leq 1/N < \epsilon$ pour $n \geq N$. ♣

Exemple 2.1.6
La suite

$$\left\{\frac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots\right\}$$

1. L'existence de N est une conséquence du principe d'Archimède

tend vers 1.

En effet, pour ϵ donné, il suffit de prendre $N > 2(1-\epsilon)/\epsilon$ pour obtenir $|a_n - 1| < \epsilon$ lorsque $n \geq N$. En effet,

$$n > \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon} \Rightarrow n\epsilon > 2 - 2\epsilon \Rightarrow \epsilon(n+2) > 2 \Rightarrow \epsilon > \frac{2}{n+2} = 1 - \frac{n}{n+2} = |a_n - 1|$$

Par exemple, si $\epsilon = 10^{-5}$, il faut prendre $N > 2(1-10^{-5})/10^{-5} = 199998$. ♣

Remarque 2.1.7

1. On utilise aussi l'expression « $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$ » pour dire que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
2. Il est souvent très utile d'explorer numériquement le comportement d'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; c'est-à-dire, d'évaluer a_n pour de très grandes valeurs de n dans l'espoir d'obtenir des termes qui approchent une constante L quelconque. Cela ne démontre pas que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L mais cela nous permet de conjecturer la limite de la suite. Il faut vérifier que la définition de limite ci-dessus est satisfaite pour pouvoir dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers la constante L obtenue numériquement.
3. La définition de limite ci-dessus revient à dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L si et seulement si la suite $\{|a_n - L|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} |a_n - L| = 0\ .$$
En d'autres mots, la distance $|a_n - L|$ entre a_n et L approche 0 lorsque n augmente.

♠

La limite de suites possède les propriétés suivantes qui permettront d'évaluer facilement les limites de certaines suites.

Théorème 2.1.8
Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_a et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_b, alors :

1. La suite $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a + L_b$. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\ .$$
2. La suite $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a L_b$. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$
3. Si $b_n \neq 0$ pour tout n et $L_b \neq 0$, alors la suite $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\frac{L_a}{L_b}$. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\ .$$

Exemple 2.1.9
Soit c une constante quelconque. Il est facile de voir que la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ où $a_n = c$ pour tout n est c. On peut utiliser cette information pour trouver la limite de la suite $\left\{\dfrac{5n+2}{n}\right\}_{n=1}^\infty$. En effet, grâce au théorème précédent, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(5 + 2\,\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5 + 2 \times 0 = 5 \ .$$

♣

Théorème 2.1.10 (des gendarmes ou sandwich)
Soit $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ deux suites qui tendent vers L. Si $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite telle que $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout n, alors la suite $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ tend aussi vers L.

Démonstration
Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ tendent vers L, il existe $N \geq 0$ tel que $|a_n - L| < \epsilon$ et $|c_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$$

pour $n \geq N$. C'est-à-dire que $|b_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. ∎

Exemple 2.1.11
Montrons que la limite de la suite $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ où $b_n = n^{1/n}$ est 1.

La suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ où $a_n = 1$ pour tout n satisfait $a_n \leq b_n$ pour tout n.

De plus, si $x_n = b_n - 1$, on a

$$n = b_n^n = (1 + x_n)^n = 1 + n x_n + \frac{n(n-1)}{2}\, x_n^2 + \ldots + x_n^n \ .$$

Comme c'est une somme de termes positifs, on a

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\, x_n^2 \ .$$

Si on isole x_n on trouve

$$x_n \leq \sqrt{2/n} \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

Ainsi, la suite $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ où $c_n = 1 + \sqrt{2/n}$ pour tout n satisfait

$$b_n = 1 + x_n \leq 1 + \sqrt{2/n} = c_n$$

pour tout n.

Or, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{2/n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \sqrt{2/n} = 1$$

car on peut facilement montrer à partir de la définition de limite que la suite $\{\sqrt{2/n}\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers 0.

Puisque $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq 1$, on obtient du Théorème des gendarmes que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. ♣

Le résultat suivant est quelques fois utile.

Théorème 2.1.12
La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 si et seulement si la suite $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

Démonstration
$\Rightarrow$) Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $\Big||a_n| - 0\Big| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

$\Leftarrow$) Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $\Big||a_n| - 0\Big| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. ∎

Il est très utile de pouvoir caractériser le comportement des suites lorsque n tend vers l'infini.

Définiton 2.1.13

1. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout n.
2. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout n.
3. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée supérieurement** s'il existe un nombre réel M tel que $a_n \leq M$ pour tout n. Le nombre M est appelé une **borne supérieure** pour la suite.
4. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée inférieurement** s'il existe un nombre réel m tel que $a_n \geq m$ pour tout n. Le nombre m est appelé une **borne inférieure** pour la suite.
5. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée** si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Le concept de convergence peut aussi être adapté aux suites non-bornées.

Définiton 2.1.14

On dit qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers $+\infty$ (plus l'infini) si pour chaque $M > 0$ il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ .$$
On dit qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers $-\infty$ (moins l'infini) si pour chaque $M < 0$ il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n < M$ pour tout $n \geq N$. On écrit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ .$$

Exemple 2.1.15

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = n^2 + 1$ tend vers plus l'infini. En effet, si $M \geq 1$ est un nombre quelconque, il suffit de prendre $N > \sqrt{M-1}$ pour obtenir
$$a_n = n^2 + 1 \geq N^2 + 1 > \left(\sqrt{M-1}\right)^2 + 1 = M$$
pour tout $n \geq N$. ♣

Exemple 2.1.16

Le fait qu'une suite ne soit pas bornée n'implique pas qu'elle tende vers plus ou moins l'infini. Par exemple, la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où
$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1/n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
n'est pas bornée car il y a des termes qui sont aussi grands que l'on veut. Par contre, cette suite ne tend pas vers plus l'infini car il est impossible de trouver $N > 0$ tel que $a_n > 1$ pour $n \geq N$. Les termes a_n avec n impair et plus grand que 1 sont tous plus petits que 1. ♣

Les deux propositions suivantes nous donnent la limite de certaines suites que l'on retrouve fréquemment dans les applications.

Proposition 2.1.17

Soit r un nombre réel. On a
$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } -1 < r < 1 \end{cases} \ .$$
La suite $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas pour $r \leq -1$.

Proposition 2.1.18
Soit r un nombre réel. On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases} .$$

Exemple 2.1.19
Évaluez les limites suivantes :

$$\textbf{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2n+4} \qquad\qquad \textbf{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$$

Pour calculer la limite en (**a**), on utilise les théorèmes 2.1.8 et 2.1.18 pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2n+4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1+2/n+4/n^2} \\ &= \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1/n}{1+\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2/n + 4\lim_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{0}{1+0+0} = 0 . \end{aligned}$$

Pour évaluer la limite en (**b**), on utilise le Théorème des gendarmes. Puisque

$$0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

pour tout n, la suite $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ avec $b_n = |\cos(n)/n^2|$ tend vers 0 car les suites $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ avec $a_n = 0$ et $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ avec $c_n = 1/n^2$ tendent vers 0. Puisque la suite $\left\{\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|\right\}_{n=1}^\infty$ tend vers 0, il en est de même de la suite $\left\{\frac{\cos(n)}{n^2}\right\}_{n=1}^\infty$ grâce au théorème 2.1.12. Donc, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0 .$$

♣

Théorème 2.1.20 👁
Toute suite croissante et bornée supérieurement converge. De même, toute suite décroissante et bornée inférieurement converge. Dans le premier cas, la limite est la plus petite borne supérieure [a] de la suite alors que dans le deuxième cas c'est la plus grande borne inférieure de la suite.

a. **L'Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure. Il en découle aussi que tout ensemble non vide et borné inférieurement possède une plus grande borne inférieure.

Démonstration

On considère le cas où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite décroissante et bornée inférieurement. La démonstration pour une suite croissante et bornée supérieurement est semblable. Soit m la plus grande borne inférieure de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} a_n = m$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $m+\epsilon > m$ n'est pas une borne inférieure de la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, il existe $N > 0$ tel que $m \leq a_N < m+\epsilon$. Puisque la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est décroissante, on a $m \leq a_n < m+\epsilon$ pour $n \geq N$. C'est-à-dire, $|a_n - m| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, $\lim_{n\to\infty} a_n = m$. ∎

Exemple 2.1.21

Trouver la limite de la suite

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\} .$$

Cette suite est produite de façon itérative. C'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

On remarque que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée supérieurement par 2. Cela se démontre par induction. On a $a_1 < 2$. Supposons que $a_n < 2$. Alors, $2a_n < 4$ et

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2 .$$

Donc, $a_n < 2$ pour tout n par induction.

De plus, on remarque que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Cela se démontre aussi par induction. En fait on montre par induction que

$$a_{n+1} = 2^{1/2^{(n+1)}}\, a_n \tag{2.1.1}$$

pour tout n. Puisque $2^{1/2^{(n+1)}} > 1$, on obtient alors que $a_{n+1} > a_n$ pour tout n. L'équation (2.1.1) est vrai pour $n = 1$ car

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/2^2}\sqrt{2} = 2^{1/2^2} a_1 .$$

Supposons que l'équation (2.1.1) soit vrai pour n et montrons qu'elle est alors vrai pour $n+1$. On a

$$a_{n+2} = \sqrt{2a_{n+1}} = \sqrt{2\left(2^{1/2^{(n+1)}}\, a_n\right)} = \sqrt{2a_n}\sqrt{2^{1/2^{(n+1)}}} = a_{n+1}2^{1/2^{(n+2)}} .$$

La deuxième égalité est une conséquence de l'hypothèse d'induction. Ce qui démontre que (2.1.1) est vrai pour $n+1$ et complète la preuve par induction.

On a donc que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante et bornée supérieurement. Il découle du théorème précédent que la suite converge. Appelons L la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La suite $\{a_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ tend aussi vers L car c'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ auquel on a enlevé le premier terme. De plus, on peut montrer à partir de la définition de limite d'une suite que $\{\sqrt{2a_n}\}_{n=1}^\infty$ tend vers $\sqrt{2L}$. Puisque $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour tout n, on a donc que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2L} \ .$$

La limite L doit donc satisfaire l'équation $L^2 - 2L = L(L-2) = 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de termes positifs, on doit avoir $L = 2$. ♣

2.2 Séries

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n nombres réels, le symbole $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k$ dénote la somme de ces nombres. En d'autres mots,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

De façon générale, si $k_1 \leq k_2$ sont deux nombres entiers et a_k pour $k_1 \leq k \leq k_2$ sont des nombres réels, on a

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = a_{k_1} + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2} \ .$$

En générale, on a que $a_k = f(k)$ pour une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = \sum_{k=k_1}^{k_2} f(k) = f(k_1) + f(k_1+1) + f(k_1+2) + \ldots + f(k_2) \ .$$

Exemple 2.2.1
On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{8} \underbrace{k^2}_{=f(k)} &= \underbrace{3^2}_{=f(3)} + \underbrace{4^2}_{=f(4)} + \underbrace{5^2}_{=f(5)} + \ldots + \underbrace{8^2}_{=f(8)} \\ &= 9 + 16 + 25 + \ldots + 64\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} \underbrace{\frac{1}{k^2+1}}_{=f(k)} &= \underbrace{\frac{1}{1^2+1}}_{=f(1)} + \underbrace{\frac{1}{2^2+1}}_{=f(2)} + \underbrace{\frac{1}{3^2+1}}_{=f(3)} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{6^2+1}}_{=f(6)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{37}\end{aligned}$$

♣

Il découle de la commutativité de l'addition et de la distributivité du produit sur l'addition que

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} c a_n = c \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=k_1}^{k_2} (a_n + b_n) = \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n + \sum_{n=k_1}^{k_2} b_n \ ,$$

où c, a_n et b_n pour $k_1 \leq n \leq k_2$ sont des nombres réels.

Proposition 2.2.2
Certaines sommes sont fréquemment utilisées.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} = n \ , \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)}{30} \ .$$

Remarque 2.2.3
Commençons par démontrer la deuxième identité. Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, on a donc

$$\begin{array}{rcccccccccc} S = & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \ldots + & \boxed{(n-1)} & + & \boxed{n} \\ S = & \boxed{n} & + & \boxed{(n-1)} & + & \boxed{(n-2)} & + \ldots + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n \text{ fois}}$$

Si on fait la somme de ces deux équations, on obtient $2S = n(n+1)$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k = S = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Nous donnons deux démonstrations de la troisième identité.

La première démonstration ne fait pas appel au principe d'induction. On considère la séries télescopique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) &= (2^3 - 1) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \ldots + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) \\ &= -1 + (2^3 - 2^3) + (3^3 - 3^3) + \ldots + (n^3 - n^3) + (n+1)^3 \end{aligned}$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \ .\end{aligned}$$

Ainsi

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 \ .$$

Si on résout pour $\sum_{k=1}^{n}k^2$, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\end{aligned}$$

La deuxième démonstration utilise la principe d'induction. L'hypothèse d'induction est

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

$P(1)$ est vrai car, pour $n=1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \sum_{k=1}^{1}k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1 \ .$$

On suppose que $P(n)$ est vrai. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}k^2 &= \sum_{k=0}^{n}k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)(n+1) = \frac{2n^2+7n+6}{6}(n+1) \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{6}(n+1) \ ,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'hypothèse d'induction. Cette dernière expression n'est nul autre que $P(n+1)$. Par induction, on conclut que $P(n)$ est vrai pour tout n.

La démonstration des autres identités est laissée au lecteur. ♠

Exemple 2.2.4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2k^2+4k+1) &= 2\sum_{k=1}^{10}k^2+4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1\\ &= 2\frac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6}+4\frac{10(10+1)}{2}+7=1000\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k^2+nk) &= 4\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k\\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(11n+4)(n(n+1)}{6}\end{aligned}$$

♣

Définiton 2.2.5
Soit a_1, a_2, a_3, … une suite de nombres réels. Posons

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_k$$

pour $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ est définie comme étant la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ est appelée une **série**, les a_n sont les **termes** de la série, et les termes S_k de la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont appelés les **sommes partielles** de la série.

On dit aussi que la série **converge** si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles converge. Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles diverge, on dit que la série **diverge**.

Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles tend vers $S\in\mathbb{R}$, on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

et on dit que la **somme** de la série est S. Par abus de langage, on désigne souvent la somme de la série par $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. C'est le contexte qui détermine le sens donné à $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Exemple 2.2.6
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \ .$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. On démontrera plus loin que cette série ne converge pas.

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin(n)}{n^2+n} = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{6} + \frac{\sin(3)}{12} + \ldots + \frac{\sin(k)}{k^2+k} \ .$$

On démontrera plus loin que cette série converge. ♣

Exemple 2.2.7 Série géométrique
Soit r un nombre réel. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ et diverge si $|r| \geq 1$.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ est très importante en mathématiques et, pour cette raison, on lui a donné un nom. On appelle cette série la **série géométrique**. La valeur r est appelée la **raison** de la série géométrique.

Les sommes partielles de la série géométrique sont de la forme

$$S_k = 1 + r + r^2 + \ldots + r^k$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ainsi

$$rS_k = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{k+1}$$

et

$$(1-r)S_k = S_k - rS_k = 1 - r^{k+1} \ .$$

Donc,

$$S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

si $r \neq 1$. Pour $|r| < 1$, il découle du théorème 2.1.18 que

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1 - \lim_{k\to\infty} r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \ .$$

Si $r \leq -1$, la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ ne converge pas. Donc, la suite des sommes partielles ne converge pas si $r \leq -1$. Si $r > 1$, on sait que la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Ce qui implique que la suite des sommes partielles tend aussi vers plus l'infini. De même, si $r = 1$, on obtient que $S_k = k + 1$ pour tout k et la suite des sommes partielles tend donc vers plus l'infini. ♣

En résumé, on a :

Proposition 2.2.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad , \quad |r| < 1 \ ,$$

et la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Pour déterminer si une série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ est une série géométrique, il faut vérifier que $a_{j+1}/a_j = r$, la raison de la série, pour tout j. Si c'est le cas, on a alors que $a_j = a_0 r^j$ pour tout j et $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} r^j$.

Exemple 2.2.9
Déterminer si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ?

Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$$

est une série géométrique de raison $r = 1/25$, elle converge car $|r| < 1$. En fait,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{1-(1/25)} = \frac{25}{24} \ .$$

♣

Exemple 2.2.10
Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}}$ converge ou diverge.

Les termes de la série sont $\frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\frac{7}{25}\right)^n$. Ainsi, la série est une série géométrique de raison $7/25$. Comme la raison est plus petite que 1 en valeur absolue, la série converge. ♣

Théorème 2.2.11
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont deux séries convergentes et c est un nombre réel, alors $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ sont des séries convergentes. De plus, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = cA\ .$$

Démonstration
Le théorème précédent est une conséquence du théorème 2.1.8. En effet, considérons les sommes partielles suivantes :

$$A_k = \sum_{n=1}^{k} a_n\ ,\ \ B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n\ ,\ \ C_k = \sum_{n=1}^{k} c\, a_n \text{ et } D_k = \sum_{n=1}^{k}(a_n + b_n)\ .$$

On a $C_k = c\, A_k$ et $D_k = A_k + B_k$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} c\, A_k = c \lim_{k\to\infty} A_k = c\, A$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty} D_k = \lim_{k\to\infty}(A_k + B_k) = \lim_{k\to\infty} A_k + \lim_{k\to\infty} B_k = A + B\ .$$

■

Exemple 2.2.12
Déterminez si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4^{n-1}}{5^n}$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ?

On a

$$\frac{3 - 4^{n-1}}{5^n} = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n\ .$$

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

sont des séries géométriques de raisons $r = 1/5$ et $r = 4/5$ respectivement. Puisque dans les deux cas $|r| < 1$, ces séries convergent. Plus précisément, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-(1/5)} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-(4/5)} = 5 \ .$$

Ainsi, grâce au théorème précédent, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3-4^{n-1}}{5^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \ .$$

♣

Exemple 2.2.13
Déterminez si la série

$$-3 + \frac{6}{5} - \frac{12}{25} + \frac{24}{125} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$

converge. Si elle converge, quelle est sa valeur ? Que peut-on dire au sujet de la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n \ ? \tag{2.2.1}$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $r = -2/5$. Puisque $|r| < 1$, cette série converge. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-(-2/5)} = \frac{5}{7} \ .$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3\,\frac{5}{7} = \frac{-15}{7} \ .$$

Pour étudier la série (2.2.1), on pose

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=3}^{k} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n \ .$$

Pour $k \geq 3$, on a

$$T_k = S_k - \sum_{n=0}^{2} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n = S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n &= \lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} \left(S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25}\right) \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} S_k\right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3)\left(\frac{-2}{5}\right)^n\right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25}\end{aligned}$$

$$= \frac{-15}{7} + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \frac{24}{175} \ .$$

♣

Exemple 2.2.14 (Série télescopique) 🔧
Déterminez si la série suivante converge et, si elle converge, donner sa valeur.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} \ . \tag{2.2.2}$$

À l'aide de la méthode des fractions partielles, on obtient

$$\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$$

pour tout $n \geq 3$. Ainsi, les sommes partielles de la série (2.2.2) sont

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=3}^{k} \frac{2}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^{k} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5} \right) + \ldots + \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 3$. Le premier terme à l'intérieure d'une parenthèse est annulé par le deuxième terme à l'intérieure de la parenthèse précédente sauf pour le premier terme de la première parenthèse. On a donc

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = \lim_{k\to\infty} S_k = 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 1 \ .$$

Les séries pour lesquelles les sommes partielles peuvent être réduites grâce à une procédure permettant d'annuler une partie d'un terme à l'aide d'une partie du terme suivant comme on a fait ci-dessus (une procédure qui rappelle le mécanisme utilisé pour ranger les télescopes rétractiles) sont appelées des **séries télescopiques**. ♣

Exemple 2.2.15 👁 🔧
Montrez que la série harmonique $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Les sommes partielles sont $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. On montre par induction que

$$\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = +\infty \ .$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne peut pas tendre vers un nombre réel S car c'est une suite de termes croissants dont les termes S_{2^k} tendent vers l'infini.

On montre par induction que

$$S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \tag{2.2.3}$$

pour $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Puisque $S_2 = 1 + 1/2$, on a que (2.2.3) est vrai pour $k = 1$. Supposons que l'inégalité (2.2.3) soit vraie et montrons qu'elle est aussi vraie si on remplace k par $k+1$. On a

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= S_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k}}_{2^k \text{ termes } \geq 1/2^{k+1}} \\
&\geq S_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Ce qui donne (2.2.3) si on remplace k par $k+1$.

On a donc démontré par induction que $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \geq 0$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Puisque la suite $\{1 + k/2\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini, il en est de même pour la suite $\{S_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$. ♣

Proposition 2.2.16
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

Remarque 2.2.17
Une démonstration élémentaire de ce théorème existe. Cette démonstration ne sera pas donnée mais, à sa place, le théorème précédent sera démontré à l'aide du test de l'intégrale qui sera énoncé à la section **??** du chapitre sur les applications de l'intégrale. ♠

Théorème 2.2.18
Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Démonstration
Pour démontrer le théorème précédent, posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Puisque les suites $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{S_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tendent vers S, il découle du théorème 2.1.8 que la suite $\{S_{n+1} - S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ tend vers $S - S = 0$. ∎

Remarque 2.2.19

Il est **faux** de dire que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La série harmonique est la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = 1/n$. Il est vrai que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mais la série harmonique diverge. ♠

2.2.1 Tests de convergence

On présente des méthodes pour déterminer si une série converge ou diverge. Il faut démontrer qu'une série converge avant d'essayer d'estimer la limite de ses sommes partielles (soit analytiquement ou numériquement à l'aide d'un ordinateur). Il y a peu de séries pour lesquelles on possède une formule pour déterminer exactement la somme, il faut donc bien souvent utiliser un ordinateur pour estimer la valeur des séries convergentes.

Le critère de convergence suivant découle du théorème 2.2.18.

Théorème 2.2.20

Si la suite des termes $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.21

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ diverge car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/n^2}}{1+1/n} = \frac{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty} 1/n^2}}{1+\lim_{n\to\infty} 1/n} = 1 \neq 0 \ .$$

♣

Exemple 2.2.22

Démontrons que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}}$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \dfrac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\dfrac{49}{25}\right)^n$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ et la série diverge.

On aurait aussi pu dire que la série est une série géométrique de raison $49/25 > 1$. Comme la raison est plus grande que 1 en valeur absolue, la série diverge. ♣

Exemple 2.2.23

Démontrons que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \arctan(n)$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi/2 \neq 0$, la série diverge. ♣

La théorème suivant est une conséquence du théorème 2.1.20.

Théorème 2.2.24 (**Test de comparaison**)
Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs ou nuls.

1. Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout n, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout n, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.25
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ converge car

$$\frac{n}{\sqrt{n^5+1}} < \frac{1}{n^{3/2}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge grâce au théorème 2.2.16.

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^{1/3}}$ diverge car

$$\frac{2}{1+n^{1/3}} \geq \frac{2}{n^{1/3}+n^{1/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge grâce au théorème 2.2.16. ♣

Exemple 2.2.26
Déterminez si la séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \dfrac{1}{n3^n} \leq \dfrac{1}{3^n}$ pour tout $n > 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison 1/3), on en déduit à partir du test de comparaison que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge. ♣

Exemple 2.2.27
Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^5+4n}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \dfrac{n}{5n^5+4n} \leq \dfrac{1}{5n^4}$ pour tout $n > 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4}$ est une série convergente (théorème 2.2.16 avec $p > 1$), on obtient du test de comparaison que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^5+4n}$ converge.

♣

Exemple 2.2.28

Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{(5n^5+n^4)^{1/3}}$ converge ou diverge.

On a que

$$\frac{\sqrt{n^3+2}}{(5n^5+n^4)^{1/3}} = \frac{n^{3/2}(1+2/n^3)^{1/2}}{n^{5/3}(5+1/n)^{1/3}} = \frac{n^{1/6}(1+2/n^3)^{1/2}}{(5+1/n)^{1/3}} \geq \frac{1}{6^{1/3}n^{1/6}} \ .$$

pour tout $n > 0$ car $1+2/n^3 > 1$ et $5+1/n < 6$ pour tout $n > 0$. De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{1/3}n^{1/6}} = \frac{1}{6^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$ est une série qui diverge (théorème 2.2.16 avec $p < 1$), on en déduit à partir du test de comparaison que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{(5n^5+n^4)^{1/3}}$ diverge.

♣

Théorème 2.2.29 (**Test de comparaison à la limite**)
Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs.

1. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in]0,\infty[$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
2. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge implique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Remarque 2.2.30

1. L'énoncer de l'item 2 du théorème 2.2.29 peut être reformulé de la façon suivante. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge implique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
2. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, il suffit d'inverser les rôles de a_n et b_n pour pouvoir utiliser l'item 2 du théorème 2.2.29.

♠

Exemple 2.2.31

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^n}$ converge car la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison 1/3) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/3^n}{1/(1+3^n)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 1 \in]0,\infty[\ .$$

Par contre, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge car la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (le cas $p = 1/2$ du théorème 2.2.16) et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\ln(n)/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

où on suppose que $n > 1$ pour ne pas avoir de division par zéro. ♣

Théorème 2.2.32 (**Test de d'Alembert ou du quotient**)
Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\displaystyle\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors :

1. la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.33
Si $L = 1$ au théorème précédent, on ne peut rien dire au sujet de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Par exemple, les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ satisfont $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. La première série diverge (c'est la série harmonique) alors que la deuxième série converge (c'est le cas $p = 2$ du théorème 2.2.16). ♠

Exemple 2.2.34
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \dfrac{(n+2)5^n}{n4^{3n}}$ converge car

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+3)5^{n+1}}{(n+1)4^{3(n+1)}}\right)\left(\frac{(n+2)5^n}{n4^{3n}}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n^2+3n)}{4^3(n^2+3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(1+3/n)}{4^3(1+3/n+2/n^2)} = \frac{5}{4^3} < 1 \,.\end{aligned}$$

♣

Exemple 2.2.35
Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ converge.

Le nombre $n!$, **prononcé n factoriel** , est le nombre défini par $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ si n est un entier positif et $n! = 1$ si $n = 0$.

On utilise le test de d'Alembert pour démontrer en fait que cette série converge. On a la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$. Puisque

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!}\left(\frac{n!}{(2n+1)!}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1/n^2}{4+10/n+6/n^2} = 0 < 1\ ,\end{aligned}$$

la série converge. ♣

Exemple 2.2.36

Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge ou diverge.

On utilise le test du quotient. Puisque

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\right)\left(\frac{n^n}{(2n)!}\right)^{-1} &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1/n+1/n^2}{(4+6/n+2/n^2} \\ &= e \times 0 = 0 < 1\ ,\end{aligned}$$

la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

Le fait que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ provient du théorème !2.3.1 que nous verrons prochainement. ♣

Théorème 2.2.37 (Test de la racine)

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors

1. la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.38

Comme pour le Test de d'Alembert, on ne peut rien dire au sujet de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $L = 1$ dans le théorème précédent.

Par exemple, si on utilise le fait que la suite $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1, on peut facilement montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ satisfont $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$. Comme à la remarque 2.2.33, la première série diverge alors que la deuxième série converge. ♠

Exemple 2.2.39
La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^n}$ converge car

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1 \ .$$

♣

Un autre test pour déterminer si une série de termes positifs converge est le test de l'intégrale. Ce test sera présenté à la section **??** du chapitre sur les applications de l'intégrale d'une fonction.

2.2.2 Convergence absolue et séries alternées

Jusqu'à maintenant, la majorité des séries que nous avons considérées ne possédaient que des termes positifs. Nous allons maintenant étudier un type particulier de séries avec des termes positifs et négatifs.

Définiton 2.2.40
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une **série alternée** si $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout n.

Exemple 2.2.41
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. C'est une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Ainsi, $a_n > 0$ pour n pair et $a_n < 0$ pour n impair. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

♣

Théorème 2.2.42 (**Test des séries alternées**)
Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ satisfait les conditions suivantes :

1. $a_n > 0$ pour tout n,
2. $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n et
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

alors elle converge. De plus, les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ satisfont la relation

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \tag{2.2.4}$$

où $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Démonstration

Nous démontrons ce théorème car la démonstration nous permet de mieux comprendre la relation (2.2.4).

Puisque $S_{2(k+1)} - S_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k-1} \leq 0$ pour tout $k \geq 1$, on obtient

$$S_{2(k+1)} \leq S_{2k} \quad , \quad k \geq 1 \ . \tag{2.2.5}$$

Donc,

$$\ldots \leq S_6 \leq S_4 \leq S_2 \ .$$

De même, puisque $S_{2k+1} - S_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, on obtient

$$S_{2k+1} \geq S_{2k-1} \quad , \quad k \geq 1 \ . \tag{2.2.6}$$

Donc,

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \ldots$$

De plus

$$S_{2k-1} \leq S_{2k-1} + a_{2k} = S_{2k} \quad , \quad k \geq 1 \ . \tag{2.2.7}$$

On déduit de (2.2.5), (2.2.6) et (2.2.7) que

$$S_q \leq S_p \tag{2.2.8}$$

pour p pair et q impair. En effet, si $q < p$ on a que

$$S_p \geq S_{p-1} \geq S_q \ .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.6). Si par contre $q > p$ on a que

$$S_q \leq S_{q+1} \leq S_p \ .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.5).

Puisque la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée inférieurement par S_q où q est impair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$B = \lim_{k\to\infty} S_{2k} \ .$$

De même, puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ est croissante et bornée supérieurement par S_p où p est pair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$A = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} \ .$$

Puisque $B \geq S_q$ pour tout q impair grâce à (2.2.8), on déduit que $B \geq A$.

Puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers A et la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers B, on a que

$$B - A = \lim_{k\to\infty} S_{2k} - \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0 \ .$$

grâce à la troisième hypothèse du théorème.

Pour résumé, si on pose $S = A = B$, on a montré que

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \ldots \leq S \leq \ldots \leq S_6 \leq S_4$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S \ .$$

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la relation (2.2.4). Il découle de $S_{2k-1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \leq S - S_{2k-1} \leq S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k} \ .$$

Ainsi $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est impair. De même, il découle de $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \geq S - S_{2k} \geq S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \ .$$

Ainsi $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est pair. On a donc démontré (2.2.4). On retrouve à la figure 2.1 une représentation graphique du raisonnement que l'on vient de faire. ∎

Exemple 2.2.43

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car c'est une série alternée avec $a_n = 1/n$ qui satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées. ♣

Exemple 2.2.44

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ converge. De plus, trouver une petite valeur N telle

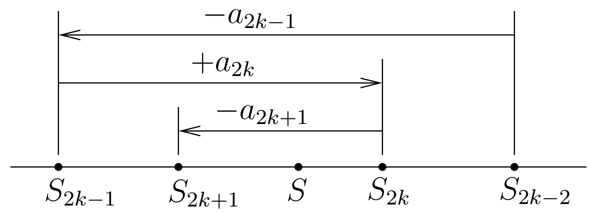


FIGURE 2.1 – Pour la série alternée du théorème 2.2.42, si on utilise S_n pour estimer la valeur S, l'erreur $|S_n - S|$ commisse est plus petite ou égale à a_{n+1}

que $|S_n - S| < 10^{-3}$ si $n \geq N$ où S_n est la n^e somme partielle de la série et S est la somme de la série.

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

où la série de droite est une série alternée avec $a_n = n/(n^2+1)$. Puisque $a_n = n/(n^2+1) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1+1/n^2} = 0$$

et

$$a_{n+1} < a_n \tag{2.2.9}$$

pour tout n, on a que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ converge. Notez que (2.2.9) provient de la relation

$$(n+1)(n^2+1) = n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + n + n = n((n+1)^2 + 1)$$

pour tout $n \geq 1$.

Pour déterminer N tel que $|S_n - S| < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$, il suffit de trouver n tel que $|S_n - S| < a_{n+1} < 10^{-3}$. Pour simplifier les calculs, on choisie n tel que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n+1} < 10^{-3}$$

Si on résout pour n, on trouve $n > 10^3 - 1$. Il suffit de prendre $N = 10^3$. ♣

D'autres applications du test des séries alternées sont données à l'exemple 5.7.24 dans le chapitre sur les applications de la dérivée d'une fonction.

Définiton 2.2.45
Une série de termes réels $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolument** si la série de termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge conditionnellement**.

Remarque 2.2.46
On peut utiliser le Test de comparaison, théorème 2.2.24, le Test de comparaison à la limite, théorème 2.2.29, le Test de d'Alembert ou du quotient, théorème 2.2.32, et le Test de la racine, théorème 2.2.37, pour déterminer la convergence absolue d'une série. ♠

Exemple 2.2.47
La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle satisfait le test des séries alternées. Par contre, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est la série harmonique qui diverge. Donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge conditionnellement. ♣

Comme on vient de le voir à l'exemple précédent, on peut avoir une série qui converge mais qui ne converge pas absolument. L'inverse n'est pas possible.

Théorème 2.2.48
Si une série converge absolument alors elle converge.

Démonstration
Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série qui converge absolument. On pose $b_n = a_n + |a_n|$ pour $n \geq 1$. On remarque que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad a_n < 0 \\ 2a_n & \text{pour} \quad a_n \geq 0 \end{cases} .$$

Donc, $b_n - |a_n| = a_n$ pour tout $n \geq 1$.

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, on a que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge. De plus, puisque $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge, on a par le test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Finalement, puisque les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Exemple 2.2.49
La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ converge car elle converge absolument. En effet,

$$0 \leq \left|\frac{\sin(n)}{n^3}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge grâce au théorème 2.2.16. Il découle du test de comparaison que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n)}{n^3}\right|$ converge. ♣

2.3 Le nombre e et les fonctions e^x et $\ln(x)$

Théorème 2.3.1
La suite $\displaystyle\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Sa limite est définie comme étant le **nombre d'Euler**

$$e = 2.718281828459\ldots$$

Démonstration 👁
Pour démontrer que cette limite existe, on utilise la formule suivante, connue sous le nom de **formule du binôme**, qui permet de développer une expression de la forme $(a+b)^n$ où n est un entier positif.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

où $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Par exemple, on retrouve $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Montrons que la suite $\displaystyle\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

On commence par montrer que la suite est bornée supérieurement. Grâce à la formule du binôme, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k .$$

Or

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$
$$= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

pour $1 \leq k \leq n$. De plus,

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\times 2\times 3\times\ldots\times k} \leq \frac{1}{\underbrace{2\times 2\times 2\ldots\times 2}_{k-1 \text{ fois}}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour $1 \leq k \leq n$. On a donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{1-1/2} = 3\ .$$

On montre que la suite $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\ .$$

Or, il découle de la formule du binôme que

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n = 1-\frac{n}{(n+1)^2}+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0}+\ldots$$
$$+\underbrace{\frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}}-\frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

si n est impair et

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n = 1-\frac{n}{(n+1)^2}+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0}+\ldots$$
$$+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^{2(n-2)}}-\frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}}}_{>0}+\underbrace{\frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

si n est pair. Donc,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{n^3+3n^3+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1\ .$$

La convergence de la série $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est donc une conséquence du théorème 2.1.20 ∎

Remarque 2.3.2
Une autre façon équivalente de définir le nombre e est donnée lors de l'étude de la dérivée de fonctions exponentielles. ♠

Définiton 2.3.3
On définit $\ln(x)$ comme étant $\log_e(x)$ pour $x > 0$. C'est à dire,

$$y = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x\ .$$

La fonction $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est l'inverse de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

Remarque 2.3.4 👁
Au risque de répéter ce qui a déjà été annoncé à la section 1.6.1, une définition simple de b^p pour $b \in]0,\infty[$ et $p \in \mathbb{R}$ sera donnée à la section **??**. Cette définition fera appel aux séries. ♠

Exemple 2.3.5
Évaluer la limite de la suite $\left\{\dfrac{n\,e^{-n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Pour ce faire, on remarque que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car c'est le cas $0 < r = e^{-1} < 1$ du théorème 2.1.17. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ (voir figure 2.2) que la limite de la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ est 0.

On peut alors conclure que la limite de la suite $\left\{\dfrac{n\,e^{-n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est aussi 0 car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,e^{-n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-n}}{1+1/n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)} = \frac{0}{1+0} = 0\ .$$

♣

Exemple 2.3.6
Évaluer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n}}{n^2}$.

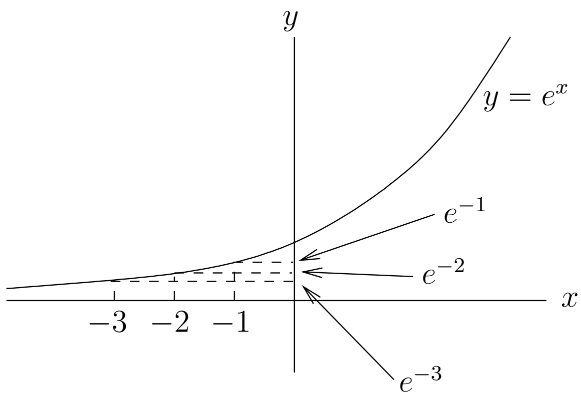


FIGURE 2.2 – La suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0

Comme à l'exemple précédent, on a que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. De plus, la suite $\{1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers 0 (c'est le cas $r = 2 > 0$ du théorème 2.1.18). Ainsi, grâce au théorème 2.1.8, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} e^{-n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right) = 0 \times 0 = 0 \ .$$

♣

2.3.1 Fonctions hyperboliques

Les **fonctions hyperboliques** sont :

1. le sinus hyperbolique $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
2. le cosinus hyperbolique $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
3. la tangente hyperbolique $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
4. la cotangente hyperbolique $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
5. la sécante hyperbolique $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et
6. la cosécante hyperbolique $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\sinh(x)}$ pour pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ces fonctions sont fréquemment utilisées en ingénierie. Le graphe du sinus hyperbolique et celui du cosinus hyperbolique sont donnés à la Figure 2.3

Les fonctions hyperboliques n'apportent rien de nouveau du point de vue des mathématiques puisqu'elles proviennent de formules algébriques en termes des fonctions exponentielles

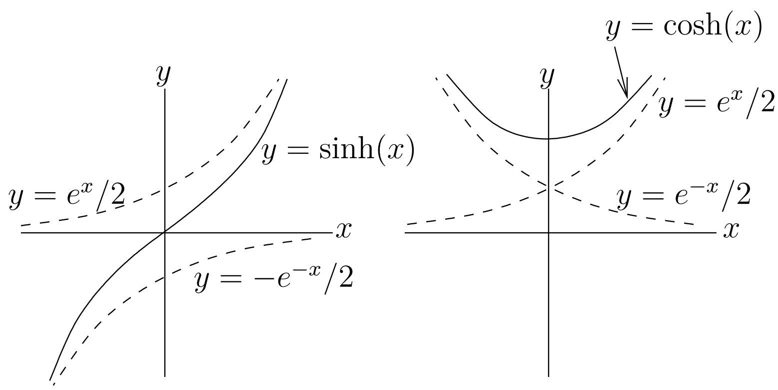


FIGURE 2.3 – Le graphe du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique

e^x et e^{-x}. Il n'en reste pas moins qu'elle permettent de présenter plusieurs résultats de façon élégante.

Les fonctions hyperboliques satisfont les identités suivantes : $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ (fonction impaire), $\cosh(-x) = \cosh(x)$ (fonction paire), $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ et biens d'autres. Elles satisfont donc des identités semblables à celles satisfaites par les fonctions trigonométriques.

Remarque 2.3.7
En fait, on montre en analyse complexe, qu'il y a un lien entre les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$, et la fonction e^z. C'est un sujet pour les étudiant.e.s qui poursuivront leurs études des mathématiques. ♠

Finalement, pour chaque fonction hyperbolique, on peut définir une fonction inverse. Par exemple, la fonction $\sinh^{-1}$ est définie par $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ pour $x \in \mathbb{R}$. En effet,

$$y = \sinh^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \ .$$

C'est un polynôme de degré deux en e^x. Donc, si on utilise la formule pour trouver les racines d'une polynôme de degré deux, on obtient

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1} \ .$$

On ne peut pas utiliser la formule $\dfrac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$ car elle donne une valeurs négatives alors que $e^x > 0$. On a donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ pour $y \in \mathbb{R}$. Pour respecter la tradition d'avoir y en fonction de x, on échange les rôles de x et y pour obtenir $y = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

De façons semblables, on peut montrer que $\tanh^{-1}$ est définie par
$\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour $-1 < x < 1$. Le domaine de $\tanh^{-1}$ est $]-1,1[$, l'image de tanh.

La fonction cosh a aussi un inverse si on considère seulement $\cosh(x)$ pour $x \geq 0$. Sur l'intervalle $[0, \infty[$, la fonction cosh est injective et possède donc un inverse. L'image de cosh est $[1, \infty[$. L'inverse de cosh est donnée par $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour $x \geq 1$.

2.4 Exercices

Question 2.1
Déterminez si les suites suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs limites.

a) $\left\{\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **b)** $\{\ln(n+3) - \ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$ **c)** $\left\{\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{3 + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ **e)** $\{2 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$

Question 2.2
On laisse tomber une balle d'une hauteur de 10 mètres et elle rebondit. A chaque bond elle atteint 3/4 de la hauteur du bond précédent. Ainsi, au premier bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)$ mètres, au deuxième bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)^2$ mètres, etc.
a) Trouvez une expression pour la hauteur du n^e bond.
b) Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la première, deuxième, troisième et quatrième fois.
c) Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la n^e fois. **d)** Quelle sera éventuellement la distance parcourue par la balle ?

Question 2.3
Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{\sqrt[3]{n^7 + 1}}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n+4}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^3 + 5)^{1/3}}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ **k)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{3^n}$ **l)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 1}$

Question 2.4
Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs sommes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n-2}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{6^n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-3^{n+2}}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^n 2^{-2n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

Question 2.5

Déterminez si les séries suivantes convergent absolument, convergent conditionnellement ou divergent.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2}\right)$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n+1)(2n+3)}$

Question 2.6

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série.

Question 2.7

Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{4^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série. Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-3}.

Question 2.8

On considère la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

a) Montrez que cette série converge.
b) Trouvez un petit entier N tel que $|S - S_N| < 10^{-4}$ où S est la somme de la série et S_N est la somme partielle des N premiers termes de la séries.
c) Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-4}.

Question 2.9

Un fabricant de cerfs-volants vent 5000 unités par année. Chaque année, 10% des cerfs-volants vendus depuis le début de la production sont brisés par leur propriétaire.

a) Combien y-aura-t-il de cerfs-volants après n années ?

b) Quel est le niveau de stabilisation du marché pour ce type de cerfs-volants ? C'est-à-dire, si P_n est le nombre de cerfs-volants après n années, quelle est la limite $\lim_{n\to\infty} P_n$ si cette limite existe. ?

Limites et fonctions continues — 3

La première partie du chapitre est consacrée aux limites de fonctions en un point et à l'infini. La définition de limite d'une fonction en un point est introduite de façon intuitive. Par la suite, on donne une définition rigoureuse de limite.

La deuxième partie du chapitre présente la définition de fonctions continues avec quelques unes de leurs propriétés. On verra d'autres propriétés des fonctions continues dans les prochains chapitres. La limite de fonctions en un point sera aussi l'outil qui nous permettra de définir la dérivée d'une fonction au chapitre suivant.

3.1 Limites

L'exemple suivant introduit le concept de limite d'une fonction en un point.

Exemple 3.1.1
Si $g(x) = x^2+1$, vérifions que $g(x)$ approche 2 lorsque x approche 1. Dans le tableau suivant, on évalue g a chacun des termes de la suite de nombres

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

qui tend vers 1.

n	1	2	3	4	$\ldots$	100	$\ldots$	10000	$\ldots$
$x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$	2	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{5}{4}$	$\ldots$	$\dfrac{101}{100}$	$\ldots$	$\dfrac{10001}{10000}$	$\ldots$
$g(x_n)$	5	3.25	$2.\overline{7}$	2.5625	$\ldots$	2.0201	$\ldots$	2.00020001	$\ldots$

On voit que $g(x_n)$ approche la valeur 2 lorsque $n \to \infty$ et donc lorsque x_n approche 1. On a donc que la suite

$$\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{g(x_1), g(x_2), g(x_3), \ldots\}$$

tend vers 2. On écrit

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 2\ .$$

On peut aussi vérifier algébriquement que $g(x_n)$ où $x_n = 1+1/n$ approche 2 lorsque $n \to \infty$. On a
$$g(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$
qui approche 2 lorsque $n \to \infty$ car $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Avec $x_n = 1 - 1/n^2$, on obtient les résultats du tableau suivant qui montrent encore que $g(x_n)$ approche 2 lorsque x_n approche 1.

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$	0	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{8}{9}$	$\dfrac{15}{16}$	...	$\dfrac{9999}{10000}$	...	$\dfrac{99999999}{100000000}$	...
$g(x_n)$	1	1.5625...	1.7901...	1.8789...	...	1.9998...	...	1.99999998...	...

la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ approche la valeur 2 plus rapidement avec cette suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres qu'avec la suite précédente mais l'idée fondamentale est que la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ approche encore la valeur 2 avec cette nouvelle suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approche la valeur 1. On a encore
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 2 \ .$$
Comme on l'a fait pour $x_n = 1 + 1/n$, on peut vérifier algébriquement que $g(x_n)$ où $x_n = 1 - 1/n^2$ approche 2 lorsque $n \to \infty$. On a
$$g(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 + 1 = 2 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}$$
qui approche 2 lorsque $n \to \infty$ car $1/n^2$ et $1/n^4$ approchent 0 lorsque $n \to \infty$.

Quelque soit la suite de nombres $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 1 que l'on choisisse, le résultat sera toujours une suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers la valeur 2. En d'autres mots,
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 2$$
pour
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \ .$$
Pour résumer ce dernier énoncé (i.e. le fait que $g(x_n)$ tend vers 2 quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 1), on écrit
$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2 \ .$$

À partir du graphe de g que l'on retrouve à la figure 3.1, on voit que $g(x_n)$ approche la valeur 2 lorsque la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ approche 1. ♣

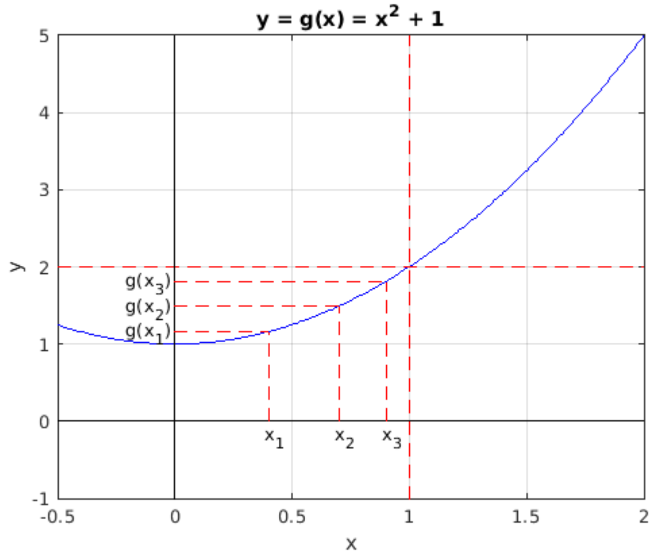


FIGURE 3.1 – Graphe de $g(x) = x^2 + 1$ pour x près de 1.

Définiton 3.1.2
Soit f une fonction définie pour x près de c (il n'est pas nécessaire que f soit définie à c). On écrit

$$\lim_{x \to c} f(x) = C$$

s'il existe un unique nombre C tel que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = C$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c. On écrit aussi $f(x) \to C$ lorsque $x \to c$. On dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur** C **lorsque** x **converge (ou tend) vers** c. On dit aussi que C **est la limite de** f **au point** c.

Il est aussi nécessaire à l'occasion de considérer seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approchent c par la droite ou la gauche.

Définiton 3.1.3
Si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c, on considère seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $\underline{x_n < c}$, on écrit

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = C$$

ou $f(x) \to C$ lorsque $x \to c^-$, et on dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur** C **lorsque** x **converge (ou tend) par la gauche vers** c. On dit aussi que C **est la limite à gauche de** f **au point** c.

De même, si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c, on considère seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $\underline{x_n > c}$, on écrit

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = C$$

ou $f(x) \to C$ lorsque $x \to c^+$, et on dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur** C **lorsque** x **converge (ou tend) par la droite vers** c. On dit aussi que C **est la limite à droite de** f **au point** c.

Exemple 3.1.4
Soit $g(x) = \sin(x)/x$. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x approche 0 ? En d'autres mots, quelle est la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \ ?$$

Dans le tableau suivant, on évalue $g(x)$ lorsque x approche 0. On a choisi la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n = 1/n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Toute autre suite qui tend vers 0 aurait pu être utilisée.

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$g(x_n)$
1	1	$0.8414709848\ldots$
2	$1/2$	$0.9588510772\ldots$
3	$1/3$	$0.9815840903\ldots$
4	$1/4$	$0.9896158370\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$1/100$	$0.9999833334\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10000	$1/10000$	$0.9999999983\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

On voit que la suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. On va montrer plus loin que cela est vrai quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ .$$

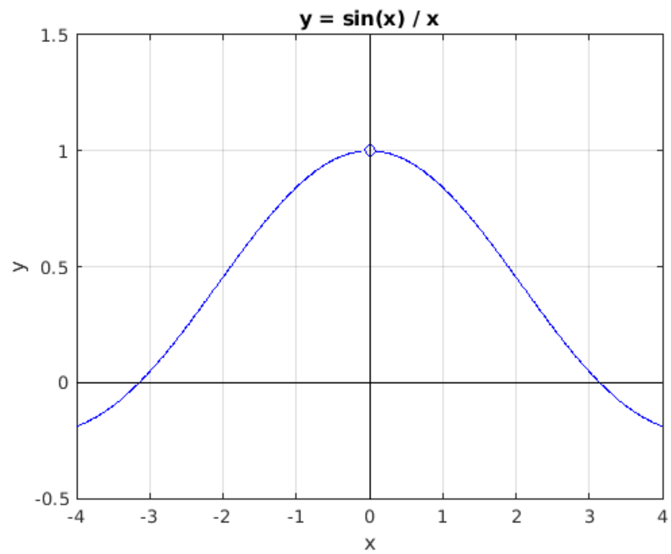


FIGURE 3.2 – Graphe de $g(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$.

Comme on peut constater à partir du graphe de g donné à la figure 3.2, $g(x)$ approche la valeur 1 lorsque x approche 0. Par contre, la fonction g n'est pas définie à l'origine. ♣

Exemple 3.1.5
Soit $g(x) = \sin(1/x)$. Est-ce que $g(x)$ approche une valeur quelconque lorsque x approche l'origine ? Si oui, quelle est cette valeur ?

Le tableau suivant donne les valeurs de g pour les termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. La suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car $g(x_n) = 0$ pour tout n.

n	1	2	3	4	$\ldots$	100	$\ldots$	10000	$\ldots$
$x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$	$\dfrac{1}{2\pi}$	$\dfrac{1}{4\pi}$	$\dfrac{1}{6\pi}$	$\dfrac{1}{8\pi}$	$\ldots$	$\dfrac{1}{200\pi}$	$\ldots$	$\dfrac{1}{20000\pi}$	$\ldots$
$g(x_n)$	0	0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$

Il semble que $g(x)$ approche 0 lorsque x approche 0. Essayons maintenant avec la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 2/((4n+1)\pi)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. Par contre, le tableau suivant semble indiquer que $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ approche 1 lorsque x_n approche 0.

n	1	2	3	4	$\ldots$	100	$\ldots$	10000	$\ldots$
$x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$	$\dfrac{2}{5\pi}$	$\dfrac{2}{9\pi}$	$\dfrac{2}{13\pi}$	$\dfrac{2}{17\pi}$	$\ldots$	$\dfrac{2}{4001\pi}$	$\ldots$	$\dfrac{2}{40001\pi}$	$\ldots$
$g(x_n)$	1	1	1	1	$\ldots$	1	$\ldots$	1	$\ldots$

En fait, pour tout nombre α entre -1 et 1 inclusivement, on pourrait trouver une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0 et telle que $g(x_n)$ tend vers α lorsque $n \to \infty$. Il y a aussi des suites

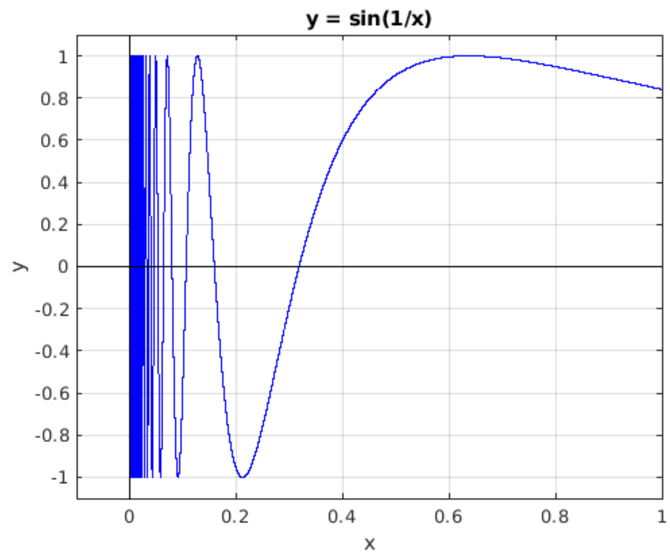


FIGURE 3.3 – Graphe de $g(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0 et telles que $g(x_n)$ n'approche aucune valeur fixe lorsque $n \to \infty$ mais se promène entre -1 et 1.

Le graphe de g que l'on retrouve à la figure 3.3 montre bien que $g(x)$ n'approche pas une valeur unique lorsque x approche 0. Le graphe de g oscille entre -1 et 1 de plus en plus rapidement lorsque x approche 0.

Donc, dans la définition de $\lim_{x\to c} f(x) = C$, il est très important que la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tende vers une valeur unique C quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c. ♣

La définition précédente pour

$$\lim_{x\to c} f(x) = C \ ,$$

où on utilise les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c pour déterminer la valeur possible de C, est très utile pour prédire numériquement la valeur possible C de la limite. Cependant, il est généralement impossible d'utiliser cette définition pour prouver que la limite est bien la valeur C suggérée. Pour prouver cela, il faudrait vérifier que toutes les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c donnent des suites $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers C. Ceci est évidemment impossible.

Exemple 3.1.6
Est-ce que la limite suivante existe ?

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

On considère deux cas : x converge vers 1 avec $x > 1$ et x converge vers 1 avec $x < 1$.

Pour $x > 1$, on a que $|x-1| = x-1$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

Pour $x < 1$, on a que $|x-1| = 1-x$. Ainsi,
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$
Puisque
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \ ,$$
on doit conclure que la limite n'existe pas. ♣

Exemple 3.1.7 (Suite de l'exemple 3.1.1)

Vérifier de façon algébrique (et donc rigoureusement) que $g(x) = x^2+1$ satisfait $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$.

On remarque que toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approche 1 peut s'écrire $x_n = 1 + r_n$ où la suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ approche 0 lorsque $n \to \infty$. C'est certainement le cas pour les suites $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ et $\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ que nous avons utilisées précédemment. Ainsi
$$g(x_n) = g(1+r_n) = (1+r_n)^2 + 1 = 2 + 2r_n + r_n^2 \to 2$$
lorsque $n \to \infty$ car r_n et r_n^2 approchent 0 lorsque $n \to \infty$. Donc, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 2$. ♣

3.1.1 Epsilon et delta

On donne une définition de la limite d'une fonction en un point qui est équivalent à celle donnée à la section précédente et qui ne fait pas appelle aux suites.

Malheureusement, la méthode algébrique utilisée à l'exemple 3.1.7 est restreinte aux fonctions algébriques (simples). La définition de
$$\lim_{x\to c} f(x) = C \ ,$$
que l'on va donner ci-dessous est équivalente à la définition de limite d'une fonction en un point que l'on a donnée précédemment. Cette nouvelle définition est souvent appelée la définition en termes de ϵ et δ de la limite d'un fonction en un point. C'est cette définition qui est généralement utilisée pour démontrer rigoureusement que la limite d'une fonction f en un point c est une valeur C.

Définiton 3.1.8

Soit f une fonction définie pour $x < c$ et $x > c$ (il n'est pas nécessaire que f soit définie à $x = c$). On écrit
$$\lim_{x\to c} f(x) = C$$
si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que
$$|f(x) - C| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x-c| < \delta,\ x \neq c \ .$$
On dit que $f(x)$ converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge vers c.

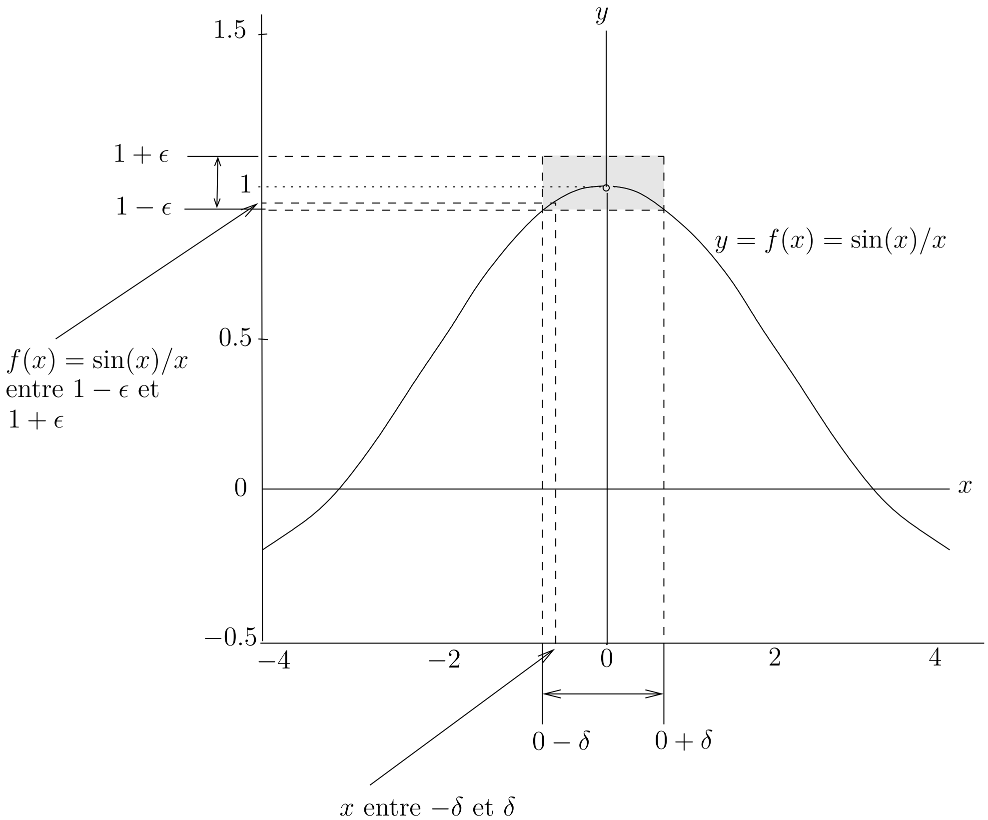


FIGURE 3.4 – Pour ϵ donné, le graphe nous donne une valeur possible de δ pour que $f(x) = \sin(x)/x$ soit entre $1-\epsilon$ et $1+\epsilon$ quel que soit $x \neq 0$ entre $-\delta$ et δ.

Nous illustrons cette nouvelle formulation de la limite d'une fonction en un point à l'aide de la fonction $\sin(x)/x$ au point $x = 0$. Quelque soit la valeur de ϵ, on remarque à partir du graphe de la figure 3.4 qu'il est toujours possible de trouver $\delta > 0$ pour que $f(x)$ soit entre $1-\epsilon$ et $1+\epsilon$ (on a $C = 1$) si x est entre $-\delta$ et δ (on a $c = 0$). Le graphe de f est complètement à l'intérieure de la boite définie par $-\delta < x < \delta$ et $1-\epsilon < y < 1+\epsilon$. Plus ϵ sera petit, plus on devra prendre δ petit.

À la figure 3.5, nous montrons ce qui se passe avec une fonction f qui n'a pas de limite au point c. Il n'existe pas de δ tel que le graphe de f entre $c-\delta$ et $c+\delta$ soit complètement à l'intérieure de la boite définie par $c-\delta < x < c+\delta$ et $C-\epsilon < y < C+\epsilon$. Il n'existe donc pas de δ pour satisfaire la définition précédente.

Dans la définition de limite, ϵ prend n'importe laquelle des valeurs positives. Il ne suffit pas de trouver un ϵ pour lequel on peut trouver un δ tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $]C-\epsilon, C+\epsilon[$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c-\delta, c+\delta[$. Il faut que pour chaque valeur $\epsilon > 0$ on puisse trouver un δ (qui peut varier si on varie ϵ) tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $]C-\epsilon, C+\epsilon[$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c-\delta, c+\delta[$.

Exemple 3.1.9

Montrons à l'aide de la dernière définition de limite d'une fonction en un point que $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

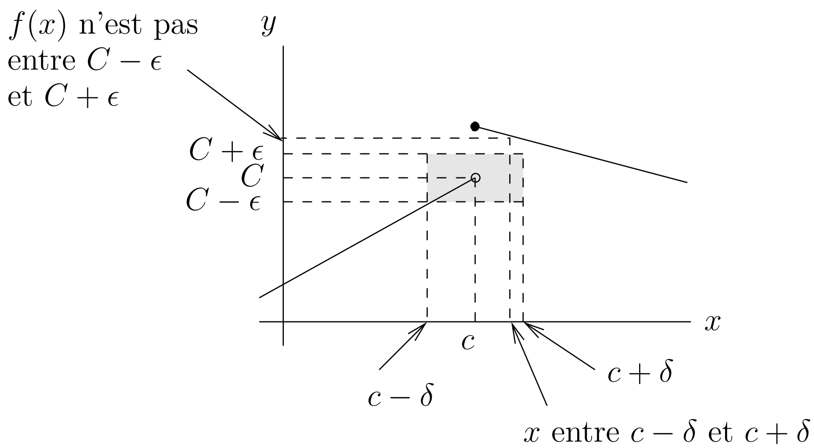


FIGURE 3.5 – Pour ϵ donné, il est impossible de trouver δ pour que $f(x)$ soit entre $C-\epsilon$ et $C+\epsilon$ quel que soit $x \neq c$ entre $c-\delta$ et $c+\delta$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Puisque l'on cherche la limite lorsque x approche 2, on peut supposer que $x > 1$. Ainsi,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-x}{2x}\right| = \frac{|2-x|}{|2x|} < \frac{|2-x|}{2}$$

pour $x > 1$. Si on prend $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, on a alors que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{|2-x|}{2} < \frac{\delta}{2} \leq \epsilon$$

pour $|x-2| < \delta$. ♣

Proposition 3.1.10
La définition de convergence donnée à la page 81 est équivalent à la définition de convergence donnée à la page 85.

Démonstration
i) Supposons que $\lim_{x\to c} f(x) = C$ selon la définition de la page 81. Montrons que la définition de la page 85 est satisfaite.

La preuve est par contradiction. Supposons que la définition de la page 85 ne soit pas satisfaite. Cela implique qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout δ on peut trouver au moins un point x_δ tel que $|x_\delta - c| < \delta$ et $|f(x_\delta) - C| \geq \epsilon$.

Si on prend $\delta = 1/n$ pour n un entier positif, on obtient une suite $\left\{x_{1/n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $\left|x_{1/n} - c\right| < \dfrac{1}{n}$ et $\left|f(x_{1/n}) - C\right| \geq \epsilon$ pour tout n. On a donc $\lim_{n\to\infty} x_{1/n} = c$ mais la suite $\left\{f(x_{1/n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ ne tend pas vers C. Ce qui contredit la définition de la page 81.

ii) Supposons maintenant que $\lim_{x \to c} f(x) = C$ selon la définition de la page 85. Montrons que la définition de la page 81 est satisfaite.

Supposons que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ soit une suite qui tend vers c. Soit $\epsilon > 0$. Selon la définition de la page 85, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - C| < \epsilon$ si $|x - c| < \delta$. Puisque $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, il existe $N > 0$ tel que $|x_n - c| < \delta$ pour $n > N$. Ainsi, on a que $|f(x_n) - C| < \epsilon$ pour $n > N$. Puisque ϵ est arbitraire, on a $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = C$.

Comme le résultat du paragraphe précédent est vrai pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c, on a que $\lim_{x \to c} f(x) = C$ selon la définition de la page 81. ∎

3.1.2 Règles pour évaluer les limites

Le théorème suivant est parfois très utile pour évaluer la limite d'une fonction en un point. On a déjà vu une version de ce théorème (voir théorème 2.1.10) pour les suites. La présente version en est une conséquence.

Théorème 3.1.11 (**des gendarmes ou sandwich**)
Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x près de c. Si

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x \to c} g(x) = L \ .$$

Exemple 3.1.12
La méthode algébrique de l'exemple 3.1.7 n'est pas utile pour démontrer rigoureusement que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ . \tag{3.1.1}$$

On doit utiliser une autre approche. Le théorème précédent nous permet de démontrer rigoureusement (3.1.1).

À la figure 3.6, on voit bien que

$$\sin(x) = |\overline{CE}| < |\overline{AC}| < \text{longueur de l'arc de cercle } AC = x \ .$$

Donc,

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 \ . \tag{3.1.2}$$

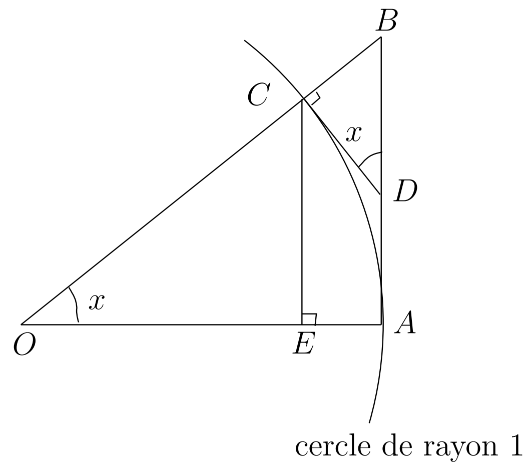


FIGURE 3.6 – La figure utilisée pour démontrer rigoureusement que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$.

De plus,

$$\begin{aligned} x &= \text{longueur de l'arc de cercle } AC \\ &< |\overline{AD}| + |\overline{DC}| < |\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{AB}| = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OA}|} \\ &= \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ . \end{aligned}$$

Donc,

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} \ . \tag{3.1.3}$$

De (3.1.2) et (3.1.3), on obtient

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \ .$$

Il est facile de vérifier à partir de la définition du cosinus que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$

Par exemple, pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0, on a que $\cos(x_n)$ tend vers $\cos(0) = 1$. Ainsi, on obtient que $g(x) = \sin(x)/x$ approche 1 lorsque x approche 0 grâce au théorème des gendarmes. ♣

Comme on vient de voir, il n'est pas toujours facile de démontrer rigoureusement qu'une fonction à une limite en un point.

Comme pour les limites de suites, nous avons les propriétés suivantes :

Théorème 3.1.13
On assume que $\lim_{x\to c} f(x) = A$ et $\lim_{x\to c} g(x) = B$.

1. $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = A + B$.
2. Si k est un nombre réel, alors $\lim_{x\to c} (k\ f(x)) = kA$.
3. $\lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = AB$.
4. Si $B \neq 0$ (donc $g(x) \neq 0$ pour x près de c), alors $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Les quatre conclusions du théorème précédent sont souvent énoncées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \ , \\
\lim_{x\to c} kf(x) &= k \lim_{x\to c} f(x) \ , \\
\lim_{x\to c} f(x)g(x) &= \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

respectivement.

3.2 Fonctions continues

Une propriété que possèdent certaines fonctions est la **continuité**. La fonction f est continue au point $x = c$ si f est définie au point $x = c$ et $f(x)$ approche la valeur $f(c)$ lorsque x approche c.

Si on utilise la définition de limite introduite à la section précédente pour définir la continuité d'une fonction au point $x = c$, on obtient l'énoncé suivant :

Définiton 3.2.1
Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c. La fonction f est **continue au point** c si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \ .$$

En d'autres mots, f est continue au point c si $f(c)$ existe et $f(x_n)$ approche $f(c)$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c.

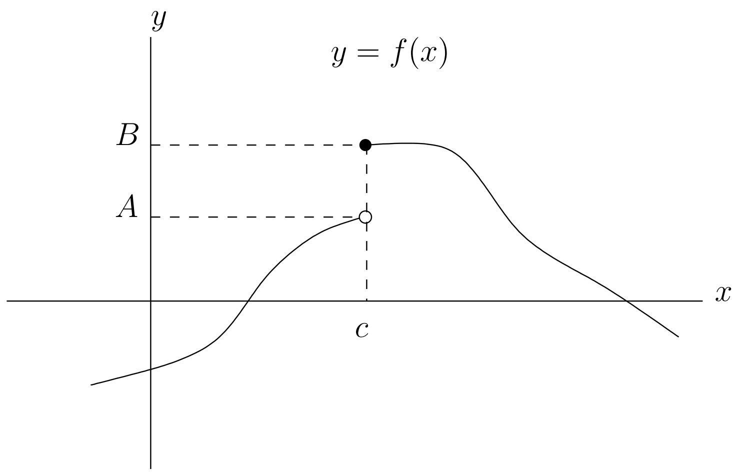


FIGURE 3.7 – La fonction f n'est pas continue au point $x = c$

À la figure 3.7, on trouve le graphe d'une fonction f qui n'est pas continue au point $x = c$ car $f(x)$ approche la valeur B lorsque $x > c$ approche c et $f(x)$ approche la valeur $A \neq B$ lorsque $x < c$ approche c. Comme f est une fonction, elle ne peut pas prendre deux valeurs distinctes, A et B, lorsque $x = c$. Dans la figure 3.7, le cercle plein à l'extrémité gauche de la courbe supérieure (à $x = c$) et le cercle vide à l'extrémité droite de la courbe inférieure (aussi à $x = c$) indiquent que $f(c) = B$.

Pour qu'une fonction ne soit pas continue en un point $x = c$, il faut que le graphe de la fonction soit représenté par une courbe brisée à $x = c$.

Exemple 3.2.2
À l'exemple 3.1.1, on a montré que la fonction $g(x) = x^2 + 1$ est continue au point $x = 1$ car on a montré que $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$ et on a que $g(1) = 2$. Donc,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \ .$$

♣

Exemple 3.2.3
La fonction $g(x) = \sin(x)/x$ que l'on a étudié à l'exemple 3.1.4 n'est pas continue au point $x = 0$ car $g(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Par contre, si on défini

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(x) = g(x)$ pour $x \neq 0$ et f est continue au point $x = 0$ car

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) \ .$$

Le graphe de f est le graphe de la figure 3.2 où le point $(0, 1)$ est maintenant représenté par un cercle plein. ♣

Définiton 3.2.4
Si une fonction f est continue en tout point d'un intervalle $]a, b[$ (resp. $[a, b]$, $[a, b[$, etc.) on dit que la fonction f est **continue sur l'intervalle** $]a, b[$ (resp. $[a, b]$, $[a, b[$, etc.).

Il est toujours préférable (si c'est possible) d'utiliser des fonctions continues pour décrire les phénomènes physiques, biologiques, et autres. La raison pour cette préférence est qu'une petite variation de l'argument d'une fonction continue aura très peu d'effet (en général) sur la valeur retournée par la fonction. Cela est nécessaire si on veut faire des prédictions à long terme ou si on veut estimer les valeurs à fournir à la fonction pour obtenir le résultat escompté. On illustre ce dernier type de problèmes dans l'exemple suivant.

Exemple 3.2.5
On observe qu'une population de bactéries est gouvernée par le « système dynamique discret » (voir section 5.9)

$$p_{t+1} = 0.7p_t + 10$$

où p_t est le nombre de bactéries en unité de mille t heures après le début des observations.

Combien de bactéries doit-on introduire au départ pour obtenir $100,000$ bactéries avec une précision de $1,000$ bactéries après une heure ? Après deux heures ?

Le nombre de bactéries après une heure est p_1, il faut donc choisir p_0 tel que que

$$99 < p_1 = 0.7p_0 + 10 < 101 \ .$$

Il ne faut pas oublier que l'on compte les bactéries par unité de $1,000$ dans le système dynamique discret. Si on isole p_0, on trouve

$$127.142\ldots = \frac{99-10}{0.7} < p_0 < \frac{101-10}{0.7} = 130 \ .$$

Il faut donc introduire entre $127,142$ et $130,000$ bactéries initialement.

Le nombre de bactéries après deux heures est p_2. Or,

$$p_2 = 0.7p_1 + 10 = 0.7(0.7p_0 + 10) + 10 = 0.49p_0 + 17 \ .$$

Il faut donc que

$$99 < 0.49p_0 + 17 < 101 \ .$$

Ainsi,

$$167.3468\ldots = \frac{99-17}{0.49} < p_0 < \frac{101-17}{0.49} = 171.4285\ldots$$

Il faut introduire entre $167,347$ et $171,429$ bactéries initialement. ♣

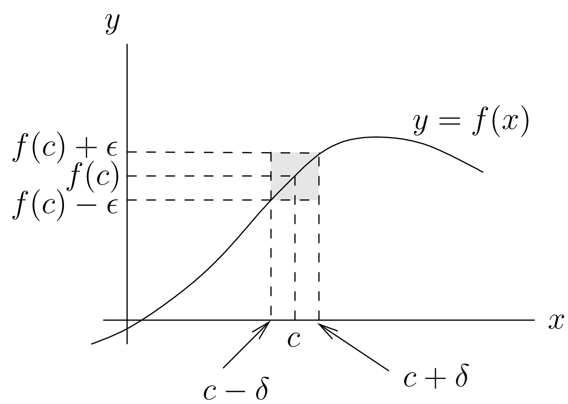


FIGURE 3.8 – Pour ϵ donné, il est possible de trouver δ pour que $f(x)$ (incluant $f(c)$) soit entre $f(c) - \epsilon$ et $f(c) + \epsilon$ quel que soit x entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

3.2.1 Epsilon et delta 👁

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous donne une définition de la continuité qui est équivalente à celle que l'on vient de donner.

Définiton 3.2.6
Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c. La fonction f est continue au point $x = c$ si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - c| \leq \delta \ .$$

Remarque 3.2.7
On illustre à la figure 3.8 la deuxième formulation de la définition d'une fonction continue f en un point c. Quel que soit le nombre ϵ, on peut toujours trouver δ tel que le graphe de la fonction f entre $c-\delta$ et $c+\delta$, incluant $(c, f(c))$, soit dans la boite définie par $c-\delta < x < c+\delta$ et $f(c) - \epsilon < y < f(c) + \epsilon$. ♠

3.3 Quelques propriétés des fonctions continues

On peut démontrer les résultats suivants à partir de la définition d'une fonction continue.

Proposition 3.3.1

- Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques sont des fonctions continues sur leur domaine.
- Il découle du théorème 3.1.13 que le produit et la somme de fonctions continues donnent une nouvelle fonction continue. De même, le quotient de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue sauf aux points où le dénominateur est nul.
- La composition de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue.

Si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ est une suite qui converge vers un point c du domaine d'une fonction continue f, alors la suite $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ converge vers le point $f(c)$. En d'autres mots,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Puisque la définition de limite d'une fonction en un point c fait appel aux suites $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ qui converge vers c, on obtient le résultat suivant qui est très utile pour calculer des limites.

Proposition 3.3.2
Soit f une fonction continue et g une fonction dont l'image est un sous-ensemble du domaine de f. On peut donc considérer la composition $f\circ g$. Si $\lim\limits_{x\to r} g(x) = s$ est un élément du domaine de f, alors $\lim\limits_{x\to r} f(g(x)) = f(s)$. En d'autres mots,

$$\lim_{x\to r} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to r} g(x)\right)$$

Exemple 3.3.3
Calculez les limites suivantes si elles existent.

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 2} \sin\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} \qquad \textbf{c)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$$

a) On note que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4\ .$$

Puisque $\sin(x)$ est continue en $x=4$, on put utiliser la proposition 3.3.2 pour conclure que

$$\lim_{x\to 2} \sin\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}\right) = \sin(4)\ .$$

b) On remarque que

$$\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2-\sqrt{x}} = -(\sqrt{x}+2)$$

pour $x \neq 4$. Ainsi

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} -(\sqrt{x}+2) = -(\sqrt{4}+2) = -4$$

On a utilisé le fait que $\sqrt{x}-2$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite.

c) Pour évaluer cette limite, on élimine premièrement la racine carrée au dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} &= \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}\left(\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}\right) = \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} \\ &= \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = -(2+\sqrt{x+3})\end{aligned}$$

pour $x \neq 1$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} -(2+\sqrt{x+3}) = -(2+\sqrt{4}) = -4$$

On a utilisé le fait que $2+\sqrt{x+3}$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite.

♣

Exemple 3.3.4 👁

Soit la fonction

$$h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0 \ .$$

Montrer que

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Premièrement, on montre que

$$\sin(h(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Posons $\theta_1 = \arctan(x)$ et $\theta_2 = \arctan(1/x)$. On a $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ et

$$\sin(h(x)) = \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) \ .$$

On déduit de la figure 3.9 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ , \ \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ , \ \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

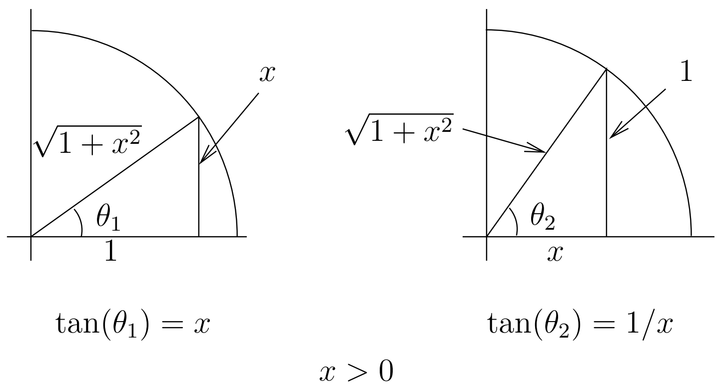


FIGURE 3.9 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x > 0$ et $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$.

