



Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie II 2021 édition

Benoit Dionne Université d'Ottawa

Table des matières

Liste d	les tab	leaux	vii
Liste d	les figu	ıres	ix
Avant-	propos	5	xv
Chap	itre 1	Intégrale 🌲 🔑 👱	1
1.1.	Prim	nitives et intégrales indéfinies	1
1.2.	Tech	niques d'intégration	4
	1.2.1.	Substitutions	4
	1.2.2.	Intégration par parties	13
	1.2.3.	Fractions partielles	20
	1.2.4.	Substitutions trigonométriques 🗲	25
1.3.	L'int	régrale définie	29
	1.3.1.	Définition	34
	1.3.2.	Propriétés de l'intégrale définie	40
	1.3.3.	Évaluations des intégrales définies \digamma	42
	1.3.4.	Déplacement	45
	1.3.5.	L'intégrale de Riemann (Stieljes) 🁁	48
1.4.	Théo	orème fondamental du calcul	50
	1.4.1.	Première version du théorème fondamental du calcul	50
	1.4.2.	Deuxième version du théorème fondamental du calcul	56
1.5.	L'int	tégrale impropre	58
	1.5.1.	Intégrale sur un intervalle d'intégration de longueur infinie	58

ii TABLE DES MATIÈRES

	1.5.2. Intégrale avec un intégrande non borné	64
1.6.	Test de comparaison \nearrow	69
1.7.	Méthodes numériques d'intégration \digamma	76
	1.7.1. Méthode du point milieu	76
	1.7.2. Méthode des trapèzes	79
	1.7.3. Méthode de Simpson	86
1.8.	Exercices	90
Chap	itre 2 Applications de l'intégrale 🏝 🎤 🔀	99
2.1.	Aire entre deux courbes	99
2.2.	Valeur moyenne d'une fonction	103
2.3.	Volume d'un objet 🔑 \dots	106
	2.3.1. Solides de révolution	109
2.4.	Masse d'un objet \nearrow	121
2.5.	Travail 🔑	122
	2.5.1. Travail pour déplacer un objet	123
	2.5.2. Travail pour vider un réservoir	126
2.6.	Force et pression hydrostatique \nearrow	132
2.7.	Centre de masse \nearrow	137
2.8.	Débit sanguin 🌲	140
2.9.	Applications à l'économie 🗠	143
	2.9.1. Valeurs présentes et futures	145
	2.9.2. Surplus du consommateur et du producteur	147
2.10	_	149
2.11	Exercices	152
Chap	itre 3 Équations différentielles 🌲 🔑	159
3.1.	Introduction	159
3.2.	Équations différentielles séparables	163
3.3.	Équations non-autonomes	167
3.4.	Existence et unicité des solutions $ullet$	170
3.5.	Équations autonomes	173

TABLE DES MATIÈRES iii

	3.5.1. Points d	'équilibre	173
	3.5.2. L'équati	on logistique	179
3.6.	Applications a	aux sciences physiques, biologiques et économiques	183
3.7.	Famille de cou	irbe orthogonales 🗲 $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	194
3.8.	Méthode d'Eu	der 🗲	196
3.9.	Exercices		202
Chap	tre 4 Vecte	urs \$ & <u>~</u>	217
4.1.	Vecteurs		217
4.2.	Opérations su	r les vecteurs	219
	4.2.1. Produit	d'un vecteur par un nombre réel	219
	4.2.2. Somme	de vecteurs	220
	4.2.3. Notation	n vectorielle classique	220
	4.2.4. Produit	scalaire 🔑	222
	4.2.5. Produit	vectoriel 🔑	225
4.3.	Équation d'ur	ne droite 🔑	228
	4.3.1. Droites	tangentes	231
	4.3.2. Intersect	tion de deux droites	232
4.4.	Équation d'ur	ı plan 🔑	233
	4.4.1. Représen	ntations vectorielles et paramétriques du plan	236
	4.4.2. Intersect	tion d'une droite et d'un plan	238
	4.4.3. Intersect	tion de deux plans	239
	4.4.4. Intersect	tion de trois plans	242
4.5.	Projections @	>	244
	4.5.1. Plus cou	urte distance entre un point et une droite	244
	4.5.2. Plus cou	urte distance entre un point et un plan de l'espace	246
4.6.	Exercices		248
Chap	tre 5 Algèb	ore linéaire 🌲 👱	249
5.1.	Systèmes d'éq	uations linéaires	249
	5.1.1. Système	s d'équations linéaires avec deux inconnues	251
	5.1.2 Système	s d'équations linéaires avec plus de deux inconnues	253

iv TABLE DES MATIÈRES

5.2.	Matrices	258
	5.2.1. Opérations sur les matrices	259
	5.2.2. Inverse additif et multiplicatif d'une matrice	266
5.3.	Représentations matricielles	269
	5.3.1. Méthode d'élimination de Gauss	270
	5.3.2. Matrices inverses	271
	5.3.3. Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3	275
5.4.	Déterminant	276
	5.4.1. introduction	276
	5.4.2. Le signe d'une permutation \odot	278
	5.4.3. Calcul du déterminant	279
5.5.	Suites dans $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$	285
5.6.	Valeurs propres et vecteurs propres	285
5.7.	Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires 🌲	294
5.8.	Chaînes de Markov 🗠	298
5.9.	Exercices	302
Chap	itre 6 Représentation paramétrique des courbes 🌲 🎤	309
6.1.	Définition	310
6.2.	Droite tangente à une courbe	313
6.3.	Longueur d'une courbe \nearrow	319
6.4.	Aire d'une surface \nearrow	324
6.5.	Coordonnées polaires 👁	327
	6.5.1. Équations en coordonnées polaires	329
	6.5.2. Longueur d'une courbe	333
	6.5.3. Aire d'une région	334
6.6.	Exercices	338
 Chan	itre 7 Fonction de plusieurs variables 🌲 🔑	339
-		
7.1.	Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles	342
7.2.		349
7.3.	Propriétés des fonctions continues 🔑	359

TABLE DES MATIÈRES v

7.4.	Exercices	360
Chap	itre 8 Dérivée de fonctions de plusieurs variables 🌲 🔑	363
8.1.	Dérivées partielles	363
8.2.	Plan tangent à une surface (forme explicite)	370
	8.2.1. Surface donnée par une fonction de ${\bf x}$ et ${\bf y}$	370
	8.2.2. Surface donnée par une représentation paramétrique	374
8.3.	Dérivées selon une direction donnée 🔑	375
8.4.	Propriétés du gradient 🔑	380
	8.4.1. Plan tangent à une surface (forme implicite)	380
	8.4.2. Direction de croissance maximale	383
	8.4.3. Théorème de la moyenne	387
8.5.	Approximation locale des fonctions de plusieurs variables \digamma	388
8.6.	Points critiques et valeurs extrêmes 🔑	390
8.7.	Les multiplicateurs de Lagrange \digamma	395
8.8.	Dérivées des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{m}} \otimes \clubsuit$	398
8.9.	Exercices	401
Chap	itre 9 Systèmes d'équations différentielles \$	407
9.1.	Introduction	407
9.2.	Énoncé du problème général	416
9.3.	Systèmes d'équations différentielles linéaires	420
9.4.	Introduction à l'analyse globale	429
	9.4.1. Points d'équilibre	430
	9.4.2. Nullclines	432
9.5.	Équation de Van der Pol	439
9.6.	Système prédateurs-proies	441
	9.6.1. Lotka-Voltera	441
	9.6.2. Un meilleur modèle prédateurs-proies	443
9.7.	Exercices	450

455

Bibliographie

	TABLE DES MATIÈRES
VI	

Index 456

Liste des tableaux

1.1. Quelques intégrales indéfinies		4
-------------------------------------	--	---

Table des figures

1.1.	La région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$	30
1.2.	Un somme à gauche avec 11 termes pour l'intégrale de e^x	30
1.3.	Un somme à gauche avec 22 termes pour l'intégrale de e^x	31
1.4.	Un somme à droite avec 11 termes pour l'intégrale de e^x	32
1.5.	Un somme à droite avec 22 termes pour l'intégrale de e^x	33
1.6.	Graphe de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$	35
1.7.	Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie	37
1.8.	Figure associée à l'exemple 1.3.10	39
1.9.	L'intégrale d'une fonction f qui change de signe en un seul point de son domaine d'intégration représente la différence de deux aires	40
1.10.	Graphe d'une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine	41
1.11.	Graphe d'une fonction paire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine	42
1.12.	L'aire de la région bornée par $y=x^2$, l'axe des x , et les droites $x=1$ et $x=3$	43
1.13.	La vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette	47
1.14.	Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$	49
1.15.	Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$	49
1.16.	La fonction de densité pour la distribution normale	58
1.17.	Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s) ds$	59
1.18.	L'intégrale impropre comme la limite d'intégrales définies	60
1.19.	La région bornée par la courbe $y=1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites $x=0$ et $x=1,\ldots,\ldots$	64
1.20.	L'intégrale impropre d'une fonction définie sur un intervalle ouvert de longueur finie	65
1.21.	Graphe de $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$	67
1.22.	Représentation qualitative du graphe de fonctions définies par des intégrales	70

X TABLE DES FIGURES

1.23.	Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale
1.24.	La méthode du point milieu surestime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est concave
1.25.	La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe
1.26.	Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale
1.27.	La concavité de l'intégrande détermine si la méthode des trapèzes sous- estime ou surestime la valeur de l'intégrale
1.28.	Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale
2.1.	Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann
2.2.	Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes se croissent
2.3.	Région bornée par les courbes $y=x^2$ et $y=2-x^2$, et les droites $x=0$ et $x=2$
2.4.	Région bornée par les courbes $y=x$ et $y=\sin(x)$ pour $-\pi/4 \le x \le \pi/2$
2.5.	Région bornée par les courbes $4x - y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$
2.6.	Représentation graphique du théorème de la moyenne pour l'intégrale .
2.7.	La valeur moyenne de $f(x) = -x^4 + 4$ sur l'intervalle $[0,2]$ est $8/3$
2.8.	Une tranche d'un solide S quel conque
2.9.	La section d'un cylindre engendrée par l'intersection avec un plan
2.10.	L'approximation d'une tranche d'un solide
2.11.	Le tronc d'une pyramide et une section perpendiculaire de ce tronc de pyramide
2.12.	Solide de base donnée dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés
2.13.	Un solide de révolution dont les sections transversales sont les anneaux
2.14.	Un solide produit par la rotation d'une région autour de l'axe $y=c$
2.15.	Une section obtenue par l'intersection d'un solide avec un plan où x est constant
2.16.	La rotation autour de l'axe $x=-1$ de la région bornée par les deux courbes $y=x^2+1$ et $y=3-x^2$
2.17.	La rotation d'une région autour d'un axe $x=c$ donne un solide $\ \ .\ \ .\ \ .$
2.18.	Une région dont la rotation autour d'un axe produit une portion tubulaire d'une solide
2.19.	Calcul de l'aire d'un tube

TABLE DES FIGURES xi

2.20.	Approximation d'une portion tubulaire d'une solide	118
2.21.	Travail pour lever un bloc de glace de 50 mètres	125
2.22.	Lois de Hooke pour les ressorts	125
2.23.	Un réservoir de forme quelconque enfoui sous le sol	126
2.24.	Une mince couche de liquide dans un réservoir	127
2.25.	Le volume d'une mince couche de liquide dans un réservoir	128
2.26.	Un réservoir sphérique	130
2.27.	Un réservoir conique	130
2.28.	Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles renversés	131
2.29.	Un réservoir cylindrique	133
2.30.	Vue transversale d'une surface verticale soumisse à la force exercée par la pression	134
2.31.	Le calcul de la force exercée sur une des extrémités d'un réservoir circulaire qui repose au font d'un lac	135
2.32.	Le calcul de la force exercée sur la surface courbée externe d'un réservoir circulaire qui repose au font d'un lac	136
2.33.	Centre de masse (cas discret)	137
2.34.	Centre de masse (densité constante)	138
2.35.	Écoulement laminaire	140
2.36.	Représentation graphique du surplus du consommateur et du producteur	148
2.37.	La justification du test de l'intégrale pour déterminer si une série converge	150
3.1.	Le graphe possible de la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale	167
3.2.	Un champ de pentes possible pour une équation différentielle	168
3.3.	Le champ de pentes pour une équation différentielle	169
3.4.	Champ de pentes de l'équation différentielle $y'=(x-1)^2-y+1$	170
3.5.	Domaine d'existence et d'unicité des solutions satisfaisant une condition initiale	171
3.6.	Le champ de pentes pour l'équation différentielle de la loi de Newton pour la chaleur	175
3.7.	Le portrait de phases de l'équation différentielle de la lois de Newton pour la chaleur	176
3.8.	Le portrait de phases de l'équation différentielle $y' = (y - a)(y - b)$	177
3.9.	Le champ de pentes pour l'équation logistique	180

xii TABLE DES FIGURES

3.10.	Le portrait de phases de l'équation logistique	181	
3.11.	Comportement de la fraction de la population porteur d'un microbe	185	
3.12.	Comportement de la fraction de la population porteur d'un microbe 18		
3.13.	Une fonction continue par morceaux	187	
3.14.	Solution d'un problème de pêche saisonnière avec de faibles oscillations	187	
3.15.	Solution d'une problème de pêche saisonnière avec de fortes oscillations	188	
3.16.	Familles de courbes orthogonales, les cercles et leurs rayons	195	
3.17.	Familles de courbes orthogonales : $y = ce^x$ et $\frac{y^2}{2} = -x + d$	196	
3.18.	La solution numérique à l'aide de la méthode d'Euler d'une équation différentielle	199	
4.1.	Représentation graphique du vecteur $\mathbf{p}=(2,5,3)$ de l'espace	218	
4.2.	Longueur du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	218	
4.3.	Représentation du vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$	220	
4.4.	Représentation graphique de la somme de deux vecteurs	221	
4.5.	La loi des cosinus	224	
4.6.	Interprétation géométrique du produit scalaire	224	
4.7.	Démonstration de la loi des cosinus	225	
4.8.	Le vecteur obtenu du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan généré par ces deux vecteurs	227	
4.9.	L'aire du parallélogramme définie par deux vecteurs	228	
4.10.	Représentation vectorielle d'une droite	229	
4.11.	Équation d'une droite du plan qui est perpendiculaire à un vecteur $$	230	
4.12.	Représentation vectorielle d'un plan	233	
4.13.	Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires	237	
4.14.	Droite parallèle à un plan	239	
4.15.	Projection d'un vecteur sur un autre vecteur	244	
4.16.	Translation dans l'espace	246	
4.17.	Projection d'un vecteur sur un plan passant par l'origine	247	
6.1.	Une courbe du plan donnée par une représentation paramétrique	311	
6.2.	tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique	314	
6.3.	Une courbe du plan donnée par une représentation paramétrique et une fonction	316	

TABLE DES FIGURES xiii

6.4.	Une courbe dans le plan que l'on approche avec des segments de droites	320
6.5.	Une surface produite par la rotation d'une courbe autour d'un axe	324
6.6.	Une section horizontal d'un cône dont l'axe est vertical	325
6.7.	Une section d'un surface produite par la rotation du graphe d'une fonction autour d'un axe horizontal	325
6.8.	Les coordonnées polaires	328
6.9.	Une région du plan bornée par une courbe définie en coordonnées polaires	335
7.1.	Rotation d'un vecteur dans le plan	342
7.2.	Le graphe d'une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}	344
7.3.	Quelques courbes élémentaires dand le plan	350
7.4.	La norme Euclidienne dans \mathbb{R}^n	351
7.5.	Voisinage d'un point de \mathbb{R}^n	352
8.1.	Courbe produite par l'intersection d'une surface et d'un plan où y est constant	371
8.2.	Courbe produite par l'intersection d'une surface et d'un plan où x est constant	372
8.3.	Plan tangent à la surface $y = f(x, y)$ en un point $(a, b, f(a, b))$	373
8.4.	Représentation graphique de la définition de la dérivée dans la direction d'un vecteur	377
8.5.	La tangente à la courbe d'intersection d'un plan perpendiculaire et d'une surface	377
8.6.	Courbe appartenant à une surface	380
8.7.	Le gradient $\nabla F(a,b,c)$ est perpendiculaire à la surface $F(x,y,z)=0$ au point (a,b,c)	382
8.8.	Les trajectoires le long desquelles une fonction croît le plus rapidement coupent les courbes de niveau perpendiculairement	386
8.9.	Ensembles convexes et non-convexes	387
8.10.	Exemple d'un maximum local	391
8.11.	Deux exemples de col, un cas que l'on peut prédire et un que l'on ne peut pas	394
9.1.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang	411
9.2.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang	412
9.3.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang pour une médication continue	413

xiv TABLE DES FIGURES

9.4.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang pour une médication continue	414	
9.5.	Le taux d'absorption d'un médicament pris à intervalles réguliers	414	
9.6.	Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac et dans le sang pour une médication administrée à intervalles réguliers		
9.7.	Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac et dans le sang pour une médication administrée à intervalles réguliers	410	
9.8.	L'image d'une solution $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie une courbe dans le plan	419	
9.9.	Des portraits de phases possibles dans \mathbb{R}^2 si les valeurs propres sont distinctes	42	
9.10.	Un portrait de phases possible dans \mathbb{R}^2 s'il n'y a qu'une valeur propre et tous les vecteur propres sont colinéaires	422	
9.11.	Un portrait de phases possible pour un système de deux équations différentielles linéaires avec une paire de valeurs propres complexes	423	
9.12.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles linéaires	42	
9.13.	Classification des portraits de phases pour un système de deux équations différentielles linéaires	42	
9.14.	L'orbite associée à une solution ϕ d'un système d'équations différentielles	42	
9.15.	Le champ de vecteurs d'un système d'équations différentielles	430	
9.16.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	43	
9.17.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	43	
9.18.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	43	
9.19.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	43	
9.20.	Quelques orbites du système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol	44	
9.21.	L'ombre de la solution périodique pour le système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol	44	
9.22.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	44	
9.23.	Portrait de phases d'un système d'équations différentielles	44	
9.24.	Perturbation du système prédateurs-proies de Lotka-Voltera avec $\alpha=1$	44	
9.25.	Perturbation du système prédateurs-proies de Lotka et Voltera avec $\alpha=0.1$	44	
9.26.	Modèles possibles pour décrire le phénomène de saturation chez les prédateurs	44	
9.27.	Portrait de phases d'un modèle réaliste de prédateurs-proies	44	
9.28.	Orbites qui tendent vers une solution périodique représentant l'équilibre périodique entre les populations de prédateurs et de proies	45	

Avant-propos

Les notes de cours que vous avez en main représente un ouvrage inachevé, qui est en constante évolution. Il ne faut donc pas être surpris d'y retrouver des fautes d'orthographe, des coquilles, etc. Les corrections seront apportées au cours du temps suite au commentaires des lecteurs. L'auteur prend entière responsabilité pour les erreurs; comment pourrait-il faire autrement?

Le contenu du premier chapitre est principalement une révision des principaux sujets normalement enseignés au secondaire. Certains sujet seront convers en plus grande profondeur qu'au secondaire.

Les chapitres 2 et 3 contiennent du matériel présenté au secondaire mais aussi plusieurs sujets qui ne sont pas abordé au secondaire. La matière des cours de calcul différentiel et intégral au niveau universitaire débute avec certaines sections de ces chapitres selon le cours de calcul différentiel et intégral auquel vous êtes inscrit.

Ces notes peuvent être utilisées pour trois des variantes des cours de calcul différentiel et intégral qui sont offertes à l'Université d'Ottawa.

- Calcul différentiel et intégral (pour les étudiants en génie) : Les items marqués par le symbole 🎤 sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1720 et MAT1722.
- Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie Les items marqués par le symbole **\$** sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent les cours MAT1730 et MAT1732.
- Méthodes mathématiques I (pour les étudiants en administration) : Les items marqués par le symbole 🗠 sont spécifiquement pour les étudiants qui prennent le cour MAT1700.

Les items qui n'ont aucun de ces symboles sont requis pour les trois variantes des cours de calcul différentiel et intégral.

Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie

Comme les principaux utilisateurs de ces notes sont les étudiants dans les cours de Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie, nous offrons un aperçu du cours.

Le but principal du premier cours (MAT1730) est de développer les outils nécessaires pour l'étude des «systèmes dynamiques discrets». Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés entre autre pour décrire certaines caractéristiques des populations animales mesurées

xvi Avant-propos

à intervalles réguliers. Le deuxième cours (MAT1732) présente certains outils mathématiques pour l'étude des «systèmes dynamiques». Les systèmes dynamiques sont des systèmes d'équations différentielles; c'est-à-dire, des équations qui contiennent une fonction inconnue et sa dérivée. Ces systèmes sont utilisés pour modéliser les réactions chimiques, la croissance des individus, le mouvement des populations, etc.

Avertissement : Les modèles mathématiques utilisés dans les questions pour le cours de calcul pour les sciences de la vie ne représentent pas toujours des situations réelles. Pour obtenir des modèles mathématiques qui soient intéressants et utilisent la théorie présentée dans les notes, tout en étant accessibles pour le niveau du cours, nous avons dû créer des modèles qui ne sont pas basés sur des données scientifiques. Nous avons quand même essayé d'avoir des modèles qui soient qualitativement valables.

Théorie

Les items marqués par le symbole \odot sont spécifiquement pour les étudiants intéressés à la théorie et la rigueur en mathématique. Plusieurs de ces items demandent une connaissance de la notion de « démonstration » que la majorité des étudiants n'auront probablement pas vu au secondaire. Ces items sont généralement optionnel. Ils sont pour les étudiants curieux qui voudrait en savoir plus sur les méthodes enseignées en classe. On espère que certains étudiants seront intéressés par la rigueur mathématiques et voudront poursuive cette direction dans leur études.

Il y a plusieurs mentions du nombre d'Euler e. On donne plusieurs façons équivalentes de le définir. On mentionne indirectement le lien entre le nombre e et les fonctions trigonométriques, donc le nombre π , lors d'une des démonstrations de la règle d'addition pour les fonctions sin et cos. On espère que les étudiants seront fascinés par le fait que les nombres e et π sont reliés.

Notation

Définition

Les ensembles suivants seront fréquemment utilisés dans le présent document.

- 1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels.
- 2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres naturels positifs.
- 3. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers.
- 4. \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels; c'est-à-dire, les nombres de la forme n/m où $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
- 5. \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

En français, la virgule est utilisée pour séparer la partie entière de la partie décimale d'un

Avant-propos xvii

nombre et on utilise un espace pour séparer les multiples de 10³. Ainsi,

$$105\ 456\ 263,456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000} \ .$$

Cependant, dans le présent document, nous utiliserons la notation anglaise. Le point sépare la partie entière de la partie décimale d'un nombre et la virgule sépare les multiples de 10^3 . On écrit donc

$$105,456,263.456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000}.$$

La raison principale de ce choix est que la grande majorité des données utilisées dans ce document proviennent de documents en anglais qui utilisent cette notation. De plus, les logiciels sont tous en anglais et utilisent aussi cette notation. Pour être consistent, on a donc choisi d'utiliser la notation anglaise.

Remerciements

J'aimerais remercier Yves Bourgault et Wadii Hajji, deux collègues de travail, dont les suggestions ont améliorées la présentation de la matière.

De plus, j'aimerais remercier Paméla Touchette-Giroux pour son excellent travail de révision des textes pour la première édition de ces notes. Il n'en reste pas moins que je prends toute la responsabilité pour les fautes que l'on peut trouver dans le texte.

Primitives et intégrales indéfinies 1.1

Définition 1.1.1

Une fonction $F:]a, b[\to \mathbb{R}$ est une **primitive** de la fonction $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ si F'(x) =f(x) pour tout $x \in]a,b[$.

Exemple 1.1.2

 $F(x) = \sin(x)$ est une primitive de $f(x) = \cos(x)$ car $F'(x) = \cos(x) = f(x)$ pour tout x. $F(x) = x^7/7$ est une primitive de $f(x) = x^6$ car $F'(x) = x^6 = f(x)$ pour tout x. $F(x) = \ln |x|$ est une primitive de f(x) = 1/x car F'(x) = 1/x = f(x) pour tout $x \neq 0$.

Si F est une primitive de f alors, quelle que soit la constante C, la fonction G définie par G(x) = F(x) + C pour tout $x \in]a,b[$ est aussi une primitive de f car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C = f(x) + 0 = f(x)$$

pour tout $x \in]a,b[$. Il y a donc une infinité de primitives de f. On a une différente primitive de f pour chaque valeur de C.

En fait, la différence entre deux primitives de f est toujours une constante. Supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de f et posons $G = F_1 - F_2$. On a

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pour tout $x \in]a, b[$. Donc, G est une fonction constante; c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $G(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi, $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$.

Remarque 1.1.3

En fait, la justification précédente assume que si G'(x) = 0 pour tout $x \in]a, b[$ alors G est une fonction constante. On utilise l'interprétation de la dérivée comme la pente de la tangente à la courbe pour tirer cette conclusion. Une démonstration rigoureuse fait appel au Théorème des accroissements finis, le théorème ??.

En effet, soit $x \in]a,b[$ et $c \in]a,b[$. Grâce au Théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe ξ entre x and c (où ξ dépend de x and c) telle que

$$G(x) - G(c) = g'(\xi)(x - c)$$
.

2 1. Intégrale ♣ № №

$f(x)$ $\int f(x) dx$		contraintes		
x^{α}	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$	$\alpha \neq -1$ et x^{α} est définie		
1/x	$\ln x + C$	$x \neq 0$		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$			
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$			
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$			
e^x	$e^x + C$			
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x) + C$	x < 1		
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x) + C$			

Table 1.1 – Quelques intégrales indéfinies

Puisque G'(x) = 0 pour tout $x \in]a, b[$, on a que G(x) - G(c) = 0. Comme ceci est vrai pour $x \in]a, b[$, on a G(x) = G(c) pour tout $x \in]a, b[$.

Définiton 1.1.4

L'intégrale indéfinie d'une fonction f est la famille de primitives pour cette fonction. On dénote l'intégrale indéfinie par $\int f(x) dx$. Ainsi, si F est une primitive de f, on a

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x.

Le symbole dx <u>n'est pas une variable</u>, il indique seulement que la variable d'intégration est x. Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Exemple 1.1.5

Si on utilise les résultats de l'exemple précédent, on obtient les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C , \quad \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C .$$

À partir des formules de dérivation que nous avons présentées à la section ??, on peut construire la table des intégrales que l'on retrouve dans le tableau 1.1.