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x > 0$. Donc,

$$\sin(h(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

pour tout $x > 0$. De même, on déduit de la figure 3.10 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ \sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x < 0$. Donc,

$$\sin(h(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

pour tout $x < 0$.

Pour compléter le problème, on remarque que $h(1) = 2\arctan(1) = \pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x > 0$ et h est une fonction continue pour $x > 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x > 0$ et ainsi $h(x) = \pi/2$ pour $x > 0$. De même, $h(-1) = 2\arctan(-1) = -\pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x < 0$ et h est continue pour $x < 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x < 0$ et ainsi $h(x) = -\pi/2$ pour $x > 0$. ♣

Les fonctions continues possèdent une propriété très importante que l'on utilisera lors de l'étude des fonctions au prochain chapitre.

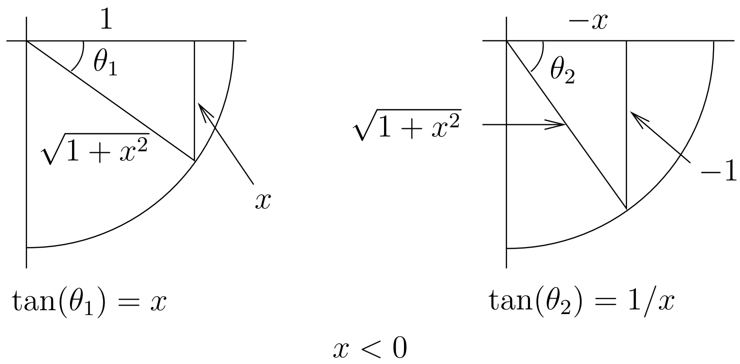


FIGURE 3.10 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x < 0$ et $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < 0$.

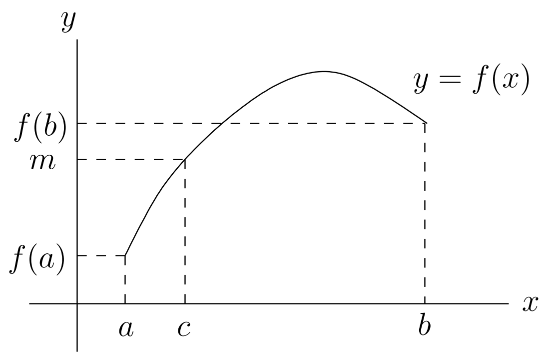


FIGURE 3.11 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

> **Théorème 3.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)**
> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit m une valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe au moins une valeur c telle que $a \leq c \leq b$ et $f(c) = m$.

Le dessin de la figure 3.11 illustre le résultat du théorème précédent.

3.4 Limites à l'infini et limites infinies

Lorsque l'on étudie une fonction, il est souvent intéressant de savoir comment se comporte la fonction pour de très grandes valeurs de son domaine.

Exemple 3.4.1
Comme on peut le voir à la figure 3.12, la fonction $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$ semble approcher la valeur 5 lorsque x devient de plus en plus grand. En effet, $g(x) \approx 5$ pour x très grand. ♣

Commençons par donner un sens mathématique à l'énoncé « $f(x)$ approche une certaine valeur lorsque x tend vers plus l'infini ». Pour se faire, on utilise la définition 2.1.14 de limite

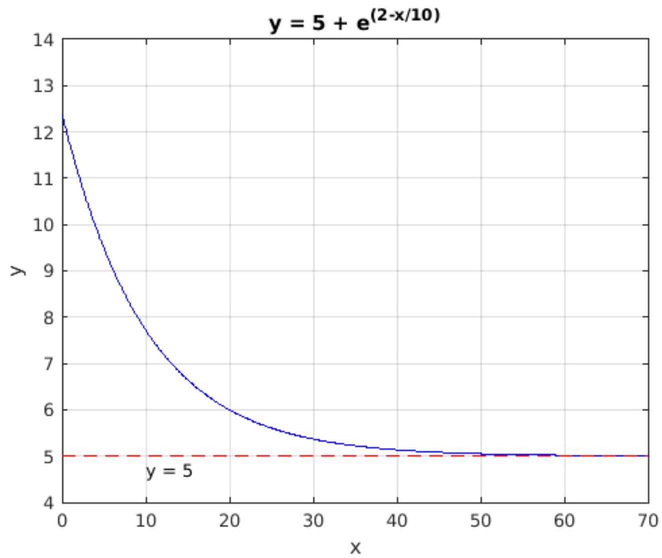


FIGURE 3.12 – Le graphe de $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$. On a que $g(x)$ approche 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

à l'infini pour les suites. On obtient la définition suivante de limite d'une fonction f lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

Définiton 3.4.2
Si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par ∞, on dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers plus l'infini** et on écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C \ .$$

De même, si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par $-\infty$, on dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers moins l'infini** et on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = C \ .$$

Exemple 3.4.3
Si on revient à l'exemple précédent avec $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$.

La suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ où $x_n = n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ est une suite qui tend vers plus l'infini car c'est une suite croissante de nombres sans borne supérieure. On donne, dans le tableau 3.1, les valeurs de $g(x_n)$ pour quelques uns des termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. On voit bien que $g(x_n)$ approche 5 lorsque n (et donc x_n) devient de plus en plus grand.

Puisque pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers plus l'infini, on pourrait montrer que

n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$
1	1	11.68589444228...
2	4	9.95303242440...
3	9	8.00416602395...
4	16	6.49182469764...
5	25	5.60653065971...
⋮	⋮	⋮
11	121	5.00004107956...
12	144	5.00000411859...

n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$
13	169	5.00000033807...
14	196	5.00000002272...
15	225	5.00000000125...
16	256	5.00000000006...
⋮	⋮	⋮
22	484	5.00000000000...
23	529	5.00000000000...
24	576	5.00000000000...

TABLE 3.1 – $g(x_n)$ pour quelques valeurs de n.

$g(x_n)$ approche 5 lorsque n devient de plus en plus grand, on a que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 5$. Ainsi, $g(x)$ tend vers 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

La droite $y = 5$ est appelée une **asymptote horizontale** pour la fonction g.

On pourrait aussi résonner à partir du graphe de $y = e^x$ pour montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 5$. En effet, puisque $2 - x/10$ devient de plus en plus petit (de plus en plus « négatif ») lorsque x devient de plus en plus grand, on peut conclure à partir du graphe de $y = e^x$ que $e^{(2-x/10)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers plus l'infini. Donc, $5 + e^{(2-x/10)}$ tend vers 5 lorsque x tend vers plus l'infini. ♣

Les propositions 2.1.17 et 2.1.18 ne sont pas limitées à la suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposition 3.4.4
Soit r un nombre réel positif. On a

$$\lim_{x\to\infty} r^x = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 < r < 1 \end{cases} .$$

Proposition 3.4.5
Soit r un nombre réel. On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases} .$$

On fait référence dans les propositions précédentes à la convergence vers plus l'infini que nous verrons sous peu. C'est deux propositions seront extrêmement utiles pour calculer des limites.

Exemple 3.4.6
Évaluez les limites suivantes si elles existent.

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{5x^2+1} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x^{3/2}+2x+1} \qquad \textbf{c)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^4+5}}{\left(x^8+x^2+1\right)^{1/4}}$$

a) Si on divise le numérateur et dénominateur par x^2, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+3}{5x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(1/x)+(3/x^2)}{5+(1/x^2)} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)+3\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^2)}{5+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^2)} = \frac{1}{5}$$

grâce à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1/x^2) = 0$.

b) Si on divise le numérateur et dénominateur par $x^{3/2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x^{3/2}+2x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x^{1/2})-(4/x^{3/2})}{1+(2/x^{1/2})+(1/x^{3/2})} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{1/2})-4\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{3/2})}{1+2\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{1/2})+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{3/2})} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

grâce encore à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{1/2}) = \lim\limits_{x\to\infty}(1/x^{3/2}) = 0$.

c) Si on factorise x^4 à l'extérieur de la racine carrée et x^8 à l'extérieur de la racine quatrième, on obtient

$$\frac{\sqrt{4x^4+5}}{\left(x^8+x^2+1\right)^{1/4}} = \frac{x^2\sqrt{4+(5/x^4)}}{x^2\left(1+(1/x^6)+(1/x^8)\right)^{1/4}} = \frac{\sqrt{4+(5/x^4)}}{\left(1+(1/x^6)+(1/x^8)\right)^{1/4}} \ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^4+5}}{\left(x^8+x^2+1\right)^{1/4}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+(5/x^4)}}{\left(1+(1/x^6)+(1/x^8)\right)^{1/4}} \\ &= \frac{\sqrt{4+\lim\limits_{x\to\infty}(5/x^4)}}{\left(1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^6)+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^8)\right)^{1/4}} = \frac{\sqrt{4}}{1^{1/4}} = 2\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x^r) = 0$ pour $r > 0$. ♣

Exemple 3.4.7
Déterminer si la limite suivante existe

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

Si la limite existe, donner cette limite.

On remarque que

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Puisque $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ croît sans borne supérieure lorsque x augmente, on a que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

♣

On a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers plus l'infini. De même,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers moins l'infini. On peut ainsi donner la définition suivante.

Définiton 3.4.8
Soit f une fonction définie pour x près de c (il n'est pas nécessaire que f soit définie à c). On écrit

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c. On dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque** x **converge (ou tend) vers** c.

Exemple 3.4.9
Si $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3 ? On remarque que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Pour montrer que

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x-3)^2} = \infty\ ,$$

il faudrait normalement montrer que, quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 3, la suite $\left\{\dfrac{2}{(x_n-3)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Nous ne ferons pas cela mais le lecteur peut vérifier avec une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de son choix qui tend vers 3 que $\left\{\dfrac{2}{(x_n-3)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

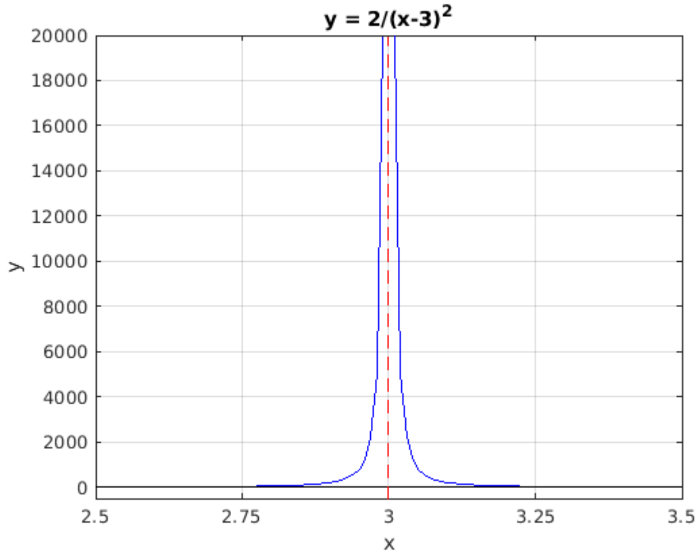


FIGURE 3.13 – Le graphe de $f(x) = 2/(x-3)^2$. f croit sans limite supérieure lorsque x approche 3. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale.

Nous utilisons une autre méthode (un peu moins rigoureuse) pour nous convaincre que

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty \ .$$

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors $x-3$ est très près de zéro avec $x-3 > 0$. Donc, $(x-3)^2$ est encore plus près de zéro que $x-3$ peut l'être si $x-3 < 1$. Ainsi, $2/(x-3)^2 > 0$ est très grand car on divise par un très petit nombre. Un raisonnement semblable pour x très près de 3 avec $x < 3$, montre que $2/(x-3)^2 > 0$ est aussi très grand.

Si on résonne à partir du graphe de f près de 3 que l'on retrouve à la figure 3.13, on peut conclure que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x tend vers 3. La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f. ♣

Exemple 3.4.10
Si $f(x) = \dfrac{2}{x^2-9}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3 ? On remarque que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors x^2-9 est très près de zéro avec $x^2-9 > 0$. Donc, $2/(x^2-9) > 0$ est très grand car on divise par un très petit nombre. Si x est très près de 3 avec $x < 3$ alors x^2-9 est très près de zéro avec $x^2-9 < 0$. Donc, $2/(x^2-9) < 0$ est très petit car on divise par un nombre négatif qui est très petit en valeur absolue.

Le graphe de f près de 3 que l'on retrouve à la figure 3.14 indique que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et la fonction f décroît sans borne inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$. La fonction $2/(x^2-9)$ ne tend pas vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x tend vers 3. ♣

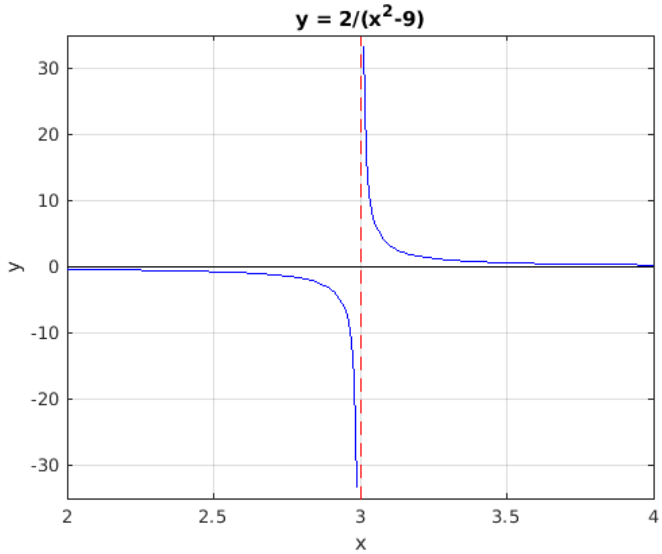


FIGURE 3.14 – Le graphe de $f(x) = 2/(x^2-9)$. f croît sans limite supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et f décroît sans limite inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$.

Si f est une fonction qui n'est pas définie en un point c, l'exemple précédent suggère de considérer le comportement de cette fonction lorsque l'on s'approche de c avec des valeurs plus petites que c (i.e. par la gauche) ou des valeurs plus grandes que c (i.e. par la droite).

Définiton 3.4.11
Soit f une fonction définie pour $x > c$. On écrit

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n > c$ qui tend vers c. On dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque** x **converge par la droite vers** c. De même, on écrit

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \quad (\text{resp. } -\infty).$$

si

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n < c$ qui tend vers c. On dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque** x **converge par la gauche vers** c. Voir la figure 3.15.

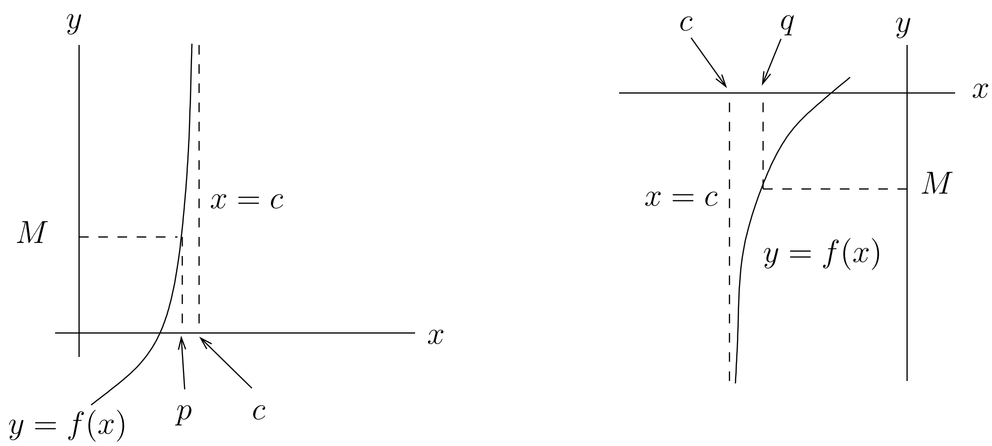


FIGURE 3.15 – Dans la figure de gauche $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$ alors que dans la figure de droite $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.4.12
À l'exemple précédent, on a

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x^2-9} = -\infty \quad \text{et} \qquad \lim_{x\leftarrow 3^+} \frac{2}{x^2-9} = \infty \ .$$

La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f. ♣

3.4.1 Des définitions plus pratiques

Dans les exemples précédents, nous nous sommes inspiré du graphe de la fonction pour déterminer les limites à l'infini et les limites infinies en un point. Ce n'est pas une approche rigoureuse et elle dépend de notre capacité à tracer le graphe de la fonction. Il nous faut donc une définition de limite à l'infini et une définition de limite infinie en un point qui soient en accord avec la définition 3.1.8 de limite d'une fonction en un point en termes de ϵ et δ.

La définition 3.1.8 de la limite d'une fonction en un point (équivalent à celle donné à la définition 3.1.2) ne faisait pas appelle aux suites. On peut faire de même pour la définition de la limite d'une fonction à l'infini (définition 3.4.2) et la définition de la limite infinie d'une fonction en un point (définition 3.4.8).

Ce sont ces définitions qui nous permettent de déterminer rigoureusement si une limite à l'infini existe et qu'elle est cette limite, ou si une fonction à une limite infinie en un point.

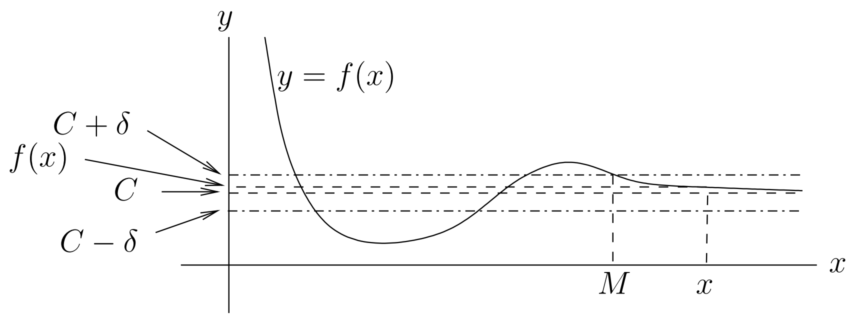


FIGURE 3.16 – La fonction f tend vers C lorsque x tend vers plus l'infini. Pour $\epsilon > 0$ donné, on peut voir à partir du graphe de f qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x)$ est entre $C - \epsilon$ et $C + \epsilon$ si $x > M$.

Définiton 3.4.13
Soit f une fonction définie pour x positif. On écrit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C$$

et on dit que $f(x)$ dent vers C lorsque x dent vers plus l'infini si la condition suivante est satisfaite. Il existe une unique constante C telle que, pour toute valeur $\epsilon > 0$, on peut trouver une constante $M > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) pour laquelle $f(x)$ est dans l'intervalle $]C - \epsilon, C + \epsilon[$ si $x > M$. Voir la figure 3.16.

De façons semblables, on peut définir la limite vers moins l'infini.

Définiton 3.4.14
Soit f une fonction définie pour x près d'un point c. On écrit

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c si la condition suivante est satisfaite. Pour toute constante M, il existe une constante $\delta > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque x est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$. Voir la figure 3.17.

De façons semblables, on peut définir la convergence vers moins l'infini, et les convergences à droite et à gauche vers plus ou moins l'infini.

Exemple 3.4.15
Revenons à $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$ que l'on a étudié précédemment. Montrons à l'aide des définitions précédentes que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \ .$$

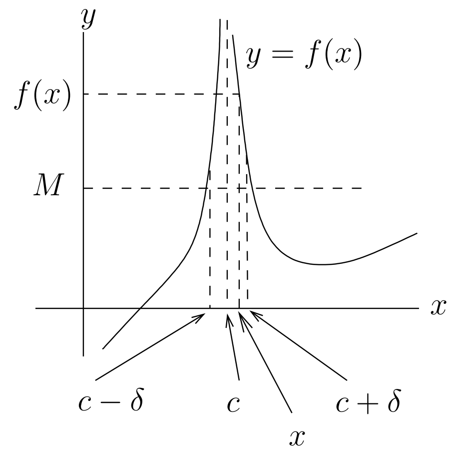


FIGURE 3.17 – La fonction f tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c. Pour $M > 0$ donné, on peut voir à partir du graphe de f qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ si x est entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

Prenons un très grand nombre M (e.g. $M = 10^6$). Existe-t-il un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 9} > M$$

lorsque $3 < x < 3 + \delta$? On cherche les valeurs de $x > 3$ telles que $\dfrac{2}{x^2 - 9} > M$. Si on résout pour x^2, on trouve $x^2 < 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 < x < \sqrt{9 + 2/M} = 3 + \left(\sqrt{9 + 2/M} - 3\right) .$$

Soit $\delta = \sqrt{9 + 2/M} - 3$. On a $\delta > 0$ car $M > 0$, et $f(x) > M$ pour $3 < x < 3 + \delta$. Le lecteur est invité à calculer δ pour une valeur M de son choix. On vient de montrer que quel que soit $M > 0$, on peut toujours trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ pour $3 < x < 3+\delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ dent vers $+\infty$ lorsque x tend par la droite vers 3.

De même, prenons un très petit nombre M (e.g. $M = -10^8$). On cherche les valeurs de $x < 3$ telles que

$$\frac{2}{x^2 - 9} < M .$$

Si on résout pour x^2, on trouve $x^2 > 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 > x > \sqrt{9 + 2/M} = 3 - (3 - \sqrt{9 + 2/M})$$

où on assume que $M < -2/9$ pour que $9 + 2/M$ soit positif.

Soit $\delta = 3 - \sqrt{9 + 2/M}$. On a $\delta > 0$ car $M < -2/9$, et $f(x) < M$ pour $3 - \delta < x < 3$. On vient de montrer que quel que soit $M < 0$, on peut toujours trouver un nombre $\delta > 0$

tel que $f(x) < M$ pour $3 > x > 3 - \delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend par la gauche vers 3. ♣

Exemple 3.4.16
Revenons au calcul de la limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

que nous avons étudié à l'exemple 3.4.7.

Démontrons que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

à partir de notre définition de limite à l'infini. Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Si on prend $M = \dfrac{1}{4\epsilon^2}$, on obtient

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{1/(4\epsilon^2)}} = \epsilon$$

pour $x > M$. ♣

Pour terminer, nous considérons le cas où on a une limite infinie à l'infini.

Définiton 3.4.17
Soit f une fonction définie pour x positif. On écrit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si <u>pour toute constante $M > 0$</u> il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque $x > m$. De même, on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

et on dit que $f(x)$ tend vers moins l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si <u>pour toute constante $M < 0$</u> il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) < M$ lorsque $x > m$.

De façons semblables, on peut définir la convergence de $f(x)$ vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x converge vers moins l'infini.

3.4.2 Comportement asymptotique semblable

Définiton 3.4.18
Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l'infini lorsque x tend vers c. On dit que f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers c si
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ .$$

Si f et g ont un comportement asymptotique semblable, on a que $f(x) \approx g(x)$ pour x très près de c. Ainsi, les fonctions f et g ont des graphes semblables pour x près de c.

De même,

Définiton 3.4.19
Deux fonctions f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini) si
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ \right) \ .$$

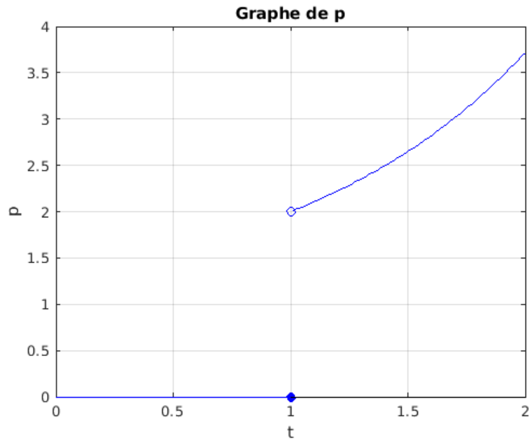
Exemple 3.4.20
À l'exemple 3.4.3, on a montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 5$ où $g(x) = 5 + e^{2-x/10}$. Si on pose $f(x) = 5$ pour tout x, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ .$$
Donc, g et f ont des graphes semblables lorsque x est très grand. ♣

Nous reviendrons sur l'étude du comportement asymptotique des fonctions à la section 5.7.

3.5 Exercices

Question 3.1
Utilisez une approche numérique et une approche graphique (vous devez utiliser un logiciel ou une calculatrice graphique pour tracer le graphe) pour trouver la valeur de la limite suivante si elle existe.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \ .$$

Question 3.2
Le graphe de la fonction p est donnée dans la figure suivante



Évaluez graphiquement les limites suivantes si c'est possible :

$$\lim_{t\to 1^-} p(t) \quad , \quad \lim_{t\to 1^+} p(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} p(t) \ .$$

Question 3.3

À l'aide de suites de valeurs numériques, estimez la valeur des limites suivantes :

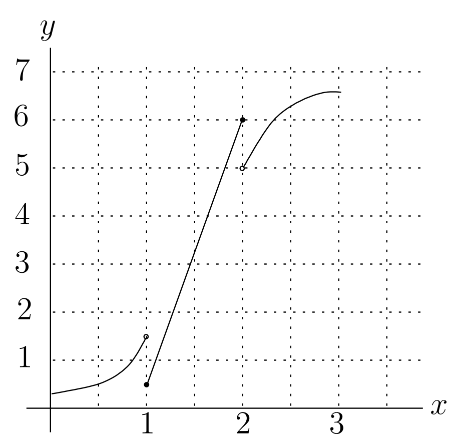
$$\textbf{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \qquad\qquad \textbf{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$$

Question 3.4

On sait que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Pour quelles valeurs de x a-t-on que $\sqrt{x} < 0.1$? Que $\sqrt{x} < 0.01$? Est-ce que $\sqrt{x}$ approche rapidement 0 lorsque $x > 0$ approche 0 ?

Question 3.5

Le graphe de la fonction f est donnée dans la figure suivante :



Calculez les limites à droite et à gauche aux points $x = 1$ et $x = 2$. Est-ce que la limite de la fonction existe aux points $x = 1$ et $x = 2$?

Question 3.6

Soit $v(t) = 1 + t^2$. Évaluez la limite $\lim_{t\to 0} v(t)$. Soit α la valeur de cette limite.

1. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t)-\alpha|<1$?
2. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t)-\alpha|<0.5$?
3. Pour quelles valeurs de t a-t-on que $|v(t)-\alpha|<0.01$?

Question 3.7
Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez la limite quand elle existe.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x^2-25}$

Question 3.8
Évaluez si possible la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin(1/x)$.

Question 3.9
Le volume d'une culture au temps t en secondes est donnée par la formule $V(t)=V_0e^{\alpha t}$ ml où $V_0=V(0)=1$ ml est le volume initial. Sachant que le volume est de 2.71828 ml après 1000 secondes (i.e. $V(1000)=2.71828$ ml), trouvez α. Déterminez les valeurs de t pour lesquelles le volume $V(t)$ après t secondes est 2.71828 ml avec une marge d'erreur de 0.1 ml. C'est-à-dire, trouvez t tel que $2.71828-0.1<V(t)<2.71828+0.1$.

Question 3.10
La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}.$$

Est-ce que $\displaystyle\lim_{x\to 0}H(x)=1$? Justifiez votre réponse.

Question 3.11
Donnez une formule mathématique pour définir la fonction continue f telle que $f(x)=-1$ pour $x<-0.1$, $f(x)=1$ pour $x>0.1$, et $f(x)$ est linéaire pour $-0.1<x<0.1$.

Question 3.12
Un neurone a la réaction suivante lorsqu'il reçoit une impulsion électrique. Si le voltage V de l'impulsion électrique est supérieure à une valeur V_0, le neurone produit une impulsion électrique de voltage $2V$. Au contraire, si le voltage V de l'impulsion électrique est inférieure à cette valeur V_0, le neurone produit une impulsion électrique de voltage V_1. Donnez une formule mathématique pour la réponse du neurone à une impulsion électrique ? Si on sait que la réponse du neurone à une impulsion électrique est une fonction continue, quelle doit être la valeur de V_1 ?

Question 3.13
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Pour quelles valeurs de x a-t-on que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>10$? Que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>100$?

Est-ce que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ croît rapidement ou lentement lorsque $x > 0$ approche 0 ?

Question 3.14
Soit

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 + ax & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.15
Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si} \quad x < 3 \\ ax^2 + x + b & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ b\sqrt{x} + \dfrac{5ax}{2} & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Trouvez les valeurs de a et b pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.16
Un diapason est un petit instrument en acier qui a la forme d'une fourche et qui produit (approximativement) la note La lorsqu'il vibre. La fréquence x (en hertz) d'un bon diapason devrait être très proche de la fréquence exacte du La qui est de 440 hertz. Une marque de diapason coûte $5/|x - 440|$ dollars où x est la fréquence du diapason. Combien coûtera un tel diapason si l'on demande une précision de 0.1% ? De 0.01% ? Peut-on se permettre un diapason parfait ?

Question 3.17
Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que l'équation $e^x + x^2 - 2 = x$ a au moins une solution.

Question 3.18
Le prix de l'essence a augmenté de \$2.10 à \$2.50 le litre au cours de la semaine passée, peut-on conclure à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires que le prix de l'essence a été de \$2.25 le litre à un moment au cours de la semaine passée ? Justifiez votre réponse.

Question 3.19
Utilisez des suites pour évaluer $\lim\limits_{t\to 1} (1 - t)^{-4}$.

Question 3.20
Évaluez numériquement la limite suivante :

$$\lim_{y\to 1^+} y^2 \ln(y - 1) \ .$$

Question 3.21
Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez celles qui existent. Pour celles qui n'existent pas, expliquez pourquoi.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x-4}{3x^2+1}$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-(8x^3+3)^{1/3}}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+7x}\right)$ **e)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^{2x}-e^{-3x}}{3e^{2x}-4e^{-5x}}$

Question 3.22

Évaluez si possible la limite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{1+x^2}$.

Dérivée 4

4.1 Étude du graphe et comportement d'une fonction

Avant de définir ce qu'est la dérivée d'une fonction, un des piliers du calcul différentiel et intégral, et de plonger dans l'étude de la dérivée d'une fonction, nous énonçons quelques propriétés des fonctions que la dérivée nous permettra de déterminer.

La dérivée est un outil pour l'étude des fonctions. Lorsque l'on parle de l'étude des fonctions, on parle de l'étude du graphe et du comportement des fonctions sur leur domaine. On cherche les caractéristiques marquantes des fonctions. Quelques unes des caractéristiques qu'une fonction peut avoir sont :

Définiton 4.1.1
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f est **strictement croissante** si $f(x) < f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
2. La fonction f est **croissante** si $f(x) \leq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
3. La fonction f est **strictement décroissante** si $f(x) > f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
4. La fonction f est **décroissante** si $f(x) \geq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.

Définiton 4.1.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum local** au point c si $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$ suffisamment près de c.
2. La fonction f a un **minimum local** au point c si $f(x) > f(c)$ pour tout $x \neq c$ suffisamment près de c.

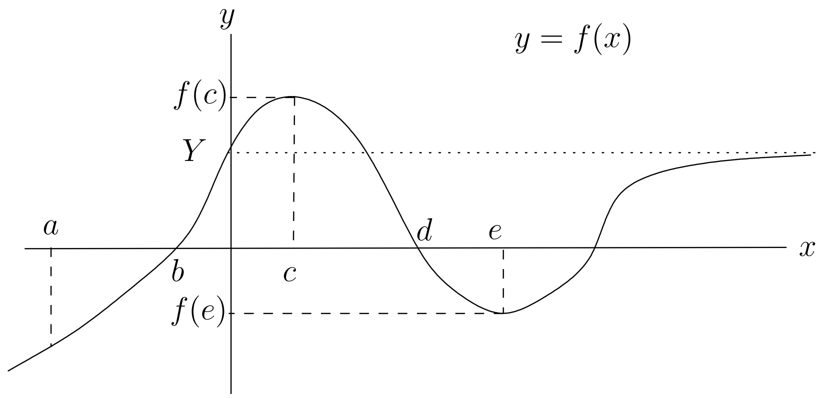


FIGURE 4.1 – À l'exemple 4.1.4, on détermine certaines caractéristiques de la fonction qui possède ce graphe.

Définiton 4.1.3
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le maximum global de f sur $[a, b]$.
2. La fonction f a un **minimum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) < f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le minimum global de f sur $[a, b]$.

Exemple 4.1.4
Considérons la fonction continue dont le graphe est donné à la figure 4.1. Quelques unes des caractéristiques de cette fonction sont :

1. La fonction f a un maximum absolu au point c car $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$. La valeur $f(c)$ est le maximum absolu de f. Cela implique aussi que f a un maximum local au point c.
2. La fonction f a un minimum local au point e car $f(x) > f(e)$ pour tout x près de e, $x \neq e$. Ce n'est pas un minimum absolu car il y a des valeurs de x pour lesquelles $f(x) < f(e)$ (e.g. $f(a) < f(e)$).
3. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ car $f(x_1) < f(x_2)$ pour tous $x_1 < x_2 < c$. De même, la fonction f est strictement croissante pour $x > e$. Par contre, la fonction f est strictement décroissante pour x entre c et e car $f(x_1) > f(x_2)$ pour tout $a < x_1 < x_2 < c$.
4. On a que $f(x)$ approche la valeur Y lorsque x devient de plus en plus grand. La droite $y = Y$ est une asymptote horizontale pour f lorsque x tend vers plus l'infini.

♣

On verra plus tard d'autres caractéristiques que les fonctions peuvent avoir.

Si on observe minutieusement l'exemple précédent, on remarque que la fonction f est strictement croissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est positive, la fonction f est strictement décroissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est négative, la fonction f a un maximum local au point x où la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x)$ est zéro, ainsi de suite. Donc, la pente des droites tangentes au graphe d'une fonction semble déterminer les caractéristiques importantes d'une fonction. Il serait donc important de pouvoir facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. La dérivée est l'outil qui nous permettra de facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. Ainsi, elle nous permettra de trouver les minimums et maximums locaux d'une fonction, les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction, et encore plus.

4.2 Taux de variation d'une fonction

Définiton 4.2.1
Si f est une fonction dont le domaine inclut l'intervalle $[a, b]$, le **taux de variation moyen** de f entre a et b est

$$\text{Taux de variation moyen de } f \text{ entre } a \text{ et } b = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Exemple 4.2.2
Suite à une expérience de laboratoire sur une culture de bactéries dans un milieu qui ne leur est pas favorable, on observe que la fonction $g(t) = 50\ e^{-2t}$ représente le nombre de bactéries par cm^3 au temps t en heures.

Cette formule demande quelques clarifications. On remarque que g peut retourner des valeurs réelles qui ne sont pas des entiers. Cela ne semble pas « rationnel » car on ne peut pas avoir une fraction de bactérie (e.g. on ne peut pas avoir un dixième de bactérie). Il faut comprendre que g retourne un nombre moyen de bactéries par cm^3 dans un contenant qui pourrait avoir un mètre cube. La courbe donnée par g (voir figure 4.2) est une très bonne représentation du nombre de bactéries par cm^3 en fonction du temps t en heures.

Le taux de variation moyen du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 10$ est

$$\frac{g(10) - g(0)}{10 - 0} = \frac{50\ e^{-20} - 50}{10 - 0} \approx -5.0000$$

bactéries par cm^3 par heure. C'est-à-dire que le nombre de bactéries décroît en moyenne de 5 bactéries par cm^3 par heure pendant les dix premières heures. On dit que la population de bactéries a un taux de croissance moyen de -5 bactéries par cm^3 par heure. On aurait pu parler de décroissance mais la tradition veut que l'on parle de croissance négative.

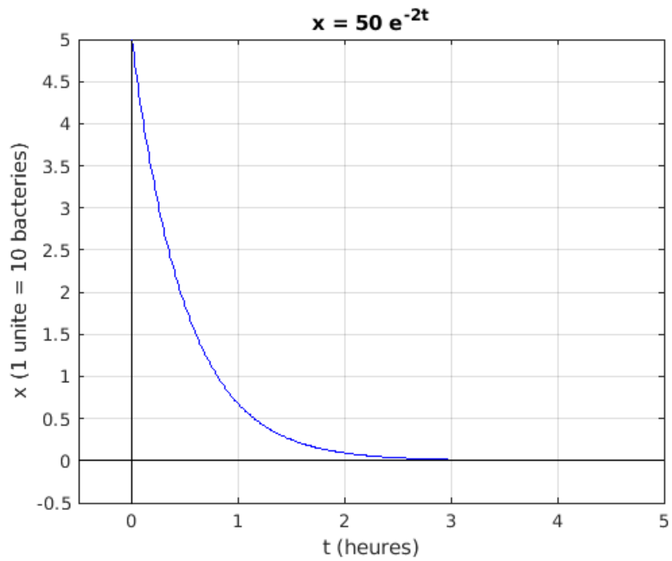


FIGURE 4.2 – Graphe de $x = 50\ e^{-2t}$ pour $0 \leq t \leq 5$ heures.

Si on regarde le graphe de g, on voit que la population de bactéries décroît plus rapidement dans les premières heures. Par exemple, le taux de croissance moyen de la population de bactéries entre $t = 0$ et $t = 3$ est

$$\frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{50\ e^{-6} - 50}{3 - 0} \approx -16.625$$

bactéries par cm^3 par heure. Donc, le nombre de bactéries décroît en moyenne de 16.625 bactéries par cm^3 par heure pendant les trois premières heures.

La population de bactéries a théoriquement disparu après 10 heures car il reste

$$g(10) = 50\ e^{-20} \approx 1.0306 \times 10^{-7}$$

bactéries par cm^3 après 10 heures. ♣

Qu'arrivera-t-il si on calcul les taux de variation moyens sur des intervalles $[a, b]$ de plus en plus petit ; c'est-à-dire, pour lesquelles b tend vers a ?

Exemple 4.2.3

Revenons à l'exemple précédent au sujet d'une population de bactéries. Si on calcul le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) sur des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est de plus en plus près de a, on obtient les données suivantes :

a heures	b heures	$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ bactéries par cm^3 par heure
1	2	$-5.8509822\ldots$
1	1.5	$-8.5548214\ldots$
1	1.1	$-12.2660624\ldots$
1	1.01	$-13.3990907\ldots$
1	1.001	$-13.5200038\ldots$
1	1.0001	$-13.5321750\ldots$
1	1.00001	$-13.5333929\ldots$
1	1.000001	$-13.5335147\ldots$
1	1.0000001	$-13.5335269\ldots$

Comme le taux de croissance moyen n'a pas vraiment le temps de changer entre $t = a = 1$ et $t = b = 1.0000001$ heure, on peut dire que le taux de croissance à $t = 1$ heure est approximativement -13.5335269 bactéries par cm^3 par heure. On pourrait prendre des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est encore plus près de 1 que 1.0000001. Si on fait cela, on trouve que le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) approche $-13.53352832\ldots$ bactéries par cm^3 par heure. Cette dernière valeur est le **taux de variation instantané** du nombre de bactéries à $t = 1$ heure. On définit le **taux de croissance** de la population de bactéries à $t = 1$ heure comme étant ce taux de variation instantané.

On aurait pu calculer des taux de variation moyens pour des intervalles de la forme $[b, a]$, où $b < a$ tend vers a. On aurait trouvé le même taux de variation instantané. ♣

Définiton 4.2.4
Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R}$, le **taux de variation instantané** de f au point a est la valeur M unique (si une telle valeur existe) telle que le taux de variation moyen $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ tend vers M lorsque b tend vers a où b peut être plus petit ou plus grand que a.

On remarque que le taux de variation moyen

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est aussi la pente de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Une droite qui passe par au moins deux points d'une courbe est une **sécante**.

Exemple 4.2.5
Pour la population de bactéries étudiée précédemment, on a tracé à la figure 4.3 les sécantes qui passent par les points suivants :

1. $(1, 50\, e^{-2})$ et $(4, 50\, e^{-8})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{50\, e^{-8} - 50\, e^{-2}}{4 - 1} = -2.24999701\ldots$$

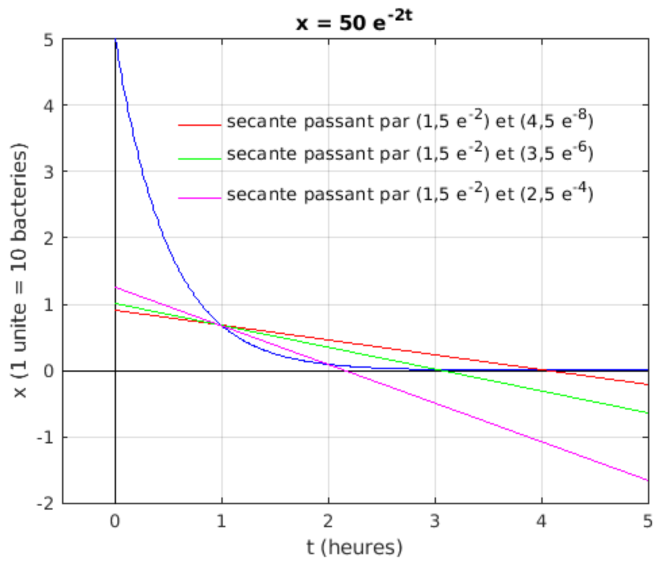


FIGURE 4.3 – Quelques sécantes du graphe de $x = 50\ e^{-2t}$.

2. $(1, 50\ e^{-2})$ et $(3, 50\ e^{-6})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{50\ e^{-6} - 50\ e^{-2}}{3-1} = -3.321413276\ldots$$

3. $(1, 50\ e^{-2})$ et $(2, 50\ e^{-4})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = \frac{50\ e^{-4} - 50\ e^{-2}}{2-1} = -5.850982217\ldots$$

♣

Que devient la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ si b est de plus en plus près de a ? L'exemple suivant va fournir une réponse à cette question.

Exemple 4.2.6
Toujours pour la population de bactéries de l'exemple 4.2.2, on a tracé à la figure 4.4 les sécantes qui passent par les points suivants.

1. $(1, 50\ e^{-2})$ et $(1.1, 50\ e^{-2.2})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.1)-g(1)}{1.1-1} = \frac{50\ e^{-2.2} - 50\ e^{-2}}{1.1-1} = -12.2660624\ldots$$

2. $(1, 50\ e^{-2})$ et $(1.001, 51\ e^{-2.002})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.001)-g(1)}{1.001-1} = \frac{50\ e^{-2.002} - 50\ e^{-2}}{1.001-1} = -13.5200038\ldots$$

On remarque que, pour des valeurs de b très près de $a = 1$, il devient de plus en plus difficile de différencier le graphe de la fonction g dans le voisinage de $x = 1$ de la sécante qui passe

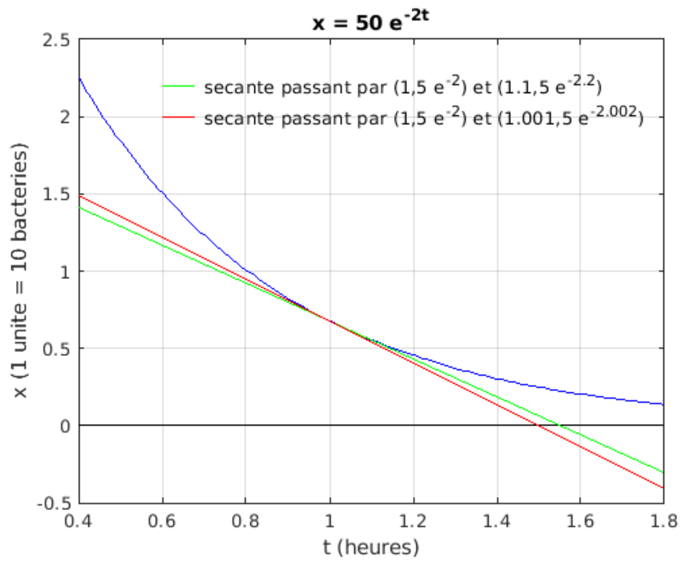


FIGURE 4.4 – La sécante qui passe par $(1, 50e^{-2})$ et $(1.001, 50e^{-2.002})$ se confond à la courbe $x = 50\ e^{-2t}$ pour t très près de $t = 1$ heure.

par les points $(a, g(a)) = (1, g(1))$ et $(b, g(b))$. À la limite, ces sécantes approchent une droite que l'on ne peut dissocier de la courbe $x = g(t)$ pour t assez près de $t = 1$. Cette droite est appelée la droite tangente à la courbe au point $(1, g(1))$. La pente de cette droite est la valeur limite des pentes des sécantes qui passent par $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$ lorsque b tend vers $a = 1$. Dans le cas présent, cette pente est $-13.53352832\ldots$ que l'on a trouvée à l'exemple-4.2.3. ♣

Définiton 4.2.7
Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient $a \in \mathbb{R}$. La droite

$$y = h(x) = f(a) + M(x - a) \ ,$$

où M est le taux de variation instantané de f à $x = a$, est la **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

On a que la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a.

Au moment de donner la définition de la dérivée d'une fonction en un point, on donnera un sens mathématique à « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ».

En résumé, lorsque b approche a, la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ approche une droite qui passe par $(a, f(a))$ et qui est indissociable (presque superposée) à la courbe $y = f(x)$ pour x assez près de $x = a$. Cette droite limite est la droite tangente que l'on vient de définir.

4.3 Dérivée d'une fonction en un point

La **dérivée** d'une fonction f en un point $x = a$ n'est rien d'autre que le taux de variation instantané de f à a.

Avec la définition de limite d'une fonction en un point, on peut donner un sens mathématique au taux de variation instantané de f au point a. À la section 4.2, on a défini le taux de variation instantané de f au point a comme étant le nombre M tel que le taux de variation moyen $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ approche M lorsque b approche a où b peut être plus petit ou plus grand que a. En termes mathématiques, l'énoncé précédent est simplement

$$M = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

On obtient la définition suivante.

Définiton 4.3.1
Soit f une fonction définie dans un voisinage de a incluant le point a. La **dérivée de f au point a**, dénotée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, est

$$f'(a) \equiv \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

si cette limite existe.

La limite précédente est équivalente à

$$f'(a) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si cette limite existe. Il suffit de substituer $x = a + h$ dans la première limite pour obtenir la deuxième et vice-versa. On a que x approche a si et seulement si $h = x - a$ approche 0. Notez que h peut être plus petit ou plus grand que 0.

Exemple 4.3.2
À l'exemple 4.2.3, on a montré numériquement que

$$g'(1) = -13.53352832\ldots \quad \text{bactéries par cm}^3/\text{heure}$$

où $g(t) = 50e^{-2t}$. ♣

Pour l'exemple qui suit, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définiton 4.3.3
Le **taux de croissance relatif** d'une population au temps t est

$$\frac{\text{taux de croissance instantané (au temps } t)}{\text{nombre d'individus dans la population (au temps } t)}$$

En d'autres mots, si $p(t)$ est le nombre d'individus au temps t, le taux de croissance relatif au temps t est $\dfrac{p'(t)}{p(t)}$.

Exemple 4.3.4
On veut estimer le taux de croissance relatif à $t = 1$ et $t = 2$ d'une population dont le nombre d'individus au temps t (en heures) est donnée par $p(t) = 2^t$.

On commence par estimer $p'(1)$, le taux de croissance instantané à $t = 1$. On a

$$\frac{p(1.01) - p(1)}{0.01} = \frac{2^{1.01} - 2}{0.01} \approx 1.3911100, \quad \frac{p(1.001) - p(1)}{0.001} = \frac{2^{1.001} - 2}{0.001} \approx 1.386774925,$$
$$\frac{p(1.0001) - p(1)}{0.0001} = \frac{2^{1.0001} - 2}{0.0001} \approx 1.386342407529995, \quad \ldots \to 1.3862943611\ldots$$

Donc, $p'(1) = 1.3862943611\ldots$

De même, on peut estimer $p'(2)$, le taux de croissance instantané à $t = 2$. On a

$$\frac{p(2.01) - p(2)}{0.01} = \frac{2^{2.01} - 4}{0.01} \approx 2.7822200, \frac{p(2.001) - p(2)}{0.001} = \frac{2^{2.001} - 4}{0.001} \approx 2.773549850,$$
$$\frac{p(2.0001) - p(2)}{0.0001} = \frac{2^{2.0001} - 4}{0.0001} \approx 2.7726848151, \ldots \to 2.772588722\ldots$$

Donc, $p'(2) = 2.772588722\ldots$.

Le taux de croissance relatif à $t = 1$ est

$$\frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{1.3862943611\ldots}{2} = 0.693147180559945\ldots$$

et le taux de croissance relatif à $t = 2$ est

$$\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{2.772588722\ldots}{4} = 0.693147180559945\ldots$$

Est-ce que $\dfrac{p'(t)}{p(t)} = 0.693147180559945\ldots$ pour tout t ? On verra prochainement que la réponse est affirmative. ♣

Si

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ ,$$

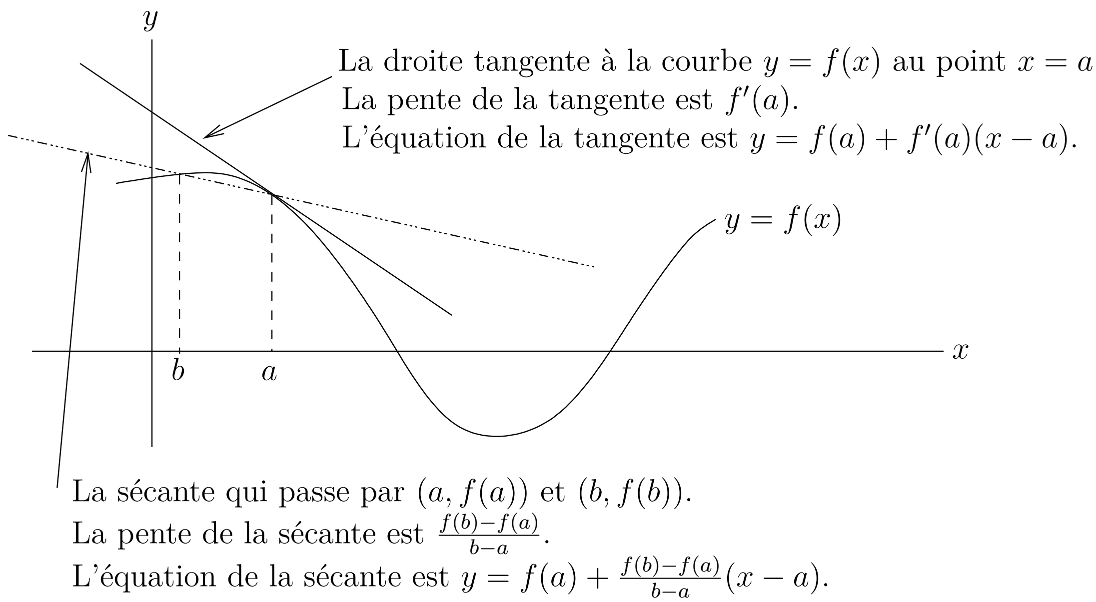


FIGURE 4.5 – Interprétation graphique de la dérivée d'une fonction f au point $x = a$

on a pour x près de a que
$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$
Si on résout cette relation pour $f(x)$ on trouve
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.3.1}$$
Le côté droit de cette relation n'est nul autre que l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ définie à la section 4.2 car $f'(a)$ est le taux de variation instantané. Donc, $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

On retrouve à la figure 4.5 un résumé de l'interprétation graphique de la dérivée.

Proposition 4.3.5
Si f est une fonction différentiable au point a, alors
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$
pour x très près de a.

L'équation de la droite tangente est une formule simple pour estimer la fonction f au voisinage du point $x = a$. Voir la figure 4.6. L'approximation de fonctions compliquées à l'aide de droites tangentes ou de polynômes sera abordé dans une prochaine section.

Remarque 4.3.6

En Analyse Mathématique, on définie la dérivée d'une fonction f au point a de la façon suivante.

Définiton 4.3.7
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La dérivée de la fonction f au point a est le nombre $f'(a)$ qui satisfait

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0 \ . \tag{4.3.2}$$

Cette définition de la dérivée est équivalent à la définition de la dérivée que l'on a donnée. En effet, puisque

$$\lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right|$$

et

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{x\to a} |g(x)| = 0 \ ,$$

on déduit que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0 \ .$$

Il découle de cette définition que, lorsque x approche a, la distance entre $f(x)$ et $f(a) + f'(a)(x-a)$ approche 0 plus vite que la distance entre x et a. Voir la figure 4.6. Cette propriété explique les énoncées « la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = h(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ sont presque superposées lorsque l'on considère des valeurs de x assez près de $x = a$ » et « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ». ♠

Remarque 4.3.8
Une fonction peut ne pas avoir de dérivée en un point. Prenons la fonction $g(x) = |x|$. La dérivée de g au point $x = 0$ n'existe pas. Les tableaux suivants donnent deux suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0. Dans le premier tableau, les valeurs $\dfrac{g(x_n)-g(0)}{x_n - 0}$ approchent 1 alors que dans le second tableau, les valeurs $\dfrac{g(x_n)-g(0)}{x_n - 0}$ approchent -1.

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n)-g(0)}{x_n-0}$
1	1	1
2	1/2	1
3	1/3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10000	1/10000	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

n	$x_n = -\frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n)-g(0)}{x_n-0}$
1	-1	-1
2	$-1/2$	-1
3	$-1/3$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10000	$-1/10000$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

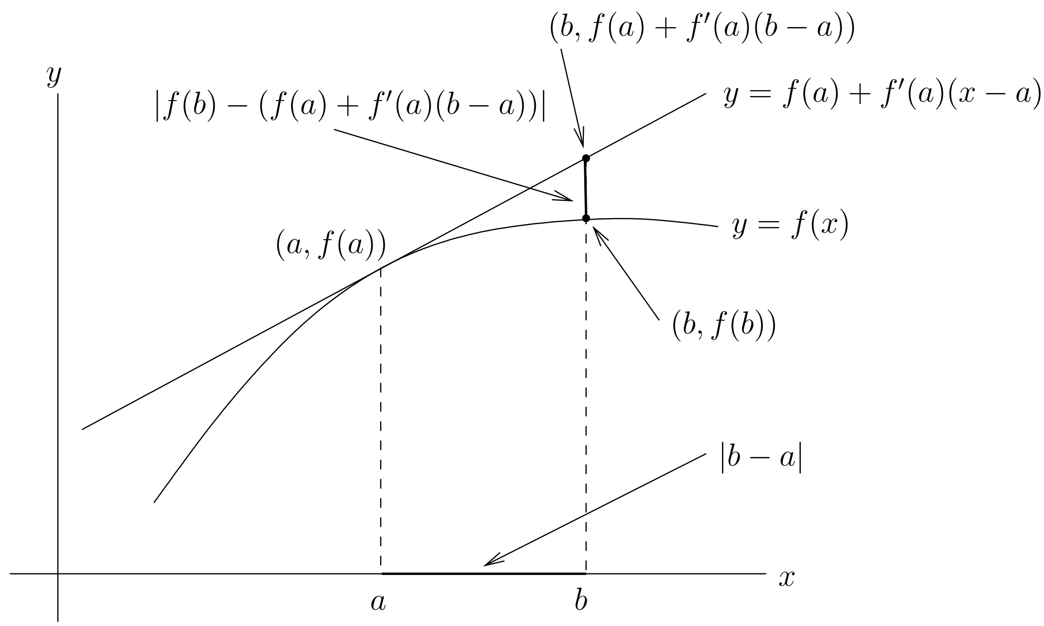


FIGURE 4.6 – Distance entre la courbe $y = f(x)$ et la droite tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ à $x = b$. La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ a une pente de $f'(a)$, le taux de variation instantané de f à $x = a$.

On ne peut pas trouver une valeur unique M telle que $\dfrac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approche M pour toute suite x_n qui approche 0 lorsque $n \to \infty$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ n'existe pas, et $g'(0)$ n'existe pas.

De plus, à partir du graphe de g à la figure 4.7, on voit qu'il n'y a pas de droite qui passe par $(0, g(0)) = (0, 0)$ et qui soit indissociable de la courbe $y = g(x) = |x|$ pour x assez près de 0 où x peut être inférieur ou supérieur à 0. On peut satisfaire la condition précédente pour $x < 0$ ou $x > 0$ séparément mais elle ne peut pas être satisfaite pour $x < 0$ et $x > 0$ en même temps. La droite $y = x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x > 0$ mais pas pour $x < 0$. De même, la droite $y = -x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x < 0$ mais pas pour $x > 0$. Les autres droites qui passent par $(0, 0)$ sont clairement distinctes de la courbe $y = g(x)$. ♠

Remarque 4.3.9
Il n'est pas nécessaire que le graphe de la fonction ait un « coin » comme à la remarque précédente pour que la fonction ne soit pas différentiable. La fonction f dont le graphe se trouve à la figure 4.8 n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale ; elle a donc une pente infinie. ♠

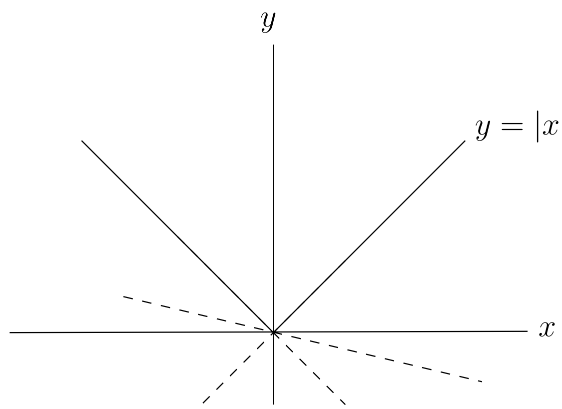


FIGURE 4.7 – Le graphe de $y = g(x) = |x|$. On voit que g n'a pas de dérivée à $x = 0$ car il n'y a pas de droite qui soit indissociable du graphe de g près de l'origine.

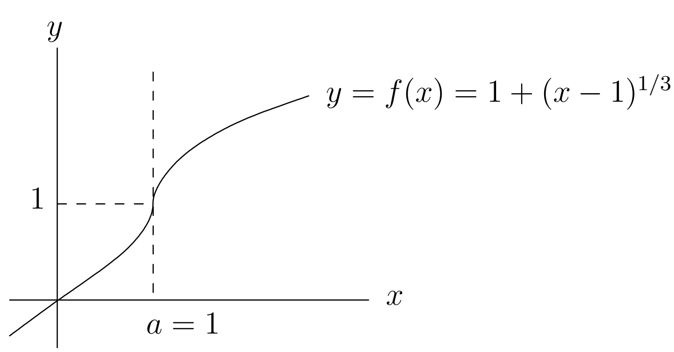


FIGURE 4.8 – La fonction f représentée par le graphe dans cette figure n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale.

4.4 Dérivée d'une fonction

À la section précédente, on a vu la définition de la dérivée $f'(a)$ d'une fonction f en un point $x = a$. C'est-à-dire,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si la limite existe. Si on calcule $f'(a)$ pour toutes les valeurs de a, on obtient la fonction qui, pour tout nombre réel a, donne la valeur $f'(a)$ de la dérivée de f au point $x = a$. Cette fonction est appelée la **dérivée de** f. Comme la tradition veut que l'on utilise x comme variable indépendante d'une fonction, on obtient la définition suivante.

Définiton 4.4.1
La **dérivée** d'une fonction f est la fonction f' définie par

$$f'(x) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour toutes les valeurs de x où la limite existe. On utilise aussi la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour désigner f'.

Puisque $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$, on en déduit les propriétés suivantes :

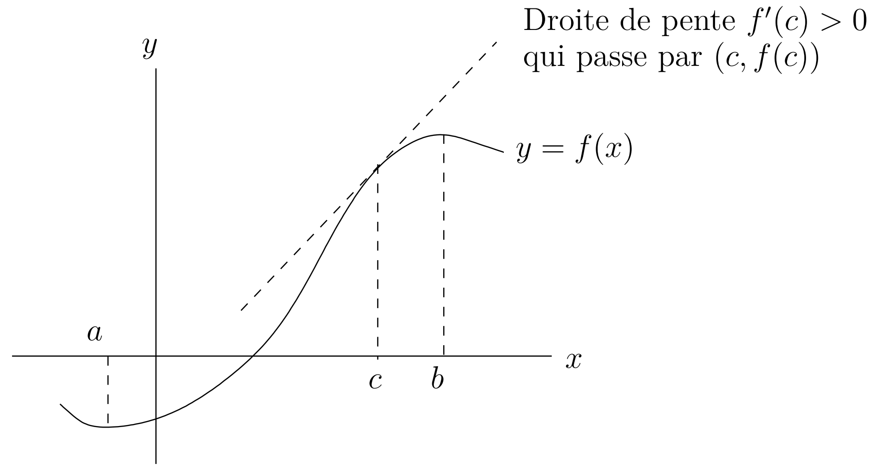


FIGURE 4.9 – $f'(x) > 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement croissante pour $a < x < b$.

Proposition 4.4.2
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$.

1. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est positive en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x)$ est positive pour tout x entre a et b. Voir la figure 4.9.
2. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est négative en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x)$ est négative pour tout x entre a et b. Voir la figure 4.10.
3. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c, et si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c, alors la fonction f a un maximum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ près de c et strictement décroissante pour $x > c$ près de c. Voir la figure 4.11.
4. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c, et si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c, alors la fonction f a un minimum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement décroissante pour $x < c$ près de c et strictement croissante pour $x > c$ près de c. Voir la figure 4.12.

Exemple 4.4.3
À la figure 4.1, la fonction f est strictement croissante pour $x < c$ et $x > e$; ce sont les intervalles où $f'(x) > 0$. De même, f est strictement décroissante pour $c < x < e$; c'est l'intervalle où $f'(x) < 0$. On a un maximum local à $x = c$ qui est prédit par $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c. Finalement, on a un minimum local à

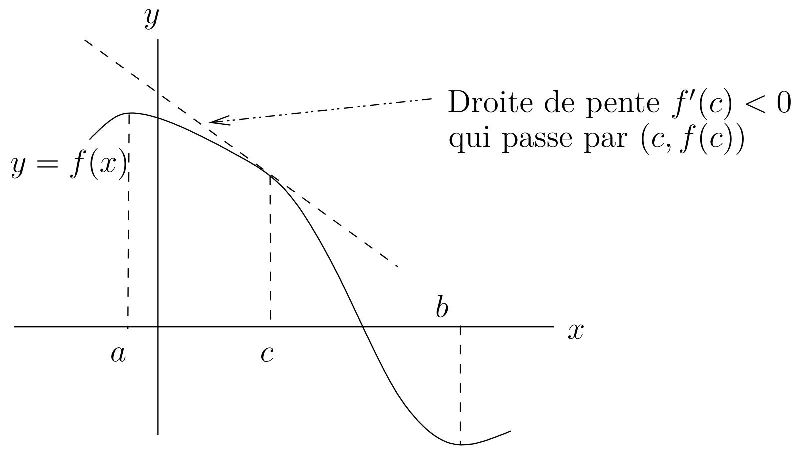


FIGURE 4.10 – $f'(x) < 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement décroissante pour $a < x < b$.

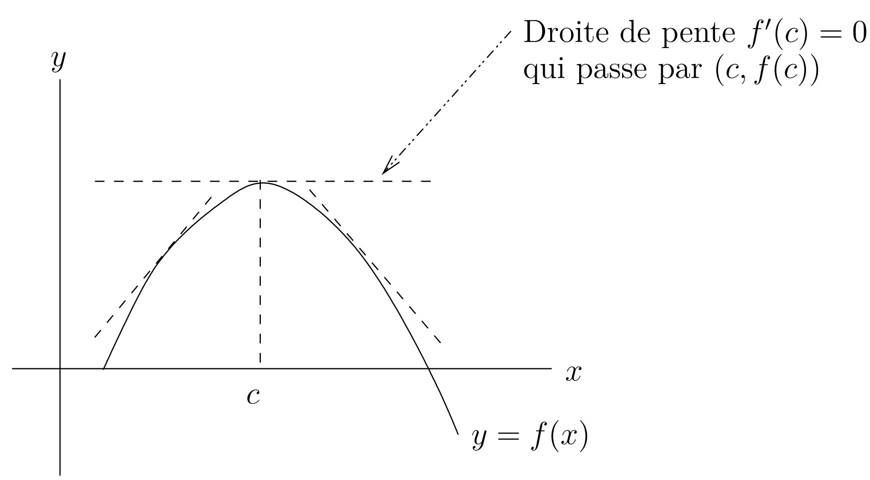


FIGURE 4.11 – La fonction f a un maximum local à $x = c$ car $f'(x) < 0$ pour $x > c$ et $f'(x) > 0$ pour $x < c$.

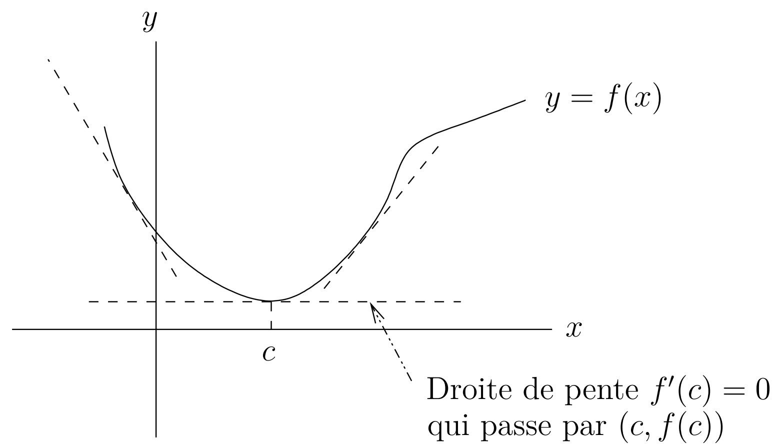


FIGURE 4.12 – La fonction f a un minimum local à $x = c$ car $f'(x) > 0$ pour $x > c$ et $f'(x) < 0$ pour $x < c$.

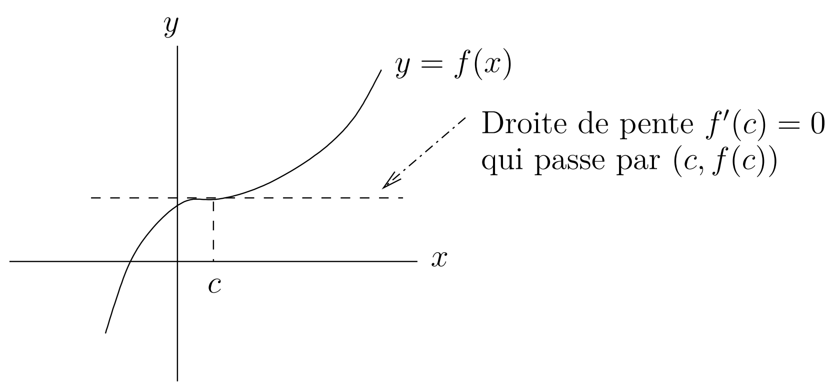


FIGURE 4.13 – On a $f'(c) = 0$ mais on n'a pas de minimum ou maximum local à $x = c$.

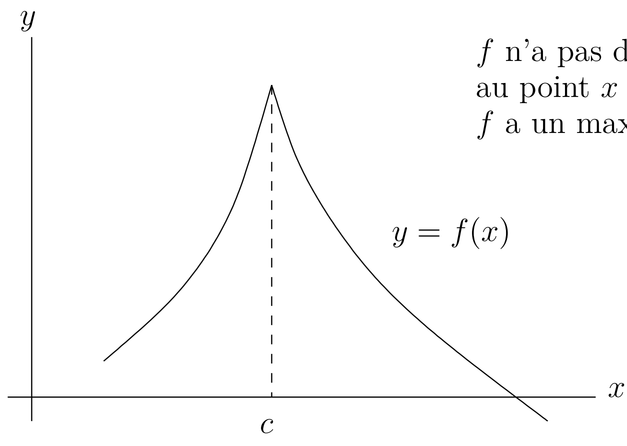


FIGURE 4.14 – On a un maximum local au point $x = c$ mais la fonction f n'a pas de dérivée à ce point.

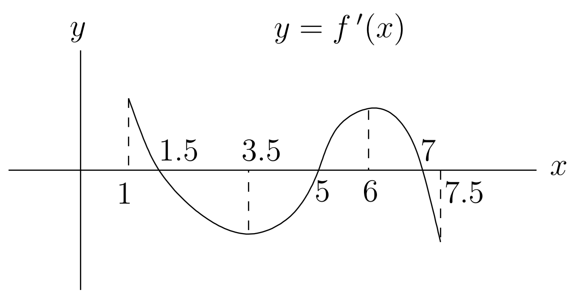
$x = e$ qui est prédit par $f'(x) < 0$ pour $x < e$ près de e et $f'(x) > 0$ pour $x > e$ près de e. ♣

Remarque 4.4.4
Si f' est une fonction continue, puisque f' change de signe à un maximum ou un minimum local c, on doit avoir $f'(c) = 0$. Par contre, $f'(c) = 0$ n'implique pas que l'on ait un maximum ou minimum local comme on peut le constater à la figure 4.13.

De plus, f peut ne pas avoir de dérivée à un maximum ou minimum local comme on peut le voir à la figure 4.14.

Nous reviendrons plus en détails sur ce sujet au chapitre sur les applications de la dérivée. ♠

Exemple 4.4.5
Le graphe de f' est donné dans la figure ci-dessous.



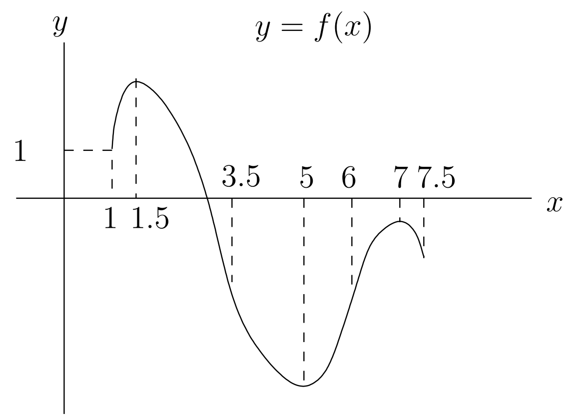
Si on sait que $f(1) = 3$, on peut dessiner un graphe approximatif de f à partir de l'information fournie par le graphe de f'.

Entre 1 et 1.5, la fonction est strictement croissante car f' est positive. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1 à 1.5, la pente de f est de moins en moins abrupte lorsque x augmente de 1 à 1.5 et la fonction f croît donc de moins en moins rapidement.

Entre 1.5 et 5, la fonction f est strictement décroissante car f' est négative. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1.5 à 3.5, la pente de f devient de plus en plus abrupte et f décroît donc de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 1.5 à 3.5. Par contre, f' augmente lorsque x augmente de 3.5 à 5. Ainsi, la pente de f devient de moins en moins abrupte et donc f décroît de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 3.5 à 5.

En raisonnant comme on l'a fait aux paragraphes précédents, on obtient que f croît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 5 à 6, et de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 6 à 7. Finalement, la fonction f décroît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 7 à 7.5.

On retrouve un graphe possible pour f dans la figure suivante.



♣

Le théorème qui suit n'a généralement peu d'utilité du point de vue numérique. Par contre, il est très utile du point de vue conceptuelle comme les exemples qui suivront l'énoncé du théorème vont démontrer.

Théorème 4.4.6 (**Théorème de la moyenne / Théorème des accroissements finis**)
Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

On insiste sur le fait que ξ dépend de a et b (d'où la notation $\xi = \xi(a, b)$) et donc varie si a et b changent. Voir la figure 4.15.

Exemple 4.4.7
Si un train prend deux heures, à une vitesse moyenne de 100 km/h, pour se rendre d'Ottawa à Montréal, alors il faut qu'à un moment durant le voyage la vitesse (instantanée) du train

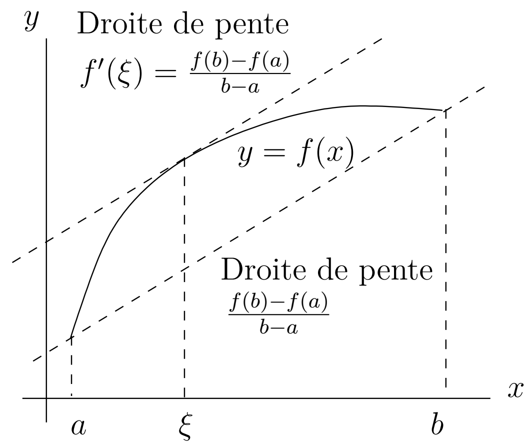


FIGURE 4.15 – Une représentation graphique du théorème de la moyenne.

soit de 100 km/h. Si ce n'est pas le cas, cela implique que la plus grande vitesse du train durant le voyage a été inférieure à 100 km/h (si on suppose que le train part au repos) et donc la vitesse moyenne est inférieure à 100 km/h.

De même, si le taux moyen de croissance d'une population de bactéries pour une période de 24 heures est $1,000$ bactéries par heure, alors, à un moment durant la période de 24 heures, le taux instantané de croissance de la population est de $1,000$ bactéries par heure.

Ces deux observations sont deux réalisations concrètes du théorème de la moyenne. ♣

Le théorème de la moyenne peut être utilisé pour donner une démonstration analytique de la proposition 4.4.2 ; une démonstration qui ne fait pas appel à l'interprétation graphique de la dérivée.

Montrons que si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. Soit $x_1 < x_2$ deux points de l'intervalle $]a, b[$. Le théorème de la moyenne donne ξ entre x_1 et x_2 tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ .$$

Puisque $\xi \in]a, b[$, on a $f'(\xi) > 0$ et ainsi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

et donc

$$f(x_2) > f(x_1) \ .$$

De la même façon, on pourrait montrer que si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) < 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$.

On verra très prochainement que la dérivée d'une fonction constante est nulle en tout point. Est-ce que les fonctions constantes sont les seules fonctions dont la dérivée est nulle en tout point ? Le théorème de la valeur moyenne nous permet de répondre par l'affirmative à cette question. En effet, supposons que f soit une fonction telle que $f'(x) = 0$ pour tout x.

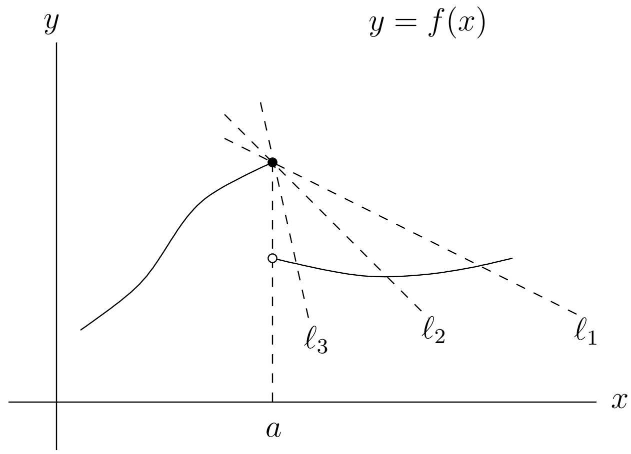


FIGURE 4.16 – Cette fonction n'est pas continue à $x = a$ et donc sa dérivée n'existe pas à ce point,

Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques, il existe grâce au théorème de la moyenne un point ξ entre x_1 et x_2 telle que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \ .$$

Or $f'(\xi) = 0$. Donc, $f(x_2) = f(x_1)$.

4.4.1 Différentiable implique continue

On remarque que la fonction f donnée à la figure 4.16 n'est pas différentiable au point a où elle n'est pas continue. La pente des sécantes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ... approche moins l'infini car ces sécantes approchent une droite verticale. On a donc

$$\lim_{b \to a+} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\infty \ .$$

Il semble donc que les fonctions doivent être continues aux points où elles sont différentiables. On peut vérifier cela à partir de la définition de la dérivée.

Théorème 4.4.8
Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable au point $c \in]a, b[$, alors f est continue au point c.

On peut démontrer ce théorème de la façon suivante. Si la fonction f est différentiable au point c, on a donc que la limite

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

existe et est égale à $f'(c) \in \mathbb{R}$. En particulier, f doit être définie au point c. Mais alors,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to c}\left(f(z)-f(c)\right) &= \lim_{z\to c}\left(\frac{f(z)-f(c)}{z-c}\right)(z-c) \\ &= \lim_{z\to c}\left(\frac{f(z)-f(c)}{z-c}\right)\times\lim_{z\to c}(z-c) = f'(c)\times 0 = 0\ .\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{z\to c} f(z) = f(c)\ .$$

Ce qui prouve que f est continue au point c.

4.4.2 Une première application de la dérivée ; la vitesse d'un objet

Soit $x(t)$ la position en kilomètres (km) au temps t en heures (h) d'un véhicule se déplaçant en ligne droite. La vitesse moyenne d'un véhicule est donnée par la distance parcourue divisée par le temps nécessaire pour couvrir cette distance. Si la distance est en kilomètres et le temps est en heures, la vitesse moyenne est en kilomètres par heure (km/h). La formule pour calculer la vitesse moyenne entre $t = a$ heures et $t = b > a$ heures est donnée par

$$\frac{x(b)-x(a)}{b-a} \quad km/h\ .$$

Si b est très près de a, alors on peut assumer que la vitesse du véhicule entre $t = a$ et $t = b$ heures est (presque) constante et est égale à la vitesse moyenne entre $t = a$ et $t = b$. Si on laisse b tendre vers a, on obtient la vitesse instantanée du véhicule au temps $t = a$ heures. C'est la vitesse du véhicule à précisément $t = a$ heures. Donc,

$$x'(a) = \lim_{b\to a}\frac{x(b)-x(a)}{b-a}$$

est la vitesse instantanée en km/h du véhicule à $t = a$ heures.

4.5 Dérivées de quelques fonctions élémentaires

On a vu précédemment comment calculer numériquement la dérivée d'une fonction en un point. Malheureusement, pour analyser le comportement d'une fonction sur un intervalle donné à l'aide de la dérivée, on ne peut pas calculer numériquement la dérivée à tous les points de l'intervalle pour déterminer le signe de la dérivée en ces points. Il faut donc chercher des formules qui nous permettront de calculer la dérivée d'une fonction rapidement et efficacement.

Nous allons voir dans les prochaines sections qu'il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles et trigonométriques à partir de la définition de la dérivée. Il existe des formules générales pour calculer ces dérivées.

Nous aurions pu conclure ce chapitre avec une courte section énonçant les règles de dérivation sans ou avec le minimum de justifications. Le lecteurs n'aurait eu qu'à mémoriser ces règles. Cependant, cet approche n'aurait pas permis au lecteur de développer ses capacités de raisonnement logique et mathématique.

Nous avons donc choisi de présenter dans cette section et celles qui suivent les règles de dérivation de façon logique et avec le plus de rigueur possible sans aller aux extrêmes. Chaque règle est introduite quand et seulement quand les concepts nécessaires pour justifier cette règle ont été présentés. C'est pour cette raison, par exemple, que la règle de dérivation pour $f(x) = x^\alpha$ avec α un nombre réel quelconque est présentée seulement à la presque toute fin du chapitre. C'est portant une des premières règles de dérivation qui est donnée dans le cours de mathématiques de 12^e année au niveau secondaire.

4.5.1 Dérivée de $\mathbf{f(x) = x^n}$ où n est un entier positif ou nul

Quelle est la dérivée de la fonction constante f ; c'est-à-dire, de la fonction définie par $f(x) = c$ pour tout x où c est une constante ?

Si on utilise le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, on trouve que $f'(x) = 0$ pour tout x car le graphe de f est une droite horizontal et les droites horizontales ont une pente nul. On utilise le fait que la tangente à un droite est la droite elle-même.

On peut aussi utiliser la définition de la dérivée pour démontrer que $f'(x) = 0$ pour tout x. Puisque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

quel que soit h, on a que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On a donc que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

pour tout x. On obtient donc la règle suivante.

> **Proposition 4.5.1**
> Soit c une constante. Si $f(x) = c$ pour tout x, alors $f'(x) = 0$ pour tout x.

On considère maintenant $f(x) = x$ pour tout x. Si on utilise encore le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, on trouve que $f'(x) = 1$ pour tout x car $y = f(x) = x$ est une droite de pente 1 qui est sa propre tangente en tout point.

On peut démontrer à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de $f(x) = x$ est bien $f'(x) = 1$ pour tout x. Pour faire cela, il suffit de remarquer que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

pour tout $h \neq 0$. Donc,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \ .$$

La fonction constante à 1 sur la droite réelle approche évidemment 1 quand on approche l'origine.

Considérons maintenant la fonction $f(x) = x^2$ pour tout x. Dans le tableau suivant, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

x	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+0.00001)-f(x)}{0.00001}$	$\lvert 2x - f'(x)\rvert$
-1	-2	0
1	$2.00001000001\ldots$	$0.1000001\ldots \times 10^{-4}$
2	$4.00001000002\ldots$	$0.1000002\ldots \times 10^{-4}$
π	$6.2831953071\ldots$	$0.99999\ldots \times 10^{-5}$
3.5	$7.00001000009\ldots$	$0.1000009\ldots \times 10^{-4}$

On remarque que $f'(x) \approx 2x$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. On peut conjecturer que $f'(x) = 2x$ pour tout x.

Montrons à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est bien $f'(x) = 2x$ pour tout x. On a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui approche $2x$ lorsque h tend vers 0. Donc,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x$$

quel que soit x.

Maintenant que l'on sait que la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ pour tout x, il est très facile de trouver la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point de cette courbe. Il n'est plus nécessaire de calculer numériquement les pentes des tangentes à l'aide de limites de pentes de sécantes.

Exemple 4.5.2
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(x, y) = (3, 9)$ sur cette courbe.

On a vu que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point $x = a$ est donnée par $f'(a)$. Ainsi, la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(3, 9)$ est $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.

L'équation de la tangente dans la forme point-pente est donc $y - 9 = 6(x - 3)$, ce qui donne $y = 6x - 9$ dans la forme standard. On a tracé le graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$ à la figure 4.17. ♣

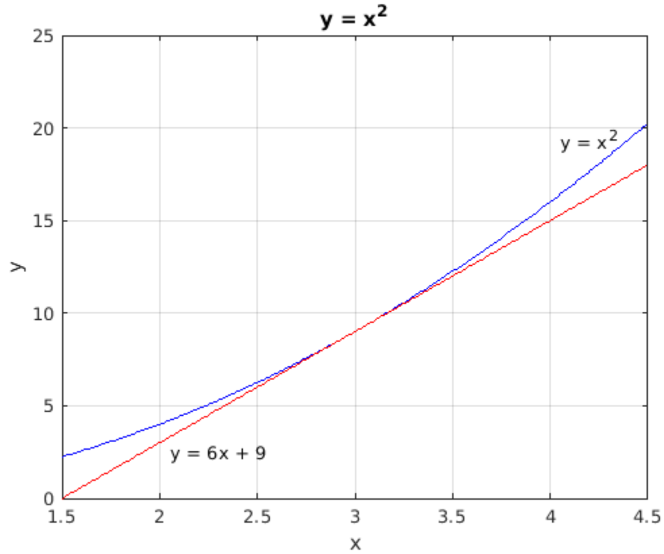


FIGURE 4.17 – Graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$.

En procédant comme on la fait avec la fonction $f(x) = x^2$, on peut montrer que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$, celle de $f(x) = x^4$ est $f'(x) = 4x^3$, et ainsi de suite. On peut obtenir un résultat dans le cas général où $f(x) = x^n$ avec n un entier positif à l'aide de la formule du binôme.

Puisque

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \ldots + nh^{n-1}x + h^n \quad ,$$

on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\left(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \ldots + nh^{n-1}x + h^n\right) - x^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2}}_{\to 0 \text{ lorsque } h\to 0} + \ldots + \underbrace{nh^{n-2}x}_{\to 0 \text{ lorsque } h\to 0} + \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0 \text{ lorsque } h\to 0}\right) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

On obtient la règle suivante.

Proposition 4.5.3
Soit $f(x) = x^n$ pour un entier $n \neq 0$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour les valeurs de x où x^{n-1} est définie.

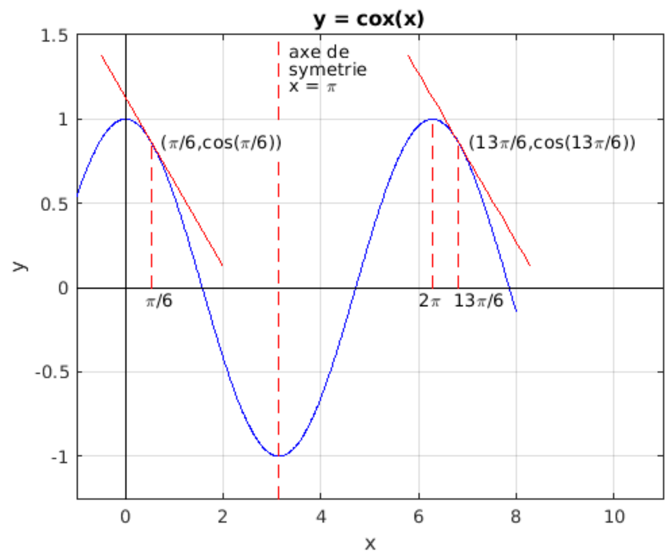


FIGURE 4.18 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont parallèles.

4.5.2 Dérivée du sinus et du cosinus

Si $f(x) = \cos(x)$, quel sera $f'(x)$?

Commençons par quelques observations qui nous guideront dans la recherche de la dérivée de f. Puisque f est périodique de période 2π, alors f' sera aussi périodique de période au plus 2π comme on peut le constater grâce à la figure 4.18. Par exemple, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(\pi/6, \cos(\pi/6)) = (\pi/6, \sqrt{3}/2)$ est parallèle à la tangente à cette même courbe au point $(13\pi/6, \cos(13\pi/6)) = (13\pi/6, \sqrt{3}/2)$. Donc, les deux tangentes ont la même pente. Ainsi, $f'(\pi/6) = f'(13\pi/6)$.

De plus, puisque $f(x) = f(2\pi - x)$, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = \pi$. Ainsi, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(2\pi - a, f(2\pi - a))$ est obtenue de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ par une symétrie par rapport à l'axe vertical $x = \pi$ (Voir la figure 4.19). En particulier, $f'(2\pi - a) = -f'(a)$.

Puisque f a des maximums locaux à $x = 2n\pi$ et des minimums locaux à $x = (2n - 1)\pi$ quel que soit l'entier n, on a que $f'(n\pi) = 0$ pour tout entier n.

À partir du graphe de f, on peut supposer que la plus petite pente pour les tangentes à la courbe $y = f(x)$ est lorsque $x = (4n+1)\pi/2$ et la plus grande pente pour les tangentes de cette même courbe est lorsque $x = (4n + 3)\pi/2$ quel que soit l'entier n. Cela sera démontré plus loin. Donc, f' aura des minimums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n+1)\pi/2$ et des maximums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n + 3)\pi/2$ quel que soit l'entier n.

Si on utilise le fait que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ sur la courbe, on peut déterminer le signe de $f'(x)$ et même estimer la valeur de

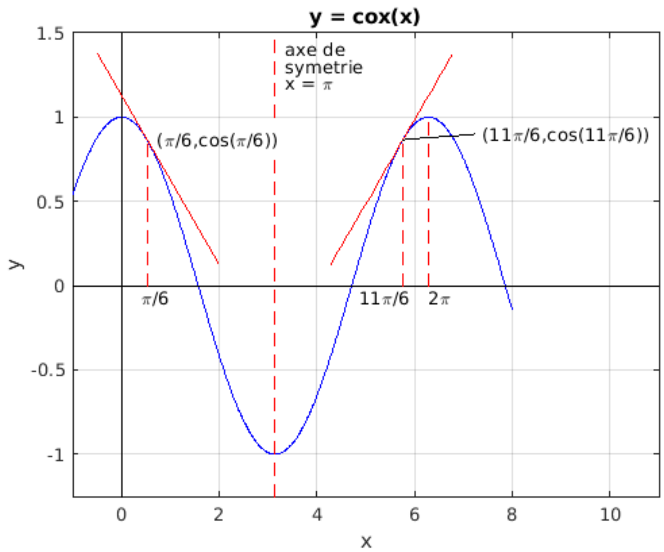


FIGURE 4.19 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont symétriques par rapport à l'axe $x = \pi$.

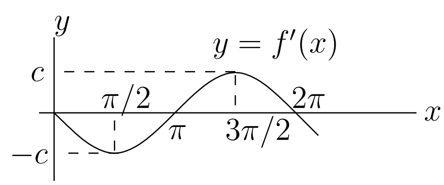


FIGURE 4.20 – Un graphe possible pour la dérivée du cosinus basé sur le signe de la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = \cos(x)$.

$f'(x)$ pour prédire la forme du graphe de f'. On a tracé un graphe possible pour f' à la figure 4.20.

Dans le tableau 4.1, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x) \approx -\sin(x)$ pour les quelques valeurs de x dans le tableau 4.1.

Le graphe associé aux données du tableau 4.1 ainsi que le graphe de $y = -\sin(x)$ sont donnés à la figure 4.21. Les deux graphes sont très semblables. Pour obtenir un meilleur graphe de f' on suggère au lecteur d'ajouter plus de points au tableau 4.1 et de choisir h plus petit dans l'approximation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de $f'(x)$.

On va démontrer plus loin qu'il est effectivement vrai que $f'(x) = -\sin(x)$.

Si $g(x) = \sin(x)$, on pourrait procéder comme on vient de le faire pour $f(x) = \cos(x)$ pour montrer numériquement que $g'(x) = \cos(x)$. Cependant, il y a une façon plus simple de démontrer cela en assumant que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

x	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+0.00001)-f(x)}{0.00001}$	$\lvert -\sin(x) - f'(x)\rvert$
$0.000000\ldots$	$-0.000005\ldots$	$0.000005\ldots$
$\pi/12 = 0.261799\ldots$	$-0.258824\ldots$	$0.000005\ldots$
$\pi/6 = 0.523599\ldots$	$-0.500004\ldots$	$0.000004\ldots$
$\pi/4 = 0.785398\ldots$	$-0.707110\ldots$	$0.000004\ldots$
$\pi/3 = 1.047198\ldots$	$-0.866028\ldots$	$0.000002\ldots$
$5\pi/12 = 1.308997\ldots$	$-0.965927\ldots$	$0.000001\ldots$
$\pi/2 = 1.570796\ldots$	$-1.000000\ldots$	$0.000000\ldots$
$7\pi/12 = 1.832596\ldots$	$-0.965925\ldots$	$0.000001\ldots$
$2\pi/3 = 2.094395\ldots$	$-0.866023\ldots$	$0.000003\ldots$
$3\pi/4 = 2.356194\ldots$	$-0.707103\ldots$	$0.000004\ldots$
$5\pi/6 = 2.617994\ldots$	$-0.499996\ldots$	$0.000004\ldots$
$11\pi/12 = 2.879793\ldots$	$-0.258814\ldots$	$0.000005\ldots$
$\pi = 3.141593\ldots$	$0.000005\ldots$	$0.000005\ldots$
$13\pi/12 = 3.403392\ldots$	$0.258824\ldots$	$0.000005\ldots$
$7\pi/6 = 3.665191\ldots$	$0.500004\ldots$	$0.000004\ldots$
$5\pi/4 = 3.926991\ldots$	$0.707110\ldots$	$0.000004\ldots$
$4\pi/3 = 4.188790\ldots$	$0.866028\ldots$	$0.000002\ldots$
$17\pi/12 = 4.450590\ldots$	$0.965927\ldots$	$0.000001\ldots$
$3\pi/2 = 4.712389\ldots$	$1.000000\ldots$	$0.000000\ldots$
$19\pi/12 = 4.974188\ldots$	$0.965925\ldots$	$0.000001\ldots$
$5\pi/3 = 5.235988\ldots$	$0.866023\ldots$	$0.000003\ldots$
$7\pi/4 = 5.497787\ldots$	$0.707103\ldots$	$0.000004\ldots$
$11\pi/6 = 5.759587\ldots$	$0.499996\ldots$	$0.000004\ldots$
$23\pi/12 = 6.021386\ldots$	$0.258814\ldots$	$0.000005\ldots$
$2\pi = 6.283185\ldots$	$-0.000005\ldots$	$0.000005\ldots$

TABLE 4.1 – Approximations de la dérivée de $f(x) = \cos(x)$ à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$

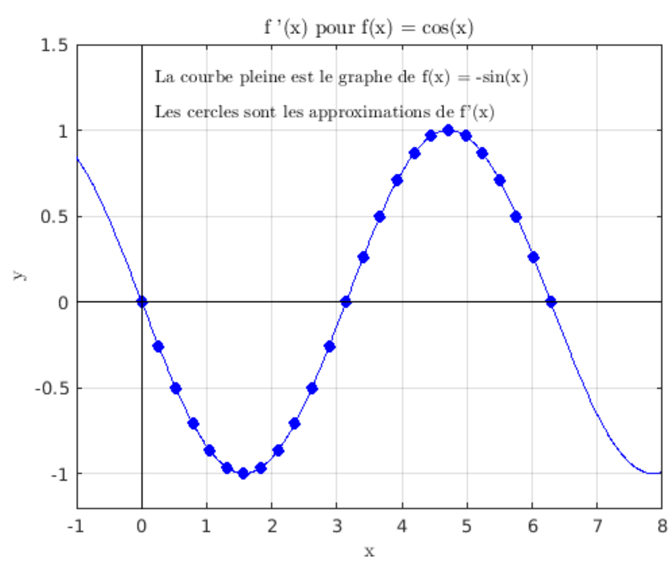


FIGURE 4.21 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = \cos(x)$ qui se retrouvent dans le tableau 4.1 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de $-\sin(x)$.

Puisque

$$g(x) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

on obtient le graphe de g par une translation de $\pi/2$ vers la droite du graphe de f. Il s'en suit que les tangentes au graphe de g sont obtenues par une translation de $\pi/2$ vers la droite des tangentes au graphe de f, et il en est de même pour les pentes de ses tangentes. Ainsi,

$$g'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \ .$$

On peut aussi expliquer cette égalité à l'aide de la définition de la dérivée. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((a+h) - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + h\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

En combinant les deux cas précédents on obtient les formules suivantes :

Proposition 4.5.4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \ .$$

Soit $f(x) = \cos(x)$. Pour démontrer que $f'(x) = -\sin(x)$, il faut se rappeler que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin h}{h} \ . \end{aligned}$$

Or, on a vu à l'exemple 3.1.12 que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \ .$$

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right)\left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1}\right) \end{aligned}$$

$$= -1 \times 0 = 0$$

car $\dfrac{\sin(h)}{\cos(h)+1}$ est une fonction continue à $h = 0$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h)+1} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)+1} = \frac{0}{2} = 0 \ .$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos(x) \times 0 - \sin(x) \times 1 = -\sin(x) \end{aligned}$$

quel que soit x.

4.6 Calcul des dérivées

Quelle est la dérivée de $x^{10} + 5x^3 + 4$, de $x\cos(x)$, de $\cos(x^2)$, etc ? Il n'est pas raisonnable de chercher systématiquement la dérivée de chaque fonction comme on l'a fait à la section précédente. Il y a des règles de dérivation qui nous permettront de calculer la dérivée d'un grand nombre de fonctions sans avoir à utiliser la définition de la dérivée comme nous l'avons fait pour les fonctions de la section précédente.

4.6.1 Dérivée d'une fonction multipliée par une constante

Exemple 4.6.1
Soit $x(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture A et $y(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture B. Si on a deux bactéries de la culture A pour chaque bactérie de la culture B en tout temps, alors pour chaque bactérie qui s'ajoute à la culture B, deux bactéries doivent s'ajouter à la culture A pour préserver le rapport de 2 pour 1. Par exemple, si pendant une période de deux heures, le nombre de bactéries de la culture B augmente de $10,000$ à $11,000$ alors le nombre de bactéries de la culture A doit augmenter de $20,000$ à $22,000$ pour préserver le rapport de 2 pour 1. Le taux de croissance de la culture A est donc deux fois celui de la culture B.

Mathématiquement, si $x(t) = 2y(t)$ pour tout t alors $x'(t) = 2y'(t)$ pour tout t car $x'(t)$ et $y'(t)$ sont les taux de croissance (taux de variation instantanée) au temps t pour les cultures A et B respectivement. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.2
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $f = cg$ où c est une constante, alors
$$f'(x) = cg'(x)$$
pour tout $x \in]a,b[$.

On peut vérifier à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vrai. Si $f(x) = cg(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, on a
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = c\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \ .$$
Ainsi,
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c\ \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = cg'(x)$$
pour tout $x \in]a,b[$.

Exemple 4.6.3
Cette règle nous permet donc de calculer les dérivées suivantes.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^7\right) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^7\right) = 5(7x^6) = 35x^6$$
et
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(7\cos(x)\Big) = 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\cos(x)\Big) = 7(-\sin(x)) = -7\sin(x)$$

♣

4.6.2 Dérivée d'une somme de fonctions

Exemple 4.6.4
Un train se déplace en ligne droite (voir figure 4.22). Si $x(t)$ est la distance au temps t entre la queue du train et le début du trajet, la vitesse du train (taux de variation instantané de sa position) au temps t est donnée par $x'(t)$.

Si $y(t)$ est la distance entre un passager et la queue du train au temps t, alors la vitesse du passager par rapport au train au temps t est $y'(t)$. Comme le passager passe normalement la majorité de son temps assis, on a que $y(t)$ est constant et donc $y'(t) = 0$ pour de long intervalles. De plus, $y'(t)$ sera plus grand que 0 si la personne se déplace vers l'avant du train et plus petit que 0 si la personne se déplace vers l'arrière du train.

La distance au temps t entre le passager et le début du trajet est $z(t) = x(t) + y(t)$, la somme de la distance entre le début du trajet et la queue du train, et de la distance entre la queue du train et la position du passager dans le train.

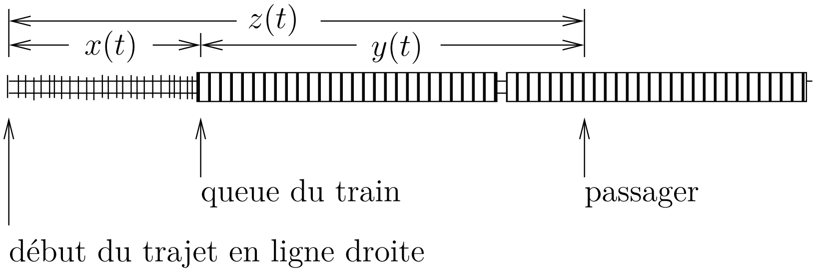


FIGURE 4.22 – Distance parcourue par un passager de train qui roule en ligne droite.

Si, 30 minutes (i.e. 0.5 heure) après le début du trajet, le train se déplace à une vitesse de 130 km/heure et le passager se déplace vers l'avant du train par rapport au train à une vitesse de 3 km/heure, alors la vitesse du passager par rapport au début du trajet en ligne droite est de 133 km/heure.

Mathématiquement, ce que l'on vient de dire est que $z'(0.5) = 133 = 130 + 3 = x'(0.5) + y'(0.5)$. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante pour la dérivée.

Théorème 4.6.5
Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\to \mathbb{R}$ est définie par $q = f + g$, alors

$$q'(x) = f'(x) + g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

On peut vérifier à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vraie. Par définition de la dérivée de q, on a

$$q'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} .$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} . \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) ,$$

on a

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{q(x+h)-q(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x) \ . \end{aligned}$$

Exemple 4.6.6
Soit $p(x) = 5x^{10} + 3x^4 + 2x^2 + 7$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^{10}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^4\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(7\right) \\ &= 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{10}\right) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(7\right) \\ &= 5(10x^9) + 3(4x^3) + 2(2x) + 0 = 50x^9 + 12x^3 + 4x \end{aligned}$$

où la règle pour calculer la dérivée de x^n a été utilisée. ♣

Exemple 4.6.7
Pour trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(x) = 3x^{10} + 5x^4$ lorsque $x = 1$, il faut trouver la pente de la tangente à la courbe $y = p(x)$ au point $(1, p(1)) = (1, 8)$. Cette pente est donnée par $p'(1)$. Or

$$p'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3x^{10}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^4\right) = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{10}\right) + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) = 3(10x^9) + 5(4x^3) = 30x^9 + 20x^3 \ .$$

Donc, $p'(1) = 50$. L'équation de la tangente dans la forme point-pente est $y - 8 = 50(x - 1)$, ce qui donne $y = 50x - 42$. ♣

4.6.3 Dérivée du produit de fonctions

Exemple 4.6.8
Supposons que la longueur des côtés d'un rectangle varient en fonction du temps. Soit $x(t)$ la longueur de la base du rectangle en mètres au temps t en secondes, et soit $y(t)$ la longueur de la hauteur du rectangle en mètres au temps t en secondes. L'aire $A(t)$ du rectangle en mètres carrés au temps t en secondes est donc $A(t) = x(t)y(t)$ m^2.

Si la longueur de la base augmente à une vitesse constante de 2 m/s et la longueur de la hauteur augmente à une vitesse constante de 3 m/s, quel sera le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle en m^2/s ?

On a que $x'(t) = 2$ m/s et $y'(t) = 3$ m/s pour tout t. Si la longueur initiale de la base est de 10 m et la longueur initiale de la hauteur est de 11 m, alors la longueur de la base augmente de 10 à 12 m et la longueur de la hauteur augmente 11 à 14 m en une seconde. L'aire du rectangle augmente donc de $10 \times 11 = 110$ m^2 à $12 \times 14 = 168$ m^2 en une seconde, une augmentation moyenne de 58 m^2/s.

Est-ce que $A'(t) = 58$ m^2/s pour tout t ? En particulier, est-ce que la vitesse de croissance de l'aire du rectangle est constante par rapport au temps ?

Toujours en supposant que la longueur initiale de la base soit de 10 m et celle de la hauteur soit de 11 m, après 2 secondes la longueur de la base est de 14 m et celle de la hauteur est de 17 m. Donc, l'aire du rectangle augmente de $10 \times 11 = 110$ m^2 à $14 \times 17 = 238$ m^2 en deux secondes. Ce qui donne une augmentation moyenne de 64 m^2/s. On ne peut donc pas avoir $A'(t) = 58$ m^2/s pour tout t.

Comment peut-on calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$? En fait, peut-on calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$?

Il est clair que la formule $A'(t) = x'(t)y'(t)$ est **fausse**. Les calculs précédents montrent que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle varie avec le temps, ce qui n'est pas le cas pour le produit $x'(t)y'(t)$ qui est égal à 6 pour tout t. En fait, une étude des unités utilisées montre que cette formule n'a pas de sens. Puisque les unités de $x'(t)$ et de $y'(t)$ sont des m/s, les unités de $x'(t)y'(s)$ sont des m^2/s^2 et non des m^2/s comme on doit avoir pour $A'(t)$.

Considérons la variation de l'aire sur un très petit intervalle de temps Δt. Durant cet petit intervalle de temps, la longueur de la base augmente de x à $x + \Delta x$ mètres et la longueur de la hauteur augmente de y à $y + \Delta y$ mètres (voir la figure 4.23). L'aire du rectangle augmente donc de xy à

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y \ .$$

Lorsque Δt approche 0, on a que $\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}$ converge vers 0 car

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} = \Delta x \ \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ou Δx converge vers 0 et $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ converge vers y' lorsque Δt approche 0. Ainsi,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy}{\Delta t} = x\frac{\Delta y}{\Delta t} + y\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} \to xy' + yx'$$

lorsque Δt approche 0. ♣

La formule obtenue à l'exemple précédant suggère donc le résultat suivant.

Théorème 4.6.9
Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ and $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\to \mathbb{R}$ est définie par $q = f\,g$, alors

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Posons $q(x) = f(x)g(x)$ pour tout x. Par définition de la dérivée, on a

$$q'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{q(x + h) - q(x)}{h} \ .$$

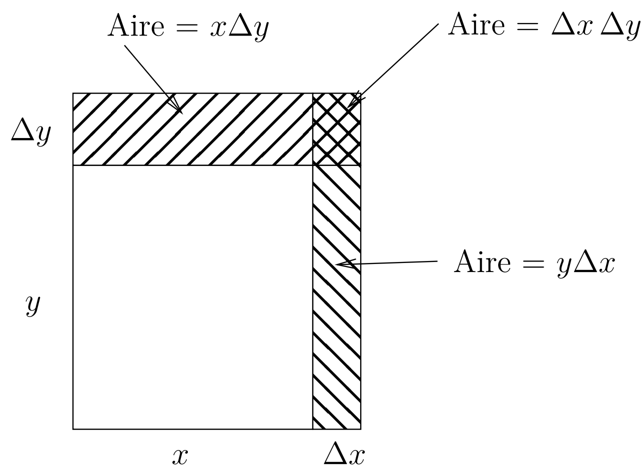


FIGURE 4.23 – L'aire du rectangle augmente de xy à $(x+\Delta x)(y+\Delta y) = xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y$.

Or,

$$\begin{aligned}\frac{q(x+h)-q(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)g(x+h)+f(x)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) .\end{aligned}$$

Comme g est différentiable au point x par hypothèse, g est continue au point x. Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x) .$$

De plus,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

car f et g sont différentiables au point x par hypothèse. On a donc

$$\begin{aligned}q'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)+f(x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) .\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions.

Exemple 4.6.10

Retournons à l'exemple précédent où l'on devait déterminer le taux de croissance instantané de l'aire d'un rectangle dont la longueur des côtés varie en fonction du temps. Notre formule pour la dérivée du produit de fonctions donne donc

$$A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 2y(t) + 3x(t) \quad \mathrm{m}^2/\mathrm{s}\ .$$

On observe que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle n'est pas constant par rapport au temps même si les taux de croissance instantanés des longueurs des côtés sont constants. Par exemple, le taux de croissance instantané au début (à $t = 0$) est

$$A'(0) = x'(0)y(0) + x(0)y'(0) = 2 \times 11 + 3 \times 10 = 52 \quad \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

et celui à $t = 1$ est

$$A'(1) = x'(1)y(1) + x(1)y'(1) = 2 \times 14 + 3 \times 12 = 64 \quad \mathrm{m}^2/\mathrm{s}\ .$$

Si on étudie les unités utilisées, on obtient de la formule $A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ que les unités de $A'(t)$ sont des $\mathrm{m/s} \times \mathrm{m} + \mathrm{m} \times \mathrm{m/s} = \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ comme il se doit. ♣

Exemple 4.6.11
Soit $q(x) = (x^3 + 2x)\sin(x)$. La fonction q est le produit des fonctions $f(x) = x^3 + 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. Ainsi,

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (3x^2 + 2)\sin(x) + (x^3 + 2x)\cos(x)\ .$$

♣

4.6.4 Dérivée du quotient de fonctions

Quelle est la dérivée de $g(x) = p(x)/q(x)$? En multipliant par $q(x)$ des deux côtés on obtient $g(x)q(x) = p(x)$. Maintenant, en dérivant des deux côtés, on obtient

$$g'(x)q(x) + g(x)q'(x) = p'(x) \Leftrightarrow g'(x)q(x) = p'(x) - g(x)q'(x) \Leftrightarrow g'(x) = \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{g(x)q'(x)}{q(x)}\ .$$

Or $g(x) = p(x)/q(x)$, donc

$$g'(x) = \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}\ .$$

Cette formule pour calculer la dérivée du quotient de deux fonctions mérite d'être mise en évidence car elle est utile.

Proposition 4.6.12
Soit $p :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $q :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. de plus, on suppose que $q(x) \neq 0$ pour $a < x < b$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Cette formule est appelée la **règle de dérivée du quotient** de deux fonctions.

Exemple 4.6.13
Calculer la dérivée de $g(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 5x)$.

On a $p(x) = x^3 + 2$ et $q(x) = x^2 + 5x$ dans la règle de dérivée du quotient de deux fonctions. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2} .$$

♣

Exemple 4.6.14
Calculer la dérivée de $\tan(x)$.

Puisque $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, on peut utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions ci-haut avec $p(x) = \sin(x)$ et $q(x) = \cos(x)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) &= \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\right)\cos(x) - \sin(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)\right)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 = \sec^2(x)\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. ♣

En procédant de la même façon que dans l'exemple précédent, on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.6.15

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \sec^2(x) \ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\csc^2(x) \ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec(x) = \tan(x)\sec(x)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc(x) = -\cot(x)\csc(x) \ .$$

4.6.5 Dérivée de fonctions composées

Exemple 4.6.16
On étudie les populations d'ours et de poissons le long d'une section de 1 kilomètre d'une rivière du nord de l'Ontario.

On estime que le nombre de poissons augmente de 147 lorsque la température de l'eau de la rivière augmente de 2°C et que le nombre d'ours augmente de 2 lorsque le nombre de poissons augmente de 49. On peut donc dire que le nombre d'ours augmente de 3 lorsque la température de l'eau augmente de 1°C car une augmentation de 2°C entraîne une augmentation de 147 poissons qui entraîne un augmentation de 6 ours (2 ours par tranche de 49 poissons).

Essayons de reformuler le raisonnement du paragraphe précédent en termes mathématiques. Si $P(T)$ est le nombre de poissons lorsque la température de l'eau est de T°C et $N(P)$ est le nombre d'ours lorsqu'il y a P poissons, alors le nombre d'ours en fonction de la température T en degrés centigrades de l'eau est donné par $B(T) = (N \circ P)(T) = N(P(T))$. On a que $P'(T) = 147/2$ poissons/degré et $N'(P) = 2/49$ ours/poisson. L'énoncé du paragraphe précédent se traduit donc par la formule mathématique

$$B'(T) = N'(P(T))P'(T) = \frac{2}{49} \times \frac{147}{2} = 3 \quad \text{ours/degré.}$$

En d'autres mots, le taux de croissance du nombre d'ours par rapport à la température de l'eau est le produit du taux de croissance du nombre d'ours par rapport au nombre de poissons (2/49 ours/poisson) et du taux de croissance du nombre de poissons par rapport à la température de l'eau (149/2 poissons/degré).

La formule $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ est cohérente avec les unités utilisées. Les unités de $P'(T)$ sont des poissons/degré et les unités de $N'(P(T))$ sont des ours/poisson. Il n'est donc pas surprenant que les unités de $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ soient des ours/degré. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.17
Soit $f :]c, d[\to \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que $g(x) \in]c, d[$ pour tout $x \in]a, b[$. La fonction $q :]a, b[\to \mathbb{R}$ définie par $q = f \circ g$ satisfait

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) \ .$$

On vérifie que cette règle est vraie à partir de la définition de la dérivée. Par définition de la dérivée, on a

$$q'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{q(x + h) - q(x)}{h} \ .$$

Le quotient dans la limite précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{q(x + h) - q(x)}{h} &= \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \left(\frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{g(x + h) - g(x)}\right)\left(\frac{g(x + h) - g(x)}{h}\right) \ . \end{aligned}$$

Nous allons calculer la limite lorsque h tend vers 0 pour chacun des facteurs de l'expression précédente. Pour le deuxième facteur, on remarque que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

car g est différentiable par hypothèse. Pour le premier facteur, on remarque premièrement que

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

car g est une fonction différentiable, donc continue, sur l'intervalle $]a,b[$. Puisque f est différentiable sur l'intervalle $]c,d[$ et $g(x) \in]c,d[$, on a

$$f'(g(x)) = \lim_{b\to g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)} \ .$$

On en déduit que

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \to f'(g(x))$$

lorsque $h \to 0$ car $g(x+h) \to g(x)$ lorsque $h \to 0$. C'est-à-dire,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)) \ .$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(g(x))g'(x) \ . \end{aligned}$$

Remarque 4.6.18 👁

Soit $x \in]a,b[$ arbitraire mais fixe. Pour démontrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)) \ . \tag{4.6.1}$$

à l'aide de la définition de limite en termes de ϵ et δ, on choisit $\epsilon > 0$. Puisque

$$f'(g(x)) = \lim_{b\to g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)}$$

pour $g(x) \in]c,d[$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

pour $|b - g(x)| < \delta_1$. De plus, puisque g est continue à $x \in]a,b[$, il existe δ tel que $|g(x+h) - g(x) < \delta_1$ pour $|h| < \delta$. Donc, pour $|h| < \delta$, nous avons

$$\left| \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

Puisque ϵ est arbitraire, on obtient (4.6.1). ♠

Exemple 4.6.19
Calculer la dérivée de $q(x) = (1 + x^2)^{101}$. Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 + x^2$ et $f(x) = x^{101}$. Puisque $g'(x) = 2x$ et $f'(x) = 101x^{100}$, on trouve que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = 101(1 + x^2)^{100} \times 2x = 202x(1 + x^2)^{100} .$$

♣

Exemple 4.6.20
Calculer la dérivée de $q(x) = \cos(1 - x^5)$. Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 - x^5$ et $f(x) = \cos(x)$. Puisque $g'(x) = -5x^4$ et $f'(x) = -\sin(x)$, on trouve que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\sin(1 + x^5) \times (-5x^4) = 5x^4 \sin(1 + x^5) .$$

♣

Exemple 4.6.21
On peut utiliser la dérivée de fonctions composées pour obtenir la formule de dérivation d'un quotient de fonctions. Soit $g(x) = p(x)/q(x)$? La fonction g est le produit des fonctions p et $r \circ q$ où $r(x) = x^{-1}$. La règle pour la dérivée du produit de fonctions donne

$$g'(x) = p'(x)\, r(q(x)) + p(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r(q(x)) \right) .$$

Or,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r(q(x)) = r'(q(x))q'(x) = -(q(x))^{-2} q'(x)$$

car $r'(x) = -x^{-2}$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= p'(x)(q(x))^{-1} - p(x)(q(x))^{-2}q'(x) \\ &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} . \end{aligned}$$

♣

Exemple 4.6.22
Calculer la dérivée de $g(x) = (x^3+2)/(x^2+5x)$ sans utiliser la règle de dérivation du quotient de deux fonctions.

On a que $g(x) = p(x)r(q(x))$ où $p(x) = x^3 + 2$, $q(x) = x^2 + 5x$ et $r(x) = x^{-1}$. Donc,

$$\begin{aligned} g'(x) &= p'(x)r(q(x)) + p(x)r'(q(x))q'(x) \\ &= (3x^2)(x^2 + 5x)^{-1} + (x^3 + 2) \left(-(x^2 + 5x)^{-2} \right) (2x + 5) \\ &= \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x - 5)}{(x^2 + 5x)^2} . \end{aligned}$$

Pour obtenir la première égalité, on a utilisé la règle pour la dérivée du produit de fonctions et celle pour la dérivée des fonctions composées. ♣

x	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$f'(x)/3^x$
-2.00	$0.122069\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.84	$0.145527\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.68	$0.173493\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.52	$0.206834\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.36	$0.246582\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.20	$0.293969\ldots$	$1.098618\ldots$
-1.04	$0.350462\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.88	$0.417811\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.72	$0.498103\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.56	$0.593826\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.40	$0.707943\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.24	$0.843991\ldots$	$1.098618\ldots$
-0.08	$1.006183\ldots$	$1.098618\ldots$
0.08	$1.199545\ldots$	$1.098618\ldots$
0.24	$1.430066\ldots$	$1.098618\ldots$
0.40	$1.704886\ldots$	$1.098618\ldots$
0.56	$2.032520\ldots$	$1.098618\ldots$
0.72	$2.423116\ldots$	$1.098618\ldots$
0.88	$2.888774\ldots$	$1.098618\ldots$
1.04	$3.443919\ldots$	$1.098618\ldots$
1.20	$4.105749\ldots$	$1.098618\ldots$
1.36	$4.894764\ldots$	$1.098618\ldots$
1.52	$5.835407\ldots$	$1.098618\ldots$
1.68	$6.956816\ldots$	$1.098618\ldots$
1.84	$8.293731\ldots$	$1.098618\ldots$
2.00	$9.887565\ldots$	$1.098618\ldots$

TABLE 4.2 – Approximations de la dérivée de $f(x) = 3^x$ à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

4.7 Encore plus de dérivées de fonctions élémentaires

Avec nos connaissances des règles de dérivation, on peut maintenant développer des formules pour calculer la dérivée de fonctions exponentielles et logarithmiques.

4.7.1 Dérivée de $\mathbf{f(x) = b^x}$

Exemple 4.7.1
Quelle est la dérivée de $f(x) = 3^x$?

Dans le tableau 4.2, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x)/f(x) \approx 1.098618\ldots$ pour les quelques valeurs de x au tableau 4.2. Si $C_3 = 1.098618\ldots$, on semble avoir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 3^x = C_3 3^x \ .$$

Le graphe associé aux données du tableau 4.2 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 3^x$ sont donnés à la figure 4.24. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus grand que 1 de $f(x)$.

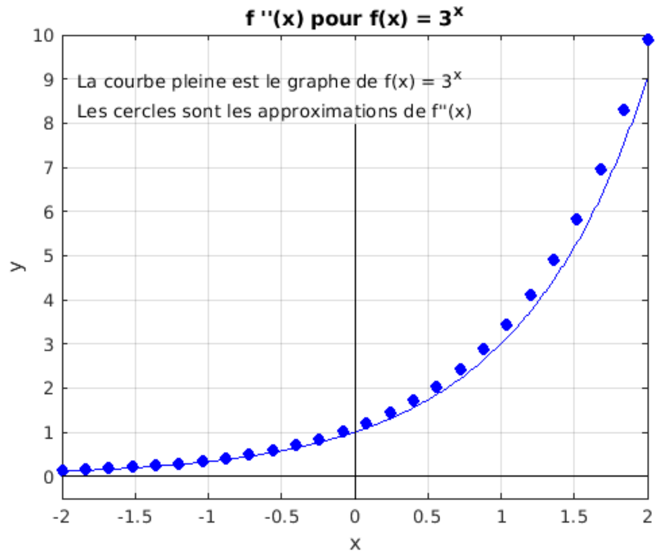


FIGURE 4.24 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 3^x$ qui se retrouvent au tableau 4.2 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de 3^x.

♣

Exemple 4.7.2
Soit $f(x) = 2^x$. Essayons de voir si, comme à l'exemple précédent, le rapport $f'(x)/f(x)$ est constant. Si c'est le cas, est-ce la même constante qu'à l'exemple précédent ?

Dans le tableau 4.3, on a estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

On remarque que $f'(x)/f(x) \approx 0.693150\ldots$ pour les quelques valeurs de x au tableau 4.2. Si $C_2 = 0.693150\ldots$, on semble avoir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2^x \approx C_2 2^x \ .$$

Comme à l'exemple précédent, on a que $f'(x)/f(x)$ est constant mais la constante n'est pas la même qu'à l'exemple précédent.

Le graphe associé aux données du tableau 4.3 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 2^x$ sont donnés à la figure 4.25. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus petit que 1 de $f(x)$. ♣

Les trois questions suivantes découlent des exemples que l'on vient de présenter.

1. Est-il toujours vrai que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^s$ où C_b est une constante qui dépend seulement du choix de b ?
2. Si la réponse à la question précédente est affirmative, existe-t-il un moyen de calculer facilement cette constante C_b en fonction de la base b qui a été choisie ?
3. Existe-t-il une base b pour laquelle la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = f(x) = b^x$? C'est-à-dire, pour laquelle la constante de proportionnalité C_b est 1 ?

x	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$f'(x)/2^x$
-2.00	$0.173287\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.84	$0.193612\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.68	$0.216320\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.52	$0.241691\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.36	$0.270039\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.20	$0.301711\ldots$	$0.693150\ldots$
-1.04	$0.337098\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.88	$0.376635\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.72	$0.420809\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.56	$0.470165\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.40	$0.525309\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.24	$0.586921\ldots$	$0.693150\ldots$
-0.08	$0.655759\ldots$	$0.693150\ldots$
0.08	$0.732672\ldots$	$0.693150\ldots$
0.24	$0.818605\ldots$	$0.693150\ldots$
0.40	$0.914616\ldots$	$0.693150\ldots$
0.56	$1.021889\ldots$	$0.693150\ldots$
0.72	$1.141744\ldots$	$0.693150\ldots$
0.88	$1.275655\ldots$	$0.693150\ldots$
1.04	$1.425273\ldots$	$0.693150\ldots$
1.20	$1.592440\ldots$	$0.693150\ldots$
1.36	$1.779212\ldots$	$0.693150\ldots$
1.52	$1.987891\ldots$	$0.693150\ldots$
1.68	$2.221045\ldots$	$0.693150\ldots$
1.84	$2.481545\ldots$	$0.693150\ldots$
2.00	$2.772598\ldots$	$0.693150\ldots$

TABLE 4.3 – Approximations de la dérivée de $f(x) = 2^x$ à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

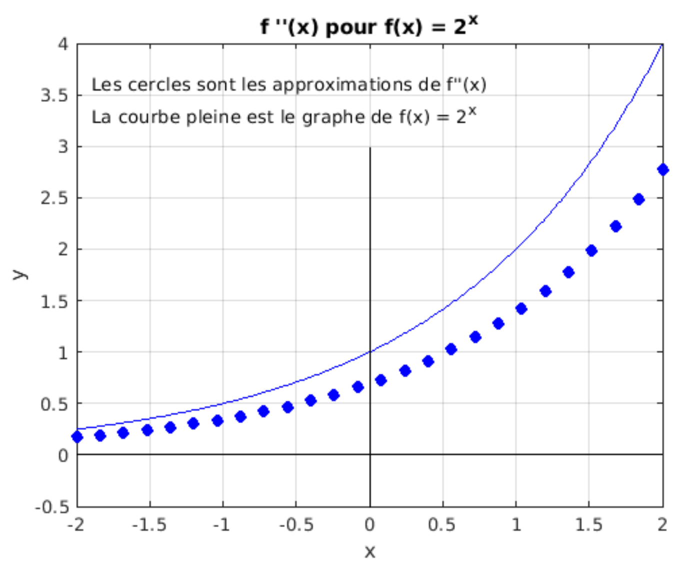


FIGURE 4.25 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 2^x$ qui se retrouvent au tableau 4.3 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de 2^x.

On répond à la première question et donne une réponse partielle à la deuxième question dans la prochaine sous-section. La réponse à la troisième question sera donnée dans la sous-section suivante. La réponse complète à la deuxième question dépend de la dérivée de fonctions composées. Cette réponse sera donnée dans la dernière sous-section.

La constante $\mathbf{C_b}$

Pour répondre à la première question et aborder la réponse pour la deuxième question, il faut avoir recours à la définition de la dérivée. Si $f(x) = b^x$ pour une base quelconque $b > 0$, on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{b^{x+h}-b^x}{h} = \frac{b^x b^h - b^x}{h} = b^x \frac{b^h-1}{h} \ .$$

Comme b^x ne dépend pas de h, on a donc

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}}_{=C_b}$$

si la limite existe. Pour une base b donnée, l'expression $C_b \equiv \lim\limits_{h\to 0}(b^h-1)/h$ est une constante car elle est indépendante du point x qui est choisi.

On a bien que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^x$ pour une constante C_b. Pour calculer cette constante C_b, on peut utiliser la formule

$$C_b \equiv \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h} \ . \tag{4.7.1}$$

Remarque 4.7.3

Dans la discussion précédente, nous avons supposé que la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{b^h-1}{h}$ existait pour tout $b > 0$. Effectivement, la limite existe et cela sera prouvé à la section **??** ; après que nous aurons défini la fonction exponentielle e^x à l'aide d'une série. ♠

Exemple 4.7.4

Soit $f(x) = 3^x$. Pour estimer C_3, on utilise (4.7.1) avec $b = 3$ et $h = h_n = 1/n^2$ pour $n = 1$, 2, 3, … La suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0. Donc, $\dfrac{3^{h_n}-1}{h_n}$ converge vers C_3 lorsque $n \to \infty$.

On obtient les résultats suivant :

n	$h_n = 1/n^2$	$\dfrac{3^{h_n}-1}{h_n}$
1	1	2
2	1/4	1.26429605180997...
3	1/9	1.16847867518778...
4	1/16	1.13720772916663...
5	1/25	1.12310877860219...
⋮	⋮	⋮
100	1/10000	1.09867263832664...
⋮	⋮	⋮
1000	1/1000000	1.09861289221413...
⋮	⋮	⋮

On a donc que $\dfrac{3^{h_n}-1}{h_n}$ approche la constante $1.09861\ldots$ lorsque h_n approche 0. Comme toute autre séquence qui tend vers 0 donnerait le même résultat, on obtient

$$C_3 \equiv \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.09861\ldots$$

qui est la constante trouvée à l'exemple 4.7.1. ♣

La Formule 4.7.1 pour évaluer la constante C_b demande le calcul d'une limite comme on vient de le faire à l'exemple précédent pour $b = 3$. Il existe une façon plus simple (du point de vue de l'utilisateur d'une calculatrice) de calculer la valeur de C_b que nous donnerons bientôt.

Le nombre e

On répond maintenant à la troisième question au début de la section. C'est-à-dire, on cherche la base b telle que la dérivée de $f(x) = b^x$ soit $f'(x) = f(x) = b^x$.

On a refait le travail de l'exemple 4.7.4 en choisissant des valeurs pour la base b de $f(x) = b^x$ de telle sorte que la constante de proportionnalité C_b entre f et sa dérivée soit de plus en plus près de 1. On résume dans le tableau 4.4 suivant les résultats que l'on a trouvés.

Les valeurs de b dans le tableau 4.4 approche le nombre $e = 2.71828182852\ldots$. On a donc le résultat suivant.

Proposition 4.7.5
Si $e = 2.71828182852\ldots$ et $f(x) = e^x$ pour tout x, alors

$$f'(x) = f(x)$$

pour tout x.

b	$C_b \approx$		Prochaine valeur de b
2.0	0.6931470952...	<1	
3.0	1.0986123122...	>1	2.5 entre 2 et 3
2.5	0.9162908209...	<1	2.7 entre 2.5 et 3
2.7	0.9932517031...	<1	2.8 entre 2.7 et 3
2.8	1.0296195007...	>1	2.75 entre 2.7 et 2.8
2.75	1.011600803...	>1	2.72 entre 2.7 et 2.75
2.72	1.0006317996...	>1	2.71 entre 2.7 et 2.72
2.71	0.9969487457...	<1	2.715 entre 2.71 et 2.72
2.715	0.9987919380...	<1	2.718 entre 2.715 et 2.72
2.718	0.9998963879...	<1	2.719 entre 2.718 et 2.72
2.719	1.0002640937...	>1	2.7185 entre 2.718 et 2.719
2.7185	1.0000802408...	>1	2.7182 entre 2.718 et 2.7185
2.7182	0.9999698846...	<1	2.7183 entre 2.7182 et 2.7185
2.7183	1.0000067440...	>1	2.71825 entre 2.7182 et 2.7183
2.71825	0.9999883143...	<1	2.71828 entre 2.71825 et 2.7183
2.71828	0.9999994166...	<1	2.71829 entre 2.71828 et 2.7183
2.71829	1.0000029693...	>1	2.718285 entre 2.71828 et 2.71829
2.718285	1.0000011929...	>1	2.718282 entre 2.71828 et 2.718285
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.718281828	0.9999999939...		

TABLE 4.4 – On utilise (4.7.1) pour estimer C_b. Le nombre e est plus grande que les valeurs de b pour lesquelles $C_b < 1$ et plus petit que les valeurs de b pour lesquelles $C_b > 1$. On utilise ce résultat pour prendre en sandwich le nombre $e \approx 2.718281828$.

La formule (4.7.1) avec la base $b = e$ devient donc

$$C_e = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \ .$$

Si $f(x) = e^x$, la formule précédente n'est nul autre que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \ .$$

Donc, la pente de la courbe $y = e^x$ à $x = 0$ est 1. La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction exponentielle de la forme b^x dont la valeur de la dérivée à l'origine est 1.

Remarque 4.7.6
On a vu la définition suivante de e à la section 2.3.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ . \tag{4.7.2}$$

Est-ce le même nombre e que celui que l'on vient de définir ?

Avec la définition de e^x donnée à la section **??**, il est trivial de montrer que le nombre e définie par (4.7.2) satisfait $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

On présente ici un raisonnement qui supporte sans démontrer que le nombre e défini en (4.7.2) satisfait $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$, il découle de la définition de limite d'une fonction en un point que $\displaystyle\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\to 1$ lorsque $n\to\infty$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. Si $x_n=\frac{1}{n}$ pour $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$, on peut donc dire que $1\approx\displaystyle\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ pour n très grand. Si on résout pour e, on trouve

$$e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

pour n très grand. Donc, le nombre e qui satisfait $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ et le nombre e défini par (4.7.2) semblent bien être le même nombre.

Il est beaucoup plus facile d'estimer e à l'aide de (4.7.2) que d'utiliser la formule (4.7.1) pour déterminer la valeur de b telle que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$ comme on la fait au tableau 4.4. ♠

Quelle est la valeur de la constante $\mathbf{C_b}$

On peut maintenant donner une réponse complète à la deuxième question de la section 4.7.1. À savoir, comment peut-on calculer la constance C_b dans la relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b^x=C_b b^x$$

sans avoir à calculer une limite comme en (4.7.1) ? Soit $q(x)=b^x$ avec $b>0$. Puisque $q(x)=b^x=e^{x\ln(b)}$, on peut exprimer $q(x)$ comme la composition $q(x)=f(g(x))$ des fonctions $g(x)=x\ln(b)$ et $f(x)=e^x$. Comme $f'(x)=f(x)$ et $g'(x)=\ln(b)$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b^x=q'(x)=f'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)=q(x)g'(x)=b^x\ln(b)\ .$$

On obtient le théorème suivant.

Proposition 4.7.7
Si $b>0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b^x=b^x\ln(b)$$

pour tout x.

La constante C_b que l'on cherchait est donc $\ln(b)$.

Exemple 4.7.8
Si $f(x)=5^x$, alors $f'(x)=5^x\ln(5)$. ♣

Exemple 4.7.9
Si $f(x)=5^{x^2}$, la dérivée de f <u>n'est pas</u> $f'(x)=5^{x^2}\ln(5)$. Il faut remarquer que $f(x)=q(p(x))$

où $q(x) = 5^x$ et $p(x) = x^2$. Puisque $q'(x) = 5^x \ln(5)$ et $p'(x) = 2x$, la règle de la dérivée de fonctions composées donne

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = 5^{x^2} \ln(5) \times 2x = 2x\, 5^{x^2} \ln(5) \ .$$

♣

Remarque 4.7.10
Comme on a vu à l'exemple précédent, il est facile de se tromper avec toutes les règles de calcul des dérivées. Il est souvent plus avantageux de s'en tenir aux formules les plus importantes.

À l'exemple précédent, on aurait pu simplement écrire $f(x) = 5^{x^2}$ comme $f(x) = e^{x^2 \ln(5)}$. Il est alors clair que f est la composition de deux fonctions. On a $f(x) = q(p(x))$ où $q(x) = e^x$ et $p(x) = x^2 \ln(5)$. Puisque $q'(x) = e^x$ et $p'(x) = 2x \ln(5)$, on a donc

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = e^{p(x)}(2x \ln(5)) = 2xe^{x^2 \ln(5)} \ln(5) = 2x\, 5^{x^2} \ln(5) \ .$$

♠

4.7.2 Dérivée de $\log_b(x)$

Puisque $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ pour tout $x > 0$, il suffit de trouver une formule pour la dérivée de ln. Pour trouver cette formule, on utilise le fait que $g(x) = \ln(x)$ est la fonction inverse de $f(x) = e^x$.

Si on dérive les deux côtés de l'égalité $f(g(x)) = x$ pour $x > 0$, on trouve

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \ .$$

Or $f'(x) = f(x)$ et $f(g(x)) = x$, donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x} \ .$$

On vient de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.11
Pour $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{x} \ .$$

Quelle est la dérivée de $\ln|x|$ pour tout $x \neq 0$? Puisque $|x| = x$ pour $x > 0$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0 \ .$$

Puisque $|x| = -x$ pour $x < 0$, on a $\ln|x| = \ln(-x)$ pour $x < 0$. Ainsi, pour $x < 0$, $\ln|x| = g(h(x))$ où $g(y) = \ln(y)$ et $h(x) = -x$. Puisque $g'(y) = 1/y$ et $h'(x) = -1$, on obtient donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{h(x)}\, h'(x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x} \quad , \quad x < 0 \ .$$

On peut donc généraliser le théorème précédent de la façon suivante.

Proposition 4.7.12
Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \frac{1}{x} \ .$$

Exemple 4.7.13
Quelle est la dérivée de $\log_5(x)$ pour tout $x > 0$?

Puisque $\log_5(x) = \ln(x)/\ln(5)$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_5(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(5)}\right) = \frac{1}{\ln(5)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x\ln(5)} \ .$$

♣

Exemple 4.7.14
Quelle est la dérivée de $q(x) = \ln(\sin(x))$ pour $0 < x < \pi$?

Notez que l'on assume $0 < x < \pi$ pour que $\sin(x)$ soit positif et donc que $\ln(\sin(x))$ soit bien définie.

Puisque $q = f \circ g$ où $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \ln(x)$, on obtient de la règle pour la dérivée de fonctions composées que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\sin(x)}\,\cos(x) = \cot(x)$$

pour $0 < x < \pi$. ♣

Exemple 4.7.15
Calculer la dérivée de $f(x) = (x+1)^5(x+5)^7/(x+2)^4$.

Il serait tentant d'utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions mais cela risque d'être très long.

En calcul numérique, on utilise très souvent la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour remplacer le produit de très grands nombres par la somme de leurs logarithmes. Cela permet d'éviter les nombres trop grands pour l'ordinateur.

La même idée peut être utilisée ici. On a

$$\ln|f(x)| = 5\ln|x+1| + 7\ln|x+5| - 4\ln|x+2|$$

Si on dérive des deux côtés de l'égalité, on trouve

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2}$$

et ainsi

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2}\right) = \frac{(x+1)^5(x+5)^7}{(x+2)^4}\left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2}\right) .$$

Calculer la dérivée de f avec la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions pour comparer cette méthode avec celle que l'on vient d'introduire. ♣

4.7.3 Dérivée de x^α où α est réel

On a vu que la dérivée de $h(x) = x^n$ où n est un entier positive est $h'(x) = nx^{n-1}$. Mais, quelle est la dérivée de $h(x) = x^\alpha$ si α n'est pas un entier positif. Par exemple, quelle est la dérivée de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ou de x^π ? Commençons par un exemple simple.

Exemple 4.7.16
Soit $f(x) = x^{-1} = 1/x$ pour $x \neq 0$. Si on estime $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$, on obtient les résultats suivants :

x	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+0.00001)-f(x)}{0.00001}$	$\lvert -x^{-2} - f'(x)\rvert$
-1	$-1.00001000009\ldots$	$0.1000009\ldots \times 10^{-4}$
1	$-0.99999000010\ldots$	$0.999989\ldots \times 10^{-5}$
2	$-0.24999875000\ldots$	$-0.124999\ldots \times 10^{-5}$
π	$-0.10132086112\ldots$	$-0.32251\ldots \times 10^{-6}$
3.5	$-0.08163241982\ldots$	$-0.23323\ldots \times 10^{-6}$

On remarque que $f'(x) \approx -x^{-2}$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. On peut donc supposer que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$.

Montrons à partir de la définition de la dérivée que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$. En effet, si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+xh} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

car $x^2 + xh \to x^2$ lorsque $h \to 0$. ♣

L'exemple précédent semble indiquer que la règle qui dit que la dérivée de $h(x) = x^n$ est $h'(x) = nx^{n-1}$ pourrait s'appliquer pour au moins tous les nombres entiers n.

Pour montrer que la règle est vraie pour tout exposant réel non-nul, il faut se rappeler que $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ pour $x > 0$. Ainsi, $x^\alpha = f(g(x))$ où $g(x) = \alpha \ln(x)$ et $f(x) = e^x$. Puisque $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = \alpha/x$, on déduit de la règle de la dérivée de fonctions composées que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\alpha = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour $x > 0$. On vient de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.17
Si $\alpha \neq 0$ est un nombre réel, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour tout $x > 0$.

Exemple 4.7.18
Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. On a $f'(x) = 1/2x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$. ♣

Exemple 4.7.19
Calculer la dérivée de $g(x) = \dfrac{(x^4+2)e^{2x}}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3}}$.

On pourrait attaquer ce problème directement avec la règle de dérivation du quotient de deux fonctions mais, comme la fonction g est assez complexe, ce ne serait pas une bonne idée. On invite le lecteur à essayer.

On va faire appel à l'ensemble de nos connaissances des méthodes de dérivation. On commence pas calculer le logarithme de g. On obtient

$$\begin{aligned}
\ln|g(x)| &= \ln\left|\frac{(x^4+2)e^{2x}}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3}}\right| = \ln\left(\frac{(x^4+2)e^{2x}}{|x^2+3x|\sqrt{x^2+3}}\right) \\
&= \ln(x^4+2) + \ln(e^{2x}) - \ln|x^2+3x| - \ln\left((x^2+3)^{1/2}\right) \\
&= \ln(x^4+2) + 2x - \ln|x^2+3x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+3)
\end{aligned}$$

On dérive maintenant des deux côtés

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|g(x)| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^4+2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x^2+3x| - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3)$$

pour obtenir

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{4x^3}{x^4+2} + 2 - \frac{2x+3}{x^2+3x} - \frac{x}{x^2+3}\ .$$

Ainsi,

$$g'(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4+2} + 2 - \frac{2x+3}{x^2+3x} - \frac{x}{x^2+3}\right) g(x)$$

$$= \left(\frac{4x^3}{x^4+2} + 2 - \frac{2x+3}{x^2+3x} - \frac{x}{x^2+3}\right)\left(\frac{(x^4+2)e^{2x}}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3}}\right)$$

♣

4.7.4 Dérivée des fonction trigonométriques inverses

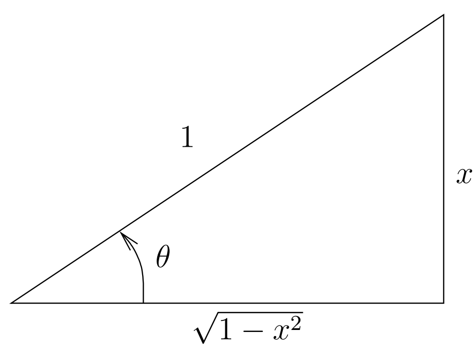
Si on dérive les deux côtés de l'identité $x = \sin(\arcsin(x))$ pour $-1 < x < 1$, on obtient grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \cos(\arcsin(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) \ .$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \ .$$

Posons $\theta = \arcsin(x)$. On a $\sin(\theta) = x$ par définition de l'arcsinus et on obtient la figure suivante.



On en déduit

$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1-x^2} \ .$$

On obtient donc la formule suivante.

Proposition 4.7.20

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

De façon semblable, le lecteur peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.7.21

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

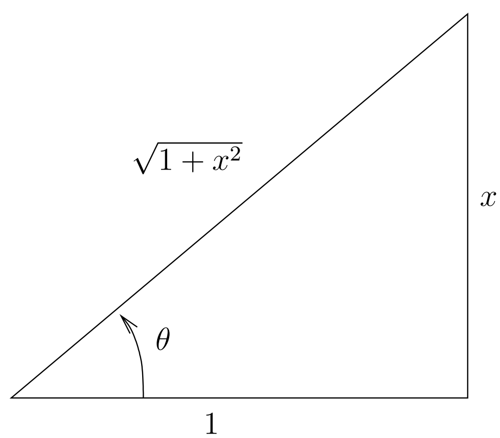
Si maintenant on dérive les deux côtés de l'identité $x = \tan(\arctan(x))$ où x est réel, on obtient grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \sec^2(\arctan(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x)\ .$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}\ .$$

Posons $\theta = \arctan(x)$. On a $\tan(\theta) = x$ par définition de l'arctangente et on obtient la figure suivante.



On en déduit

$$\sec^2(\arctan(x)) = \sec^2(\theta) = (\sqrt{1+x^2})^2 = 1 + x^2\ .$$

On obtient donc la formule suivante.

Proposition 4.7.22

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

4.8 Exercices

Question 4.1
Pour chacune des fonctions suivantes et des points t_0 suivants :

i) Calculez la moyenne de la fonction f entre les points t_0 et $t_0 + \Delta t$ pour $\Delta t = 1$, 0.5, 0.1 et 0.01.

ii) Donnez l'équation de la sécante qui passe par les points $(t_0, f(t_0))$ et $(t_0+\Delta t, f(t_0+\Delta t))$ pour $\Delta t = 1$, 0.5, 0.1 et 0.01.

iii) Dessiner, sur une même figure, la fonction avec ses quatre sécantes.

iv) Donner, en vous basant sur les valeurs calculées en (i), une approximation de la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$.

v) Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$.

a) $f(t) = 2t^2$ et $t_0 = 1$. **b**) $f(t) = e^{2t}$ et $t_0 = 0$.

Question 4.2
On suppose que le nombre d'individus au temps t (en heures) pour une certaine population animale est donnée par $p(t) = 1.5^t$.

a) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 1 ?

b) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.1 ?

c) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.01 ?

d) Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.0001 ?

e) Quelle est le taux de croissance instantané à $t = 0$?

f) Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(t)$ au point $(0, p(0))$.

Question 4.3
Les données du tableau suivant décrivent la hauteur H (en mètres) d'un arbre en fonction du temps t (en années).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	10.11	11.18	12.40	13.74	15.01	16.61	18.27	20.17	22.01	24.45	26.85

a) Estimez le taux de croissance instantané à $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ans à l'aide de la moyenne du taux de croissance moyen pour l'année qui se termine et pour l'année qui commence (si possible).

b) Sur un graphe du taux de croissance instantané en fonction du temps, marquez par un point le taux de croissance instantané pour chacune des années en (a). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?

c) Estimez le taux de croissance relatif à $t = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ans.

d) Sur un graphe du taux de croissance relatif en fonction du temps, marquez par un point le taux de croissance relatif pour chacune des années en (c). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?

e) Comparez vos deux graphes. Que pouvez-vous en conclure ?

Question 4.4 🌲
Le nombre d'individus dans une population est donné par la formule $p(t) = 2^t$ où t est le temps en heures. Trouvez le taux de croissance moyen entre 0 et 1 heure, 0 et 0.1 heure, 0 et 0.01 heure, et 0 et 0.001 heure.

Quelle est la limite ? Que représente cette limite ? Tracez le graphe de la fonction p et la droite tangent à ce graphe au point $(t, p) = (0, 1)$. Donnez l'équation de cette droite tangente.

Question 4.5
Le nombre N de visites au nouveau site Internet du ministère de l'environnement est donné dans le tableau suivant :

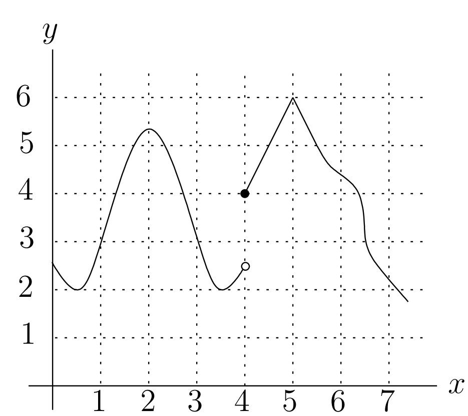
nombre d'heures après l'inauguration du site	1	2	3	4	5
N	30	57	87	151	246

a) Trouvez le taux moyen de croissance des visites de la deuxième à la troisième heure, de la troisième à la quatrième heure, et de la troisième à la cinquième heure. Donnez les unités de vos réponses.

b) Donnez une approximation du taux instantané de croissance des visite après trois heures en prenant la moyenne de deux taux de croissance moyens. Donnez les unités de votre réponse.

c) Est-ce qu'il est réaliste d'estimer le taux de croissance instantané des visites après trois heures sur la base des données que l'on possède ?

Question 4.6
Le graphe de la fonction f est donné dans la figure suivante :



a) Identifiez les points où la fonction n'est pas continue.

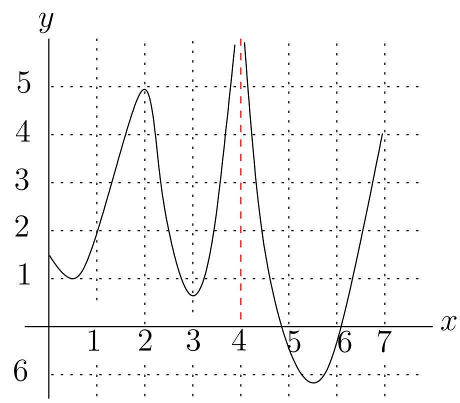
b) Identifiez les points où la fonction n'est pas différentiable et dite pourquoi.

c) Identifiez les points où la dérivée de la fonction est nulle.

Question 4.7
Calculez la dérivée de $g(y) = -3y+5$ et déterminez les intervalles, s'il y en a, où la fonction est strictement croissante.

Question 4.8
Utilisez la définition de la dérivée pour calculer la dérivée de $f(x) = 4-x^2$. Tracez le graphe de f et f'. Trouvez les points où la dérivée de f est nulle. Déterminez les intervalles où la fonction est strictement croissante et ceux où elle est strictement décroissante.

Question 4.9
Le graphe de la fonction f est donné à la figure suivante :

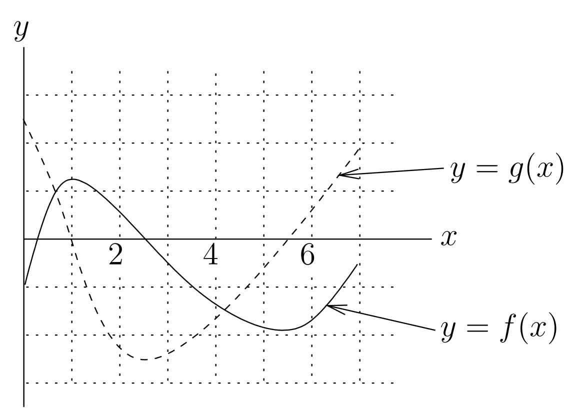


a) Identifiez les points où la dérivée est positive.

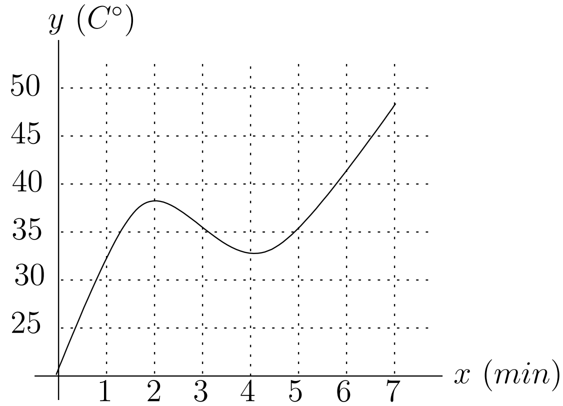
b) Identifiez les points où la dérivée est négative.

c) Identifiez les points où la dérivée est nulle.

Question 4.10
La figure suivante contient le graphe d'une fonction et le graphe de la dérivée de cette fonction. Quelle est le graphe de la dérivée ?



Question 4.11
La température en fonction du temps d'une substance chimique est donnée dans la figure suivante :



Tracez le graphe du taux de variation instantané de la température en fonction du temps. Sur le graphe que vous avez dessiner, indiquer lorsque la température augmente et lorsqu'elle diminue.

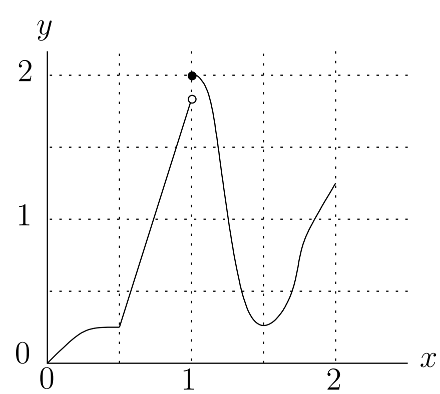
Question 4.12
Un chien court après un cycliste. Tracez sur un même graphe la position du chien et du cycliste en fonction du temps si :

a) Le chien et le cycliste se déplacent à vitesse constante mais le chien se déplace plus rapidement que le cycliste et, après un certain temps, rattrape le cycliste.

b) La vitesse du chien augmente et celle du cycliste diminue. Le chien rattrape le cycliste.

b) La vitesse du chien et du cycliste diminue, et la distance entre les deux augment.

Question 4.13
Le graphe d'une fonction f est donné à la figure suivante :



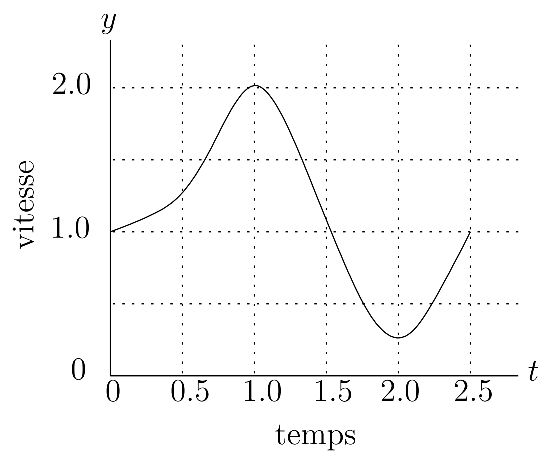
Donnez les points x où la fonction f n'est pas continue, où la fonction f n'est pas différentiable et dite pourquoi, et où la dérivée $f'(x)$ est nulle.

Question 4.14
Soit $g(x) = x + 2x^2$ une fonction quadratique. Donnez la pente de la sécante à la courbe

$y = g(x)$ entre les points x et $x + h$. Donnez la pente de la tangente à la courbe $y = g(x)$ au point x en passant à la limite lorsque h approche 0. Donnez la dérivée de g au point x.

Question 4.15

Le graphe du volume $V(t)$ en mètres cubes d'un objet en fonction du temps t en heures est donné dans la figure suivante :



a) Identifiez un point t où la dérivée est positive.

b) Identifiez un point t où la dérivée est négative.

c) Identifiez le point t avec la plus grande dérivée.

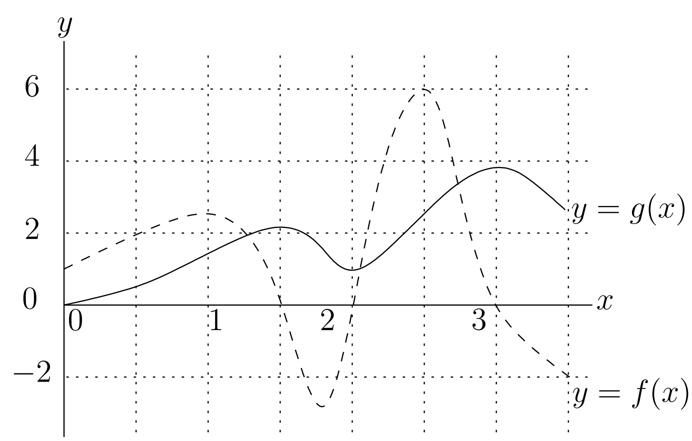
d) Identifiez le point t avec la plus petite dérivée.

e) Identifiez les points t où la dérivée est nulle.

f) Tracez le graphe de la dérivée V' de V.

Question 4.16

On considère le graphe de deux fonctions donnés dans la figure suivante :



Identifiez la courbe qui représente le graphe de la dérivée d'un fonction dont le graphe est donné par l'autre courbe.

Question 4.17

Une voiture est remorquée par une dépanneuse à l'aide d'une tige rigide de 5 mètres de long. Tracez les graphes possibles de la position et de la vitesse des deux véhicules en fonction du temps si la dépanneuse part du repos, recule lentement pour une courte période de temps, arrête, avance lentement pour une autre courte période de temps et finalement avance plus rapidement.

Question 4.18
Une dépanneuse remorque une autre voiture avec une tige rigide de 10 m. Dessinez la position et la vitesse des deux véhicules en fonction du temps si la dépanneuse est initialement au repos, accélère lentement, garde une vitesse constante pour un certain temps, et finalement arrête brusquement.

Question 4.19
Un train se déplace à 110 km/h. Un passager de ce train se déplace à un vitesse de 3 km/h vers l'arrière du train. Quelle est la vitesse de ce passager par rapport au sol ?

Question 4.20
Pour chacune des questions suivantes, Calculez la dérivée à l'aide de la formule de dérivation des fonctions composées.

a) Soit $T(W) = 30 - 0.2W$, $S(T) = 9 - T/5$ et $H(W) = S(T(W))$. Calculez $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}W}$.
b) Soit $L(T) = 10 + T/10$, $V(L) = 2L^3$, $M(V) = 1.3V$ $H(T) = M(V((L(T))))$. Calculez $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$.
c) Soit $M(G) = 5G + 2$, $P(M) = 0.5M$ et $H(G) = P(M(G))$. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}G}$.
d) Soit $V(I) = 5I^2$, $F(V) = 37 + 0.4V$ et $H(I) = F(V(I))$. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}I}$.

Question 4.21
Soit $B = 0.007W^{2/3}$ et $W = 0.12L^{2.53}$. On suppose que L est une fonction de t et que $L'(t)$ est constant. Si on sait que L augmente de 5 lorsque t augmente de 10, quelle est la dérivée de $H(t) = B(W(L(t)))$ par rapport à t lorsque $L = 18$?

Question 4.22
Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^{1/5}$

b) $h(t) = x^{1/e}$

c) $g(z) = 3z^3 + 2z^2$

d) $f(x) = (2x+1)^3$

e) $p(z) = (1+3z)^2(1+2z)^3$

f) $h(x) = (x^2-5)^{135/2}$

g) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

h) $G(x) = \dfrac{(1+x)(2+x)}{(3+x)}$

i) $f(x) = \log_2(1-3x)$

j) $f(y) = (5y-3)^7(y^2-1)$

k) $h(t) = \dfrac{1+t}{2-t}$

l) $g(z) = \dfrac{1+z^2}{1+2z^3}$

m) $f(t) = (1+3t)^{33}$

n) $h(x) = \dfrac{(1+3x)^2}{(1+2x)^3}$

o) $g(z) = \left(1 + \dfrac{2}{1+z}\right)^7$

p) $f(x) = e^{-7x}$

q) $h(x) = \ln|\ln(x)|\ ,\ \ x > 0$

Question 4.23
Évaluez les dérivées suivantes :

a) $h(\theta) = \sec(\theta)\tan(\theta)$

b) $G(t) = 1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi(t-3)}{5}\right)$

c) $f(x) = \ln(4 + \sin(x))$

d) $g(\theta) = \sqrt{2\theta\,\sin(\theta)}$

e) $F(\theta) = \tan^2(\sin(\theta))$

f) $g(x) = x\arctan(4x)$

g) $h(\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$

h) $h(x) = 3 + \cos(2x-1)$

i) $g(z) = e^{\cos(z)}$

j) $f(\theta) = \sec(\theta)$

Question 4.24
Montrez que $y(t) = t^2\sin(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)\ .$$

C'est-à-dire, montrez que l'équation est satisfaite si on remplace $y(t)$ par $t^2\sin(t)$.

Question 4.25
Calculez la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ de deux façons :

i) Avec la règle de la dérivée d'un quotient.
ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.26
Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(7x)$ de deux façons :

i) Avec une des identités satisfaites par ln().
ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.27
Calculez la dérivée de $f(x) = 7^x$ de deux façons :

i) Avec la règle introduite en classe pour dériver ce type de fonctions.
ii) Avec le fait que 7^x peut s'exprimer sous la forme $e^{h(x)}$ pour une certaine fonction h.

Question 4.28 🔧 🌲
Calculez la dérivée de $f(\theta) = \cos(2\theta)$ de deux façons :

i) Avec les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.
ii) Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Montrez que vos deux réponses sont égales.