Le prochain résultat est une conséquence de la linéarité de la dérivée.

*

Théorème 1.1.6

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors aF + bG est une primitive de af + bg. Par conséquent,

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

La démonstration de ce théorème est très simple. Par linéarité de la dérivée, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(aF(x) + bG(x)) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) = af(x) + bg(x)$$

pour tout x. Donc, aF + bG est une primitive de af + bg.

Le théorème précédent peut être résumé en une seule phrase. L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies des fonctions de la somme, et l'intégrale indéfinie du produit d'une fonction avec une constante est le produit de l'intégrale indéfinie de la fonction avec cette constante.

Exemple 1.1.7

Calculer l'intégrale indéfinie de $g(x) = 5x^{-8} + 3\cos(x) + 7/\sqrt{1-x^2}$.

$$\int g(x) dx = \int \left(5x^{-8} + 3\cos(x) + \frac{7}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$$

$$= 5 \int x^{-8} dx + 3 \int \cos(x) dx + 7 \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= 5 \left(\frac{x^{-7}}{-7}\right) + 3\sin(x) + 7\arcsin(x) + C$$

$$= -\frac{5}{7x^7} + 3\cos(x) + 7\arcsin(x) + C.$$

Exemple 1.1.8

Si $f'(x) = x^4 + 5/(1+x^2)$ et f(0) = 2, trouver f.

La fonction f est une primitive de $x^4 + 5/(1+x^2)$. L'intégrale indéfinie de $x^4 + 5/(1+x^2)$ est

$$\int \left(x^4 + \frac{5}{1+x^2}\right) dx = \int x^4 dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^5}{5} + 5\arctan(x) + C.$$

La fonction f est donnée par $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + C$ où C est choisi pour satisfaire f(0) = 2. On doit donc avoir C = 2 et la fonction f cherchée est $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + 2$.

Exemple 1.1.9

L'exemple suivant se trouve dans (presque) tous les livres de calcul différentiel qui ont été écrits. On va donc continuer la tradition pour ne pas paraître trop radical.

Si p(t) est la position d'un objet (se déplaçant en ligne droite), sa vitesse au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la position) est v(t) = p'(t). La position est une primitive de la vitesse. L'accélération au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la vitesse) est a(t) = v'(t) = p''(t). La vitesse est une primitive de l'accélération.

Avec cette information, on peut trouver le temps que prendra un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur de 100 m pour atteindre le sol. On peut aussi trouver la vitesse à laquelle l'objet frappe le sol. On suppose que la friction de l'air n'a aucun effet sur l'objet.

Au départ, la position de l'objet est p(0) = 100 m. Puisqu'on laisse tomber l'objet, sa vitesse initiale est v(0) = 0 m/s.

L'accélération dû à l'attraction terrestre est bien connue et est -9.8 m/s^2 . Nous utilisons le signe négatif pour l'accélération pour indiquer que la direction positive du déplacement est vers le haut. Ainsi, a(t) = -9.8 pour tout t.

Puisque

$$\int a(t) \, dt = \int -9.8 \, dt = -9.8 \, t + C$$

pour une constante C, on a $v(t) = -9.8 \, t + C$. La constante C est déterminée par la condition v(0) = 0. Ainsi, C = 0 et $v(t) = -9.8 \, t$ m/s.

De même, puisque

$$\int v(t) dt = \int -9.8 t dt = -9.8 \int t dt = -9.8 \frac{t^2}{2} + C$$

pour une constante C, on a $p(t) = -4.9 t^2 + C$. La constante C est déterminée par la condition p(0) = 100. Ainsi, C = 100 et $p(t) = -4.9 t^2 + 100$ m.

L'objet va toucher le sol lorsque $p(t) = -4.9 t^2 + 100 = 0$. On trouve t = 4.5175395... secondes.

Donc, l'objet prend $t=4.5175395\ldots$ secondes pour atteindre le sol qu'il frappe à une vitesse de $v(4.5175395\ldots)=-9.8\times4.5175395\ldots=-44.271887\ldots$ m/s. On note que le signe négatif pour la vitesse indique seulement que l'objet se dirige vers le sol.

1.2 Techniques d'intégration

Nous présentons quelques règles qui nous permettront de transformer une intégrale indéfinie complexe en une autre intégrale indéfinie qui fait appel seulement à des intégrales indéfinies simples comme celles que l'on retrouve dans le tableau 1.1.

1.2.1 Substitutions

La première méthode d'intégration que nous allons voir nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie de fonctions composées comme $\sin(4x)$, $\sqrt{x+7}$, etc.

Exemple 1.2.1

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int e^{5x} dx$$
 b) $\int x \sin(x^2) dx$ c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$

a) On utilise la règle de la dérivée de fonctions composées pour obtenir

$$\int e^{5x} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{e^{5x}}{5} \right) = \frac{5 e^{5x}}{5} = e^{5x} .$$

b) On a

$$\int x \sin(x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{-\cos(x^2)}{2} \right) = \frac{2x\sin(x^2)}{2} = x\sin(x^2) .$$

c) ?

Alors que les deux premières intégrales indéfinies étaient assez simple à deviner, il en est autrement de l'intégrale indéfinie en (c).

Nous présentons une méthode d'intégration basée sur la règle de la dérivée de fonctions composées qui nous permettra de trouver l'intégrale indéfinie de $x^3/\sqrt{x^2+5}$.

On peut récrire l'intégrale indéfinie en (a) de l'exemple précédent pour obtenir

$$\int 5 e^{5x} \, \mathrm{d}x = e^{5x} + C \; .$$

Cette intégrale indéfinie est de la forme

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) + C \tag{1.2.1}$$

où $f(x) = e^x$, g(x) = 5x, et $F(x) = e^x$ est la primitive de f. De même, l'intégrale indéfinie en (b) de l'exemple précédent peut s'écrire

$$\int 2x \sin(x^2) dx = -\cos(x^2) + C.$$

C'est une intégrale indéfinie de la forme (1.2.1) où $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$, et $F(x) = -\cos(x)$ est la primitive de f.

Est-ce que la formule (1.2.1) est toujours vraie?

Soit F une primitive d'une fonction f et g une fonction différentiable. Si f et F sont définies sur l'image de g, alors la fonction composée $F \circ g$ est différentiable et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = f(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = f(g(x))g'(x) .$$

Ainsi, F(g(x)) est une primitive de f(g(x))g'(x). On obtient le résultat suivant :

6 1. Intégrale ♣ گ 🗠

Théorème 1.2.2

On suppose que

- 1. q est une fonction différentiable,
- 2. F est la primitive d'une fonction f, et
- 3. f et F sont définies sur l'image de g.

Alors, F(g(x)) est une primitive de f(g(x))g'(x). On en déduit la **règle de substitution** (ou **méthode de changement de variable**) suivante :

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy \bigg|_{y=g(x)} = F(g(x)) + C.$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose y=g(x), alors $\mathrm{d}y=g'(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int f(y) dy$$

où il ne faut pas oublier de remplacer y par g(x) après avoir calculé l'intégrale indéfinie de f. L'expression dy = g'(x) dx n'est pas une égalité algébrique, elle indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y.

Retournons à l'exemple précédent avec la règle de substitution en main.

Exemple 1.2.3

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int e^{5x} dx$$
 b) $\int x \sin(x^2) dx$ c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$

a) Si on pose y = 5x, on a dy = 5 dx et

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} \times 5 dx = \frac{1}{5} \int e^{y} dy \bigg|_{y=5x} = \frac{1}{5} e^{y} \bigg|_{y=5x} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C.$$

b) Si on pose $y = x^2$, on a dy = 2x dx et

$$\int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) \times 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin(y) dy \Big|_{y=x^2}$$
$$= -\frac{1}{2} \cos(y) \Big|_{y=x^2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C.$$

c) Si on pose $y = x^2 + 5$, on a $x^2 = y - 5$ et dy = 2x dx. Ainsi,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} \times 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{y - 5}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y \bigg|_{y = x^2 + 5}$$

$$= \frac{1}{2} \int (y^{1/2} - 5y^{-1/2}) dy \Big|_{y=x^2+5} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^{3/2} - 10 y^{1/2} \right) \Big|_{y=x^2+5}$$
$$= \frac{1}{3} (x^2 + 5)^{3/2} - 5(x^2 + 5)^{1/2} + C.$$

Exemple 1.2.4

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$
 b) $\int \frac{1}{1 + x^{1/3}} dx$
c) $\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx$ d) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx$

a) On utilise la substitution $y = \sin(x)$. On a $dy = \cos(x) dx$ et

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) dx = \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) dx$$

$$= \int \frac{1 - y^2}{\sqrt{y}} dy \Big|_{y = \sin(x)} = \int \left(y^{-1/2} - y^{3/2}\right) dy \Big|_{y = \sin(x)}$$

$$= \left(2y^{1/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right) \Big|_{y = \sin(x)} + C$$

$$= 2\left(\sin(x)\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\sin(x)\right)^{5/2} + C.$$

b) Posons $y = 1 + x^{1/3}$. Puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(1 + x^{1/3} \right) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} \; ,$$

on obtient

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{3x^{2/3}} \,\mathrm{d}x \;.$$

Ainsi,

$$\begin{split} \int \frac{1}{1+x^{1/3}} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{3x^{2/3}}{1+x^{1/3}} \left(\frac{1}{3x^{2/3}}\right) \, \mathrm{d}x = \int \frac{3(y-1)^2}{y} \, \mathrm{d}y \bigg|_{y=1+x^{1/3}} \\ &= 3 \int \left(y-2+\frac{1}{y}\right) \, \mathrm{d}y \bigg|_{y=1+x^{1/3}} = 3 \left(\frac{y^2}{2}-2y+\ln|y|\right) \bigg|_{y=1+x^{1/3}} + C \\ &= \frac{3}{2} (1+x^{1/3})^2 - 6(1+x^{1/3}) + 3 \ln|1+x^{1/3}| + C \; . \end{split}$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé la relation $y=1+x^{1/3}$ pour déduire que $x^{1/3}=y-1$. Ainsi, $x^{2/3}=(y-1)^2$.

8 1. Intégrale **♣ №** <u>№</u>

c) On remarque que

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} \, \mathrm{d}x \ .$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \arcsin(y) + C \; .$$

Si on pose $y = \frac{3x^2}{4}$, on obtient $dy = \frac{3x}{2} dx$ et

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} \left(\frac{3x}{2}\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \, \mathrm{d}y \Big|_{y = 3x^2/4} = \frac{1}{6} \arcsin(y) \Big|_{y = 3x^2/4} + C$$
$$= \frac{1}{6} \arcsin\left(\frac{3x^2}{4}\right) + C.$$

d) On remarque que $x^2 + 2x + 10$ n'a pas de racines réelles (lorsque le dénominateur sera un polynôme qui peut être factorisé, on fera appel aux fractions partielles que l'on verra prochainement). Si on complète le carré, on peut écrire

$$x^{2} + 2x + 10 = (x+1)^{2} + 9 = (x+1)^{2} + 3^{3}$$
.

On doit donc évaluer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}x.$$

On peut espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \arctan(y) + C \; .$$

Pour ce faire, posons $y = \frac{x+1}{3}$. Ainsi, $dy = \frac{1}{3} dx$ et

$$\int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y = (x+1)/3} = \frac{1}{3} \arctan(y) \Big|_{y = (x+1)/3} + C$$

$$= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$$

À l'occasion, il est préférable d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse. On utilise x = g(y) pour obtenir

$$\int f(x) dx = \int f(g(y))g'(y) dy$$

Cela peut sembler contradictoire car on a l'impression que l'intégrande à droite, f(g(y))g'(y), sera plus compliquée que l'intégrande à gauche, f(x). L'exemple qui suit nous prouve le contraire.

Exemple 1.2.5

Évaluer l'intégrale indéfinie suivante.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$$

Pour évaluer l'intégrale de fonctions trigonométriques, on a souvent recours aux identités trigonométriques. Les trois plus importantes identités sont :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$
, $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ et $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$.

On réfère aux deux dernières formules par le nom de formules de l'angle double.

Les formules d'addition suivantes sont fréquemment utilisées pour calculer des intégrales en mécanique.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) ,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) ,$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) ,$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) ,$$

et

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$
.

Les trois dernières formules sont déduites des deux formules qui les précèdent.

Finalement, si l'intégrande contient les fonctions trigonométriques tan, cot, sec et csc, il est généralement préférable de réécrire ces fonctions en termes de sin et cos, et de simplifier l'intégrande. Il y a cependant quelques exceptions où les identités suivantes peuvent être utile.

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$
 et $\cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha)$.

Exemple 1.2.6

Evaluer les intégrales indéfinies suivantes :

10 1. Intégrale ♣ № №

a)
$$\int \tan(x) dx$$
 b) $\int \sin^2(x) dx$ c) $\int \sin^3(x) dx$
d) $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$ e) $\int \sec(x) dx$ f) $\int \csc(x) dx$

a) Par définition de la tangente, on a

$$\int \tan(x) \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, \mathrm{d}x \; .$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\int \tan(x) dx = -\int \frac{1}{\cos(x)} (-\sin(x)) dx = -\int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\cos(x)}$$
$$= -\ln|y| \Big|_{y=\cos(x)} + C = -\ln|\cos(x)| + C.$$

b) On utilise la formule de l'angle double pour obtenir

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx .$$

Si on pose y = 2x, alors dy = 2 dx et

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2x)) \times 2 \, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos(y)) \, dy \Big|_{y=2x} = \frac{1}{4} \left(y - \sin(y) \right) \Big|_{y=2x} + C$$
$$= \frac{1}{4} \left(2x - \sin(2x) \right) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C .$$

c) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour écrire

$$\int \sin^3(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx.$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\begin{split} & \int \left(1 - \cos^2(x) \right) \sin(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x = - \int \left(1 - \cos^2(x) \right) \, \left(- \sin(x) \right) \mathrm{d}x \\ & = - \int (1 - y^2) \, \mathrm{d}y \bigg|_{y = \cos(x)} = - \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{y = \cos(x)} + C = - \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) \right) + C \\ & = - \cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x) + C \; . \end{split}$$

d) On utilise la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour obtenir

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx.$$

Si on pose $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx = -\int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) (-\sin(x)) dx$$

$$= -\int (1 - y^2) y^2 dy \Big|_{y = \cos(x)} = -\int (y^2 - y^4) dy \Big|_{y = \cos(x)}$$

$$= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \Big|_{y = \cos(x)} + C = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + C.$$

e) Il faut utiliser un petit truc. On a

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \left(\frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} \right) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx.$$

Si on utilise la substitution $y = \sec(x) + \tan(x)$, on obtient

$$dy = (\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)) dx$$
.

Ainsi

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{1}{\sec(x) + \tan(x)} \left(\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x) \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y = \sec(x) + \tan(x)} = \ln|y| \Big|_{y = \sec(x) + \tan(x)} + C = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

f) Il faut utiliser un petit truc semblable à celui utilisé en (e). On a

$$\int \csc(x) dx = \int \csc(x) \left(\frac{\csc(x) + \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} \right) dx = \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx.$$

Si on utilise la substitution $y = \csc(x) + \cot(x)$, on obtient

$$dy = \left(-\csc(x)\cot(x) - \cot^2(x)\right) dx.$$

Ainsi

$$\begin{split} \int \csc(x) \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{\csc(x) + \cot(x)} \left(-\csc^2(x) - \csc(x) \cot(x) \right) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y \bigg|_{y = \csc(x) + \cot(x)} = -\ln|y| \bigg|_{y = \csc(x) + \cot(x)} = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C \; . \end{split}$$

Exemple 1.2.7 🖍

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

12 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

a)
$$\int \sin(4x)\cos(3x) dx$$
 b) $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos(x) dx$

a) On utilise l'identité

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

avec $\alpha = 4x$ et $\beta = 3x$ pour obtenir

$$\int \sin(4x)\cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(7x) dx.$$

La première intégrale est

$$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C_1 \; .$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise la substitution y = 7x. Donc, dy = 7 dx et

$$\int \sin(7x) dx = \frac{1}{7} \int \sin(7x) \times 7 dx = \frac{1}{7} \int \sin(y) dy \Big|_{y=7x}$$
$$= -\frac{1}{7} \cos(y) \Big|_{y=7x} + C_2 = -\frac{1}{7} \cos(7x) + C_2.$$

On obtient

$$\int \sin(4x)\cos(3x) \, dx = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{14}\cos(7x) + C$$

où
$$C = (C_2 - C_1)/2$$
.

b) On peut utiliser une des formules d'addition pour obtenir

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) .$$

Si on substitue cette expression dans l'intégrale

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, \mathrm{d}x \; ,$$

on obtient

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sin(x) \cos(x) dx + \frac{1}{2} \int \cos^2(x) dx.$$

Si on substitue

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\sin(x-x) + \sin(x+x)) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

et

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

dans l'intégrale précédente, on obtient

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos(2x)) dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) dx + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos(2x) dx.$$

Pour évaluer la première et la troisième intégrale dans l'expression précédente, on utilise dans les deux cas la substitution y=2x. Donc, dy=2 dx et

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(2x) \times 2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \, \mathrm{d}x + \frac{1}{8} \int \cos(2x) \times 2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(y) \, \mathrm{d}y \bigg|_{y=2x} + \frac{1}{4} \int \, \mathrm{d}x + \frac{1}{8} \int \cos(y) \, \mathrm{d}y \bigg|_{y=2x}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(y) \bigg|_{y=2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(y) \bigg|_{y=2x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C.$$

1.2.2 Intégration par parties

Alors que la méthode de substitution nous a permis d'évaluer l'intégrale indéfinie de certaines fonctions composées, la méthode d'intégration par parties nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie du produit de deux fonctions comme xe^x , $x\sin(x)$, etc.

Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ainsi,

$$f(x) g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (f(x)g(x)) - f'(x) g(x) .$$

Si on utilise la linéarité de l'intégrale indéfinie, on a

$$\int f(x) g'(x) dx = \int \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) dx - \int f'(x) g(x) dx$$
$$= f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

où nous avons utilisé le fait que f(x)g(x) est une primitive de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x))$.

Donc, on obtient une primitive de f(x)g'(x) en soustrayant de f(x)g(x) une primitive de f'(x)g(x). En d'autre mots,

14 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

Théorème 1.2.8

Si f et g sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties.

Exemple 1.2.9

Évaluer l'intégrale indéfinie $\int xe^x dx$.

On a
$$xe^x = f(x)g'(x)$$
 pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc, $g(x) = e^x$ et $f'(x) = 1$. Ainsi,

$$\int xe^x \, dx = \int f(x) g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C$$

$$\operatorname{car} \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$$

Exemple 1.2.10

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int x^2 \cos(2x) dx$$
 b)
$$\int \sqrt{t} \ln(t) dt$$

1em] c)
$$\int x^3 \ln(2x) dx$$
 d)
$$\int \ln(x) dx$$

a) On a $x^2\cos(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(2x)$. Donc, f'(x) = 2x et $g(x) = \sin(2x)/2$. On obtient

$$\int x^{2} \cos(2x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= \frac{x^{2}}{2} \sin(2x) - \int x \sin(2x) dx.$$

On fait appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int x \sin(2x) dx$. On a $x \sin(2x) = f(x)g'(x)$ pour f(x) = x et $g'(x) = \sin(2x)$. Donc, f'(x) = 1 et $g(x) = -\cos(2x)/2$. Ainsi

$$\int x \sin(2x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

Finalement, on a

$$\int x^2 \cos(2x) dx = \frac{x^2}{2} \sin(2x) - \left(-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C\right)$$
$$= \frac{x^2}{2} \sin(2x) + \frac{x}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) - C.$$

On remarque que la méthode d'intégration par substitution a été utilisée à deux reprises pour éliminer le polynôme x^2 de l'intégrande.

b) On a $t^{1/2} \ln(t) = f(t) g'(t)$ pour $f(t) = \ln(t)$ et $g'(t) = t^{1/2}$. Donc, $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{2}{3}t^{3/2}$ et

$$\int t^{1/2} \ln(t) dt = \int f(t) g'(t) dt = f(t)g(t) - \int g(t) f'(t) dt$$
$$= \frac{2}{3} t^{3/2} \ln(t) - \frac{2}{3} \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \ln(t) - \frac{4}{9} t^{3/2} + C.$$

c) On a $x^3 \ln(2x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \ln(2x)$ et $g'(x) = x^3$. Donc, f'(x) = 1/x, $g(x) = x^4/4$ et

$$\int x^3 \ln(2x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

d) On a $\ln(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \ln(x)$ et g'(x) = 1. Donc, g(x) = x et f'(x) = 1/x. Ainsi,

$$\int \ln(x) \, dx = \int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) \, f'(x) \, dx$$
$$= x \, \ln(x) - \int 1 \, dx = x \, \ln(x) - x + C \, .$$

On peut déduire des exemples précédents quelques règles pour l'intégration par parties.

- 1. Si l'intégrande est de la forme $p(x)e^{\alpha x}$ où p(x) est un polynôme, on doit choisir f(x) = p(x) et $g'(x) = e^{\alpha x}$.
- 2. Si l'intégrande est de la forme $p(x)\sin(\alpha x)$ ou $p(x)\cos(\alpha x)$ où p(x) est un polynôme, on doit choisir f(x) = p(x) et $g'(x) = \sin(\alpha x)$ ou $\cos(\alpha x)$ selon le cas.
- 3. Si l'intégrande est de la forme $p(x) \ln(\alpha x)$ où p(x) est une somme d'expressions de la forme x^r avec r un nombre rationnel, on doit choisir $f(x) = \ln(x)$ et g'(x) = p(x).

Exemple 1.2.11 🔑

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int x \, 5^x \, dx$$
 b) $\int \arcsin(x) \, dx$ **c)** $\int \arctan(x) \, dx$

a) On a $x5^x = f(x) g'(x)$ pour f(x) = x et $g'(x) = 5^x$. Donc, f'(x) = 1, $g(x) = 5^x / \ln(5)$ et

$$\int x5^x \, dx = \int f(x) g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx$$
$$= \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)} \int 5^x \, dx = \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{(\ln(5))^2} 5^x + C$$

16 1. Intégrale **♣** № 2

Il ne faut pas oublier que $\frac{d}{dx}5^x = 5^x \ln(5)$.

b) On a $\arcsin(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arcsin(x)$ et g'(x) = 1. Donc, g(x) = x, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\int \arcsin(x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = 1 - x^2$. On a dy = -2x dx et ainsi

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \left(1-x^2\right)^{-1/2} \times (-2x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int y^{-1/2} \, \mathrm{d}y \bigg|_{y=1-x^2}$$
$$= -y^{1/2} \bigg|_{y=1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Donc,

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} - C.$$

c) On a $\arctan(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x)$ et g'(x) = 1. Donc, g(x) = x, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et

$$\int \arctan(x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y=1+x^2$. On a $dy=2x\,dx$ et ainsi

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \times 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=1+x^2}$$
$$= \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1+x^2} + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Donc,

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - C.$$

Exemple 1.2.12

Évaluer $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

C'est un autre exemple où nous devons utiliser la règle de substitution dans le sens inverse comme nous l'avons expliqué à la section précédente.

Posons $x = t^2$ dans le but d'éliminer \sqrt{x} . Alors dx = 2t dt et

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int te^t dt \bigg|_{t=\sqrt{x}} = 2 \left(te^t - e^t \right) \bigg|_{t=\sqrt{x}} + C = 2 \left(\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} \right) + C$$

où nous avons utilisé le résultat de l'exemple 1.2.9.

L'exemple suivant démontre une technique pour évaluer les intégrales dont l'intégrande est le produit de $e^{\alpha x}$ et $\cos(\beta x)$, ou $e^{\alpha x}$ et $\sin(\beta x)$.

Exemple 1.2.13

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int e^x \cos(x) dx$$
 b) $\int \sin(\ln(x)) dx$, $x > 0$

a) Posons

$$I = \int e^x \cos(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

On a $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$I = \int e^{x} \cos(x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= e^{x} \sin(x) - \int e^{x} \sin(x) dx.$$
(1.2.2)

Même si cette expression n'est pas plus simple que l'intégrale du départ, on est quand même sur la bonne voie. Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x \sin(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

On a $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc, $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\int e^x \sin(x) \, dx = \int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) \, f'(x) \, dx$$
$$= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) \, dx = -e^x \cos(x) + I.$$

Si on substitue cette expression dans (1.2.2), on obtient

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

et, après avoir isolé I, on trouve que

$$I = \frac{1}{2} \left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \right)$$

est une primitive de $e^x \cos(x)$. Donc

$$\int e^x \cos(x) \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) + C.$$

18 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

On aurait pu utiliser $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la première intégration par parties mais alors il aurait fallu utiliser $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la deuxième intégration par parties.

b) On commence par une substitution. Posons $x = e^y$ pour éliminer $\ln(x)$. On a $dx = e^y dy$ et

$$\int \sin(\ln(x)) dx = \int \sin(y) e^y dy \bigg|_{y=\ln(x)}.$$

C'est une intégrale du même type que celle que l'on a évalué en (a).