Question 4.29
Un tableau contenant certaines valeurs de f, f', g et g' est donné ci-dessous.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

a) Si $h(x) = f(g(x))$, calculez $h'(1)$.

b) Si $k(x) = g(f(x))$, calculez $k'(1)$.

Question 4.30
Soit f une fonction strictement croissante positive. Une fonction f est positive si $f(x) > 0$ pour tout x. Montrez que la fonction g définie par $g(x) = 1/f(x)$ pour tout x est strictement décroissante.

Question 4.31
Soit $f(x) = 2 + x^3$. Calculez la dérivée de la fonction inverse f^{-1} en procédant de deux façons :

i) En Trouvant la fonction inverse et dérivant cette fonction.
ii) Avec la dérivée de la fonction composée $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Question 4.32
Trouvez la dérivée de la fonction inverse de $F(x) = 1 - e^{-x}$ en procédant de deux façons :

a) En Trouvant la fonction inverse de F et dérivant cette fonction inverse.
b) Avec la dérivée de la fonction composée $(F \circ F^{-1})(x) = F(F^{-1}(x)) = x$.

Question 4.33 🔧 🌲
Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \sin(\sin(x))$ au point $(x, y) = (\pi, 0)$.

Question 4.34
a) Trouvez la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^3 + 8$ au point où cette courbe coupe l'axe des x.

b) Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'intersection trouvé en (a).

c) Trouvez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite tangente en (b) qui passe par le point d'intersection en (a).

Question 4.35

L'aire d'un disque en fonction de son rayon est donné par la formule $A(r) = \pi r^2$, où r est mesuré en mètres et A en mètres carrés. Calculez la dérivée de l'aire en fonction du rayon. Illustrez par un dessin la région représentée par la différence entre un disque de rayon $r + \Delta r$ et un disque de rayon r. Donnez une représentation géométrique de la dérivée. Est-ce que les unités sont cohérentes.

Question 4.36

Soit $f(x) = x^2$. Trouvez le point sur l'intervalle $[0, 2]$ où $f'(x) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

Question 4.37

La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Montrez qu'il n'existe pas de solution à l'équation $H(x) = 0.5$ même si $H(-1) = 0$ et $H(1) = 1$. Ceci démontre que le Théorème des valeurs intermédiaires est valable seulement pour les fonctions continues.

Montrez qu'il n'existe pas de valeur c telle que $H'(c)$ soit égale à la pente $\dfrac{H(1) - H(-1)}{2}$ de la sécante entre les points $(-1, H(-1))$ et $(1, H(1))$. Ceci démontre que le Théorème de la moyenne est valable seulement pour les fonctions qui sont différentiable.

Applications de la dérivée 5

5.1 Introduction

Exemple 5.1.1
Trouver l'équation de la droite tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ au point $(1, 2)$.

Une façon simple de résoudre ce genre de problème fait appel au calcul différentiel. Pour obtenir la pente de la droite tangente à la courbe

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1 \ ,$$

il suffit de dériver des deux côtés de l'égalité précédente en gardant en tête que y est une fonction de x. On obtient

$$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \ .$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x}{y} \ .$$

La pente de la tangente à l'ellipse au point $(x, y) = (1, 2)$ est donc

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{-2 \times 1}{2} = -1 \ .$$

L'équation de la droite tangente (sous la forme point-pente) est

$$(y - 2) = -(x - 1) \ .$$

♣

5.2 Étude de courbes

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. À la section 4.3, on a vu que $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$. À la proposition 4.4.2 de la section 4.4, on a utilisé cette propriété pour donner des conditions sur la dérivée f' qui déterminent les intervalles de croissance et décroissance de f, et les minimums et maximums locaux de f.

En résumé, on a remarqué que :

1. La fonction f est strictement croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour tout x entre a et b.
2. La fonction f est croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \geq 0$ pour tout x entre a et b.
3. La fonction f est strictement décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour tout x entre a et b.
4. La fonction f est décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \leq 0$ pour tout x entre a et b.
5. La fonction f a un maximum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c.
6. La fonction f a un minimum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c.

Il découle de la remarque 4.4.4 que, si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui possède un minimum ou maximum local au point $x = c$ de l'intervalle $]a, b[$, on a un des deux scénarios suivants : f n'a pas de dérivée au point $x = c$ ou $f'(c) = 0$. Pour trouver les maximums et minimums locaux d'une fonction f, il faut donc analyser les points c définis ci-dessous.

Définiton 5.2.1
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Un **point critique** de la fonction f est un point $c \in]a, b[$ qui satisfait une des deux conditions suivantes :

1. f n'a pas de dérivée au point $x = c$.
2. $f'(c) = 0$.

En plus de pouvoir déterminer sur quels intervalles une fonction est croissante ou décroissante et à quels points elle a un maximum ou minimum local, on peut aussi utiliser la dérivée pour déterminer sur quels intervalles la pente de la fonction est croissante ou décroissante. Ce type de comportement des fonctions porte le nom de **courbure** de la fonction. On observe deux types de courbure.

Définiton 5.2.2
Une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est dite **convexe** (ou **concave vers le haut**) sur $]a, b[$ si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{5.2.1}$$

pour tous x et y dans $]a, b[$ et tous $\lambda \in [0, 1]$ (voir figure 5.1).

La fonction f est dite **concave** (ou **concave vers le bas**) sur $]a, b[$ si le signe $\leq$ est remplacé par $\geq$ en (5.2.1).

Dans le cas où f est une fonction différentiable définie sur un intervalle $]a, b[$, on obtient que f est convexe sur $]a, b[$ si pour tout $x \in]a, b[$ on a que la droite tangente au graphe de la

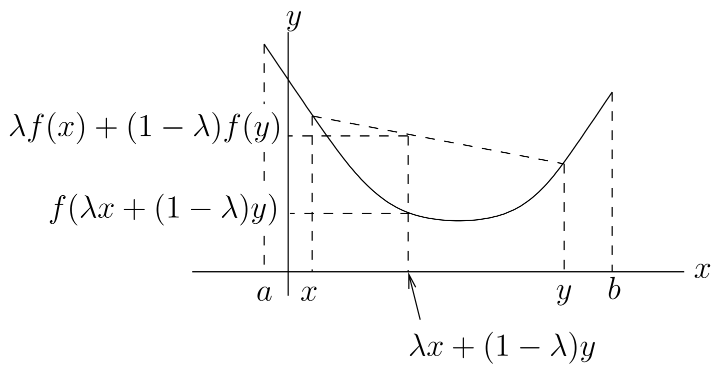


FIGURE 5.1 – Exemple d'une fonction convexe sur l'intervalle $]a,b[$. La droite qui relie les points $(x,f(x))$ et $(y,f(y))$ est au-dessus du graphe de f.

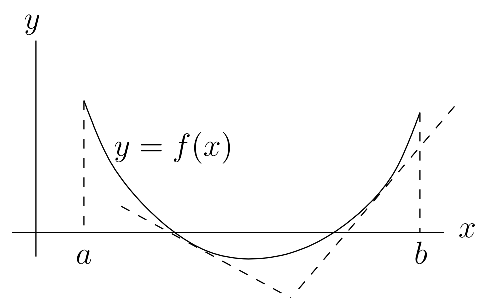


FIGURE 5.2 – Exemple d'une fonction convexe sur l'intervalle $]a,b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est en dessous du graphe de cette fonction. On a aussi que la pente de la tangente augmente lorsque x augmente.

fonction f au point $(x,f(x))$ est strictement en dessous du graphe de f sauf naturellement au point $(x,f(x))$ lui-même. À première vue, cette dernière caractérisation des fonctions convexes n'est pas facile à vérifier. Cependant, le théorème suivant nous donnes un outil pour démontrer facilement qu'une fonction est convexe ou concave sur un intervalle.

Proposition 5.2.3
Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Si f' est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]a,b[$, alors f est convexe sur l'intervalle $]a,b[$ (voir figure 5.2).
2. Si f' est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]a,b[$, alors f est concave sur l'intervalle $]a,b[$ (voir figure 5.3).

Si f' est une fonction différentiable, on peut utiliser sa dérivée pour déterminer les intervalles où elle est croissante et décroissante comme on a fait pour la fonction f.

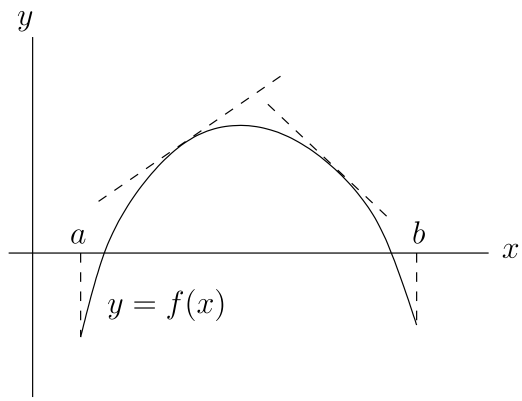


FIGURE 5.3 – Exemple d'une fonction concave sur l'intervalle $]a,b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est au dessus du graphe de cette fonction. On a aussi que la pente de la tangente diminue lorsque x augmente.

Définiton 5.2.4
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ est elle même une fonction différentiable. La **dérivée seconde de** f ou **dérivée d'ordre 2 de** f est la dérivée de la fonction f'. Elle est dénotée f'', $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ou $f^{(2)}$.

Si $f'' :]a,b[\to \mathbb{R}$ est différentiable, la **dérivée troisième de** f ou **la dérivée d'ordre 3 de** f est la dérivée de la fonction f''. Elle est dénotée f''', $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$ ou $f^{(3)}$.

Par induction, on peut définir la **n**^{e} **dérivée de** f ou **dérivée d'ordre n de** f qui est dénotée $f^{(n)}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Proposition 5.2.5
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre deux.

1. La fonction f est convexe sur un intervalle $]a,b[$ si $f''(x) > 0$ pour tout x entre a et b.
2. La fonction f est concave sur un intervalle $]a,b[$ si $f''(x) < 0$ pour tout x entre a et b.

Les points où la fonction change de convexe à concave et vice-versa sont très utiles pour tracer le graphe d'une fonction. On leur donne donc un nom.

Définiton 5.2.6
Un **point d'inflexion** est un point du domaine de la fonction où la direction de la concavité change.

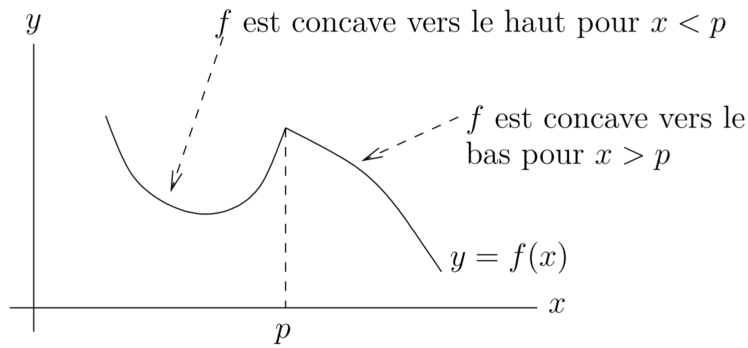


FIGURE 5.4 – Le point p est un point d'inflexion où f'' n'existe pas car f' n'existe pas.

Proposition 5.2.7
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Un point p est un point d'inflexion si f' a un maximum ou minimum local à p.

Remarque 5.2.8
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On a vu que $f'(p) = 0$ n'était pas suffisant et nécessaire pour obtenir un maximum ou minimum au point p. On a un problème semblable avec les points d'inflexion.

On n'a pas nécessairement $f''(p) = 0$ à un point d'inflexion p. À la figure 5.4, on a une fonction qui a un point d'inflexion à p mais la fonction ne possède pas de dérivée d'ordre deux (et d'ordre un) au point p.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui possède des dérivées d'ordre 2, alors on doit avoir $f''(p) = 0$. Malheureusement, on ne peut pas conclure que l'on a un point d'inflexion à p lorsque $f''(p) = 0$. Par exemple, la fonction $f(x) = x^4$ satisfait $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un point d'inflexion (tracer le graphe de f pour vous en convaincre).

De plus, il n'est pas nécessaire d'avoir $f'(p) = 0$ a un point d'inflexion comme il est montré à la figure 5.5. Un autre exemple est fourni par le graphe du sinus qui possède des points d'inflexion à tous les points $n\pi$ où n est un entier. ♠

Exemple 5.2.9
On considère le graphe de f' donné à la figure 5.6.

a) Quels sont les points critiques de f ?

b) Où sont les maximums et minimums locaux de f ?

c) Quels sont les points d'inflexion de f ?

Le graphe de f' nous donne l'information suivante sur la fonction f.

x	$x < a$	a	$a < x < c$	c	$c < x < e$	e	$e < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	décroît	min. local	croît	max. local	décroît	min. local	croît

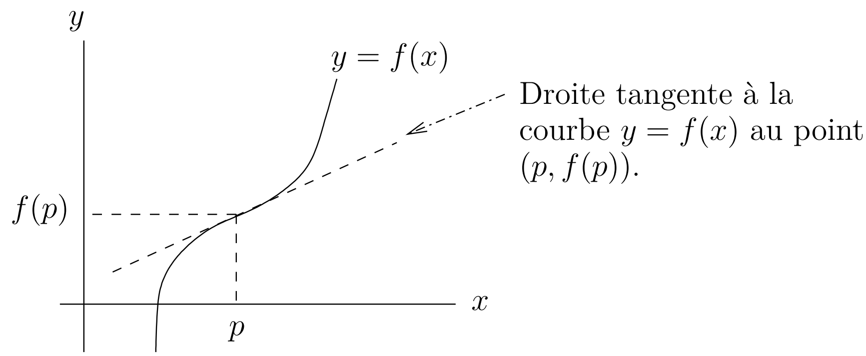


FIGURE 5.5 – Le point p est un point d'inflexion où $f'(p) \neq 0$.

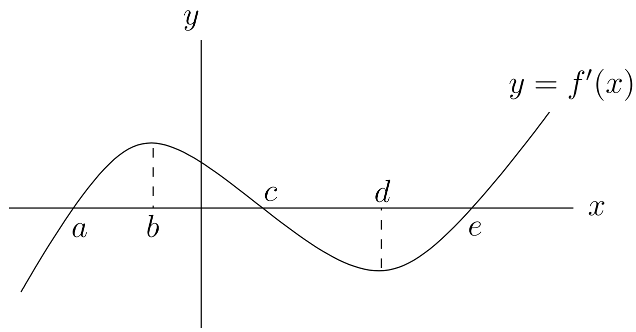


FIGURE 5.6 – Le graphe de la dérivée de la fonction f qui est considéré à l'exemple 5.2.9.

a) Les points critiques de f sont a, c et e car, pour ces valeurs de x, $f'(x) = 0$.

b) Il y a un maximum local au point $x = c$ car $f'(x)$ passe de positif à négatif lorsque x varie de plus petit que c à plus grand que c. Il y a un minimum local au point $x = a$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que a à plus grand que a. De même, il y a un minimum local au point $x = e$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que e à plus grand que e.

c) La pente de la tangente à la courbe $y = f'(x)$ au point x donne $f''(x)$. Ainsi, on a

x	$x < b$	b	$b < x < d$	d	$x > d$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	convexe	point d'inflexion	concave	point d'inflexion	convexe

On a des points d'inflexion aux points $x = b$ et $x = d$ car la courbure change à ces points.
♣

Avant de décrire la procédure pour tracer le graphe d'une fonction, on peut énoncer deux méthodes pour déterminer si un point critique est un maximum ou un minimum local.

Proposition 5.2.10 (**Test de la dérivée première**)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f. On suppose que f est differentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf peut-être au point c.

1. Si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour $x > c$, alors f a un minimum local au point c.
2. Si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour $x > c$, alors f a un maximum local au point c.

Pour le premier cas, on déduit du signe de la dérivée que f est décroissante pour $x < c$ et croissante pour $x > c$. Donc, on a bien un minimum local en $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, on a que f est croissante pour $x < c$ et décroissante pour $x > c$. Donc, on a un maximum local en $x = c$.

Proposition 5.2.11 (**Test de la dérivée seconde**)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivé d'ordre deux et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f'.

1. Si $f''(c) > 0$, alors f a un minimum local au point c.
2. Si $f''(c) < 0$, alors f a un maximum local au point c.

Pour le premier cas, on déduit du signe de la dérivée seconde que f est convexe au voisinage de c. Donc, on a un minimum local en $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, on a que f est concave au voisinage de c. Donc, on a un maximum local en $x = c$.

Si on se fie seulement à l'énoncé des deux propositions précédentes, on pourrait croire que le test de la dérivée second est plus simple à utiliser que le test de la dérivée première car l'énoncé du test de la dérivée second est plus simple que celui du test de la dérivée première. Ce n'est pas un bon critère de comparaison entre les deux tests. Le test de la dérivée première est généralement préférable car il faut seulement calculer la première dérivée de f.

On peut maintenant énoncer la procédure pour tracer le graphe d'une fonction.

Méthode 5.2.12
Pour tracer le graphe d'une fonction f, il faut :

1. Trouver les points où f n'est pas définie. Ce sont les points où il peut y avoir une asymptote verticale.
2. Trouver (si possible) les points p où $f(p) = 0$. Ce sont les points où le graphe de f traverse l'axe des x.
3. Trouver les points critiques de f. Ce sont les points où il peut y avoir un maximum ou un minimum local. Pour tracer le graphe de f, il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
4. Trouver les points où f'' n'existe pas et les points p où $f''(p) = 0$ (i.e. les points critiques de f'). Ce sont les points où il peut y avoir des points d'inflexion. Comme pour les points critiques, pour tracer le graphe de f, il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
5. Après avoir ordonné les points trouvés précédemment, déterminer le signe de f, f' et f'' sur chacun des intervalles délimités par ces points. Le signe de f détermine si f est positive ou négative. Le signe de f' détermine si f est strictement croissante ou décroissante. Le signe de f'' détermine si f est convexe ou concave.
6. Trouver les asymptotes horizontales (lorsque x converge vers plus ou moins l'infini) et les asymptotes verticales (lorsque $f(x)$ converge vers plus ou moins l'infini si x converge vers un point qui n'est pas dans le domaine de f).
7. Tracer le graphe de f intervalle par intervalle en utilisant toute l'information trouvée ci-dessus.

Exemple 5.2.13
Tracer le graphe de $f(x) = 1/(xe^x) = x^{-1}e^{-x}$.

On a

$$f'(x) = -x^{-2}e^{-x} - x^{-1}e^{-x} = \left(-x^{-2} - x^{-1}\right) e^{-x} = -x^{-2}(1+x)e^{-x}$$

et

$$f''(x) = \left(2x^{-3} + x^{-2}\right) e^{-x} - \left(-x^{-2} - x^{-1}\right) e^{-x} = x^{-3}\left(2 + 2x + x^2\right) e^{-x} \ .$$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie au point $x = 0$, elle est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$.

La fonction f' n'est pas définie au point $x = 0$ et elle est égale à 0 au point $x = -1$. De plus, sauf à $x = 0$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > -1$ et positif pour $x < -1$. On a que $f(-1) = e = 2.71828182845905\ldots$.

La fonction f'' n'est pas définie au point $x = 0$ et n'est jamais égale à 0 car le polynôme $2 + 2x + x^2$ n'a pas de racines réelles ; dans le cas présent, $2 + 2x + x^2 > 0$ pour tout x. On a $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 0$.

Puisque xe^x est une fonction qui croît sans borne supérieure lorsque x augmente, on a donc

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \ .$$

La droite $y = 0$ est donc une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \ .$$

On peut vérifier numériquement cette dernière limite à l'aide de suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tendent vers moins l'infini (e.g. prenez la suite où $x_n = -n$). On va voir plus tard un résultat (i.e. la règle de l'Hospital) qui nous permettra facilement de calculer ce genre de limites.

Puisque $xe^x < 0$ tend vers 0 lorsque $x < 0$ tend vers 0, on obtient

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{xe^x} = -\infty \ .$$

De même, puisque $xe^x > 0$ tend vers 0 lorsque $x > 0$ tend vers 0, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{xe^x} = +\infty \ .$$

La droite $x = 0$ (avec $y > 0$) est donc une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la droite et la droite $x = 0$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la gauche.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-e$	$-$	$N.A.$	$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$N.A.$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-e$	$-$	$N.A.$	$+$	
		I	II	III	IV	V	VI

I : négative, croissante et concave

II : maximum local

III : négative, décroissante et concave

IV : asymptote verticale $x = 0$

V : positive, décroissante et convexe

VI : asymptote horizontale $y = 0$

Le graphe de f est donné à la figure 5.7. ♣

Exemple 5.2.14

Traçons le graphe de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

On a

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{6x^2-18x+14}{(x-1)^3(x-2)^3} \ .$$

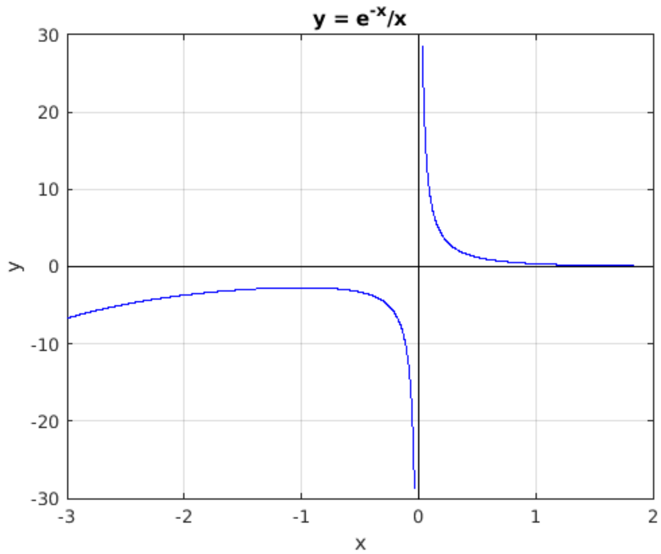


FIGURE 5.7 – Graphe de $f(x) = e^{-x}/x$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, elle est positive pour $x < 1$ et $x > 2$, et négative pour $1 < x < 2$.

La fonction f' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$. Elle est égale à 0 au point $x = 3/2$. De plus, sauf aux points $x = 1$ et $x = 2$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > 3/2$ et positif pour $x < 3/2$. On a $f(3/2) = -4$.

La fonction f'' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, et n'est jamais égale à 0 car $6x^2 - 18x + 14$ n'a pas de racines réelles ; on a $6x^2 - 18x + 14 > 0$ pour tout x.

Puisque
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 ,$$
l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers moins l'infini. De même,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 ,$$
et l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini.

De plus,
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \infty \ , \ \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty \ .$$
Donc, la droite $x = 1$ (avec $y > 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la gauche, la droite $x = 1$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la droite, la droite $x = 2$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par la gauche et la droite $x = 2$ (avec $y > 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par la droite.

On résume nos résultats dans le tableau suivant :

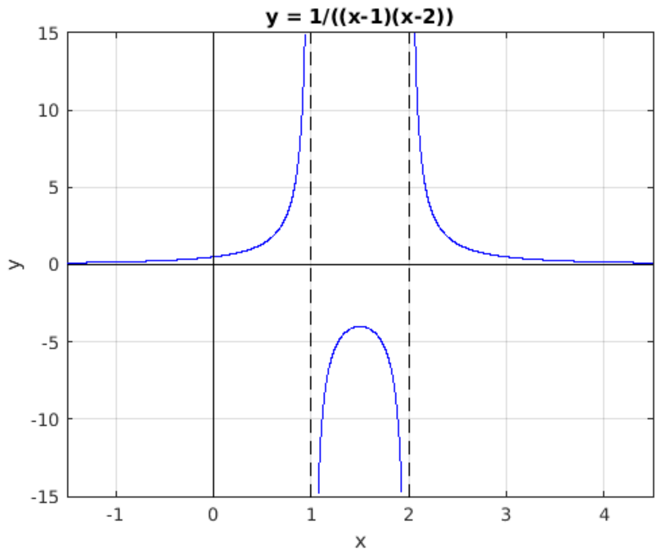


FIGURE 5.8 – Graphe de $f(x) = 1/\left((x-1)(x-2)\right)$

x	$-\infty$	$x<1$	1	$1<x<3/2$	$3/2$	$3/2<x<2$	2	$x>2$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	$N.A.$	$-$	-4	$-$	$N.A.$	$+$	0
$f'(x)$		$+$	$N.A.$	$+$	0	$-$	$N.A.$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$N.A.$	$-$	$-$	$-$	$N.A.$	$+$	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

I : asymptote horizontale $y = 0$

II : positive, croissante, convexe

III : asymptote verticale $x = 1$

IV : négative, croissante, concave

V : maximum local

VI : négative, décroissante, concave

VII : asymptote verticale $x = 2$

VIII : positive, décroissante, convexe

IX : asymptote horizontale $y = 0$

Le graphe de f est donné à la figure 5.8. ♣

Exemple 5.2.15

La relation entre le signe de la dérivée d'une fonction et la croissance ou décroissance de la fonction peut être très utile pour déterminer la convergence de certaines séries. Déterminons si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3}+1}$$

converge ou diverge.

On va montrer que cette séries converge en montrant qu'elle satisfait les trois conditions du test des séries alternées (voir théorème 2.2.42). Cette série est de la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

avec

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} > 0$$

pour tout n. De plus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ grâce au théorème des gendarmes. En effet,

$$0 < a_n = \frac{n^{1/2}}{n^{2/3}+1} < \frac{n^{1/2}}{n^{2/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

pour tout n et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$.

Finalement, pour démontrer que $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n > 6$, on pose

$$f(x) = \frac{x^{1/2}}{x^{2/3}+1} \ .$$

Puisque,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^{2/3}+1) - x^{1/2}(\frac{2}{3}x^{-1/3})}{(x^{2/3}+1)^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^{1/6} + \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(x^{2/3}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(1-\frac{1}{3}x^{2/3})}{(x^{2/3}+1)^2} < 0$$

pour $x > 3^{3/2} = 5.196\ldots$, f est strictement décroissante pour $x > 3^{3/2}$ et ainsi

$$a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$$

pour tout $n > 5$.

Grâce au test des série alternée, la série

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1}$$

converge et il en est de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} \ .$$

En effet, puisque

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3}+1} + \frac{2}{4^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3}+1} + \sum_{n=6}^{k} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1}$$

pour tout $k > 5$, on a que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3}+1} + \frac{2}{4^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3}+1} + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=6}^{k} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3}+1} + \frac{2}{4^{2/3}+1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3}+1} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^{2/3}+1} \ .
\end{aligned}$$

♣

5.3 Optimisation

Définiton 5.3.1
Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$. Le **supremum** de f sur X est le plus petit nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in X$. L'**infimum** de f sur X est le plus grand nombre réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in X$.

Un fonction ne possède pas toujours un supremum ou un infimum. La fonction $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$ n'a pas de supremum car $1/x$ peut-être aussi grand que l'on veut lorsque x approche l'origine. Par contre 0 est l'infimum de $f(x)$ pour $x > 0$. On a bien que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Il n'existe pas de nombre $m > 0$ qui satisfasse aussi $1/x > m$ pour tout $x > 0$ car $1/x$ peut être aussi petit que l'on veut lorsque x devient de plus en plus grand.

On a définie précédemment le maximum absolu ou global d'une fonction f définie sur un intervalle ainsi que son minimum absolu ou global. Le maximum absolu et minimum absolu d'une fonction f définie sur un intervalle n'existent pas toujours. On a vue au paragraphe précédent que 0 était l'infimum de la fonction $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$. Cependant, f n'a pas de minimum absolu sur l'intervalle $]0, \infty[$. Il n'existe pas de point $c \in]0, \infty[$ tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

On peut par contre imposer des conditions sur la fonction et son domaine pour garantir l'existence du maximum absolu et minimum absolu.

Théorème 5.3.2 (Théorème des valeurs extrêmes)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors, f possède un maximum absolu M et un minimum absolu m. De plus, il existe au moins deux points c_1 et c_2 dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c_1) = M$ et $f(c_2) = m$.

Le théorème précédent demande que f soit continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Ces contraintes sont imposées à f et au domaine de f pour garantir l'existence d'un maximum et minimum absolu ; pour garantir l'existence de points dans le domaine de f où la fonction f atteint son maximum absolu et son minimum absolu. (voir la figure 5.11).

Si on considère la fonction f qui est définie sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.9, l'intervalle est ouvert au point $x = a$ et $x = a$ est une asymptote verticale pour f. La fonction f n'a donc pas de maximum absolu sur l'intervalle $]a, b]$.

Si on considère la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.10, l'intervalle est bien fermé mais la fonction n'est pas continue au point $x = c$. La valeur de f au point c est inférieure à M qui est la limite de f lorsque x approche c. M est le supremum de f sur l'intervalle $[a, b]$ mais il n'y a pas de point c_1 tel que $a \leq c_1 \leq b$ et $f(c_1) = M$. En d'autres mots, f n'a pas de maximum absolu sur l'intervalle $[a, b]$.

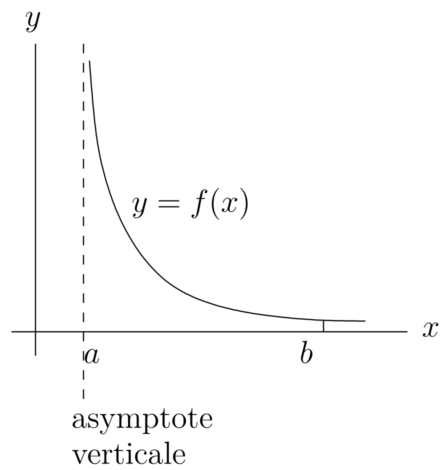


FIGURE 5.9 – La fonction n'admet pas de maximum global dans l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$

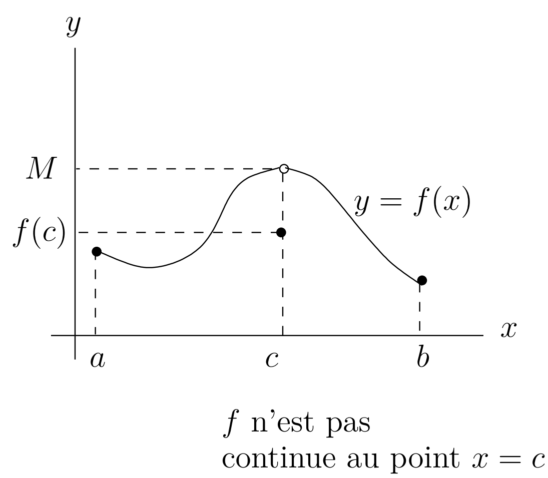


FIGURE 5.10 – La fonction n'a pas de maximum global dans l'intervalle fermé $[a, b]$

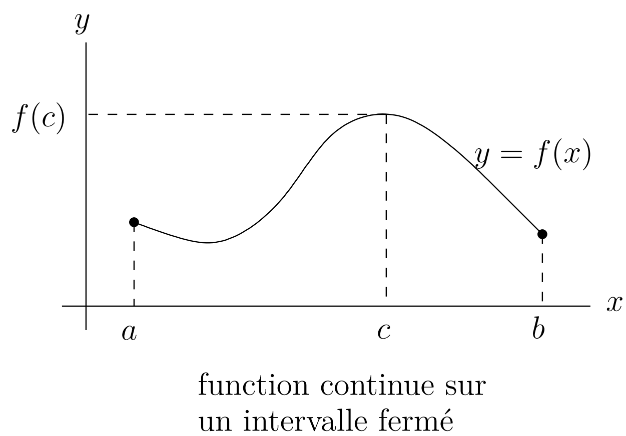


FIGURE 5.11 – La fonction a un maximum global au point $x = c$ car la fonction est bien continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$

Méthode 5.3.3
Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction f continue sur l'intervalle fermée $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il suffit de trouver tous les points critiques de f sur l'intervalle $]a, b[$ et de comparer les valeurs de f à ces points et aux points a et b. La plus grande valeur est le maximum absolu et la plus petite valeur est le minimum absolu.

Exemple 5.3.4
Le nombre de saumons qui remontent une rivière de la Colombie-Britannique en fonction de la température x°C de l'eau est $S(x) = -x^3+3x^2+360x+5000$ saumons. Si la température de l'eau varie de 6°C à 20°C, pour quelle température a-t-on le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière ?

On a $S'(x) = -3x^2 + 6x + 360 = -3(x - 12)(x + 10)$. Ainsi, le seul point critique dans l'intervalle $[6, 20]$ est 12.

Puisque $S(6) = 7052$, $S(12) = 8024$ et $S(20) = 5400$ saumons, le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière est 8024 saumons lorsque la température de l'eau est de 12°C. ♣

Exemple 5.3.5
Déterminez les points de l'ellipse $x^2 + 3y^2 = 9$ qui sont le plus près du point $(1, 0)$?

Il faut trouver les points (x, y) de l'ellipse dont la distance euclidienne $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ au point $(1, 0)$ est minimale. Ceci revient à trouver les points (x, y) qui minimisent $(x-1)^2+y^2$ et satisfont $x^2 + 3y^2 = 9$.

De l'équation de l'ellipse, on obtient que $y^2 = (9 - x^2)/3$ où $-3 \leq x \leq 3$. Il faut donc trouver x dans l'intervalle $[-3, 3]$ qui minimise $g(x) = (x - 1)^2 + (9 - x^2)/3$.

Le seul point critique de g est $x = 3/2$ car $g'(x) = 2(x - 1) - 2x/3 = 4x/3 - 2$. Puisque

$g(-3) = 16$, $g(3) = 4$ et $g(3/2) = 5/2$, la distance minimale entre l'ellipse et le point $(1, 0)$ est $\sqrt{5/2}$ lorsque $x = 3/2$. Il y a deux points (x, y) sur l'ellipse qui sont associés à $x = 3/2$; ils sont donnés par $y^2 = (9 - x^2)/2$. On trouve $(3/2, 3/2)$ et $(3/2, -3/2)$ ♣

Exemple 5.3.6

Un pigeon voyageur est libéré de sa cage qui se trouve sur un bateau pour livrer un message à son propriétaire qui demeure sur le bord de la côte. On suppose que la côte est linéaire. La distance entre le bateau et le point de la côte qui est le plus près du bateau est de 2 kilomètres, et la distance entre ce point et la demeure du propriétaire est de 3 kilomètres. Voir la figure 5.12.

En raison de la baisse de pression atmosphérique au dessus de grandes étendues d'eau, il est plus difficile pour les oiseaux de voler au-dessus de l'eau que de voler au-dessus de la terre ferme. Si le pigeon dépense 40% plus d'énergie pour voler au-dessus de l'eau qu'il en dépense pour voler au-dessus de la terre ferme, quel trajet doit suivre le pigeon pour minimiser la dépense d'énergie ? Doit-il se diriger vers le point de la côte qui est le plus près du bateau et ensuite longer la côte jusqu'à la demeure de son propriétaire ? Doit-il voler directement vers la demeure de son propriétaire ? Doit-il choisir un trajet entre ces deux extrêmes ?

S'il faut une unité d'énergie par kilomètre pour voler au-dessus de la terre ferme alors il faut 1.4 unités d'énergie par kilomètre pour voler au dessus de l'eau. La quantité d'énergie dépensée par le pigeon pour se rendre du bateau à la demeure de son propriétaire est

$$E(x) = 1.4\sqrt{2^2 + x^2} + |3 - x| = \frac{7}{5}\sqrt{4 + x^2} + |3 - x|$$

où x est la distance (en kilomètres) entre le point de la côte qui est le plus près du bateau et le point où le pigeon atteint la côte. On peut supposer que $0 \leq x \leq 3$ car, pour des valeurs de x à l'extérieur de cet intervalle, le pigeon allongerait son trajet inutilement.

Les points critiques de E sont les solutions de

$$E'(x) = \frac{7x}{5\sqrt{4 + x^2}} - 1 = 0 \ .$$

Le seul point critique entre 0 et 3 est $x = 5/\sqrt{6} = 2.04\ldots$ kilomètres.

Puisque $E(0) = 5.8$, $E(3) = 5.04777\ldots$ et $E(5/\sqrt{6}) = 4.95959\ldots$. L'énergie est minimale pour $x = 5/\sqrt{6}$.

Donc, le pigeon devrait voler en ligne droite au-dessus de l'eau jusqu'au point de la côte qui est à un distance de $2.04\ldots$ kilomètres du point de la côte qui est le plus près du bateau, et de ce point voler en ligne droite jusqu'à la demeure de son propriétaire. ♣

Exemple 5.3.7

Déterminer les dimensions du triangle isocèle (deux côtés égaux) d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon r. Voir la figure 5.13.

La hauteur du triangle est $h = r + x$ avec $-r \leq x \leq r$. L'aire du triangle est $A = h\,b/2 = (r + x)\,b/2$. Il faut écrire b en fonction de x et r. Du théorème de Pythagore, on a que $r^2 = x^2 + (b/2)^2$. Ainsi $b = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

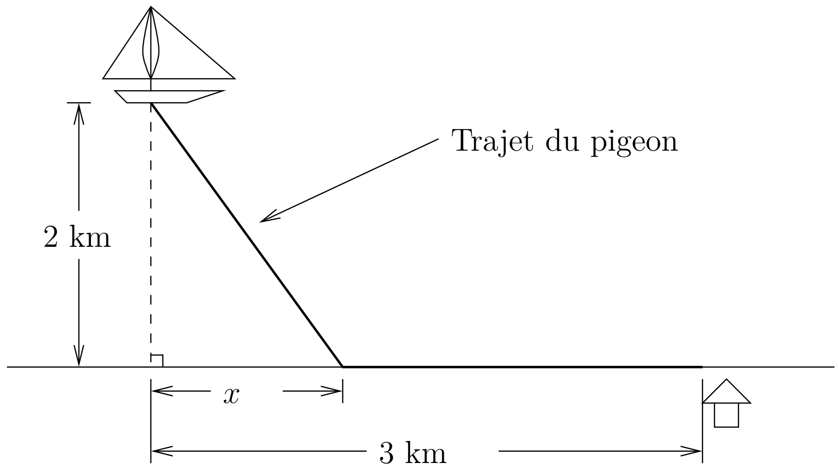


FIGURE 5.12 – Trajet du pigeon entre le bateau et la demeure de son propriétaire

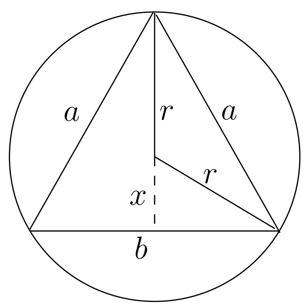


FIGURE 5.13 – Un triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon r

L'aire du triangle est donc $A(x) = (r+x)\sqrt{r^2-x^2}$ pour $-r \leq x \leq r$. La fonction A a un seul point critique entre $-r$ et r car $A'(x) = (-2x^2 - x\,r + r^2)/\sqrt{r^2-x^2} = 0$ avec $-r < x < r$ implique que $-2x^2 - x\,r + r^2 = 0$. C'est un polynôme de degré deux en x (car r est une constante) dont les racines sont

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2+8r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} = -r \quad \text{ou} \quad \frac{r}{2}\ .$$

Ainsi, entre $-r$ et r, le seul point critique de la fonction A est $x = r/2$.

Puisque $A(r) = A(-r) = 0$ et $A(r/2) = 3\sqrt{3}\,r^2/4$, l'aire maximale est $3\sqrt{3}\,r^2/4$ pour $x = r/2$. Ainsi, le triangle isocèle a les dimensions suivantes : $h = r + x = 3r/2$, $b = 2\sqrt{r^2-x^2} = \sqrt{3}\,r$ et $a = \sqrt{h^2 + (b/2)^2} = \sqrt{3}\,r$. En fait, on a un triangle équilatéral (trois côtés égaux) car $a = b$. ♣

Exemple 5.3.8 🔧

On forme un gobelet conique à partir d'un secteur de cercle de rayon R en joignant les deux rayons qui délimitent le secteur de cercle. Quelle est la capacité maximale d'un tel gobelet ?

Si on utilise la figure 5.14, le problème est de trouver θ pour obtenir le cône de volume

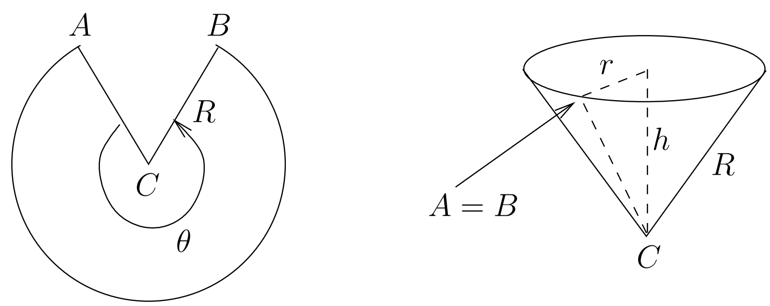


FIGURE 5.14 – Un gobelet conique fait à partir d'un secteur de cercle de rayon R

maximal.

Le volume d'un cône est donné par la formule $V = \pi r^2 h/3$. Nous allons exprimer le volume en termes du rayon r de la base du cône et du rayon R. Puisque $r^2 + h^2 = R^2$, on obtient que $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ pour $0 \leq r \leq R$. Donc, $V(r) = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}/3$.

Le seul point critique de V entre 0 et R est $r = \sqrt{2/3}\,R$. En effet,

$$V'(r) = \frac{2\pi r\sqrt{R^2 - r^2}}{3} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi r(2R^2 - 3r^2)}{3\sqrt{R^2 - r^2}} .$$

Donc, $V'(r) = 0$ avec $0 < r < R$ seulement pour $r = \sqrt{2/3}\,R$.

Puisque $V(0) = V(R) = 0$ et $V(\sqrt{2/3}\,R) = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$, le volume maximal du cône est $2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ pour $r = \sqrt{2/3}\,R$.

On remarque que la circonférence de la base du cône est la longueur de l'arc de cercle défini par le secteur de cercle utilisé pour construire le cône. Donc, $\theta R = 2\pi r = 2\pi \sqrt{2/3}\,R$ et on trouve $\theta = 2\pi \sqrt{2/3}$ radians. ♣

Malheureusement, on ne peut pas toujours utiliser la méthode 5.3.3 pour trouver le maximum et minimum absolu d'une fonction. Quand c'est le cas, on doit tracer grossièrement le graphe de la fonction dont l'on cherche le maximum ou minimum absolu. C'est la situation qui se présente dans les exemples suivants.

Exemple 5.3.9
Cet exemple provient de [1].

Les abeilles butinent (récoltent le nectar des fleurs) dans le but de produire du miel. Lorsqu'une abeille butine, elle aspire le nectar des fleurs dans son jabot. La vitesse à laquelle elle aspire le nectar d'une fleur (i.e. le taux instantané de changement de la quantité de nectar dans le jabot de l'abeille) diminue avec le temps en raison de la diminution de nectar dans la fleur, ce qui rend le travail d'aspirer le nectar plus difficile pour l'abeille.

Dans le but de maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage, l'abeille n'aspire pas tout le nectar de chaque fleur qu'elle visite mais quitte cette fleur pour une autre fleur avant d'avoir aspiré tout le nectar. L'abeille quitte une fleur lorsque

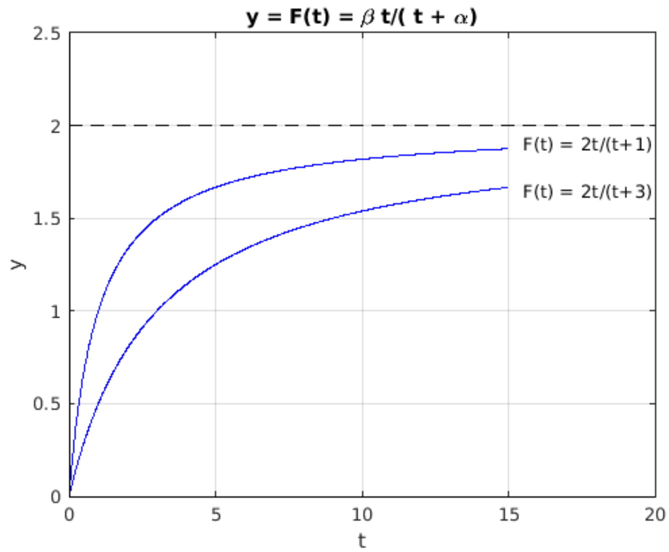


FIGURE 5.15 – Le graphe de $F(t) = \beta t/(t+\alpha)$, la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une fleur.

la vitesse à laquelle elle aspire le nectar est assez faible pour justifier le voyage à une autre fleur. Par contre, quand l'abeille voyage d'une fleur à une autre fleur, elle ne récolte pas de nectar.

Combien de temps l'abeille doit-elle demeurer sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage ?

Si on suppose que les fleurs sont uniformément distribuées dans le champ, on peut assumer que le temps que prend l'abeille pour se rendre d'une fleur à une autre fleur est constant, disons τ minutes.

Supposons que la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur est

$$F(t) = \frac{\beta t}{t+\alpha}$$

où β est la quantité de nectar que possède une fleur et α est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar. La quantité $F(t)$ récoltée après t minutes diminue lorsque α augmente (voir la figure 5.15). Normalement, les constantes α et β varient selon l'espèce de fleurs, et parfois α et β vont varier entre deux fleurs de même espèce. Pour simplifier le problème, nous supposerons que toutes les fleurs sont identiques et donc que α et β ne varient pas d'une fleur à l'autre.

En comptant le temps pour se rendre d'une fleur à l'autre, la vitesse moyenne à laquelle l'abeille aspire le nectar d'une fleur sur laquelle elle demeure pendant t minutes (i.e. le taux de variation moyen de la quantité de nectar dans le jabot de l'abeille durant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur) est

$$R(t) = \frac{F(t)}{t+\tau} \ .$$

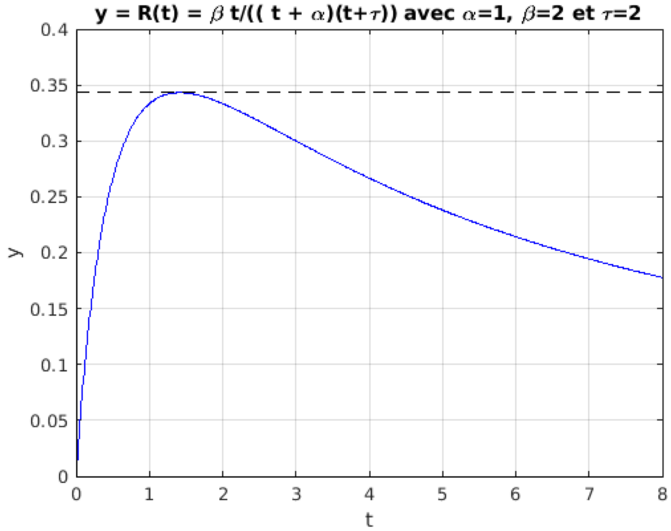


FIGURE 5.16 – Le graphe de la vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille aspire le nectar d'une fleur en fonction du temps t depuis son arrivée sur la fleur

Si on suppose que le nombre d'heures de travail d'une abeille dans une journée est fixe (les abeilles sont syndiquées et elles travaillent 8 heures par jour), le problème mathématique que l'abeille a « à résoudre » est de trouver la valeur de t pour maximiser $R(t)$.

Puisque
$$R(t) = \frac{\beta t}{(t+\tau)(t+\alpha)} \ .$$
on trouve
$$R'(t) = \frac{\beta(\alpha\tau - t^2)}{(t+\alpha)^2(t+\tau)^2} \ .$$

Le point $T = \sqrt{\alpha\tau}$ est le seul point critique positif de R (vérifier cet énoncé).

On obtient donc

t	0	$0 < t < T$	T	$T < t < +\infty$	$+\infty$
$R(t)$	0	$+$	$\beta T/((T+\alpha)(T+\tau))$	$+$	0
$R'(t)$	$\beta/(\alpha\tau)$	$+$	0	$-$	0
			max. local		asymptote horizontale

Puisque $R(t) < R(T)$ pour tout $t \geq 0$ et $t \neq T$, la fonction R a donc un maximum absolu à $T = \sqrt{\alpha\tau}$ minutes (voir figure 5.16).

On peut donner un sens biologique / physique au choix de t qui maximise $R(t)$. Si on

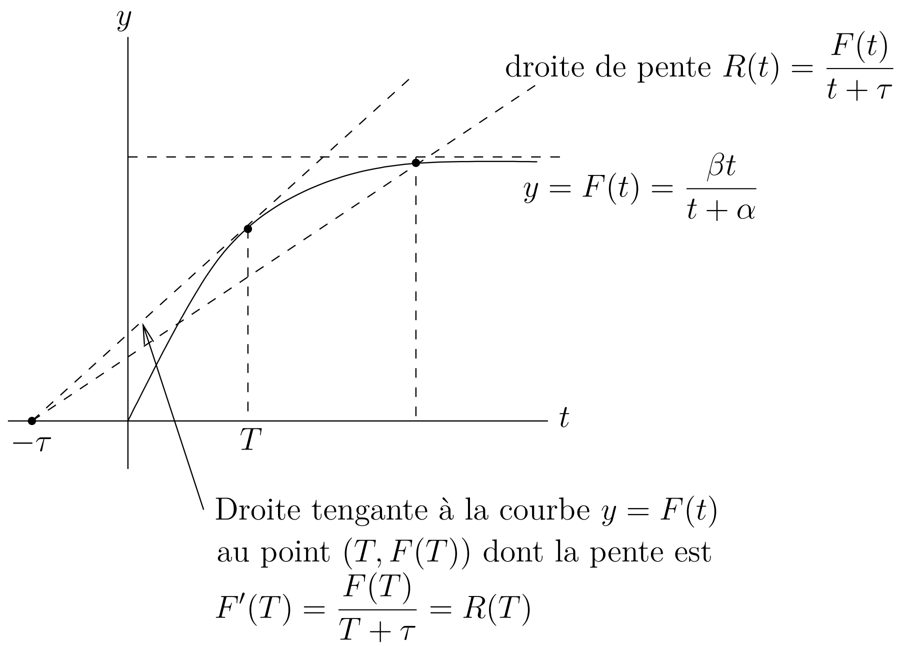


FIGURE 5.17 – La vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille a aspiré le nectar d'une fleur pendant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur est la pente de la droite entre $(-\tau, 0)$ et $(t, F(t))$. On cherche la valeur T de t pour que cette droite soit tangente à la courbe $y = F(t)$ au point $t = T$.

dérive $R(t) = F(t)/(t - \tau)$ sans substituer l'expression algébrique pour $F(t)$, on trouve

$$R'(t) = \frac{F'(t)(t+\tau) - F(t)}{(t+\tau)^2} \ .$$

Ainsi, $R'(t) = 0$ si et seulement si

$$F'(t) = \frac{F(t)}{t+\tau} = R(t) \ .$$

Une abeille arrête donc de butiner une fleur au temps $t = T$ lorsque la vitesse (instantanée) à laquelle elle aspire le nectar égale la vitesse moyenne $R(t)$. Ce principe est appelé la **règle des valeurs marginales**.

Qu'arrive-t-il au temps t où R atteint son maximum lorsque le temps τ pour voyager d'une fleur à l'autre augmente ? Lorsque le niveau de difficulté α pour récolter le nectar augmente ?

Sommes-nous en mesure de traiter le problème où α et β change d'une fleur à l'autre ? ♣

Exemple 5.3.10 🌲
Cet exemple provient de [10] et [13]

Les mâles d'une espèce de grenouille du Porto-Rico (i.e. Eleutherodactylus coqui) protègent les oeufs pondus par les femelles. S'ils ne protègent pas les oeufs, ceux-ci risquent d'être détruits. Par contre, quand les mâles protègent les oeufs, ils ne cherchent pas de partenaires pour se reproduire et donc ne participent pas à la reproduction de l'espèce.

La proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui éclosent (qui produisent une nouvelle grenouille) en fonction du temps t passé par les mâles pour protéger les oeufs est

$$w(t) = \frac{p(t)}{t+C}$$

où $p(t)$ est la probabilité que les mâles passent le temps t à protéger les oeufs et C est une constante qui représente le niveau de difficulté à trouver un partenaire.

Si $p(t) = \dfrac{t}{1+t}$ et $C = 3$, pour quelle valeur de t aurons-nous la plus grande proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui écloront ?

On a $w(t) = \dfrac{t}{(t+1)(t+3)}$. Donc,

$$\ln(w(t)) = \ln(t) - \ln(t+1) - \ln(t+3)$$

donne, après avoir dérivé par t des deux côtés,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} \ .$$

Ainsi,

$$w'(t) = \left(\frac{(t+1)(t+3) - t(t+3) - t(t+1)}{t(t+1)(t+3)}\right)\left(\frac{t}{(t+1)(t+3)}\right) = \frac{-t^2+3}{(t+1)^2(t+3)^2} = 0$$

pour $t = \sqrt{3}$. Puisque $w'(t) < 0$ pour $t > \sqrt{3}$ et $w'(t) > 0$ pour $0 \leq t < \sqrt{3}$, $t = \sqrt{3}$ est le temps qui maximise $w(t)$.

Si on dérive $w(t) = \dfrac{p(t)}{t+C}$ par rapport à t, on trouve que

$$w'(t) = \frac{p'(t)\,(t-C) - p(t)}{(t+C)^2} = 0$$

lorsque

$$p'(t) = \frac{p(t)}{t+C} = w(t) \ .$$

On a une **règle des valeurs marginales** comme à l'exemple 5.3.9 pour les abeilles. On a que la proportion maximale d'oeufs pondus qui éclosent est atteinte à $t = T$ lorsque le taux de variation instantané de la probabilité des mâles de protéger les oeufs pendant un temps t est égale à la proportion d'oeufs pondus qui éclosent si les mâles passent un temps t à protéger les oeufs. ♣

Exemple 5.3.11

Quelles sont les dimensions du triangle isocèle d'aire minimale qui contiendra un cercle de rayon R ?

L'aire du triangle de la figure 5.18 est donnée par la formule $A = b(R+x)/2$. Il faut exprimer b en terme de x et R. On remarque que le triangle $\triangle ABC$ est semblable au triangle $\triangle DOC$. On a donc que

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{CD}|} \ .$$

Or, par le théorème de Pythagore, $|\overline{CD}| = \sqrt{x^2 - R^2}$. Ainsi,

$$\frac{b/2}{R+x} = \frac{R}{\sqrt{x^2-R^2}}$$

pour $x > R$. On obtient $b = 2\,R\,(x+R)/\sqrt{x^2-R^2}$ et l'aire du triangle contenant le cercle de rayon R est

$$A(x) = \frac{R\,(x+R)^2}{\sqrt{x^2-R^2}} \ .$$

Cherchons les points critiques de A. On a

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2\,R\,(x+R)\sqrt{x^2-R^2} - R\,x(x+R)^2/\sqrt{x^2-R^2}}{x^2-R^2} \\ &= \frac{2R\,(x+R)(x^2-R^2) - R\,x(x+R)^2}{(x^2-R^2)\sqrt{x^2-R^2}} = \frac{R(x-2R)(x+R)^2}{(x^2-R^2)\sqrt{x^2-R^2}} \ . \end{aligned}$$

Ainsi, $A'(x) = 0$ avec $x > R$ si $x = 2R$. On résume l'information que l'on a au sujet de A dans le tableau suivant :

x	R	$R < x < 2R$	$2R$	$x > R$	∞
$A(x)$	$+\infty$	$+$	$3\sqrt{3}\,R^2$	$+$	$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
			min. local		

L'aire minimale du triangle contenant le cercle de rayon R est $3\sqrt{3}\,R^2$ lorsque $x = 2R$. Pour $x = 2R$, on a que $b = 2\,R\,(2R+R)/\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 2\sqrt{3}\,R$ et

$$a = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2} = \sqrt{(b/2)^2 + (x+R)^2} = 2\sqrt{3}\,R \ .$$

On trouve donc un triangle équilatéral avec des côtés de longueur $2\sqrt{3}\,R$. ♣

5.4 Les taux liés 🔧

On considère les problèmes où deux variables dépendantes du temps (ou de tout autre paramètre) sont reliées par une relation mathématiques. On cherche à déterminer le taux de variation instantané d'une variable en fonction du taux de variation instantané de l'autre

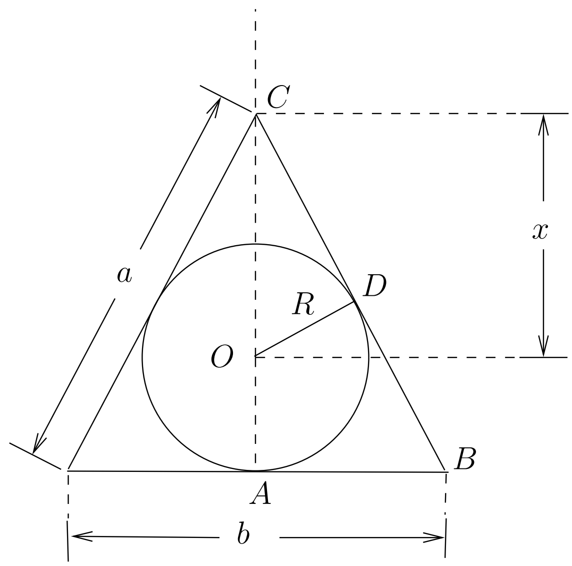
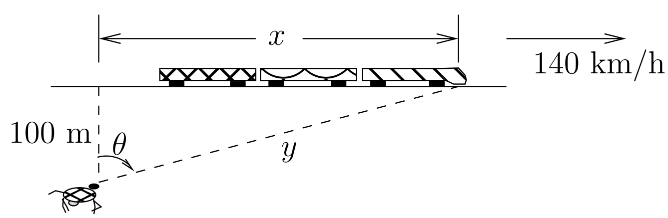


FIGURE 5.18 – Un cercle de rayon R inscrit à l'intérieur d'un triangle

variable. Comme les exemples suivants vous démontrer, on a tous les outils nécessaires pour résoudre ce genre de problèmes.

Exemple 5.4.1
Une vache regarde le train passer. Si la vache est à 100 m de la voie ferrée et le train se déplace à 140 km/h, à quelle vitesse (angulaire) la vache doit-elle tourner la tête pour suivre le (devant du) train lorsque celui-ci est à 500 m de la vache ?



On va résoudre le problème avec les kilomètres comme unités de distance. On a

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{0.1} = 10x(t) \ .$$

θ et x dépendent du temps t. Si on dérive cette équation par rapport à t, on obtient

$$\sec^2(\theta(t))\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \ .$$

Donc

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\cos^2(\theta(t)) \ .$$

Comme la vitesse du train est constante, on a $\displaystyle\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 140$ km/h pour tout t. Supposons que le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache lorsque $t = \tau$. On a alors

$$\cos(\theta(\tau)) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \ .$$

Donc, lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache, on a

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(\tau) = 10\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(\tau)\ \cos^2(\theta(\tau))\ . = 10 \times 140 \times 0.2^2 = 56 \text{ radians/h} \ .$$

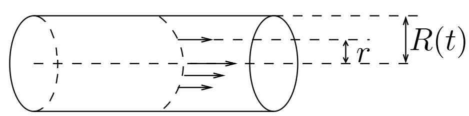
Le temps τ lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache n'est pas connu. Pour le déterminer, il faudrait connaître la position initiale du train. Comme on a vu, on n'a pas besoin de connaître τ pour déterminer la vitesse à laquelle la vache doit tourner la tête lorsqu'elle est à 0.5 km du (devant du) train. ♣

Exemple 5.4.2

Le flot dans un vaisseau sanguin est déterminé par la lois de Poiseuille.

$$v(t) = k(R^2(t) - r^2)$$

où $v(t)$ est la vitesse du sang en millimètres par minute à une distance r du centre du vaisseau au temps t en minutes.



$R(t)$ est le rayon en millimètres du vaisseau sanguin au temps t en minutes et $k = 375$ est une constante associée au sang. Si le froid fait contracter le vaisseau sanguin à la vitesse de 0.01 mm/m, calculer le taux de variation de la vitesse sanguin (l'accélération) lorsque le rayon du vaisseau sanguin est de 0.08 mm.

On a que $\displaystyle\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(t) = -0.01$ mm/m pour tout t. Le signe négatif indique que le vaisseau contracte. Si on dérive la lois de Poiseuille par rapport à t, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = 2kR(t)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(t) \ .$$

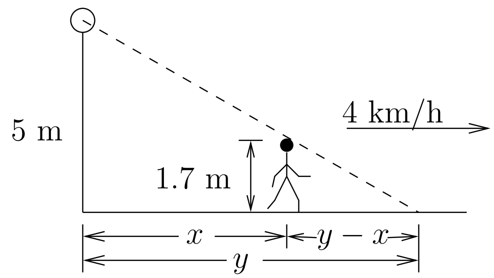
Ainsi, au temps $t = \tau$ où $R(\tau) = 0.08$ mm, on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(\tau) = 2kR(\tau)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(\tau) = 2 \times 375 \times 0.08 \times (-0.01) = -0.6 \text{ mm/m} \ .$$

La vitesse du sang diminue. ♣

Exemple 5.4.3

Un réverbère a une hauteur de 5 m. Une personne mesurant 1.7 m s'éloigne en ligne droite de ce réverbère à une vitesse de 4 km/h. Quelle sera la vitesse de la point de l'ombre de cette personne lorsque la personne se trouve à 15 m du réverbère.



On va résoudre le problème avec les mètres comme unités de distance. Par similarité des triangles, on a

$$\frac{y(t)}{5} = \frac{y(t) - x(t)}{1.7}$$

Si on résout pour $y(t)$, on trouve

$$y(t) = \frac{5}{3.3}\, x(t) \ .$$

Ainsi, si on dérive par rapport à t, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{5}{3.3}\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \ .$$

Puisque $\displaystyle \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 4000$ m/h pour tout t, on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{5}{3.3} \times 4000 = 6060.\overline{60} \text{ m/h} \ .$$

La pointe de l'ombre se déplace donc à une vitesse constante de $6.0\overline{60}$ km/h. Cette réponse est indépendante de la position de la personne. ♣

5.5 La dérivation implicite

Il n'y a pas de nouveau concepts a introduire pour expliquer la dérivation implicite. La dérivation implicite est une façon différente d'aborder certains problèmes avec les outils que l'on a développé jusqu'à date.

Exemple 5.5.1
Quelle est la pente de la tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$? Voir la figure 5.19.

1^{er} méthode : Pour la partie supérieure du cercle unité, on a $y = \sqrt{1 - x^2}$ avec $-1 \leq x \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - x^2)^{1/2} = -x(1 - x^2)^{-1/2}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

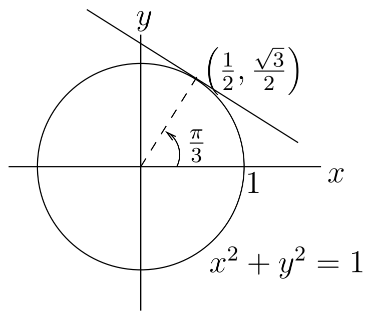


FIGURE 5.19 – Droite tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

2^e^ méthode : On peut calculer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en un point sans avoir à exprimer explicitement y en fonction de x. Il suffit de dérivée par rapport à x de chaque côté de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en tenant bien compte du fait que y est une fonction de x. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + y^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) \Rightarrow 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

Au point $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La deuxième méthode est tout aussi bien valide pour la partie supérieure que la partie inférieure du cercle unité. ♣

Exemple 5.5.2
Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe $(x + y)^3 + xe^y = 2$ au point $(1, 0)$ sur cette courbe ?

On ne peut pas isoler y en fonction de x. On procède donc de la façon suivante. On dérive par rapport à x chaque côté de l'équation $(x + y)^3 + xe^y = 2$ en tenant compte du fait que y est une fonction de x. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x + y)^3 + xe^y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2) &\Rightarrow 3(x + y)^2\left(1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + e^y + xe^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \\ &\Rightarrow \left(3(x + y)^2 + xe^y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3(x + y)^2 - e^y \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-3(x + y)^2 - e^y}{3(x + y)^2 + xe^y}\end{aligned}$$

Ainsi, au point $(x, y) = (1, 0)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{-3 - 1}{3 + 1} = -1 \ .$$

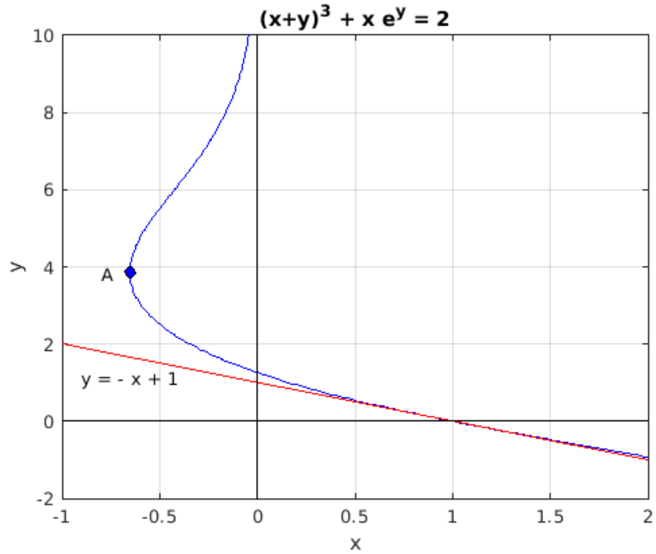


FIGURE 5.20 – Une partie de la courbe décrite par $(x+y)^3 + xe^y = 2$ ainsi que la droite tangente à cette courbe au point $(1,0)$ sur la courbe.

L'équation de la droite tangente est donc donnée par $-1 = \dfrac{y-0}{x-1}$. On trouve $y = -x+1$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 5.20. ♣

Remarque 5.5.3
Dans les trois exemples précédent, on considère des équations en x et y. Il faut noter que la méthode de dérivation implicite pour calculer la dérivée de y en fonction de x échoue lorsque que l'on ne peut pas (en théorie) exprimer y en fonction de x. Pour le cercle unité dans la figure 5.19, cela se produit aux points $(-1,0)$ et $(1,0)$. Pour la courbe que l'on retrouve dans la figure 5.20, cela ce produit au point A. Dans tous les cas, la pente de la droite tangente à la courbe est verticale. On doit alors considérer x en fonction de y si cela est possible. ♠

5.6 Approximation locale des fonctions

Une conséquence du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6, est que pour chaque valeur x près de c, on peut trouver une valeur $\xi = \xi(c,x)$ entre c et x telle que

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x-c) \ .$$

Le théorème affirme l'existence de la valeur ξ mais ne donne pas de formule pour la trouver.

Quoi que simple, le théorème de la moyenne nous permettra de trouver des fonctions polynomiales de la forme

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_k(x-c)^k$$

qui donneront de très bonnes approximations de $f(x)$ pour x près de c.

Si on défini la fonction constante

$$p_0(x) = f(c) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

On a que $p_0(x) \approx f(x)$ pour x très près de c (une conséquence de la continuité de f au point c). Ainsi, p_0 est une fonction constante qui fournie une approximation de $f(x)$ pour x très près de c.

On a déjà introduit à la section 4.3 une meilleure méthode pour estimer la valeur d'une fonction près d'un point. Si f est une fonction différentiable au point c, on peut définir la fonction

$$p_1(x) \equiv f(c) + f'(c)(x-c) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

On a que $p_1(x) \approx f(x)$ pour x suffisamment près de c. La fonction polynomiale p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c. Voir la figure 4.6. On estime la valeur de $f(x)$ au point $x = b$ près de c par la valeur de $p_1(b)$. Le point $(x, y) = (b, p_1(b))$ est sur la droite tangente $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ à la courbe $y = f(x)$ au point $x = c$.

Exemple 5.6.1
Estimer la valeur de la racine cubique de 8.02 (sans utiliser de calculatrice).

La question peut être reformulée de la façon suivante : estimer la valeur de $f(x) = x^{1/3}$ au point $x = 8.02$. Puisque $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$, on a

$$f(x) \approx p_1(x) = f(8) + f'(8)(x-8) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$$

pour x près de 8. Ainsi $f(8.02) \approx 2 + (1/12)(8.02 - 8) = 2.001\overline{6}$. La valeur exacte de $\sqrt[3]{8.02}$ est $2.00166528\ldots$ Notre approximation est très bonne. ♣

La fonction polynomiale p_1 satisfait les deux relations suivantes :

$$p_1(c) = f(c) \qquad \text{et} \qquad p_1'(c) = f'(c) \, .$$

Serait-il possible de choisir les coefficients A, B et C de la fonction polynomiale

$$p_2(x) = A + B(x-c) + C(x-c)^2$$

de degré 2 de telle sorte que

$$p_2(c) = f(c) \quad , \quad p_2'(c) = f'(c) \quad \text{et} \quad p_2''(c) = f''(c)$$

soient satisfaits ? Ainsi, la courbe $y = p_2(x)$ aurait la même pente et la même courbure que f au point c. On serait alors en droit de croire que la courbe $y = p_2(x)$ fournit une meilleure approximation du graphe de f que la droite $y = p_1(x)$ pour x très près de c.

Puisque

$$\begin{aligned} p_2(c) = f(c) \ &\Rightarrow \ A = f(c) \, , \\ p_2'(c) = f'(c) \ &\Rightarrow \ B = f'(c) \end{aligned}$$

et

$$p_2''(c) = f''(c) \;\Rightarrow\; 2C = f''(c) \ ,$$

on trouve

$$p_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 \ .$$

On a vu à la proposition 4.3.5 que $p_1(x) = f(c)+f'(c)(x-c)$ donne une bonne approximation de $f(x)$ pour x très près de c. Peut-on en dire autant de $p_2(x)$? Si oui, est-ce que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème suivant qui lui-même est une généralisation (et découle) du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6.

Théorème 5.6.2 (**Théorème de Taylor**)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $(k+1)$ fois différentiables sur $]a, b[$ où $k \geq 0$. Quel que soit x et c dans l'intervalle $]a, b[$, il existe $\xi = \xi(k, c, x)$ entre x et c tel que

$$f(x) = p_k(x) + r_k(x)$$

où

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n$$
$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(x-c)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-c)^k$$

et

$$r_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-c)^{k+1} \ .$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour x près de** c et r_k est **l'erreur de troncature**.

Au théorème précédent, on insiste sur le fait que ξ dépend de l'ordre k du polynôme de Taylor, de c et de x, d'où la notation $\xi = \xi(k, x, c)$. Donc, ξ varie si k, c et x changent.

Pour $k = 1$, on dit que p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c, alors que pour $k = 2$, on dit que p_2 est une **approximation quadratique** de f pour x près de c.

Exemple 5.6.3
Donnez le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x) = e^{2(x-1)}$ pour x près de 1. Utilisez ce polynôme pour estimer $f(1.01)$ et utiliser la formule pour l'erreur de troncature pour estimer l'erreur $|f(1.01) - p_3(1.01)|$.

Puisque $f(x) = e^{2(x-1)}$, $f'(x) = 2e^{2(x-1)}$, $f''(x) = 2^2e^{2(x-1)}$ et $f'''(x) = 2^3e^{2(x-1)}$, on obtient

$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3$$

$$= 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 \ .$$

Ainsi,

$$f(1.01) \approx p_3(1.01) = 1 + 2\times 10^{-2} + 2\times 10^{-4} + 1.\overline{3}\times 10^{-6} = 1.020201\overline{3} \ .$$

Puisque $f^{(4)}(x) = 2^4 e^{2(x-1)}$, la formule pour l'erreur de troncature est

$$r_3(x) = \frac{2^4}{4!}\, e^{2(\xi-1)}(x-1)^4$$

où ξ est un nombre entre 1 et x que l'on ne connaît pas. Pour $x = 1.01$, on a que ξ est inférieur à 1.01. Ainsi

$$|r_3(1.01)| \leq \frac{2^4 e^{0.02}}{4!}\,(1.01-1)^4 = \frac{2e^{0.02}}{3}\,10^{-8} < 0.68014\times 10^{-8} \ . \tag{5.6.1}$$

Donc, $f(1.01) \approx 1.020201\overline{3}$ avec une erreur d'au plus 0.68014×10^{-8}.

En fait la valeur exacte de $f(1.01) = 2^{0.02}$ est $1.02020134002675581 02\ldots$ Donc $p_3(1.01)$ est une très bonne approximation de $f(1.01)$. De plus, on a $|f(1.01)-p_3(1.01)| = 0.669\ldots\times 10^{-8}$. La formule en (5.6.1) nous donne une très bonne approximation de l'erreur. ♣

Exemple 5.6.4

Trouvez les polynômes de Taylor de degré 1, 2, 3, 4 et 5 de $f(x) = \sin(x)$ pour x près de l'origine. Dans une même figure, tracez les graphes de f, p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5. Que peut-on conclure de cette figure.

Puisque

$$\begin{gathered} f(x) = \sin(x) \ , \quad f'(x) = \cos(x) \ , \quad f''(x) = -\sin(x) \ , \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x) \ , \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos(x) = f'(x) \ , \end{gathered}$$

on obtient

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) = x \ , \\ p_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 = x \ , \\ p_3(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!} \ , \\ p_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)(x-0)^4 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

et

$$p_5(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)(x-0)^4$$

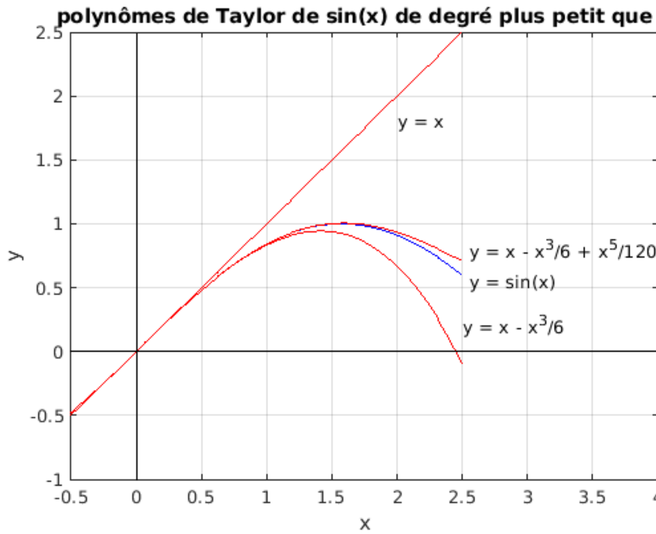


FIGURE 5.21 – On retrouve dans cette figure les graphes des polynômes de Taylor de $\sin(x)$ de degré inférieur à 6 pour x près de l'origine, ainsi que le graphe de $\sin(x)$

$$+\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)(x-0)^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ .$$

On remarque que $p_{2n} = p_{2n-1}$ pour tout $n \geq 1$ car $f^{(2n)}(x) = \pm\sin(x)$ et donc $f^{(2n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

À la figure 5.21, on retrouve dans un même système de coordonnées le graphe de chacun des polynômes de Taylor p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5, ainsi que le graphe de f. On déduit de cette figure que, plus l'ordre k du polynôme de Taylor $p_k(x)$ de $\sin(x)$ (développé autour de l'origine) est élevé, meilleure est l'approximation de $\sin(x)$ fournie par $p_k(x)$ pour x près de l'origine.

Puisque $f^{(2n)}(x) = \pm\sin(x)$ et $f^{(2n-1)}(x) = \pm\cos(x)$ pour tout $n \geq 1$, on a que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n. On trouve la borne suivante pour l'erreur de troncature :

$$|r_k(x)| = \frac{1}{(k+1)!}\,|f^{(k+1)}(\xi)||x|^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)!}\,|x|^{k+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Pour x près de l'origine, l'erreur sera donc petite. ♣

Exemple 5.6.5

Trouver le polynôme de Taylor p_k de degré k de $\sin(x)$ près de l'origine tel que $p_k(0.01)$ soit une approximation de $\sin(0.01)$ avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-8}. Quelle est la valeur de cette approximation ?

On cherche un petit entier k tel que

$$|\sin(0.01) - p_k(0.01)| = |r_k(0.01)| < 10^{-8} \ .$$

On a montré à l'exemple précédent que

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{(k+1)!}\,|x|^{k+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \; .$$

Donc,

$$|r_k(0.01)| \leq \frac{1}{(k+1)!}\,0.01^{k+1} \; .$$

On choisit le plus petit entier k tel que

$$\frac{1}{(k+1)!}\,0.01^{k+1} < 10^{-8}$$

soit satisfaite. Pour $k = 2$, on a

$$|r_2(0.01)| \leq \frac{1}{3!}\,0.01^3 = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \not< 10^{-8} \; .$$

Par contre, pour $k = 3$, on a

$$|r_3(0.01)| \leq \frac{1}{4!}\,0.01^4 = 0.41\overline{6} \times 10^{-9} < 10^{-8} \; .$$

Donc, $k = 3$ est le degré cherché. L'approximation est donnée par

$$\sin(0.01) \approx p_3(0.01) = 0.01 - \frac{0.01^3}{3!} \approx 0.0099998333 \; .$$

La valeur exacte est $\sin(0.01) = 0.009999833334\ldots$. On remarque que l'on obtient plus de précision qu'il a été demandé. Cela est généralement du au fait que notre borne supérieure sur l'erreur de troncature est une grossière sur-estimation de la valeur réel de l'erreur de troncature. ♣

Exemple 5.6.6 🔧
Donner le degré d'un polynôme de Taylor de $f(x) = \sin(x/3)$ près de l'origine qui donnera toujours une approximation de f avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-3} quel que soit le point $x \in]-4, 4[$ considéré.