Posons

$$I = \int e^y \sin(y) \, \mathrm{d}y \; .$$

On a $e^y \sin(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \sin(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = \cos(y)$ et

$$I = \int e^{y} \sin(y) \, dy = \int f(x) \, g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) \, f'(x) \, dx$$
$$= e^{y} \sin(y) - \int e^{y} \cos(y) \, dy$$
(1.2.3)

De plus, pour l'intégrale indéfinie

$$\int e^y \cos(y) \, \mathrm{d}y \;,$$

on a $e^y \cos(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \cos(y)$. Donc, $g(y) = e^y$, $f'(y) = -\sin(y)$ et

$$\int e^y \cos(y) \, \mathrm{d}y = \int f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, \mathrm{d}x$$
$$= e^y \cos(y) + \int e^y \sin(y) \, \mathrm{d}y = e^y \cos(y) + I.$$

Si on substitue cette expression dans (1.2.3), on obtient

$$I = e^y \sin(y) - (e^y \cos(y) + I)$$

et, après avoir isolé I, on trouve que

$$I = \frac{1}{2} \left(e^y \sin(y) - e^y \cos(y) \right)$$

est une primitive de $e^y \sin(y)$. Ainsi,

$$\int e^{y} \sin(y) \, dy = \frac{1}{2} \left(e^{y} \sin(y) - e^{y} \cos(y) \right) + C.$$

Donc,

$$\begin{split} \int \sin(\ln(x)) \, \mathrm{d}x &= \int \sin(y) \, e^y \, \mathrm{d}y \bigg|_{y = \ln(x)} = \frac{1}{2} \left(e^y \sin(y) - e^y \cos(y) \right) \bigg|_{y = \ln(x)} + C \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\ln(x)} \sin(\ln(x)) - e^{\ln(x)} \cos(\ln(x)) \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \left(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \right) + C \; . \end{split}$$

Méthode de Weiestrass 🔑

Il existe une autre façon d'évaluer des intégrales de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x)) d(x)$ où $F(\cos(x), \sin(x))$ est une fonction (rationnelle) de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. On peut utiliser la substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \quad -\pi < x < \pi \tag{1.2.4}$$

qui est due à Weiestrass. Cette substitution est équivalente à $x=2\arctan(t)$ pour $t\in\mathbb{R}.$ On a

$$dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt . ag{1.2.5}$$

De plus, grâce à la formule de l'angle double pour la tangente, on a

$$\sec^{2}(x) = \tan^{2}(x) + 1 = \left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{2} + 1 = \left(\frac{2t}{1 - t^{2}}\right)^{2} + 1 = \left(\frac{1 + t^{2}}{1 - t^{2}}\right)^{2}$$

si $t \neq \pm 1$. Donc, $sec(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ donne

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \,. \tag{1.2.6}$$

Cette formule est aussi valide pour $t=\pm 1$. Si t=1, on a $x=\pi/2$ et ainsi $\cos(x)=0$. Donc, les deux côtés de (1.2.6) sont nuls. De même, si t=-1, on a $x=-\pi/2$ et ainsi $\cos(x)=0$. Donc, les deux côtés de (1.2.6) sont encore nuls. La relation

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 = \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^2$$

donne

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \,. \tag{1.2.7}$$

Exemple 1.2.14

Evaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} \, \mathrm{d}x \; .$$

On utilise la substitution (1.2.4) avec (1.2.5) et (1.2.7) pour obtenir

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)} dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1}\right) dt = \int \frac{1}{t^2+t+1} dt$$
$$= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt.$$

20 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

Avec la substitution $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right)$, on obtient $dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$ et

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2 + 1} \, \mathrm{d}y \bigg|_{y = 2(t+1/2)/\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) \bigg|_{y = 2(t+1/2)/\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

Finalement, puisque $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on trouve

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

1.2.3 Fractions partielles

La méthode des fractions partielles permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}x$$

où p(x) et q(x) sont deux polynômes. Vous devez suivre les étapes suivantes pour calculer ce genre d'intégrales.

1. Si le degré de p(x) est plus grand ou égal au degré de q(x), on divise p(x) par q(x) pour obtenir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

où le degré de r(x) est plus petit que le degré de q(x), et s(x) est un polynôme (donc facile à intégrer).

2. On exprime q(x) comme un produit de facteurs irréductibles.

$$q(x) = A(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}(x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^{m_2} \dots$$

où $A, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ sont des constantes réelles et $n_1, n_2, \ldots, m_1, m_1, \ldots$ sont des entiers positifs. On assume que les α_k et les (β_k, γ_k) sont distincts.

3. On exprime r(x)/q(x) sous la forme

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2} + \dots + \frac{B_{m_1} x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}} + \dots$$

où $A_1, A_2, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots$ sont des constantes.

4. Finalement, on évalue

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx
= \int s(x) dx + \int \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} dx + \dots + \int \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} dx
+ \dots + \int \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)} dx + \int \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2} dx
+ \dots + \int \frac{B_{m_1} x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}} dx + \dots$$

Exemple 1.2.15

Évaluer

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} \, \mathrm{d}x \; .$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir

$$\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} \ .$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Étape 3: On cherche A et B tels que

$$\frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \; .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, l'égalité est satisfaite si on a le même numérateur de chaque côté de l'égalité. C'est-à-dire si

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2) = (A + B)x - (3A + 2B).$$

Si on compare les coefficients des puissances de x, on trouve A+B=19 et -(3A+2B)=-30. Donc, A=-8 et B=27.

Étape 4:

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(x + 5 - 8 \frac{1}{x - 2} + 27 \frac{1}{x - 3}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + -8 \ln|x - 2| + 27 \ln|x - 3| + C$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \ln\left(\frac{|x - 3|^{27}}{|x - 2|^8}\right) + C.$$

Remarque 1.2.16

Lorsque que les racines du dénominateur sont simples, on a une expression de la forme suivante à l'étape 3.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha_n)}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines distinctes de q(x). Il y a alors une façon facile de déterminer les valeurs de A_1, A_2, \ldots, A_n . Si on met sur un dénominateur commun, on obtient au numérateur une équation de la forme

$$r(x) = A_1(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + \dots + A_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1}).$$

Il suffit d'évaluer chacun des côtés de l'égalité précédente à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pour obtenir respectivement les valeurs de A_1, A_2, \ldots, A_n .

Si on utilise cette méthode à l'exemple précédent, on a

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Ainsi, on obtient 27 = B avec x = 3 et 8 = -A avec x = 2.

Exemple 1.2.17

Évaluez

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x \; .$$

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, on divise pour obtenir

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x + 1 + \frac{1}{x^3 - x}.$$

Étape 2 : On a la factorisation $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

Étape 3: On cherche A, B et C tels que

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} \ .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Pour x = 0, on obtient 1 = -A. Donc A = -1. Pour x = 1, on obtient 1 = 2B. Donc B = 1/2. Finalement, pour x = -1, on obtient 1 = 2C. Donc C = 1/2.

Étape 4:

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} \, dx = \int (x+1) \, dx + \int \frac{1}{x^3 - x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \int \frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|(x-1)(x+1)| + C.$$

*

L'exemple suivant ne fait partie en soit de la méthode d'intégration par fractions partielles. On a même déjà vu une intégrale semblable à l'exemple 1.2.4. Cependant, on rencontre souvent cette situation quand on essaye d'utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Il est donc important d'être capable de calculer de telles intégrales.

Exemple 1.2.18

Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} \, \mathrm{d}x \; .$$

Étape 1 : On n'a pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le polynôme $x^2 + 6x + 12$ est irréductible car il n'admet pas de racines réelles.

La méthode des fractions partielles ne s'applique pas. On complète le carré du dénominateur. On remarque que $x^2 + 6x + 12 = (x + 3)^2 + 3$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+3)^2 + 3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}x \; .$$

Si on pose $y = \frac{x+3}{\sqrt{3}}$, on a $dy = \frac{1}{\sqrt{3}} dx$ et

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left((x+3)/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} \, \mathrm{d}y \Big|_{y = (x+3)/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(y) \Big|_{y = (x+3)/\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1

Exemple 1.2.19 🔑

Évaluer

$$\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} \, \mathrm{d}x \ .$$

Étape 1 : On n'a pas a diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le dénominateur $(x-3)(x^2+6x+12)$ est déjà exprimé comme un produit de facteurs irréductibles car le polynôme $x^2+6x+12$ n'admet pas de racines réelles.

24 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

Étape 3: On cherche A, B et C tels que

$$\frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+12} .$$

Si on exprime les fractions sur un même dénominateur commun, on obtient l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$4x + 1 = A(x^2 + 6x + 12) + (Bx + C)(x - 3) = (A + B)x^2 + (6A - 3B + C)x + (12A - 3C).$$

Si on compare les coefficients des puissances de x, on trouve A + B = 0, 6A - 3B + C = 4 et 12A - 3C = 1. Donc, A = 1/3, B = -A et C = 1.

Étape 4:

$$\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+1}{x^2+6x+12} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x-3}{x^2+6x+12} dx = \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x-3}{(x+3)^2+3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x+3}{(x+3)^2+3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{-6}{(x+3)^2+3} dx.$$

Or, si on pose $y = (x+3)^2$, on obtient dy = 2(x+3) dx et

$$\int \frac{x+3}{(x+3)^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+3)^2+3} \times 2(x+3) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+3} dy \Big|_{y=(x+3)^2} = \frac{1}{2} \ln|y+3| \Big|_{y=(x+3)^2} + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \ln((x+3)^2+3) + C_1.$$

De plus, si on utilise le résultat de l'exemple 1.2.18,

$$\int \frac{-6}{(x+3)^2+3} \, \mathrm{d}x = -6 \int \frac{1}{x^2+6x+12} \, \mathrm{d}x = -2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C_2.$$

Ainsi,

$$\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln((x+3)^2+3) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

où
$$C = -(C_1 + C_2)/3$$
.

Exemple 1.2.20 **\$\mathcal{E}**

Évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{3\sin(x) + \cos(x)} \, \mathrm{d}x \; .$$

On utilise la substitution (1.2.4) avec (1.2.5), (1.2.6) et (1.2.7) pour obtenir

$$\int \frac{1}{3\sin(x) + \cos(x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1}\right) \, \mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+6t-t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{2}{(t-(3+\sqrt{10}))(t-(3-\sqrt{10}))} \, \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \int \left(\frac{1}{t-(3+\sqrt{10})} - \frac{1}{t-(3-\sqrt{10})}\right) \, \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\ln|t-(3+\sqrt{10})| - \ln|t-(3-\sqrt{10})|\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t-(3+\sqrt{10})}{t-(3-\sqrt{10})}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\tan(x/2) - (3+\sqrt{10})}{\tan(x/2) - (3-\sqrt{10})}\right| + C.$$

La méthode d'intégration par fractions partielles a été utilisée pour évaluer l'intégrale en t.

1.2.4 Substitutions trigonométriques 🖍

Si l'intégrande contient un facteur de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, une substitution trigonométrique pourrait être nécessaire.

l'intégrande contient	substitution
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin(t)$ ou $x = a\cos(t)$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \tan(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$

Pour ce genre de substitutions, on utilise la règle de substitution dans le sens inverse

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

La substitution x = g(t) donne le côté droit.

Exemple 1.2.21

Évaluer

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x \quad , \quad -1 < x < 1 \ .$$

Posons $x = \sin(t)$ avec $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $dx = \cos(t) dt$, on obtient

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2(t) \sqrt{1 - \sin^2(t)}} \, \cos(t) \, \mathrm{d}t$$

26 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

$$= \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)\cos(t)} dt = \int \frac{1}{\sin^2(t)} dt = \int \csc^2(t) dt$$

où nous avons utilisé

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \csc^2(t) \, \mathrm{d}t = -\cot(t) + C \ .$$

Or $x = \sin(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$ donne $\cos(t) = \sqrt{1 - x^2} > 0$. Donc

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

et

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = -\cot(t) + C = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C.$$

Exemple 1.2.22

Évaluer

$$\int \sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Posons $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. On a donc

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\tan^2(t) + 1} = \sqrt{\sec^2(t)} = |\sec(t)| = \sec(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Puisque $dx = \sec^2(t) dt$, on obtient

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \int \sec(t) \, \sec^2(t) \, \mathrm{d}t$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. On a $\sec(t) \sec^2(t) = f(t)g'(t)$ pour $f(t) = \sec(t)$ et $g'(t) = \sec^2(t)$. Donc, $f'(t) = \sec(t) \tan(t)$, $g(t) = \tan(t)$ et

$$\begin{split} I &= \int \sec(t)\,\sec^2(t)\,\mathrm{d}t = \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sec(t)\tan(t) - \int \sec(t)\tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \sec(t)\tan(t) - \int \sec(t)\left(\sec^2(t) - 1\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t - \int \sec(t)\sec^2(t)\,\mathrm{d}(t) \\ &= \sec(t)\tan(t) + \int \sec(t)\,\mathrm{d}t - I \;. \end{split}$$

Si on résout pour I on trouve

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \int \sec^3(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left(\sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) \, \mathrm{d}t \right) .$$

À l'exemple 1.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t) dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_1.$$

Donc,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sec^3(t) \, dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C$$

où $C = C_1/2$. Finalement, puisque $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$, on a $\sec(t) = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + x^2}$. Ainsi,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C.$$

Exemple 1.2.23

Évaluer l'intégrale

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \, \mathrm{d}x \quad , \quad x > 1 \ .$$

On a

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} dx = \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx.$$

Posons $x = y^2$ pour y > 1. On a $\sqrt{x} = y$ et dx = 2y dy. Donc,

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \times 2y dy = 2 \int \sqrt{y^2-1} dy$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, on utilise la substitution $y = \sec(\theta)$ pour $0 < \theta < \pi/2$. On a $dy = \sec(\theta)\tan(\theta) d\theta$ et $\sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \tan(\theta)$ car $\tan(\theta) > 0$ pour $0 < \theta < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2 - 1} \, dy = \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) \, d\theta$$
$$= \int (\sec^2(\theta) - 1) \sec(\theta) \, d\theta = \int \sec^3(\theta) \, d\theta - \int \sec(\theta) \, d\theta$$

À l'exemple 1.2.6(e), on a montré que

$$\int \sec(t) dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_1$$

et à l'exemple précédent on a montré que

$$\int \sec^3(t) dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_2.$$

Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2 - 1} \, dy = \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) - \frac{1}{2} \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C_3$$

où $C_3 = C_2 - C_1$. Puisque $\sec(\theta) = y$ et $\tan(\theta) = \sqrt{y^2 - 1}$ pour $0 < \theta < \pi/2$, on obtient

$$\int \sqrt{y^2 - 1} \, dy = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| + C_3.$$

Finalement, puisque $y = \sqrt{x}$ pour x > 1, on trouve

$$\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} dx = 2 \int \sqrt{y^2 - 1} dy = \sqrt{x(x-1)} - \ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right| + C$$

*

où $C=2C_3$.

Exemple 1.2.24

Évaluer

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} \, \mathrm{d}x \quad , \quad x > 1 \; .$$

Si on pose $x = \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \tan(t) \sec(t) dt$ et

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2(t) - 1}}{\sec^3(t)} \sec(t) \tan(t) dt = \int \frac{\tan^2(t)}{\sec^2(t)} dt = \int \sin^2(t) dt,$$

où on a utilisé l'identité

$$\sqrt{\sec^2(t) - 1} = \sqrt{\tan^2(t)} = |\tan x| = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$, on a

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) + C.$$

Pour exprimer le résultat de notre intégrale en fonction de x seulement, on note que $t = \operatorname{arcsec}(x)$ car on a posé $x = \sec(t)$. De plus, $x = \sec(t)$ donne $\cos(t) = 1/x$ et

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

car $x = \sec(t) > 1$ et $\sin(t) > 0$ pour $0 < t < \pi/2$. Finalement,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + C$$
$$= \frac{\arccos(x)}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2} + C$$

où l'identité trigonométrique $\sin(2t) = \sin(t+t) = 2\sin(t)\cos(t)$ a été utilisé pour la deuxième égalité.

Exemple 1.2.25

Évaluer

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} \, \mathrm{d}x \quad \text{pour} \quad x > 5/2 \; .$$

On peut récrire cette intégrale de la façon suivante :

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}x.$$

Si on pose $x = \frac{5}{2}\sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \frac{5}{2}\tan(t)\sec(t) dt$ et

$$\frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 \sec^2(t) - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left(\frac{5}{2} \tan(t) \sec(t)\right) \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\left(\sec^2(t) - 1\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\left(\tan^2(t)\right)^{3/2}} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\tan^3(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{50} \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{50} \int \cot(t) \csc(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{50} \csc(t) + C.$$

où on a utilisé l'identité

$$\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t)$$
 et $\sqrt{\tan^2 x} = \tan x > 0$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sec(t) = \frac{2}{5}x$ donne $\cos(t) = \frac{5}{2x}$, on obtient

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2x}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - 25}}{2x}$$

car $x = \frac{5}{2}\sec(t) > \frac{5}{2}$ et $\sin(t) \ge 0$ pour $0 \le t < \pi/2$. Finalement,

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{50\sin(t)} + C = -\frac{x}{25\sqrt{4x^2 - 25}} + C.$$

1.3 L'intégrale définie

La région R de la figure 1.1 est la région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites x = 0, x = 2 et y = 0. La façon intuitive d'estimer l'aire A de cette région est de partitionner en petits rectangles cette région et de faire la somme de l'aire de chaque rectangle car il est simple de calculer l'aire d'un rectangle.

Les rectangles utilisés à la figure 1.2 sont construits de la façon suivante. On partage l'intervalle [0,2] en 11 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est donc 2/11. On obtient 11 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$ où

عر **♣** 1. Intégrale **♣** عر **♣**

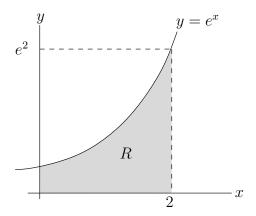


FIGURE 1.1 – La région bornée par la courbe $y=e^x$ et les droites $x=0,\,x=2$ et y=0

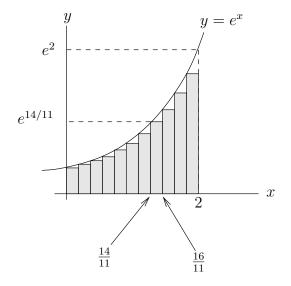


FIGURE 1.2 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i}

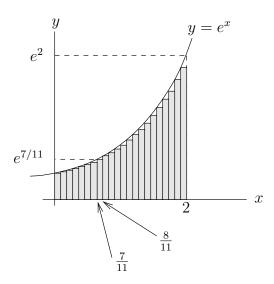


FIGURE 1.3 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{x_i}

 $x_0 = 0$, $x_1 = 2/11$, $x_2 = 4/11$, ..., $x_{11} = 22/11 = 2$. Les rectangles que l'on utilise sont les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour i = 0, 1, 2, ..., 10.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} , est $e^{x_i} \left(\frac{2}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{11} = e^{0} \left(\frac{2}{11}\right) + e^{2/11} \left(\frac{2}{11}\right) + e^{4/11} \left(\frac{2}{11}\right) + \dots + e^{20/11} \left(\frac{2}{11}\right) \approx 5.8258238\dots$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $G_{11} = 5.8258238...$ En fait, on a sous-estimé l'aire de la région R car nos rectangles sont tous à l'intérieur de la région.

Le choix de 11 intervalles est arbitraire. Pour obtenir une meilleure approximation de l'aire de la région R, on pourrait prendre plus d'intervalles. Par exemple, si on partage l'intervalle [0,2] en 22 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est alors de 1/11 et on obtient 22 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i=0, 1, 2, \ldots, 21$ où $x_0=0, x_1=1/11, x_2=2/11, \ldots, x_{22}=22/11=2$. Comme dans le cas précédent avec 11 intervalles, on utilise les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} pour $i=0, 1, 2, \ldots, 21$. On obtient la figure 1.3.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{x_i} , est maintenant $e^{x_i}\left(\frac{1}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{22} = e^{0} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{1/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{2/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{3/11} \left(\frac{1}{11}\right) + \dots + e^{20/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{21/11} \left(\frac{1}{11}\right) \approx 6.10304402\dots$$

et on obtient que l'aire A de la région R est approximativement $G_{22} = 6.10304402...$ On a encore sous-estimé l'aire de la région R.

32 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale 1. Intégra

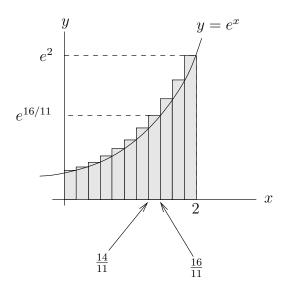


FIGURE 1.4 – Partition en 11 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

Si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme G_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente. Les sommes G_k sont appelées des **sommes à gauche** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité gauche x_i de l'intervalle.

Remarque 1.3.1

Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à gauche G_k sont toutes des sous-estimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe y = f(x) et les droites x = a, x = b et y = 0.

Revenons à la partition de l'intervalle [0,2] en 11 sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i=0, 1, \ldots, 10$ où $x_0=0, x_1=2/11, x_2=4/11, \ldots, x_{10}=20/11$ et $x_{11}=2$. Ces intervalles sont tous de longueur égale à 2/11. Considérons maintenant les rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 1.4.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est $e^{x_{i+1}}\left(\frac{2}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{11} = e^{2/11} \left(\frac{2}{11}\right) + e^{4/11} \left(\frac{2}{11}\right) + e^{6/11} \left(\frac{2}{11}\right) + \dots + e^{22/11} \left(\frac{2}{11}\right) \approx 6.987470396\dots$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{11} = 6.987470396...$ En fait, on a surestimé l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R.

Finalement, on considère les 22 rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$ où les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \ldots, 21$ sont bornées par les points $x_0 = 0, x_1 = 1/11, x_2 = 2/11, \ldots, x_{21} = 21/11$ et $x_{22} = 2$, Chaque intervalle est de longueur égale à 1/11. Ce sont les rectangles utilisés à la figure 1.5.

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{x_{i+1}}$, est

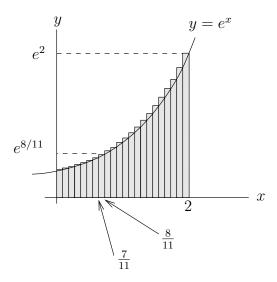


FIGURE 1.5 – Partition en 22 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{x_{i+1}}$

maintenant $e^{x_{i+1}}\left(\frac{1}{11}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{22} = e^{1/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{2/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{3/11} \left(\frac{1}{11}\right) + \dots$$
$$+ e^{21/11} \left(\frac{1}{11}\right) + e^{22/11} \left(\frac{1}{11}\right) \approx 6.68386731\dots$$

On peut dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{22} = 6.68386731...$ On a toujours une surestimation de l'aire A de la région R car nos rectangles recouvrent la région R mais la surestimation est moins grande que lorsqu'on utilise seulement 11 rectangles.

Les sommes D_k sont appelées des **sommes à droite** car on définit la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité droite x_{i+1} de l'intervalle. Comme pour les sommes à gauche, si k est le nombre de rectangles utilisés, on a que la somme D_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente.

Remarque 1.3.2

Lorsque la fonction f est croissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^x$, les sommes à droite D_k sont toutes des surestimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe y = f(x) et les droites x = a, x = b et y = 0.

Pour 1000 sous-intervalles de [0, 2], on obtient

$$D_{1000} = 6.39544728...$$
 et $G_{1000} = 6.38266917...$

Si on combine les sommes à droite et à gauche que nous avons calculées, on obtient

$$G_{11} < G_{22} < G_{1000} < A < D_{1000} < D_{22} < D_{11}$$
.

La valeur exacte de l'aire A de la région R est A = 6.3890560...

34 1. Intégrale **♣ №** ✓

Comme le symbole de sommation \sum sera très utile, il est probablement important de revoir sa définition pour le bénéfice du lecteur.

Définiton 1.3.3

Soit $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$, un ensemble de nombres indexés par les entiers. Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$, alors la somme des nombres $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ est dénotée

$$\sum_{i=n}^{m} a_i \equiv a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{m-1} + a_m .$$

Si on partitionne l'intervalle [0,2] en k sous-intervalles de longueur 2/k, on obtient les intervalles de base $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/k$, $x_2 = 4/k$, ..., $x_{k-1} = 2(k-1)/k$ et $x_k = 2$.

Si on utilise le symbole de sommation, on a

$$G_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{x_i}$$
 et $D_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{x_{i+1}} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{x_i}$

où 2/k est la longueur de la base des rectangles. On a aussi que

$$G_1 < \ldots < G_k < G_{k+1} < A < D_{k+1} < D_k < \ldots < D_1$$

pour tout $k \ge 1$ et l'aire A de la région R est donnée par

$$A = \lim_{k \to \infty} G_k = \lim_{k \to \infty} D_k .$$

1.3.1 Définition

La définition de l'intégrale définie que nous donnons généralise le calcul de l'aire qui a été fait à la section précédente pour la région R bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites x = 0, x = 2 et y = 0.

Avant de définir l'intégrale dans le cas général, nous devons décrire les fonctions pour lesquelles l'intégrale existera. La raison pour ces restrictions sur les fonctions que nous allons intégrer deviendra plus clair lors de l'étude des intégrales impropres que nous ferons prochainement.

Définition 1.3.4

Une fonction f définie sur un intervalle [a,b] est **bornée** s'il existe une constante M telle que |f(x)| < M pour tout x dans l'intervalle [a,b].

Une fonction f définie sur un intervalle [a, b] est **continue par morceaux** s'il y a une nombre fini de points c où la fonction f n'est pas continue et, à ces points c, on a que

$$\lim_{\substack{x \to c+\\ x \in [a,b]}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to c-\\ x \in [a,b]}} f(x)$$

existent.

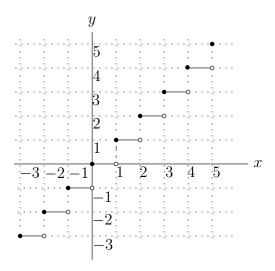


FIGURE 1.6 – Graphe de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $-3 \le x \le 5$.

Exemple 1.3.5

La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que ou égale à x, est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé de \mathbb{R} . Le graphe de cette fonction est donné à la figure 1.6.

On remarque qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé est une fonction bornée.

Définiton 1.3.6 (Somme de Riemann)

Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Soit $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} quelconque de l'intervalle [a,b]. La longueur d'un sous-intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ est $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. On définie une <u>mesure</u> de la partition \mathcal{P} par

$$\|\mathcal{P}\| = \max \left\{ \Delta x_i : 0 \le i < k \right\} .$$

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. La somme

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \, \Delta x_i$$

est une somme de Riemann pour la partition \mathcal{P} .

Une même partition supporte un nombre infini de sommes de Riemann selon le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \le i < k$.

36 1. Intégrale **♣** № <u>№</u>

Définition 1.3.7

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. L'**intégrale définie** de f de a à b est le nombre I qui satisfait la condition suivante.

$$S_{\mathcal{P}} \to I$$
 lorsque $\|\mathcal{P}\| \to 0$.

On écrit
$$\int_a^b f(x) dx = I$$
.

Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**. L'intervalle [a, b] est appelé **l'intervalle d'intégration**. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x.

Remarque 1.3.8

$$S_{\mathcal{P}} \to I$$
 lorsque $\|\mathcal{P}\| \to 0$.

veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|I - S_{\mathcal{P}}| < \epsilon$$

quelle que soit la partition \mathcal{P} de [a,b] avec $\|\mathcal{P}\| < \delta$ et quelle que soit le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ associé à la partition \mathcal{P} .

Consultez la section 1.3.5 pour une définition plus générale de l'intégrale définie de Riemann.

On insiste sur le fait que le symbole dx <u>n'est pas une variable</u>, il indique seulement que la variable d'intégration est x. Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Il découle de la définition de l'intégrale définie que l'on peut estimer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en choisissant un partition très fine (i.e. $\|\mathcal{P}\|$ très petit) avec une somme de Riemann subordonnée à cette partition.

Normalement, on choisit des partitions \mathcal{P} telles que Δx_i est constant.

Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Pour $k \in \mathbb{N}^+$, on pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a+i\Delta x$ pour $i=0,1,2,\ldots,k$. Les points $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ forment une partition \mathcal{P} de l'intervalle [a,b] en sous-intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ de longueur Δx . On a que $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = (b-a)/k$ tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini.

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisit x_i^* dans cet intervalle. Donc, $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$. On obtient la somme de Riemann

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x .$$

Cette somme est représentée graphiquement à la figure 1.7.

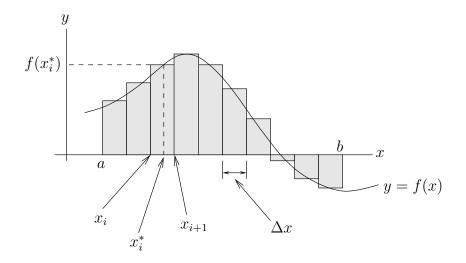


FIGURE 1.7 – Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie

l'intégrale définie de f de a à b peut être calculée à l'aide de la formule

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{k \to \infty} S_k.$$
 (1.3.1)

Remarque 1.3.9

- 1. La limite (1.3.1) existe toujours car f est continue par morceau. Cela pourrait être démontré à partir de la définition rigoureuse de l'intégrale donnée à la section 1.3.5 ci-dessous.
- 2. Quelques rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $|f(x_i^*)|$ sont représentés à la figure 1.7. Comme $f(x_i^*)$ peut être négatif, l'expression $f(x_i^*)$ Δx représente l'aire du rectangle à un signe près.
- 3. Si $x_i^* = x_i$ pour $0 \le i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité gauche de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \le i < k$, alors $S_k = G_k$, la somme à gauche pour k rectangles.
- 4. Si $x_i^* = x_{i+1}$ pour $0 \le i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité droite de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \le i < k$, alors $S_k = D_k$, la somme à droite pour k rectangles.
- 5. Si x_i^* est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \le i < k$, c'est-à-dire que $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ pour $0 \le i < k$, alors S_k est une somme de Riemann pour le **point milieu** que l'on dénote M_k .

Exemple 1.3.10

Notre but est de trouver la meilleure estimation de $\int_{-1}^{2} 1 + x^{2} dx$. Pour ce faire, nous allons utiliser les sommes à gauche, les sommes à droites et les sommes pour le point milieu avec n = 3 et n = 6 sous-intervalles.

38 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

Nous utiliserons le graphe de f pour déterminer laquelle des estimations que l'on a trouvées donne la meilleure approximation de l'intégrale; c'est-à-dire, de l'aire sous la courbe $y = f(x) = 1 + x^2$ pour $-1 \le x \le 2$.

Pour n = 3, on a $\Delta x = (2 - (-1))/3 = 1$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i$ pour i = 0, 1, 2 et 3. On obtient les trois intervalles [-1, 0], [0, 1] et [1, 2].

Pour n = 6, on a $\Delta x = (2 - (-1))/6 = 1/2$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i/2$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, et 6. On obtient les six intervalles [-1, -0.5], [-0.5, 0], ... et [1.5, 2].

La somme à droite avec n = 3 est

$$D_3 = (f(0) + f(1) + f(2))(1) = 8$$
.

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx D_3 = 8.$

La somme à droite avec n = 6 est

$$D_6 = (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2))(0.5) = 6.875.$$

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx D_6 = 6.875.$

La somme à gauche avec n=3 est

$$G_3 = (f(-1) + f(0) + f(1))(1) = 5$$
.

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx G_3 = 5.$

La somme à gauche avec n = 6 est

$$G_6 = (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5))(0.5) = 5.375$$
.

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx G_6 = 5.375$.

La somme pour le point milieu avec n = 3 est

$$M_3 = 1 \times (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5)) = 5.75$$
.

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx S_3 = 5.75$.

La somme pour le point milieu avec n=6 est

$$M_6 = 0.5(f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) = 5.9375$$
.

Donc $\int_{-1}^{2} (1+x^2) dx \approx S_6 = 5.9375.$

La meilleure approximation est donnée par la somme M_6 . Considérons la figure 1.8.

Nous avons à gauche le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_D (en rose) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à droite. L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Comme f est positive, croissant et

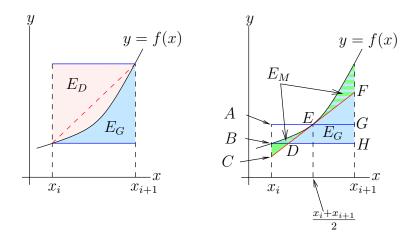


FIGURE 1.8 – Figure utilisée pour comparer l'efficacité des sommes à droite, des sommes à gauche et des sommes pour le point milieu à l'exemple 1.3.10

convexe, on a que l'aire de la région E_D est plus grande que l'aire de la région E_G . Donc, la somme à gauche donne une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$.

Nous avons à droite le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_M (en vert) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, \mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu. Il faut noter que l'aire du rectangle de sommets x_i , A, G et x_{i+1} produit par la somme pour le point milieu est égale à l'aire du trapèze de sommets à x_i , A, G et x_{i+1} car les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle GFE$ sont congruents (on a $|\overline{AE}| = |\overline{EG}|$, $|\overline{CE}| = |\overline{CF}|$ et $\angle AED = \angle GEF$). L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, \mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Puisque l'aire du triangle $\triangle BCD$ est toujours plus petite que l'aire du triangle $\triangle HFD$, on a que l'aire de la région E_G est plus grande que l'aire de la région E_M . Donc, la somme pour le point milieu donne une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, \mathrm{d}x$.

En conclusion, quand f est positive, croissante et convexe, la somme pour le point milieu donne la meilleure approximation de l'intégrale de f.

Quand f est positive, décroissante et convexe, Un raisonnement semblable montre que la somme pour le point milieu donne encore la meilleure approximation de l'intégrale de f. La seule différence dans ce cas est que la somme à droite donne une meilleure estimation de l'intégrale de f que la somme à gauche. On invite le lecteur a vérifier cette conclusion.

De plus, on remarque à partir de la figure ci-dessus que, dans le cas d'une fonction convexe, l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu est toujours inférieure à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, \mathrm{d}x$. Donc, la somme pour le point milieu est une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

En conséquence, puisque $M_3 < M_6$, on a que M_6 est la meilleure approximation de

40 1. Intégrale **♣** № <u>№</u>

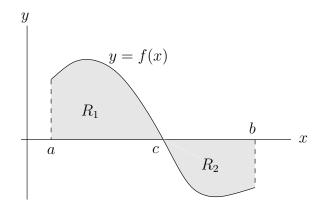


FIGURE 1.9 - L'intégrale d'une fonction f qui change de signe seulement au point c comme dans la figure donne l'aire de la région R_1 moins l'aire de la région R_2 .

l'intégrale.

Il y a cependant une contrainte majeure à la justification que nous venons de donner. L'origine doit être un des points x_i pour que notre raisonnement soit valable. Toute notre justification est basée sur la propriété que la fonction ne change pas de signe, de croissante à décroissante et vice-versa, ou de courbure dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

1.3.2 Propriétés de l'intégrale définie

On déduit du deuxième item de la remarque 1.3.9 ci-dessus que si $f(x) \ge 0$ pour tout x dans l'intervalle [a, b], alors

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = A$$

où A est l'aire de la région R en dessous de la courbe y = f(x), au-dessus de l'axe des x, et entre x = a et x = b. Par contre, si $f(x) \le 0$ pour tout x dans l'intervalle [a, b], alors

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = -A$$

où A est l'aire de la région R au-dessus de la courbe y = f(x), en dessous de l'axe des x, et entre x = a et x = b. Si f change de signe à un seul point c de l'intervalle [a, b] comme à la figure 1.9, alors

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = A_1 - A_2 \;,$$

où A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe y = f(x), au-dessus de l'axe des x, et entre x = a et x = c; et A_2 est l'aire de la région R_2 au-dessus de la courbe y = f(x), en dessous de l'axe des x, et entre x = c et x = b.

Il est parfois facile de calculer l'intégrale d'une fonction si cette fonction et l'intervalle d'intégration possèdent certaines symétries. Par exemple, si f est une fonction impaire (i.e.

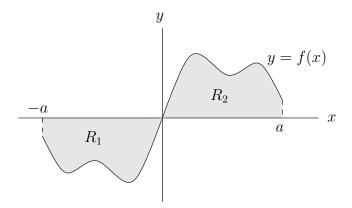


FIGURE 1.10 – Graphe d'une fonction impaire sur un domaine [-a, a] symétrique par rapport à l'origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

f(-x) = -f(x) pour tout x), alors

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

La justification de ce résultat est donnée par la figure 1.10. A_1 est l'aire de la région R_1 au-dessus de la courbe y = f(x), en dessous de l'axe des x, et entre les droites x = -a et x = 0. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe y = f(x), au-dessus de l'axe des x, et entre les droites x = 0 et x = a. Si x = a est une fonction impaire x = a et

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = A_2 - A_1 = 0 \; .$$

Si f est une fonction paire (i.e. f(-x) = f(x) pour tout x), alors

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) dx.$$

La justification de ce résultat est donnée à la figure 1.11. A_1 est l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe y = f(x), au-dessus de l'axe des x, et entre les droites x = -a et x = 0. A_2 est l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe y = f(x), au-dessus de l'axe des x, et entre les droites x = 0 et x = a. Si f est une fonction paire alors $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = A_2 + A_1 = 2A_1 = 2 \int_{0}^{a} f(x) dx.$$

On insiste sur le fait que, dans les deux cas précédents, la borne supérieure d'intégration est la réflexion par rapport à l'origine de la borne inférieure d'intégration.

Définiton 1.3.11

Si l'intégrale de f de a à b existe, on définit l'intégrale de f de b à a par

$$\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

42 1. Intégrale **♣** № 1. Intégrale

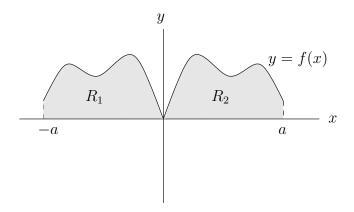


FIGURE 1.11 – Graphe d'une fonction paire sur un domaine [-a, a] symétrique par rapport à l'origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

Les propriétés suivantes découlent de la définition de l'intégrale :

Théorème 1.3.12

Soit a, b et c trois nombres réels. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle qui contient a, b et c, et si k est un nombre réel, alors

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx,$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Voir figure 1.9 pour une interprétation graphique de la dernière règle du théorème précédent.

1.3.3 Évaluations des intégrales définies 🔑

Exemple 1.3.13

On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x) = x^2$ et les droites x = 1, x = 3 et y = 0 (voir la figure 1.12).

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 2/k$ et $x_i = 1 + 2i/k$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = \left[1 + \frac{2i}{k}, 1 + \frac{2(i+1)}{k}\right]$$

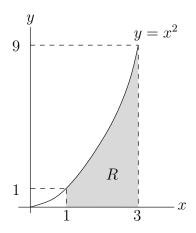


FIGURE 1.12 – L'aire de la région R définie à l'exemple 1.3.13 est donné par l'intégrale de $f(x)=x^2$ de 1 à 3

pour i = 0, 1, 2, ..., k - 1. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = 1 + \frac{2i}{k}$$

pour i = 0, 1, 2, ..., k - 1.

La somme à gauche G_k est

$$G_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{2i}{k}\right)^2 \frac{2}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{4i}{k} + \frac{4i^2}{k^2}\right) \frac{2}{k}$$

$$= \frac{2}{k} \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1\right) + \frac{8}{k^2} \left(\sum_{i=0}^{k-1} i\right) + \frac{8}{k^3} \left(\sum_{i=0}^{k-1} i^2\right)$$

$$= k(k-1)/2 = k(k-1)(2k-1)/6$$

$$= 2 + \frac{4(k-1)}{k} + \frac{4(k-1)(2k-1)}{3k^2}$$

$$= \frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2}.$$

Ainsi

$$\int_{1}^{3} x^{2} dx = \lim_{k \to \infty} G_{k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^{2}} \right) = \frac{26}{3}.$$

Exemple 1.3.14

On peut utiliser la définition de l'intégrale définie pour calculer $\int_{-2}^{2} (4-x^2) dx$.

Soit k une entier positif. On a $\Delta x = 4/k$ et $x_i = -2 + 4i/k$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = [-2 + \frac{4i}{k}, -2 + \frac{4(i+1)}{k}]$$

44 1. Intégrale **♣ №** ✓

pour i = 0, 1, 2, ..., k - 1. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on choisie x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = -2 + \frac{4i}{k}$$

pour i = 0, 1, 2, ..., k - 1.

La somme à gauche G_k est

$$G_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(4 - \left(-2 + \frac{4i}{k} \right)^2 \right) \frac{4}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-16i^2}{k^2} + \frac{16i}{k} \right) \frac{4}{k}$$

$$= \frac{-64}{k^3} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \frac{64}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{-64}{k^3} \left(\frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \right) + \frac{64}{k^2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \right)$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{32}{k} - \frac{32}{3k^2} + 32 - \frac{32}{k} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2}$$

Ainsi

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} G_k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2} \right) = \frac{32}{3} \; .$$

Exemple 1.3.15

Quelle est la valeur de la limite suivante?

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{i^3}{n^4}\ .$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\int_0^1 x^3 dx$.

En effet, si $\Delta x = \frac{1}{n}$ et $x_i = i\Delta x = \frac{i}{n}$ pour i = 0, 1, 2, ..., n, on obtient une partition de l'intervalle [0, 1] et

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{3} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{3} \Delta x .$$

Donc,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x \ .$$

On va voir plus loin comment calculer cette intégrale.

Exemple 1.3.16

Quelle est la valeur de la limite suivante?

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^{2} .$$

On remarque que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n} ,$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\frac{1}{2} \int_2^4 x^2 dx$.

En effet, si $\Delta x = \frac{2}{n}$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + \frac{2i}{n}$ pour i = 0, 1, 2, ..., n, on obtient une partition de l'intervalle [2, 4] et

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x.$$

Donc,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_2^4 x^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

1.3.4 Déplacement

Le problème que nous considérons dans la présente section est classique. On montre comment l'intégrale peut être utilisée pour déterminer la distance parcourue par une voiture si on connaît sa vitesse en fonction du temps.

Soit v(t), la vitesse en km/h d'une voiture au temps t en heures. Si on veut estimer la distance parcourue par la voiture entre t=a et t=b heures, on divise l'intervalle de temps [a,b] en (petits) sous-intervalles de même longueur et on suppose que la vitesse de la voiture sur chacun des sous-intervalles de temps est constante.

Soit k > 0. On pose $\Delta t = (b-a)/k$ et $t_0 = a$, $t_1 = a + \Delta t$, $t_2 = a + 2 \Delta t$, $t_3 = a + 3 \Delta t$, ..., $t_k = a + k \Delta t = b$. Si $v(t_i^*)$ est la vitesse de la voiture mesurée au temps t_i^* dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et si on suppose que la voiture a voyagé à une vitesse constante durant cet intervalle de temps, alors la distance parcourue durant cet intervalle de temps est $v(t_i^*) \Delta t$ km. On note que la longueur de l'intervalle de temps Δt est en heures et la vitesse v(t) est en km/h, ainsi $v(t_i^*) \Delta t$ est bien en kilomètres.

Si on fait cela pour chaque sous-intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$, on trouve que la distance parcourue par la voiture entre a et b heures est approximativement

$$\sum_{i=0}^{k-1} v(t_i^*) \, \Delta t \ .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale de la fonction v de a à b. Si on laisse k tendre vers l'infini, on obtient que la distance parcourue entre a et b heures est

$$p(b) - p(a) = \int_{a}^{b} v(t) dt$$
 (1.3.2)

où p(t) est la position de la voiture au temps t.

La vitesse moyenne v_m de la voiture entre a et b heures est

$$v_m = \frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b v(t) dt$$
.

Remarque 1.3.17

Puisque p est une primitive de v car p'(t) = v(t) pour tout t, l'équation (1.3.2) suggère la méthode suivante pour évaluer l'intégrale définie d'une fonction f. Si F est une primitive de f, on a

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

Est-ce vrai pour toute fonction f? Nous donnerons une réponse affirmative à cette question pour les fonctions continues f lorsque nous présenterons le Théorème fondamental du calcul.

Exemple 1.3.18

Antoine et Antoinette travaillent tous les deux sur la colline parlementaire à Ottawa. Comme ils travaillent pour des partis politiques différents, ils ne se connaissent pas. Ils ont quand même un intérêt commun pour la peinture et décident d'aller à Montréal pour visiter le Musée d'Arts Contemporain. Ils partent tous les deux pour Montréal après leur journée d'ouvrage du vendredi. Antoine part à 17h00 et Antoinette à 18h00. Ils arrivent au Musée d'Arts Contemporain en même temps.

On trouve à la figure 1.13, la vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette lors du voyage pour se rendre à Montréal. $v_1(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoine au temps t en heures et $v_2(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoinette au temps t en heures. Vérifiez qu'ils parcourent 210 km chacun.

a) Quelle distance a parcouru Antoine quand Antoinette part?

La distance parcourue par Antoine après la première heure est l'intégrale de la vitesse v_1 de t=17 à t=18. Cette intégrale correspond à l'aire sous la courbe $y=v_1(t)$ pour $17 \le t \le 18$. On trouve 55 km.

b) À quel moment la distance entre Antoine et Antoinette est la plus grande? Quelle est cette distance?

Le seul moment où la distance entre Antoine et Antoinette peut passer de croissante à décroissante et vice-versa est lorsque la voiture d'Antoine et la voiture d'Antoinette vont à la même vitesse. Cela arrive à t=18.25 (i.e. 18h15) et t=20.25 (i.e. 20h15).

Avant t=18.25, Antoine va plus vite que Antoinette. À t=18.25, la distance parcourue par Antoine est l'aire sous la courbe $y=v_1(t)$ pour $17 \le t \le 18.25$, soit 78.75 km, et la distance parcourue par Antoinette est l'aire sous la courbe $y=v_2(t)$ pour $18 \le t \le 18.25$, soit 21.25 km. Antoine a donc 78.75-21.25=57.5 km. d'avance sur Antoinette.

Entre t = 18.25 et t = 20.25, la voiture d'Antoinette va plus vite que celle d'Antoine et Antoinette gagne du terrain sur Antoine.

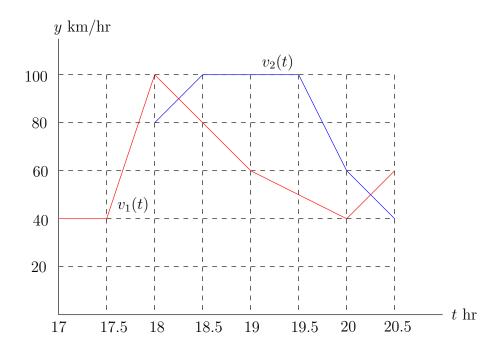


FIGURE 1.13 – La vitesse en fonction du temps pour les voitures d'Antoine et d'Antoinette

À t=20.25, la distance parcourue par Antoine est l'aire sous la courbe $y=v_1(t)$ pour $17 \le t \le 20.25$, soit 196.25 km, et la distance parcourue par Antoinette est l'aire sous la courbe $y=v_2(t)$ pour $18 \le t \le 20.25$, soit 198.75 km. Antoinette a maintenant 198.75 – 196.25 = 2.5 km. d'avance sur Antoine.

Entre t = 20.25 et t = 20.50, la voiture d'Antoine va plus vite que celle d'Antoinette et Antoine gagne du terrain sur Antoinette pour arriver au Musée d'Arts Contemporain en même temps que Antoinette.

La plus grande distance entre la voiture d'Antoine et d'Antoinette est donc de 57.5 km.

c) À quel moment Antoinette rattrape-t-elle Antoine?

Si T est le temps où Antoinette rattrape Antoine, il faut que l'aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \le t \le T$ soit égale à l'aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \le t \le T$.

À T=20 (i.e. 20h00), Antoine et Antoinette on parcouru 185 km. Après 20h00, Antoinette devance Antoine.

L'histoire ne dit pas si Antoine et Antoinette se sont rencontrés au Musée d'Arts Contemporain. De plus, Ils auraient pu faire du co-voiturage pour diminuer leur impact sur l'environnement.

å

48 1. Intégrale **♣** № 1. Intégrale

1.3.5 L'intégrale de Riemann (Stieljes) 👁

La définition de l'intégrale que nous avons donnée à la page 36 est valable pour les fonctions continues par morceaux. Le fait que l'intégrande soit une fonction continue par morceaux permet de démontrer que la limite en (1.3.1) ne dépend pas du choix de partitions de l'intervalle d'intégration et du choix des points x_i^* .

La définition de l'intégrale définie d'une fonction que nous donnons dans cette section généralise celle donnée à la page 36.

On crédite Riemann (et Stieljes) pour la définition de l'intégrale définie que voici.

Soit f, une fonction bornée sur l'intervalle fermé [a,b].

Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, une partition de l'intervalle [a, b]. C'est-à-dire que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k = b$.

Pour $0 \le i < k$, on pose

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i ,$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

et

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) .$$

 Δx_i est la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. m_i est la plus grande valeur telle que $m_i \leq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et M_i est la plus petite valeur telle que $M_i \geq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

La somme inférieure pour f sur l'intervalle [a, b] associée à \mathcal{P} est

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} m_i \, \Delta x_i$$

(voir figure 1.14) et la somme supérieure pour f sur l'intervalle [a,b] associée à \mathcal{P} est

$$U_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} M_i \, \Delta x_i$$

(voir figure 1.15).

Soit

 $L = \sup\{L_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}$

et

 $U = \inf\{U_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}$.

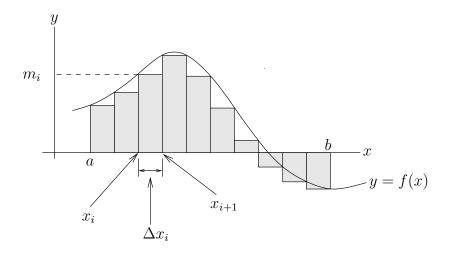


FIGURE 1.14 – Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle [a, b]

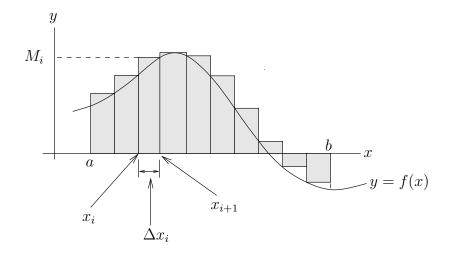


FIGURE 1.15 – Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle [a, b]

Si U=L, on dit que ${\bf f}$ est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle [a,b] et on écrit

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = L = U \; .$$

Les fonctions continues par morceaux sur l'intervalle [a, b] sont intégrables au sens de Riemann et la formule donnée en (1.3.1) est satisfaite.

Nous utilisons la formule (1.3.1) pour calculer les intégrales définies de fonctions continues par morceaux car elle est plus simple que celle que nous venons de donner ci-dessus.

1.4 Théorème fondamental du calcul

Dans cette section, nous verrons comment le calcul des intégrales indéfinies peut quelques fois être utilisé pour évaluer les intégrales définies. Par contre, dans les applications réelles, les intégrales définies sont plus fréquemment évaluées avec un ordinateur à partir de la définition de l'intégrale définie ou d'un algorithme qui découle de cette définition. Nous verrons quelques algorithmes pour évaluer numériquement les intégrales définies dans une prochaine section.

1.4.1 Première version du théorème fondamental du calcul

À la section 1.3.4, nous avons observé que pour évaluer la distance parcourue par une voiture entre t=a et t=b heures, il suffisait de calculer l'intégrale définie de la vitesse v(t) de la voiture au temps t de t=a à t=b. De plus, à la remarque 1.3.17, on a noté qu'on pouvait remplacer le calcul de l'intégrale avec les sommes de Riemann par la valeur p(b)-p(a) où p(t) est la primitive de la vitesse v(t); c'est-à-dire, p'(t)=v(t). C'est essentiellement l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 1.4.1 (Théorème fondamental du calcul)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé [a,b] et si F est une fonction différentiable sur [a,b] telle que F'=f sur [a,b] (i.e. F est une primitive de f), alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b \equiv F(b) - F(a) .$$

Remarque 1.4.2

On peut motiver le théorème précédent de la façon suivante.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} de l'intervalle [a, b] en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur Δx . Grâce au théorème de la moyenne, il existe x_i^* entre x_i et x_{i+1} tel que

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(x_i^*) = f(x_i^*)$$

pour i = 0, 1, ..., k - 1. Ainsi,

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i^*)\Delta x_i$$

pour i = 0, 1, ..., k - 1. On obtient la somme de Riemann

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

$$= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \dots + (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$= F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a) .$$

Pour k suffisamment grand, on a

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx S_k = F(b) - F(a) \ .$$

C'est essentiellement l'idée de la démonstration du théorème fondamental du calcul.

Exemple 1.4.3

Si f est la distribution de densité d'une population en fonction de l'âge en années, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, \mathrm{d}t$$

est le pour centage de la population âgée entre α et β ans. Si T est l'âge maximal des individus de cette population, on doit avoir

$$\int_0^T f(t) \, \mathrm{d}t = 1 \; .$$

C'est-à-dire, 100% de la population est âgé de 0 à T ans.

Si on suppose que l'âge maximum des individus d'une population animale est 10 ans et que la distribution de densité de cette population en fonction de l'âge est donnée par $f(t) = 0.006 \, t (10-t)$ pour $0 \le t \le 10$ années, quel est le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans?

Le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans est donné par

$$\int_{2}^{7} 0.006 \, t(10 - t) \, \mathrm{d}t \; .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut trouver une primitive de f(t) = 0.006 t(10 - t).

$$\int 0.006 t(10-t) dt = 0.06 \int t dt - 0.006 \int t^2 dt = 0.03t^2 - 0.002t^3 + C.$$

Puisque l'on a besoin d'une seule primitive, on peut prendre C=0 Donc,

$$\int_{2}^{7} 0.006 t(10-t) dt = \left(0.03 t^{2} - 0.002 t^{3}\right) \Big|_{t=2}^{7} = 0.784 - 0.104 = 0.68$$

et 68% de la population animale est entre 2 et 7 ans.