Pour déterminer le degré d'un tel polynôme de Taylor il faut trouver k tel que

$$|r_k(x)| = \left| \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)\, x^{k+1} \right| < 10^{-3}$$

pour $|x| < 4$ où $\xi = \xi(k, x, 0)$ est une nombre entre 0 et x. Or

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad , \quad f^{(3)}(x) = -\frac{1}{3^3}\cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad ,$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{3^4}\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3^4}\,f(x) \quad , \quad \ldots$$

Par induction, on obtient

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{3^n} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ainsi

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{3^{k+1}(k+1)!}\,|x|^{k+1} < \frac{4^{k+1}}{3^{k+1}\,(k+1)!}$$

pour $|x| < 4$. Puisque

$$|r_6(x)| < \frac{4^7}{3^7\,7!} \approx 0.0014864 \not< 10^{-3} \quad \text{pour} \quad |x| < 4$$

et

$$|r_7(x)| < \frac{4^8}{3^8\,8!} \approx 0.0002477 < 10^{-3} \quad \text{pour} \quad |x| < 4 \ ,$$

on choisit $k = 7$. Pour satisfaire la précision demandée dans la question, il faut donc utiliser le polynôme de Taylor de degré 7 qui comprend quatre termes ; c'est-à-dire,

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \approx p_7(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3^3\,3!}\,x^3 + \frac{1}{3^5\,5!}\,x^5 - \frac{1}{3^7\,7!}\,x^7 \quad , \quad |x| < 4 \ .$$

On a que

$$|f(x) - p_7(x)| < 10^{-3} \quad , \quad |x| < 4 \ .$$

Ce genre d'approximation qui est valable pour tout x dans un ensemble donné X est appelée approximation uniforme sur X. Dans le cas présent $X = \{x : |x| < 4\}$. ♣

Remarque 5.6.7

Ce que l'on observe à l'exemple précédent est généralement vrai quel que soit la fonction f qui possède des dérivées d'ordre suffisamment grand. C'est-à-dire que généralement, plus l'ordre k du polynôme de Taylor de f (développé autour du point c) est grand, meilleure sera l'approximation de $f(x)$ fournies par $p_k(x)$ pour x très près de c.

On doit insister sur le mot généralement utilisé au paragraphe précédent ainsi que sur la contrainte que x doit être très près de l'origine. Il y a des exceptions. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

possède des dérivées de toute ordre au point $x = 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k > 0$. Donc, les polynômes de Taylor p_k de f près de l'origine satisfont $p_k(x) = 0$ pour tout x quel que soit l'ordre k du polynôme. Ainsi, $p_k(x) < f(x)$ pour tout $x > 0$ et augmenter l'ordre du polynôme de Taylor ne donne pas de meilleures approximations que $f(x) \approx 0$ pour x près de l'origine.

De plus, dans certain cas, l'intervalle I contenant c sur lequel le polynôme de Taylor p_k de degré k de f près de c donne une bonne approximation de f devient de plus en plus petit lorsque k augmente. À la « limite », lorsque k devient de plus en plus grand, l'intervalle I «tend» vers l'ensemble $\{c\}$. ♠

Soit p_1 et p_2 les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 respectivement d'une fonction f. On parle ici de polynômes de Taylor près d'un point c. Sans être une démonstration rigoureuse, le raisonnement qui suit supporte l'idée que le polynôme de Taylor p_2 fournie généralement une meilleure approximation de f près du point c que le polynôme de Taylor p_1. Les polynômes p_1 et p_2 satisfont

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}f''(\xi(1,c,x))(x-c)^2$$
$$f(x) = p_2(x) + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi(2,c,x))(x-c)^3$$

où $\xi(1,c,x)$ et $\xi(2,c,x)$ sont des nombres entre x et c. Si on suppose que $f''(\xi(1,c,x)) \approx f''(c)$ et $f^{(3)}(\xi(2,c,x)) \approx f^{(3)}(c)$ pour x près de c, on obtient que l'erreur pour l'approximation linéaire $p_1(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x-c)^2$ et celle pour l'approximation quadratique $p_2(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x-c)^3$. Puisque $(x-c)^3$ approche 0 plus rapidement que $(x-c)^2$ lorsque x approche 0, on a que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c.

5.6.1 Calcul de limites

On peut utiliser les polynômes de Taylor pour évaluer les limites de la forme $\displaystyle\lim_{n\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ où $\displaystyle\lim_{n\to a} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to a} g(x) = 0$.

Exemple 5.6.8
Calculez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{1+x-e^x}$

a) Le Théorème de Taylor donne

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x)$$

où

$$|r_3(x)| = \left|\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,x^4\right| = \left|\frac{1}{4!}\sin(\xi)\,x^4\right| \leq \frac{1}{4!}|x|^4$$

avec ξ entre 0 et x. Ainsi,

$$\frac{x-\sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2}\ .$$

Puisque

$$\frac{x}{3!} \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \left|\frac{r_3(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{4!}|x|^2 \to 0$$

lorsque $x \to 0$, on obtient

$$\frac{x-\sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad x \to 0\ .$$

b) Le Théorème de Taylor donne

$$f(x) = \cos(2x) = 1 - 2x^2 + r_2(x)$$

où
$$r_2(x) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)\, x^3 = \frac{8}{3!}\ \sin(\xi)\, x^3$$
avec ξ entre 0 et x.

De plus, grâce au théorème de Taylor, on a
$$g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \hat{r}_2(x)$$
où
$$\hat{r}_2(x) = \frac{1}{3!} g^{(3)}(\hat{\xi})\, x^3 = \frac{1}{3!}\, e^{\hat{\xi}}\, x^3$$
avec $\hat{\xi}$ entre 0 et x. Donc,
$$\frac{1-\cos(2x)}{1+x-e^x} = \frac{2\,x^2 - r_2(2x)}{-\dfrac{x^2}{2!} - \hat{r}_2(x)} = \frac{2 - \dfrac{r_2(2x)}{x^2}}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\hat{r}_2(x)}{x^2}} \ .$$
Puisque
$$0 \leq \left|\frac{r_2(2x)}{x^2}\right| \leq \frac{8}{3!}\,|x| \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \left|\frac{\hat{r}_2(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{3!}\, e^x\,|x| \to 0$$
lorsque $x \to 0$, on obtient
$$\frac{1-\cos(2x)}{1+x-e^x} = \frac{2 - \dfrac{r_2(2x)}{x^2}}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\hat{r}_2(x)}{x^2}} \to \frac{2}{-\dfrac{1}{2}} = -4 \quad \text{lorsque} \quad x \to 0 \ .$$

♣

5.7 Comportement asymptotique

Lorsque que l'on étudie l'interaction entre deux espèces animales, une espèce étant les prédateurs et l'autre les proies, on cherche souvent à déterminer s'il se créera dans le futur un équilibre entre le nombre de prédateurs et le nombre de proies. Mathématiquement, on doit évaluer une limite de la forme
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \tag{5.7.1}$$
où $f(t)$ est le nombre de prédateurs et $g(t)$ est le nombre de proies au temps t. Si $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers les nombres réels $A \neq 0$ et $B \neq 0$ respectivement lorsque t tend vers l'infini, alors l'analyse du comportement à long terme des deux populations est simple car la valeur de la limite (5.7.1) est A/B. Pour t très grand, on a $f(t) \approx (A/B)g(t)$; le nombre de prédateurs est presque proportionnel au nombre de proies avec A/B comme constante de proportionnalité.

Bien souvent, l'analyse devient plus délicate car $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers 0 ou $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers plus l'infini lorsque t tend vers plus l'infini. C'est le genre de situations que nous allons présentement analyser.

Définiton 5.7.1
Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \ .$$

Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ ,$$

on dit que $f(x)$ **croît plus lentement** que $g(x)$ et que $g(x)$ **croît plus rapidement** que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

S'il existe un nombre réel positif L tel que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ ,$$

on dit que $f(x)$ et $g(x)$ ont **asymptotiquement le même type de croissance** lorsque x tend vers l'infini.

Définiton 5.7.2
Une limite de la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

est appelée une limite du **type** ∞/∞. a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.7.3
Soit $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$. On a

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} x^{1/5} = +\infty \ .$$

Donc,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type ∞/∞. Laquelle des deux fonctions croît le plus rapidement ?

Si on trace les graphes de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ sur un même système de coordonnées (voir figure 5.22), il semble que $\ln(x)$ croît plus rapidement que $x^{1/5}$. Mais, est-ce vrai ?

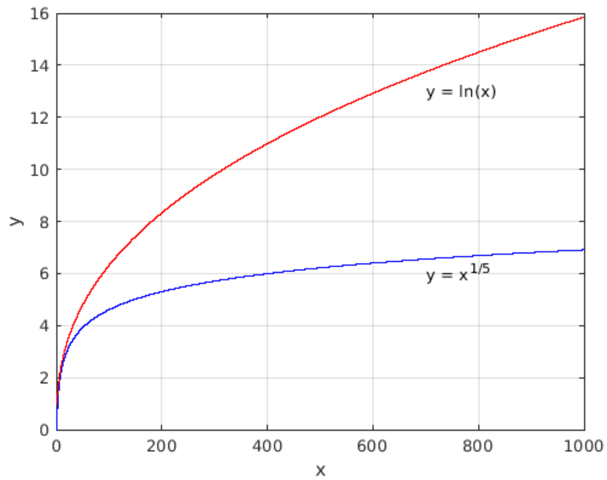


FIGURE 5.22 – Les graphes de $\ln(x)$ et de $x^{1/5}$. Lequel croît le plus rapidement ?

Le tableau suivant donne la valeur de $\ln(x)/x^{1/5}$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 10^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

x	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\ln(x)/x^{1/5}$	$0.8716997\ldots$	$0.6416729\ldots$	$0.4627065\ldots$	$0.3284416\ldots$	$0.2302585\ldots$

$\ldots$	$\ldots$	10^{13}	$\ldots$	10^{17}	$\ldots$
	$\ldots$	$0.0751898\ldots$	$\ldots$	$0.0155834\ldots$	$\ldots$

La suite $\left\{\dfrac{\ln(x_n)}{x_n^{1/5}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ semble bien tendre vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers plus l'infini. Donc,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/5}} = 0$$

et on conclut que $x^{1/5}$ croît plus rapidement que $\ln(x)$. Ce n'est pas ce que le graphe de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ entre 1 et 1000 semblait suggérer. ♣

Remarque 5.7.4

Dans l'exemple précédent, on a choisit les fonctions f et g (i.e. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$) de telle sorte que les graphes de f et g entre 0 et 5000 indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croit plus rapidement que f. Il serait possible de construire des fonctions f et g telles que les graphes de f et g à l'intérieur des limites de calcul d'un ordinateur indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croît plus rapidement que f. Les ordinateurs ont des limites que la théorie n'a pas. ♠

Noter que l'on est libre de choisir le rapport f/g ou g/f pour déterminer la fonction qui croît le plus rapidement et celle qui croît le plus lentement. Puisque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

lorsque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \ ,$$

on a $f(x)$ qui croît plus rapidement que $g(x)$ et $g(x)$ qui croît plus lentement que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \ .$$

Définiton 5.7.5
Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \ .$$

Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ ,$$

on dit que $f(x)$ **converge (ou tend) vers l'origine plus rapidement** que $g(x)$ et que $g(x)$ **converge (ou tend) vers l'origine plus lentement** que $f(x)$ lorsque x converge vers l'infini.

S'il existe un nombre réel non-nul L tel que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ ,$$

on dit que $f(x)$ et $g(x)$ ont **asymptotiquement le même type de convergence vers l'origine** lorsque x converge vers l'infini.

Définiton 5.7.6
Une limite de la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

est appelée une limite du **type** $0/0$. a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.7.7
Soit $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10/x^5$. On a

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^5} = 0 \ .$$

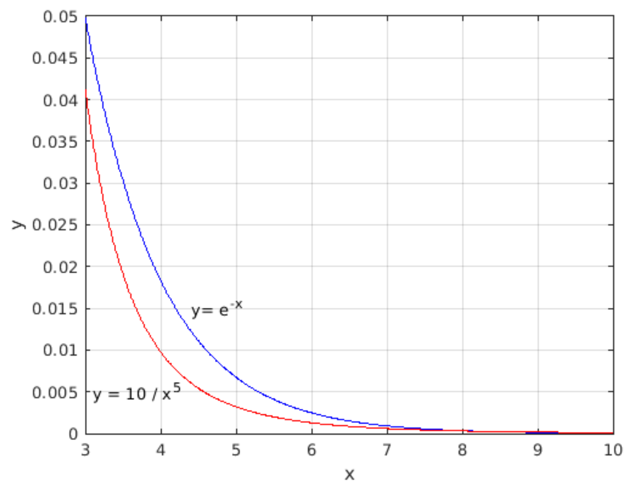


FIGURE 5.23 – Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$

Donc,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type $0/0$. Laquelle des deux fonctions tend le plus rapidement vers 0 ?

Si on trace le graphe de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$ sur un même système de coordonnées (voir la figure 5.23), il semble que $10/x^5$ tend vers 0 plus rapidement que e^{-x}. Par contre, le graphe de ces deux fonctions pour $30 \leq x \leq 40$ (voir figure 5.24) montre que c'est en fait e^{-x} qui tend vers 0 plus rapidement que $10/x^{-5}$.

Le tableau suivant donne la valeur de $e^{-x}/(10/x^5)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ où $x_n = 10n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Cette suite tend vers plus l'infini.

x	10	20	30	...	100	...
$e^{-x}/(10/x^5)$	$0.453999\ldots$	$6.595691\ldots \times 10^{-4}$	$2.273902\ldots \times e^{-7}$	...	$3.720075\ldots \times 10^{-35}$	...

La suite $\left\{\dfrac{e^{-x_n}}{10/x_n^5}\right\}_{n=0}^\infty$ semble tendre très rapidement vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ qui tend vers l'infini. Donc,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{10/x^5} = 0$$

et on conclut que e^{-x} tend vers 0 plus rapidement que $10/x^5$. ♣

Exemple 5.7.8

Considérons les fonctions $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0\ .$$

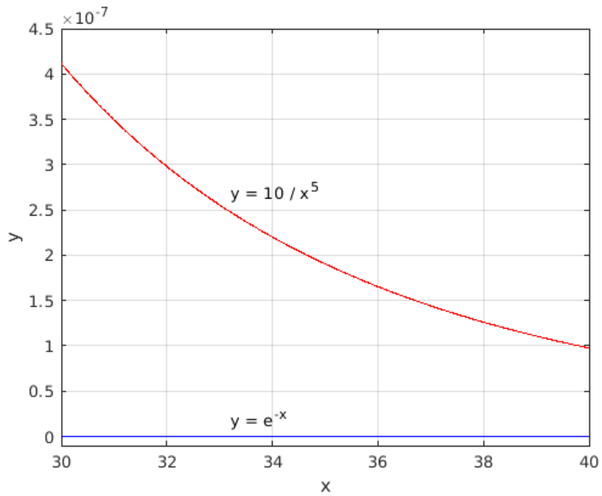


FIGURE 5.24 – Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $30 \leq x \leq 40$

Donc,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5.7.2}$$

est une limite du type $0/0$.

Le graphe de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$ que l'on retrouve à la figure 5.25 semble indiquer que x^5 tend vers 0 légèrement plus rapidement que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. Est-ce vrai ?

Pour répondre à cette question, il nous faut donc calculer la limite (5.7.2). Le tableau suivant donne la valeur de $x^5/(e^x - 1)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 1/n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Cette suite tend vers l'origine.

x	1	1/4	1/9	1/25	...
$x^5/(e^x - 1)$	$0.58197\ldots$	$0.00343\ldots$	$1.44105\ldots \times 10^{-4}$	$2.50914\ldots \times 10^{-6}$	...

La suite $\left\{ \dfrac{x_n^5}{e^{x_n} - 1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble tendre vers 0. On pourrait montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers l'origine (même si certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont négatifs). Donc,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$$

et on conclut que x^5 tend effectivement plus rapidement vers 0 que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. ♣

Dans tous les exemples précédents, on a dû calculer numériquement des limites du type $0/0$ ou ∞/∞ pour pouvoir comparer la « vitesse » de convergence de deux fonctions. Dans le but d'éviter le calcul numérique de limite du type ∞/∞ ou $0/0$, on peut utiliser le résultat suivant.

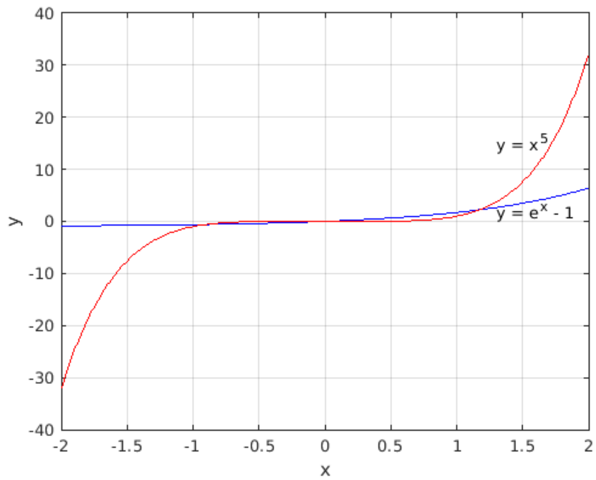


FIGURE 5.25 – Les graphes de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$

Théorème 5.7.9 (Règle de l'Hospital)
Soit f et g deux fonctions différentiables sur l'intervalle $]a, b[$. De plus, on suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a.b[$. Si

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} ,$$

et

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty ,$$

alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Le théorème est aussi vrai si on remplace $x \to a^+$ par $x \to b^-$ ou par $x \to c \in]a, b[$. De plus, le théorème reste valide pour $a = +\infty$ et $b = -\infty$.

Remarque 5.7.10
Pour calculer les limites du type $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$, il faut souvent calculer $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Si c'est deux limites sont égales, alors

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

♠

Sans être une démonstration rigoureuse de la règle de l'Hospital, le raisonnement suivant peut quand même motiver cette règle. Supposons que $f(c) = g(c) = 0$, f et g sont différentiables en $x = c$ (donc f et g sont continue en $x = c$), f' et g' sont continue en $x = c$, et $g'(c) \neq 0$. L'approximation linéaire de f et g près de c nous permet d'écrire

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x-b) = f'(c)(x-c) \quad \text{et} \quad g(x) \approx g(c) + g'(c)(x-b) = g'(c)(x-c)$$

pour x très près de c. Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

pour x très près de c. Donc, il est plausible que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Pour démontrer la Règle de l'Hospital, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.7.11 (Théorème de la moyenne de Cauchy)
Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiables sur l'intervalle $]a, b[$, et si de plus $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b tel que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \ .$$

Démonstration
Ce lemme est une conséquence du théorème de la moyenne. Posons

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right)$$

pour $x \in [a, b]$. Notons que $g(a) \neq g(b)$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction g est soit strictement croissante ou décroissante.

La fonction h est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ car c'est le cas pour f et g. Puisque $h(a) = h(b) = 0$, il découle du théorème des valeurs moyenne qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$. C'est-à-dire,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0 \ .$$

D'où

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \ .$$

Notons que $g'(\xi) \neq 0$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. ∎

Démonstration (**Règle de l'Hospital**)
On démontre la Règle de l'Hospital seulement dans le cas où

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \; . \tag{5.7.3}$$

La démonstration dans les autres cas est semblable.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Puisque

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \; ,$$

il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x > a \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

et

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x > a \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases} \; .$$

Il découle de (5.7.3) que F et G sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b[$. De plus, F et G sont différentiable sur $]a, b[$ et $G'(x) = g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On peut donc utiliser le théorème de la moyenne de Cauchy sur $[a, x]$ où $a < x < b$ pour trouver ξ entre x et a tel que

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} \; ,$$

en d'autres mots

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)} \; .$$

Si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$ alors $|\xi - a| < \delta$ car ξ est entre a et x. Donc,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. ∎

Exemple 5.7.12
Pour $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$ de l'exemple 5.7.3, puisque

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x^{1/5} = \infty \ ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $f'(x) = 1/x$ et $g'(x) = 1/(5x^{4/5})$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(5x^{4/5})} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^{1/5}} = 0 \ .$$

♣

Exemple 5.7.13
Dans l'exemple 5.7.8, on a calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. Puisque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^5 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0 \ ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $f'(x) = 5x^4$ et $g'(x) = e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4}{e^x} = \frac{0}{1} = 0 \ .$$

♣

Exemple 5.7.14
Dans l'exemple 5.7.7, on a $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10x^{-5}$. On remarque que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x}}{10\,x^{-5}} = \frac{x^5}{10\,e^x} \ .$$

Si on pose $F(x) = x^5$ et $G(x) = 10\,e^x$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} \ .$$

C'est cette dernière limite que nous évaluerons. Puisque

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} x^5 = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} 10\,e^x = \infty \ ,$$

on peut utiliser la règle de l'Hospital. On a $F'(x) = 5\,x^4$ et $G'(x) = 10\,e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\,x^4}{10\,e^x} \ .$$

On a encore une limite du type ∞/∞. On peut maintenant utiliser la règle de l'Hospital avec F' et G' pour obtenir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F''(x)}{G''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{20\,x^3}{10\,e^x} \ .$$

On obtient encore une limite du type ∞/∞ que l'on peut évaluer à l'aide de la règle de l'Hospital. On peut répéter cette procédure jusqu'à ce que l'on obtienne une limite qui ne satisfasse plus la règle de l'Hospital ou que l'on peut évaluer facilement. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{10\,e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\,x^4}{10\,e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{20\,x^3}{10\,e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{60\,x^2}{10\,e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{120\,x}{10\,e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{120}{10\,e^x} = 0 \ .\end{aligned}$$

Sauf pour la dernière limite, toutes les autres limites de l'expression précédente sont du type ∞/∞. On a donc démontré que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 0 \ .$$

♣

Exemple 5.7.15
Montrons que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ domine (i.e. croît plus rapidement que) x^3 lorsque x tend vers plus l'infini.

On a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\,x^2}{\alpha\,e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6\,x}{\alpha^2\,e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\alpha^3\,e^{\alpha x}} = 0$$

car $\alpha > 0$. Chacune des égalités est une conséquence de la règle de l'Hospital. Dans le premier cas on a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 = \lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \infty$, dans le deuxième cas $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3x^2 = \lim_{x\to\infty} \alpha e^{\alpha x} = \infty$, et dans le troisième cas $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 6x = \lim_{x\to\infty} \alpha^2 e^{\alpha x} = \infty$. ♣

Remarque 5.7.16
En fait, on peut montrer que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ tend vers plus l'infini plus rapidement que x^β lorsque x tend vers plus l'infini quel que soit $\beta > 0$. En effet,

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{e^{\beta\ln(x)}}{e^{\alpha x}} = e^{\beta\ln(x) - \alpha x} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x} \ .$$

Or, on peut montré (le cas $\sigma = 1$ et $\epsilon = \alpha/2$ de la remarque 5.7.17 qui suit) que pour x assez grand $\ln(x)/x - \alpha/2 < 0$. Ainsi, pour x assez grand, on a

$$\beta\,(\ln(x)/x - \alpha/2 - \alpha/2)\,x < \beta\,(-\alpha/2)\,x = -\beta\alpha x/2 \ .$$

Il en découle que

$$0 \leq \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha/2 - \alpha/2)x} \leq e^{-\beta\alpha x/2}$$

lorsque x tend vers l'infini. Puisque

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\beta\alpha x/2} = 0$$

car $-\beta\alpha < 0$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$$

grâce au théorème des gendarmes. ♠

Remarque 5.7.17

Montrons que x^σ avec $\sigma > 0$ quelconque domine $\ln(x)$ lorsque x tend vers plus l'infini.

Grâce à la règle de l'Hospital, on a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\sigma} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\sigma\, x^{\sigma-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sigma\, x^\sigma} = 0$$

car $\sigma > 0$. La définition 3.4.13 nous permet de dire que quel que soit $\epsilon > 0$ petit, on peut toujours trouver un nombre $M > 0$ assez grand tel que $\ln(x)/x^\sigma < \epsilon$ pour $x > M$. Plus ϵ sera petit, plus M devra être grand. ♠

Exemple 5.7.18

Évaluez la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

On a une limite du type $0/0$ pour laquelle on peut utiliser la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} \ .$$

On obtient une limite du type $0/0$ pour laquelle on peut encore utiliser la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} - \sin(0) = 0 \ .$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$. ♣

Exemple 5.7.19

Il n'y a pas seulement que les limites du type $0/0$ ou ∞/∞ que l'on puisse traiter avec la règle de l'Hospital. Calculez la limite

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} \ .$$

On obtient une limite du type 0^0. Avec quelques opérations algébriques, on peut amener le problème à une limite du type ∞/∞. Puisque

$$(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\ln\left((\sin(x))^{\tan(x)}\right)} = e^{\tan(x)\ln(\sin(x))}$$

et la fonction exponentielle est une fonction continue, on a

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x))} \ .$$

Il suffit donc de calculer

$$\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x)) \ .$$

Ce n'est pas encore une limite du type ∞/∞ mais plutôt une limite du type $0\cdot\infty$. Cependant,

$$\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}$$

et cette dernière limite est du type ∞/∞. Si on utilise la règle de l'Hospital, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x)) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \Big/ \left(-\csc^2(x)\right) \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \cos(x)\sin(x) = 0 \ .\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} \tan(x)\ln(\sin(x))} = e^0 = 1 \ .$$

♣

Exemple 5.7.20

Calculez la limite

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)) \ .$$

On obtient une limite du type $\infty - \infty$. Avec quelques opérations algébriques, on peut amener le problème à une limite du type $0/0$ pour laquelle on pourra utiliser la règle de l'Hospital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)) &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1-\sin(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0 \ ,\end{aligned}$$

où la troisième limite est une limite du type $0/0$ pour laquelle on peut utiliser la règle de l'Hospital. ♣

Exemple 5.7.21

Évaluez les limites suivantes si elles existent.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

où chaque égalité (sauf la dernière) est une conséquence de la règle de l'Hospital pour une limite du type ∞/∞.

b) On a

$$(e^x+x)^{1/x} = e^{\ln((e^x+x)^{1/x})} = e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \ .$$

Donc,

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^1 = e \ .$$

♣

Exemple 5.7.22 🔧
Évaluez la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x\to 1^-} (x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

On a une limite du type $0\cdot\infty$. Par contre

$$(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(\frac{(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

où

$$\lim_{x\to 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

car $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est une fonction continue, et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ est une limite du type $0/0$. Donc, on peut utiliser la règle de l'Hospital pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} (x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \left(\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)\left(\lim_{x\to 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= \left(\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi} \ .\end{aligned}$$

♣

Exemple 5.7.23 🔧
Montrez que

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = a \tag{5.7.4}$$

pour $a>0$. Utilisez ce résultat pour montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \ .$$

(5.7.4) n'est pas une limite du type ∞/∞ ou $0/0$. On ne peut donc pas utiliser la règle de l'Hospital directement. Par contre on a

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{(1/x)} .$$

Cette dernière limite est du type $0/0$. On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{-1}\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} a\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-1} = a\left(1+\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}\right)^{-1} = a\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x} = 0$. La second égalité est une conséquence de la règle de l'Hospital.

Puisque $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions continues, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} = e^a .\end{aligned}$$

On remarque que (5.7.4) est aussi vrai pour $a < 0$ si on assume que la limite est pour $x > |a|$. Finalement, (5.7.4) est évidemment satisfait si $a = 0$. ♣

Exemple 5.7.24

Montrez que la séries alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ converge.

On a une série alternée de la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ où $a_n = \ln(n)/n$. On démontre que cette série satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées, le théorème 2.2.42.

1. On a $a_n > 0$ pour $n \geq 2$ et $a_1 = 0$ (on peut donc ignorer le premier terme de la séries).
2. Grâce à la règle de l'Hospital, on a que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 .$$
Donc,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0 .$$
3. Puisque que la dérivée de $f(x) = \ln(x)/x$ satisfait $f'(x) = (1-\ln(x))/x^2 < 0$ pour $x > e$, on a que f est une fonction décroissante pour $x > e$ et donc que
$$a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = \frac{\ln(n)}{n} = a_n$$
pour tout $n \geq 3$.

On peut donc conclure du test des séries alternées que la séries $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ converge. Puisque

$$\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{k}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$$

pour tout $k > 2$, on a que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ converge. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k} \\ &= 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} .\end{aligned}$$

♣

5.8 Méthode de Newton 🌲🔧

Exemple 5.8.1 🌲

Supposons qu'à l'exemple 5.3.9 la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur soit $F(t) = \beta(1 - e^{-t/\alpha})$ où β est la quantité de nectar que possède une fleur et $\alpha > 0$ est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar.

On a montré que la solution T de l'équation

$$F'(T) = \frac{F(T)}{T+\tau}$$

donnait le temps T en minutes que l'abeille devait rester sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage.

Donc, T est la solution de

$$\frac{\beta}{\alpha}\,e^{-t/\alpha} = \frac{\beta(1 - e^{-t/\alpha})}{t+\tau} .$$

Quelques manipulations algébriques montrent que cette dernière équation est équivalente à

$$\alpha + \tau + t = \alpha\, e^{t/\alpha} .$$

Si on suppose que $\alpha = 3$, $\beta = 2$ et $\tau = 1$, la valeur T qui maximise la récolte de nectar pour une journée est la solution de l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3} .$$

Il est malheureusement impossible d'isoler t. Comment peut-on trouver T ? ♣

L'exemple précédent nous amène à considérer les méthodes numériques pour estimer les solutions d'équations de la forme

$$f(x) = 0 \tag{5.8.1}$$

où f est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est un intervalle de la droite réelle. Une solution de (5.8.1) est appelée une **racine** ou un **zéro** de f.

Nous présentons qu'une seule méthode numérique pour estimer les racines d'une équation de la forme (5.8.1). Cette méthode est connue sous le nom de **méthode de Newton**. Cette méthode permet de construire une suite de nombres $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers une racine de f.

Méthode 5.8.2 (**Méthodes de Newton**)

1. Choisir une valeur x_0 près de la racine p de f que l'on veut estimer.
2. Connaissant x_n, on obtient le terme suivant x_{n+1} avec la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.8.2}$$

   si $f'(x_n) \neq 0$. Si $f'(x_n) = 0$, il faut choisir une nouvelle valeur pour x_0 et reprendre en (1).
3. On répète (2) jusqu'à ce que l'on obtienne une approximation x_n de la racine p qui satisfait la précision désirée.

On peut justifier graphiquement la méthode de Newton. Supposons que x_n soit une approximation d'une racine p de f qui provient de la méthode de Newton. Alors x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des x. Voir la figure 5.26. L'équation de cette droite tangente est $y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$. Ainsi, x_{n+1} est la solution de $0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$. Si $f'(x_n) \neq 0$, on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Théorème 5.8.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la deuxième dérivée est une fonction continue. Si p est une racine de f telle que $f'(p) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite par la méthode de Newton converge vers p si la distance entre p et x_0 est plus petite que δ ; i.e. $|x_0 - p| < \delta$.

Remarque 5.8.4
En d'autres mots, le théorème dit que si $f'(p) \neq 0$ et si x_0 est suffisamment près de p, alors la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite avec la méthode de Newton tend vers p.

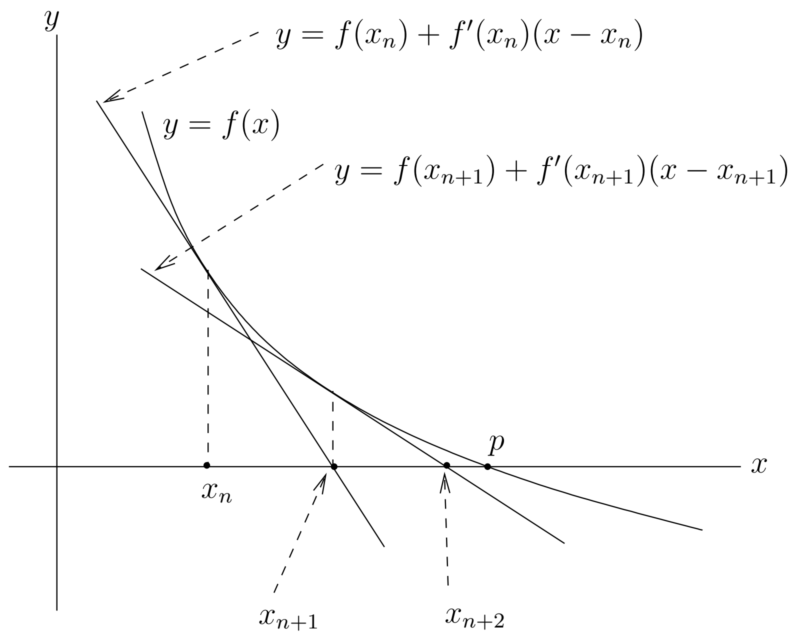


FIGURE 5.26 – La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est produite avec la méthode de Newton et tend vers une racine p de la fonction f

La méthode de Newton est une méthode du point fixe (voir la section 5.9 sur les systèmes dynamiques discrets) de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 3, \ldots$ où $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Si p est un point fixe de g, alors $p = p - f(p)/f'(p)$ et on obtient $f(p) = 0$. ♠

Exemple 5.8.5
Trouvez une approximation de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton. Arrêtez lorsque la différence entre deux termes consécutifs de la suite produite par la méthode de Newton est plus petite que 10^{-4}.

Le but est de trouver la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. On a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On donne dans le tableau suivant les premiers termes de la suite produite par la méthode de Newton avec $x_0 = 2$.

n	x_n	$\approx \lvert x_{n-1} - x_n \rvert$
0	2	
1	1.5	0.5
2	1.416667...	0.083333
3	1.414216...	0.002451
4	1.414214...	0.000002

On arrête à x_4 car $|x_4 - x_3| \approx 0.000002 < 10^{-4}$. On a $\sqrt{2} \approx x_4 = 1.414214$. La valeur exacte de $\sqrt{2}$ est 1.41421356237310... ♣

Exemple 5.8.6

Utiliser 6 itérations de la méthode de Newton pour estimer une des racines du polynôme $g(x) = -10 + 4x^2 + x^3$.

On a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{-10 + 4x_n^2 + x_n^3}{8x_n + 3x_n^2} = \frac{2\,(5 + 2x_n^2 + x_n^3)}{8x_n + 3x_n^2} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On retrouve dans le tableau suivant les 6 premières itérations de la méthode de Newton avec $x_0 = 1.5$.

n	x_n	$\approx \lvert x_{n-1} - x_n\rvert$
0	1.5	
1	1.3733333333333...	0.126667
2	1.3652620148746...	0.00807132
3	1.3652300139161...	0.00003200
4	1.3652300134141...	5.0205×10^{-10}
5	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}
6	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}

Une des racines de g est donc approximativement 1.3652300134141.

Comme le polynôme g n'a qu'une seule racine réelle (le lecteur est invité à tracer le graphe de g pour démontrer cela), on a en fait trouver une approximation de cette racine. Tout autre choix pour x_0 va donner une approximation de cette racine mais un bon choix pour x_0 peut grandement réduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une bonne approximation. ♣

Exemple 5.8.7

On peut utiliser la méthode de Newton pour estimer l'inverse multiplicatif d'un nombre a. Ce n'est naturellement pas une façon efficace de trouver l'inverse d'un nombre mais cela permet d'illustrer la méthode de Newton. L'inverse multiplicatif de a est la racine de $f(x) = a - 1/x$. Si on utilise la Méthode de Newton pour estimer cette racine, on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2x_n - ax_n^2 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On peut utiliser cette formule pour estimer l'inverse multiplicatif de $a = 13478$. On a

$$x_{n+1} = 2x_n - 13478\, x_n^2 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Le tableau suivant donne les premiers termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite à l'aide de la méthode de Newton avec $x_0 = 0.0001$.

n	x_n
0	0.0001
1	0.00006522
2	0.00007310932686...
3	0.00007417909852...
4	0.00007419498098...
5	0.00007419498445...

On a donc $1/13478 \approx 0.7419498445 \times 10^{-4}$. L'inverse multiplicatif de 13478 est $0.741949844190533\ldots \times 10^{-4}$. ♣

Exemple 5.8.8

Utiliser la méthode de Newton pour compléter l'exemple 5.8.1.

On cherche une valeur de t pour laquelle l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3} \tag{5.8.3}$$

sera satisfaite. La première question à se poser est « existe-t-il une telle valeur de t ? » La figure 5.27 confirme qu'il existe en fait une valeur positive T de t pour laquelle (5.8.3) est satisfaite.

Considérons la fonction $f(t) = 3\,e^{t/3} - t - 4$. Si t satisfait $f(t) = 0$ alors t satisfait (5.8.3). On choisit une valeur t_0 près de T dans la figure 5.27. Soit $t_0 = 2$. La formule pour la méthode de Newton est

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{3\,e^{t_n/3} - t_n - 4}{e^{t_n/3} - 1} = \frac{(t_n - 3)e^{t_n/3} + 4}{e^{t_n/3} - 1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On donne dans le tableau suivant les premiers termes de la série $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton.

n	t_n	$\approx \lvert t_{n-1} - t_n \rvert$
0	2	
1	$2.16544501942917\ldots$	0.165445
2	$2.15689134808212\ldots$	0.00855367
3	$2.15686752051758\ldots$	2.382756×10^{-5}
4	$2.15686752033303\ldots$	1.845497×10^{-10}
5	$2.15686752033302\ldots$	1.0×10^{-14}

L'abeille doit donc demeurer approximativement 2.1569 minutes sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage. ♣

Il y a deux problèmes majeurs qui peuvent faire échouer la méthode de Newton.

Problème 1: Il faut faire un bon choix pour x_0. Si la fonction f a plusieurs racines, il peut s'avérer difficile de trouver x_0 pour obtenir une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton qui tend vers la racine p que l'on cherche. Il faut choisir x_0 assez près de cette racine p. Mais comment peut-on choisir x_0 près de p si on ne connaît pas p ? Le Théorème des valeurs intermédiaires, Théorème 3.3.5, nous fournit une méthode pour choisir x_0.

Si on a $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$, alors le Théorème 3.3.5 avec $m = 0$ nous confirme qu'il existe une racine de f entre a et b. L'algorithme suivant, connu sous le nom de **méthode de bissection**, nous permet de trouver un intervalle aussi petit que l'on veut et qui contient une racine de f. Si on prend x_0 dans un tel intervalle, la méthode de Newton a de bonnes chances de nous donner une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers la racine dans ce petit intervalle.

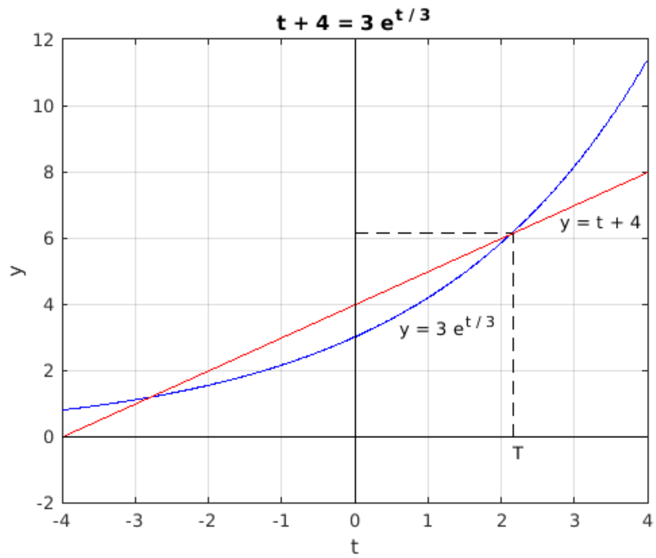


FIGURE 5.27 – Les courbes $y = 3\,e^{t/3}$ et $y = t + 4$ se coupent en un seul point $t > 0$ que l'on a appelé T dans la figure

Méthode 5.8.9 (Méthode de bissection)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$; c'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé.

1. Prendre $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
2. Étant donné a_n et b_n, on pose $m = (a_n + b_n)/2$. Le point m est le point milieu de l'intervalle $[a_n, b_n]$.
3. Si $f(m) = 0$ alors m est une racine de f et on arrête.
4. Si $f(m)f(a_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Autrement, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
5. On répète (2), (3) et (4) pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés
$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$
qui contiennent une racine de f.

L'item 4 mérite une attention toute particulière. Par construction, on a toujours $f(a_n)\,f(b_n) < 0$. Donc, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont de signe opposé. Ce qui implique que la fonction f change de signe dans l'intervalle $[a_n, b_n]$. De plus, $f(m) \neq 0$ suite à l'item 3. Donc, soit que $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de même signe (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé) ou $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de même signe).

Si $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) < 0$), on a par le théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[a_n, m]$. L'intervalle $[a_n, m]$ devient l'intervalle suivant $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Si $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) > 0$ car $f(a_n)$ et $f(m)$ sont alors de même signe), on a par le théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[m, b_n]$. L'intervalle $[m, b_n]$ devient l'intervalle suivant $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Exemple 5.8.10
Pour trouver une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$, on pose $f(x) = e^x - x - 4$. Puisque $f(0) = -3 < 0$ et $f(3) = 13.08\ldots > 0$, il y a une racine de f entre 0 et 3. On peut utiliser la méthode de bissection pour trouver un petit intervalle contenant cette racine.

On résume dans le tableau suivant les calculs nécessaires pour la méthode de bissection.

n	a_n	b_n	m	$f(a_n)$	$f(m)$
0	0	3	1.5	-3	$-1.018310\ldots$
1	1.5	3	2.25	$-1.018310\ldots$	$3.237735\ldots$
2	1.5	2.25	1.875	$-1.018310\ldots$	$0.645819\ldots$
3	1.5	1.875	1.6875	$-1.018310\ldots$	$-0.281551\ldots$
4	1.6875	1.875	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Ainsi, il y a une racine de f entre 1.6875 et 1.875. On peut maintenant espérer que la méthode de Newton va produire une suite qui converge vers cette racine si on prend x_0 pour la méthode de Newton entre 1.6875 et 1.875.

Puisque $f'(x) = e^x - 1$, la formule pour la méthode de Newton est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 4}{e^{x_n} - 1} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n} + 4}{e^{x_n} - 1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Avec $x_0 = 1.7$, on obtient la suite suivante :

n	x_n	$\approx \lvert x_{n-1} - x_n \rvert$
0	1.7	
1	$1.75052643414869\ldots$	0.0505264
2	$1.74903273782687\ldots$	0.0014936
3	$1.74903138601381\ldots$	1.3518130×10^{-6}
4	$1.74903138601270\ldots$	$1.1100009 \times 10^{-12}$

Une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$ est approximativement 1.7490313860127.

En fait, il n'y a qu'une seule solution positive car $f'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$. Donc, f est une fonction croissante. On a $f(x) > 0$ pour $x > 1.7490313860\ldots$ et $f(x) < 0$ pour $0 < x < 1.7490313860\ldots$. ♣

Problème 2: L'autre problème qui peut faire échouer la méthode de Newton est si $f'(x_n)$ est très près de zéro. Si $f'(x_n)$ est très près de zéro, alors la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ est presque horizontale. Ainsi, x_{n+1} qui est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x peut être très grand ou très petit, et donc très loin de la racine de f que l'on cherche à estimer. Si $f'(x_n)$ devient très près de zéro dans la méthode de Newton, il faut arrêter et recommencer avec une autre valeur de x_0. Il est parfois impossible d'éviter ce problème. Il faut alors avoir recours à une autre méthode numérique pour estimer les racines.

5.9 Systèmes dynamiques discrets

Exemple 5.9.1
Une population de bactéries dans un milieu donné a un taux de croissance de 10% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 (en moyenne) initialement , alors $p_1 = 1.1p_0$ est le nombre de bactéries une heure plus tard, $p_2 = 1.1p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 1.1p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. La relation

$$p_{n+1} = 1.1p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

définit un système dynamique discret qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries par cm^3 initialement présent. Si initialement on a $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3, alors on aura $p_1 = 1.1p_0 = 1.1 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, on aura $p_2 = 1.1p_1 = 1.1^2 p_0 = 1.1^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

On remarque que $p_n = 1.1^n p_0 = 1.1^n \times 10^7$ bactéries par cm^3. Ainsi, après 10 heures, on aura $p_{10} = 1.1^{10} \times 10^7$ bactéries par cm^3 si initialement on avait $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3. On a que p_n tend vers plus l'infini lorsque n augmente ; c'est-à-dire que le nombre de bactéries croît sans borne supérieure. ♣

Définiton 5.9.2
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une équation de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.9.1}$$

est appelée un **système dynamique discret**. La valeur donnée à p_0 est la **condition initiale**. La fonction f est appelée la **fonction itérative** ou **fonction génératrice** du système dynamique discret.

Une **solution** du système dynamique discret (5.9.1) qui satisfait la condition initiale p_0 est une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $p_n = g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ satisfait (5.9.1) et $g(0) = p_0$.

Remarque 5.9.3
Les systèmes dynamiques discrets sont très fréquents en biologie. Ils sont utilisés pour décrire mathématiquement le comportement de quantités qui sont mesurées à une fréquence régulière. Pour étudier le comportement des systèmes dynamiques discrets, on aura besoin du calcul différentiel et intégral.

Inversement, les systèmes dynamiques discrets sont très utiles pour résoudre numériquement les problèmes de calcul différentiel et intégral. Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés pour résoudre des équations où aucune méthode exacte de résolution n'existe (e.g. la méthode de Newton), pour résoudre des équations différentielles pour lesquelles les méthodes

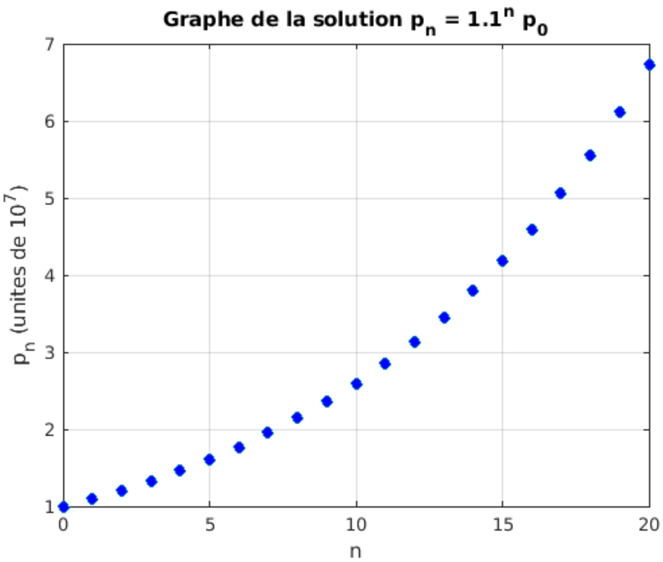


FIGURE 5.28 – Graphe de la solution $p_n = 1.1^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 1.1p_n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

algébriques d'intégration échouent (e.g. la méthode d'Euler que l'on présentera lors de l'étude des équations différentielles), etc. ♠

Exemple 5.9.4
À l'exemple précédent, la fonction itérative du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 1.1p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

est $f(x) = 1.1x$ et la solution de ce système avec la condition initiale p_0 est

$$p_n = 1.1^n p_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On trace le graphe de cette solution avec $p_0 = 10^7$ à la figure 5.28. ♣

Exemple 5.9.5
Reprenons notre exemple d'une population de bactéries dans un milieu donné. Supposons maintenant que le taux de croissance est de -20% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 initialement, alors $p_1 = 0.8p_0$ est le nombre de bactéries par cm^3 une heure plus tard, $p_2 = 0.8p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 0.8p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. L'équation

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

définit un système dynamique discret qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries initialement présent. Si initialement on a $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3, alors on aura $p_1 = 0.8p_0 = 0.8 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, on aura $p_2 = 0.8p_1 = 0.8^2 p_0 = 0.8^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

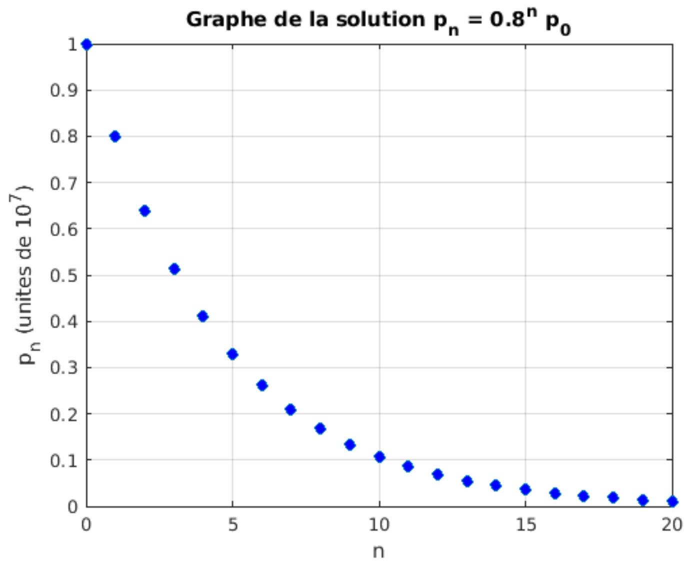


FIGURE 5.29 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

On a donc la solution $p_n = 0.8^n p_0 = 0.8^n \times 10^7$ bactéries par cm^3. Après 10 heures, on aura $p_{10} = 0.8^{10} \times 10^7 = 1.073742 \times 10^6$ bactéries par cm^3 si initialement on avait $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3. Après 24 heures, on aura $p_{24} = 0.8^{24} \times 10^7 = 47,224$ bactéries par cm^3. On a que p_n tend vers 0 lorsque n augmente. On trace le graphe de la solution avec la condition initiale $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 à la figure 5.29. ♣

Exemple 5.9.6

Le nombre de bactéries par cm^3, n heures après le début d'une expérience, est p_n. On observe que la population de bactéries est décrite par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Combien d'heures au minimum faut-il pour que le nombre de bactéries par cm^3 soit réduit d'au moins la moitié ?

La solution du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ est $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ On cherche la plus petite valeur de n telle que $p_n \leq p_0/2$. Considérons

$$0.8^n p_0 = \frac{p_0}{2} \ .$$

Si on divise par p_0 des deux côtés de l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 0.8^n = 2^{-1} &\Rightarrow n \ln(0.8) = \ln(0.8^n) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2) \\ &\Rightarrow n = -\frac{\ln(2)}{\ln(0.8)} = -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{\ln(2)}{\ln(4) - \ln(5)} = 3.106283\ldots \end{aligned}$$

Après trois heures on aura un peu plus que la moitié de la population de bactéries par cm^3 et après quatre heures on en aura moins de la moitié. Donc, on prend $n = 4$ heures. On remarque que la réponse est indépendante du nombre initial de bactéries.

Peut-on dire qu'après $3.106\ldots$ heures la population de bactéries par cm^3 est exactement la moitié du nombre initial de bactéries par cm^3 ? En général non, puisque $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ est la solution d'un système dynamique discret, il n'y a rien qui dit que $0.8^t p_0$ pour $t \in \mathbb{R}$ décrit le comportement de la population entre deux échantillons. On étudiera dans au chapitre **??** les systèmes dynamiques continus (i.e. les équations différentielles) qui correspondent aux systèmes dynamiques discrets de la forme $p_{n+1} = rp_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ La solution de ces systèmes sera de la forme $p_0 e^{rt}$ pour $t \in \mathbb{R}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et r est le taux de croissance. ♣

On est intéressé au comportement de la suite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ lorsque n devient de plus en plus grand. Est-ce que p_n tend vers une valeur quelconque lorsque n tend vers plus l'infini ? Est-ce que p_n croît sans borne supérieure comme c'est le cas pour notre population de bactéries de l'exemple 5.9.1 ?

Définiton 5.9.7
Soit
$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$
un système dynamique discret. L'**orbite** (positive) de p_0 est la suite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $p_1 = f(p_0)$, $p_2 = f(p_1)$, $p_3 = f(p_2)$, $\ldots$

Remarque 5.9.8
Considérons un système dynamique discret
$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Si la condition initiale p_0 est donnée, alors
$$\begin{aligned}
p_1 &= f(p_0) \ , \\
p_2 &= f(p_1) = f(f(p_0)) = (f \circ f)(p_0) \ , \\
p_3 &= f(p_2) = f(f(f(p_0))) = (f \circ f \circ f)(p_0) \ , \\
&\vdots
\end{aligned}$$
On dit que p_1 est obtenue de p_0 par une **itération** de f, p_2 est obtenue de p_0 par deux **itérations** de f, etc.

Dans certains livres, on utilise la notation f^2 pour désigner $f \circ f$, f^3 pour désigner $f \circ f \circ f$, etc. C'est une autre tradition mathématique qui peut conduire à confusion. Que veut dire $f^2(p_0)$? Est-ce $f(f(p_0))$ ou $(f(p_0))^2$? Seul le contexte peut le dire. Nous n'utiliserons pas f^2, f^3, $\ldots$ pour désigner la composition de fonctions mais le produit de fonctions comme on a toujours fait. ♠

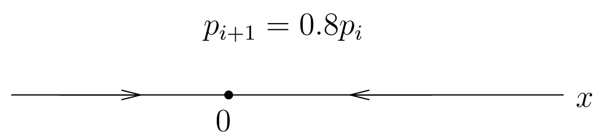


FIGURE 5.30 – Portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$

Comment peut-on représenter graphiquement les orbites du système dynamique

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Deux méthodes sont fréquemment utilisées.

Portrait de phases

La première méthode est de tracer le **portrait de phase** du système. Par exemple, à la figure 5.30, on a tracé le portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ de l'exemple 5.9.1. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Pour toute condition initiale $p_0 > 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend vers 0 lorsque n devient de plus en plus grand. On pourrait aussi vérifier que pour toute condition initiale $p_0 < 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend aussi vers 0 lorsque n augmente. Mais, naturellement, quelle interprétation biologique peut-on donner à un nombre négatif de bactéries ?

Graphe en forme de toile d'araignée

La deuxième méthode consiste à tracer le **graphe en forme de toile d'araignée** d'une orbite du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ce graphe donne plus d'information sur la façon dont les orbites convergent (si elles convergent). On retrouve, à la figure 5.31, le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

de l'exemple précédent. On a choisi $p_0 = 10^7$ comme condition initiale.

Pour tracer un tel graphe, on commence au point $(p_0, 0) = (10^7, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. On trace une droite verticale à partir de $(p_0, 0)$ qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_0, p_1) où $p_1 = 0.8p_0$.
2. À partir de (p_0, p_1), on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_1, p_1).

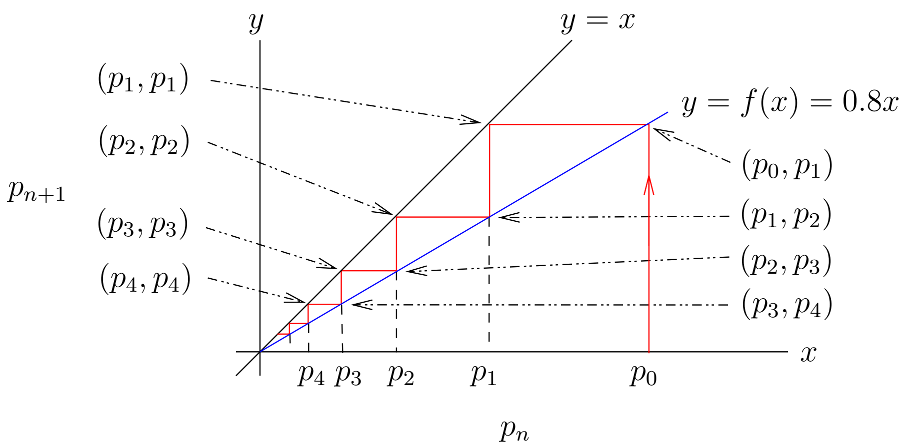


FIGURE 5.31 – Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ avec la condition initiale $p_0 = 10^7$

3. À partir de (p_1, p_1), on trace une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_1, p_2) où $p_2 = 0.8p_1$.
4. À partir de (p_1, p_2), on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_2, p_2).
5. À partir de (p_2, p_2), on trace une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_2, p_3) où $p_3 = 0.8p_2$.
6. Ainsi de suite.

Les points (p_n, p_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(p_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

Exemple 5.9.9

Soit p_n le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 qui se trouvent dans un milieu n heures après le début d'une expérience. On observe que p_n satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En plus d'un taux de croissance de -20%, il y a $3,000$ bactéries par cm^3 de plus par heure qui proviennent de l'extérieur du milieu. Le milieu expérimental est contaminé.

La fonction itérative pour ce système dynamique discret est $f(x) = 0.8x + 3$.

Les premières valeurs de p_n sont

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0.8p_0 + 3\,, \\
p_2 &= 0.8p_1 + 3 = 0.8(0.8p_0 + 3) + 3 = 0.8^2 p_0 + 0.8 \times 3 + 3\,, \\
p_3 &= 0.8p_2 + 3 = 0.8(0.8^2 p_0 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 = 0.8^3 p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3\,, \\
p_4 &= 0.8p_3 + 3 = 0.8(0.8^3 p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 \\
&= 0.8^4 p_0 + 0.8^3 \times 3 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3\,, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

n	p_n
0	3
1	5.4
2	7.32
3	8.856
4	10.0848
5	11.06784
6	11.854272
7	12.4834176
⋮	⋮
18	14.78382721789...
19	14.82706177431...
20	14.86164941945...
21	14.88931953556...
22	14.91145562845...
23	14.92916450276...
24	14.94333160221...

n	p_n
0	25
1	23
2	21.4
3	20.12
4	19.096
5	18.2768
6	17.62144
7	17.097152
⋮	⋮
18	15.18014398509...
19	15.14411518808...
20	15.11529215046...
21	15.09223372037...
22	15.07378697629...
23	15.05902958104...
24	15.04722366483...

TABLE 5.1 – Deux orbites du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $p_0 = 3$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $p_0 = 25$. Ne pas oublier que p_n est le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 en moyenne. Donc, on ne peut pas simplement ignorer les chiffres décimaux après le troisième chiffre.

Par induction, on trouve

$$\begin{aligned} p_n &= 0.8^n p_0 + 3\sum_{k=0}^{n-1} 0.8^k = 0.8^n p_0 + 3\left(\frac{1-0.8^n}{1-0.8}\right) \\ &= 0.8^n(p_0 - 15) + 15 \;. \end{aligned}$$

Puisque 0.8^n approche 0 lorsque n devient de plus en plus grand, on a que p_n approche 15 lorsque n devient de plus en plus grand.

Au tableau 5.1, on a calculé deux orbites, une avec la condition initiale $p_0 = 3$ et l'autre avec la condition initiale $p_0 = 25$. Les deux orbites tendent vers 15.

Le graphe de la solution $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret avec $p_0 = 3$ est donné à la figure 5.32.

Le graphe en forme de toile d'araignée est donné à la figure 5.33. Il indique bien que toutes les orbites tendent vers 15.

On remarque que l'orbite $\{p_n\}_{i=0}^{\infty}$ de $p_0 = 15$ pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

est donnée par $p_n = 15$ pour tout n. Le point $p = 15$ est invariable pour la fonction itérative $y = f(x) = 0.8x + 3$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est-à-dire, $f(15) = 15$. Les points qui satisfont cette propriété sont très importants et on leur donne un nom. ♣

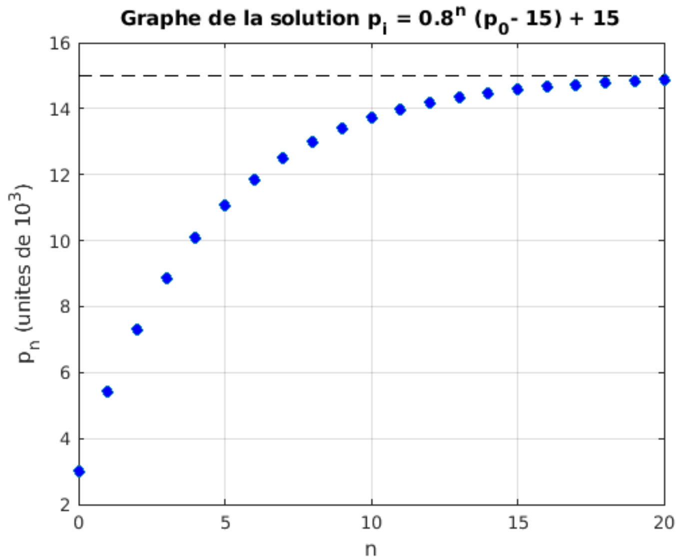


FIGURE 5.32 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dont la condition initiale est $p_0 = 3$. Les points que l'on retrouve dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

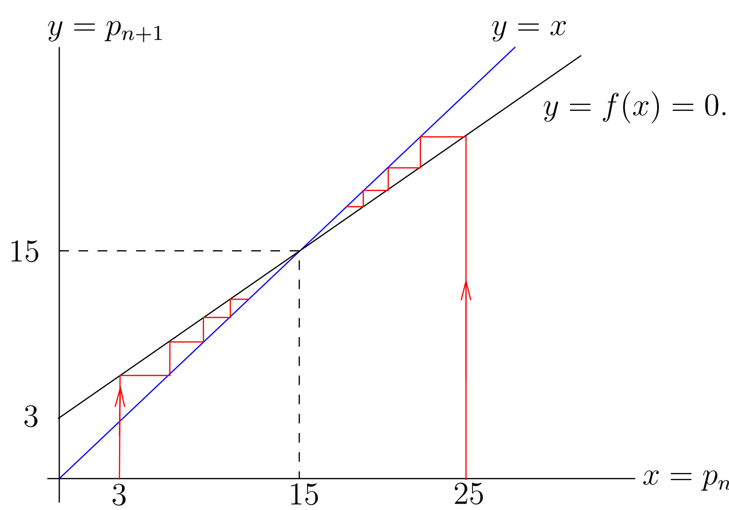


FIGURE 5.33 – Le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Définiton 5.9.10
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Un point p tel que $f(p) = p$ est appelé un **point fixe**, un **point d'équilibre** ou un **état d'équilibre** du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les points d'équilibre d'un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sont les solutions de $x = f(x)$; ce sont donc les points d'intersection de la droite $y = x$ avec le graphe de la fonction itérative f du système dynamique discret (voir figure 5.33).

Exemple 5.9.11
À l'exemple 5.9.9, on peut montrer que pour toute condition initiale p_0, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tend vers 15. C'est-à-dire que le point d'équilibre $p = 15$ possède la propriété ci-dessous. ♣

Définiton 5.9.12
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Un point d'équilibre p du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

est **asymptotiquement stable** [a] si, quelle que soit la condition initiale p_0 près de p, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers p.

Un point d'équilibre p du système dynamique discret est **instable** si, pour toute condition initial p_0 assez près de p, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ « s'éloigne » de p.

a. La définition de stabilité asymptotique que nous donnons n'est pas exactement la définition de stabilité asymptotique que l'on retrouve dans les ouvrages spécialisés sur ce sujet mais elle sera suffisante pour les problèmes que nous étudierons.

Remarque 5.9.13
Par la suite, nous substituerons à l'occasion l'expression « asymptotiquement stable » par le mot « stable » seulement. Cela simplifie l'écriture mais entre en conflit avec la littérature spécialisée sur le sujet des systèmes dynamiques. En effet, dans la littérature spécialisée, on dit qu'un point d'équilibre p est stable si les orbites $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ avec la condition initiale p_0 suffisamment près de p « ne s'éloignent pas » de p. Il est possible que ces orbites n'approchent pas p mais seulement demeurent dans le voisinage de p. ♠

Considérons un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

où la fonction itérative f est une fonction affine

$$y = f(x) = \alpha x + \beta \ .$$

L'existence d'un point fixe p pour ce système dynamique discret nous fourni une autre méthode pour trouver la solution du système dynamique discret.

Puisque $f(p) = p$, on a

$$p_{n+1} - p = f(p_n) - f(p) = (\alpha p_n + \beta) - (\alpha p + \beta) = \alpha(p_n - p)$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ainsi,

$$\begin{aligned}
p_1 - p &= \alpha(p_0 - p) \ , \\
p_2 - p &= \alpha(p_1 - p) = \alpha^2(p_0 - p) \ , \\
p_3 - p &= \alpha(p_2 - p) = \alpha^3(p_0 - p) \ , \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
p_n - p &= \alpha^n(p_0 - p) \ , \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 5.9.14
La solution générale du système dynamique discret

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

est $p_n = \alpha^n(p_0 - p) + p$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où p est le point d'équilibre du système. Si le système dynamique discret n'a pas de point d'équilibre (i.e. $\alpha = 1$), la solution est $p_n = p_0 + n\beta$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Exemple 5.9.15
Puisque $p = 15$ est un point fixe du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

on a $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. ♣

Exemple 5.9.16
Le nombre initial de bactéries dans un milieu donné est de $2,500$ bactéries par cm^3. On détermine que le nombre de bactéries après une heure est de $2,750$ bactéries par cm^3 et qu'il est de $3,125$ bactéries par cm^3 après deux heures. Si on sait que le nombre de bactéries satisfait un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = \alpha p_n + \beta$, quel est ce système ? Trouvez les points d'équilibre s'il y en a et étudier leur stabilité. Donner la solution.

On cherche un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On a $p_0 = 2,500$, $p_1 = 2,750$ et $p_2 = 3,125$. On peut donc écrire le système linéaire à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{aligned} 2,750 &= \alpha 2,500 + \beta \\ 3,125 &= \alpha 2,750 + \beta \end{aligned}$$

Si on soustrait la première équation de la deuxième équation, on trouve

$$\alpha = \frac{3,125 - 2,750}{2,750 - 2,500} = 1.5 \ .$$

Si on remplace α par 1.5 dans la première équation, on trouve

$$\beta = 2,750 - 1.5 \times 2,500 = -1,000 \ .$$

Donc, le système dynamique discret cherché est

$$p_{n+1} = 1.5 p_n - 1,000 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les points d'équilibre p sont les solutions de $p = 1.5p - 1,000$. On trouve $p = 2,000$ bactéries par cm^3. La solution générale est $p_n = 1.5^n(p_0 - 2,000) + 2,000$ pour $n = 0$, 1, 2, 3, ... Dans le cas présent, $p_0 = 2,500$ bactéries par cm^3. Donc la solution particulière est $p_n = 500 \times 1.5^n + 2,000$. Du point de vue mathématique et biologique, il y a un point fixe qui est instable (vérifier avec un graphe en forme de toile d'araignée). Indépendemment de la condition initiale $p_0 > 2,000$, la population va croître sans borne supérieure. Pour $p_0 < 2,000$, on peut considérer que la population de bactéries va disparaître. ♣

5.9.1 Équation logistique

Dans les exemples précédents, on a supposé que les populations de bactéries étaient décrites par un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) = r p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ , \tag{5.9.2}$$

où r était le taux de croissance relative de la population (on ignore les systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n + q$ qui peuvent être considérés comme des perturbations du systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n$). On a vu que $p_n = r^n p_0$ et donc que le nombre de bactéries tend vers plus l'infini si $r > 1$ et vers 0 si $0 < r < 1$. Cela n'est naturellement pas (toujours) réaliste.

On modifie le système dynamique discret en (5.9.2) pour mieux décrire la croissance du nombre de bactéries. On suppose qu'un milieu borné peut supporter au plus M bactéries (une limite imposée par la quantité de nourriture présente, l'espace occupé, ...). Le taux de croissance doit donc diminuer avec le temps pour garder le nombre de bactéries en deçà de M.

On considère le système dynamique discret

$$p_{n+1} = r\, p_n \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ , \tag{5.9.3}$$

où le facteur $\left(1 - \dfrac{p_n}{M}\right)$ devient de plus en plus petit lorsque le nombre de bactérie $p_n < M$ approche le nombre maximal de bactéries M que le milieu peut supporter.

Dans la littérature, on ne considère pas le nombre total de bactéries dans le milieu mais la fraction p_n/M représentant le nombre de bactéries présent par rapport au nombre maximal de bactéries que le milieu peut supporter. Si on divise les deux côtés de (5.9.3) par M, on obtient

$$\frac{p_{n+1}}{M} = r\, \frac{p_n}{M} \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si on pose $x_n = p_n/M$ pour tout n, on obtient l'équation suivante.

Définiton 5.9.17
L'**équation logistique** est le système dynamique discret de la forme

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.9.4}$$

Pour l'équation logistique, la fonction itérative est $f(x) = rx(1 - x)$.

On donne aux tableaux 5.2 plusieurs valeurs de x_n lorsque $r = 1.1$, et la fraction initiale de bactéries est $x_0 = 0.4$ pour le tableau de gauche et $x_0 = 0.9$ pour le tableau de droite.

Dans les deux cas, la fraction de la population maximale tend lentement vers $0.\overline{09} = 1/11$. Pour l'équation logistique $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = r\,x(1 - x)$ avec $r = 1.1$, le point $p = 1/11$ est un point d'équilibre car $f(p) = p$. Ainsi, si la fraction de la population maximale est $1/11$, cette fraction sera encore $1/11$ après une heure, deux heures, etc. La fraction de la population maximale ne changera pas. La population a atteint un état d'équilibre.

La population de bactéries ne disparaît pas mais approche un état d'équilibre de $1/11$ de la population maximale que le milieu peut supporter. On pourrait choisir d'autres valeurs initiales pour x_0 mais, dans tous les cas, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers l'état d'équilibre $1/11$ qui représente la fraction de la population maximale que le milieu peut supporter.

Comment peut-on expliquer ce phénomène ? Qu'arrivera-t-il si on change la valeur du paramètre r représentant le taux de croissance relative sans contraintes du milieu ?

Avant de répondre à ces questions, et à bien d'autres qui seront soulevées plus loin, il est utile de revoir les deux façons que l'on a de représenter les orbites d'un système dynamique discret.

Portrait de phases

Pour décrire le comportement du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1 x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

n	x_n
0	0.40000000000...
1	0.26400000000...
2	0.21373440000...
3	0.18485720688...
4	0.16575352194...
5	0.15210722110...
6	0.14186767582...
7	0.13391536222...
⋮	⋮
49	0.09124508294...
50	0.09121135955...
⋮	⋮
199	0.090909090955...
200	0.090909090950...
⋮	⋮
1999	0.09090909091...
2000	0.09090909091...
⋮	⋮

n	x_n
0	0.90000000000...
1	0.09900000000...
2	0.09811890000...
3	0.09734073961...
4	0.09665207202...
5	0.09604149390...
6	0.09549927788...
7	0.09501708239...
⋮	⋮
49	0.09095594351...
50	0.09095125583...
⋮	⋮
99	0.09090933224...
100	0.09090930811...
⋮	⋮
1999	0.09090909091...
2000	0.09090909091...
⋮	⋮

TABLE 5.2 – Deux orbites de l'équation logistique où $r = 1.1$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $x_0 = 0.4$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $x_0 = 0.9$.

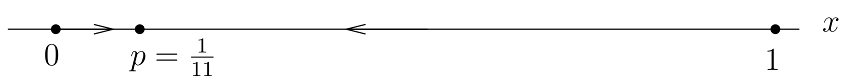


FIGURE 5.34 – Portrait de phase du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n)$.

on peut utiliser le portrait de phase donné à la figure 5.34. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Si on prend une condition initiale x_0 entre 0 et $p = 1/11$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 tend vers p. Si on prend une condition initiale x_0 entre $p = 1/11$ et 1, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 tend aussi vers p.

On déduit du portrait de phase que le point fixe $p = 1/11$ est asymptotiquement stable.

Graphe en forme de toile d'araignée

Une autre façon de représenter les orbites du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

est le graphe en forme de toile d'araignée que l'on retrouve à la figure 5.35. Pour tracer un tel graphe, on commence au point $(x_0, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. On trace une droite verticale à partir de $(x_0, 0)$ qui coupe le graphe de f au point (x_0, x_1) où $x_1 = f(x_0)$.
2. À partir de (x_0, x_1), on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_1, x_1).

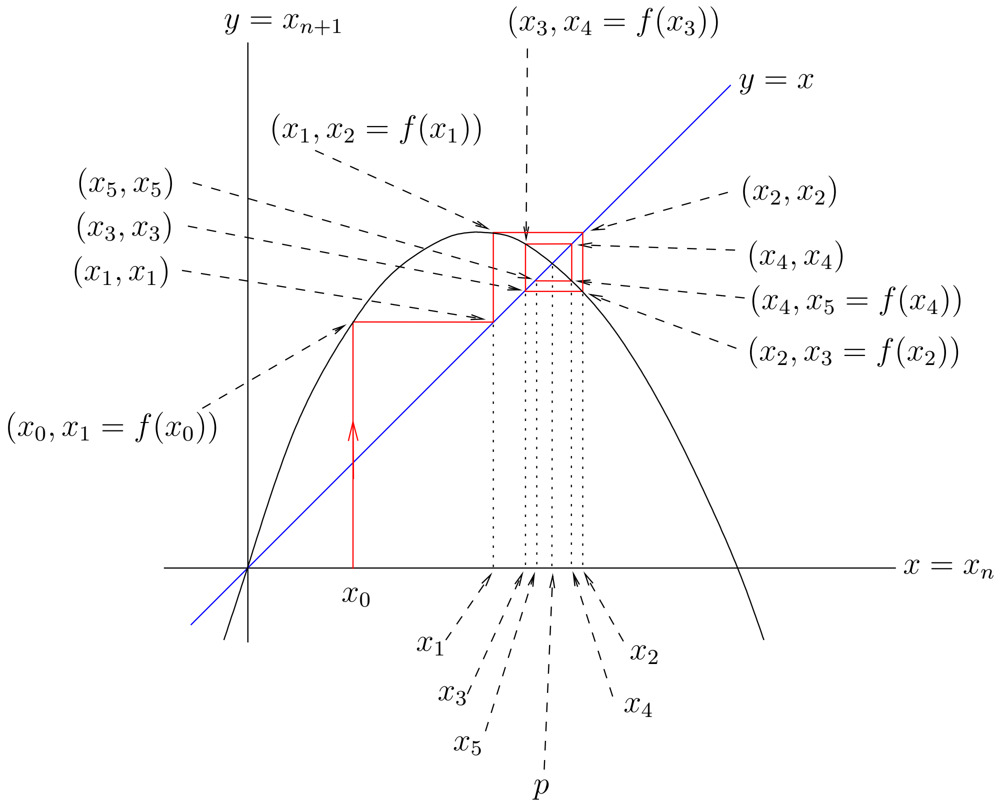


FIGURE 5.35 – Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ avec $r = 2.3$. p est un point fixe.

3. À partir de (x_1, x_1), on trace une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_1, x_2) où $x_2 = f(x_1)$.
4. À partir de (x_1, x_2), on trace une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_2, x_2).
5. À partir de (x_2, x_2), on trace une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_2, x_3) où $x_3 = f(x_2)$.
6. Ainsi de suite.

Les points (x_n, x_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(x_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

5.9.2 Étude des points d'équilibre

Les points fixes d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sont les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 5.9.18
À l'aide du graphe en forme de toile d'araignée des systèmes dynamiques discrets, on peut

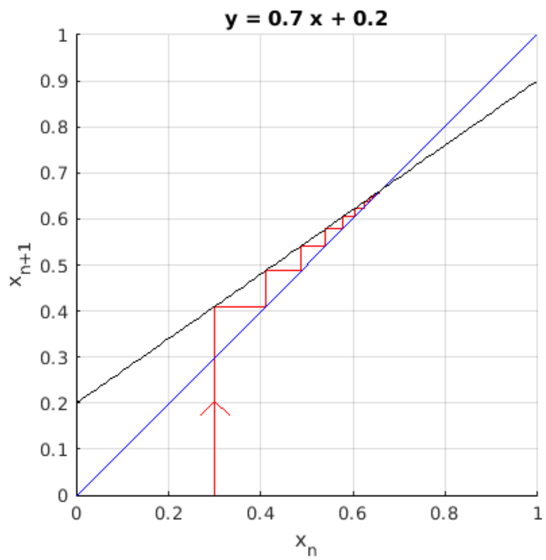


FIGURE 5.36 – Le point d'équilibre $p = 2/3$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = 0.7x_n + 0.2$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ est asymptotiquement stable, Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.3$.

déterminer la stabilité du point d'équilibre du système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où (i) $y = f(x) = 0.7x + 0.2$, (ii) $y = f(x) = 2x - 0.6$, (iii) $y = f(x) = -0.7x + 0.68$ et (iv) $y = f(x) = -2x + 1.2$.

On retrouve aux figures 5.36, 5.37, 5.38 et 5.39 un graphe en forme de toile d'araignée pour chacun des systèmes ci-dessus.

En (i), le point d'équilibre $p = 2/3$ est asymptotiquement stable. Il en est de même pour le point d'équilibre $p = 2/5$ en (iii). Par contre, le point d'équilibre $p = 3/5$ en (ii) et le point d'équilibre $p = 2/5$ en (iv) ne sont pas asymptotiquement stables.