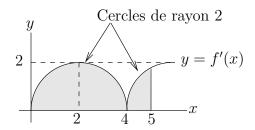
Remarque 1.4.4

À l'exemple précédent, l'intégrale de la fonction de densité de 2 à 7 nous donne le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans. Est-ce que cela inclus les individus âgés de précisément 2 et 7 ans? En fait, que ceux âgés de précisément 2 et 7 ans soient inclus ou non n'a pas d'importance car il y a probablement aucun individu âgé de précisément 2 et 7 ans. Quelle est la chance qu'un individu de l'espèce animale soit âgé de précisément 2 ou 7 ans? Mathématiquement, il n'y a aucune chance. Peut-être que l'individu aura deux ans et une seconde, ou deux ans et un centième de seconde, mais la chance qu'il est exactement 2 ans est nulle.

Exemple 1.4.5 🔑

Le graphe de la dérivée d'une fonction f est donnée dans la figure suivante :

52 1. Intégrale **♣** № 2



Si f(0) = 3, quelle est la valeur de f(5)?

Grâce au théorème fondamental du calcul, on a que

$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x) dx = 3 + \int_0^5 f'(x) dx.$$

Il faut donc calculer l'aire sous la courbe y = f'(x) pour $0 \le x \le 5$. Or

$$\int_0^5 f'(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^4 f'(x) \, \mathrm{d}x + \int_4^5 f'(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Puisque $\int_0^4 f'(x) dx$ représente la moitié de l'aire du disque de rayon 2, on a que

$$\int_0^4 f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, (2^2 \pi) = 2\pi \ .$$

Pour évaluer l'intégrale de f' entre 4 et 5, on utilise la figure suivante :

L'angle θ est donnée par $\cos(\theta)=1/2$. Donc, $\theta=\pi/3$. Ainsi, l'aire de la région A est un sixième de l'aire du disque de rayon 2; c'est-à-dire, l'aire de A est $2^2\pi/6=2\pi/3$. L'aire du triangle B est $\sqrt{3}/2$. Donc,

$$\int_4^5 f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \; .$$

On obtient

$$f(5) = 3 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} + \frac{6 - \sqrt{3}}{2}$$
.

Exemple 1.4.6

Évaluer les intégrales définies suivantes :

a)
$$\int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 dt$$
 b) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

Grâce au théorème fondamental du calcul, nous n'avons plus à utiliser la définition de l'intégrale définie (et donc les sommes de Riemann) pour évaluer ces intégrales.

 \mathbf{a}

$$\int_{4}^{9} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{2} dt = \int_{4}^{9} \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \left(\frac{t^{2}}{2} + 2t + \ln(t) \right) \Big|_{t=4}^{9}$$

$$= \left(\frac{9^{2}}{2} + 2 \times 9 + \ln(9) \right) - \left(\frac{4^{2}}{2} + 2 \times 4 + \ln(4) \right)$$

$$= \frac{85}{2} + 2 \ln\left(\frac{3}{2} \right)$$

car $t^2/2 + 2t + \ln(t)$ est une primitive de t + 2 + 1/t.

 \mathbf{b})

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin(x) \bigg|_{x=0}^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

car $\arcsin(x)$ est une primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$.

Remarque 1.4.7

Le théorème fondamental du calcul est indépendant de la primitive F qui est utilisée dans la formule

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \; .$$

Si G est une autre primitive de f, on a vu qu'il existait une constante C telle que G(x) = F(x) + C pour tout x. Ainsi,

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = G(b) - G(a)$$

$$\operatorname{car} G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

La règle de substitution prend une forme particulière dans le contexte des intégrales définies.

Théorème 1.4.8

Si

- 1. g est une fonction différentiable (croissante ou décroissante),
- 2. F est la primitive d'une fonction f, et
- 3. f et F sont définies sur l'image de [a,b] par g,

alors

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Pour appliquer la règle de substitution, on procède de la façon suivante : Si on pose y = g(x), alors dy = g'(x) dx et

$$\int_{a}^{b} f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

On rappelle que le symbole dy = g'(x) dx <u>n'est pas une égalité algébrique</u>, il indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y.

Exemple 1.4.9

Évaluer les intégrales définies suivantes :

a)
$$\int_{1}^{3} \frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3} + 5}} dx$$
 b) $\int_{0}^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta$ **c**) $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^{4}}} dx$ **d**) $\int_{0}^{\pi^{2}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ **e**) $\int_{0}^{4} \frac{t + 7}{\sqrt{5 - t}} dt$

a) Si on pose $y = x^3 + 5$, on a $dy = 3x^2 dx$. De plus y = 6 pour x = 1 et y = 32 pour x = 3. Donc,

$$\int_{1}^{3} \frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3}+5}} dx = \frac{1}{3} \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^{3}+5}} 3x^{2} dx = \frac{1}{3} \int_{6}^{32} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{3} \sqrt{y} \Big|_{y=6}^{32} = \frac{2}{3} (4\sqrt{2} - \sqrt{6}).$$

b) Si on pose $y = -\cos(\theta)$, on a $dy = \sin(\theta) d\theta$. De plus y = -1 pour $\theta = 0$ et y = 0 pour $\theta = \pi/2$. Donc,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^0 e^y dy = e^y \Big|_{y=-1}^0 = 1 - e^{-1}.$$

c) si on pose $y = x^2$, on a dy = 2x dx. De plus y = 0 pour x = 0 et y = 1/2 pour $x = 1/\sqrt{2}$. Donc,

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2} \arcsin(y) \Big|_{y=0}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{12} \, .$$

d) Si on pose $y = \sqrt{x}$, on a $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. De plus y = 0 pour x = 0 et $y = \pi$ pour $x = \pi^2$. Donc,

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(y) dy = 2 \sin(y) \Big|_{y=0}^{\pi} = 0.$$

e) Si on pose y = 5 - t, on a dy = -dt et t + 7 = 12 - y. De plus y = 5 pour t = 0 et y = 1 pour t = 4. Donc,

$$\int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} dt = -\int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} (-1) dt = -\int_5^1 \frac{12-y}{\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_1^5 \left(12y^{-1/2} - y^{1/2} \right) dy = \left(24y^{1/2} - \frac{2}{3}y^{3/2} \right) \Big|_{y=1}^5 = \frac{62}{3}\sqrt{5} - \frac{70}{3} .$$

Remarque 1.4.10

Comme dans le cas des intégrales indéfinies, il est préférable à l'occasion d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x) \, dx.$$

On a l'intégrale de gauche et il faut obtenir l'intégrale de droite. Il faut trouver a et b qui donneront les bornes d'intégration g(a) et g(b) de l'intégrale de gauche.

À l'instar de la règle de substitution, la règle d'intégration par parties prend la forme suivante.

Définiton 1.4.11

Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ et $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int_{a}^{b} f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x) f'(x) dx.$$

Exemple 1.4.12

Évaluer les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_{1}^{3} (5x+2)e^{3x} \, \mathrm{d}x \qquad \qquad \mathbf{b}) \quad \int_{0}^{1} \arctan(t) \, \mathrm{d}t$$

a) On a $(5x + 2)e^{3x} = f(x)g'(x)$ où f(x) = 5x + 2 et $g'(x) = e^{3x}$. Donc, f'(x) = 5, $g(x) = e^{3x}/3$ et

$$\int_{1}^{3} (5x+2)e^{3x} dx = \int_{1}^{3} f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^{3} - \int_{1}^{3} g(x) f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} (5x+2)e^{3x} \Big|_{x=1}^{3} - \frac{5}{3} \int_{1}^{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} (5x+2)e^{3x} \Big|_{x=1}^{3} - \frac{5}{9}e^{3x} \Big|_{x=1}^{3}$$

$$= \frac{17}{3} e^{9} - \frac{7}{3} e^{3} - \frac{5}{9} e^{9} + \frac{5}{9} e^{3} = \frac{46}{9} e^{9} - \frac{16}{9} e^{3}.$$

56 1. Intégrale **♣ №**

b) On a $\arctan(t) = f(t)g'(t)$ où $f(t) = \arctan(t)$ et g'(t) = 1. Donc, $f'(t) = 1/(1+t^2)$, g(t) = t et

$$\int_0^1 \arctan(t) \, dt = \int_0^1 f(x) g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 g(x) f'(x) \, dx$$

$$= t \arctan(t) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt$$

$$= \arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt \, .$$

Or, si on pose $y = 1 + t^2$, on obtient dy = 2t dt. De plus, y = 1 lorsque t = 0 et y = 2 lorsque t = 1. Donc,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} 2t dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1}^2 = \frac{1}{2} \ln(2) .$$

Finalement,

$$\int_0^1 \arctan(t) \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) .$$

1.4.2 Deuxième version du théorème fondamental du calcul

Théorème 1.4.13 (Deuxième version du théorème fondamental du calcul) Si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle [a, b] alors

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt \quad , \quad x \in [a, b] ,$$

est une fonction continue sur l'intervalle [a,b] et F'(c) = f(c) aux points c où f est continue. En particulier, si f est continue sur l'intervalle [a,b] alors F est une primitive de f; c'est-à-dire que F'(x) = f(x) pour tout x dans l'intervalle [a,b].

Exemple 1.4.14

Une des plus importantes fonctions en statistique est la fonction de densité

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart type.

Une variable X est dite **aléatoire** si elle représente le résultat d'une expérience que l'on ne peut pas prédire exactement. Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type

d'ampoules électriques est une variable aléatoire. Si on dit que la durée de vie moyenne d'une ampoule est 400 heures, cela veut dire que certaines ampoules dureront un peut plus de 400 heures et d'autres un peu moins de 400 heures. On ne peut pas déterminer exactement la durée de vie d'une ampoule spécifique.

On dit que la variable aléatoire X possède une distribution normale de moyenne μ et de d'écart type σ si la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b est

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x .$$

C'est-à-dire que l'aire de la région bornée par la courbe y = f(x), l'axe des x, et les droites x = a et x = b est la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b. À la figure 1.16, on retrouve le graphe de la fonction de densité pour $\mu = 400$ et $\sigma = 20$.

Par exemple, on peut supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est normalement distribuée avec une durée de vie moyenne de 400 heures et un écart type de 20 heures.

Il n'existe pas de fonction connue qui soit la primitive de f. Par contre, la deuxième version du théorème fondamental du calcul affirme l'existence d'une primitive pour f. Une primitive de f est

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt.$$

Pour évaluer la fonction F, on doit calculer numériquement (e.g. avec les sommes de Riemann) cette intégrale.

Exemple 1.4.15

Calculer la dérivée de $F(x) = \int_1^{x^2} (1+s^2)^{3/2} ds$.

Posons,

$$G(u) = \int_1^u (1+s^2)^{3/2} ds$$
 et $H(x) = x^2$.

Alors F(x) = G(H(x)) et F'(x) = G'(H(x))H'(x). La deuxième version du théorème fondamental du calcul nous donne $G'(u) = (1 + u^2)^{3/2}$. Ainsi, puisque H'(x) = 2x, on obtient

$$F'(x) = G'(H(x)) H'(x) = \left(1 + \left(x^2\right)^2\right)^{3/2} \left(2x\right) = 2x \left(1 + x^4\right)^{3/2}.$$

Remarque 1.4.16

Si f est continue au point c, la deuxième version du théorème fondamental du calcul nous assure que $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ est différentiable au point c et que F'(c) = f(c). Si f n'est pas continue au point c, on ne peut rien affirmer.

Prenons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}.$$

58 1. Intégrale **♣** № 1. Intégrale

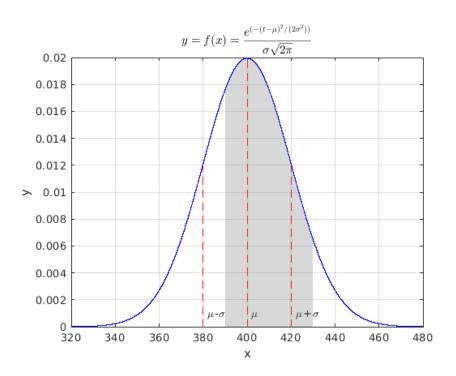


FIGURE 1.16 – La fonction de densité pour la distribution normale de moyenne $\mu=400$ et d'écart type $\sigma=20$. L'aire de la région en gris représente la probabilité que la variable aléatoire X soit entre 390 et 430.

On a

$$F(x) = \int_0^x f(s) \, ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x \ge 1 \end{cases}.$$

Donc, F est une fonction continue comme il est prédit par la deuxième version du théorème fondamental du calcul car f est continue par morceaux. On retrouve le graphe de f et de F à la figure 1.17.

Par contre, F n'est pas différentiable au point x = 1 où f n'est pas continue.

1.5 L'intégrale impropre

1.5.1 Intégrale sur un intervalle d'intégration de longueur infinie

Jusqu'à présent nous avons évalué des intégrales de la forme

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x$$

où les bornes d'intégration a et b sont des nombres réels.

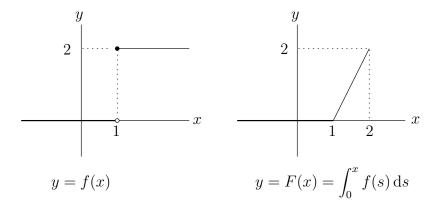


FIGURE 1.17 – Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s) ds$

Pour tout entier positif k, le fait que l'intervalle [a,b] soit de longueur finie nous a permis de définir le nombre réel $\Delta x = (b-a)/k$ représentant la longueur de chacun des sous-intervalles d'une partition de l'intervalle [a,b]. Les k sous-intervalles ainsi obtenus étaient de la forme $[x_I, x_{i+1}]$ où $x_i = a + i\Delta x$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. Pour tout entier positif k, on a un nombre fini de sous-intervalles et donc une somme de Riemann avec un nombre fini de termes.

Il serait utile et naturel de définir l'intégrale sur des intervalles de longueur infinie de la forme $[a, \infty[$ où $]-\infty, b]$. On ne peut pas utiliser littéralement notre définition de l'intégrale définie pour définir une intégrale sur un intervalle de longueur infinie comme $[a, \infty[$ et $]\infty, b]$ car, pour un intervalle de longueur infinie, il est impossible de définir Δx comme le rapport de la longueur de l'intervalle sur le nombre k de sous-intervalles. Il faut regarder le problème d'un angle différent. Si on fixe la valeur de Δx , alors il faut un nombre infini d'intervalles de longueur Δx pour décomposer l'intervalle d'intégration de longueur infinie. Les sommes de Riemann auront alors un nombre infini de termes.

On peut tout de même utiliser l'existence des intégrales définies sur les intervalles bornés pour définir l'intégrale sur un intervalle de longueur infinie.

60 1. Intégrale **♣ №**

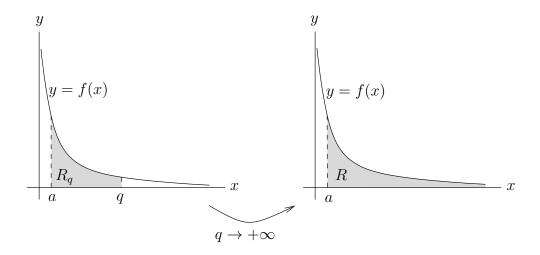


FIGURE 1.18 – L'intégrale de f de a à plus l'infini est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers plus l'infini. On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe y = f(x), l'axe des x et la droite x = a.

Définition 1.5.1

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $[a, \infty[$. On définit l'intégrale impropre de f de a à plus l'infini comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_{a}^{\infty} f(x) dx = \lim_{q \to +\infty} \int_{a}^{q} f(x) dx.$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty,b]$. On définit **l'intégrale impropre de f de moins l'infini à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \lim_{q \to -\infty} \int_{q}^{b} f(x) dx.$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \ge 0$ pour tout x, l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$ représente l'aire de la région bornée par la courbe y = f(x), l'axe des x et la droite x = a comme on peut le voir à la figure 1.18. On peut énoncer un résultat semblable pour $\int_{-\infty}^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Exemple 1.5.2

Évaluer l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$.

Par définition,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to -\infty} \int_{q}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \, \mathrm{d}x$$

si cette limite existe. Or, avec la substitution y = x - 1, on obtient dy = dx et

$$\int_{q}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \, \mathrm{d}x = \int_{q-1}^{-2} y^{-4/3} \, \mathrm{d}y = \left(-3y^{-1/3}\right) \bigg|_{y=q-1}^{-2} = \frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}} \; .$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to -\infty} \int_{q}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to -\infty} \left(\frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}} \right) = \frac{3}{2^{1/3}} \; .$$

Exemple 1.5.3

Évaluer l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3} dx$.

Par définition,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \to \infty} \int_{1}^{q} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_{1}^{q} \frac{\ln(x)}{x^3} \, \mathrm{d}x$$

peut être intégrée à l'aide de la règle d'intégration par parties. On a $x^{-3}\ln(x)=f(x)g'(x)$ où $f(x)=\ln(x)$ et $g'(x)=x^{-3}$. Ainsi, $f'(x)=x^{-1}$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}$ et

$$\int_{1}^{q} x^{-3} \ln(x) dx = -\left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x)\right) \Big|_{x=1}^{q} + \int_{1}^{q} \frac{1}{2} x^{-3} dx$$
$$= -\left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x)\right) \Big|_{x=1}^{q} - \left(\frac{1}{4} x^{-2}\right) \Big|_{x=1}^{q}$$
$$= -\frac{\ln(q)}{2q^{2}} - \frac{1}{4q^{2}} + \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^{3}} dx = \lim_{q \to \infty} \int_{1}^{q} \frac{\ln(x)}{x^{3}} dx = \lim_{q \to \infty} \left(-\frac{\ln(q)}{2q^{2}} - \frac{1}{4q^{2}} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

car, par la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\ln(q)}{q^2}=\lim_{q\to\infty}\frac{q^{-1}}{2q}=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{2q^2}=0\ .$$

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale impropre converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

62 1. Intégrale **♣ №**

Pour $p \neq 1$,

$$\int_{1}^{q} x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right) \Big|_{x=1}^{q} = \frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Pour p = 1,

$$\int_{1}^{q} x^{-p} dx = \int_{1}^{q} \frac{1}{x} dx = (\ln(x)) \Big|_{x=1}^{q} = \ln(q).$$

Ainsi, pour p > 1,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} dx = \lim_{q \to +\infty} \int_{1}^{q} x^{-p} dx = \lim_{q \to +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$
$$= \lim_{q \to +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)q^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1}$$

car p - 1 > 0.

Pour p < 1,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} dx = \lim_{q \to +\infty} \int_{1}^{q} x^{-p} dx = \lim_{q \to +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{-p+1} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$$

car 1 - p > 0.

Finalement, pour p = 1,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} dx = \lim_{q \to +\infty} \int_{1}^{q} \frac{1}{x} dx = \lim_{q \to +\infty} \ln(q) = \infty.$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.5.4

 $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} dx \text{ converge pour } p > 1 \text{ et diverge pour } p \le 1. \text{ De plus,}$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p-1} \quad , \quad p > 1 \ .$$

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ où a est un nombre réel quelconque.

Exemple 1.5.5

Évaluer si possible l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x \; .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut diviser le domaine d'intégration en deux. On va évaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x \,.$$

On aurait pu choisir une autre valeur que 0 pour partager le domaine d'intégration. Cela ne change rien à la réponse finale, pourquoi?

On a

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$
$$= \arctan(u) + C = \arctan(x+1) + C$$

grâce à la substitution u = x + 1 et du = dx. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \to -\infty} \int_{q}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \to -\infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=q}^{0}$$
$$= \lim_{q \to -\infty} \left(\arctan(1) - \arctan(q)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to \infty} \int_0^q \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to \infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=0}^q$$
$$= \lim_{q \to \infty} \left(\arctan(q) - \arctan(1)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} .$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi \ .$$

Exemple 1.5.6

Évaluer si possible l'intégrale impropre $\int_0^\infty xe^{-x} dx$

On utilise la règle d'intégration par parties pour évaluer $\int xe^{-x} dx$.

On a
$$xe^{-x} = f(x)g'(x)$$
 où $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Ainsi, $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Donc,

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \lim_{q \to \infty} \int_0^q x e^{-x} dx = \lim_{q \to \infty} \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_{x=0}^q$$
$$= \lim_{q \to \infty} \left(-q e^{-q} - e^{-q} + 1 \right) = 1$$

64 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale

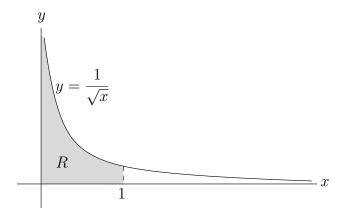


FIGURE 1.19 – La région R est la région bornée par la courbe $y = f(x) = 1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites x = 0 et x = 1.

car

$$\lim_{q \to \infty} e^{-q} = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{e^q} = 0$$

et

$$\lim_{q\to\infty}qe^{-q}=\lim_{q\to\infty}\frac{q}{e^q}=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{e^q}=0\;.$$

Pour le calcul de cette dernière limite, nous avons utilisé la règle de l'Hospital pour obtenir la deuxième égalité car $\lim_{n\to\infty}q=+\infty$ et $\lim_{n\to\infty}e^q=+\infty$.

1.5.2 Intégrale avec un intégrande non borné

Une autre situation où il serait utile de définir l'intégrale est lorsque l'intégrande n'est pas borné. Par exemple, peut-on définir l'intégrale de façon à pouvoir l'utiliser pour calculer l'aire A de la région R de la figure 1.19 qui est bornée par la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ et les droites y = 0, x = 0 et x = 1.

On défini respectivement ci-dessous ce que sera l'intégrale d'une fonction $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en x=a, et l'intégrale d'une fonction $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en x=b.

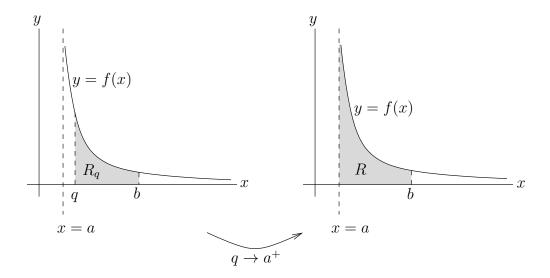


FIGURE 1.20 – L'intégrale de f de a à b est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers a. On obtient l'aire de la région R bornée par la courbe y = f(x), l'axe des x et les droites x = a et x = b.

Définition 1.5.7

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle [a, b]. On définit **l'intégrale impropre** de f de a à b comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{q \to a^{+}} \int_{q}^{b} f(x) dx$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Soit f, une fonction définie sur l'intervalle [a, b[. On définit **l'intégrale impropre** de f de a à b comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to b^-} \int_a^q f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale impropre **converge** autrement on dit qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \ge 0$ pour tout x, ces intégrales impropres représentent l'aire de la région bornée par la courbe y = f(x), l'axe des x et les droites x = a et x = b comme on peut le voir à la figure 1.20.

Exemple 1.5.8

Évaluez l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

66 1. Intégrale **♣ △**

Puisque x=0 est une asymptote verticale pour $f(x)=1/\sqrt{x}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_{q}^{1} x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = \left(2x^{1/2}\right) \Big|_{x=q}^{1} = 2 - 2\sqrt{q} \; .$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{q}\right) = 2 \; .$$

Exemple 1.5.9

Déterminez si l'intégrale impropre $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ converge ou diverge. Si elle converge, donner la valeur de l'intégrale.

On note que $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)}$$

a une asymptote verticale à x=2. Le graphe de f est donné à la figure 1.21. Ainsi, il faut déterminer si

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x$$

existe.

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la méthode des fractions partielles. C'est-à-dire que l'on détermine les variables A et B telles que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} .$$

Si on écrit ces fractions sur un même commun dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x-2)}.$$

On a égalité lorsque l'on a le même numérateur des deux côtés de l'égalité; c'est-à-dire si 1 = A(x-2) + B(x+3). Pour x = -3, on obtient 1 = -5A et ainsi A = -1/5. Pour x = 2, on obtient 1 = 5B et ainsi B = 1/5. On a donc que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-2} \right) .$$

Ainsi,

$$\int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x + 3} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x - 2} \, \mathrm{d}x$$

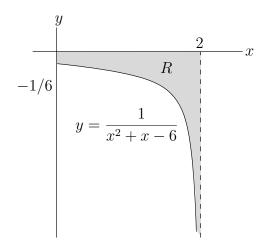


FIGURE 1.21 – Graphe de $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ pour $0 \le x < 2$.

$$= -\frac{1}{5}\ln(x+3)\Big|_{x=0}^{q} + \frac{1}{5}\ln|x-2|\Big|_{x=0}^{q}$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\ln(q+3) - \ln(3) - \ln|q-2| + \ln(2)\right)$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln(2/3)\right).$$

Puisque $\lim_{q\to 2^-} \ln|q-2| = -\infty$ et $\lim_{q\to 2^-} \ln(q+3) = \ln(5)$, on obtient

$$\begin{split} \int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x &= \lim_{q \to 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{5} \lim_{q \to 2^-} \left(\ln(q + 3) - \ln|q - 2| + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) = -\infty \; . \end{split}$$

Donc, l'intégrale diverge.

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 x^{-p} \, \mathrm{d}x$$

Pour $p \neq 1$,

$$\int_{q}^{1} x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right) \Big|_{x=q}^{1} = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p}.$$

Pour p = 1, $\int_{q}^{1} x^{-p} dx = \int_{q}^{1} \frac{1}{x} dx = (\ln(x)) \Big|_{x=0}^{1} = -\ln(q).$

68 1. Intégrale **♣** № <u>№</u>

Ainsi, pour p < 1,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

car 1 - p > 0.

Pour p > 1,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right)$$
$$= \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)q^{p-1}} \right) = \infty$$

car p - 1 > 0.

Finalement, pour p = 1,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{q \to 0^+} \int_q^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{q \to 0^+} \ln(q) = \infty.$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.5.10

 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ converge pour } p < 1 \text{ et diverge pour } p \ge 1. \text{ De plus, } \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ pour p < 1.

On remarque que la conclusion au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si on remplace $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ où a > 0 est un nombre réel quelconque.

Remarque 1.5.11 ②

La proposition 1.5.10 peut être déduite de la proposition 1.5.4 et vice-versa. Si on pose t=1/x, on a d $t=\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_{1}^{q} \frac{1}{x^{p}} dx = \int_{1}^{q} \frac{-1}{x^{p-2}} \left(\frac{-1}{x^{2}}\right) dx = -\int_{1}^{1/q} \frac{1}{t^{2-p}} dt = \int_{1/q}^{1} \frac{1}{t^{2-p}} dt.$$

Les énoncés suivants sont équivalents.

la proposition 1.5.4 est vrai.