En (i) et (iii), si on prend la condition initiale x_0 plus petite que le point d'équilibre p (i.e. à la gauche de p) alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 demeure toujours à la gauche du point d'équilibre p. De même, si la condition initiale x_0 est plus grande que p (i.e. à la droite de p), alors l'orbite demeure toujours à la droite de p. Par contre, ce n'est pas le cas pour (ii) et (iv). En fait, que l'on prenne x_0 à la droite ou à la gauche de p, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de x_0 alterne entre la gauche et la droite de p. ♣

Les exemples précédents suggèrent le résultat suivant :

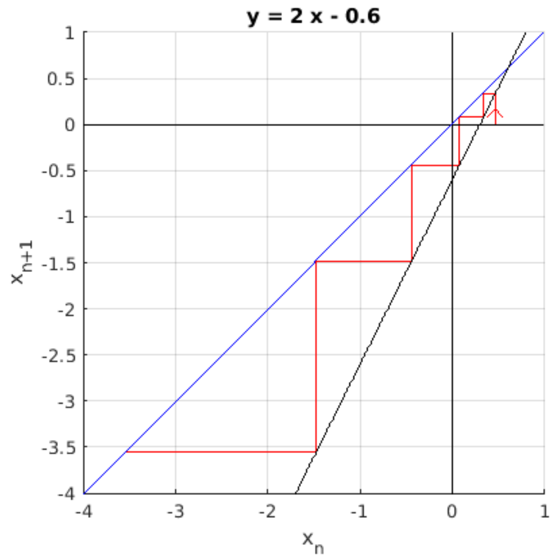


FIGURE 5.37 – Le point d'équilibre $p = 3/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n - 0.6$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.47$

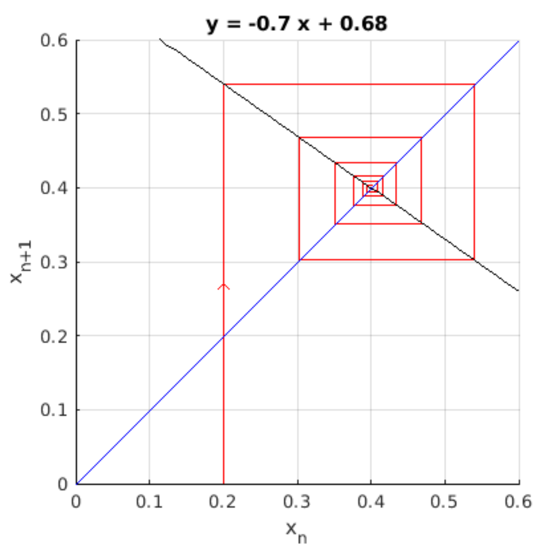


FIGURE 5.38 – Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = -0.7x_n + 0.68$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ est asymptotiquement stable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.2$

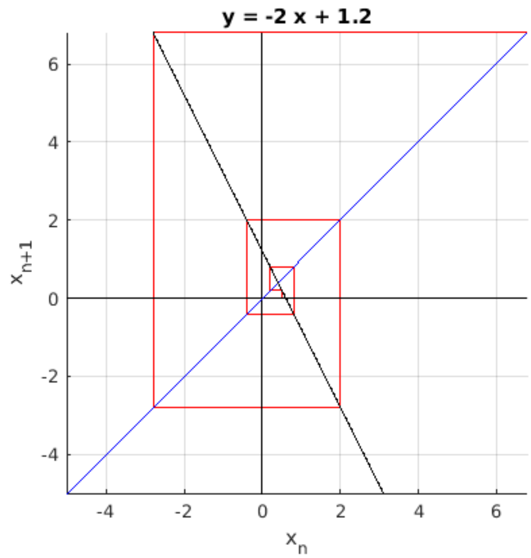


FIGURE 5.39 – Le point d'équilibre $p = 2/5$ du système dynamique $x_{n+1} = f(x_n) = -2x_n + 1.2$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.5$

Proposition 5.9.19
On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où la fonction itérative est $y = f(x) = mx + b$. Si p est un point d'équilibre de ce système dynamique discret alors ce point d'équilibre est asymptotiquement stable si $|m| < 1$ et instable si $|m| > 1$.

Comment peut-on déterminer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre p d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où f n'est pas une fonction affine ?

Supposons que p soit un point d'équilibre pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

où f est une fonction différentiable quelconque. On sait que $f(x) \approx g(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$ pour x très près de p. Très près du point p, le système dynamique discret ci dessus devrait donc se comporter comme le système dynamique discret

$$x_{n+1} = g(x_n) = f(p) + f'(p)(x_n - p) = mx_n + b \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$

où $m = f'(p)$ et $b = f(p) - p\,f'(p)$. En se basant sur le résultat précédent pour $f(x) = mx+b$, ce raisonnement suggère le résultat suivant :

Théorème 5.9.20
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée existe et est continue. Soit p un point d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Le point d'équilibre p est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$. Il est instable si $|f'(p)| > 1$. On ne peut rien conclure lorsque $|f'(p)| = 1$.

On démontrera plus loin ce résultat. C'est une simple application des résultats de calcul différentiel que l'on a présentés précédemment.

Revenons à notre équation logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les points d'équilibre sont les solutions de

$$rx(1 - x) = x \ .$$

Si $x \neq 0$, on peut diviser des deux cotés de l'égalité par x pour obtenir $r(1 - x) = 1$. Ainsi $x = 1 - \frac{1}{r}$. L'équation logistique a donc deux points fixes : $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{r}$.

Si, comme à la section précédente, x_n est la fraction de la population maximale, le point fixe $x = 0$ est simplement le fait que s'il n'y a pas de bactéries initialement, il n'y en aura pas dans le futur. Dans le cas $r = 1.1$, on retrouve l'état d'équilibre $x = 1/11$ déjà observé.

Il n'est pas toujours possible de trouver algébriquement, comme on vient de le faire pour l'équation logistique, les points fixes. On utilise alors des méthodes numériques comme la méthode de Newton pour estimer les points d'équilibre.

Exemple 5.9.21
On a vu que $p = 1/11$ est un point d'équilibre pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\,x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

où $r = 1.1$. Les orbites que l'on a calculées numériquement semblent indiquer que ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Posons $f(x) = rx(1-x)$. On a que $f'(x) = r(1-2x)$. Ainsi, pour $r = 1.1$ et $x = p = 1/11$, on a

$$f'(p) = 1.1\left(1 - 2\frac{1}{11}\right) = 0.9 \ .$$

Puisque $|f'(p)| < 1$, le point d'équilibre p est asymptotiquement stable. ♣

Remarque 5.9.22
Soit le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les points d'équilibre p où $|f'(p)| = 1$ sont en fait très importants. C'est une des conditions pour obtenir une **bifurcation**. Si on suppose que f dépend d'un paramètre r (comme c'est le cas pour l'équation logistique) et que pour une valeur r_0 de r il existe un point d'équilibre p tel que $|f'(p)| = 1$, alors le comportement du système dynamique discret pour $r < r_0$ peut être très différant du comportement du système dynamique discret pour $r > r_0$ si certaines conditions génériques sont satisfaites.

On vous invite à tracer le graphe en forme de toile d'araignée de l'équation logistique pour des valeurs de r entre 2 et 3, et une condition initiale de votre choix. Répéter la même expérience avec une valeur de r entre 3 et $3.447\ldots$ de votre choix. Qu'arrivera-t-il lorsque r devient plus grand que $3.447\ldots$? Quand $r = 3.839\ldots$?

Lorsque $3 < r < 4$, le point $p = 1 - \frac{1}{r}$ est toujours un point d'équilibre. Par exemple, pour $r = 13/4 = 3.25$, on a le point d'équilibre $p = 9/13 = 0.69230769231$. Pourquoi les orbites ne tendent-elles pas vers ce point d'équilibre ?

Nous répondrons à certaines de ces questions à la prochaine section.

Le comportement des orbites de l'équation logistique lorsque r varie est fascinant. On retrouve un grand nombre de livres sur ce sujet. ♠

Démonstration (**Théorème 5.9.20**)
La démonstration qu'un point fixe p pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$ et instable si $|f'(p)| > 1$ repose sur le théorème de la moyenne. Nous démontrons seulement que $|f'(p)| < 1$ implique la stabilité asymptotique du point d'équilibre p et laissons aux lecteurs le soin de démontrer que $|f'(p)| > 1$ implique l'instabilité du point d'équilibre p.

On suppose que f est une fonction différentiable dont la dérivée f' est une fonction continue. Puisque $|f'(p)|$ est strictement plus petit que 1 et f' est continue, on peut trouver une constante K plus grande ou égale à $|f'(p)|$ et plus petite que 1, et une petite valeur δ telle que $|f'(x)| \leq K < 1$ pour tout x dans l'intervalle $I =]p - \delta, p + \delta[$ qui contient p.

i) Si $x_0 \in I$, alors $x_n \in I$ pour tout n.

En effet, supposons que x_n soit dans I, alors $|x_n - p| < \delta$. Grâce au théorème de la moyenne, il existe ζ entre p et x_n tel que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta)(x_n - p)$. On note que $\zeta \in I$ car ζ est entre x_n et p. Ainsi

$$|x_{n+1} - p| = |f(x_n) - f(p)| = |f'(\zeta)(x_n - p)| \leq K|x_n - p| < |x_n - p| < \delta$$

car $K < 1$. Il s'en suit que x_{n+1} est aussi dans l'intervalle I. Par induction, $x_n \in I$ pour tout n.

ii) Encore grâce au théorème de la moyenne, ils existent ζ_n entre x_n et p tels que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta_n)(x_n - p)$ avec $\zeta_n \in I$ car ζ_n est entre x_n et p. On a donc $|f'(\zeta_n)| \leq K$ pour tout n. Ainsi

$$|x_n - p| = |f(x_{n-1}) - f(p)| = |f'(\zeta_{n-1})(x_{n-1} - p)|$$

$$\begin{aligned}&\le K|x_{n-1}-p| = K|f(x_{n-2})-f(p)| = K|f'(\zeta_{n-2})(x_{n-2}-p)|\\&\le K^2|x_{n-2}-p|\\&\dots\\&\le K^n|x_0-p|\ .\end{aligned}$$

iii) On a donc que

$$|x_n-p| \le K^n|x_0-p| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty$$

car

$$\lim_{n\to\infty} K^n = 0$$

pour $0<K<1$.

Donc, toutes les orbites avec la condition initiale x_0 dans I tendent vers p. ∎

Exemple 5.9.23
Cet exemple provient de [1].

Le nombre de poissons d'une certaine espèce est gouverné par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = rp_n(1-p_n) - hp_n \quad \text{pour} \quad 0<h<r-1<2 \tag{5.9.5}$$

où p_n est le nombre de poissons au début de la n^e saison de pêche divisé par le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, r est un facteur de croissance pour cette espèce de poissons et h est un facteur d'efficacité des pêcheurs. La valeur h est déterminée par le nombre de permis de pêche, l'équipement utilisé par les pêcheurs, etc. Le terme $-h\,p_n$ dans l'équation (5.9.5) représente la récolte à chaque année et a un effet négatif sur la croissance de la population de poissons.

Lors d'une saison de pêche, si h augmente, alors le nombre de poissons capturés par les pêcheurs augmentera. Si on permet une plus grande valeur pour h lors d'une saison de pêche, alors on augmente l'effet négatif sur la croissance de la population. Si h est trop grand, on risque de provoquer une diminution de la population de poissons à long terme et de mettre ainsi en danger la survie de cette espèce. À long terme, il n'y aurait plus de poissons à capturer.

Le but est donc de choisir h pour maximiser le nombre de poissons capturés lors des futures saisons de pêche. En d'autres mots, on veut maximiser la récolte de poissons à long terme. Cette récolte est définie comme étant le produit du facteur d'efficacité h des pêcheurs avec l'état d'équilibre stable p_h de la population de poissons associé à cette valeur h. En termes mathématiques, on veut maximiser $R(h) = h\,p_h$.

La fonction itérative pour le système dynamique discret (5.9.5) est $f(p) = rp(1-p) - hp$. Les points d'équilibre du système dynamique discret (5.9.5) sont donnés par les solutions de $p = f(p)$. On trouve $p_o = 0$ et $p_h = (r-h-1)/r$. Le point d'équilibre p_h est positif car on assume $h < r-1$.

On utilise le Théorème 5.9.20 pour déterminer si le point d'équilibre p_h est stable. On a que $f'(p) = r - h - 2rp$. Donc, $|f'(p_h)| = |2 + h - r|$. Pour que le point d'équilibre p_h soit stable, on doit donc exiger que

$$|2 + h - r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 + h - r < 1 \Leftrightarrow -3 + r < h < r - 1 \ .$$

C'est effectivement le cas pour $0 \leq h < r - 1 < 2$. Notez que $|f'(p_o)| = |r - h| > 1$ pour $h < r - 1$ et donc le point d'équilibre p_0 est instable.

On considère $R(h) = h\, p_h = h(r - h - 1)/r$. On a $R'(h) = (r - 2h - 1)/r$ et le seul point critique est $H = (r - 1)/2$. On résume dans le tableau suivant l'information que l'on a au sujet de la fonction R.

h	0	$0 < h < (r-1)/2$	$(r-1)/2$	$(r-1)/2 < h < r-1$	$r-1$
$R(h)$	0	$+$	$(r-1)^2/(4r)$	$+$	0
$R'(h)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
			max. local		

Donc la récolte $R(h)$ est maximale pour $h = H$. L'état d'équilibre de la population de poissons pour $h = H$ est alors $p_H = (r-1)/(2r)$. Comme on a démontré, le point d'équilibre p_H est stable et donc $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers ce point d'équilibre. La récolte maximale de poissons à long terme sera $R(H) = H\, p_H = (r - 1)^2/(4r)$. ♣

5.9.3 Étude des orbites périodiques

Exemple 5.9.24
Pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\, x_n(1 - x_i) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

avec $r = 3.2$, quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que l'on choisit, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne tend pas vers un point d'équilibre comme on peut le constater avec les données dans la colonne de gauche du tableau 5.3.

On remarque que

$$x_n = \begin{cases} 0.5130445095\ldots & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0.7994554905\ldots & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

pour n assez grand. L'orbite oscille entre ces deux valeurs. ♣

Exemple 5.9.25
Comme à l'exemple précédent, pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r\, x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

avec $r = 3.47$, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne tend pas vers un point d'équilibre quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que l'on choisit.

n	x_n
0	0.40000000000 ...
$\vdots$	$\vdots$
50001	0.79945549047 ...
50002	0.51304450953 ...
50003	0.79945549047 ...
50004	0.51304450953 ...
50005	0.79945549047 ...
50006	0.51304450953 ...
50007	0.79945549047 ...
50008	0.51304450953 ...
50009	0.79945549047 ...
50010	0.51304450953 ...

n	x_n
0	0.40000000000 ...
$\vdots$	$\vdots$
50001	0.83479261718 ...
50002	0.47856124509 ...
50003	0.86590511786 ...
50004	0.40291365318 ...
50005	0.83479261718 ...
50006	0.47856124509 ...
50007	0.86590511786 ...
50008	0.40291365318 ...
50009	0.83479261718 ...
50010	0.47856124509 ...

TABLE 5.3 – Deux orbites de l'équation logistique avec la condition initiale $x_0 = 0.4$. Dans le tableau de gauche, $r = 3.2$ alors que dans le tableau de droite $r = 3.47\ldots$.

Par contre, des données dans la colonne de droite du Tableau 5.3, on peut conclure que

$$x_n = \begin{cases} 0.40291365318\ldots & \text{si} \quad n = 4k \\ 0.83479261718\ldots & \text{si} \quad n = 4k+1 \\ 0.47856124509\ldots & \text{si} \quad n = 4k+2 \\ 0.86590511786\ldots & \text{si} \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

pour k assez grand. L'orbite est la répétition de ces quatre valeurs, toujours dans le même ordre. ♣

Les deux exemples précédents justifient la définition suivante.

Définiton 5.9.26
Soit $f : X \to X$ avec $X \subset \mathbb{R}$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une orbite du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

pour laquelle il existe un entier positif k tel que $x_n = x_{n+k}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est appelée une **orbite périodique** ou **solution périodique**. Les points de cette orbite sont appelés des **points périodiques** pour f.

Si k est le plus petit entier positif tel que $x_n = x_{n+k}$, alors k est la **période** de l'orbite.

Exemple 5.9.27
À l'exemple 5.9.24, $p = 0.5130445095\ldots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 2. Voir figure 5.40.

À l'exemple 5.9.25, $p = 0.40291365318\ldots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 4. Voir figure 5.41. ♣

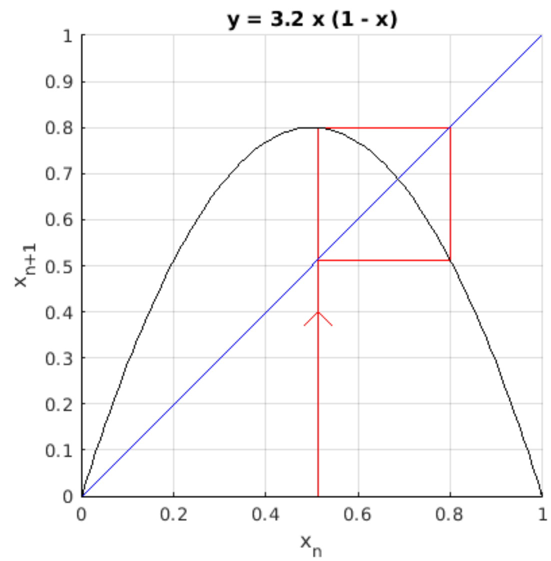


FIGURE 5.40 – Orbite périodique de période 2 pour l'équation logistique avec $r = 3.2$

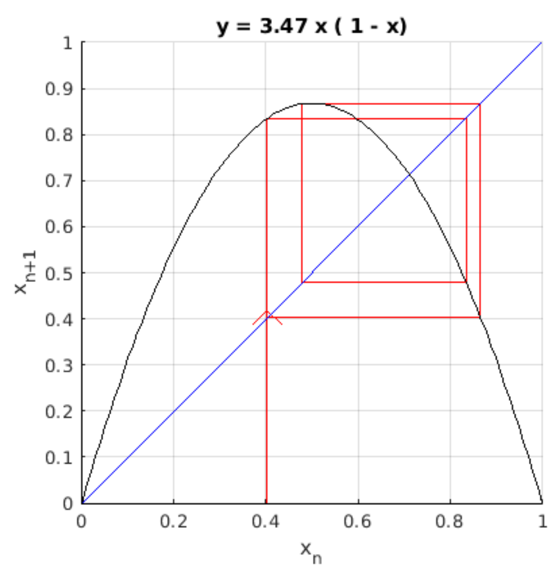


FIGURE 5.41 – Orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$

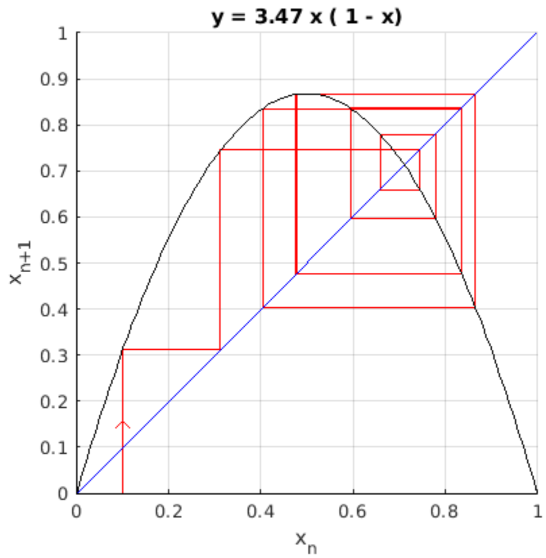


FIGURE 5.42 – Une orbite qui « converge » vers l'orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$. La condition initiale est $x_0 = 0.1$

Dans les deux exemples précédents, quelle que soit la condition initiale x_0, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se comporte de plus en plus comme l'orbite périodique. Voir la figure 5.42. On a donc une notion de stabilité asymptotique pour les solutions périodiques.

Définiton 5.9.28
Soit $f : X \to X$ avec $X \subset \mathbb{R}$, et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ une orbite périodique de période k pour le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

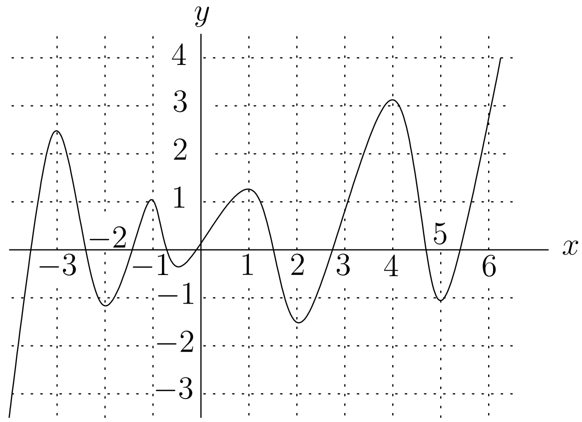
Cette orbite est **asymptotiquement stable** si p, un point quelconque de l'orbite, est un point fixe asymptotiquement stable pour la fonction

$$g = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ copies de } f} \; .$$

Remarque 5.9.29
On invite le lecteur a démontrer que la définition précédente est indépendante du choix du point périodique p de l'orbite. ♠

5.10 Exercices

Question 5.1
Le graphe d'une fonction f est donné dans la figure suivante.



a) Donnez les point critiques.

b) Donnez les valeurs de x où $f'(x) > 0$.

c) Donnez les valeurs de x où $f'(x) < 0$.

d) Donnez les valeurs de x où $f''(x) > 0$.

e) Donnez les valeurs de x où $f''(x) < 0$.

Question 5.2

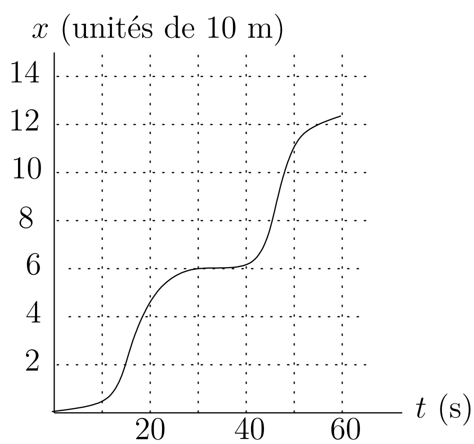
Dessinez le graphe d'une fonction qui possède les propriétés suivantes :

a) Une fonction positive qui possède une dérivée strictement croissante.

b) Une fonction avec une dérivée négative et strictement croissante.

Question 5.3

Le graphe suivant représente la position x d'une voiture dans les montagnes russes (i.e. « roller coaster ») en fonction du temps. À quelles moments la voiture se déplace-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture accélère-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture décélère-t-elle le plus rapidement ? Expliquez votre réponse.



Question 5.4

Calculez la dérivée première et seconde des fonctions suivantes.

a) $h(y) = y^{10} - y^9$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x}{2x}$ **c)** $f(x) = x^2 e^x$

d) $f(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$ **e)** $g(z) = (z+4)\ln(z)$ **f)** $F(w) = e^w \ln(w)$

g) $f(x) = \ln(x^7)$ **h)** $f(z) = \dfrac{1+e^{-z}}{1+e^z}$ **i)** $F(y) = \dfrac{\ln(y)}{e^y}$

j) $f(x) = 1 + x^{4/5}$

Question 5.5
Si $H(\theta) = \theta \sin(\theta)$, évaluez $H'(\theta)$ et $H''(\theta)$.

Question 5.6
Le flot d'un liquide dans une conduite a un mouvement périodique décrit par

$$F(t) = 212.0 \cos\left(\frac{2\pi t}{10}\right)$$

où F est mesuré en litres par seconde et t est le temps en seconde.

a) Trouvez le flot moyen et son amplitude.

b) Trouvez la période du flot et la fréquence du flot..

c) À quel moment le flot F est-il de 0 litre par seconde ? Qu'arrive-t-il à ce moment ?

d) Trouvez le taux instantané de changement du flot F ? Que se passe-t-il lorsque ce taux instantané de changement est 0 ? Quel est le flot à ce moment ?

Question 5.7
Un animal passe de 4 kg à 60 kg en 14 ans. Si on suppose que la masse de l'animal est une fonction différentiable par rapport au temps, pourquoi peut-on dire que le taux de croissance (instantané) a été de 4 kg/année à un moment durant les 14 années ?

Question 5.8
Au départ, une voiture se déplace à 60 km/h. Après un certain temps, elle ralentit jusqu'à 20 km/h. Finalement, elle termine son trajet une heure plus tard à une vitesse de 50 km/h. On sait que la vitesse moyenne de la voiture pour le trajet a été de 40 km/h.

a) Tracez un graphe de la position de la voiture en fonction du temps pour la durée du trajet.

b) Quelle information peut-on obtenir du théorème de la moyenne sur la vitesse de la voiture ?

c) Quelle information peut-on obtenir du théorème des valeurs intermédiaires sur la vitesse de la voiture ?

Question 5.9
La position vertical d'un objet à partir du sol est décrite par la fonction $p(t) = -5.2t^2 - 2t + 50$. On suppose que la direction positive est vers le haut. Cette équation n'est pas valide sur la terre mais sur une planète plus lourde que la terre. La position est donnée en mètres et le temps en secondes.

a) Trouvez la vélocité et l'accélération de l'objet en fonction du temps.

b) Tracez le graphe de la position en fonction du temps à l'aide des résultats en (**a**).

c) Si l'objet part du haut d'une tour, quelle est la hauteur de la tour ? Dans quelle direction et à quelle vitesse a-t-on lancé (si on a lancé) l'objet, vers le haut ou vers le bas ? Quelle est l'accélération dû à la gravité sur cette planète ?

Question 5.10
On laisse tomber un objet d'une hauteur de 100 m sur Jupiter. On assume qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88$ m/s^2. Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol ? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol ?

Question 5.11
Sur Jupiter, on lance un objet vers le haut à une vitesse de 10 m/s à partir d'une hauteur de 100 m. On assume qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88$ m/s^2. Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet atteigne sa plus grande distance du sol ? Quelle est la hauteur de l'objet à ce moment ? Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol ? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol ?

Question 5.12
Dans son nouveau programme d'exploration des objets célestes, la NASA utilise des sondes spatiales inhabitées. Une expérience conduite par une sonde se trouvant à 100 m au dessus de la lune Deimos de mars consistait à lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s pour analyser sa trajectoire. L'accélération dû à la gravité est de 2.15×10^{-3} m/s^2 sur cette lune.

a) Trouvez la vélocité et la position de l'objet en fonction du temps.

b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?

c) Combien de temps faut-il à l'objet pour revenir à la hauteur de départ ? Quelle est la vélocité de l'objet à ce moment ?

d) Combien de temps faut-il à l'objet pour atteindre le sol de la lune ? Quelle est la vélocité de l'objet à ce moment ?

e) Tracez le graphe de la vélocité et de la position de l'objet en fonction du temps.

Question 5.13
Une quantité $T(t)$ au temps t est donnée par le produit de deux quantités : $p(t) = 2 \times 10^6 + 10^3 t^2$ et $M(t) = 80 - 0.5t$.

a) Donnez T en fonction du temps.

b) Calculez la dérivée de T en fonction du temps.

c) Quelle est la valeur de T au moment où $T'(t) = 0$? Quelle est la valeur de p à ce moment ? Quelle est la valeur de M à ce moment ?

Question 5.14
Le volume de déchets au temps t produit par deux villes est donnée par $V_a(t) = t^2 - 3t + 16$ pour la ville A et $V_b(t) = 20 + 3t$ pour la ville B. Le volume est mesuré en m^3 et le temps t est mesuré en années. Si les déchets contiennent $\rho(t) = 1.2 - 0.1t$ g/m^3 d'un certain produit toxique au temps t, répondre aux questions suivantes :

a) Exprimez la masse du produit toxique en fonction du temps.

b) Exprimez le taux de variation de la masse en fonction du temps.

c) Tracez le graphe de la masse en fonction du temps pour $t \geq 0$. Est-ce que les efforts des deux villes d'éliminer le produit toxique de leurs déchets sont encourageants au départ ?

Question 5.15 🌲
Le nombre de bactéries dans un milieu riche en substances nutritives est décrit par

$$N(t) = 5000 + \frac{30000\,t}{100 + t^2}$$

où t est le temps. Trouvez le nombre maximal de bactéries que l'on pourra observer (i.e. trouvez le maximum absolu pour $t \geq 0$).

Question 5.16 🌲
La masse d'une culture en fonction du temps est donnée par $M(t) = 1 + t^2$ et le volume en fonction du temps est donné par $V(t) = 1 + t$. La masse est mesurée en grammes, le volume en cm^3 et le temps en jours.

a) Exprimez la densité en fonction du temps.

b) Calculez la dérivée de la densité.

c) Pour quelles valeurs de t a-t-on que la densité est strictement croissante ?

d) Tracez le graphe de la densité en fonction du temps.

Question 5.17 🌲
En l'absence d'influences externes, la croissance annuelle d'une population dépend seulement de la production annuelle moyenne par individu. Si, pour une population de p individus, la production annuelle moyenne par individu est donnée par $f(p) = 2\left(1 - \dfrac{p}{1000}\right)$, répondez aux questions suivantes.

a) Exprimez la taille T de la population (i.e. nombre d'individus) après un an en fonction de la taille de la population au début de l'année.

b) Calculez la dérivée de T par rapport à la population initiale p.

c) Tracez le graphe de T pour $0 < p < 1000$.

Question 5.18
Soit f une fonction continue qui satisfait :
a) $f'(x) > 0$ si $-2 < x < 1$,
b) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 1$,
c) $f'(x) < 0$ si $x > 1$ ou $x < -2$, et
d) $f(x) > 0$ pour tout x.
Tracez (de façon approximative) le graphe de cette fonction. Expliquez en une phrase le sens graphique des énoncés.

Question 5.19 🌲
On considère une espèce d'oiseaux dont le rapport P du nombre moyen de poussins qui survivent en fonction du nombre x d'oeufs pondus est donné par la fonction $P(x) = 1/(1 +$

$0.5x^2$). Le nombre total de poussins qui survivent en fonction du nombre d'oeufs pondus est donc donné par $S(x) = x\,P(x)$. Trouvez le nombre de poussins qui survivent si un oiseau de cette espèce pond 5, 10 et 20 oeufs. Tracez le graphe de S. Quelle est la meilleure stratégie pour cette espèce d'oiseaux ? C'est-à-dire, combien d'oeufs devrait pondre un oiseau de cette espèce pour avoir le plus grand nombre possible de poussins qui survivent.

Dans ce problème, il faut comprendre que les valeurs de S sont des moyennes pour l'espèce d'oiseaux. C'est pour cela que S peut être un nombre réel ; S n'est pas obligé d'être un entier. Un oiseau ne peut pas avoir 2.5 poussins mais une population peut avoir en moyenne 2.5 poussins par individu.

Question 5.20
Soit $f(x) = x\sqrt{5-x}$ pour $x < 5$. Répondre aux questions suivantes :

i) Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
ii) Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
iii) Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
iv) Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f.

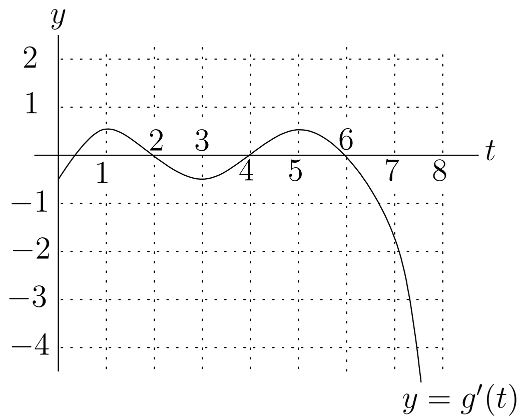
Question 5.21
Soit $f(x) = x - 2\sin(x)$ pour $0 < x < 3\pi$. Répondre aux questions suivantes :

i) Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
ii) Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
iii) Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
iv) Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f.

Question 5.22
Tracez un graphe de $y = f(x)$ en utilisant les données suivantes.

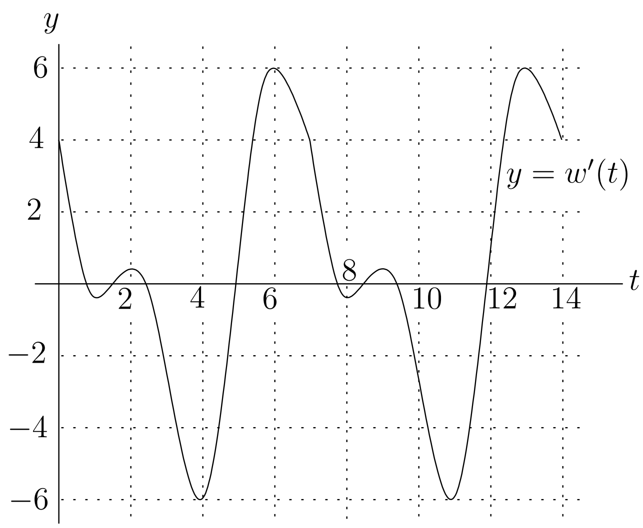
x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	x_4	$x > x_4$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

Question 5.23
Le graphe de g' est donné dans la figure suivante



Si $g(0) = 2$, tracez un graphe possible pour g. Soyez aussi précis que possible.

Question 5.24
Utilisez le graphe du taux de variation instantanée de la fonction w qui se trouve à la figure suivante pour tracer le graphe de la fonction w si $w(0) = 1$.



Question 5.25
Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

a) $h(x) = x^3 - 3x$

b) $h(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$

c) $f(x) = x + 4/x^2$

d) $f(x) = (1 - x)e^x$

e) $g(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

f) $F(z) = z^3/e^z$

g) $T(t) = (1 - t^2)e^t \ , \ -1 \leq t \leq 1$

h) $G(x) = \sqrt{x}\, e^{-x} \ , \ x \geq 0$

i) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^3}$

Question 5.26
Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

a) $y = \sin^2(x) - 2\cos(x)$
b) $f(\theta) = \theta + 3\cos(\theta)\ ,\ 0 \leq \theta \leq 4\pi$
c) $h(t) = e^{-t}\sin(t)\ ,\ 0 \leq \theta \leq 4\pi$

Question 5.27
Les questions suivantes font référence à une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b.

b) Tracez un graphe pour f si f est une fonction différentiable qui a un maximum absolu à $x = a$, un minimum absolu à $x = b$ et aucun point critique. Décrire en une phrase cette fonction.

c) Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b, et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ où la dérivée existe.

Question 5.28
Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le maximum absolu et le minimum absolu sur l'intervalle donné.

a) $f(x) = 2 + xe^{-x}\ ,\ 0.5 \leq x \leq 2$
b) $f(x) = x^3 - 3x\ ,\ -2 \leq c \leq 2$
c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}\ ,\ -2 \leq x \leq 0$
d) $f(x) = 5x(1 - x)(2 - x) - 1\ ,\ 0 \leq x \leq 1$

Question 5.29
Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de $F(x) = |1 - x|$ pour $-2 \leq x \leq 3$.

Question 5.30
Tracez le graphe de $g(y) = y/(1 + y^2)$ pour $0 \leq y \leq 2$ a l'aide de la dérivée premières et de la dérivée deuxième de g.

a) Donnez les points où on a une maximum ou minimum local.

b) Donnez les points où on a un maximum absolu et donnez ce maximum.

c) De même, donnez les points où on a un minimum absolu et donnez ce minimum.

Question 5.31
Trouvez le point de la droite $y = 4x + 7$ qui est le plus près de l'origine.

Question 5.32
L'aire d'un rectangle dont les côtés sont de longueurs x et y est $A = xy$. Le périmètre de ce rectangle est $P = 2x + 2y$.

a) Minimisez P si A est fixe.

b) Maximisez A si P est fixe.

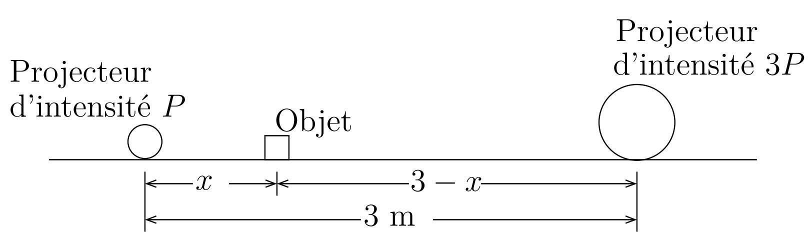
Question 5.33
Trouvez les dimensions x et y de la section transversale d'une poutre de bois découpée d'un tronc d'arbre (circulaire) de 30 cm de rayon pour que la section transversale soit d'aire maximale.
Suggestion : cela revient à trouver le rectangle d'aire maximale qui peut être inscrit dans un cercle ayant un diamètre de 30 cm.

Question 5.34
Pour augmenter leur chance de survie, les animaux tentent de maximiser le rapport entre la quantité de nourriture qu'ils récoltent et le risque pour acquérir cette nourriture. Par exemple, les fleurs qui produisent une grande quantité de nectar permettent aux abeilles de récolter une grande quantité de nectar mais ces fleurs attirent aussi d'autres animaux qui sont des prédateurs pour les abeilles. Chaque espèce de fleurs produit une quantité (moyenne) q de nectar (en grammes). Si, pour une espèce de fleurs qui produit q g de nectar, $P(q)$ est le nombre de prédateurs pour les abeilles qui sont attirés par ces fleurs, alors les abeilles doivent maximiser $\dfrac{q}{P(q)}$ pour déterminer quelle espèce de fleurs elles doivent privilégier. Si $P(q) = 1 + q^2$, trouvez la valeur de q qui maximise le rapport $\dfrac{q}{P(q)}$.

Question 5.35
Un cylindre circulaire droit est inscrit dans une sphère de rayon r. Trouvez l'aire maximal que peut avoir la surface du cylindre.

Note : Un problème un peu plus facile (que vous devriez résoudre) est de trouver le cylindre de volume maximal qui peut être inscrit dans la sphère de rayon r.

Question 5.36
Un objet est éclairé par deux projecteurs. La distance entre les projecteurs est de 3 m et l'objet est entre les deux projecteurs. Un des projecteurs est de puissance P W alors que l'autre est trois fois plus puissant.



Déterminez la position de l'objet pour que l'illumination sur l'objet soit maximale.

Il faut savoir que l'illumination d'une source lumineuse sur un objet est proportionnel à la puissance de la source lumineuse divisée par le carré de la distance entre la source lumineuse et l'objet.

Question 5.37
On considère le problème des abeilles qui butinent que l'on retrouve à l'exemple 5.3.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \dfrac{t}{0.5+t}$ et si

$t = T = 1$ est le temps optimal pour maximiser la récolte de nectar durant une journée, déterminez le temps τ que prend l'abeille pour se rendre d'une fleur à une autre fleur ? Illustrez τ à l'aide d'un graphe comme à la figure 5.17 des notes.

Question 5.38

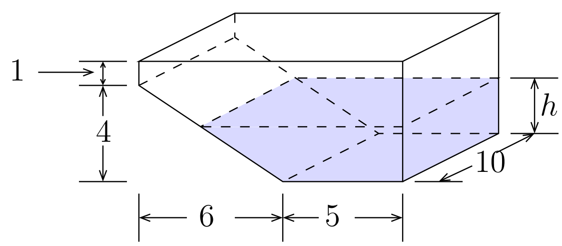
On considère le problème des abeilles qui butinent que l'on retrouve à l'exemple 5.3.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $\tau = 1$, déterminez le temps optimal $t = T$ pour maximiser la récolte de nectar. Il faut répéter l'exemple 5.3.9 avec cette nouvelle fonction F pour trouver T. Illustrez la règle des valeurs marginales comme il est fait à la figure 5.17.

Question 5.39

On tire un bateau vers le quai avec une corde attachée à la proue du bateau et qui passe par une poulie placée au bord du quai. Le quai a 2 m de haut. Si la corde est tirée à un vitesse constante de 0.5 m/s, à quelle vitesse le bateau s'approche-t-il du quai lorsqu'il est à 6 m du quai ? Est-ce que la vitesse à laquelle le bateau approche le quai est constante ?

Question 5.40

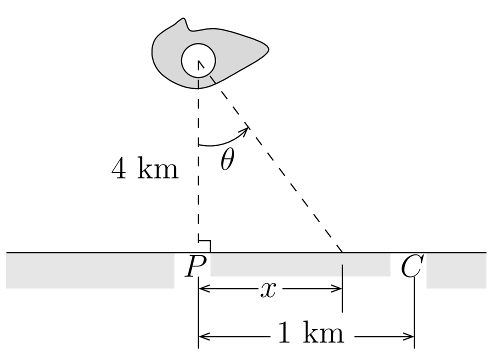
On considère la piscine suivante



Les dimensions de la piscine sont en mètres. On remplit cette piscine à l'aide d'une pompe dont le débit est de 0.1 m^3/min. À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il lorsque la profondeur de l'eau à l'endroit le plus profond est de 3 m ?

Question 5.41

La lampe d'un phare situé sur une petite île fait 5 révolutions par minute. Le point P de la côte qui est le plus près de l'île est à une distance de 4 km de celle-ci.



À quelle vitesse (tangentielle) le rayon lumineux du phare balaye-t-il la côte au point C qui se trouve à 1 km du point P.

Question 5.42 🔧
Utilisez la dérivée implicite pour calculer la dérivée de la fonction y qui est donnée implicitement dans les équations suivantes :

a) $x^2y + xy^2 = 3x$ **b)** $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
c) $xy^4 + x^2y = x + 3y$

Question 5.43 🌲 🔧
Utilisez une approximation linéaire pour estimer chacune des valeurs suivantes :

a) 1.002^{2001} **b)** $\sin(0.02)$

Question 5.44 🌲 🔧
Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

a) Trouvez l'approximation linéaire p_1 du numérateur de f au voisinage de $x = 1$.

b) Trouvez l'approximation linéaire p_2 du dénominateur de f au voisinage de $x = 1$.

c) Montrez que
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \ .$$

Note : L'idée de remplacer le numérateur et le dénominateur par des polynômes de Taylor est à la base de la démonstration de la règle de l'Hospital.

Question 5.45 🌲 🔧
Donnez une approximation linéaire de la fonction $y = f(x) = x^{-3}$ au voisinage de $x = 1$.

Il est possible d'utiliser une polynôme de degré deux pour estimer la fonction f au voisinage de $x = 1$. Pour ce faire, on choisit $p_2(x) = a+bx+cx^2$ tel que $p_2(1) = f(1)$, $p_2'(1) = f'(1)$ et $p_2''(1) = f''(1)$. Trouvez p_2.

Dessinez (à l'aide d'un logiciel) le graphe de f, le graphe de l'approximation linéaire et le graphe de p_2 près de $x = 1$. Est-ce que p_2 est une meilleure approximation de f que l'approximation linéaire ?

Question 5.46 🌲 🔧
Utilisez une approximation quadratique (i.e. un polynôme de Taylor de degré 2) pour estimer chacune des valeurs suivantes :

a) 1.002^{2001} **b)** $\sin(0.02)$ **c)** $\cos(-0.02)$

Question 5.47 🌲 🔧
Soit $f(x) = x^2$. Utilisez une approximation linéaire pour estimer la valeur de la fonction au point $x = 1.1$. Faite de même au point $x = 0.9$. Tracez le graphe de la fonction et le graphe de l'approximation linéaire considérée. Est-ce que l'approximation linéaire surestime

ou sous-estime la valeur exacte ? Expliquez votre réponse à la question précédente à partir des graphes que vous avez tracés.

Question 5.48
Utilisez une approximation linéaire (i.e. un polynôme de Taylor de degré un) pour estimer $\sqrt{1.1}$ et $\sqrt{0.9}$, Comparez avec les valeurs exactes. Pour chaque approximation, déterminez si on a une surestimation ou une sous-estimation. Expliquez à l'aide du graphe de $f(x) = \sqrt{x}$ pourquoi on a surestimation ou sous-estimation.

Question 5.49
Donnez le polynôme de Taylor de degré trois de $h(x) = \ln(x)$ au voisinage de $x = 1$.

Question 5.50
Donnez le polynôme de Taylor de degré trois de $p(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ au voisinage de $x = 0$. Aucun calcul est nécessaire si vous avez bien compris la théorie.

Question 5.51
Soit $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$. Utilisez un polynôme de Taylor de degré 3 pour estimer la valeur de $f(3.1)$.

Question 5.52
Soit $p(x) = 7x^9 - 8x^6 - 5x^3 + 2x^2 - 8$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\dfrac{\mathrm{d}^9 p}{\mathrm{d}x^9}(x) > 0$? Justifiez votre réponse.

Question 5.53
Trouver le polynôme de Taylor p_k de degré k de $\cos(x)$ près de l'origine tel que $p_k(0.5)$ soit une approximation de $\cos(0.5)$ avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-6}. Quelle est la valeur de l'approximation donnée par votre polynôme de Taylor ? Comparez avec la valeur exacte.

Question 5.54
Donnez le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = xe^{x^2-2}$ pour x près de l'origine. Donnez une borne supérieure pour l'erreur de troncature si l'on utilise ce polynôme de Taylor pour estimer $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 0.2]$.

Question 5.55
Soit

$$b(t) = \frac{1}{1+t} \ .$$

a) Utilisez une approximation linéaire au point $t = 0$ pour estimer $b(1.1)$.

b) Utilisez une approximation linéaire au point $t = 1$ pour estimer $b(1.1)$.

c) Utilisez la sécante qui passe par les points $(0, b(0))$ et $(1, b(1))$ pour estimer $b(1.1)$.

d) Tracez le graphe des tangentes et de la sécante qui représentent les méthodes d'approximations qui ont été utilisées précédemment.

e) Laquelle des méthodes donne la meilleure approximation de $h(1,1)$? Pourquoi ?

Question 5.56

Utilisez un polynôme de Taylor de degré suffisamment grand pour calculer la limite suivante :

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h}{h^2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h-h^2/2}{h^3}$

c) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\cos\theta}{\theta-\pi/2}$

Question 5.57 🌲

Utilisez la règle de l'Hospital pour déterminer laquelle des fonctions suivantes tend plus rapidement vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par la droite.

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{e^x-1}\ .$$

Question 5.58 🌲 🔧

Soit $\alpha(t)=\dfrac{5t}{e^{2t}}$. Tracez le graphe de cette fonction. Utilisez la règle de l'Hospital pour trouver l'asymptote horizontal pour $t>0$.

Question 5.59 🌲

Plusieurs fonctions utilisées pour décrire l'absorption d'un produit sont de la forme

$$\alpha(t)=\frac{A\,r(t)}{k+r(t)}$$

où

1. A et k sont des constantes positives,
2. $r(0)=0$,
3. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} r(t)=\infty$ et
4. $r'(t)>0$ pour $c>0$.

Par exemple, considérons la fonction d'absorption

$$\alpha(t)=\frac{At^2}{k+t^2}\ .$$

a) Déterminez $r(t)$ dans cette fonction.

b) Montrez que $\alpha(t)$ est une fonction strictement croissante pour $t>0$.

c) Utilisez la règle de l'Hospital pour calculer la limite de $\alpha(t)$ lorsque t tend vers plus l'infini.

Question 5.60 🌲

Dans chacune des situations ci-dessous, déterminez la limite de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers la valeur donnée, et laquelle des deux fonctions approche cette limite le plus rapidement.

a) $f(x)=0.1x^{0.5}$, $g(x)=30\ln(x)$ et $x\to\infty$.

b) $f(x)=e^{-2x}$, $g(x)=x^{-2}$ et $x\to\infty$.

c) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\ln(x)$ et $x \to 0^+$.

Question 5.61
Évaluez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1+t+t^2}{1+t}$ **b)** $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1+t}{1+t+t^2}$ **c)** $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{3z}{1+\ln(1+z)}$

d) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{3z}{1+\ln(1+z)}$

Question 5.62
Évaluez les limites suivantes si elles existent.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \csc(5x)\sin(3x)$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\csc(x) - \cot(x))$

Question 5.63
Utilisez la méthode de Newton pour trouver une approximation de la racine réelle positive de

$$x^4 - 20 = 0 \; .$$

Utilisez $x_0 = 2$ et arrêtez lorsque $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$.

Question 5.64
Utilisez la Méthode de Newton pour estimer la valeur de $\sqrt[3]{30}$. Arrêtez après trois itérations. Faite le graphe de f et illustrez la première itération de la Méthode de Newton.

Suggestion : Considérez $f(x) = x^3 - 30 = 0$.

Question 5.65
Utilisez la méthode de Newton pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$ s'il y en a une. Pour ce faire vous devez :

a) vérifiez avec un graphe qu'il y a effectivement une seule solution positive.

b) Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe une solution entre 1 et 2. Cela va vous permettre de choisir la valeur de x_0 qui sera utilisée par la méthode de Newton.

c) Faire au moins trois itérations de la méthode de Newton.

Question 5.66 (Méthode de la sécante)
Dans la formule

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \; ,$$

si on remplace $f'(x_i)$ par $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ (une approximation de $f'(x_i)$ si x_{i-1} est très près de x_i) on obtient la méthode de la sécante

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^{-1} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots \; .$$

Notez qu'il faut initialement choisir deux points, x_0 et x_1, pour pouvoir utiliser la méthode de la sécante alors qu'un seul était nécessaire pour la méthode de Newton.

a) Soit $f(x) = x^2 - 2$ et soit x_i et x_{i+1} deux points à la droite de $\sqrt{2}$. Tracez la sécante qui passe par les points $(x_i, f(x_i)$ et $(x_{i-1}, f(x_{i-1})$ et montrez que l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x donne la formule pour la méthode de la sécante.

b) Utilisez la méthode de la sécante pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$. L'information obtenu à la question 65 pourrait être utile pour choisir les valeurs de x_0 et x_1. Faite au moins trois itérations.

Question 5.67
Le volume (en μm^3) d'un organisme après n heures est donné par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1.5 v_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ v_0 &= 1350 \end{aligned}$$

Combien faut-il d'heures pour que l'organisme atteigne un volume d'au moins 3250 μm^3 ?

Question 5.68
Une population de bactéries satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 2 p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où p_n est le nombre moyen de bactéries par éprouvette n heures après le début de l'expérience.

a) Combien doit-on avoir de bactéries à 9 heures si on veut avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?

a) Combien doit-on avoir de bactéries initialement si on veut avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?

Question 5.69
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5 y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Trouvez la solution de ce système et tracez le graphe de la solution pour $0 \leq i \leq 10$. Tracez le graphe de la fonction itérative. Quelle est la valeur de y_{20} ?

Question 5.70
Un population est gouvernée par le système dynamique discret $b_{i+1} = 0.7 b_i$. Par exemple, b_i est le nombre d'individus après i heures. Si $b_0 = 5.0 \times 10^5$, donnez la formule générale pour la solution b_i du système dynamique discret. Trouvez la valeur de i pour que $b_i \approx 10^5$. Tracez le graphe de b_i.

Question 5.71
On considère deux populations animales qui occupent un même territoire. La première population est décrite par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2.5 x_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \\ x_0 &= 10^2 \end{aligned} \tag{5.10.1}$$

et la deuxième population par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 2y_i \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,\ldots \\ y_0 &= 10^3 \end{aligned} \tag{5.10.2}$$

Déterminez si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers $+\infty$? Si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers plus l'infini, dites laquelle ?

Question 5.72
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 4 - x_i \quad , \quad i = 0,1,2,3,\ldots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Calculez x_1, x_2 et x_3. Donnez une formule pour la solution de ce système.

Question 5.73
Supposons que la hauteur d'un arbre satisfait le système dynamique discret

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= h_i + 1 \quad , \quad i = 0,1,2,3,\ldots \\ h_0 &= 1 \end{aligned}$$

où h_i est la hauteur de l'arbre en mètres i années après de début des mesures. Trouvez la solution de ce système dynamique discret. Quelle est la hauteur de l'arbre après 20 ans ? Est-ce que ce modèle est réaliste ?

Question 5.74
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2x_i + 30 \quad , \quad i = 0,1,2,3,\ldots \\ x_0 &= 10 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Donnez la solution de ce système.

Question 5.75
Les données suivantes représentent le nombre moyen de bactéries après 10 minutes.

Nombre de bactéries

nombre initial	nombre final
1220	1830
1860	2790
1080	1620
1640	2460
1540	2310
1420	?

Si le nombre de bactéries est gouverné par un système dynamique discret de la forme $v_{i+1} = av_i + b$ où v_i est le nombre à tous les 10 minutes, trouvez les valeurs de a et b. Complétez le tableau. Si le nombre initial est $v_0 = 1420$, quel sera le nombre après une heure ? Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.76 🌲

Les données suivantes représentent la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Si la concentration est gouverné par un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = ap_n+b$, trouvez les valeurs de a et b. Tracez le graphe de la solution pour $0 \leq n \leq 10$. Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.77 🌲

On considère le système dynamique discret

$$M_{i+1} = 0.75M_i + 2 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5.10.3}$$

a) Trouvez la solution générale de ce système dynamique discret.

a) Trouvez les cinq premières valeurs de l'orbite de $M_0 = 16$.

c) Tracez la graphe de la solution de ce système pour $M_0 = 16$.

d) Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système.

e) Sans itérer le système dynamique discret, trouvez la valeur de M_i pour $i = 60$ lorsque $M_0 = 10$.

Question 5.78 🌲

Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret

$$b_{i+1} = 2b_i - 5 \ .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles le graphe de la fonction itérative est au-dessus de la droite $y = x$ et celles pour lesquelles le graphe est en dessous de la droite $y = x$

Question 5.79 🌲

Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Prenez soin de bien identifier les axes.

Question 5.80 🌲

Considérez le système dynamique discret

$$w_{i+1} = -0.5w_i + 3 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$w_0 = 0.2$$

Quelle est la fonction itérative ? Trouvez le point d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.81

Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= 0.5 z_i + 8 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ z_0 &= 2 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Trouvez le ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.82

Revenons au problème de médication de la question 76 où on vous a demandé de trouver un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = a p_n + b$ associé aux donnés du tableau des concentrations d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Trouvez le point ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.83

On considère une population de bactéries qui double à toutes les heures mais à laquelle on enlève 10^6 bactéries à la fin de chaque heure. Si initialement on a 3×10^6 bactéries, donnez le système dynamique discret associé à ce problème. Trouvez la solution et tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Quel sera le système dynamique discret si on enlève 10^6 bactéries au début de chaque heure ? Répondre aux mêmes questions que précédemment pour ce nouveau système dynamique. Aurons-nous le même graphe en forme de toile d'araignée que pour le système dynamique discret précédent ?

Question 5.84

Un médicament est administré à un patient à tous les jours. Les doses de ce médicament sont données dans le tableau suivant :

jour	0	1	2	3
Médicament (mg/l)	0	2	3.2	3.92

Si on sait que le système dynamique discret est donné par une fonction itérative de la forme $x_{i+1} = m x_i + b$, trouvez cette fonction et le système dynamique discret qui si rapporte.

Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système dynamique discret et tracez le graphe en forme de toile d'araignée associé à la condition initiale donnée dans le tableau ci-dessus. Quelle est le point d'équilibre de ce système ?

Question 5.85 ♣
On considère les système dynamique discret

$$x_{n+1} = 0.9x_n + 8 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Trouvez le point d'équilibre de ce système et déterminez sa stabilité de deux façons.

1. Avec le graphe en forme de toile d'araignée.
2. Sans le graphe en forme de toile d'araignée.

Question 5.86 ♣
Considérons le système dynamique discret $y_{n+1} = 1 - 1.5(y_n - 1)$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

a) Trouvez les points d'équilibre.

b) Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.

c) Tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour une orbite du système dynamique discret.

d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre pour les systèmes dynamiques discrets.

Question 5.87 ♣
Donnez la fonction itérative du système dynamique discret $x_{i+1} = x_i^2 + 2$ et évaluez cette fonction à $x = 0$, $x = 2$ et $x = 4$. On note que cette fonction itérative n'est pas linéaire.

Question 5.88 ♣
Tracez le graphe de la fonction itérative $f(x) = e^{-x}$ pour $0 \leq x \leq 2$ et déterminez s'il y a au moins un point d'équilibre du système dynamique discret associé à cette fonction itérative.

Question 5.89 ♣
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

où $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Calculez les valeurs de x_1, x_2, x_3, ... Trouvez la solution générale.

Question 5.90 ♣
Tracez le graphe de la fonction itérative

$$f(y) = y^2 - 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2 \ .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre.

Question 5.91 ♣
Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que le système dynamique

discret $x_{i+1} = \cos(x_i)$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ a un point d'équilibre.

Question 5.92
Trouvez si possible les points d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{x_i - 1} \quad , \quad x_i > 1\ .$$

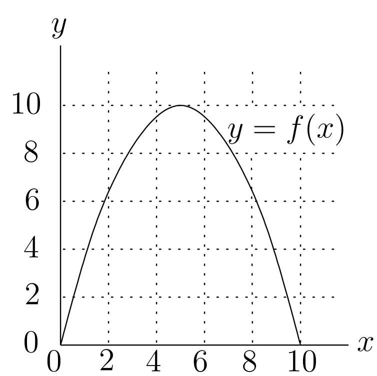
Notez que la fonction itérative de ce système dynamique discret n'est pas une fonction affine.

Question 5.93
Considérez le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{x_i}{x_i + 1} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.94
Le graphe d'une fonction itérative f est donnée par la figure suivante



Donnez les coordonnées du point d'équilibre (s'il y en a un) du système dynamique discret $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Indiquer sur le graphe de la fonction itérative où se trouve le point d'équilibre ; inclure le graphe de la droite $y = x$ dans votre dessin.

Question 5.95
Considérez le système dynamique discret

$$x_{i+1} = \frac{\alpha x_i}{1 + x_i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

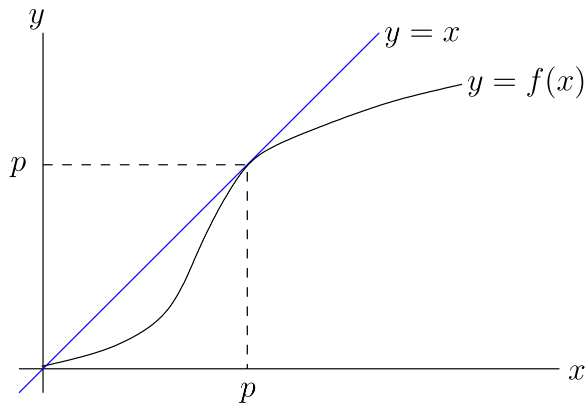
Donnez les valeurs de α pour lesquelles :

a) le système dynamique discret a un seul point d'équilibre.

b) le système dynamique discret a un point d'équilibre négatif.

c) le système dynamique discret a un point d'équilibre positif.

Question 5.96
Le graphe d'une fonction f est donné dans la figure suivante.



On remarque que le graphe de la fonction f est tangente à la droite $y = x$ au point d'équilibre p. De plus, le graphe de la fonction f est en dessous de la droite $y = x$ près de p. Ces deux propriétés sont responsables d'une phénomène très important qui se produit lorsque le graphe de f est légèrement déformé. Le comportement du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ change lorsque le graphe de f est déformé. En particulier, le nombre de points d'équilibre change. Ce phénomène est appelé **bifurcation**.

Si on fait légèrement pivoter le graphe de f autour de l'origine, le nouveau graphe de f satisfait toujours $f(0) = 0$ car l'origine est fixe pour la rotation.

Dans les trois cas suivants, trouvez les points d'équilibre et leur stabilité, et tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour deux orbites du système dynamique discret généré par le nouveau graphe de f.

a) Le graphe de f demeure à sa position initiale.

b) Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens des aiguilles d'une montre.

c) Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Question 5.97 🌲

Soit x_n, le nombre d'individus dans un population n semaines après le début de l'étude de cette population. Si le taux de reproduction (nombre de descendants par habitant) à la n^e semaine est donné par $2.5\, x_n/(1 + x_n^2)$, donnez un système dynamique discret pour décrire cette population. Pour le système dynamique discret que vous avez trouvé :

a) Trouvez les points d'équilibre.

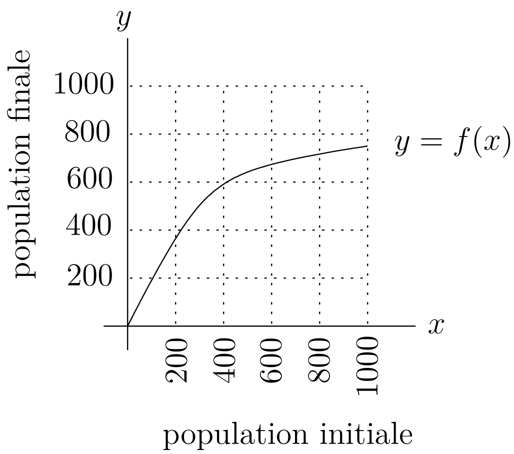
b) Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.

c) Déterminez la stabilité des points d'équilibre.

d) Décrire en quelques mots le comportement de la population selon la condition initiale.

Question 5.98 🌲

Le graphe suivant représente le graphe d'une fonction itérative f. Trouvez le point d'équilibre non-nul et déterminez sa stabilité (sans tracer le graphe en forme de toile d'araignée).



Question 5.99

Dessinez le graphe d'un fonction itérative f ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée qui lui est associé dans chacun des cas suivants.

Soit p le point d'équilibre du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p), et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x < p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x > p$.

b) Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p), et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x > p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x < p$.

Dans chacun des cas, quelle est la pente de la droite tangente au graphe de f au point (p, p) ? Est-ce que la théorie peut être utilisé pour déterminer la stabilité du point d'équilibre ?

Question 5.100

On considère une population de bactéries dans un milieu donné. Suite à une mutation génétique, une nouvelle famille de bactéries est formée à l'intérieur de notre population initiale. Soit p_i la fraction de la population total de bactéries qui appartient à cette nouvelle famille de bactéries i heures après son apparition. p_i satisfait le système dynamique discret

$$p_{i+1} = \frac{r_1 p_i}{r_1 p_i + r_2(1 - p_i)} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

où r_1 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la nouvelle famille de bactéries et r_2 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la famille initiale de bactéries. Si $r_1 = 1.5$ et $r_2 = 2$, utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1$.

Question 5.101

On considère une population dont le taux moyen de reproduction par individu et par heure est donné par $t(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ où x est le nombre d'individus.

a) Si $x = x_n$ est le nombre d'individus par cm^2 après n heures, donnez le système dynamique discret satisfait par x_n.

b) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu.

c) Dessinez le graphe de la fonction itérative ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée.

d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre si possible.

e) décrire en une ou deux phrases le comportement de la population.

Question 5.102
On considère l'équation logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

avec $\mu = 2$. Trouvez le point d'équilibre non-nul $x = p$ de ce système dynamique discret. Quelle est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction itérative au point (p, p) ? Est-ce que le point d'équilibre p est (asymptotiquement) stable ? Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de ce système. Que peut-on dire au sujet de la vitesse de convergence des orbites vers le point d'équilibre p ?

Question 5.103
On considère le système dynamique discret

$$M_{i+1} = M_i - f(M_i)M_i + 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

où M_i est la concentration d'un médicament dans le sang i heures après le début du traitement. $f(M_i)$ est la fraction du médicament qui est absorbée par l'organisme à chaque heure et le terme 1 représente une dose du médicament administrée à toutes les heures.

a) Si $f(M) = \dfrac{M}{2+M}$, on remarque que $M = 2$ est un point d'équilibre pour le système dynamique discret. Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $M = 2$. Est-ce que les orbites oscillent autour du point d'équilibre ?

b) Réponde aux questions en (a) pour la fonction $f(M) = 1.5M^2/(4 + M^2)$.

Question 5.104
On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n^2) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

avec $\mu = 2$.

a) Quelle est la fonction itérative ?

b) Trouvez les points d'équilibre de ce système dynamique discret.

c) Déterminez la stabilité des points d'équilibre.

Question 5.105
On considère le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n^2) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

a) Déterminez les valeur de $\mu \geq 0$ pour que le point d'équilibre $x = 0$ soit (asymptotiquement) stable ? Instable ?

b) Déterminez les valeur de $\mu \geq 0$ pour que le point d'équilibre plus grand que 0 soit (asymptotiquement) stable ? Instable ?

Question 5.106

On considère une espèce végétale sur un territoire donné. Plus la densité est grande, plus les plantes sont petites. Plus une plante est petite, moins grand est le nombre de graines qu'elle produit. On suppose que le nombre moyen N de graines produites chaque année par une plante de taille moyenne S [1] est $N = S - 1$. Si l'espèce produit N graines, alors la taille moyenne des plantes l'année suivante sera $S = 100/N$.

a) Déterminez le nombre de graines produites la deuxième et la troisième année si le nombre de graines produites la première année est $N_0 = 20$.

b) Donnez un système dynamique discret qui décrit le nombre de graines N_i après i années.

c) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).

d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvé en (c) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.

e) Tracez le graphe de la fonction itérative ainsi que le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).

Question 5.107

Le modèle logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \ ,$$

que nous avons vu en classe est un système dynamique discret où le taux de reproduction (i.e. le nombres de descendants par individu) est une fonction strictement décroissante de x_n (i.e. le facteur $r(1 - x_n)$ dans le modèle logistique). Pour le modèle logistique, le taux de reproduction de la population diminue avec l'augmentation de la population. Il ne faut pas oublier que x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Par contre, il y a des modèles où le taux de reproduction augmente avec l'augmentation de la population. Donnez le système dynamique discret associé à la population dont le taux de reproduction est donné par $0.5 + 0.5x_n^2$ où x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

a) Donnez la fonction itérative du système dynamique discret que vous avez trouvé.

b) Trouvez les points d'équilibre avec leur stabilité.

c) Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de quelques orbites.

1. On ne spécifie pas les unités de S mais on pourrait utiliser le volume, la masse, ..., de la plante. Ce n'est pas important pour résoudre le problème

d) Expliquez en quelques mots ce qui peut arriver à la population selon la condition initiale.

Question 5.108 🌲
Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2N_i(1 - N_i) - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter ; donc $0 \leq N_i \leq 1$ pour tout i. Le nombre h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h. Pour qu'elles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?

b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h.

c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?

d) Quelle est cette récolte ?

Question 5.109 🌲
Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{n+1} = 2.5N_n(1 - N_n) - hN_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

où N_n est le nombre d'individus à la n^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter ; donc $0 \leq N_n \leq 1$ pour tout n. h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h. Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?

b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h.

c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?

d) Montrez que le point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c) est (asymptotiquement) stable à l'aide du théorème de stabilité pour les point d'équilibre.

e) Tracez le graphe de la fonction itérative et un graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c).

Question 5.110 🌲
Une population est gouvernée par le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 1.5x_n(1 - x_n) - hx_n$$

où x_n est le nombre d'individus après n semaines et h est un paramètre.

a) Trouvez les points d'équilibre en fonction de h. Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?

b) Quelle est la récolte à long terme en fonction de l'état d'équilibre (non-nul) de la population ?

c) Trouvez l'efficacité h qui donnera la récolte maximale à long terme.

d) Quelle est la récolte maximale à long terme ?

e) Déterminez la stabilité de l'état d'équilibre de la population pour l'efficacité trouvée en (c) ?

Question 5.111
Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = \frac{2.5N_i}{1+N_i} - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter. h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h. Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?

b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h.

c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?

d) Déterminez la stabilité du point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c) à l'aide du théorème de stabilité pour les point d'équilibre.

Question 5.112
Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2.5N_i e^{-N_i} - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année. h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h. Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ a-t-on un point d'équilibre non-négatif ?

b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h.

c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme.

Question 5.113
Une population de proies est décrite par le système dynamique discret

$$x_{i+1} = 1.5\, x_i e^{-x_i} - hx_i \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

où x_i est le nombre de proies après i années et h est un facteur d'efficacité des prédateurs.

a) Trouvez le point d'équilibre $p(h)$ de la population de proies en fonction de h.

b) Donnez la formule $R(h) = hp(h)$ qui représente le nombre de proies capturées par les prédateurs chaque année (appelé la récolte).

c) Utilisez la Méthode de Newton pour trouver la valeur de h qui maximise à long terme la quantité de proies capturées chaque année.

Intégrale 6

6.1 Primitives et intégrales indéfinies

Définiton 6.1.1
Une fonction $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une **primitive** de la fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple 6.1.2
$F(x) = \sin(x)$ est une primitive de $f(x) = \cos(x)$ car $F'(x) = \cos(x) = f(x)$ pour tout x. $F(x) = x^7/7$ est une primitive de $f(x) = x^6$ car $F'(x) = x^6 = f(x)$ pour tout x. $F(x) = \ln|x|$ est une primitive de $f(x) = 1/x$ car $F'(x) = 1/x = f(x)$ pour tout $x \neq 0$. ♣

Si F est une primitive de f alors, quelle que soit la constante C, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$ est aussi une primitive de f car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} C = f(x) + 0 = f(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$. Il y a donc une infinité de primitives de f. On a une différente primitive de f pour chaque valeur de C.

En fait, la différence entre deux primitives de f est toujours une constante. Supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de f et posons $G = F_1 - F_2$. On a

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pour tout $x \in]a, b[$. Donc, G est une fonction constante ; c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $G(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi, $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$.

Remarque 6.1.3
En fait, la justification précédente assume que si $G'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors G est une fonction constante. On utilise l'interprétation de la dérivée comme la pente de la tangente à la courbe pour tirer cette conclusion. Une démonstration rigoureuse fait appel au Théorème des accroissements finis, le théorème 4.4.6.

En effet, soit $x \in]a, b[$ et $c \in]a, b[$. Grâce au Théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe ξ entre x and c (où ξ dépend de x and c) telle que

$$G(x) - G(c) = g'(\xi)(x - c) \quad .$$

Puisque $G'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, on a que $G(x) - G(c) = 0$. Comme ceci est vrai pour $x \in]a, b[$, on a $G(x) = G(c)$ pour tout $x \in]a, b[$. ♠

Définiton 6.1.4
L'intégrale indéfinie d'une fonction f est la famille de primitives pour cette fonction. On dénote l'intégrale indéfinie par $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi, si F est une primitive de f, on a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole $\mathrm{d}x$ indique que la variable d'intégration est x.

Le symbole $\mathrm{d}x$ n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x. Aucune manipulation algébrique avec $\mathrm{d}x$ n'est permise.

Exemple 6.1.5
Si on utilise les résultats de l'exemple précédent, on obtient les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C\ , \quad \int x^6\,\mathrm{d}x = \frac{x^7}{7} + C \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C\ .$$

♣

À partir des formules de dérivation que nous avons présentées à la section 4.5, on peut construire la table des intégrales que l'on retrouve dans le tableau 6.1.

Le prochain résultat est une conséquence de la linéarité de la dérivée.

Théorème 6.1.6
Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$. Par conséquent,

$$\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

La démonstration de ce théorème est très simple. Par linéarité de la dérivée, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(aF(x) + bG(x)) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) = af(x) + bg(x)$$

pour tout x. Donc, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	contraintes
x^α	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C$	$\alpha \neq -1$ et x^α est définie
$1/x$	$\ln|x|+C$	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	
$\sec^2(x)$	$\tan(x)+C$	
e^x	e^x+C	
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)+C$	$|x|<1$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x)+C$	

TABLE 6.1 – Quelques intégrales indéfinies

Le théorème précédent peut être résumé en une seule phrase. L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies des fonctions de la somme, et l'intégrale indéfinie du produit d'une fonction avec une constante est le produit de l'intégrale indéfinie de la fonction avec cette constante.

Exemple 6.1.7
Calculer l'intégrale indéfinie de $g(x) = 5x^{-8} + 3\cos(x) + 7/\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(5x^{-8} + 3\cos(x) + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= 5\int x^{-8}\,\mathrm{d}x + 3\int \cos(x)\,\mathrm{d}x + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 5\left(\frac{x^{-7}}{-7}\right) + 3\sin(x) + 7\arcsin(x) + C \\
&= -\frac{5}{7x^7} + 3\cos(x) + 7\arcsin(x) + C\ .
\end{aligned}$$

♣

Exemple 6.1.8
Si $f'(x) = x^4 + 5/(1+x^2)$ et $f(0) = 2$, trouver f.

La fonction f est une primitive de $x^4+5/(1+x^2)$. L'intégrale indéfinie de $x^4+5/(1+x^2)$ est

$$\int \left(x^4 + \frac{5}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int x^4\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + 5\arctan(x) + C\ .$$

La fonction f est donnée par $f(x) = x^5/5 + 5\arctan(x) + C$ où C est choisi pour satisfaire $f(0) = 2$. On doit donc avoir $C = 2$ et la fonction f cherchée est $f(x) = x^5/5+5\arctan(x)+2$.

♣

Exemple 6.1.9
L'exemple suivant se trouve dans (presque) tous les livres de calcul différentiel qui ont été écrits. On va donc continuer la tradition pour ne pas paraître trop radical.

Si $p(t)$ est la position d'un objet (se déplaçant en ligne droite), sa vitesse au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la position) est $v(t) = p'(t)$. La position est une primitive de la vitesse. L'accélération au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la vitesse) est $a(t) = v'(t) = p''(t)$. La vitesse est une primitive de l'accélération.

Avec cette information, on peut trouver le temps que prendra un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur de 100 m pour atteindre le sol. On peut aussi trouver la vitesse à laquelle l'objet frappe le sol. On suppose que la friction de l'air n'a aucun effet sur l'objet.

Au départ, la position de l'objet est $p(0) = 100$ m. Puisqu'on laisse tomber l'objet, sa vitesse initiale est $v(0) = 0$ m/s.

L'accélération dû à l'attraction terrestre est bien connue et est -9.8 m/s^2. Nous utilisons le signe négatif pour l'accélération pour indiquer que la direction positive du déplacement est vers le haut. Ainsi, $a(t) = -9.8$ pour tout t.

Puisque

$$\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int -9.8\ \mathrm{d}t = -9.8\,t + C$$

pour une constante C, on a $v(t) = -9.8\,t + C$. La constante C est déterminée par la condition $v(0) = 0$. Ainsi, $C = 0$ et $v(t) = -9.8\,t$ m/s.

De même, puisque

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int -9.8\,t\ \mathrm{d}t = -9.8\int t\,\mathrm{d}t = -9.8\,\frac{t^2}{2} + C$$

pour une constante C, on a $p(t) = -4.9\,t^2 + C$. La constante C est déterminée par la condition $p(0) = 100$. Ainsi, $C = 100$ et $p(t) = -4.9\,t^2 + 100$ m.

L'objet va toucher le sol lorsque $p(t) = -4.9\,t^2 + 100 = 0$. On trouve $t = 4.5175395\ldots$ secondes.

Donc, l'objet prend $t = 4.5175395\ldots$ secondes pour atteindre le sol qu'il frappe à une vitesse de $v(4.5175395\ldots) = -9.8 \times 4.5175395\ldots = -44.271887\ldots$ m/s. On note que le signe négatif pour la vitesse indique seulement que l'objet se dirige vers le sol. ♣

6.2 Techniques d'intégration

Nous présentons quelques règles qui nous permettront de transformer une intégrale indéfinie complexe en une autre intégrale indéfinie qui fait appel seulement à des intégrales indéfinies simples comme celles que l'on retrouve dans le tableau 6.1.

6.2.1 Substitutions

La première méthode d'intégration que nous allons voir nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie de fonctions composées comme $\sin(4x)$, $\sqrt{x+7}$, etc.

Exemple 6.2.1
Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int e^{5x}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)}\ \int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)}\ \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x$$

a) On utilise la règle de la dérivée de fonctions composées pour obtenir

$$\int e^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) = \frac{5\,e^{5x}}{5} = e^{5x}\ .$$

b) On a

$$\int x\ \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-\cos(x^2)}{2}\right) = \frac{2x\sin(x^2)}{2} = x\sin(x^2)\ .$$

c) ? ♣

Alors que les deux premières intégrales indéfinies étaient assez simple à deviner, il en est autrement de l'intégrale indéfinie en (c).

Nous présentons une méthode d'intégration basée sur la règle de la dérivée de fonctions composées qui nous permettra de trouver l'intégrale indéfinie de $x^3/\sqrt{x^2+5}$.

On peut récrire l'intégrale indéfinie en (a) de l'exemple précédent pour obtenir

$$\int 5\,e^{5x}\,\mathrm{d}x = e^{5x} + C\ .$$

Cette intégrale indéfinie est de la forme

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C \tag{6.2.1}$$

où $f(x) = e^x$, $g(x) = 5x$, et $F(x) = e^x$ est la primitive de f. De même, l'intégrale indéfinie en (b) de l'exemple précédent peut s'écrire

$$\int 2x\ \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = -\cos(x^2) + C\ .$$

C'est une intégrale indéfinie de la forme (6.2.1) où $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$, et $F(x) = -\cos(x)$ est la primitive de f.

Est-ce que la formule (6.2.1) est toujours vraie ?

Soit F une primitive d'une fonction f et g une fonction différentiable. Si f et F sont définies sur l'image de g, alors la fonction composée $F \circ g$ est différentiable et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = f(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = f(g(x))g'(x) \; .$$

Ainsi, $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. On obtient le résultat suivant :

Théorème 6.2.2
On suppose que

1. g est une fonction différentiable,
2. F est la primitive d'une fonction f, et
3. f et F sont définies sur l'image de g.

Alors, $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. On en déduit la **règle de substitution** (ou **méthode de changement de variable**) suivante :

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=g(x)} = F(g(x)) + C \; .$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose $y = g(x)$, alors $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y})\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}y} = \int f(y)\,\mathrm{d}y$$

où il ne faut pas oublier de remplacer y par $g(x)$ après avoir calculé l'intégrale indéfinie de f. L'expression $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas une égalité algébrique, elle indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y.

Retournons à l'exemple précédent avec la règle de substitution en main.