- $\Leftrightarrow \lim_{q \to \infty} \int_{1}^{q} \frac{1}{x^p} dx$ existe si et seulement si p > 1.
- $\Leftrightarrow \lim_{q \to \infty} \int_{1/q}^{1} \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si p > 1.
- $\Leftrightarrow \lim_{q \to \infty} \int_{1/q}^{1} \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si 2 p < 1.

- $\Leftrightarrow \lim_{q \to 0} \int_q^1 \frac{1}{t^{2-p}} \, \mathrm{d}t \text{ existe si et seulement si } 2-p < 1.$
- \Leftrightarrow la proposition 1.5.10 est vrai.

On obtient la conclusion de la proposition 1.5.10 à partir de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ en y remplaçant 2-p par p.

1.6 Test de comparaison 🖍

Il est généralement difficile d'évaluer algébriquement les intégrales. C'est encore plus évident dans le cas des intégrales impropres. On a donc souvent recours aux méthodes numériques pour estimer la valeur des intégrales impropres. Avant d'estimer numériquement une intégrale impropre, il est nécessaire de déterminer si elle converge. Le fait que les calculs numériques d'une intégrale impropre produisent des valeurs supérieures à ce qu'un ordinateur peut traiter (on parle de « overflow ») n'indique pas que l'intégrale impropre diverge. Il se pourrait très bien que la valeur de l'intégrale soit en fait une valeur plus grande que l'ordinateur peut traiter. Il est aussi possible que ce problème soit dû à des erreurs de troncature ou à l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique inappropriée.

Nous présentons un test pour déterminer si une intégrale impropre converge ou diverge. Les propositions 1.5.4 et 1.5.10 seront d'une très grande utilité.

Théorème 1.6.1 (Test de comparaison)

Soit $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g:]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $0 \le f(x) \le g(x)$ pour tout x dans l'intervalle]a,b[. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondent à des asymptotes verticales pour les fonctions f et g.

- 1. Si $\int_a^b g(x) dx$ converge alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.
- 2. Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge alors $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

Dans le cas où f et g sont continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et $b = \infty$, le théorème précédent est une conséquence de la relation $0 \le f(x) \le g(x)$ pour toux x dans l'intervalle $[a, +\infty[$. En effet, il découle de cette dernière inégalité que

$$0 \le \int_{a}^{q} f(x) \, \mathrm{d}x \le \int_{a}^{q} g(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.6.1}$$

pour tout $q \geq a$. Définissons les fonctions

$$F(q) = \int_{a}^{q} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.6.2}$$

70 1. Intégrale **♣** № <u>№</u>

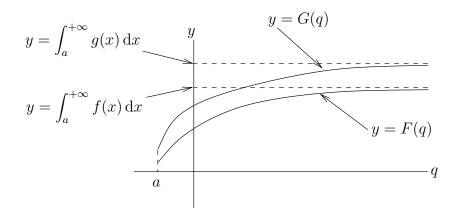


FIGURE 1.22 – Représentation qualitative du graphe des fonctions F et G définies en (1.6.2) et (1.6.3) respectivement.

et

$$G(q) = \int_{a}^{q} g(x) dx \tag{1.6.3}$$

Puisque f et g sont deux fonctions positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$, les fonctions F et G sont positives et croissantes (l'aire sous la courbe augmente lorsque q augmente). De plus, (1.6.1) devient $0 \le F(q) \le G(q)$ pour tout q.

Si on suppose que

$$\int_{a}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to +\infty} G(q)$$

converge, alors F est une fonction croissante bornée supérieurement par

$$\int_{a}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Il s'en suit que

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to +\infty} F(q)$$

converge grâce au théorème $\ref{eq:converge}$. On retrouve à la figure 1.22 deux graphes qui peuvent représenter qualitativement les graphes de F et G.

Par contre si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge alors F est une fonction qui croit sans limite supérieure. Il en est donc de même pour G car $F(q) \leq G(q)$ pour tout q. Ainsi, $\lim_{q \to +\infty} G(q) = +\infty$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

La justification du test de comparaison pour les autres types d'intégrales impropres est semblable.

Exemple 1.6.2

Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

$$\mathbf{a}) \quad \int_{1}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{b}) \quad \int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 - x + 1} \, \mathrm{d}x$$

a) Puisque

$$0 \le \frac{|\sin(x)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x \ge 1$ et

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

converge (c'est le cas p > 1 de la proposition 1.5.4), on a que

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

converge grâce au test de comparaison.

b) On commence par remarquer que $\frac{x^2}{x^3 - x + 1} > 1/x$ pour $x \ge 1$. En effet, pour $x \ge 1$, on a $0 \ge 1 - x$ et ainsi

$$x^3 \ge x^3 - x + 1 \ . \tag{1.6.4}$$

La fonction $p(x) = x^3 - x + 1$ est croissante pour $x \ge 1$ car $p'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ pour $x \ge 1$. Ainsi, $x^3 - x + 1 = p(x) \ge p(1) = 1 > 0$ pour $x \ge 1$. On peut donc diviser les deux cotés de l'inégalité en (1.6.4) par $x(x^3 - x + 1)$ sans changer la direction de l'inégalité et sans risquer de diviser par zéro. On obtient

$$\frac{x^2}{x^3 - x + 1} \ge \frac{1}{x}$$

pour $x \ge 1$.

Puisque

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

diverge (c'est le cas $p \le 1$ de la proposition 1.5.4), on a que

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 - x + 1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x$$

diverge grâce au test de comparaison.

Exemple 1.6.3

Déterminer si l'intégrale

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} \, \mathrm{d}x$$

converge ou diverge.

C'est une intégrale impropre car x=1 est une asymptote verticale de $(x^2-1)^{-1/3}$. On a

$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to 1^+} \int_q^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} \, \mathrm{d}x \quad .$$

72 1. Intégrale **♣ №** №

Puisque notre intention est de comparer cette intégrale avec l'intégrale entre 0 et a de la proposition 1.5.10, nous commençons par une simple substitution pour obtenir 0 comme borne inférieure pour l'intégrale. Soit u = x - 1. On a du = dx, u = q - 1 lorsque x = q et u = 4 lorsque x = 5. Ainsi,

$$\int_{q}^{5} \frac{1}{(x^{2}-1)^{1/3}} dx = \int_{q-1}^{4} \frac{1}{((u+1)^{2}-1)^{1/3}} du = \int_{q-1}^{4} \frac{1}{(u^{2}+2u)^{1/3}} du .$$

Ainsi, lorsque q tend vers 1, on obtient que $\int_1^5 \frac{1}{(x^2-1)^{1/3}} \, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_0^4 \frac{1}{(u^2+2u)^{1/3}} \, \mathrm{d}u$ converge. La substitution u=x-1 est simplement une translation de l'intervalle d'intégration de 1 vers la gauche. Il suffit de terminer si cette dernière intégrale impropre converge ou diverge pour obtenir la même conclusion pour l'intégrale impropre du départ.

Puisque

$$(u^2 + 2u)^{1/3} = u^{2/3} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^{1/3} \ge u^{2/3}$$

pour u > 0, on a

$$0 \le \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} \le \frac{1}{u^{2/3}}$$

pour tout u > 0. Puisque

$$\int_0^4 \frac{1}{u^{2/3}} \, \mathrm{d}u$$

converge (c'est le cas p < 1 de la proposition 1.5.10), on a que

$$\int_0^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} \, \mathrm{d}u$$

converge grâce au test de comparaison.

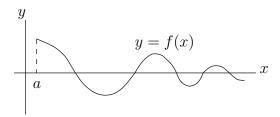
Le test de comparaison peut aussi être utilisé pour déterminer la convergence d'intégrales impropres dont l'intégrande peut avoir des valeurs négatives.

Théorème 1.6.4

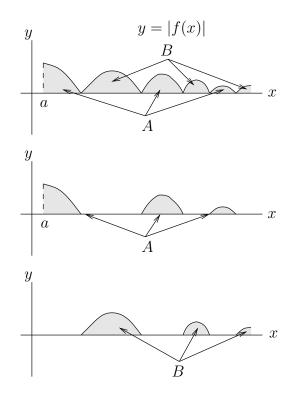
Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle]a,b[. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondent à des asymptotes verticales pour la fonction f. Alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ converge si $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.

Par exemple, $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge.

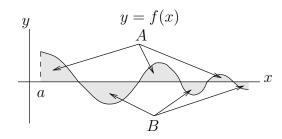
Il est possible de justifier intuitivement ce résultat en considérant le graphe de f. Supposons que le graphe de f est celui donné à la ci-dessous.



L'aire de la région A plus l'aire de la région B dans la figure suivante donnent l'aire sous la courbe y=|f(x)| pour $a\leq x<\infty$; c'est-à-dire, $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



On suppose que la valeur de cette intégrale est finie. Donc l'aire de la région A et l'aire de la région B sont aussi des valeurs finies. Il s'en suit que la valeur de $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est finie car c'est l'aire de la région B comme on peut le voir dans la figure suivante.



74 1. Intégrale **♣** № 2

Remarque 1.6.5 @

Nous présentons ci-dessous une démonstration que $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge. Cette démonstration formalise la justification graphique que nous venons de donner ci-dessus.

Si
$$\int_{a}^{\infty} |f(x)| dx$$
 converge alors $\int_{a}^{\infty} 2|f(x)| dx$ converge car

$$\lim_{q \to \infty} \int_a^q 2|f(x)| \, \mathrm{d}x = 2 \lim_{q \to \infty} \int_a^q |f(x)| \, \mathrm{d}x \; .$$

Puisque

$$0 \le |f(x)| - f(x) \le 2|f(x)|$$

pour tout x dans l'intervalle $]a, \infty[$, on obtient que $\int_a^\infty (|f(x)| - f(x)) dx$ converge grâce au test de comparaison.

Finalement, $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ converge car

$$\lim_{q \to \infty} \int_a^q f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to \infty} \left(\int_a^q |f(x)| \, \mathrm{d}x - \int_a^q \left(|f(x)| - f(x) \right) \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{q \to \infty} \int_a^q |f(x)| \, \mathrm{d}x - \lim_{q \to \infty} \int_a^q \left(|f(x)| - f(x) \right) \, \mathrm{d}x$$

où les deux dernières limites existent.

On pourrait tirer la même conclusion en considérant les autres formes pour l'intégrale impropre.

Exemple 1.6.6

On a vu à l'exemple 1.6.2 que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$ convergeait. Il s'en suit que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ convergeait. Il s'en suit que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ converge.

Remarque 1.6.7

Si $\int_a^b |f(x)| dx$ diverge, on ne peut rien dire au sujet de $\int_a^b f(x) dx$.

Par exemple, $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge mais $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

i) Commençons par montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Puisque $\sin(x)/x = f(x)g'(x)$ où f(x) = 1/x et $g'(x) = \sin(x)$, on obtient $f'(x) = -1/x^2$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\int_{1}^{q} \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^{q} - \int_{1}^{q} \frac{\cos(x)}{x^{2}} dx$$

par la règle d'intégration par parties. Puisque

$$0 \le \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \le \frac{1}{x^2}$$

et $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge grâce à la proposition 1.5.4, on a que

$$\int_{1}^{\infty} \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \, \mathrm{d}x$$

converge. Donc $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge. De plus

$$\lim_{q \to \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^{q} \right) = \lim_{q \to \infty} \left(\cos(1) - \frac{\cos(q)}{q} \right) = \cos(1) .$$

Ainsi,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{q \to \infty} \int_{1}^{q} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{q \to \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^{q} - \int_{1}^{q} \frac{\cos(x)}{x^{2}} dx \right)$$
$$= \cos(1) - \int_{1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^{2}} dx$$

est une nombre réel.

ii) Pour montrer que $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge, on montre que

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = +\infty.$$

On remarque que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(k+1)\pi} \ge \frac{2}{\pi} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx$$

car

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 2 & \text{pour } k \text{ pair} \\ \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x) \, \mathrm{d}x = \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_{1}^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \int_{1}^{\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$$

$$\geq \int_{1}^{\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_{1}^{\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \int_{2}^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_{1}^{\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln(2)) \to +\infty$$

lorsque n tend vers plus l'infini.

76 1. Intégrale **♣** № 2

1.7 Méthodes numériques d'intégration 🖋

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable. Notre but est de développer des méthodes numériques qui nous permettrons d'évaluer l'intégrale

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

lorsque nos techniques d'intégration s'avèrent impuissante à évaluer cette intégrale ou lorsque quelles aboutissent à des calculs algébriques qui sont longs et complexes.

L'idée principale qui supporte les méthodes numériques que nous présentons est la suivante. On cherche une fonction $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ telle que |p(x)-f(x)| est très petit pour tout x et telle que $\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$ est simple à évaluer. Si |p(x)-f(x)| est très petit pour tout x, on peut espérer que

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx \int_a^b p(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Il y a une infinité de choix possible pour p. Les trois méthodes que l'on présente sont les suivantes :

- 1. La méthode du point milieu où p sera une fonction constante par morceaux.
- 2. La méthode des trapèzes où p sera une fonction linéaire par morceaux.
- 3. La méthode de Simpson où p sera une fonction quadratique par morceaux.

1.7.1 Méthode du point milieu

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle [a, b] en 2n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit h = (b-a)/(2n) et $x_i = a+ih$ pour i = 0, 1, 2, ..., 2n. L'intervalle [a, b] est l'union des 2n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, 2, ..., 2n - 1.

On définie la fonction $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = f(x_{2i+1})$$
 si $x_{2i} \le x < x_{2i+2}$.

C'est une fonction qui est constante par morceaux. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, la fonction p prend la valeur de f au point milieu x_{2i+1} . C'est ce qui est représenté à la figure 1.23. On a que

$$\int_{a}^{b} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i+1}) dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}) = 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$$

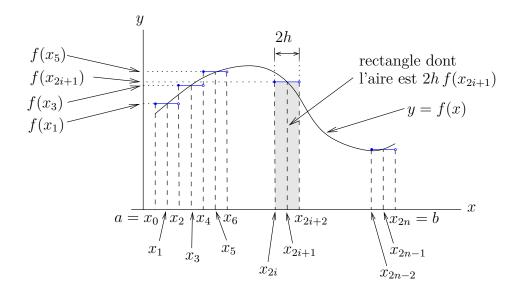


FIGURE 1.23 – Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale

La somme $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ est une somme de Riemann avec $\Delta x = 2h$ pour l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Donc, en théorie, $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque h tend vers 0. On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 1.7.1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit h=(b-a)/(2n) et $x_j=a+j\,h$ for $j=0,\,1\,\ldots,\,2n$. Alors

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + \frac{f''(\xi) (b-a)}{6} h^{2}$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre première méthode d'intégration numérique.

78 1. Intégrale **♣ №** ✓

Méthode 1.7.2 (Méthode du point milieu)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle [a, b], on utilise

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx M_{n} = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1})$$

où h = (b - a)/(2n) et $x_j = a + j h$ for j = 0, 1, ..., 2n.

l'erreur de troncature pour la méthode du point milieu est $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6}h^2$.

Comme ξ à la proposition précédente est inconnu, l'erreur de troncature a une utilité limitée.

Exemple 1.7.3

Utiliser la méthode du point milieu pour estimer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de [0,1] (i.e. la longueur de h) pour obtenir une erreur de troncature inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode du point milieu, on a a=0, b=1, $f(x)=e^{-x^2}$, h=(b-a)/(2n)=1/(2n) et $x_i=0+ih=ih$. On choisie n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi) (b-a)}{6} h^2 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que |f''(x)| peut prendre sur l'intervalle [0,1]. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0,1]$, on peut utiliser 6e pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2 \right| \le \frac{6e}{6} \left(\frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{e}{4n^2} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{4}10^4} = \frac{10^2}{2}\sqrt{e} \approx 82.436$$
.

On peut donc prendre n = 83.

On a
$$h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{166}$$
 et $x_{2i+1} = \frac{2i+1}{166}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., 82$, On obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{166} \sum_{i=0}^{82} e^{((2i+1)/166)^2}$$

$$\approx \frac{1}{83} \left(e^{(1/166)^2} + e^{(3/166)^2} + e^{(5/166)^2} + \dots + e^{(163/166)^2} + e^{(165/166)^2} \right)$$

$$\approx 1.4626189.$$

Remarque 1.7.4

Si f est une fonction convexe, la méthode du point milieu donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode du point milieu donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que f''(x) > 0 pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6}h^2$ est positif. Par contre si, f est concave, on a que f''(x) < 0 pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6}h^2$ est négatif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide des figures 1.24 et 1.25.

À la figure 1.24, on a une fonction concave. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze ABCD comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe y = f(x) pour $x_{2i} \le x \le x_{2i+2}$ est complètement recouverte par le trapèze ABCD, l'aire sous la courbe y = f(x) est donc inférieure ou égale à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de [a, b] utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe y = f(x) représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x \le 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \ .$$

Dans la figure 1.25, on a une fonction convexe. L'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze ABCD comme le confirme les deux triangles hachurés. Comme la surface sous la courbe y = f(x) pour $x_{2i} \le x \le x_{2i+2}$ recouvre complètement le trapèze ABCD, l'aire sous la courbe y = f(x) est donc supérieure à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de [a, b] utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe y = f(x) représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \ge 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) .$$

1.7.2 Méthode des trapèzes

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Premièrement, on partage l'intervalle [a, b] en n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit h = (b - a)/n et $x_i = a + ih$ pour i = 0, 1, 2, ..., n. L'intervalle [a, b] est l'union des n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, 2, ..., n - 1. 80 1. Intégrale **♣** № 1. Intégrale

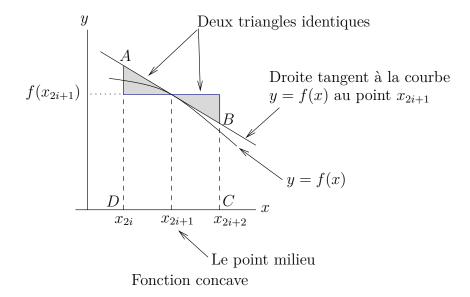


FIGURE 1.24 – La concavité de la fonction f détermine si la méthode du point milieu donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f. Dans le cas présent, on a une surestimation de l'intégrale car la fonction est concave.

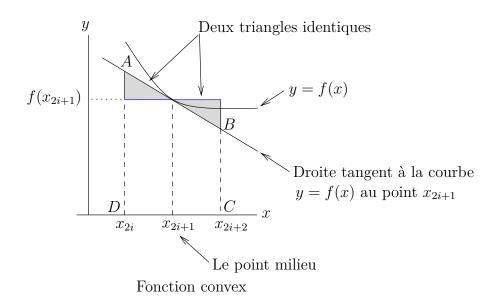


FIGURE 1.25 – La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe comme dans le cas présent.

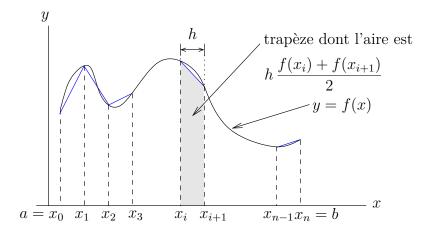


FIGURE 1.26 – Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale

On définie la fonction $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i) \quad \text{si} \quad x_i \le x < x_{i+1}.$$

C'est une fonction qui est linéaire par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, le graphe de la fonction p est la droite qui lie les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 1.26.

On a que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i) .$$

Dans le cas où $f(x_i) > 0$ et $f(x_{i+1}) > 0$, on reconnaît la formule pour calculer l'aire du trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h et les côtés adjacents sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

On a donc que

$$\int_{a}^{b} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{i}}^{x_{i+1}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(x_{i}) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$= h \left(\frac{f(x_{0}) + f(x_{1})}{2} + \frac{f(x_{1}) + f(x_{2})}{2} + \frac{f(x_{2}) + f(x_{3})}{2} + \dots \right)$$

$$+ \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_{n})}{2}$$

$$= \frac{h}{2} \left(f(x_{0}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i}) + f(x_{n}) \right).$$

82 1. Intégrale **♣** № 2

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 1.7.5

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit h=(b-a)/n et $x_j=a+j\,h$ pour $j=0,\,1\,\ldots,\,n$. Alors

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) - \frac{f''(\xi) (b-a)}{12} h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre deuxième méthode d'intégration numérique.

Méthode 1.7.6 (Méthode des trapèzes)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle [a, b], on utilise

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx T_{n} = \frac{h}{2} \left(f(x_{0}) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{j}) + f(x_{n}) \right)$$

où h = (b - a)/n et $x_j = a + j h$ for j = 0, 1, ..., n.

L'erreur de troncature pour la méthode des trapèzes est $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12}h^2$.

Remarque 1.7.7

On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode du trapèze à l'aide des sommes à droite et à gauche. On a $T_n = (G_n + D_n)/2$.

Exemple 1.7.8

Utiliser la méthode des trapèzes pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de [0,1] pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode des trapèzes, on a a=0, b=1, $f(x)=e^{-x^2}$, h=(b-a)/n=1/n et $x_i=0+ih=ih$. On choisie n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi) (b-a)}{12} h^2 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que |f''(x)| peut prendre sur l'intervalle [0,1]. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e^{x^2}$$

pour tout $x \in [0,1]$, on peut utiliser 6e pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi) (b-a)}{12} h^2 \right| \le \frac{6e}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{e}{2n^2} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \sqrt{\frac{e}{2}10^4} = 10^2 \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 116.5821$$

On peut donc prendre n = 117.

On a
$$h = \frac{1}{n} = \frac{1}{117}$$
 et $x_i = \frac{i}{117}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., 117$. On obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{234} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^{116} e^{(i/117)^2} + e^1 \right)$$
$$\approx \frac{1}{234} \left(1 + 2 \left(e^{(1/117)^2} + e^{(2/1117)^2} + \dots + e^{(116/117)^2} \right) + e \right)$$
$$\approx 1.46268.$$

Remarque 1.7.9

Comme on a fait pour la méthode du point milieu, il est possible d'analyser l'effet de la courbure d'une fonction pour déterminer si la méthode des trapèzes donnera une surestimation ou une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

Si f est une fonction convexe, la méthode des trapèzes donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode des trapèzes donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. On peut justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, on a que f''(x) > 0 pour tout x. Ainsi l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12}h^2$ est négatif. Par contre si, f est concave, on a que f''(x) < 0 pour tout x.

Ainsi l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12}h^2$ est positif.

On peut aussi justifier notre remarque à l'aide de la figure 1.27.

Le graphe de gauche dans la figure 1.27 représente une fonction concave. Le trapèze ABCD est le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze ABCD est complètement recouvert par la région sous la courbe y = f(x) pour $x_i \le x \le x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus petite ou égale à l'aire sous la courbe y = f(x). Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de [a, b] utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe y = f(x) représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \ge \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) .$$

84 1. Intégrale **♣** № <u>№</u>

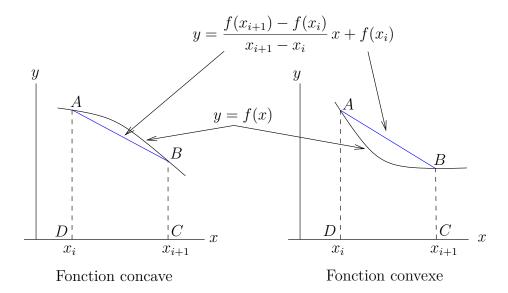


FIGURE 1.27 — La courbure de la fonction f détermine si la méthode des trapèzes donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f. Dans le graphe de gauche, on a une sous-estimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est concave. Par contre dans le graphe de droite, on a une surestimation de la valeur de l'intégrale car la fonction est convexe.

Le graphe de droite dans la figure 1.27 représente une fonction convexe. Le trapèze ABCD est toujours le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Comme le trapèze ABCD recouvre complètement la région sous la courbe y = f(x) pour $x_i \le x \le x_{i+1}$, on a que l'aire du trapèze est plus grande ou égale à l'aire sous la courbe y = f(x). Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de [a, b] utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe y = f(x) représente l'intégrale de f, on a que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \le \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) .$$

L'idée de majoré une fonction f par une autre fonction g pour obtenir la relation

$$\int_{a}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \le \int_{a}^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x$$

peut être utilisée pour estimer la valeur d'intégrales impropres.

Exemple 1.7.10

Estimer la valeur de l'intégrale $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ avec une précision de 10^{-4} .

Il y a deux étapes pour trouver cette approximation.

i) Puisque que

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^{2}/2} dx = \int_{1}^{c} e^{-x^{2}/2} dx + \int_{c}^{\infty} e^{-x^{2}/2} dx$$

on cherche une valeur c telle que

$$0 \le \int_c^\infty e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x < \frac{1}{2} \, 10^{-4} \, .$$

ii) Lorsque l'on aura c, on utilisera une méthode numérique pour trouver une approximation I de $\int_{1}^{c} e^{-x^{2}/2} dx$ telle que

$$\left| \int_{1}^{c} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x - I \right| < \frac{1}{2} \, 10^{-4} \; .$$

On aura alors que

$$\left| \int_{1}^{\infty} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x - I \right| = \left| \int_{1}^{c} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x - I \right|$$

$$\leq \left| \int_{1}^{c} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x - I \right| + \left| \int_{c}^{\infty} e^{-x^{2}/2} \, \mathrm{d}x \right|$$

$$< \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 10^{-4} .$$

La valeur I est l'approximation cherchée.

i) Comme aucune de nos techniques d'intégration peut être utilisée pour évaluer l'intégrale

$$\int_{c}^{\infty} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \; ,$$

nous majorons cette intégrale par une intégrale que l'on peut évaluer.

Pour $x \ge 2$, on a $x^2 \ge 2x$. Ainsi, $-x \ge -x^2/2$ pour $x \ge 2$ et

$$0 \le \int_c^\infty e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \le \int_c^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x = \lim_{q \to \infty} \int_c^q e^{-x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{q \to \infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_c^q = \lim_{q \to \infty} \left(-e^{-q} + e^{-c} \right)$$
$$= e^{-c}$$

pour $c \geq 2$. On prend c tel que

$$e^{-c} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$
,

c'est-à-dire

$$c > -\ln\left(\frac{1}{2}10^{-4}\right) = -\ln\left(2^{-1}\right) - \ln\left(10^{-4}\right) = \ln(2) + 4\ln(10) \approx 9.903487$$
.