Exemple 6.2.3
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int e^{5x}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{b)}\ \int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{c)}\ \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x$$

a) Si on pose $y = 5x$, on a $\mathrm{d}y = 5\,\mathrm{d}x$ et

$$\int e^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int e^{5x} \times 5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int e^{y}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=5x} = \frac{1}{5}\,e^{y}\bigg|_{y=5x} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C \; .$$

b) Si on pose $y = x^2$, on a $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\times 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\cos(y)\bigg|_{y=x^2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C\ .\end{aligned}$$

c) Si on pose $y = x^2+5$, on a $x^2 = y-5$ et $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}\times 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{y-5}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{2}\int\left(y^{1/2}-5y^{-1/2}\right)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^2+5} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\,y^{3/2}-10\,y^{1/2}\right)\bigg|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{3}(x^2+5)^{3/2}-5(x^2+5)^{1/2}+C\ .\end{aligned}$$

♣

Exemple 6.2.4
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$

a) On utilise la substitution $y = \sin(x)$. On a $\mathrm{d}y = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int\frac{1-\sin^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\frac{1-y^2}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sin(x)} = \int\left(y^{-1/2}-y^{3/2}\right)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sin(x)} \\ &= \left(2y^{1/2}-\frac{2}{5}y^{5/2}\right)\bigg|_{y=\sin(x)} + C \\ &= 2\,(\sin(x))^{1/2}-\frac{2}{5}\,(\sin(x))^{5/2}+C\ .\end{aligned}$$

b) Posons $y = 1+x^{1/3}$. Puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+x^{1/3}\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}\ ,$$

on obtient

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{3x^{2/3}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^{1/3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3x^{2/3}}{1+x^{1/3}}\left(\frac{1}{3x^{2/3}}\right)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3(y-1)^2}{y}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=1+x^{1/3}} \\ &= 3\int\left(y-2+\frac{1}{y}\right)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=1+x^{1/3}} = 3\left(\frac{y^2}{2}-2y+\ln|y|\right)\bigg|_{y=1+x^{1/3}} + C \\ &= \frac{3}{2}(1+x^{1/3})^2 - 6(1+x^{1/3}) + 3\ln|1+x^{1/3}| + C\ .\end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé la relation $y = 1 + x^{1/3}$ pour déduire que $x^{1/3} = y - 1$. Ainsi, $x^{2/3} = (y-1)^2$.

c) On remarque que

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \arcsin(y) + C\ .$$

Si on pose $y = \dfrac{3x^2}{4}$, on obtient $\mathrm{d}y = \dfrac{3x}{2}\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^4}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}}\left(\frac{3x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=3x^2/4} = \frac{1}{6}\arcsin(y)\bigg|_{y=3x^2/4} + C \\ &= \frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{3x^2}{4}\right) + C\ .\end{aligned}$$

d) On remarque que $x^2 + 2x + 10$ n'a pas de racines réelles (lorsque le dénominateur sera un polynôme qui peut être factorisé, on fera appel aux fractions partielles que l'on verra prochainement). Si on complète le carré, on peut écrire

$$x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 = (x+1)^2 + 3^3\ .$$

On doit donc évaluer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+3^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan(y) + C\ .$$

Pour ce faire, posons $y = \dfrac{x+1}{3}$. Ainsi, $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^2+3^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=(x+1)/3} = \frac{1}{3}\arctan(y)\bigg|_{y=(x+1)/3} + C \\
&= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C\ .
\end{aligned}$$

♣

À l'occasion, il est préférable d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse. On utilise $x = g(y)$ pour obtenir

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(y))g'(y)\,\mathrm{d}y$$

Cela peut sembler contradictoire car on a l'impression que l'intégrande à droite, $f(g(y))g'(y)$, sera plus compliquée que l'intégrande à gauche, $f(x)$. L'exemple qui suit nous prouve le contraire.

Exemple 6.2.5
Évaluer l'intégrale indéfinie suivante.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

♣

Pour évaluer l'intégrale de fonctions trigonométriques, on a souvent recours aux identités trigonométriques. Les trois plus importantes identités sont :

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1\ ,\ \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha)) \quad \text{et} \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))\ .$$

On réfère aux deux dernières formules par le nom de **formules de l'angle double**.

Les formules d'addition suivantes sont fréquemment utilisées pour calculer des intégrales en mécanique.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\ , \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\ , \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\ , \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))
\end{aligned}$$

et

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\ .$$

Les trois dernières formules sont déduites des deux formules qui les précèdent.

Finalement, si l'intégrande contient les fonctions trigonométriques tan, cot, sec et csc, il est généralement préférable de réécrire ces fonctions en termes de sin et cos, et de simplifier l'intégrande. Il y a cependant quelques exceptions où les identités suivantes peuvent être utile.

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) \quad \text{et} \quad \cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha) \; .$$

Exemple 6.2.6
Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ **c**) $\displaystyle\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ **e**) $\displaystyle\int \sec(x)\,\mathrm{d}x$ **f**) $\displaystyle\int \csc(x)\,\mathrm{d}x$

a) Par définition de la tangente, on a

$$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \; .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $\mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned} \int \tan(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\cos(x)} \\ &= -\ln|y|\bigg|_{y=\cos(x)} + C = -\ln|\cos(x)| + C \; . \end{aligned}$$

b) On utilise la formule de l'angle double pour obtenir

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\,\mathrm{d}x \; .$$

Si on pose $y = 2x$, alors $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1 - \cos(2x)) \times 2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int (1 - \cos(y))\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=2x} = \frac{1}{4}\,(y - \sin(y))\bigg|_{y=2x} + C \\ &= \frac{1}{4}\,(2x - \sin(2x)) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \; . \end{aligned}$$

c) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour écrire

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $\mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}
&\int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = -\int \left(1-\cos^2(x)\right)\ (-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int (1-y^2)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\cos(x)} = -\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_{y=\cos(x)} + C = -\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x)\right) + C \\
&= -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + C\ .
\end{aligned}$$

d) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour obtenir

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $\mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}
\int (1-\cos^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\int (1-\cos^2(x))\cos^2(x)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int (1-y^2)y^2\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\cos(x)} = -\int (y^2 - y^4)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\cos(x)} \\
&= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\bigg|_{y=\cos(x)} + C = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x) + C\ .
\end{aligned}$$

e) Il faut utiliser un petit truc. On a

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x == \int \sec(x)\left(\frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on utilise la substitution $y = \sec(x) + \tan(x)$, on obtient

$$\mathrm{d}y = \left(\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)\right)\,\mathrm{d}x\ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int \sec(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sec(x)+\tan(x)}\left(\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sec(x)+\tan(x)} = \ln|y|\bigg|_{y=\sec(x)+\tan(x)} + C = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C\ .
\end{aligned}$$

f) Il faut utiliser un petit truc semblable à celui utilisé en (e). On a

$$\int \csc(x)\,\mathrm{d}x = \int \csc(x)\left(\frac{\csc(x)+\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\right)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\csc^2(x)+\csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on utilise la substitution $y = \csc(x) + \cot(x)$, on obtient

$$\mathrm{d}y = \left(-\csc(x)\cot(x) - \cot^2(x)\right)\,\mathrm{d}x\ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \csc(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\csc^2(x)+\csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{\csc(x)+\cot(x)}\Big(-\csc^2(x)-\csc(x)\cot(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} = -\ln|y|\Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} = -\ln|\csc(x)+\cot(x)|+C\ .\end{aligned}$$

♣

Exemple 6.2.7
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

a) On utilise l'identité

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

avec $\alpha = 4x$ et $\beta = 3x$ pour obtenir

$$\int \sin(4x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin(7x)\,\mathrm{d}x\ .$$

La première intégrale est

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C_1\ .$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise la substitution $y = 7x$. Donc, $\mathrm{d}y = 7\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \sin(7x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{7}\int \sin(7x)\times 7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=7x} \\ &= -\frac{1}{7}\cos(y)\Big|_{y=7x} + C_2 = -\frac{1}{7}\cos(7x) + C_2\ .\end{aligned}$$

On obtient

$$\int \sin(4x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{14}\cos(7x) + C$$

où $C = (C_2 - C_1)/2$.

b) On peut utiliser une des formules d'addition pour obtenir

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\ .$$

Si on substitue cette expression dans l'intégrale

$$\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

on obtient

$$\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on substitue

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-x)+\sin(x+x)\right) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

et

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

dans l'intégrale précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \left(1+\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Pour évaluer la première et la troisième intégrale dans l'expression précédente, on utilise dans les deux cas la substitution $y = 2x$. Donc, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{8}\int \sin(2x)\times 2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \cos(2x)\times 2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=2x} + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \cos(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=2x} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos(y)\bigg|_{y=2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\sin(y)\bigg|_{y=2x} + C \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\sin(2x) + C\ .\end{aligned}$$

♣

6.2.2 Intégration par parties

Alors que la méthode de substitution nous a permis d'évaluer l'intégrale indéfinie de certaines fonctions composées, la méthode d'intégration par parties nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie du produit de deux fonctions comme xe^x, $x\sin(x)$, etc.

Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\ .$$

Ainsi,

$$f(x)\,g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)g(x)\right) - f'(x)\,g(x)\ .$$

Si on utilise la linéarité de l'intégrale indéfinie, on a

$$\begin{aligned}\int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)g(x)\right)\, \mathrm{d}x - \int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $f(x)g(x)$ est une primitive de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)g(x)\right)$.

Donc, on obtient une primitive de $f(x)g'(x)$ en soustrayant de $f(x)g(x)$ une primitive de $f'(x)\, g(x)$. En d'autre mots,

Théorème 6.2.8
Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

Cette formule est connue sous le nom **d'intégration par parties**.

Exemple 6.2.9
Évaluer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int xe^x\, \mathrm{d}x$.

On a $xe^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc, $g(x) = e^x$ et $f'(x) = 1$. Ainsi,

$$\int xe^x\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\, \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

car $\int e^x\, \mathrm{d}x = e^x + C$. ♣

Exemple 6.2.10
Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a)	$\displaystyle\int x^2 \cos(2x)\, \mathrm{d}x$	**b**)	$\displaystyle\int \sqrt{t}\, \ln(t)\, \mathrm{d}t$
1em] **c**)	$\displaystyle\int x^3 \ln(2x)\, \mathrm{d}x$	**d**)	$\displaystyle\int \ln(x)\, \mathrm{d}x$

a) On a $x^2\cos(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(2x)$. Donc, $f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(2x)/2$. On obtient

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(2x)\, \mathrm{d}x &= \int f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ \sin(2x) - \int x \sin(2x)\, \mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

On fait appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int x\sin(2x)\, \mathrm{d}x$. On a $x\sin(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(2x)$. Donc, $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos(2x)/2$. Ainsi

$$\int x \sin(2x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\ .$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) - \left(-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\right)\\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) - C\ .\end{aligned}$$

On remarque que la méthode d'intégration par substitution a été utilisée à deux reprises pour éliminer le polynôme x^2 de l'intégrande.

b) On a $t^{1/2}\ln(t) = f(t)\,g'(t)$ pour $f(t) = \ln(t)$ et $g'(t) = t^{1/2}$. Donc, $f'(t) = \dfrac{1}{t}$, $g(t) = \dfrac{2}{3}t^{3/2}$ et

$$\begin{aligned}\int t^{1/2}\ln(t)\,\mathrm{d}t &= \int f(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int g(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{3}t^{3/2}\ln(t) - \frac{2}{3}\int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2}\ln(t) - \frac{4}{9}t^{3/2} + C\ .\end{aligned}$$

c) On a $x^3\ln(2x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = \ln(2x)$ et $g'(x) = x^3$. Donc, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^4/4$ et

$$\begin{aligned}\int x^3\ln(2x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^4}{4}\ln(2x) - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(2x) - \frac{1}{16}x^4 + C\ .\end{aligned}$$

d) On a $\ln(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$ et $f'(x) = 1/x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C\ .\end{aligned}$$

♣

On peut déduire des exemples précédents quelques règles pour l'intégration par parties.

1. Si l'intégrande est de la forme $p(x)e^{\alpha x}$ où $p(x)$ est un polynôme, on doit choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$.
2. Si l'intégrande est de la forme $p(x)\sin(\alpha x)$ ou $p(x)\cos(\alpha x)$ où $p(x)$ est un polynôme, on doit choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = \sin(\alpha x)$ ou $\cos(\alpha x)$ selon le cas.
3. Si l'intégrande est de la forme $p(x)\ln(\alpha x)$ où $p(x)$ est une somme d'expressions de la forme x^r avec r un nombre rationnel, on doit choisir $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = p(x)$.

Exemple 6.2.11 🔧

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int x\,5^x\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$ **c**) $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

a) On a $x5^x = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = 5^x$. Donc, $f'(x) = 1$, $g(x) = 5^x/\ln(5)$ et

$$\begin{aligned}\int x5^x\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)}\int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{(\ln(5))^2}5^x + C\end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^x = 5^x\ln(5)$.

b) On a $\arcsin(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arcsin(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\ \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = 1-x^2$. On a $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$ et ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} \times (-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=1-x^2} \\ &= -y^{1/2}\Big|_{y=1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C\ .\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = x\ \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - C\ .$$

c) On a $\arctan(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc, $g(x) = x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\ \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = 1+x^2$. On a $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ et ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ \times 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(y)\Big|_{y=1+x^2} + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\ .\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = x\ \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - C\ .$$

♣

Exemple 6.2.12
Évaluer $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

C'est un autre exemple où nous devons utiliser la règle de substitution dans le sens inverse comme nous l'avons expliqué à la section précédente.

Posons $x = t^2$ dans le but d'éliminer $\sqrt{x}$. Alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int te^t\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\sqrt{x}} = 2\left(te^t - e^t\right)\bigg|_{t=\sqrt{x}} + C = 2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

où nous avons utilisé le résultat de l'exemple 6.2.9. ♣

L'exemple suivant démontre une technique pour évaluer les intégrales dont l'intégrande est le produit de $e^{\alpha x}$ et $\cos(\beta x)$, ou $e^{\alpha x}$ et $\sin(\beta x)$.

Exemple 6.2.13
Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\textbf{a)}\quad \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x \quad , \quad x > 0$$

a) Posons

$$I = \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On a $e^x\cos(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$\begin{aligned} I = \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Même si cette expression n'est pas plus simple que l'intégrale du départ, on est quand même sur la bonne voie. Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On a $e^x\sin(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\begin{aligned} \int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = -e^x\cos(x) + I\ . \end{aligned}$$

Si on substitue cette expression dans (6.2.2), on obtient

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

et, après avoir isolé I, on trouve que

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)\right)$$

est une primitive de $e^x \cos(x)$. Donc

$$\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)\right) + C\ .$$

On aurait pu utiliser $e^x \cos(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la première intégration par parties mais alors il aurait fallu utiliser $e^x \sin(x) = f(x)\,g'(x)$ pour $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la deuxième intégration par parties.

b) On commence par une substitution. Posons $x = e^y$ pour éliminer $\ln(x)$. On a $\mathrm{d}x = e^y\,\mathrm{d}y$ et

$$\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int \sin(y)\,e^y\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\ln(x)}\ .$$

C'est une intégrale du même type que celle que l'on a évalué en (a).

Posons

$$I = \int e^y \sin(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

On a $e^y \sin(y) = f(y)\,g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \sin(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = \cos(y)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^y \sin(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^y \sin(y) - \int e^y \cos(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

De plus, pour l'intégrale indéfinie

$$\int e^y \cos(y)\,\mathrm{d}y\ ,$$

on a $e^y \cos(y) = f(y)\,g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \cos(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = -\sin(y)$ et

$$\begin{aligned} \int e^y \cos(y)\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^y \cos(y) + \int e^y \sin(y)\,\mathrm{d}y = e^y \cos(y) + I\ . \end{aligned}$$

Si on substitue cette expression dans (6.2.3), on obtient

$$I = e^y \sin(y) - (e^y \cos(y) + I)$$

et, après avoir isolé I, on trouve que

$$I = \frac{1}{2}\left(e^y \sin(y) - e^y \cos(y)\right)$$

est une primitive de $e^y \sin(y)$. Ainsi,

$$\int e^y \sin(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(e^y \sin(y) - e^y \cos(y)\right) + C\ .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(x))\, \mathrm{d}x &= \int \sin(y)\, e^y\, \mathrm{d}y\bigg|_{y=\ln(x)} = \frac{1}{2}\left(e^y \sin(y) - e^y \cos(y)\right)\bigg|_{y=\ln(x)} + C \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln(x)} \sin(\ln(x)) - e^{\ln(x)} \cos(\ln(x))\right) + C \\ &= \frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right) + C\ .\end{aligned}$$

♣

Méthode de Weiestrass

Il existe une autre façon d'évaluer des intégrales de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x))\, \mathrm{d}(x)$ où $F(\cos(x), \sin(x))$ est une fonction (rationnelle) de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. On peut utiliser la substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \quad -\pi < x < \pi \tag{6.2.4}$$

qui est due à Weiestrass. Cette substitution est équivalente à $x = 2\arctan(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\, \mathrm{d}t\ . \tag{6.2.5}$$

De plus, grâce à la **formule de l'angle double pour la tangente**, on a

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 = \left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2$$

si $t \neq \pm 1$. Donc, $\sec(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ donne

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ . \tag{6.2.6}$$

Cette formule est aussi valide pour $t = \pm 1$. Si $t = 1$, on a $x = \pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Donc, les deux côtés de (6.2.6) sont nuls. De même, si $t = -1$, on a $x = -\pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Donc, les deux côtés de (6.2.6) sont encore nuls. La relation

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$$

donne

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \ . \tag{6.2.7}$$

Exemple 6.2.14
Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)} \, dx \ .$$

On utilise la substitution (6.2.4) avec (6.2.5) et (6.2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sin(x)} \, dx &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1}\right) dt = \int \frac{1}{t^2+t+1} \, dt \\ &= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \, dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \, dt \ .\end{aligned}$$

Avec la substitution $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$, on obtient $dy = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \, dt$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sin(x)} \, dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2+1} \, dy \bigg|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) \bigg|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) + C \ .\end{aligned}$$

Finalement, puisque $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on trouve

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)} \, dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\right) + C \ .$$

♣

6.2.3 Fractions partielles

La méthode des fractions partielles permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes. Vous devez suivre les étapes suivantes pour calculer ce genre d'intégrales.

1. Si le degré de $p(x)$ est plus grand ou égal au degré de $q(x)$, on divise $p(x)$ par $q(x)$ pour obtenir
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$
où le degré de $r(x)$ est plus petit que le degré de $q(x)$, et $s(x)$ est un polynôme (donc facile à intégrer).
2. On exprime $q(x)$ comme un produit de facteurs irréductibles.
$$q(x) = A(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ldots(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{m_2}\ldots$$
où A, α_1, α_2, $\ldots$, β_1, γ_1, β_2, γ_2, $\ldots$ sont des constantes réelles et n_1, n_2, $\ldots$, m_1, m_1, $\ldots$ sont des entiers positifs. On assume que les α_k et les (β_k, γ_k) sont distincts.
3. On exprime $r(x)/q(x)$ sous la forme
$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \ldots \\ &\quad + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \ldots + \frac{B_{m_1} x + C_{m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}} + \ldots\end{aligned}$$
où A_1, A_2, $\ldots$, B_1, C_1, B_2, C_2, $\ldots$ sont des constantes.
4. Finalement, on évalue
$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x &= \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_1}{(x-\alpha_1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}\,\mathrm{d}x + \ldots + \int \frac{A_{n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \ldots + \int \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \ldots + \int \frac{B_{m_1} x + C_{m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}}\,\mathrm{d}x + \ldots\end{aligned}$$

Exemple 6.2.15
Évaluer
$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x \ .$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir
$$\frac{x^3}{x^2-5x+6} = x + 5 + \frac{19x-30}{x^2-5x+6} \ .$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Étape 3 : On cherche A et B tels que
$$\frac{19x-30}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \ .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, l'égalité est satisfaite si on a le même numérateur de chaque côté de l'égalité. C'est-à-dire si

$$19x - 30 = A(x-3) + B(x-2) = (A+B)x - (3A+2B) \ .$$

Si on compare les coefficients des puissances de x, on trouve $A+B = 19$ et $-(3A+2B) = -30$. Donc, $A = -8$ et $B = 27$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x + 5 - 8\,\frac{1}{x-2} + 27\,\frac{1}{x-3}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + -8\ln|x-2| + 27\ln|x-3| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \ln\left(\frac{|x-3|^{27}}{|x-2|^8}\right) + C \ .\end{aligned}$$

♣

Remarque 6.2.16
Lorsque que les racines du dénominateur sont simples, on a une expression de la forme suivante à l'étape 3.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-\alpha_n)}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines distinctes de $q(x)$. Il y a alors une façon facile de déterminer les valeurs de A_1, A_2, ..., A_n. Si on met sur un dénominateur commun, on obtient au numérateur une équation de la forme

$$\begin{aligned}r(x) = A_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + \ldots \\ + A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1}).\end{aligned}$$

Il suffit d'évaluer chacun des côtés de l'égalité précédente à α_1, α_2, ..., α_n pour obtenir respectivement les valeurs de A_1, A_2, ..., A_n.

Si on utilise cette méthode à l'exemple précédent, on a

$$19x - 30 = A(x-3) + B(x-2) \ .$$

Ainsi, on obtient $27 = B$ avec $x = 3$ et $8 = -A$ avec $x = 2$. ♠

Exemple 6.2.17
Évaluez

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x}\,\mathrm{d}x \ .$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x + 1 + \frac{1}{x^3 - x} \ .$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

Étape 3 : On cherche A, B et C tels que

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \ .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \ .$$

Pour $x = 0$, on obtient $1 = -A$. Donc $A = -1$. Pour $x = 1$, on obtient $1 = 2B$. Donc $B = 1/2$. Finalement, pour $x = -1$, on obtient $1 = 2C$. Donc $C = 1/2$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} \,\mathrm{d}x &= \int (x+1) \,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^3 - x} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 + x - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\
&= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|(x-1)(x+1)| + C \ .
\end{aligned}$$

♣

L'exemple suivant ne fait partie en soit de la méthode d'intégration par fractions partielles. On a même déjà vu une intégrale semblable à l'exemple 6.2.4. Cependant, on rencontre souvent cette situation quand on essaye d'utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Il est donc important d'être capable de calculer de telles intégrales.

Exemple 6.2.18

Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} \,\mathrm{d}x \ .$$

Étape 1 : On n'a pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le polynôme $x^2 + 6x + 12$ est irréductible car il n'admet pas de racines réelles.

La méthode des fractions partielles ne s'applique pas. On complète le carré du dénominateur. On remarque que $x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+3)^2 + 3} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \,\mathrm{d}x \ .$$

Si on pose $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{3}}$, on a $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,\mathrm{d}x$ et

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(y)\bigg|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C\ .
\end{aligned}
$$

♣

Exemple 6.2.19
Évaluer

$$\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Étape 1 : On n'a pas a diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le dénominateur $(x-3)(x^2+6x+12)$ est déjà exprimé comme un produit de facteurs irréductibles car le polynôme $x^2+6x+12$ n'admet pas de racines réelles.

Étape 3 : On cherche A, B et C tels que

$$\frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+12}\ .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$4x+1 = A(x^2+6x+12)+(Bx+C)(x-3) = (A+B)x^2+(6A-3B+C)x+(12A-3C)\ .$$

Si on compare les coefficients des puissances de x, on trouve $A+B=0$, $6A-3B+C=4$ et $12A-3C=1$. Donc, $A=1/3$, $B=-A$ et $C=1$.

Étape 4 :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int\frac{-\frac{1}{3}x+1}{x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\int\frac{x-3}{x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\int\frac{x-3}{(x+3)^2+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\int\frac{x+3}{(x+3)^2+3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int\frac{-6}{(x+3)^2+3}\,\mathrm{d}x\ .
\end{aligned}
$$

Or, si on pose $y=(x+3)^2$, on obtient $\mathrm{d}y = 2(x+3)\,\mathrm{d}x$ et

$$
\begin{aligned}
\int\frac{x+3}{(x+3)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+3)^2+3}\times 2(x+3)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{1}{y+3}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=(x+3)^2} = \frac{1}{2}\ln|y+3|\bigg|_{y=(x+3)^2} + C_1 \\
&= \frac{1}{2}\ln((x+3)^2+3) + C_1\ .
\end{aligned}
$$

De plus, si on utilise le résultat de l'exemple 6.2.18,

$$\int \frac{-6}{(x+3)^2+3}\,\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{x^2+6x+12}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C_2\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int &\frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln((x+3)^2+3) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

où $C = -(C_1+C_2)/3$. ♣

Exemple 6.2.20 🔧
Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{3\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

On utilise la substitution (6.2.4) avec (6.2.5), (6.2.6) et (6.2.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\left(\frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+6t-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{2}{(t-(3+\sqrt{10}))(t-(3-\sqrt{10}))}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\int\left(\frac{1}{t-(3+\sqrt{10})} - \frac{1}{t-(3-\sqrt{10})}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\Big(\ln|t-(3+\sqrt{10})| - \ln|t-(3-\sqrt{10})|\Big) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-(3+\sqrt{10})}{t-(3-\sqrt{10})}\right| + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-(3+\sqrt{10})}{\tan(x/2)-(3-\sqrt{10})}\right| + C\ .\end{aligned}$$

La méthode d'intégration par fractions partielles a été utilisée pour évaluer l'intégrale en t. ♣

6.2.4 Substitutions trigonométriques 🔧

Si l'intégrande contient un facteur de la forme $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$, une substitution trigonométrique pourrait être nécessaire.

l'intégrande contient	substitution
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin(t)$ ou $x = a\cos(t)$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan(t)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(t)$

Pour ce genre de substitutions, on utilise la règle de substitution dans le sens inverse

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La substitution $x = g(t)$ donne le côté droit.

Exemple 6.2.21
Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad , \quad -1 < x < 1\ .$$

Posons $x = \sin(t)$ avec $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}}\ \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int \csc^2(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \csc^2(t)\,\mathrm{d}t = -\cot(t) + C\ .$$

Or $x = \sin(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$ donne $\cos(t) = \sqrt{1-x^2} > 0$. Donc

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

et

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\cot(t) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C\ .$$

♣

Exemple 6.2.22
Évaluer

$$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad , \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

Posons $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. On a donc

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2(t)+1} = \sqrt{\sec^2(t)} = |\sec(t)| = \sec(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $\mathrm{d}x = \sec^2(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sec(t)\ \sec^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. On a $\sec(t)\ \sec^2(t) = f(t)g'(t)$ pour $f(t) = \sec(t)$ et $g'(t) = \sec^2(t)$. Donc, $f'(t) = \sec(t)\tan(t)$, $g(t) = \tan(t)$ et

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec(t)\ \sec^2(t)\,\mathrm{d}t = \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sec(t)\tan(t) - \int \sec(t)\tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \sec(t)\tan(t) - \int \sec(t)\left(\sec^2(t) - 1\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t - \int \sec(t)\sec^2(t)\,\mathrm{d}(t) \\
&= \sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t - I\ .
\end{aligned}$$

Si on résout pour I on trouve

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t\right)\ .$$

À l'exemple 6.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t)\,\mathrm{d}t = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_1\ .$$

Donc,

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec(t)\tan(t) + \frac{1}{2}\ln|\sec(t)+\tan(t)| + C$$

où $C = C_1/2$. Finalement, puisque $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$, on a $\sec(t) = \sqrt{1+\tan^2(t)} = \sqrt{1+x^2}$. Ainsi,

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C\ .$$

♣

Exemple 6.2.23
Évaluer l'intégrale

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x \quad , \quad x > 1\ .$$

On a

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Posons $x = y^2$ pour $y > 1$. On a $\sqrt{x} = y$ et $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$. Donc,

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \times 2y\,\mathrm{d}y = 2\int \sqrt{y^2-1}\,\mathrm{d}y$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = \sec(\theta)$ pour $0 < \theta < \pi/2$. On a $\mathrm{d}y = \sec(\theta)\tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\sec^2(\theta)-1} = \tan(\theta)$ car $\tan(\theta) > 0$ pour $0 < \theta < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \tan^2(\theta)\sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int (\sec^2(\theta) - 1)\sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int \sec^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int \sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

À l'exemple 6.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t)\,\mathrm{d}t = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_1$$

et à l'exemple précédent on a montré que

$$\int \sec^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec(t)\tan(t) + \frac{1}{2}\ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_2 \ .$$

Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int \tan^2(\theta)\sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sec(t)\tan(t) - \frac{1}{2}\ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_3$$

où $C_3 = C_2 - C_1$. Puisque $\sec(\theta) = y$ et $\tan(\theta) = \sqrt{y^2-1}$ pour $0 < \theta < \pi/2$, on obtient

$$\int \sqrt{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{2}\ln|y + \sqrt{y^2-1}| + C_3 \ .$$

Finalement, puisque $y = \sqrt{x}$ pour $x > 1$, on trouve

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \sqrt{x(x-1)} - \ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right| + C$$

où $C = 2C_3$. ♣

Exemple 6.2.24
Évaluer

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad , \quad x > 1 \ .$$

Si on pose $x = \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $\mathrm{d}x = \tan(t)\sec(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\sec^2(t)-1}}{\sec^3(t)}\sec(t)\tan(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\tan^2(t)}{\sec^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

où on a utilisé l'identité

$$\sqrt{\sec^2(t)-1} = \sqrt{\tan^2(t)} = |\tan x| = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sin^2(t) = (1-\cos(2t))/2$, on a

$$\int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + C \ .$$

Pour exprimer le résultat de notre intégrale en fonction de x seulement, on note que $t = \operatorname{arcsec}(x)$ car on a posé $x = \sec(t)$. De plus, $x = \sec(t)$ donne $\cos(t) = 1/x$ et

$$\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

car $x = \sec(t) > 1$ et $\sin(t) > 0$ pour $0 < t < \pi/2$. Finalement,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + C \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(x)}{2} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C\end{aligned}$$

où l'identité trigonométrique $\sin(2t) = \sin(t+t) = 2\sin(t)\cos(t)$ a été utilisé pour la deuxième égalité. ♣

Exemple 6.2.25
Évaluer

$$\int \frac{1}{(4x^2-25)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{pour} \quad x > 5/2\ .$$

On peut récrire cette intégrale de la façon suivante :

$$\int \frac{1}{(4x^2-25)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Si on pose $x = \dfrac{5}{2}\sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}\tan(t)\sec(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\sec^2(t) - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}}\left(\frac{5}{2}\tan(t)\sec(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{50}\int \frac{\tan(t)\sec(t)}{\left(\sec^2(t)-1\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{50}\int \frac{\tan(t)\sec(t)}{\left(\tan^2(t)\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{50}\int \frac{\tan(t)\sec(t)}{\tan^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{50}\int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{50}\int \cot(t)\csc(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{50}\csc(t) + C\ .\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité

$$\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t) \quad \text{et} \quad \sqrt{\tan^2 x} = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sec(t) = \dfrac{2}{5}x$ donne $\cos(t) = \dfrac{5}{2x}$, on obtient

$$\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2x}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x^2-25}}{2x}$$

car $x = \dfrac{5}{2}\sec(t) > \dfrac{5}{2}$ et $\sin(t) \geq 0$ pour $0 \leq t < \pi/2$. Finalement,

$$\int \frac{1}{(4x^2-25)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{50\sin(t)} + C = -\frac{x}{25\sqrt{4x^2-25}} + C\ .$$

♣

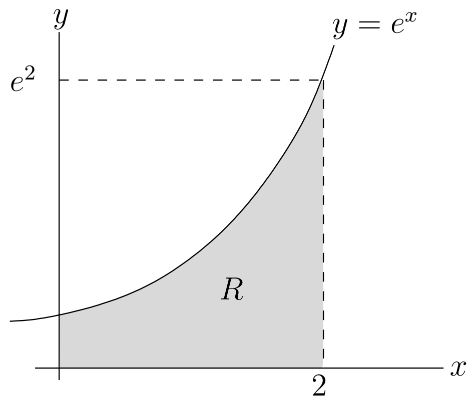


FIGURE 6.1 – La région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

6.3 L'intégrale définie

La région R de la figure 6.1 est la région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$. La façon intuitive d'estimer l'aire A de cette région est de partitionner en petits rectangles cette région et de faire la somme de l'aire de chaque rectangle car il est simple de calculer l'aire d'un rectangle.

Les rectangles utilisés à la figure 6.2 sont construits de la façon suivante. On partage l'intervalle $[0, 2]$ en 11 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est donc $2/11$. On obtient 11 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/11$, $x_2 = 4/11$, $\ldots$, $x_{11} = 22/11 = 2$. Les rectangles que l'on utilise sont les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i}, est $e^{x_i}\left(\frac{2}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{11} = e^0\left(\frac{2}{11}\right) + e^{2/11}\left(\frac{2}{11}\right) + e^{4/11}\left(\frac{2}{11}\right) + \ldots + e^{20/11}\left(\frac{2}{11}\right) \approx 5.8258238\ldots$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $G_{11} = 5.8258238\ldots$. En fait, on a sous-estimé l'aire de la région R car nos rectangles sont tous à l'intérieur de la région.

Le choix de 11 intervalles est arbitraire. Pour obtenir une meilleure approximation de l'aire de la région R, on pourrait prendre plus d'intervalles. Par exemple, si on partage l'intervalle $[0, 2]$ en 22 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est alors de $1/11$ et on obtient 22 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 21$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 1/11$, $x_2 = 2/11$, $\ldots$, $x_{22} = 22/11 = 2$. Comme dans le cas précédent avec 11 intervalles, on utilise les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 21$. On obtient la figure 6.3.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i}, est

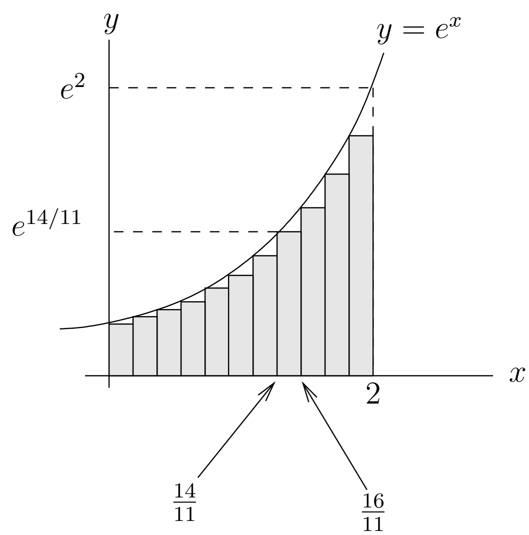


FIGURE 6.2 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i}

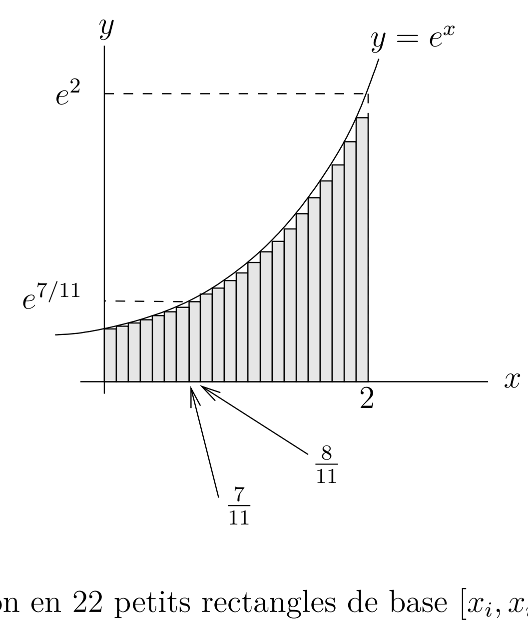


FIGURE 6.3 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i}

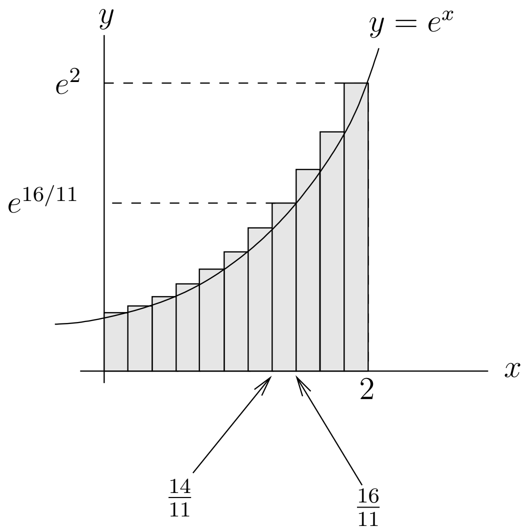


FIGURE 6.4 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

maintenant $e^{x_i}\left(\frac{1}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{22} = e^0\left(\frac{1}{11}\right) + e^{1/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{2/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{3/11}\left(\frac{1}{11}\right) + \ldots$$
$$+ e^{20/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{21/11}\left(\frac{1}{11}\right) \approx 6.10304402\ldots$$

et on obtient que l'aire A de la région R est approximativement $G_{22} = 6.10304402\ldots$. On a encore sous-estimé l'aire de la région R.

Si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme G_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente. Les sommes G_k sont appelées des **sommes à gauche** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité gauche x_i de l'intervalle.

Remarque 6.3.1

Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à gauche G_k sont toutes des sous-estimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. ♠

Revenons à la partition de l'intervalle $[0, 2]$ en 11 sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0$, 1, …, 10 où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/11$, $x_2 = 4/11$, …, $x_{10} = 20/11$ et $x_{11} = 2$. Ces intervalles sont tous de longueur égale à 2/11. Considérons maintenant les rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 6.4.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est $e^{x_{i+1}}\left(\frac{2}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{11} = e^{2/11}\left(\frac{2}{11}\right) + e^{4/11}\left(\frac{2}{11}\right) + e^{6/11}\left(\frac{2}{11}\right) + \ldots + e^{22/11}\left(\frac{2}{11}\right) \approx 6.987470396\ldots$$

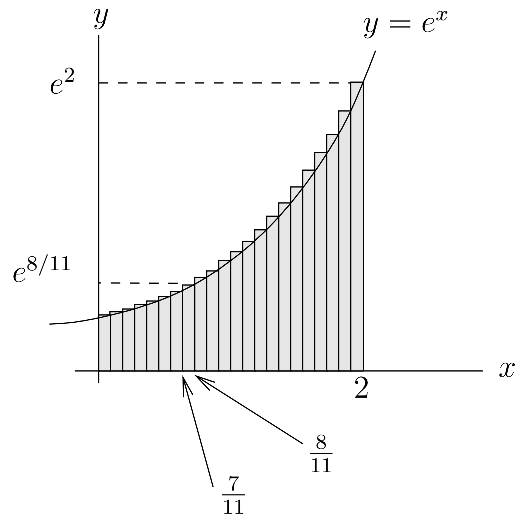


FIGURE 6.5 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{11} = 6.987470396\ldots$. En fait, on a surestimé l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R.

Finalement, on considère les 22 rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$ où les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \ldots, 21$ sont bornées par les points $x_0 = 0$, $x_1 = 1/11$, $x_2 = 2/11$, $\ldots$, $x_{21} = 21/11$ et $x_{22} = 2$, Chaque intervalle est de longueur égale à $1/11$. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 6.5.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est maintenant $e^{x_{i+1}}\left(\frac{1}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$\begin{aligned} D_{22} &= e^{1/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{2/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{3/11}\left(\frac{1}{11}\right) + \ldots \\ &\quad + e^{21/11}\left(\frac{1}{11}\right) + e^{22/11}\left(\frac{1}{11}\right) \approx 6.68386731\ldots \end{aligned}$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{22} = 6.68386731\ldots$. On a toujours une surestimation de l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R mais la surestimation est moins grande que lorsqu'on utilise seulement 11 rectangles.

Les sommes D_k sont appelées des **sommes à droite** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité droite x_{i+1} de l'intervalle. Comme pour les sommes à gauche, si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme D_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente.

Remarque 6.3.2
Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à droite D_k sont toutes des surestimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. ♠

Pour 1000 sous-intervalles de $[0,2]$, on obtient

$$D_{1000} = 6.39544728\ldots \qquad \text{et} \qquad G_{1000} = 6.38266917\ldots$$

Si on combine les sommes à droite et à gauche que nous avons calculées, on obtient

$$G_{11} < G_{22} < G_{1000} < A < D_{1000} < D_{22} < D_{11} \ .$$

La valeur exacte de l'aire A de la région R est $A = 6.3890560\ldots$.

Comme le symbole de sommation $\sum$ sera très utile, il est probablement important de revoir sa définition pour le bénéfice du lecteur.

Définiton 6.3.3
Soit $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$, un ensemble de nombres indexés par les entiers. Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$, alors la somme des nombres a_n, a_{n+1}, $\ldots$, a_m est dénotée

$$\sum_{i=n}^{m} a_i \equiv a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{m-1} + a_m \ .$$

Si on partitionne l'intervalle $[0,2]$ en k sous-intervalles de longueur $2/k$, on obtient les intervalles de base $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/k$, $x_2 = 4/k$, $\ldots$, $x_{k-1} = 2(k-1)/k$ et $x_k = 2$.

Si on utilise le symbole de sommation, on a

$$G_k = \frac{2}{k}\sum_{i=0}^{k-1} e^{x_i} \quad \text{et} \quad D_k = \frac{2}{k}\sum_{i=0}^{k-1} e^{x_{i+1}} = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k} e^{x_i}$$

où $2/k$ est la longueur de la base des rectangles. On a aussi que

$$G_1 < \ldots < G_k < G_{k+1} < A < D_{k+1} < D_k < \ldots < D_1$$

pour tout $k \geq 1$ et l'aire A de la région R est donnée par

$$A = \lim_{k\to\infty} G_k = \lim_{k\to\infty} D_k \ .$$

6.3.1 Définition

La définition de l'intégrale définie que nous donnons généralise le calcul de l'aire qui a été fait à la section précédente pour la région R bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$.

Avant de définir l'intégrale dans le cas général, nous devons décrire les fonctions pour lesquelles l'intégrale existera. La raison pour ces restrictions sur les fonctions que nous allons intégrer deviendra plus clair lors de l'étude des intégrales impropres que nous ferons prochainement.

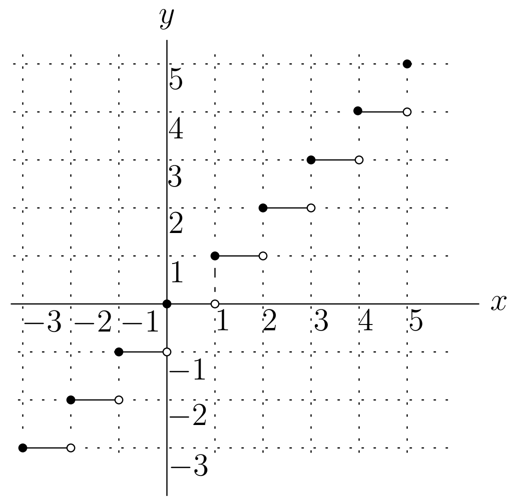


FIGURE 6.6 – Graphe de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $-3 \le x \le 5$.

Définiton 6.3.4
Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **bornée** s'il existe une constante M telle que $|f(x)| < M$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **continue par morceaux** s'il y a une nombre fini de points c où la fonction f n'est pas continue et, à ces points c, on a que

$$\lim_{\substack{x \to c+ \\ x \in [a,b]}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to c- \\ x \in [a,b]}} f(x)$$

existent.

Exemple 6.3.5
La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que ou égale à x, est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Le graphe de cette fonction est donné à la figure 6.6. ♣

On remarque qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé est une fonction bornée.

Définiton 6.3.6 (**Somme de Riemann**)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ une partition $\mathcal{P}$ quelconque de l'intervalle $[a, b]$. La longueur d'un sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. On définie une mesure de la partition $\mathcal{P}$ par

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{\Delta x_i : 0 \leq i < k\} \ .$$

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. La somme

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{k-1} f\left(x_i^*\right) \Delta x_i$$

est une **somme de Riemann** pour la partition $\mathcal{P}$.

Une même partition supporte un nombre infini de sommes de Riemann selon le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$.

Définiton 6.3.7
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. L'**intégrale définie** de f de a à b est le nombre I qui satisfait la condition suivante.

$$S_{\mathcal{P}} \to I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \to 0 \ .$$

On écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = I$.

Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**. L'intervalle $[a, b]$ est appelé **l'intervalle d'intégration**. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole $\mathrm{d}x$ indique que la variable d'intégration est x.

Remarque 6.3.8

$$S_{\mathcal{P}} \to I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \to 0 \ .$$

veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|I - S_{\mathcal{P}}| < \epsilon$$

quelle que soit la partition $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ avec $\|\mathcal{P}\| < \delta$ et quelle que soit le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ associé à la partition $\mathcal{P}$. ♠

Consultez la section 6.3.5 pour une définition plus générale de l'intégrale définie de Riemann.

On insiste sur le fait que le symbole $\mathrm{d}x$ n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x. Aucune manipulation algébrique avec $\mathrm{d}x$ n'est permise.

Il découle de la définition de l'intégrale définie que l'on peut estimer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en choisissant un partition très fine (i.e. $\|\mathcal{P}\|$ très petit) avec une somme de Riemann subordonnée à cette partition.

Normalement, on choisit des partitions $\mathcal{P}$ telles que Δx_i est constant.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Pour $k \in \mathbb{N}^+$, on pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\,\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Les points $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ forment une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx. On a que $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = (b-a)/k$ tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini.

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. Donc, $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$. On obtient la somme de Riemann

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\Delta x \ .$$

Cette somme est représentée graphiquement à la figure 6.7.

l'intégrale définie de f de a à b peut être calculée à l'aide de la formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_k \ . \tag{6.3.1}$$

Remarque 6.3.9

1. La limite (6.3.1) existe toujours car f est continue par morceau. Cela pourrait être démontré à partir de la définition rigoureuse de l'intégrale donnée à la section 6.3.5 ci-dessous.
2. Quelques rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $|f(x_i^*)|$ sont représentés à la figure 6.7. Comme $f(x_i^*)$ peut être négatif, l'expression $f(x_i^*)\,\Delta x$ représente l'aire du rectangle à un signe près.
3. Si $x_i^* = x_i$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité gauche de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = G_k$, la somme à gauche pour k rectangles.
4. Si $x_i^* = x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité droite de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = D_k$, la somme à droite pour k rectangles.
5. Si x_i^* est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ pour $0 \leq i < k$, alors S_k est **une somme de Riemann pour le point milieu** que l'on dénote M_k.

♠

Exemple 6.3.10

Notre but est de trouver la meilleure estimation de $\displaystyle\int_{-1}^2 1 + x^2\,\mathrm{d}x$. Pour ce faire, nous allons utiliser les sommes à gauche, les sommes à droites et les sommes pour le point milieu avec $n = 3$ et $n = 6$ sous-intervalles.

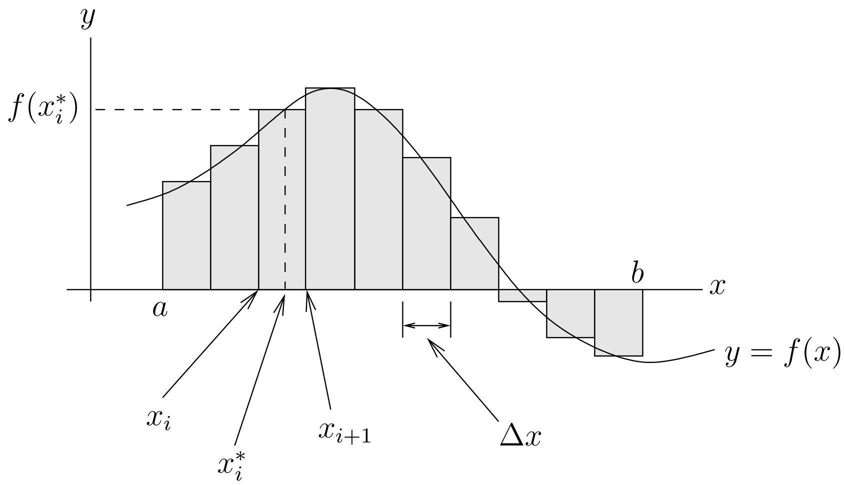


Figure 6.7 – Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie

Nous utiliserons le graphe de f pour déterminer laquelle des estimations que l'on a trouvées donne la meilleure approximation de l'intégrale ; c'est-à-dire, de l'aire sous la courbe $y = f(x) = 1 + x^2$ pour $-1 \leq x \leq 2$.

Pour $n = 3$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/3 = 1$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i$ pour $i = 0$, 1, 2 et 3. On obtient les trois intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

Pour $n = 6$, on a $\Delta x = (2 - (-1))/6 = 1/2$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i/2$ pour $i = 0$, 1, 2, …, et 6. On obtient les six intervalles $[-1, -0.5]$, $[-0.5, 0]$, … et $[1.5, 2]$.

La somme à droite avec $n = 3$ est

$$D_3 = (f(0) + f(1) + f(2))(1) = 8 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx D_3 = 8$.

La somme à droite avec $n = 6$ est

$$D_6 = (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2))(0.5) = 6.875 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx D_6 = 6.875$.

La somme à gauche avec $n = 3$ est

$$G_3 = (f(-1) + f(0) + f(1))(1) = 5 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx G_3 = 5$.

La somme à gauche avec $n = 6$ est

$$G_6 = (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5))(0.5) = 5.375 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx G_6 = 5.375$.

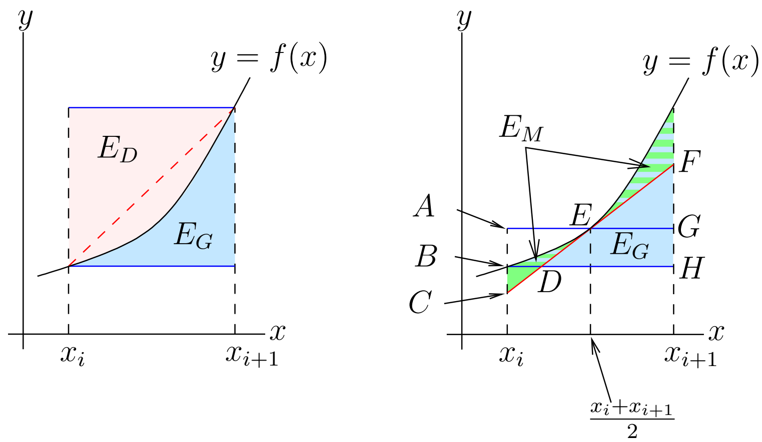


FIGURE 6.8 – Figure utilisée pour comparer l'efficacité des sommes à droite, des sommes à gauche et des sommes pour le point milieu à l'exemple 6.3.10

La somme pour le point milieu avec $n = 3$ est

$$M_3 = 1 \times (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5)) = 5.75 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2}(1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx S_3 = 5.75$.

La somme pour le point milieu avec $n = 6$ est

$$M_6 = 0.5(f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) = 5.9375 \ .$$

Donc $\int_{-1}^{2}(1 + x^2)\,\mathrm{d}x \approx S_6 = 5.9375$.

La meilleure approximation est donnée par la somme M_6. Considérons la figure 6.8.

Nous avons à gauche le graphe de f entre x_i et x_{i+1}. L'aire de la région E_D (en rose) représente l'erreur entre la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme à droite. L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Comme f est positive, croissant et convexe, on a que l'aire de la région E_D est plus grande que l'aire de la région E_G. Donc, la somme à gauche donne une meilleure estimation de la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nous avons à droite le graphe de f entre x_i et x_{i+1}. L'aire de la région E_M (en vert) représente l'erreur entre la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu. Il faut noter que l'aire du rectangle de sommets x_i, A, G et x_{i+1} produit par la somme pour le point milieu est égale à l'aire du trapèze de sommets à x_i, A, G et x_{i+1} car les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle GFE$ sont congruents (on a $|\overline{AE}| = |\overline{EG}|$, $|\overline{CE}| = |\overline{CF}|$ et $\angle AED = \angle GEF$). L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Puisque l'aire du triangle $\triangle BCD$ est toujours plus petite que l'aire du triangle $\triangle HFD$, on a que l'aire de la région

E_G est plus grande que l'aire de la région E_M. Donc, la somme pour le point milieu donne une meilleure estimation de la valeur de $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En conclusion, quand f est positive, croissante et convexe, la somme pour le point milieu donne la meilleure approximation de l'intégrale de f.

Quand f est positive, décroissante et convexe, Un raisonnement semblable montre que la somme pour le point milieu donne encore la meilleure approximation de l'intégrale de f. La seule différence dans ce cas est que la somme à droite donne une meilleure estimation de l'intégrale de f que la somme à gauche. On invite le lecteur a vérifier cette conclusion.

De plus, on remarque à partir de la figure ci-dessus que, dans le cas d'une fonction convexe, l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu est toujours inférieure à $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc, la somme pour le point milieu est une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

En conséquence, puisque $M_3 < M_6$, on a que M_6 est la meilleure approximation de l'intégrale.

Il y a cependant une contrainte majeure à la justification que nous venons de donner. L'origine doit être un des points x_i pour que notre raisonnement soit valable. Toute notre justification est basée sur la propriété que la fonction ne change pas de signe, de croissante à décroissante et vice-versa, ou de courbure dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. ♣

6.3.2 Propriétés de l'intégrale définie

On déduit du deuxième item de la remarque 6.3.9 ci-dessus que si $f(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

où A est l'aire de la région R en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x, et entre $x = a$ et $x = b$. Par contre, si $f(x) \leq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$$

où A est l'aire de la région R au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x, et entre $x = a$ et $x = b$. Si f change de signe à un seul point c de l'intervalle $[a, b]$ comme à la figure 6.9, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 \ ,$$

où A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x, et entre $x = a$ et $x = c$; et A_2 est l'aire de la région R_2 au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x, et entre $x = c$ et $x = b$.

Il est parfois facile de calculer l'intégrale d'une fonction si cette fonction et l'intervalle d'intégration possèdent certaines symétries. Par exemple, si f est une fonction impaire (i.e.

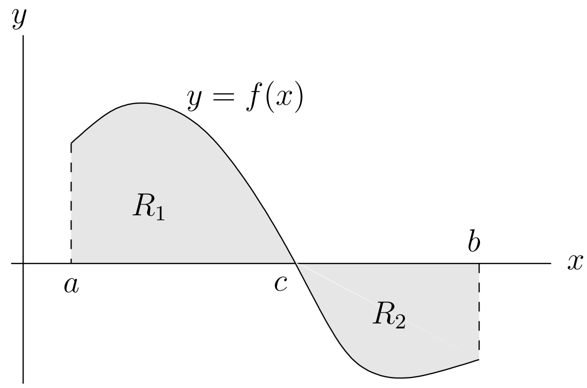


FIGURE 6.9 – L'intégrale d'une fonction f qui change de signe seulement au point c comme dans la figure donne l'aire de la région R_1 moins l'aire de la région R_2.

$f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

La justification de ce résultat est donnée par la figure 6.10. A_1 est l'aire de la région R_1 au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x, et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x, et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction impaire $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1 = 0\ .$$

Si f est une fonction paire (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

La justification de ce résultat est donnée à la figure 6.11. A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x, et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x, et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction paire alors $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = A_2 + A_1 = 2A_1 = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On insiste sur le fait que, dans les deux cas précédents, la borne supérieure d'intégration est la réflexion par rapport à l'origine de la borne inférieure d'intégration.

Définiton 6.3.11
Si l'intégrale de f de a à b existe, on définit l'intégrale de f de b à a par

$$\int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

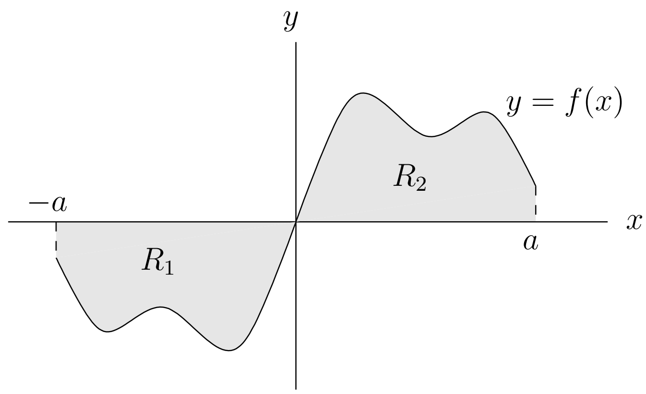


FIGURE 6.10 – Graphe d'une fonction impaire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l'origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

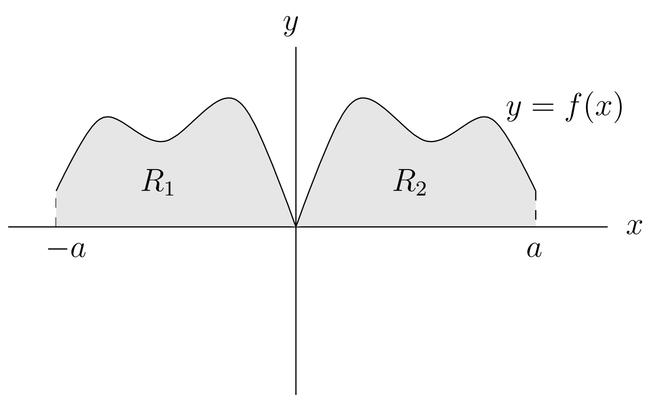


FIGURE 6.11 – Graphe d'une fonction paire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l'origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

Les propriétés suivantes découlent de la définition de l'intégrale :

Théorème 6.3.12
Soit a, b et c trois nombres réels. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle qui contient a, b et c, et si k est un nombre réel, alors

$$\int_a^b k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Voir figure 6.9 pour une interprétation graphique de la dernière règle du théorème précédent.

6.3.3 Évaluations des intégrales définies

Exemple 6.3.13
On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x) = x^2$ et les droites $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ (voir la figure 6.12).

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 2/k$ et $x_i = 1 + 2i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = [1 + \frac{2i}{k}, 1 + \frac{2(i+1)}{k}]$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = 1 + \frac{2i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\,\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{2i}{k}\right)^2 \frac{2}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{4i}{k} + \frac{4i^2}{k^2}\right) \frac{2}{k} \\ &= \frac{2}{k} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} 1\right)}_{=k} + \frac{8}{k^2} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} i\right)}_{=k(k-1)/2} + \frac{8}{k^3} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} i^2\right)}_{=k(k-1)(2k-1)/6} \end{aligned}$$

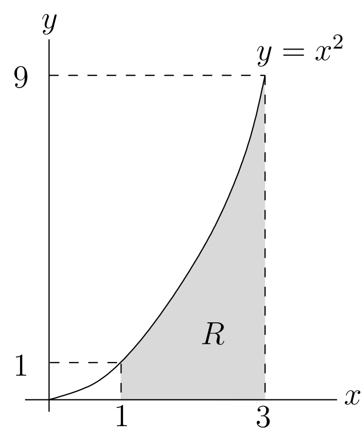


FIGURE 6.12 – L'aire de la région R définie à l'exemple 6.3.13 est donné par l'intégrale de $f(x) = x^2$ de 1 à 3

$$\begin{aligned}&= 2 + \frac{4(k-1)}{k} + \frac{4(k-1)(2k-1)}{3k^2}\\ &= \frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2}\ .\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_1^3 x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} G_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2}\right) = \frac{26}{3}\ .$$

♣

Exemple 6.3.14

On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 4/k$ et $x_i = -2 + 4i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = [-2 + \frac{4i}{k}, -2 + \frac{4(i+1)}{k}]$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = -2 + \frac{4i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned}G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\,\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1}\left(4 - \left(-2 + \frac{4i}{k}\right)^2\right)\frac{4}{k} = \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-16i^2}{k^2} + \frac{16i}{k}\right)\frac{4}{k}\\ &= \frac{-64}{k^3}\sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \frac{64}{k^2}\sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{-64}{k^3}\left(\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}\right) + \frac{64}{k^2}\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{32}{k} - \frac{32}{3k^2} + 32 - \frac{32}{k} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2}$$

Ainsi

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} G_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2}\right) = \frac{32}{3}\ .$$

♣

Exemple 6.3.15
Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}\ .$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

En effet, si $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ et $x_i = i\Delta x = \dfrac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, on obtient une partition de l'intervalle $[0, 1]$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\,\Delta x\ .$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x\ .$$

On va voir plus loin comment calculer cette intégrale. ♣

Exemple 6.3.16
Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}}\right)^2\ .$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}\ ,$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x$.

En effet, si $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + \dfrac{2i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, on obtient une partition de l'intervalle $[2, 4]$ et

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta x\ .$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_2^4 x^2 \,\mathrm{d}x \ .$$

♣

6.3.4 Déplacement

Le problème que nous considérons dans la présente section est classique. On montre comment l'intégrale peut être utilisée pour déterminer la distance parcourue par une voiture si on connaît sa vitesse en fonction du temps.

Soit $v(t)$, la vitesse en km/h d'une voiture au temps t en heures. Si on veut estimer la distance parcourue par la voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, on divise l'intervalle de temps $[a, b]$ en (petits) sous-intervalles de même longueur et on suppose que la vitesse de la voiture sur chacun des sous-intervalles de temps est constante.

Soit $k > 0$. On pose $\Delta t = (b-a)/k$ et $t_0 = a$, $t_1 = a+\Delta t$, $t_2 = a+2\,\Delta t$, $t_3 = a+3\,\Delta t$, $\ldots$, $t_k = a + k\,\Delta t = b$. Si $v(t_i^*)$ est la vitesse de la voiture mesurée au temps t_i^* dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et si on suppose que la voiture a voyagé à une vitesse constante durant cet intervalle de temps, alors la distance parcourue durant cet intervalle de temps est $v(t_i^*)\,\Delta t$ km. On note que la longueur de l'intervalle de temps Δt est en heures et la vitesse $v(t)$ est en km/h, ainsi $v(t_i^*)\,\Delta t$ est bien en kilomètres.

Si on fait cela pour chaque sous-intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$, on trouve que la distance parcourue par la voiture entre a et b heures est approximativement

$$\sum_{i=0}^{k-1} v(t_i^*)\,\Delta t \ .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale de la fonction v de a à b. Si on laisse k tendre vers l'infini, on obtient que la distance parcourue entre a et b heures est

$$p(b) - p(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.3.2}$$

où $p(t)$ est la position de la voiture au temps t.

La vitesse moyenne v_m de la voiture entre a et b heures est

$$v_m = \frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Remarque 6.3.17

Puisque p est une primitive de v car $p'(t) = v(t)$ pour tout t, l'équation (6.3.2) suggère la méthode suivante pour évaluer l'intégrale définie d'une fonction f. Si F est une primitive de f, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

Est-ce vrai pour toute fonction f ? Nous donnerons une réponse affirmative à cette question pour les fonctions continues f lorsque nous présenterons le Théorème fondamental du calcul. ♠

Exemple 6.3.18
Antoine et Antoinette travaillent tous les deux sur la colline parlementaire à Ottawa. Comme ils travaillent pour des partis politiques différents, ils ne se connaissent pas. Ils ont quand même un intérêt commun pour la peinture et décident d’aller à Montréal pour visiter le Musée d’Arts Contemporain. Ils partent tous les deux pour Montréal après leur journée d’ouvrage du vendredi. Antoine part à 17h00 et Antoinette à 18h00. Ils arrivent au Musée d’Arts Contemporain en même temps.

On trouve à la figure 6.13, la vitesse en fonction du temps pour les voitures d’Antoine et d’Antoinette lors du voyage pour se rendre à Montréal. $v_1(t)$ est la vitesse de la voiture d’Antoine au temps t en heures et $v_2(t)$ est la vitesse de la voiture d’Antoinette au temps t en heures. Vérifiez qu’ils parcourent 210 km chacun.

a) Quelle distance a parcouru Antoine quand Antoinette part ?

La distance parcourue par Antoine après la première heure est l’intégrale de la vitesse v_1 de $t = 17$ à $t = 18$. Cette intégrale correspond à l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18$. On trouve 55 km.

b) À quel moment la distance entre Antoine et Antoinette est la plus grande ? Quelle est cette distance ?

Le seul moment où la distance entre Antoine et Antoinette peut passer de croissante à décroissante et vice-versa est lorsque la voiture d’Antoine et la voiture d’Antoinette vont à la même vitesse. Cela arrive à $t = 18.25$ (i.e. 18h15) et $t = 20.25$ (i.e. 20h15).

Avant $t = 18.25$, Antoine va plus vite que Antoinette. À $t = 18.25$, la distance parcourue par Antoine est l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18.25$, soit 78.75 km, et la distance parcourue par Antoinette est l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 18.25$, soit 21.25 km. Antoine a donc $78.75 - 21.25 = 57.5$ km. d’avance sur Antoinette.

Entre $t = 18.25$ et $t = 20.25$, la voiture d’Antoinette va plus vite que celle d’Antoine et Antoinette gagne du terrain sur Antoine.

À $t = 20.25$, la distance parcourue par Antoine est l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 20.25$, soit 196.25 km, et la distance parcourue par Antoinette est l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 20.25$, soit 198.75 km. Antoinette a maintenant $198.75 - 196.25 = 2.5$ km. d’avance sur Antoine.

Entre $t = 20.25$ et $t = 20.50$, la voiture d’Antoine va plus vite que celle d’Antoinette et Antoine gagne du terrain sur Antoinette pour arriver au Musée d’Arts Contemporain en même temps que Antoinette.

La plus grande distance entre la voiture d’Antoine et d’Antoinette est donc de 57.5 km.

c) À quel moment Antoinette rattrape-t-elle Antoine ?

Si T est le temps où Antoinette rattrape Antoine, il faut que l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq T$ soit égale à l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq T$.

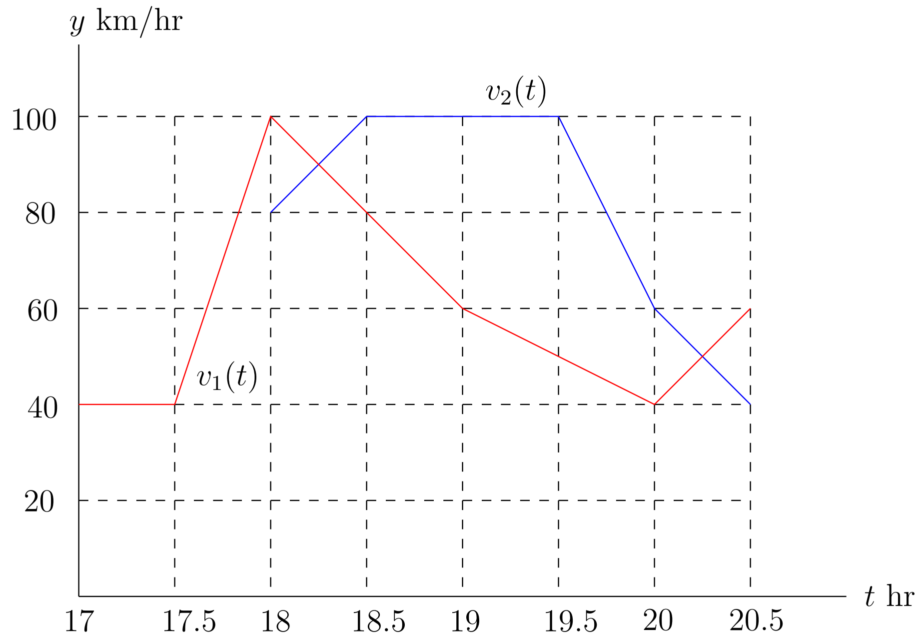


FIGURE 6.13 – La vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette

À $T = 20$ (i.e. 20h00), Antoine et Antoinette on parcouru 185 km. Après 20h00, Antoinette devance Antoine.

L'histoire ne dit pas si Antoine et Antoinette se sont rencontrés au Musée d'Arts Contemporain. De plus, Ils auraient pu faire du co-voiturage pour diminuer leur impact sur l'environnement.

♣

6.3.5 L'intégrale de Riemann (Stieljes)

La définition de l'intégrale que nous avons donnée à la page 316 est valable pour les fonctions continues par morceaux. Le fait que l'intégrande soit une fonction continue par morceaux permet de démontrer que la limite en (6.3.1) ne dépend pas du choix de partitions de l'intervalle d'intégration et du choix des points x_i^*.

La définition de l'intégrale définie d'une fonction que nous donnons dans cette section généralise celle donnée à la page 316.

On crédite Riemann (et Stieljes) pour la définition de l'intégrale définie que voici.

Soit f, une fonction bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, une partition de l'intervalle $[a, b]$. C'est-à-dire que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k = b$.

Pour $0 \leq i < k$, on pose

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_{i+1} - x_i \ , \\ m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)\end{aligned}$$

et

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \ .$$

Δx_i est la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. m_i est la plus grande valeur telle que $m_i \leq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et M_i est la plus petite valeur telle que $M_i \geq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

La **somme inférieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à $\mathcal{P}$ est

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} m_i \, \Delta x_i$$

(voir figure 6.14) et la **somme supérieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à $\mathcal{P}$ est

$$U_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} M_i \, \Delta x_i$$

(voir figure 6.15).

Soit

$$L = \sup\{L_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}$$

et

$$U = \inf\{U_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\} \ .$$

Si $U = L$, on dit que **f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle** $[a, b]$ et on écrit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = L = U \ .$$

Les fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ sont intégrables au sens de Riemann et la formule donnée en (6.3.1) est satisfaite.

Nous utilisons la formule (6.3.1) pour calculer les intégrales définies de fonctions continues par morceaux car elle est plus simple que celle que nous venons de donner ci-dessus.

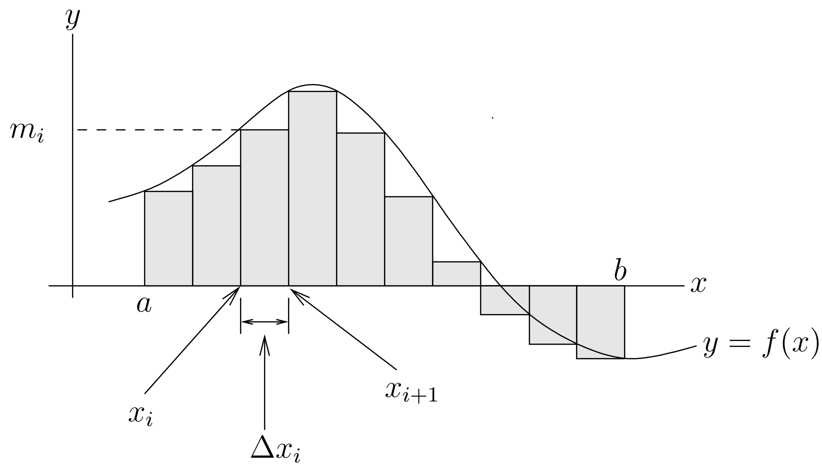


FIGURE 6.14 – Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

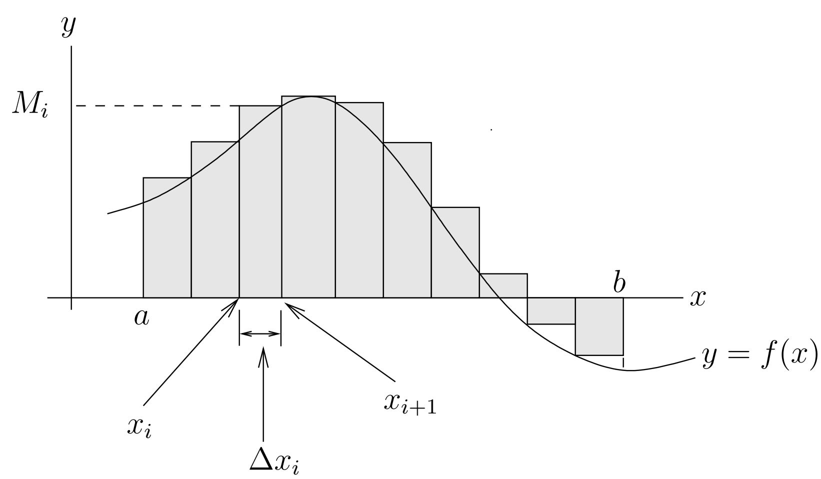


FIGURE 6.15 – Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

6.4 Théorème fondamental du calcul

Dans cette section, nous verrons comment le calcul des intégrales indéfinies peut quelques fois être utilisé pour évaluer les intégrales définies. Par contre, dans les applications réelles, les intégrales définies sont plus fréquemment évaluées avec un ordinateur à partir de la définition de l'intégrale définie ou d'un algorithme qui découle de cette définition. Nous verrons quelques algorithmes pour évaluer numériquement les intégrales définies dans une prochaine section.

6.4.1 Première version du théorème fondamental du calcul

À la section 6.3.4, nous avons observé que pour évaluer la distance parcourue par une voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, il suffisait de calculer l'intégrale définie de la vitesse $v(t)$ de la voiture au temps t de $t = a$ à $t = b$. De plus, à la remarque 6.3.17, on a noté qu'on pouvait remplacer le calcul de l'intégrale avec les sommes de Riemann par la valeur $p(b) - p(a)$ où $p(t)$ est la primitive de la vitesse $v(t)$; c'est-à-dire, $p'(t) = v(t)$. C'est essentiellement l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 6.4.1 (Théorème fondamental du calcul)
Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et si F est une fonction différentiable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$ sur $[a, b]$ (i.e. F est une primitive de f), alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{b} \equiv F(b) - F(a)\ .$$

Remarque 6.4.2
On peut motiver le théorème précédent de la façon suivante.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ une partition $\mathcal{P}$ de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx. Grâce au théorème de la moyenne, il existe x_i^* entre x_i et x_{i+1} tel que

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(x_i^*) = f(x_i^*)$$

pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Ainsi,

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i^*)\Delta x_i$$

pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$. On obtient la somme de Riemann

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) \\ &= \left(F(x_1) - F(x_0)\right) + \left(F(x_2) - F(x_1)\right) + \left(F(x_3) - F(x_2)\right) + \ldots + \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right) \\ &= F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a)\ . \end{aligned}$$

Pour k suffisamment grand, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_k = F(b) - F(a) \ .$$

C'est essentiellement l'idée de la démonstration du théorème fondamental du calcul. ♠

Exemple 6.4.3
Si f est la **distribution de densité** d'une population en fonction de l'âge en années, alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$$

est le pourcentage de la population âgée entre α et β ans. Si T est l'âge maximal des individus de cette population, on doit avoir

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \ .$$

C'est-à-dire, 100% de la population est âgé de 0 à T ans.

Si on suppose que l'âge maximum des individus d'une population animale est 10 ans et que la distribution de densité de cette population en fonction de l'âge est donnée par $f(t) = 0.006\,t(10-t)$ pour $0 \leq t \leq 10$ années, quel est le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans ?

Le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans est donné par

$$\int_2^7 0.006\,t(10-t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut trouver une primitive de $f(t) = 0.006\,t(10-t)$.

$$\int 0.006\,t(10-t)\,\mathrm{d}t = 0.06 \int t\,\mathrm{d}t - 0.006 \int t^2\,\mathrm{d}t = 0.03t^2 - 0.002t^3 + C \ .$$

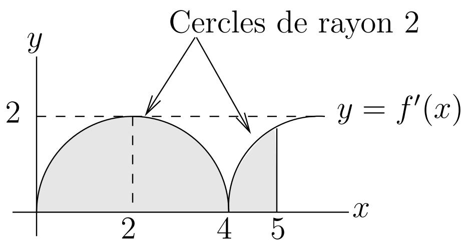
Puisque l'on a besoin d'une seule primitive, on peut prendre $C = 0$ Donc,

$$\int_2^7 0.006\,t(10-t)\,\mathrm{d}t = \left(0.03\,t^2 - 0.002\,t^3\right)\bigg|_{t=2}^{7} = 0.784 - 0.104 = 0.68$$

et 68% de la population animale est entre 2 et 7 ans. ♣

Remarque 6.4.4
À l'exemple précédent, l'intégrale de la fonction de densité de 2 à 7 nous donne le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans. Est-ce que cela inclus les individus âgés de précisément 2 et 7 ans ? En fait, que ceux âgés de précisément 2 et 7 ans soient inclus ou non n'a pas d'importance car il y a probablement aucun individu âgé de précisément 2 et 7 ans. Quelle est la chance qu'un individu de l'espèce animale soit âgé de précisément 2 ou 7 ans ? Mathématiquement, il n'y a aucune chance. Peut-être que l'individu aura deux ans et une seconde, ou deux ans et un centième de seconde, mais la chance qu'il est exactement 2 ans est nulle. ♠

Exemple 6.4.5
Le graphe de la dérivée d'une fonction f est donnée dans la figure suivante :



Si $f(0) = 3$, quelle est la valeur de $f(5)$?

Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x)\,dx = 3 + \int_0^5 f'(x)\,dx \ .$$

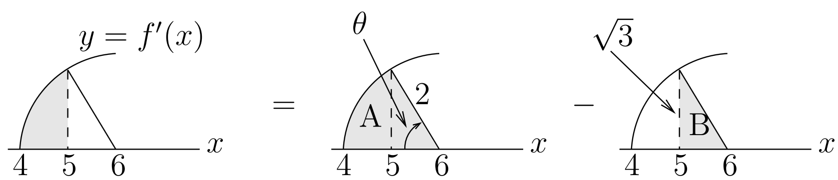
Il faut donc calculer l'aire sous la courbe $y = f'(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$. Or

$$\int_0^5 f'(x)\,dx = \int_0^4 f'(x)\,dx + \int_4^5 f'(x)\,dx \ .$$

Puisque $\displaystyle\int_0^4 f'(x)\,dx$ représente la moitié de l'aire du disque de rayon 2, on a que

$$\int_0^4 f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(2^2\pi) = 2\pi \ .$$

Pour évaluer l'intégrale de f' entre 4 et 5, on utilise la figure suivante :



L'angle θ est donnée par $\cos(\theta) = 1/2$. Donc, $\theta = \pi/3$. Ainsi, l'aire de la région A est un sixième de l'aire du disque de rayon 2 ; c'est-à-dire, l'aire de A est $2^2\pi/6 = 2\pi/3$. L'aire du triangle B est $\sqrt{3}/2$. Donc,

$$\int_4^5 f'(x)\,dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

On obtient

$$f(5) = 3 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} + \frac{6-\sqrt{3}}{2} \ .$$

♣

Exemple 6.4.6

Évaluer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Grâce au théorème fondamental du calcul, nous n'avons plus à utiliser la définition de l'intégrale définie (et donc les sommes de Riemann) pour évaluer ces intégrales.

a)

$$\begin{aligned}\int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_4^9 \left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t &= \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln(t)\right)\Bigg|_{t=4}^{9} \\ &= \left(\frac{9^2}{2} + 2\times 9 + \ln(9)\right) - \left(\frac{4^2}{2} + 2 \times 4 + \ln(4)\right) \\ &= \frac{85}{2} + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

car $t^2/2 + 2t + \ln(t)$ est une primitive de $t + 2 + 1/t$.

b)

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)\Big|_{x=0}^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

car $\arcsin(x)$ est une primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$. ♣

Remarque 6.4.7
Le théorème fondamental du calcul est indépendant de la primitive F qui est utilisée dans la formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$

Si G est une autre primitive de f, on a vu qu'il existait une constante C telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$$

car $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. ♠

La règle de substitution prend une forme particulière dans le contexte des intégrales définies.

Théorème 6.4.8
Si

1. g est une fonction différentiable (croissante ou décroissante),
2. F est la primitive d'une fonction f, et
3. f et F sont définies sur l'image de $[a, b]$ par g,

alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = F(g(b)) - F(g(a))\ .$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose $y = g(x)$, alors $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{=y})\,\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}y} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

On rappelle que le symbole $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas une égalité algébrique, il indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y.