Donc, c = 10 est un bon choix.

ii) On utilise la méthode des trapèzes pour trouver une première approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x.$

86 1. Intégrale **♣ №**

Si on prend n=600 dans la formule pour la méthode des trapèzes, puisque a=1 et b=10, on obtient h=9/600=3/200, $x_i=1+3i/200$ pour $i=0,1,2,\ldots,600$ et

$$\int_{1}^{10} e^{-x^{2}/2} dx \approx I_{1} = \frac{3}{400} \left(e^{-1/2} + 2 \sum_{j=1}^{599} e^{(1+3j/200)^{2}/2} + e^{10^{2}/2} \right) \approx 0.397701117958515.$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_1 est une sur estimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On utilise la méthode du point milieu pour trouver une deuxième approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx$.

Si on prend n=600 dans la formule pour la méthode du point milieu, puisque a=1 et b=10, on obtient h=9/1200=3/400, $x_i=1+3i/400$ pour $i=0,1,2,\ldots,1200$ et

$$\int_{1}^{10} e^{-x^{2}/2} dx \approx I_{2} = \frac{3}{200} \sum_{i=0}^{599} e^{(1+3(2j+1)/400)^{2}/2} \approx 0.397684059123784.$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_2 est une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale.

On a

$$0.3976840 \le \int_1^{10} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \le 0.3977012$$
.

Puisque

$$0.3977012 - 0.3976840 = 0.172 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \, 10^{-4} \; ,$$

on peut prendre I=(0.3977012+0.3976840)/2=0.3976926 comme approximation de $\int_{1}^{\infty}e^{-x^{2}/2}\,\mathrm{d}x.$

Notez que l'on a assumé que les calculs numériques étaient exactes. Ce n'est généralement pas le cas. Il faudrait considéré les « round-off errors » qui sont dû à l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs.

Pour être plus rigoureux, on aurait pu utiliser nos formules pour calculer l'erreur de troncature afin de choisir une valeur de n qui soit possiblement plus petite que 600. On a ici simplement choisit une valeur de n au hasard en espérant qu'elle soit assez grande pour obtenir la précision requise.

1.7.3 Méthode de Simpson

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre quatre qui est continue.

Premièrement, on partage l'intervalle [a, b] en 2n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit h = (b - a)/(2n) et $x_i = a + ih$ pour i = 0, 1, 2, ..., 2n. L'intervalle [a, b] est l'union des 2n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, 2, ..., 2n - 1.

On définie la fonction $p:[a,b] \to \mathbb{R}$ suivante. Pour $x_{2i} \le x < x_{2i+2}$, on définie

$$m_1 = \frac{f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})}{x_{2i+1} - x_{2i}} , \ m_2 = \frac{f(x_{2i+2}) - f(x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i+1}} , \ m_3 = \frac{m2 - m1}{x_{2i+2} - x_{2i}}$$
 (1.7.1)

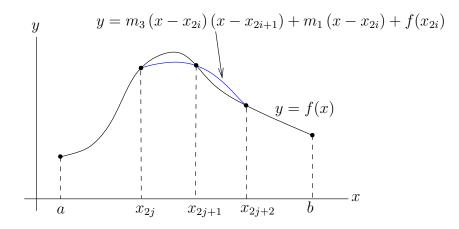


FIGURE 1.28 – Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale. On utilise le polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i})), (x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$ pour estimer f(x) lorsque $x_{2i} \le x < x_{2i+2}$

et l'on pose

$$p(x) = m_3(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) + m_1(x - x_{2i}) + f(x_{2i}).$$

C'est une fonction quadratique par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, le graphe de la fonction p est le graphe du polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i})), (x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$. C'est ce que l'on retrouve à la figure 1.28.

Il est intéressant de noter que grâce au théorème fondamental de l'algèbre 2 , il n'y a qu'un seul polynôme de degré deux qui passe par les trois points $(x_{2i}, f(x_{2i})), (x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.

L'intégrale du polynôme

$$p(x) = m_3 (x - x_{2i}) (x - x_{2i+1}) + m_1 (x - x_{2i}) + f(x_{2i})$$

sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ est

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx$$

$$= m_3 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i}) (x - x_{2i+1}) dx + m_1 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i}) dx + \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i}) dx$$

$$= m_3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_{2i} + x_{2i+1}}{2} x^2 + x_{2i} x_{2i+1} x \right) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + m_1 \frac{(x - x_{2i})^2}{2} \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}$$

$$+ f(x_{2i}) (x - x_{2i}) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}.$$

Si on substitue les expressions pour m_1 et m_3 données en (1.7.1) dans la formule ci-dessus et si on simplifie le résultat, on obtient, après un long calcul qu'on laisse aux lecteurs le soin

^{2.} Un polynôme de degré n a exactement n racines complexes si on inclus les racines multiples.

88 1. Intégrale **♣ یک** عر

d'effectuer, la formule suivante

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) \, \mathrm{d}x = \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}) \right) .$$

On a donc que

$$\int_{a}^{b} p(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2}) \right)$$
$$= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right).$$

On pourrait démontrer le théorème suivant.

Proposition 1.7.11

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre quatre. Soit h=(b-a)/(2n) et $x_j=a+j\,h$ pour $j=0,\,1\,\ldots,\,2n$. Alors

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right) - \frac{f^{(4)}(\xi) (b-a)}{180} h^4$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre troisième et dernière méthode d'intégration numérique.

Méthode 1.7.12 (Méthode de Simpson)

Pour estimer la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle [a, b], on utilise

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx S_{n} = \frac{h}{3} \left(f(x_{0}) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right)$$

où h = (b - a)/(2n) et $x_j = a + j h$ for j = 0, 1, ..., 2n.

L'erreur de troncature pour la méthode de Simpson est $-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180}h^4$.

Remarque 1.7.13

On peut exprimer la formule d'approximation pour la méthode de Simpson à l'aide des formules d'approximation M_n pour la méthode du point milieu et T_n pour la méthode des

trapèzes. On a $S_n = (2M_{n/2} + T_n)/3$. Pour la méthode des trapèzes, on utilise seulement les intervalles de la forme $[x_{2j}, x_{2j+2}]$.

Exemple 1.7.14

Utiliser la méthode de Simpson pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Choisir le nombre de sous-intervalles de [0,1] pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode de Simpson, on pose $a=0, b=1, f(x)=e^{-x^2}, h=(b-a)/(2n)=1/(2n)$ et $x_i=0+ih=ih$. On choisit n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi) \left(b - a \right)}{180} h^4 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme on ne connaît pas ξ , on remplace $|f^{(4)}(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f^{(4)}(x)|$ peut prendre sur l'intervalle [0,1]. Puisque

$$|f^{(4)}(x)| = 4e^{x^2} (3 + 12x^2 + 4x^4) \le 76e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utilisé 76e pour le maximum cherché.

Ainsi, on cherche n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi) (b-a)}{180} h^4 \right| \le \frac{76e}{180} \left(\frac{1}{2n} \right)^4 = \frac{19e}{720n^4} < 10^{-4} .$$

On trouve

$$n > \left(\frac{19e}{720}10^4\right)^{1/4} = 5\left(\frac{19e}{45}\right)^{1/4} \approx 5.175220$$
.

On peut donc prendre n=6.

On a
$$h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{12}$$
 et $x_i = \frac{i}{12}$ pour $i = 0, 1, 2, ..., 12$. On obtient

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{36} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^5 e^{(j/6)^2} + 4 \sum_{j=0}^5 e^{((2j+1)/12)^2} + e^1 \right)$$

$$= \frac{1}{36} \left(1 + 2 \left(e^{(2/12)^2} + e^{(4/12)^2} + \dots + e^{(10/12)^2} \right) + 4 \left(e^{(1/12)^2} + e^{(3/12)^2} + \dots + e^{(11/12)^2} \right) + e \right)$$

$$\approx 1.46267.$$

Remarque 1.7.15

1. Comme on a vue, pour déterminer si l'estimation fournie par la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes est une surestimation ou une sous-estimation, il

90 1. Intégrale **♣ №**

suffi de déterminer la courbure (convexe ou concave) du graphe de l'intégrande; c'est à dire, le signe de la dérivée seconde de l'intégrande. Ce n'est plus le cas pour la méthode de Simpson. Puisque l'erreur de troncature est

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180}h^4$$
,

il faut considérer le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande. Nous ne ferons pas cette analyse.

- 2. Puisqu'une fonction peut avoir un graphe qui change de courbure lorsque la variable indépendante varie, il n'est souvent pas possible d'utiliser la courbure pour déterminer si la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes vont donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale. De même, Il est rarement possible d'utiliser le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande pour déterminer si la méthode de Simpson va donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale car le signe de cette dérivée peut changer lorsque la valeur de la variable indépendante varie.
- 3. Pour une même précision, la méthode de Simpson demande de subdiviser l'intervalle d'intégration en beaucoup moins de sous-intervalles que les méthodes du point milieu et des trapèzes. Pour justifier cette remarque, il suffit de considérer l'erreur de troncature pour les trois méthodes que l'on a présentées.

Si on suppose que f'' et $f^{(4)}$ varient lentement par rapport à la variable indépendante, on peut comparer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature pour les trois méthodes qui nous intéresse. Pour h donné, l'erreur de troncature pour les méthodes du point milieu et des trapèzes est de l'ordre de h^2 , alors qu'elle est de l'ordre de h^4 pour la méthode de Simpson. Lorsque h diminue (i.e. $h \to 0$), l'erreur de troncature de la méthode de Simpson diminue beaucoup plus rapidement que celle pour les méthodes du point milieu ou des trapèzes. C'est ce qui fait que la méthode de Simpson est généralement supérieure au deux autres méthodes.

Des trois méthodes que l'on a étudiées, c'est la méthode de Simpson qui demande le moins de sous-intervalles et donc le moins d'opération arithmétiques pour estimer une intégrale avec une précision donnée. De plus, si on tiens compte des « round-off errors » lors des calculs sur ordinateurs, il est préférable d'utiliser une méthode qui demande moins d'opérations arithmétiques pour minimiser ce type d'erreurs.

1.8 Exercices

Question 1.1

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int -x^{-2} dx$$
 b) $\int \frac{10}{x^9} dx$ c) $\int \left(5z^{-1.2} - 1.2\right) dz$
d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}} + 3t\right) dt$ e) $\int 2^x dx$ f) $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$

1.8. Exercices 91

Question 1.2

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int \cos(2\pi(x-2)) dx$$
 b) $\int \frac{1}{1+4t} dt$

$$\mathbf{b}) \quad \int \frac{1}{1+4t} \, \mathrm{d}t$$

$$\mathbf{c}) \quad \int \frac{1}{5 - 3x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int 3e^{3x/7} \, \mathrm{d}x$$

e)
$$\int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 dt$$
 f) $\int \frac{e^z}{1 + e^z} dz$

$$\mathbf{f}) \quad \int \frac{e^z}{1 + e^z} \, \mathrm{d}z$$

$$\mathbf{g}) \quad \int 3y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\mathbf{h}) \quad \int \frac{1}{x \ln(x)} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{g}) \quad \int 3y\sqrt{1+y^2} \, \mathrm{d}y \qquad \qquad \mathbf{h}) \quad \int \frac{1}{x\ln(x)} \, \mathrm{d}x \qquad \qquad \mathbf{i}) \quad \int \frac{1+e^t}{\sqrt{1+x+2x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{j}) \quad \int x^2\sqrt{x^3+1} \, \mathrm{d}x \qquad \qquad \mathbf{k}) \quad \int e^t \left(1+e^t\right)^4 \, \mathrm{d}t \qquad \qquad \mathbf{l}) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{j}) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{k}$$
) $\int e^t \left(1 + e^t\right)^4 dt$

$$1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{m}) \quad \int \frac{e^{1/t}}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$\mathbf{n}) \quad \int \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{o}) \quad \int \frac{x+3}{x^2-9} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{p}) \quad \int e^t \left(2 + e^{2t}\right) \, \mathrm{d}t$$

q)
$$\int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}} dt$$

Question 1.3 🔑 🏝

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int \frac{\cos(\theta)}{1 - \cos^2(\theta)} d\theta$$
 b) $\int \frac{\sin(x)}{1 - \sin^2 x} dx$

$$\mathbf{b}) \quad \int \frac{\sin(x)}{1 - \sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{c}) \quad \int \sqrt{x} \, \sin(x^{3/2} + 1) \, \mathrm{d}x$$

d)
$$\int \frac{\cos(1/t)}{t^2} dt$$
 e) $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$ **f**) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3} dx$

$$e) \int \frac{1}{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x$$

f)
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{g}) \quad \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{h}$$
) $\int \tan(x) \sec^4(x) \, \mathrm{d}x$

Question 1.4

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int \ln\left(\sqrt{x}\right) dx$$
 b) $\int x^2 e^x dx$ **c)** $\int \frac{x}{e^{3x}} dx$

$$\mathbf{b}) \quad \int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{c}) \quad \int \frac{x}{e^{3x}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int x^2 \, e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{e}) \quad \int x^3 \, e^{x^2} \, \mathrm{d}x$$

d)
$$\int x^2 e^{-x} dx$$
 e) $\int x^3 e^{x^2} dx$ **f**) $\int (x^2 + x^6) \ln(x) dx$

Question 1.5 🔑 🏝

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

a)
$$\int \theta \cos(\pi \theta) d\theta$$
 b) $\int e^x \sin(x) dx$

$$\mathbf{b}) \quad \int e^x \sin(x) \, \mathrm{d}x$$

Question 1.6

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes :

92 1. Intégrale 🌲 🎤 📈

a)
$$\int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} \, \mathrm{d}x$$

a)
$$\int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx$$
 b) $\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)} dx$ c) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$
d) $\int \frac{1}{t^2 + 6t + 8} dt$ e) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$ f) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
g) $\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ h) $\int \frac{t^2 + 1}{t^2 + 3t + 2} dt$ i) $\int \frac{x^3 - x - 2}{x^2 - 4} dx$

$$\mathbf{c}) \quad \int \frac{1}{x^2 + x + 1} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int \frac{1}{t^2 + 6t + 8} \, \mathrm{d}t$$

e)
$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{f}) \quad \int \frac{1}{x^2 - 9} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{g}) \quad \int \frac{1}{x^2 - x - 2} \, \mathrm{d}x$$

h)
$$\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2} \, dt$$

i)
$$\int \frac{x^3 - x - 2}{x^2 - 4} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{j}$$
) $\int \frac{9x + 29}{x^2 + 2x - 15} \, \mathrm{d}x$

Suggestion: Pour certaines des intégrales, vous pourriez avoir à compléter le carré du dénominateur et à utiliser une substitution.

Question 1.7

Évaluez l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx$

Question 1.8

Trouvez toutes les fonctions f telles que $f''(x) = 1 + x^{4/5}$.

Question 1.9

Donnez la somme de Riemann à droite et la somme de Riemann à gauche pour l'intégrale $\int_0^1 (1+t^3) dt$ où l'intervalle [0,1] est subdivisée en 5 sous-intervalles égaux.

Question 1.10 **\$**

La vitesse d'un abeille en vol a été mesuré à toutes les cinq secondes pendant 50 secondes. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

On suppose que l'abeille vol en ligne droite. Utilisez une somme de Riemann à droite pour estimer la distance parcourue par l'abeille. Utilisez une somme de Riemann à gauche pour estimer la distance parcourue par l'abeille.

Question 1.11

Donnez la somme de Riemann à droite et celle à gauche pour l'intégrale $\int_{a}^{2} t^{2} dt$ lorsque la partition de l'intervalle [0,2] comprend cinq sous-intervalles égaux.

Question 1.12

Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$, calculez la somme de Riemann pour le point milieu de l'intégrale $\int_{1}^{6} f(x) dx$ lorsque l'intervalle [1,6] est subdivisé en n=5 sous-intervalles égaux. Tracez le graphe de fet les rectangles de la somme de Riemann.

Question 1.13

Utilisez les sommes de Riemann pour le point milieu avec n=5 sous-intervalles égaux pour obtenir une approximation de la valeur de l'intégrale

$$\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x \ .$$

1.8. Exercices 93

Donnez votre réponse avec une précision de quatre chiffres décimaux.

Question 1.14

Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs d'une fonction croissante. Utilisez une somme à droite et une somme à gauche pour trouver une borne supérieure et une borne inférieure de l'intégrale

 $\int_0^{25} f(x) \, \mathrm{d}x \ .$

Utilisez le plus grand nombre de points possible pour chaque somme.

	x	0	5	10	15	20	25
Ì	f(x)	-42	-37	-25	-6	15	36

Question 1.15

Un objet se déplace en ligne droite durant 8 secondes. Le tableau ci-dessous donnent la vitesse v de l'objet en mètres par seconde toutes les 2 secondes.

$t ext{ (sec)}$	0	2	4	6	8
v (m/s)	10.0	9.5	9.0	8.0	6.0

Comme on peut voir, la vitesse est décroissante. Répondre aux questions suivantes à l'aide des sommes de Riemann à droite et à gauche.

- a) Donnez une borne supérieure et un borne inférieure de la distance parcourue pendant les 8 secondes.
- b) À quelle fréquence doit-on mesurer la vitesse de l'objet pour obtenir des bornes supérieures et inférieures qui soient à 0.1 mètre de la distance parcourue pendant les 8 secondes?

Question 1.16

Exprimez la limite suivante comme une intégrale définie.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\pi j}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi j}{n} \right) .$$

Question 1.17

Donnez la somme de Riemann à droite pour l'intégrale

$$\int_{2}^{5} \sqrt{2 + x^{1/3}} \, \mathrm{d}x$$

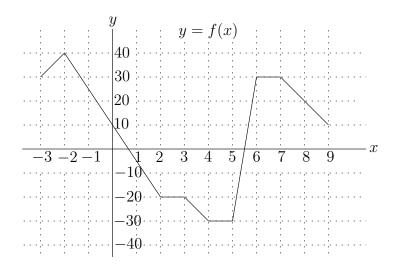
où on assume que l'intervalle [2,5] est subdivisé en N sous-intervalles égaux.

Question 1.18

Utilisez le graphe de la fonction f donné ci-dessous pour évaluer les intégrales suivantes.

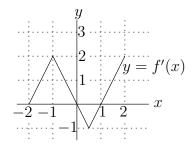
a)
$$\int_{-2}^{5} f(x) dx$$
 b) $\int_{0}^{10} f(x) dx$

94 1. Intégrale ♣ № 1. Intégrale



Question 1.19

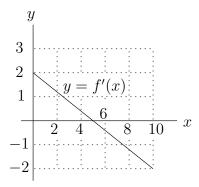
Le graphe de f' est donné dans la figure suivante



Si f(-1) = 2, quelle est la valeur de f(2)?

Question 1.20

Le graphe de f' est donné dans la figure suivante

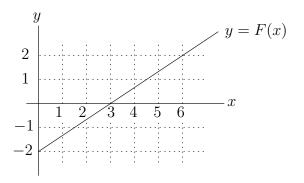


Si f(0) = 1, tracez un graphe possible pour f. Soyez aussi précis que possible.

Question 1.21

Si le graphe de F est le graphe suivant

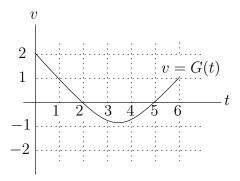
1.8. Exercices 95



Tracez le graphe de la primitive f de F qui satisfait f(1) = 3.

Question 1.22

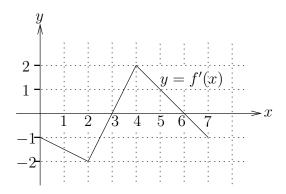
Si le graphe de G est le graphe suivant



Tracez le graphe de la primitive g de G qui satisfait g(1) = 10.

Question 1.23

La figure suivante donne le graphe de f'(x). On suppose de plus que f(0) = 2.

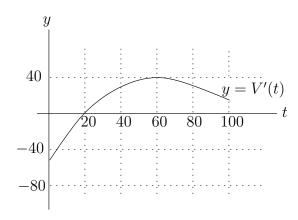


- a) Trouvez tous les points critiques et points d'inflexion de f(x) avec la valeur de f(x) à ces points.
- **b**) Tracez le graphe de f(x) en indiquant bien tous les points critiques et les points d'inflexion.

Question 1.24

Le graphe de la fonction V^\prime est donné à la figure suivante

96 1. Intégrale 🌲 🎤 🔀



Tracez le graphe de V, la primitive de la fonction V', qui passe par le point (0, 1000).

Question 1.25

Évaluez les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) dt \quad , \quad \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) dt \quad \text{et} \quad \int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2}\right) dt .$$

Si vous connaissez la valeur de deux des intégrales ci-dessus, montrez que vous connaissez la valeur de la troisième intégrale.

Question 1.26

Si $\int_{2}^{8} f(x) dx = 5$ et $\int_{5}^{8} f(x) dx = 7$, calculez les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_2^5 f(x) \, \mathrm{d}x$$

a)
$$\int_{2}^{5} f(x) dx$$
 b) $\int_{5}^{8} (2f(x) + 3x) dx$ **c)** $\int_{-2/3}^{2/3} f(2 - 3t) dt$

$$\mathbf{c}) \quad \int_{-2/3}^{2/3} f(2-3t) \, \mathrm{d}t$$

Question 1.27

Évaluez les intégrales suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_1^5 \frac{5}{x^3} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{b}) \quad \int_{1}^{8} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int_{1}^{2} \frac{3}{t^{4}} \, \mathrm{d}t$$

$$\mathbf{c}) \quad \int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int_1^2 \frac{3}{t^4} \, \mathrm{d}t$$

Question 1.28

Évaluez les intégrales définies suivantes :

a)
$$\int_0^5 3e^{x/5} \, \mathrm{d}x$$

b)
$$\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^4 dt$$

b)
$$\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^4 dt$$
 c) $\int_1^{10} (1 + 2t)^{-4} dt$

$$\mathbf{d}) \quad \int_0^2 \frac{1}{1+4t} \, \mathrm{d}t$$

e)
$$\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx$$

$$\mathbf{f}) \quad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{g}$$
) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^{2})} dx$

$$\mathbf{h}) \quad \int_1^e x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int_0^2 \frac{1}{1+4t} \, dt \qquad \qquad \mathbf{e}) \quad \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 \, dx \qquad \qquad \mathbf{f}) \quad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\mathbf{g}) \quad \int_1^e \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)} \, dx \qquad \qquad \mathbf{h}) \quad \int_1^e x^2 \ln(x) \, dx \qquad \qquad \mathbf{i}) \quad \int_1^2 \frac{4x^2-14x+10}{2x^2-7x+3} \, dx$$

1.8. Exercices 97

Question 1.29 🔑 🏝

Évaluez les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_0^{\pi} \left(2\sin(\theta) + 3\cos(\theta)\right)$$

b)
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x) \cos^3(x) dx$$

c)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

d)
$$\int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \sec^4(x) dx$$

e)
$$\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} \, \mathrm{d}x$$

Question 1.30

Évaluez les intégrales définies suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3 \sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{b}) \quad \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} \, \mathrm{d}t$$

Question 1.31

Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a)
$$\int_{-2}^{2} (y^4 + 5y^3) dy$$
 b) $\int_{-a}^{a} x \sqrt{x^2 + a^2} dx$

$$\mathbf{b}) \quad \int_{-a}^{a} x \sqrt{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x$$

Question 1.32 🔑 🏝

Évaluez les intégrales définies suivantes en fessant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x^2 - 20 \sin(x) \right) dx$$
 b) $\int_{2}^{5} \cos(2\pi(x-2)) dx$ **c)** $\int_{-\pi}^{\pi} x^{16} \sin(2x) dx$

b)
$$\int_{2}^{5} \cos(2\pi(x-2)) dx$$

c)
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{16} \sin(2x) dx$$

Question 1.33 🖍 🏝

Vérifiez que $\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} f(s) ds = f(x)$ pour $f(s) = (5s+1)^{7}$ et a une constante.

Question 1.34

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$\mathbf{a}) \quad g(y) = \int_2^y t^2 \sin(t) \, \mathrm{d}t$$

a)
$$g(y) = \int_2^y t^2 \sin(t) dt$$
 b) $h(x) = \int_2^{1/x} \arctan(t) dt$

Suggestion: Utilisez le Théorème fondamental du calcul différentiel.

Question 1.35

Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Évaluez les intégrales impropres qui convergent.

98 1. Intégrale 🌲 🎤 📈

$$\mathbf{a}) \quad \int_0^\infty e^{-3x} \, \mathrm{d}x$$

b)
$$\int_0^\infty \frac{1}{(2+5x)^4} \, dx$$
 c) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

$$\mathbf{c}) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{d}) \quad \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

d)
$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$
 e) $\int_{1}^{e} \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx$ f) $\int_{-\infty}^{0} 3x^{2}e^{-x^{3}} dx$ g) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^{4}}} dx$ h) $\int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$ i) $\int_{0}^{3} \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx$

$$\mathbf{f}) \quad \int_{-\infty}^{0} 3x^2 e^{-x^3} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{g}) \quad \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{h}) \quad \int_0^\infty x \, e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

i)
$$\int_0^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{j}) \qquad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$$

k)
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+3x)^{3/2}} \, \mathrm{d}x$$

1)
$$\int_0^4 \frac{1}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x$$

m)
$$\int_0^2 \frac{1}{4 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{n}$$
) $\int_{1}^{2} \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \, \mathrm{d}x$

$$\mathbf{p}) \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} \, \mathrm{d}x$$

Question 1.36

Utilisez le test de comparaison des intégrales pour déterminer si les intégrales suivantes converge:

a)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3} + x^3} \, \mathrm{d}x$$

a)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$$
 b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$ **c)** $\int_1^\infty \frac{x}{x^2 + x^{4/3}} dx$

$$\mathbf{c}) \quad \int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + x^{4/3}} \, \mathrm{d}x$$

Question 1.37

Utilisez le test de comparaison pour déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Donnez une borne supérieure pour la valeur des intégrales impropres qui convergent.

$$\mathbf{a}) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 \, e^x} \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{b}) \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} \, \mathrm{d}x$$

c)
$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^3 + 2} \, \mathrm{d}x$$

a)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 e^x} dx$$
 b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} dx$ **c**) $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^3 + 2} dx$ **d**) $\int_1^\infty \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} dx$ **e**) $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x} dx$

e)
$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}+1}{x^4+3x} \, \mathrm{d}x$$



Applications de l'intégrale 2

Aire entre deux courbes 2.1

Pour estimer l'aire A de la région R entre les courbes y = f(x) et y = g(x) de la figure 2.1, et les droites x = a et x = b, on peut procéder comme on a fait pour estimer l'aire sous la courbe $y = e^x$ au chapitre précédent.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ k. On obtient une partition de l'intervalle [a, b] en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \ldots, k - 1.$

Pour i = 0, 1, 2, ..., k-1, on choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et on définit le rectangle

$$R_i = \{(x, y) : x_i \le x \le x_{i+1} \text{ et } g(x_i^*) \le y \le f(x_i^*) \}$$
.