Exemple 6.4.9
Évaluer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **c**) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **e**) $\displaystyle\int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\,\mathrm{d}t$

a) Si on pose $y = x^3+5$, on a $\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$. De plus $y = 6$ pour $x = 1$ et $y = 32$ pour $x = 3$. Donc,

$$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^3+5}}\,3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_6^{32}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\sqrt{y}\bigg|_{y=6}^{32} = \frac{2}{3}(4\sqrt{2}-\sqrt{6})\ .$$

b) Si on pose $y = -\cos(\theta)$, on a $\mathrm{d}y = \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. De plus $y = -1$ pour $\theta = 0$ et $y = 0$ pour $\theta = \pi/2$. Donc,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^0 e^y\,\mathrm{d}y = e^y\bigg|_{y=-1}^{0} = 1 - e^{-1}\ .$$

c) si on pose $y = x^2$, on a $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. De plus $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = 1/2$ pour $x = 1/\sqrt{2}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\arcsin(y)\bigg|_{y=0}^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi}{12}\ .\end{aligned}$$

d) Si on pose $y = \sqrt{x}$,on a $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. De plus $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = \pi$ pour $x = \pi^2$. Donc,

$$\int_0^{\pi^2}\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi^2}\cos(\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\cos(y)\,\mathrm{d}y = 2\sin(y)\bigg|_{y=0}^{\pi} = 0\ .$$

e) Si on pose $y = 5 - t$, on a $\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}t$ et $t + 7 = 12 - y$. De plus $y = 5$ pour $t = 0$ et $y = 1$ pour $t = 4$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\,\mathrm{d}t &= -\int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\,(-1)\,\mathrm{d}t = -\int_5^1 \frac{12-y}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^5 \left(12y^{-1/2} - y^{1/2}\right)\mathrm{d}y = \left(24y^{1/2} - \frac{2}{3}y^{3/2}\right)\Big|_{y=1}^{5} = \frac{62}{3}\sqrt{5} - \frac{70}{3}\ .\end{aligned}$$

♣

Remarque 6.4.10

Comme dans le cas des intégrales indéfinies, il est préférable à l'occasion d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On a l'intégrale de gauche et il faut obtenir l'intégrale de droite. Il faut trouver a et b qui donneront les bornes d'intégration $g(a)$ et $g(b)$ de l'intégrale de gauche. ♠

À l'instar de la règle de substitution, la règle d'intégration par parties prend la forme suivante.

Définiton 6.4.11

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Exemple 6.4.12

Évaluer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 (5x+2)e^{3x}\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

a) On a $(5x+2)\,e^{3x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 5x+2$ et $g'(x) = e^{3x}$. Donc, $f'(x) = 5$, $g(x) = e^{3x}/3$ et

$$\begin{aligned}\int_1^3 (5x+2)e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=1}^{3} - \int_1^3 g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}(5x+2)e^{3x}\Big|_{x=1}^{3} - \frac{5}{3}\int_1^3 e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(5x+2)e^{3x}\Big|_{x=1}^{3} - \frac{5}{9}e^{3x}\Big|_{x=1}^{3} \\ &= \frac{17}{3}\,e^9 - \frac{7}{3}\,e^3 - \frac{5}{9}\,e^9 + \frac{5}{9}\,e^3 = \frac{46}{9}\,e^9 - \frac{16}{9}\,e^3\ .\end{aligned}$$

b) On a $\arctan(t) = f(t)g'(t)$ où $f(t) = \arctan(t)$ et $g'(t) = 1$. Donc, $f'(t) = 1/(1+t^2)$, $g(t) = t$ et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 g(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= t\arctan(t)\Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Or, si on pose $y = 1+t^2$, on obtient $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$. De plus, $y = 1$ lorsque $t = 0$ et $y = 2$ lorsque $t = 1$. Donc,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(y)\Big|_{y=1}^2 = \frac{1}{2}\ln(2)\ .$$

Finalement,

$$\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)\ .$$

♣

6.4.2 Deuxième version du théorème fondamental du calcul

Théorème 6.4.13 (**Deuxième version du théorème fondamental du calcul**)
Si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in [a,b]\ ,$$

est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $F'(c) = f(c)$ aux points c où f est continue. En particulier, si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors F est une primitive de f ; c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[a,b]$.

Exemple 6.4.14
Une des plus importantes fonctions en statistique est la fonction de densité

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart type.

Une variable X est dite **aléatoire** si elle représente le résultat d'une expérience que l'on ne peut pas prédire exactement. Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est une variable aléatoire. Si on dit que la durée de vie moyenne d'une ampoule est 400 heures, cela veut dire que certaines ampoules dureront un peut plus de 400 heures et d'autres un peu moins de 400 heures. On ne peut pas déterminer exactement la durée de vie d'une ampoule spécifique.

On dit que la variable aléatoire X possède une **distribution normale** de **moyenne** μ et de **d'écart type** σ si la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b est

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

C'est-à-dire que l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, et les droites $x = a$ et $x = b$ est la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b. À la figure 6.16, on retrouve le graphe de la fonction de densité pour $\mu = 400$ et $\sigma = 20$.

Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est normalement distribuée avec une durée de vie moyenne de 400 heures et un écart type de 20 heures.

Il n'existe pas de fonction connue qui soit la primitive de f. Par contre, la deuxième version du théorème fondamental du calcul affirme l'existence d'une primitive pour f. Une primitive de f est

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Pour évaluer la fonction F, on doit calculer numériquement (e.g. avec les sommes de Riemann) cette intégrale. ♣

Exemple 6.4.15

Calculer la dérivée de $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} (1+s^2)^{3/2}\,\mathrm{d}s$.

Posons,

$$G(u) = \int_1^u (1+s^2)^{3/2}\,\mathrm{d}s \qquad \text{et} \qquad H(x) = x^2\ .$$

Alors $F(x) = G(H(x))$ et $F'(x) = G'(H(x))\,H'(x)$. La deuxième version du théorème fondamental du calcul nous donne $G'(u) = (1+u^2)^{3/2}$. Ainsi, puisque $H'(x) = 2x$, on obtient

$$F'(x) = G'(H(x))\,H'(x) = \left(1 + \left(x^2\right)^2\right)^{3/2} \left(2x\right) = 2x\left(1+x^4\right)^{3/2}\ .$$

♣

Remarque 6.4.16

Si f est continue au point c, la deuxième version du théorème fondamental du calcul nous assure que $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$ est différentiable au point c et que $F'(c) = f(c)$. Si f n'est pas continue au point c, on ne peut rien affirmer.

Prenons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}\ .$$

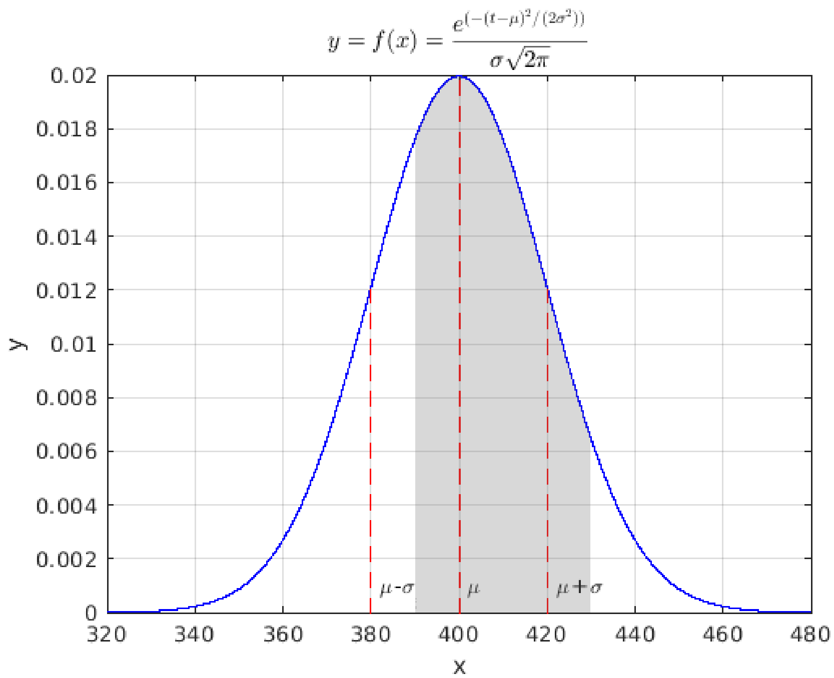


FIGURE 6.16 – La fonction de densité pour la distribution normale de moyenne $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 20$. L'aire de la région en gris représente la probabilité que la variable aléatoire X soit entre 390 et 430.

On a

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Donc, F est une fonction continue comme il est prédit par la deuxième version du théorème fondamental du calcul car f est continue par morceaux. On retrouve le graphe de f et de F à la figure 6.17.

Par contre, F n'est pas différentiable au point $x = 1$ où f n'est pas continue. ♠

6.5 L'intégrale impropre

6.5.1 Intégrale sur un intervalle d'intégration de longueur infinie

Jusqu'à présent nous avons évalué des intégrales de la forme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

où les bornes d'intégration a et b sont des nombres réels.

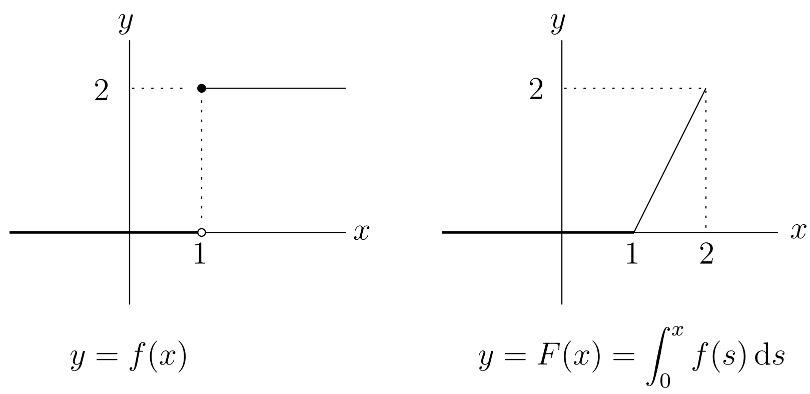


FIGURE 6.17 – Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$

Pour tout entier positif k, le fait que l'intervalle $[a, b]$ soit de longueur finie nous a permis de définir le nombre réel $\Delta x = (b - a)/k$ représentant la longueur de chacun des sous-intervalles d'une partition de l'intervalle $[a, b]$. Les k sous-intervalles ainsi obtenus étaient de la forme $[x_I, x_{i+1}]$ où $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Pour tout entier positif k, on a un nombre fini de sous-intervalles et donc une somme de Riemann avec un nombre fini de termes.

Il serait utile et naturel de définir l'intégrale sur des intervalles de longueur infinie de la forme $[a, \infty[$ où $]-\infty, b]$. On ne peut pas utiliser littéralement notre définition de l'intégrale définie pour définir une intégrale sur un intervalle de longueur infinie comme $[a, \infty[$ et $]\infty, b]$ car, pour un intervalle de longueur infinie, il est impossible de définir Δx comme le rapport de la longueur de l'intervalle sur le nombre k de sous-intervalles. Il faut regarder le problème d'un angle différent. Si on fixe la valeur de Δx, alors il faut un nombre infini d'intervalles de longueur Δx pour décomposer l'intervalle d'intégration de longueur infinie. Les sommes de Riemann auront alors un nombre infini de termes.

On peut tout de même utiliser l'existence des intégrales définies sur les intervalles bornés pour définir l'intégrale sur un intervalle de longueur infinie.

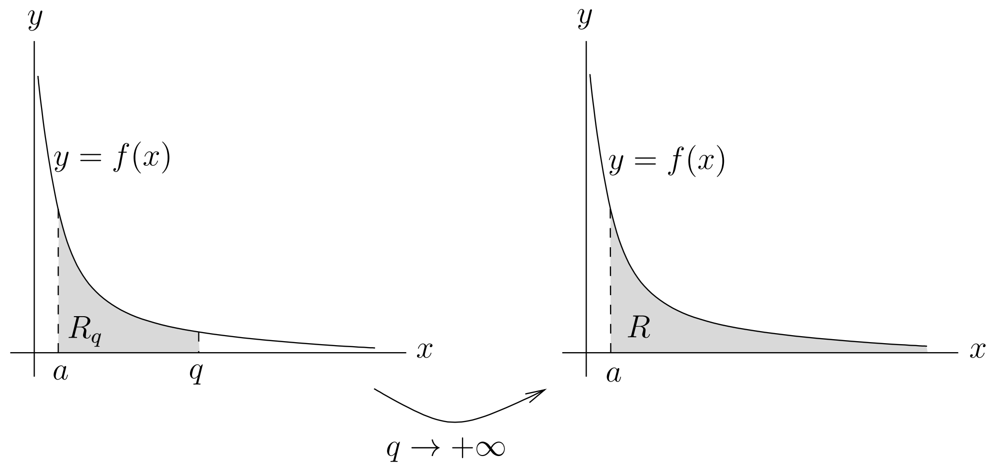


FIGURE 6.18 – L'intégrale de f de a à plus l'infini est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers plus l'infini. On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$.

Définiton 6.5.1
Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $[a, \infty[$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à plus l'infini** comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty} \int_a^q f(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, b]$. On définit **l'intégrale impropre de f de moins l'infini à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$ comme on peut le voir à la figure 6.18. On peut énoncer un résultat semblable pour $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 6.5.2
Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x$.

Par définition,
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x$$
si cette limite existe. Or, avec la substitution $y = x-1$, on obtient $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ et
$$\int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x = \int_{q-1}^{-2} y^{-4/3}\,\mathrm{d}y = \left(-3y^{-1/3}\right)\Big|_{y=q-1}^{-2} = \frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}}\ .$$
Ainsi,
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty}\left(\frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}}\right) = \frac{3}{2^{1/3}}\ .$$
♣

Exemple 6.5.3
Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Par définition,
$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} \int_1^{q} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$$
si cette limite existe. Or,
$$\int_1^{q} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$$
peut être intégrée à l'aide de la règle d'intégration par parties. On a $x^{-3}\ln(x) = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^{-3}$. Ainsi, $f'(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\frac{1}{2}\,x^{-2}$ et
$$\begin{aligned}
\int_1^q x^{-3}\ln(x)\,\mathrm{d}x &= -\left(\frac{1}{2}\,x^{-2}\ln(x)\right)\Big|_{x=1}^{q} + \int_1^q \frac{1}{2}\,x^{-3}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(\frac{1}{2}\,x^{-2}\ln(x)\right)\Big|_{x=1}^{q} - \left(\frac{1}{4}\,x^{-2}\right)\Big|_{x=1}^{q} \\
&= -\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} \int_1^{q} \frac{\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\left(-\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$
car, par la règle de l'Hospital, on a
$$\lim_{q\to\infty} \frac{\ln(q)}{q^2} = \lim_{q\to\infty} \frac{q^{-1}}{2q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{2q^2} = 0\ .$$
♣

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale impropre converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

Pour $p \neq 1$,

$$\int_1^q x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{-p+1}\,x^{-p+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{q} = \frac{1}{1-p}\,q^{1-p} - \frac{1}{1-p}\ .$$

Pour $p = 1$,

$$\int_1^q x^{-p}\,\mathrm{d}x = \int_1^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln(x))\Bigg|_{x=1}^{q} = \ln(q)\ .$$

Ainsi, pour $p > 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to+\infty}\int_1^q x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}\,q^{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)\\ &= \lim_{q\to+\infty}\left(\frac{1}{(1-p)q^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

car $p - 1 > 0$.

Pour $p < 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty}\int_1^q x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}\,q^{-p+1} - \frac{1}{1-p}\right) = +\infty$$

car $1 - p > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty}\int_1^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty}\ln(q) = \infty\ .$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 6.5.4

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leq 1$. De plus,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1} \quad , \quad p > 1\ .$$

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ par $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ où a est un nombre réel quelconque.

Exemple 6.5.5

Évaluer si possible l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut diviser le domaine d'intégration en deux. On va évaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \ .$$

On aurait pu choisir une autre valeur que 0 pour partager le domaine d'intégration. Cela ne change rien à la réponse finale, pourquoi ?

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \arctan(u) + C = \arctan(x+1) + C\end{aligned}$$

grâce à la substitution $u = x+1$ et $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to-\infty} \int_{q}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to-\infty} \arctan(x+1)\Big|_{x=q}^{0} \\ &= \lim_{q\to-\infty} \left(\arctan(1) - \arctan(q)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty} \int_{0}^{q} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} \arctan(x+1)\Big|_{x=0}^{q} \\ &= \lim_{q\to\infty} \left(\arctan(q) - \arctan(1)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \ .\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi \ .$$

♣

Exemple 6.5.6

Évaluer si possible l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

On utilise la règle d'intégration par parties pour évaluer $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On a $xe^{-x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Ainsi, $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C \ .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty} \int_0^{q} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty} \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{q} \\ &= \lim_{q\to\infty} \left(-qe^{-q} - e^{-q} + 1\right) = 1\end{aligned}$$

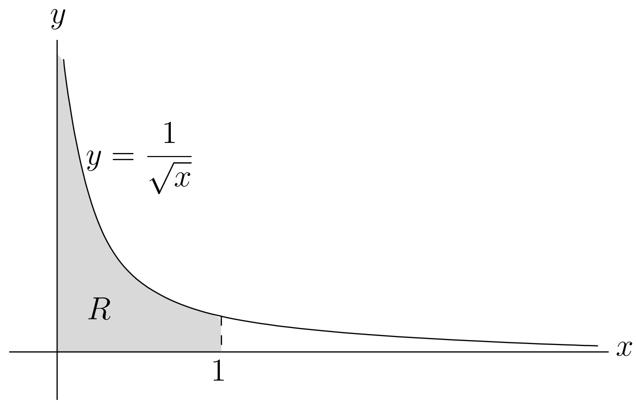


FIGURE 6.19 – La région R est la région bornée par la courbe $y = f(x) = 1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

car
$$\lim_{q\to\infty} e^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{e^q} = 0$$
et
$$\lim_{q\to\infty} qe^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{q}{e^q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{e^q} = 0 \ .$$
Pour le calcul de cette dernière limite, nous avons utilisé la règle de l'Hospital pour obtenir la deuxième égalité car $\lim_{n\to\infty} q = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} e^q = +\infty$. ♣

6.5.2 Intégrale avec un intégrande non borné

Une autre situation où il serait utile de définir l'intégrale est lorsque l'intégrande n'est pas borné. Par exemple, peut-on définir l'intégrale de façon à pouvoir l'utiliser pour calculer l'aire A de la région R de la figure 6.19 qui est bornée par la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

On défini respectivement ci-dessous ce que sera l'intégrale d'une fonction $f\ :]a, b] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = a$, et l'intégrale d'une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = b$.

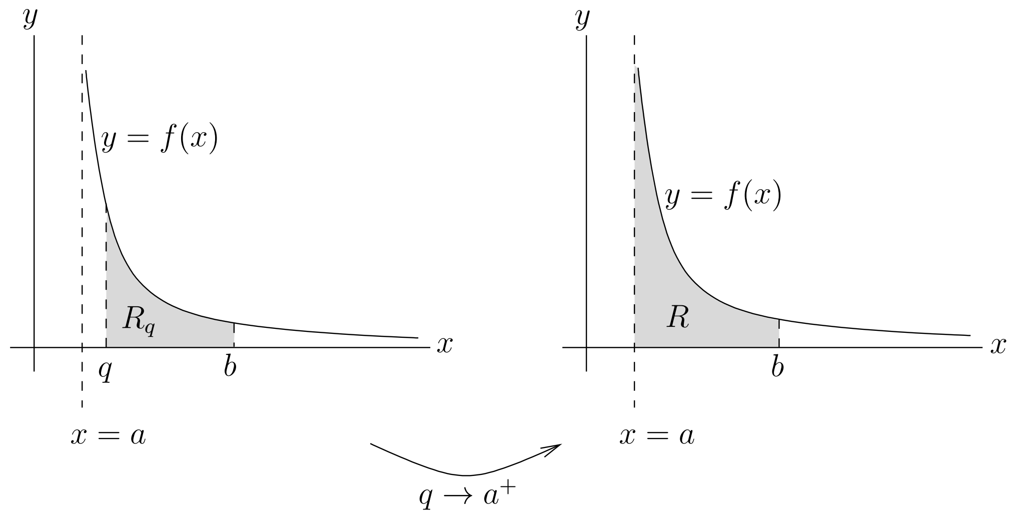


FIGURE 6.20 – L'intégrale de f de a à b est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers a. On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Définiton 6.5.7
Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $]a, b]$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to a^+} \int_q^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$. On définit **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to b^-} \int_a^q f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x, ces intégrales impropres représentent l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$ comme on peut le voir à la figure 6.20.

Exemple 6.5.8
Évaluez l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Puisque $x = 0$ est une asymptote verticale pour $f(x) = 1/\sqrt{x}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_q^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left(2x^{1/2}\right)\Big|_{x=q}^{1} = 2 - 2\sqrt{q}\ .$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} (2 - 2\sqrt{q}) = 2\ .$$

♣

Exemple 6.5.9

Déterminez si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ converge ou diverge. Si elle converge, donner la valeur de l'intégrale.

On note que $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)}$$

a une asymptote verticale à $x = 2$. Le graphe de f est donné à la figure 6.21. Ainsi, il faut déterminer si

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$$

existe.

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la méthode des fractions partielles. C'est-à-dire que l'on détermine les variables A et B telles que

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\ .$$

Si on écrit ces fractions sur un même commun dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x-2)}\ .$$

On a égalité lorsque l'on a le même numérateur des deux côtés de l'égalité ; c'est-à-dire si $1 = A(x-2) + B(x+3)$. Pour $x = -3$, on obtient $1 = -5A$ et ainsi $A = -1/5$. Pour $x = 2$, on obtient $1 = 5B$ et ainsi $B = 1/5$. On a donc que

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}\right)\ .$$

Ainsi,

$$\int_0^q \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^q \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^q \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

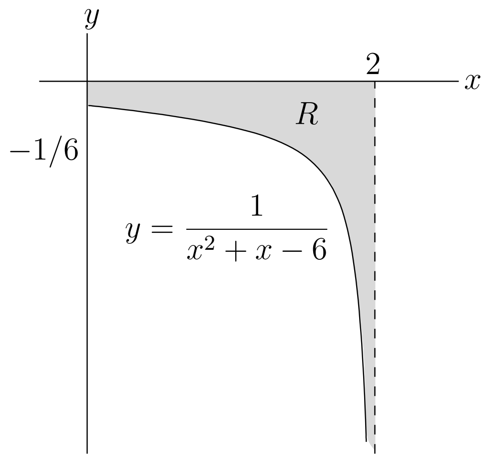


FIGURE 6.21 – Graphe de $y = \dfrac{1}{x^2+x-6}$ pour $0 \leq x < 2$.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{5}\ln(x+3)\Big|_{x=0}^{q} + \frac{1}{5}\ln|x-2|\Big|_{x=0}^{q} \\
&= -\frac{1}{5}\left(\ln(q+3) - \ln(3) - \ln|q-2| + \ln(2)\right) \\
&= -\frac{1}{5}\left(\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln(2/3)\right) \ .
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{q\to 2^-} \ln|q-2| = -\infty$ et $\lim_{q\to 2^-} \ln(q+3) = \ln(5)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to 2^-}\int_0^q \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{5}\lim_{q\to 2^-}\left(\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -\infty \ .
\end{aligned}$$

Donc, l'intégrale diverge. ♣

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+}\int_q^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x$$

Pour $p \neq 1$,

$$\int_q^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{-p+1}\,x^{-p+1}\right)\Big|_{x=q}^{1} = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\,q^{1-p} \ .$$

Pour $p = 1$,

$$\int_q^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \int_q^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln(x))\Big|_{x=q}^{1} = -\ln(q) \ .$$

Ainsi, pour $p < 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \int_q^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\, q^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

car $1-p > 0$.

Pour $p > 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to 0^+} \int_q^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\, q^{1-p} \right) \\ &= \lim_{q\to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)q^{p-1}} \right) = \infty\end{aligned}$$

car $p-1 > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{q\to 0^+} \ln(q) = \infty\ .$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 6.5.10
$\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ converge pour $p < 1$ et diverge pour $p \geq 1$. De plus, $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}$ pour $p < 1$.

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ par $\displaystyle \int_0^a \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ où $a > 0$ est un nombre réel quelconque.

Remarque 6.5.11 👁
La proposition 6.5.10 peut être déduite de la proposition 6.5.4 et vice-versa. Si on pose $t = 1/x$, on a $\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_1^q \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^q \frac{-1}{x^{p-2}} \left(\frac{-1}{x^2} \right) \mathrm{d}x = -\int_1^{1/q} \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Les énoncés suivants sont équivalents.

la proposition 6.5.4 est vrai.

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ existe si et seulement si $p > 1$.

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{q\to\infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $p > 1$.

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle \lim_{q\to\infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $2-p < 1$.

$\Leftrightarrow \lim_{q\to 0} \int_q^1 \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $2-p<1$.
$\Leftrightarrow$ la proposition 6.5.10 est vrai.

On obtient la conclusion de la proposition 6.5.10 à partir de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ en y remplaçant $2-p$ par p. ♠

6.6 Test de comparaison

Il est généralement difficile d'évaluer algébriquement les intégrales. C'est encore plus évident dans le cas des intégrales impropres. On a donc souvent recours aux méthodes numériques pour estimer la valeur des intégrales impropres. Avant d'estimer numériquement une intégrale impropre, il est nécessaire de déterminer si elle converge. Le fait que les calculs numériques d'une intégrale impropre produisent des valeurs supérieures à ce qu'un ordinateur peut traiter (on parle de « overflow ») n'indique pas que l'intégrale impropre diverge. Il se pourrait très bien que la valeur de l'intégrale soit en fait une valeur plus grande que l'ordinateur peut traiter. Il est aussi possible que ce problème soit dû à des erreurs de troncature ou à l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique inappropriée.

Nous présentons un test pour déterminer si une intégrale impropre converge ou diverge. Les propositions 6.5.4 et 6.5.10 seront d'une très grande utilité.

Théorème 6.6.1 (Test de comparaison)
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]a,b[$. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondent à des asymptotes verticales pour les fonctions f et g.

1. Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge alors $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Dans le cas où f et g sont continues sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et $b=\infty$, le théorème précédent est une conséquence de la relation $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour toux x dans l'intervalle $[a,+\infty[$. En effet, il découle de cette dernière inégalité que

$$0 \leq \int_a^q f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^q g(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.6.1}$$

pour tout $q \geq a$. Définissons les fonctions

$$F(q) = \int_a^q f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.6.2}$$

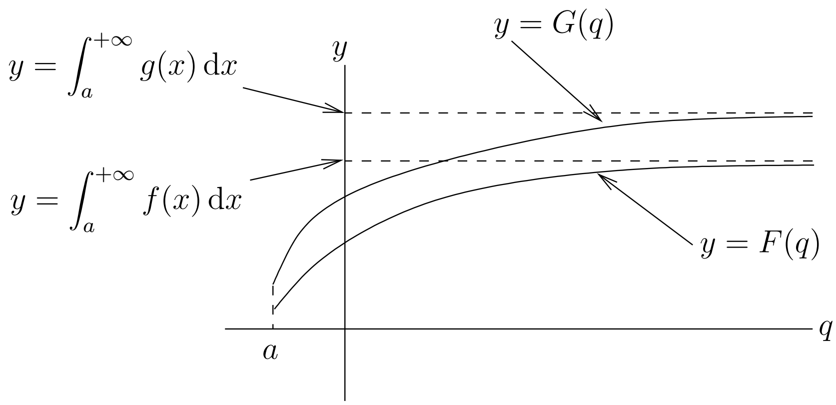


FIGURE 6.22 – Représentation qualitative du graphe des fonctions F et G définies en (6.6.2) et (6.6.3) respectivement.

et

$$G(q) = \int_a^q g(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.6.3}$$

Puisque f et g sont deux fonctions positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$, les fonctions F et G sont positives et croissantes (l'aire sous la courbe augmente lorsque q augmente). De plus, (6.6.1) devient $0 \leq F(q) \leq G(q)$ pour tout q.

Si on suppose que

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty} G(q)$$

converge, alors F est une fonction croissante bornée supérieurement par

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Il s'en suit que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to+\infty} F(q)$$

converge grâce au théorème 2.1.20. On retrouve à la figure 6.22 deux graphes qui peuvent représenter qualitativement les graphes de F et G.

Par contre si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge alors F est une fonction qui croit sans limite supérieure. Il en est donc de même pour G car $F(q) \leq G(q)$ pour tout q. Ainsi, $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} G(q) = +\infty$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

La justification du test de comparaison pour les autres types d'intégrales impropres est semblable.

Exemple 6.6.2

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3-x+1}\,\mathrm{d}x$

a) Puisque
$$0 \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$
pour tout $x \geq 1$ et
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
converge (c'est le cas $p > 1$ de la proposition 6.5.4), on a que
$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
converge grâce au test de comparaison.

b) On commence par remarquer que $\dfrac{x^2}{x^3-x+1} > 1/x$ pour $x \geq 1$. En effet, pour $x \geq 1$, on a $0 \geq 1-x$ et ainsi
$$x^3 \geq x^3 - x + 1 \ . \tag{6.6.4}$$
La fonction $p(x) = x^3 - x + 1$ est croissante pour $x \geq 1$ car $p'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ pour $x \geq 1$. Ainsi, $x^3 - x + 1 = p(x) \geq p(1) = 1 > 0$ pour $x \geq 1$. On peut donc diviser les deux cotés de l'inégalité en (6.6.4) par $x(x^3 - x + 1)$ sans changer la direction de l'inégalité et sans risquer de diviser par zéro. On obtient
$$\frac{x^2}{x^3-x+1} \geq \frac{1}{x}$$
pour $x \geq 1$.

Puisque
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
diverge (c'est le cas $p \leq 1$ de la proposition 6.5.4), on a que
$$\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3-x+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$$
diverge grâce au test de comparaison. ♣

Exemple 6.6.3
Déterminer si l'intégrale
$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$$
converge ou diverge.

C'est une intégrale impropre car $x = 1$ est une asymptote verticale de $(x^2-1)^{-1/3}$. On a
$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to 1^+} \int_q^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Puisque notre intention est de comparer cette intégrale avec l'intégrale entre 0 et a de la proposition 6.5.10, nous commençons par une simple substitution pour obtenir 0 comme borne inférieure pour l'intégrale. Soit $u = x - 1$. On a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $u = q - 1$ lorsque $x = q$ et $u = 4$ lorsque $x = 5$. Ainsi,

$$\int_q^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \int_{q-1}^4 \frac{1}{((u+1)^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}u = \int_{q-1}^4 \frac{1}{(u^2+2u)^{1/3}}\,\mathrm{d}u \quad .$$

Ainsi, lorsque q tend vers 1, on obtient que $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(u^2+2u)^{1/3}}\,\mathrm{d}u$ converge. La substitution $u = x - 1$ est simplement une translation de l'intervalle d'intégration de 1 vers la gauche. Il suffit de terminer si cette dernière intégrale impropre converge ou diverge pour obtenir la même conclusion pour l'intégrale impropre du départ.

Puisque

$$(u^2+2u)^{1/3} = u^{2/3}\left(1+\frac{2}{u}\right)^{1/3} \geq u^{2/3}$$

pour $u > 0$, on a

$$0 \leq \frac{1}{(u^2+2u)^{1/3}} \leq \frac{1}{u^{2/3}}$$

pour tout $u > 0$. Puisque

$$\int_0^4 \frac{1}{u^{2/3}}\,\mathrm{d}u$$

converge (c'est le cas $p < 1$ de la proposition 6.5.10), on a que

$$\int_0^4 \frac{1}{(u^2+2u)^{1/3}}\,\mathrm{d}u$$

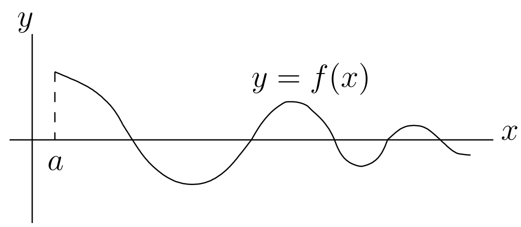
converge grâce au test de comparaison. ♣

Le test de comparaison peut aussi être utilisé pour déterminer la convergence d'intégrales impropres dont l'intégrande peut avoir des valeurs négatives.

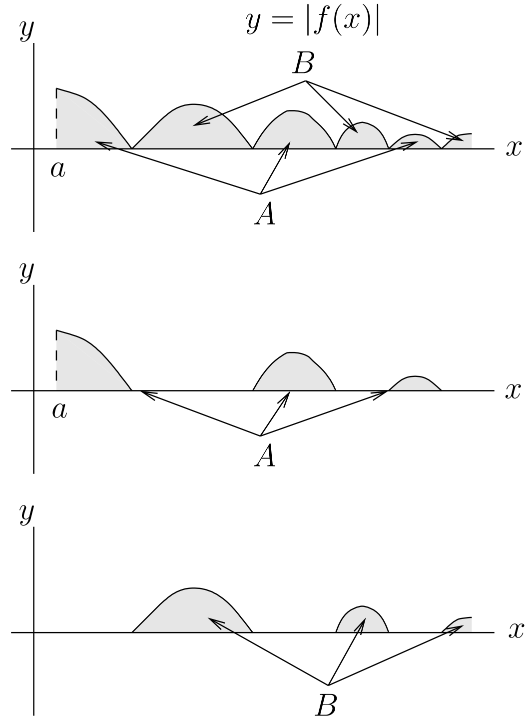
Théorème 6.6.4
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondent à des asymptotes verticales pour la fonction f. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

Par exemple, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

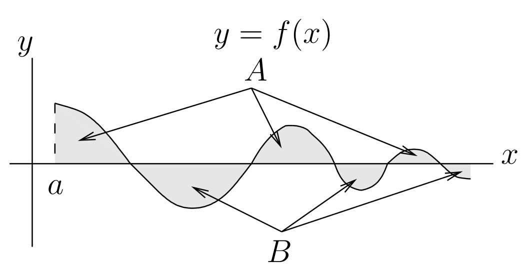
Il est possible de justifier intuitivement ce résultat en considérant le graphe de f. Supposons que le graphe de f est celui donné à la ci-dessous.



L'aire de la région A plus l'aire de la région B dans la figure suivante donnent l'aire sous la courbe $y = |f(x)|$ pour $a \leq x < \infty$; c'est-à-dire, $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



On suppose que la valeur de cette intégrale est finie. Donc l'aire de la région A et l'aire de la région B sont aussi des valeurs finies. Il s'en suit que la valeur de $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est finie car c'est l'aire de la région A moins l'aire de la région B comme on peut le voir dans la figure suivante.



Remarque 6.6.5 👁
Nous présentons ci-dessous une démonstration que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Cette démonstration formalise la justification graphique que nous venons de donner ci-dessus.

Si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge alors $\displaystyle\int_a^\infty 2|f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge car

$$\lim_{q\to\infty}\int_a^q 2|f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\lim_{q\to\infty}\int_a^q |f(x)|\,\mathrm{d}x \ .$$

Puisque

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

pour tout x dans l'intervalle $]a,\infty[$, on obtient que $\displaystyle\int_a^\infty \left(|f(x)| - f(x)\right)\,\mathrm{d}x$ converge grâce au test de comparaison.

Finalement, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge car

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\int_a^q f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty}\left(\int_a^q |f(x)|\,\mathrm{d}x - \int_a^q \left(|f(x)| - f(x)\right)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{q\to\infty}\int_a^q |f(x)|\,\mathrm{d}x - \lim_{q\to\infty}\int_a^q \left(|f(x)| - f(x)\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où les deux dernières limites existent.

On pourrait tirer la même conclusion en considérant les autres formes pour l'intégrale impropre. ♠

Exemple 6.6.6
On a vu à l'exemple 6.6.2 que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ convergeait. Il s'en suit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. ♣

Remarque 6.6.7 👁
Si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverge, on ne peut rien dire au sujet de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Par exemple, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge mais $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ diverge.

i) Commençons par montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Puisque $\sin(x)/x = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 1/x$ et $g'(x) = \sin(x)$, on obtient $f'(x) = -1/x^2$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\int_1^q \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_{x=1}^q - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

par la règle d'intégration par parties. Puisque

$$0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge grâce à la proposition 6.5.4, on a que

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$$

converge. Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. De plus

$$\lim_{q\to\infty}\left(-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{x=1}^{q}\right) = \lim_{q\to\infty}\left(\cos(1) - \frac{\cos(q)}{q}\right) = \cos(1)\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty}\int_1^q \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{q\to\infty}\left(-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{x=1}^{q} - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

est une nombre réel.

ii) Pour montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ diverge, on montre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{n\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x = +\infty\ .$$

On remarque que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi} \geq \frac{2}{\pi}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

car

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^\pi = 2 & \text{pour } k \text{ pair}\\ \displaystyle\int_\pi^{2\pi} -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\Big|_\pi^{2\pi} = 2 & \text{pour } k \text{ impair}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{n\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_1^{\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\left(\ln(n+1) - \ln(2)\right) \to +\infty\end{aligned}$$

lorsque n tend vers plus l'infini. ♠

6.7 Méthodes numériques d'intégration 🔧

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable. Notre but est de développer des méthodes numériques qui nous permettrons d'évaluer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

lorsque nos techniques d'intégration s'avèrent impuissante à évaluer cette intégrale ou lorsque quelles aboutissent à des calculs algébriques qui sont longs et complexes.

L'idée principale qui supporte les méthodes numériques que nous présentons est la suivante. On cherche une fonction $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x et telle que $\displaystyle\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$ est simple à évaluer. Si $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x, on peut espérer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Il y a une infinité de choix possible pour p. Les trois méthodes que l'on présente sont les suivantes :

1. La méthode du point milieu où p sera une fonction constante par morceaux.
2. La méthode des trapèzes où p sera une fonction linéaire par morceaux.
3. La méthode de Simpson où p sera une fonction quadratique par morceaux.

6.7.1 Méthode du point milieu

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1$.

On définie la fonction $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = f(x_{2i+1}) \quad \text{si} \quad x_{2i} \leq x < x_{2i+2}\ .$$

C'est une fonction qui est constante par morceaux. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, la fonction p prend la valeur de f au point milieu x_{2i+1}. C'est ce qui est représenté à la figure 6.23. On a que

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i+1})\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}) = 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})\end{aligned}$$

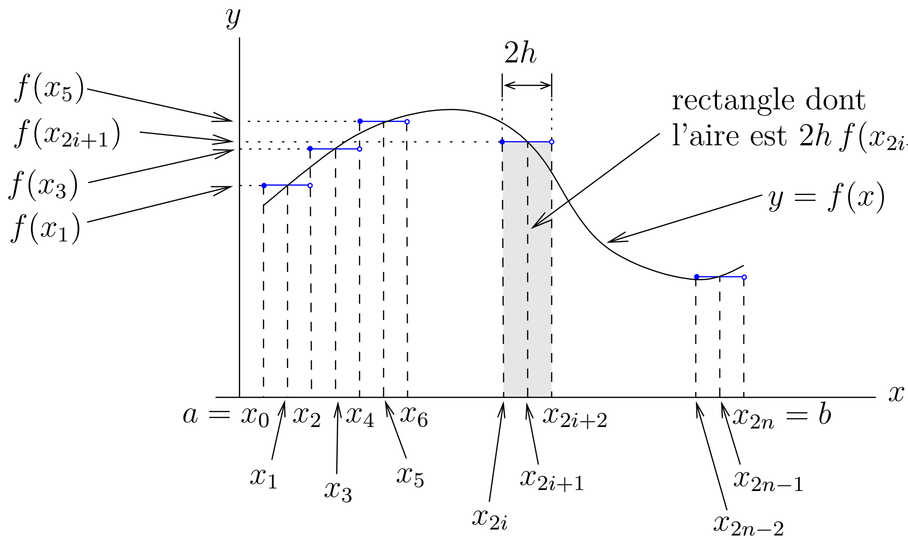


FIGURE 6.23 – Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale

La somme $2h\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ est une somme de Riemann avec $\Delta x = 2h$ pour l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc, en théorie, $2h\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque h tend vers 0. On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.1
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit $h = (b-a)/(2n)$ et $x_j = a + j\,h$ for $j = 0, 1 \ldots, 2n$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2h\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + \frac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a,b]$.

Cette proposition nous donne notre première méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.2 (**Méthode du point milieu**)
Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx M_n = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1})$$

où $h = (b-a)/(2n)$ et $x_j = a + j\,h$ for $j = 0, 1 \ldots, 2n$.

l'erreur de troncature pour la méthode du point milieu est $\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2$.

Comme ξ à la proposition précédente est inconnu, l'erreur de troncature a une utilité limitée.

Exemple 6.7.3

Utiliser la méthode du point milieu pour estimer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ (i.e. la longueur de h) pour obtenir une erreur de troncature inférieur à 10^{-4}.

Dans la formula pour la méthode du point milieu, on a $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b-a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisie n tel que

$$\left|\frac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2\right|$$

soit plus petit que 10^{-4}.

Comme on ne connaît pas ξ, on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left|\frac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2\right| \leq \frac{6e}{6}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{e}{4n^2} < 10^{-4}\ .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{4}10^4} = \frac{10^2}{2}\sqrt{e} \approx 82.436\ .$$

On peut donc prendre $n = 83$.

On a $h = \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{166}$ et $x_{2i+1} = \frac{2i+1}{166}$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 82$, On obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{2}{166}\sum_{j=0}^{82} e^{((2i+1)/166)^2}$$

$$\approx \frac{1}{83}\left(e^{(1/166)^2}+e^{(3/166)^2}+e^{(5/166)^2}+\ldots+e^{(163/166)^2}+e^{(165/166)^2}\right)$$
$$\approx 1.4626189\ .$$

♣

Remarque 6.7.4
Si f est une fonction convexe, la méthode du point milieu donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode du point milieu donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que $f''(x) > 0$ pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2$ est positif. Par contre si, f est concave, on a que $f''(x) < 0$ pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{6}\,h^2$ est négatif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide des figures 6.24 et 6.25.

À la figure 6.24, on a une fonction concave. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$ comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ est complètement recouverte par le trapèze $ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc inférieure ou égale à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f, on a que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})\ .$$

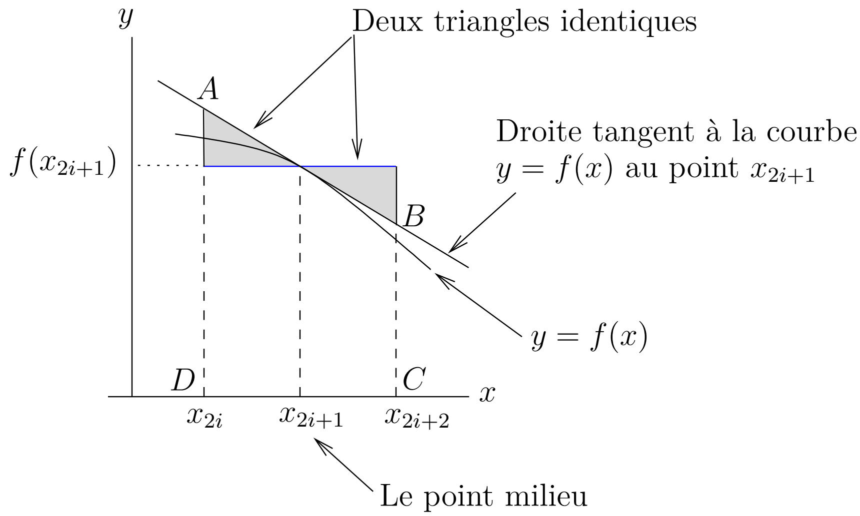
Dans la figure 6.25, on a une fonction convexe. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$ comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ recouvre complètement le trapèze $ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc supérieure à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f, on a que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 2h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})\ .$$

♠

6.7.2 Méthode des trapèzes

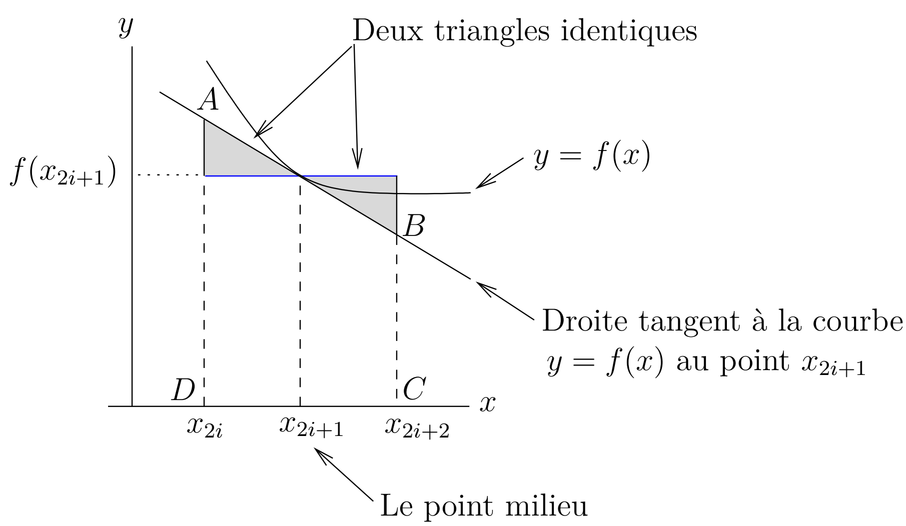
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/n$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.



Fonction concave

FIGURE 6.24 – La concavité de la fonction f détermine si la méthode du point milieu donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f. Dans le cas présent, on a une surestimation de l'intégrale car la fonction est concave.



Fonction convex

FIGURE 6.25 – La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe comme dans le cas présent.

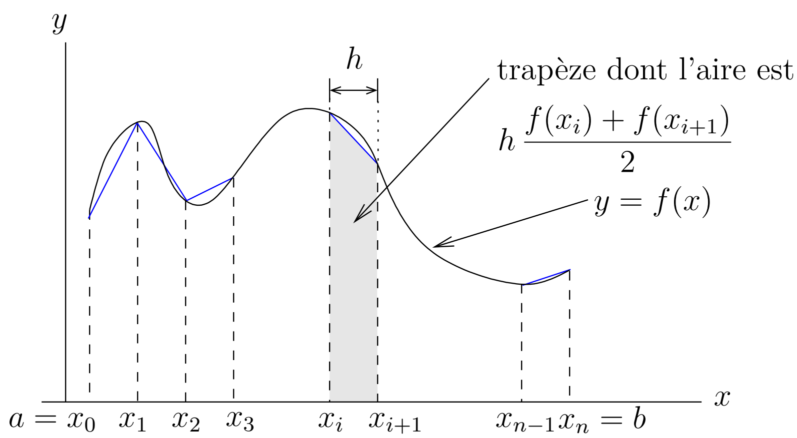


FIGURE 6.26 – Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale

On définie la fonction $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i) + f(x_i) \quad \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1}\ .$$

C'est une fonction qui est linéaire par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, le graphe de la fonction p est la droite qui lie les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 6.26.

On a que

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\,\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\left.\frac{(x - x_i)^2}{2}\right|_{x_i}^{x_{i+1}} + f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,(x_{i+1} - x_i)\ .
\end{aligned}$$

Dans le cas où $f(x_i) > 0$ et $f(x_{i+1}) > 0$, on reconnaît la formule pour calculer l'aire du trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h et les côtés adjacents sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

On a donc que

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} h\,\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\
&= h\left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + \ldots\right. \\
&\qquad \left. + \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right) \\
&= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)\ .
\end{aligned}$$

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.5
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + j\,h$ pour $j = 0, 1 \ldots, n$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right) - \frac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre deuxième méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.6 (Méthode des trapèzes)
Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx T_n = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right)$$

où $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + j\,h$ for $j = 0, 1 \ldots, n$.

L'erreur de troncature pour la méthode des trapèzes est $-\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2$.

Remarque 6.7.7
On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode du trapèze à l'aide des sommes à droite et à gauche. On a $T_n = (G_n + D_n)/2$. ♠

Exemple 6.7.8
Utiliser la méthode des trapèzes pour estimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4}.

Dans la formula pour la méthode des trapèzes, on a $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/n = 1/n$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisie n tel que

$$\left|\frac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2\right|$$

soit plus petit que 10^{-4}.

Comme on ne connaît pas ξ, on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0,1]$, on peut utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left|\frac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2\right| \leq \frac{6e}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{e}{2n^2} < 10^{-4} \ .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{2}10^4} = 10^2\sqrt{\frac{e}{2}} \approx 116.5821$$

On peut donc prendre $n = 117$.

On a $h = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{117}$ et $x_i = \frac{i}{117}$ pour $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 117$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{234}\left(e^0 + 2\sum_{j=1}^{116} e^{(i/117)^2} + e^1\right)\\ &\approx \frac{1}{234}\left(1 + 2\left(e^{(1/117)^2} + e^{(2/1117)^2} + \ldots + e^{(116/117)^2}\right) + e\right)\\ &\approx 1.46268\ .\end{aligned}$$

♣

Remarque 6.7.9
Comme on a fait pour la méthode du point milieu, il est possible d'analyser l'effet de la courbure d'une fonction pour déterminer si la méthode des trapèzes donnera une surestimation ou une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

Si f est une fonction convexe, la méthode des trapèzes donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode des trapèzes donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que $f''(x) > 0$ pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $-\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2$ est négatif. Par contre si, f est concave, on a que $f''(x) < 0$ pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $-\dfrac{f''(\xi)\,(b-a)}{12}\,h^2$ est positif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide de la figure 6.27.

Le graphe de gauche dans la figure 6.27 représente une fonction concave. Le trapèze $ABCD$ est le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze $ABCD$ est complètement recouvert par la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus petite ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a,b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right)\ .$$

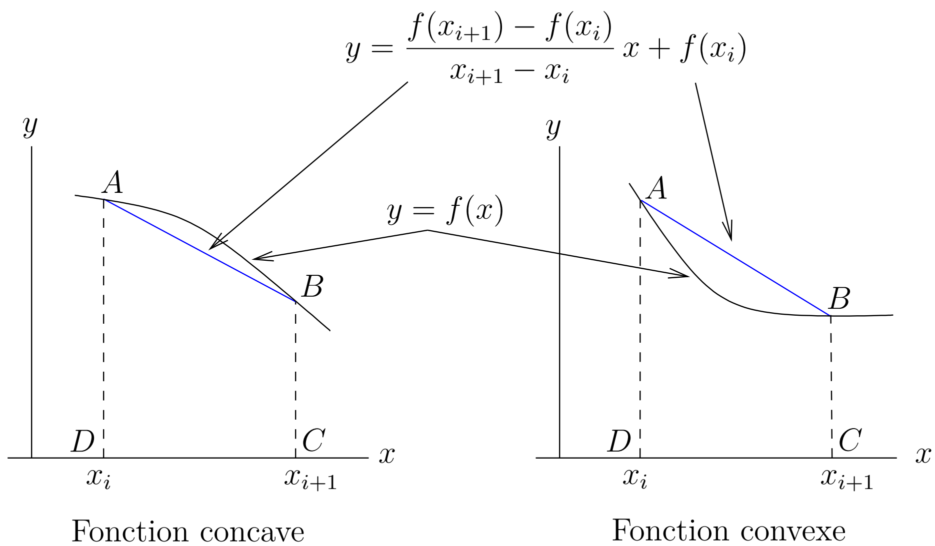


FIGURE 6.27 – La courbure de la fonction f détermine si la méthode des trapèzes donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f. Dans le graphe de gauche, on a une sous-estimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est concave. Par contre dans le graphe de droite, on a une surestimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est convexe.

Le graphe de droite dans la figure 6.27 représente une fonction convexe. Le trapèze $ABCD$ est toujours le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze $ABCD$ recouvre complètement la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus grande ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right) .$$

♠

L'idée de majoré une fonction f par une autre fonction g pour obtenir la relation

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

peut être utilisée pour estimer la valeur d'intégrales impropres.

Exemple 6.7.10

Estimer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ avec une précision de 10^{-4}.

Il y a deux étapes pour trouver cette approximation.

i) Puisque que

$$\int_1^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_1^c e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

on cherche une valeur c telle que

$$0 \leq \int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\,10^{-4}\ .$$

ii) Lorsque l'on aura c, on utilisera une méthode numérique pour trouver une approximation I de $\displaystyle\int_1^c e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ telle que

$$\left|\int_1^c e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - I\right| < \frac{1}{2}\,10^{-4}\ .$$

On aura alors que

$$\begin{aligned}\left|\int_1^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - I\right| &= \left|\int_1^c e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - I\right| \\ &\leq \left|\int_1^c e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - I\right| + \left|\int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &< \frac{1}{2}\,10^{-4} + \frac{1}{2}\,10^{-4} = 10^{-4}\ .\end{aligned}$$

La valeur I est l'approximation cherchée.

i) Comme aucune de nos techniques d'intégration peut être utilisée pour évaluer l'intégrale

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\ ,$$

nous majorons cette intégrale par une intégrale que l'on peut évaluer.

Pour $x \geq 2$, on a $x^2 \geq 2x$. Ainsi, $-x \geq -x^2/2$ pour $x \geq 2$ et

$$\begin{aligned}0 \leq \int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \leq \int_c^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{q\to\infty}\int_c^q e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{q\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_c^q = \lim_{q\to\infty}\left(-e^{-q} + e^{-c}\right) \\ &= e^{-c}\end{aligned}$$

pour $c \geq 2$. On prend c tel que

$$e^{-c} < \frac{1}{2}\,10^{-4}\ ,$$

c'est-à-dire

$$c > -\ln\left(\frac{1}{2}\,10^{-4}\right) = -\ln\left(2^{-1}\right) - \ln\left(10^{-4}\right) = \ln(2) + 4\ln(10) \approx 9.903487\ .$$

Donc, $c = 10$ est un bon choix.

ii) On utilise la méthode des trapèzes pour trouver une première approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{10} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Si on prend $n = 600$ dans la formule pour la méthode des trapèzes, puisque $a = 1$ et $b = 10$, on obtient $h = 9/600 = 3/200$, $x_i = 1 + 3i/200$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 600$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \approx I_1 = \frac{3}{400}\left(e^{-1/2} + 2\sum_{j=1}^{599} e^{(1+3j/200)^2/2} + e^{10^2/2}\right) \approx 0.397701117958515\ .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_1 est une surestimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On utilise la méthode du point milieu pour trouver une deuxième approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{10} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Si on prend $n = 600$ dans la formule pour la méthode du point milieu, puisque $a = 1$ et $b = 10$, on obtient $h = 9/1200 = 3/400$, $x_i = 1 + 3i/400$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 1200$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \approx I_2 = \frac{3}{200}\sum_{j=0}^{599} e^{(1+3(2j+1)/400)^2/2} \approx 0.397684059123784\ .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_2 est une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On a

$$0.3976840 \leq \int_1^{10} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \leq 0.3977012\ .$$

Puisque

$$0.3977012 - 0.3976840 = 0.172 \times 10^{-4} < \frac{1}{2}\,10^{-4}\ ,$$

on peut prendre $I = (0.3977012 + 0.3976840)/2 = 0.3976926$ comme approximation de $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Notez que l'on a assumé que les calculs numériques étaient exactes. Ce n'est généralement pas le cas. Il faudrait considéré les « round-off errors » qui sont dû à l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs.

Pour être plus rigoureux, on aurait pu utiliser nos formules pour calculer l'erreur de troncature afin de choisir une valeur de n qui soit possiblement plus petite que 600. On a ici simplement choisit une valeur de n au hasard en espérant qu'elle soit assez grande pour obtenir la précision requise. ♣

6.7.3 Méthode de Simpson

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre quatre qui est continue.

Premièrement, on partage l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1$.

On définie la fonction $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ suivante. Pour $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$, on définie

$$m_1 = \frac{f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})}{x_{2i+1} - x_{2i}}\ ,\ m_2 = \frac{f(x_{2i+2}) - f(x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i+1}}\ ,\ m_3 = \frac{m2 - m1}{x_{2i+2} - x_{2i}} \qquad (6.7.1)$$

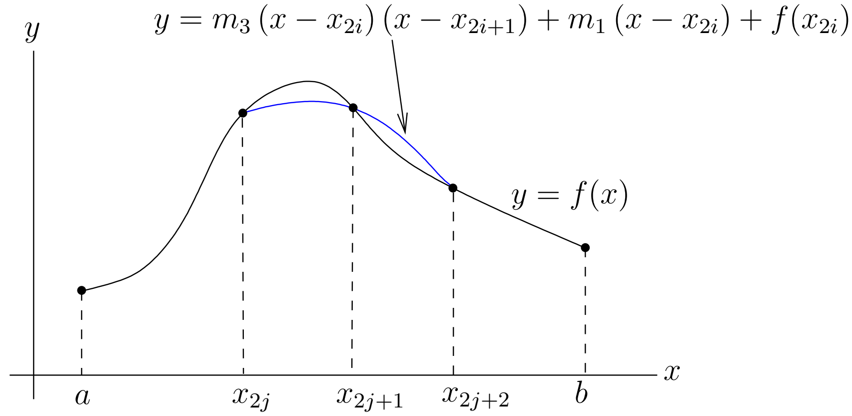


FIGURE 6.28 – Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale. On utilise le polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$ pour estimer $f(x)$ lorsque $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$

et l'on pose
$$p(x) = m_3\,(x - x_{2i})\,(x - x_{2i+1}) + m_1\,(x - x_{2i}) + f(x_{2i})\ .$$
C'est une fonction quadratique par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, le graphe de la fonction p est le graphe du polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 6.28.

Il est intéressant de noter que grâce au théorème fondamental de l'algèbre [1], il n'y a qu'un seul polynôme de degré deux qui passe par les trois points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.

L'intégrale du polynôme
$$p(x) = m_3\,(x - x_{2i})\,(x - x_{2i+1}) + m_1\,(x - x_{2i}) + f(x_{2i})$$
sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ est
$$\begin{aligned}
&\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= m_3 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})\,(x - x_{2i+1})\ \mathrm{d}x + m_1 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})\ \mathrm{d}x + \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i})\,\mathrm{d}x \\
&= m_3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_{2i} + x_{2i+1}}{2}\,x^2 + x_{2i}x_{2i+1}\,x\right)\Bigg|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + m_1 \frac{(x - x_{2i})^2}{2}\Bigg|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \\
&\qquad + f(x_{2i})\,(x - x_{2i})\Bigg|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}\ .
\end{aligned}$$

Si on substitue les expressions pour m_1 et m_3 données en (6.7.1) dans la formule ci-dessus et si on simplifie le résultat, on obtient, après un long calcul qu'on laisse aux lecteurs le soin

1. Un polynôme de degré n a exactement n racines complexes si on inclus les racines multiples.

d'effectuer, la formule suivante

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\right) \ .$$

On a donc que

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{3}\bigg(f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\bigg) \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n})\right) \ .\end{aligned}$$

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.11
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre quatre. Soit $h = (b-a)/(2n)$ et $x_j = a + j\,h$ pour $j = 0,\ 1\ \ldots,\ 2n$. Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}&\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n})\right) \\ &- \frac{f^{(4)}(\xi)\,(b-a)}{180}\,h^4\end{aligned}$$

pour une valeur $\xi \in [a,b]$.

Cette proposition nous donne notre troisième et dernière méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.12 (**Méthode de Simpson**)
Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$, on utilise

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_n = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n})\right)$$

où $h = (b-a)/(2n)$ et $x_j = a + j\,h$ for $j = 0,\ 1\ \ldots,\ 2n$.

L'erreur de troncature pour la méthode de Simpson est $-\dfrac{f^{(4)}(\xi)\,(b-a)}{180}\,h^4$.

Remarque 6.7.13
On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode de Simpson à l'aide des formules d'approximation M_n pour la méthode du point milieu et T_n pour la méthode des

trapèzes. On a $S_n = (2M_{n/2} + T_n)/3$. Pour la méthode des trapèzes, on utilise seulement les intervalles de la forme $[x_{2j}, x_{2j+2}]$. ♠

Exemple 6.7.14

Utiliser la méthode de Simpson pour estimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Choisir le nombre de sous-intervalles de $[0,1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4}.

Dans la formula pour la méthode de Simpson, on pose $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b-a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. On choisit n tel que

$$\left|\frac{f^{(4)}(\xi)\,(b-a)}{180}\,h^4\right|$$

soit plus petit que 10^{-4}.

Comme on ne connaît pas ξ, on remplace $|f^{(4)}(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f^{(4)}(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0,1]$. Puisque

$$|f^{(4)}(x)| = 4e^{x^2}\left(3 + 12\,x^2 + 4\,x^4\right) \leq 76e$$

pour tout $x \in [0,1]$, on peut utilisé $76e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left|\frac{f^{(4)}(\xi)\,(b-a)}{180}\,h^4\right| \leq \frac{76e}{180}\left(\frac{1}{2n}\right)^4 = \frac{19e}{720n^4} < 10^{-4}\ .$$

On trouve

$$n > \left(\frac{19e}{720}10^4\right)^{1/4} = 5\left(\frac{19e}{45}\right)^{1/4} \approx 5.175220\ .$$

On peut donc prendre $n = 6$.

On a $h = \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{12}$ et $x_i = \frac{i}{12}$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 12$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{36}\left(e^0 + 2\sum_{j=1}^{5} e^{(j/6)^2} + 4\sum_{j=0}^{5} e^{((2j+1)/12)^2} + e^1\right)\\ &= \frac{1}{36}\Big(1 + 2\left(e^{(2/12)^2} + e^{(4/12)^2} + \ldots + e^{(10/12)^2}\right)\\ &\qquad +4\left(e^{(1/12)^2} + e^{(3/12)^2} + \ldots + e^{(11/12)^2}\right) + e\Big)\\ &\approx 1.46267\ .\end{aligned}$$

♣

Remarque 6.7.15

1. Comme on a vue, pour déterminer si l'estimation fournie par la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes est une surestimation ou une sous-estimation, il

suffi de déterminer la courbure (convexe ou concave) du graphe de l'intégrande ; c'est à dire, le signe de la dérivée seconde de l'intégrande. Ce n'est plus le cas pour la méthode de Simpson. Puisque l'erreur de troncature est

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)\,(b-a)}{180}\,h^4\ ,$$

il faut considérer le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande. Nous ne ferons pas cette analyse.

2. Puisqu'une fonction peut avoir un graphe qui change de courbure lorsque la variable indépendante varie, il n'est souvent pas possible d'utiliser la courbure pour déterminer si la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes vont donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale. De même, Il est rarement possible d'utiliser le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande pour déterminer si la méthode de Simpson va donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale car le signe de cette dérivée peut changer lorsque la valeur de la variable indépendante varie.
3. Pour une même précision, la méthode de Simpson demande de subdiviser l'intervalle d'intégration en beaucoup moins de sous-intervalles que les méthodes du point milieu et des trapèzes. Pour justifier cette remarque, il suffit de considérer l'erreur de troncature pour les trois méthodes que l'on a présentées.

   Si on suppose que f'' et $f^{(4)}$ varient lentement par rapport à la variable indépendante, on peut comparer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature pour les trois méthodes qui nous intéresse. Pour h donné, l'erreur de troncature pour les méthodes du point milieu et des trapèzes est de l'ordre de h^2, alors qu'elle est de l'ordre de h^4 pour la méthode de Simpson. Lorsque h diminue (i.e. $h \to 0$), l'erreur de troncature de la méthode de Simpson diminue beaucoup plus rapidement que celle pour les méthodes du point milieu ou des trapèzes. C'est ce qui fait que la méthode de Simpson est généralement supérieure au deux autres méthodes.

   Des trois méthodes que l'on a étudiées, c'est la méthode de Simpson qui demande le moins de sous-intervalles et donc le moins d'opération arithmétiques pour estimer une intégrale avec une précision donnée. De plus, si on tiens compte des « round-off errors » lors des calculs sur ordinateurs, il est préférable d'utiliser une méthode qui demande moins d'opérations arithmétiques pour minimiser ce type d'erreurs.

♠

6.8 Exercices

Question 6.1

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int -x^{-2}\,\mathrm{d}x$	**b**) $\displaystyle\int \frac{10}{x^9}\,\mathrm{d}x$	**c**) $\displaystyle\int \left(5z^{-1.2}-1.2\right)\mathrm{d}z$
d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}+3t\right)\mathrm{d}t$	**e**) $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x$	**f**) $\displaystyle\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

Question 6.2
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \cos(2\pi(x-2))\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{5-3x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 3e^{3x/7}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int \left(1+\frac{t}{3}\right)^7\,\mathrm{d}t$ **f)** $\displaystyle\int \frac{e^z}{1+e^z}\,\mathrm{d}z$

g) $\displaystyle\int 3y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\displaystyle\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ **k)** $\displaystyle\int e^t\left(1+e^t\right)^4\,\mathrm{d}t$ **l)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **n)** $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ **o)** $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int e^t\left(2+e^{2t}\right)\,\mathrm{d}t$ **q)** $\displaystyle\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}}\,\mathrm{d}t$

Question 6.3
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ **b)** $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\sin(x^{3/2}+1)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(1/t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int \tan(x)\sec^4(x)\,\mathrm{d}x$

Question 6.4
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int x^3\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int (x^2+x^6)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Question 6.5
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \theta\cos(\pi\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **b)** $\displaystyle\int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

Question 6.6
Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+6t+8}\,\mathrm{d}t$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t$ **i)** $\displaystyle\int \frac{x^3-x-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{9x+29}{x^2+2x-15}\,\mathrm{d}x$

Suggestion : Pour certaines des intégrales, vous pourriez avoir à compléter le carré du dénominateur et à utiliser une substitution.

Question 6.7

Évaluez l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$

Question 6.8

Trouvez toutes les fonctions f telles que $f''(x) = 1 + x^{4/5}$.

Question 6.9

Donnez la somme de Riemann à droite et la somme de Riemann à gauche pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1+t^3)\,\mathrm{d}t$ où l'intervalle $[0,1]$ est subdivisée en 5 sous-intervalles égaux.

Question 6.10

La vitesse d'un abeille en vol a été mesuré à toutes les cinq secondes pendant 50 secondes. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
v (m/s)	12.7	12.2	11.8	11.5	11.3	11.2	11.2	11.3	11.6	12.0	12.5

On suppose que l'abeille vol en ligne droite. Utilisez une somme de Riemann à droite pour estimer la distance parcourue par l'abeille. Utilisez une somme de Riemann à gauche pour estimer la distance parcourue par l'abeille.

Question 6.11

Donnez la somme de Riemann à droite et celle à gauche pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t$ lorsque la partition de l'intervalle $[0,2]$ comprend cinq sous-intervalles égaux.

Question 6.12

Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$, calculez la somme de Riemann pour le point milieu de l'intégrale $\displaystyle\int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque l'intervalle $[1,6]$ est subdivisé en $n = 5$ sous-intervalles égaux. Tracez le graphe de f et les rectangles de la somme de Riemann.

Question 6.13

Utilisez les sommes de Riemann pour le point milieu avec $n = 5$ sous-intervalles égaux pour obtenir une approximation de la valeur de l'intégrale

$$\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x\ .$$

Donnez votre réponse avec une précision de quatre chiffres décimaux.

Question 6.14
Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs d'une fonction croissante. Utilisez une somme à droite et une somme à gauche pour trouver une borne supérieure et une borne inférieure de l'intégrale

$$\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Utilisez le plus grand nombre de points possible pour chaque somme.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

Question 6.15
Un objet se déplace en ligne droite durant 8 secondes. Le tableau ci-dessous donnent la vitesse v de l'objet en mètres par seconde toutes les 2 secondes.

t (sec)	0	2	4	6	8
v (m/s)	10.0	9.5	9.0	8.0	6.0

Comme on peut voir, la vitesse est décroissante. Répondre aux questions suivantes à l'aide des sommes de Riemann à droite et à gauche.

a) Donnez une borne supérieure et un borne inférieure de la distance parcourue pendant les 8 secondes.

b) À quelle fréquence doit-on mesurer la vitesse de l'objet pour obtenir des bornes supérieures et inférieures qui soient à 0.1 mètre de la distance parcourue pendant les 8 secondes ?

Question 6.16
Exprimez la limite suivante comme une intégrale définie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi j}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi j}{n}\right) \ .$$

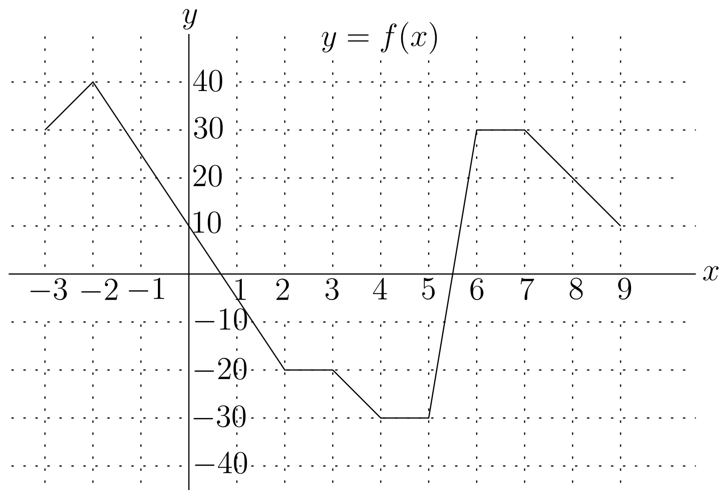
Question 6.17
Donnez la somme de Riemann à droite pour l'intégrale

$$\int_2^5 \sqrt{2 + x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$$

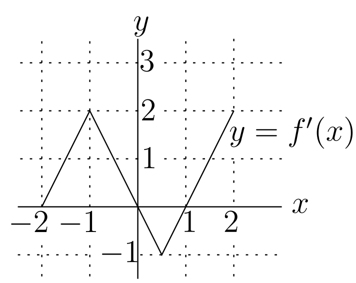
où on assume que l'intervalle $[2, 5]$ est subdivisé en N sous-intervalles égaux.

Question 6.18
Utilisez le graphe de la fonction f donné ci-dessous pour évaluer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle \int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ **b**) $\displaystyle \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

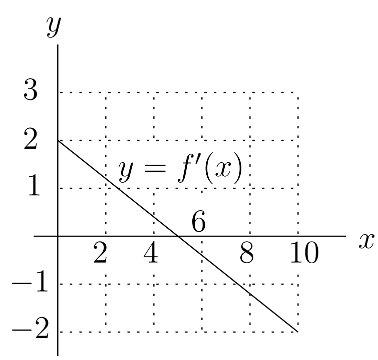


Question 6.19
Le graphe de f' est donné dans la figure suivante



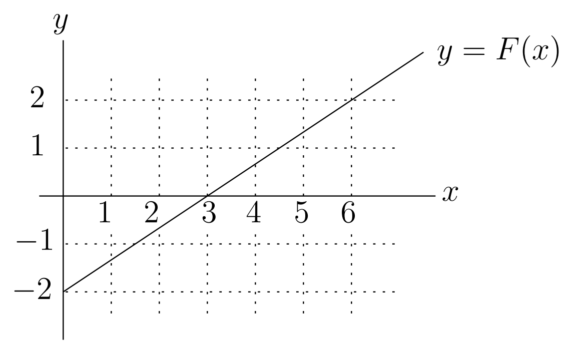
Si $f(-1) = 2$, quelle est la valeur de $f(2)$?

Question 6.20
Le graphe de f' est donné dans la figure suivante



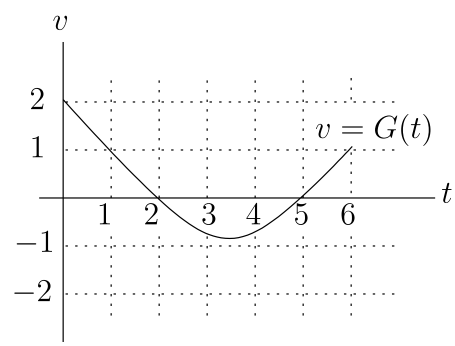
Si $f(0) = 1$, tracez un graphe possible pour f. Soyez aussi précis que possible.

Question 6.21
Si le graphe de F est le graphe suivant



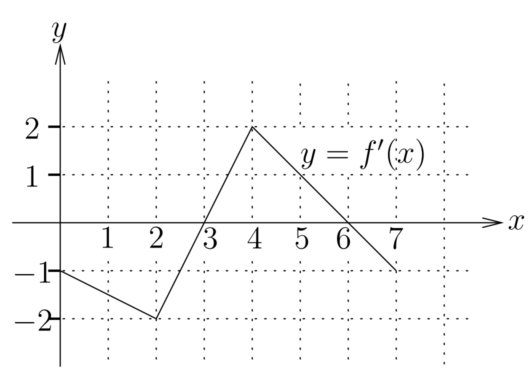
Tracez le graphe de la primitive f de F qui satisfait $f(1) = 3$.

Question 6.22
Si le graphe de G est le graphe suivant



Tracez le graphe de la primitive g de G qui satisfait $g(1) = 10$.

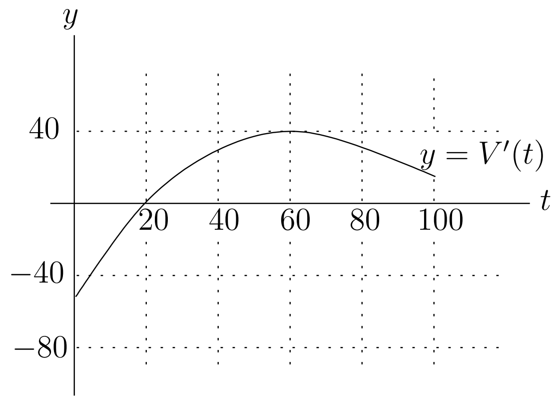
Question 6.23
La figure suivante donne le graphe de $f'(x)$. On suppose de plus que $f(0) = 2$.



a) Trouvez tous les points critiques et points d'inflexion de $f(x)$ avec la valeur de $f(x)$ à ces points.

b) Tracez le graphe de $f(x)$ en indiquant bien tous les points critiques et les points d'inflexion.

Question 6.24
Le graphe de la fonction V' est donné à la figure suivante



Tracez le graphe de V, la primitive de la fonction V', qui passe par le point $(0, 1000)$.

Question 6.25
Évaluez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \quad , \quad \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \ .$$

Si vous connaissez la valeur de deux des intégrales ci-dessus, montrez que vous connaissez la valeur de la troisième intégrale.

Question 6.26
Si $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\displaystyle\int_5^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, calculez les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_5^8 (2f(x) + 3x)\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{-2/3}^{2/3} f(2-3t)\,\mathrm{d}t$

Question 6.27
Évaluez les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\right) \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,\mathrm{d}t$

Question 6.28
Évaluez les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^5 3e^{x/5}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^4 \mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_1^{10} (1+2t)^{-4}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+4t}\,\mathrm{d}t$ **e)** $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ **i)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^2 - 14x + 10}{2x^2 - 7x + 3}\,\mathrm{d}x$

Question 6.29
Évaluez les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2\sin(\theta) + 3\cos(\theta))$ **b)** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\sec^4(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^3+x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Question 6.30
Évaluez les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Question 6.31
Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(y^4+5y^3\right)\,\mathrm{d}y$ **b)** $\displaystyle\int_{-a}^{a} x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$

Question 6.32
Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x^2-20\sin(x)\right)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_2^{5} \cos(2\pi(x-2))\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{16}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Question 6.33
Vérifiez que $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s = f(x)$ pour $f(s) = (5s+1)^7$ et a une constante.

Question 6.34
Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

a) $\displaystyle g(y) = \int_2^{y} t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle h(x) = \int_2^{1/x} \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

Suggestion : Utilisez le Théorème fondamental du calcul différentiel.

Question 6.35
Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Évaluez les intégrales impropres qui convergent.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+5x)^4}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 3x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\displaystyle\int_0^{3} \frac{2}{(x-2)^{4/3}}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **k)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+3x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ **l)** $\displaystyle\int_0^{4} \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ **n)** $\displaystyle\int_1^{2} \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$ **o)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

Question 6.36

Utilisez le test de comparaison des intégrales pour déterminer si les intégrales suivantes converge :

a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{1/3}+x^3}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}+x^3}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+x^{4/3}}\,\mathrm{d}x$

Question 6.37

Utilisez le test de comparaison pour déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Donnez une borne supérieure pour la valeur des intégrales impropres qui convergent.

a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2\,e^x}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+e^x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^3+2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+\cos^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2\sqrt{x}+1}{x^4+3x}\,\mathrm{d}x$

Bibliographie

[1] F. R. Adler, **Modeling the Dynamics of Life : Calculus and Probability for Life Scientists**, Brooks/Cole, 2005.

[2] D. Betounes, **Partial Differential Equations for Computational Science**, Springer-Verlag, 1998.

[3] R. L. Borelli et C. S. Coleman, **Differential Equations, a Modeling Perspective**, Wiley, 1998.

[4] L. Carroll, **Alice's Adventures in Wonderland**,

[5] G. B. Folland, **Sdvanced Calculus**, Prentice Hall, 2002

[6] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum et T. an Roode, **Mathemtical Modelling : A Case Studies Approach**, AMS, 2005.

[7] S. Lipschutz, **Linear Alegebra**, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.

[8] J. E. Marsden and A. J. Tromba, **Vector Calculus, 2nd edition**, W. H. Freedman and Company, 1981.

[9] J. D. Murray, **Mathematical Biology, 1 : An Introduction, 3th edition**, Springer-Verlag, 2002.

[10] C. Newhouser, **Calculus for Biology and Medecine 2nd Edition**, Prentice Hall, 2004

[11] B. Noble and J. W. Daniel, **Applied Linear Algebra**, 3rd edition, Prentice-Hall, 1988.

[12] M. Olinick, **An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences**, Addison-Wesley, 1978

[13] D. A. Roff, **The Evolution of Life Histories**, Chapman and Hall, 1992

Index