L'aire d'un tel rectangle est $(f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x$.

La somme de l'aire de chaque rectangle R_i nous donne une approximation de l'aire A de la région R entre les courbes y = f(x) et y = g(x), et les droites x = a et x = b.

$$A \approx \sum_{i=0}^{k-1} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x$$
.

De plus, on remarque que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x \ .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

À la figure 2.1, f(x) > g(x) pour tout x et donc $f(x_i^*) - g(x_i^*) > 0$ est bien la hauteur du rectangle R_i . Dans le cas où $f(x_i^*) < g(x_i^*)$, comme à la figure 2.2, la hauteur du rectangle R_i est alors donnée par $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$. On obtient le résultat suivant :

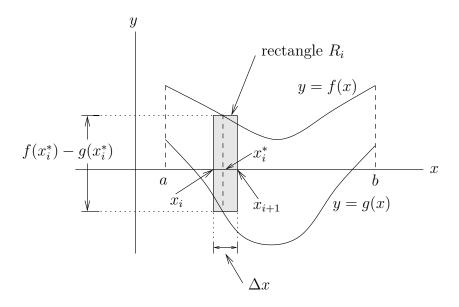


FIGURE 2.1 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann

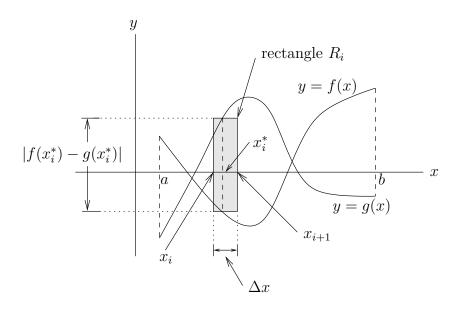


FIGURE 2.2 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes se croissent

2.1. Aire entre deux courbes

Méthode 2.1.1

L'aire A de la région R entre les courbes y = f(x) et y = g(x), et entre les droites x = a et x = b est donnée par

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \; .$$

La procédure que avons utilisée pour obtenir la formule ci-dessus peut évidemment être modifiée pour donner la formule suivante.

Méthode 2.1.2

L'aire A de la région R entre les courbes x = f(y) et x = g(y), et entre les droites y = a et y = b est donnée par

$$A = \int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y .$$

Exemple 2.1.3

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes $y = f(x) = x^2$ et $y = g(x) = 2 - x^2$, et les droites x = 0 et x = 2.

On retrouve le graphe de ces deux courbes à la figure 2.3. On remarque que f(x) < g(x) pour $0 \le x < 1$ et f(x) > g(x) pour $1 < x \le 2$. Le point (1,1) est le point d'intersection des deux courbes que l'on peut trouver en résolvant f(x) = g(x). Ainsi,

$$A = \int_0^2 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - (2 - x^2)) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2 - 2x^2) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 (2x^2 - 2) \, \mathrm{d}x$$

$$= \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right) \Big|_{x=0}^1 + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x\right) \Big|_{x=1}^2 = 4.$$

Exemple 2.1.4

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes y = f(x) = x et $y = g(x) = \sin(x)$, et les droites $x = -\pi/4$ et $x = \pi/2$.

Le dessin de la région R est donné à la figure 2.4. On remarque que f(x) > g(x) pour $0 < x \le \pi/2$ et f(x) < g(x) pour $-\pi/4 < x < 0$. Ainsi,

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\pi/4}^{0} (g(x) - f(x)) dx + \int_{0}^{\pi/2} (f(x) - g(x)) dx$$
$$= \int_{-\pi/4}^{0} (\sin(x) - x) dx + \int_{0}^{\pi/2} (x - \sin(x)) dx$$

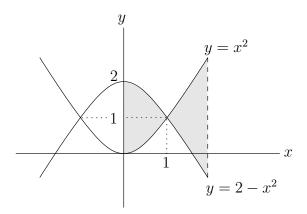


FIGURE 2.3 – Région bornée par les courbes $y=x^2$ et $y=2-x^2$, et les droites x=0 et x=2

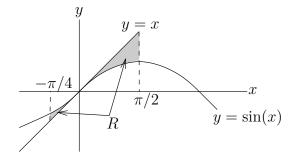


FIGURE 2.4 – Région bornée par les courbes y=x et $y=\sin(x)$ pour $-\pi/4 \le x \le \pi/2$.

$$= \left(-\cos(x) - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=-\pi/4}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x)\right)\Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{5\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2.$$

Exemple 2.1.5

Trouver l'aire A de la région R bornée par les courbes $4x+y^2=0$ et y=2x+4.

Pour trouver l'intersection de ces deux courbes, on substitue y = 2x + 4 dans $4x + y^2 = 0$. On obtient $4x + (2x + 4)^2 = 4(x + 4)(x + 1) = 0$. Donc les deux courbes se coupent aux points (-1, 2) et (-4, -4). Le dessin de la région R est donné à la figure 2.5.

On remarque que pour calculer l'aire $A = \int_{-4}^{0} |f(x) - g(x)| dx$, il faudrait utiliser f(x) = 2x + 4 et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -4 et -1, et $f(x) = 2\sqrt{-x}$ et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -1 et 0. Il est donc plus simple d'utiliser une intégrale par rapport à y pour calculer l'aire de la région R.

Si on résout $4x + y^2 = 0$ et y = 2x + 4 pour x, on obtient les fonctions $f(y) = -y^2/4$ et

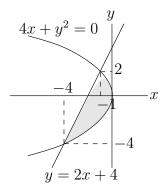


FIGURE 2.5 – Région bornée par les courbes $4x - y^2 = 0$ et y = 2x + 4.

g(y) = (y-4)/2. On a f(y) > g(y) pour -4 < y < 2. Ainsi,

$$A = \int_{-4}^{2} |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y = \int_{-4}^{2} \left(-\frac{y^2}{4} - \frac{y - 4}{2} \right) \, \mathrm{d}x = \left(-\frac{y^3}{12} - \frac{(y - 4)^2}{4} \right) \Big|_{x = -4}^{2} = 9.$$

2.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 2.2.1

La valeur moyenne d'une fonction f définie sur un intervalle [a, b] est

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Pour justifier cette définition, rappelons que la formule pour calculer la moyenne de k nombres m_1, m_2, \ldots, m_k est

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i \ .$$

Pour estimer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, il suffit de choisir un très grand nombre de points dans l'intervalle et de faire la moyenne des valeurs de la fonction évaluée à tous ces points. Plus on utilise de points, plus on est près de la valeur moyenne de la fonction.

Soit k, un entier positif. Posons $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. On obtient une partition de l'intervalle [a, b] en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, ..., k-1. On choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, 2, ..., k-1. La valeur moyenne M_f de f sur l'intervalle [a, b] est approximativement la moyenne de $f(x_0^*)$,

 $f(x_1^*), \ldots, f(x_{k-1}^*)$. On a donc

$$M_f \approx \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) .$$

Or $k = (b - a)/\Delta x$. Si on substitue dans l'expression précédente, on trouve

$$M_f \approx \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x$$
.

La somme que l'on retrouve dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Exemple 2.2.2

Quelle est la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [-1, 1]?

$$M_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{x=-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Comme pour la dérivée d'une fonction, il y a un théorème de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction

Théorème 2.2.3 (Théorème de la moyenne pour l'intégrale)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a,b], il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

C'est-à-dire que f(c) est la valeur moyenne de f sur l'intervalle [a, b].

La conclusion du théorème précédent est illustrée à la figure 2.6. Cette figure est une représentation typique de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. L'aire sous la courbe y = f(x) et au-dessus de la droite $y = M_f$ (i.e. la région en bleu) est égale à l'aire au-dessus de la courbe y = f(x) et sous la droite $y = M_f$ (i.e. la région en rouge). En effet, puisque

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b M_f \, \mathrm{d}x = M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

on obtient

$$0 = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} (f(x) - M_f) \, \mathrm{d}x \; .$$

Pour que cette intégrale soit nulle, il faut que l'aire sous la courbe $y = f(x) - M_f$ et au-dessus de l'axe des x soit égale à l'aire au-dessus de la courbe $y = f(x) - M_f$ et sous

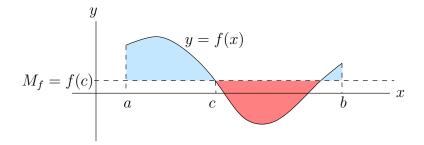


FIGURE 2.6 – Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que f(c) est la valeur moyenne de f sur l'intervalle [a, b]

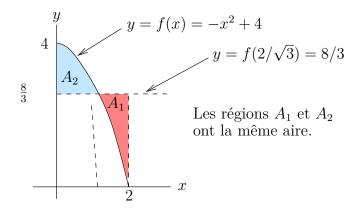


FIGURE 2.7 – Graphe de $f(x) = -x^4 + 4$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,2] est 8/3. L'aire sous la courbe y = f(x) et au-dessus de la droite y = 8/3 (en bleu) est égale à l'aire au dessus de la courbe y = f(x) et sous la droite y = 8/3 (en rouge) pour $0 \le x \le 2$.

l'axe des x. Avec une translation de M_f vers le haut, la courbe $y = f(x) - M_f$ devient le graphe de f et l'axe des x devient la droite $y = M_f$. L'énoncé au début du paragraphe est une conséquence de la propriété qu'ont les translations de préserver l'aire.

Exemple 2.2.4

Soit $f(x) = -x^2 + 4$, trouver un point c de l'intervalle [0, 2] tel que f(c) est la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0, 2].

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 (-x^2 + 4) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{8}{3}.$$

Le point c est donné par $f(c) = -c^2 + 4 = 8/3$. Si on résout pour c dans l'intervalle [0,2], on trouve $c = 2/\sqrt{3}$.

Le graphe de f ainsi que la représentation de la valeur moyenne sont donnés à la figure 2.7.

*

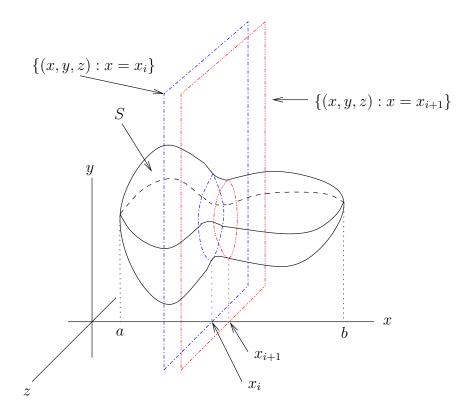


FIGURE 2.8 – La tranche du solide S pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Le volume de cette tranche est V_i .

2.3 Volume d'un objet 🖍

On peut utiliser l'intégration pour calculer le volume V d'un solide S comme celui de la figure 2.8. On suppose que le solide S est contenu entre les plans x=a et x=b.

Pour estimer le volume V du solide S, on partage le solide S en fines tranches parallèles au plan y,z et on estime le volume de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. On obtient une partition de l'intervalle [a, b] en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour i = 0, 1, ..., k-1.

La i^e tranche du solide S que l'on voit à la figure 2.8 est donnée par l'intersection du solide S avec la région définie par $\{(x, y, z) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$.

Pour estimer le volume V_i de la i^e tranche, on choisit x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On considère le cylindre S_i , que l'on peut voir à la figure 2.10, dont la hauteur est Δx et la base est la section B_i obtenue de l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S. On retrouve à la figure 2.9 un exemple possible pour la section B_i du cylindre S_i ; notez que B_i n'est pas toujours un disque comme on a dans la figure. Les côtés du cylindre S_i sont parallèles à l'axe des x.

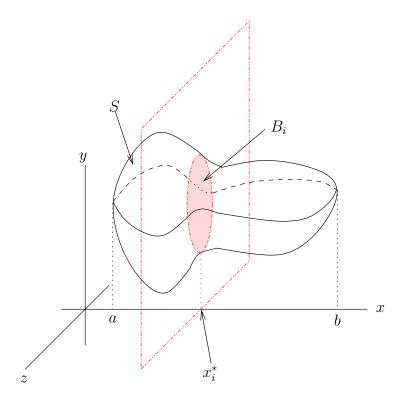


FIGURE 2.9 – La section B_i est engendrée par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S. L'aire de la section est $A(x_i^*)$.

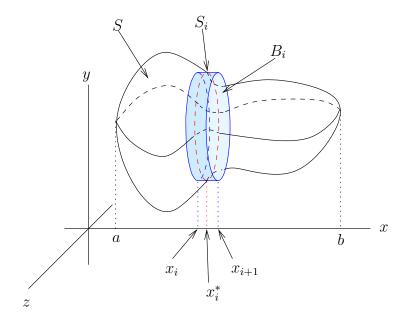


FIGURE 2.10 – S_i est approximativement une tranche du solide S. L'épaisseur de S_i est Δx et l'aire de sa section transversale est $A(x_i^*)$

Le volume du cylindre S_i est $A(x_i^*)\Delta x$ où $A(x_i^*)$ est l'aire de la section B_i . Pour Δx petit, le volume V_i de la i^e tranche de S est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx A(x_i^*)\Delta x$$

pour Δx petit. La somme du volume de chaque cylindre S_i donne un estimé du volume V de S.

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} A(x_i^*) \Delta x$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S. À la limite, on obtient le volume V de S.

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{a}^{b} A(x) \, \mathrm{d}x$$

où A(s) est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan x=s avec le solide S. Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.3.1

Le volume V d'un solide S comme celui de la figure 2.9 est donnée par

$$V = \int_a^b A(x) \, \mathrm{d}x \tag{2.3.1}$$

où A(s) est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan x=s avec le solide S.

Exemple 2.3.2

Trouver le volume V du tronc de pyramide S représenté à la figure 2.11 dont la base est un carré qui possède des côtés de longueur a et le sommet est aussi un carré mais qui possède des côtés de longueur b. La hauteur du tronc de pyramide est b.

Selon la façon dont on tranche S, on obtient des sections de niveaux de complexité différents. La façon de trancher S qui donne les sections les plus simples est de trancher horizontalement. Les sections sont alors des carrés.

Pour utiliser la formule (2.3.1), il faut trouver une formule pour l'aire A(x) des sections obtenues par l'intersection de S avec le plan x constant. Comme on peut le voir a partir du dessin d'une coupe verticale de S que l'on retrouve à la figure 2.11, la longueur y d'un côté d'une section varie linéairement en fonction de x, On a y = a pour x = 0 et y = b pour x = h. La droite qui passe par ces deux points est de pente m = (b-a)/(h-0) = (b-a)/h. Ainsi, son équation est

$$y = \frac{b-a}{h}x + a$$

Section donnée par x constant

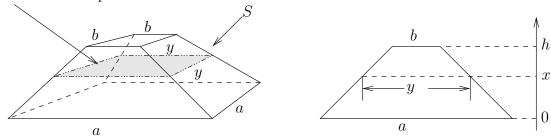


FIGURE 2.11 – Le tronc d'une pyramide et une section perpendiculaire de ce tronc de pyramide.

 $\operatorname{car} y = a \operatorname{lorsque} x = 0.$ On obtient

$$A(x) = \left(\frac{b-a}{h}x + a\right)^2.$$

Le volume V de S est donc

$$V = \int_0^h \left(\frac{b-a}{h} x + a \right)^2 dx = \frac{h}{3(b-a)} \left(\frac{b-a}{h} x + a \right)^3 \Big|_{x=0}^h$$
$$= \frac{h}{3(b-a)} \left(b^3 - a^3 \right) = \frac{h}{3} \left(b^2 + ab + a^2 \right)$$

où nous avons utilisé la substitution y = (b - a)x/h + a pour évaluer l'intégrale.

Exemple 2.3.3

Trouver le volume V du solide S dont la base est la région du plan x,y bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés. On retrouve une représentation de ces sections à la figure 2.12.

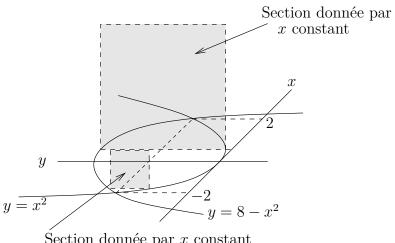
Puisque les deux courbes se coupent à x=-2 et x=2 (il faut résoudre $x^2=8-x^2$), la base du solide est la région entre les courbes $y=x^2$ et $y=8-x^2$ pour $-2 \le x \le 2$.

La section pour x constant est un carré dont la longueur des côtés est $(8-x^2)-x^2=8-2x^2$. L'aire de cette section est donc $A(x)=(8-2x^2)^2$. Le volume du solide est

$$V = \int_{-2}^{2} A(x) dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^{2})^{2} dx = \int_{-2}^{2} (64 - 32x^{2} + 4x^{4}) dx$$
$$= \left(64x - \frac{32}{3}x^{3} + \frac{4}{5}x^{5} \right) \Big|_{x=-2}^{2} = \frac{2^{11}}{15}.$$

2.3.1 Solides de révolution

On peut utiliser (2.3.1) pour trouver le volume d'un solide obtenu par la rotation d'une région plane autour d'un axe.



Section donnée par x constant

FIGURE 2.12 – Solide dont la base est bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

Supposons que la région R soit la région bornée par les courbes y = f(x) et y = g(x), et les droites x = a et x = b. Un exemple typique de région R est donné à la figure 2.13.

Si on fait la rotation de la région R autour de l'axe y=c (et z=0) qui ne coupe pas la région R, on obtient un solide S semblable à celui illustré à la figure 2.14.

Pour calculer le volume V du solide S, on doit trouver une formule pour l'aire A(x) des sections perpendiculaires à l'axe des x. Si on fait la projection dans le plan y,z d'une section, on trouve un anneau centré au point (c,0) dont le petit rayon est |f(x)-c| et le grand rayon par |q(x)-c|. On retrouve un tel anneau à la figure 2.15

Puisque l'aire d'un disque de rayon r est donnée par πr^2 , l'aire A(x) de notre anneau est l'aire du disque de rayon |q(x)-c| moins l'aire du disque de rayon |f(x)-c|. Ainsi

$$A(x) = \pi (g(x) - c)^{2} - \pi (f(x) - c)^{2}.$$

On obtient donc la formule suivante pour calculer le volume du solide S.

Méthode 2.3.4

Soit R une région bornée par les courbes y = f(x) et y = g(x), et les droites x = aet x = b. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe y=c qui ne coupe pas la région R. Le volume V du solide S est

$$V = \pi \int_{a}^{b} \left| (g(x) - c)^{2} - (f(x) - c)^{2} \right| dx.$$
 (2.3.2)

Exemple 2.3.5

Quelle est le volume V du solide S obtenu par la rotation autour de l'axe y = -1 de la région bornée par les courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$?

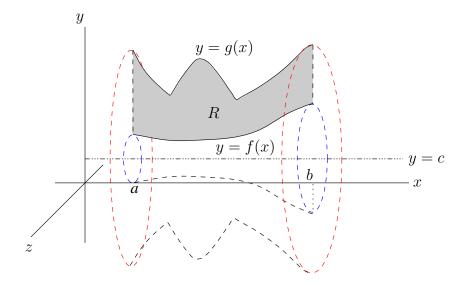


FIGURE 2.13 – La rotation de la région R autour de l'axe y=c (et z=0) donne une solide dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont les anneaux que l'on retrouve à la figure 2.15

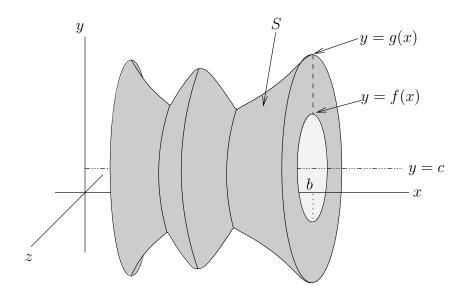


FIGURE 2.14 – Le solide S qui résulte de la rotation de la région R de la figure 2.13 autour de l'axe y=c

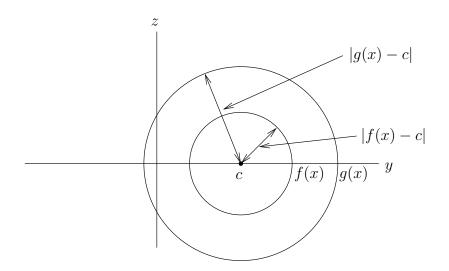


FIGURE 2.15 – Une section du solide S de la figure 2.14 obtenue par l'intersection du solide S avec un plan où x est constant. Les sections sont donc perpendiculaires à l'axe des x

On retrouve à la figure 2.16 le graphe des deux courbes $y=x^2+1$ et $y=3-x^2$, et la région R qui est bornée par ces deux courbes. Pour déterminer les points d'intersections de ces deux courbes, il faut résoudre l'équation $3-x^2=1+x^2$ pour trouver les valeurs de x où la valeur de y est la même sur les deux courbes. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $2x^2-2=2(x^2-1)=0$. On trouve $x=\pm 1$. Pour x=-1, on a le point d'intersection (-1,2) et pour x=1 on a le point d'intersection (1,2).

On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (2.3.2). On a

$$V = \pi \int_{-1}^{1} ((3 - x^2) - (-1))^2 - ((x^2 + 1) - (-1))^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (4 - x^2)^2 - (x^2 + 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (-12x^2 + 12) dx$$
$$= \pi \left(-4x^3 + 12x \right) \Big|_{x=-1}^{1} = 16\pi.$$

Exemple 2.3.6

Trouvez le volume V de chacun des solides S suivant.

- a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = x^2 3x + 2$ et l'axe des x.
- b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = \sin(x)$ pour $0 \le x \le \pi$ et l'axe des x.
- c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $x=2y-y^2$ et l'axe des y.

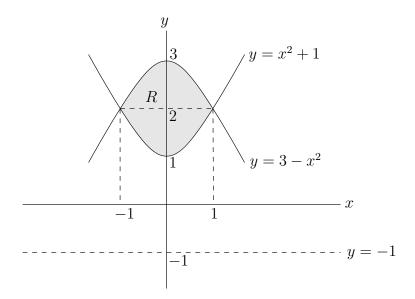


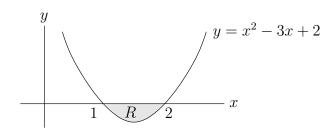
FIGURE 2.16 – La rotation autour de l'axe x=-1 de la région bornée par les deux courbes $y=x^2+1$ et $y=3-x^2$ va produire un solide S dans l'espace qui ressemblera à un bagel.

d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe y = 7 de la région bornée par la courbe $y = (x - 4)^2 + 1$ et la droite y = x - 1.

e) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe y=-1 de la région bornée par la courbe $y=\cos(x)$ pour $0 \le x \le \pi/2$, et les droites x=0 et y=0.

Il est toujours préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

a) On doit premièrement trouver l'intersection de la parabole $y=x^2-3x+2$ avec l'axe des x; c'est-à-dire, les racines de ce polynôme. Puisque $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, les racines sont 1 et 2. La figure suivante présente le dessin de la région R bornée par $y=x^2-3x+2$ et l'axe des x.

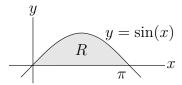


On peut calculer le volume V du solide de révolution S à l'aide de la formule (2.3.2). On a

$$V = \pi \int_{1}^{2} (x^{2} - 3x + 2)^{2} dx = \pi \int_{1}^{2} (x^{4} - 6x^{3} + 13x^{2} - 12x + 4) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{\pi}{30} .$$

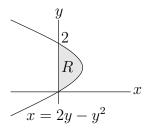
b) On donne ci-dessous le dessin de la région R bornée par $y = \sin(x)$ pour $0 \le x \le \pi$ et l'axe des x.



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} .$$

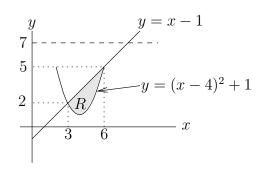
c) On donne ci-dessous le dessin de la région R bornée par $x = y^2 - 2y$ et l'axe des y.



On peut évidemment écrire une formule identique à (2.3.2) où x est remplacé par y. Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 (y^4 - 4y^3 + 4y^2) dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} - y^4 + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

d) Pour obtenir l'intersection de la parabole $y=(x-4)^2+1$ et de la droite y=x-1, on pose $x-1=(x-4)^2+1$. Ce qui donne $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)=0$. On obtient les deux points d'intersection (3,2) et (6,5). Le dessin suivant représente la région R bornée par la parabole $y=(x-4)^2+1$ et la droite y=x-1.



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_{3}^{6} \left(((x-4)^{2} + 1 - 7)^{2} - (x-1-7)^{2} \right) dx$$
$$= \pi \int_{3}^{6} \left(x^{4} - 16x^{3} + 83x^{2} - 144x + 36 \right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{x^{5}}{5} - 4x^{4} + \frac{83x^{3}}{3} - 72x^{2} + 36x \right) \Big|_{3}^{6} = 39.6\pi.$$

e) Le dessin suivant représente la région R bornée par la courbe $y = \cos(x)$ pour $0 \le x \le \pi/2$, l'axe des x et l'axe des y.

$$\begin{array}{c|c}
y \\
1 & y = \cos(x) \\
\hline
 & \pi/2 & x \\
-1 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left((\cos(x) + 1)^2 - (0 + 1)^2 \right) dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(x) + 2\cos(x) \right) dx$$
$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) + 2\cos(x) \right) dx$$
$$= \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) + 4\sin(x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 4 \right) .$$

Quelle sera le volume V du solide S, que l'on peut voir à la figure 2.17, obtenu par la rotation de la région R présentée à la figure 2.13 autour d'un axe x=c qui ne coupe pas R? Il est généralement inconcevable d'utiliser les sections provenant de l'intersection du solide S avec les plans perpendiculaires à l'axe des y (i.e. les plans où y est constant) car il est fort possible que ces sections soient formées de plusieurs anneaux.

On doit donc retourner à la définition de l'intégrale pour développer une formule qui nous permettra de calculer le volume du solide S dans le cas présent.

Pour estimer le volume V du solide S, on partage le solide S en mince tubes dont l'axe est l'axe x=c autour de laquelle la région R fait une rotation. On estime le volume de chacun des tubes. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. On obtient une partition de l'intervalle [a, b] en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Soit R_i , la région donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x,y): x_i \le x \le x_{i+1}\}$. Le i^e tube (voir la figure 2.18) qui compose le solide S est obtenue par la rotation de la région R_i autour de l'axe x = c.

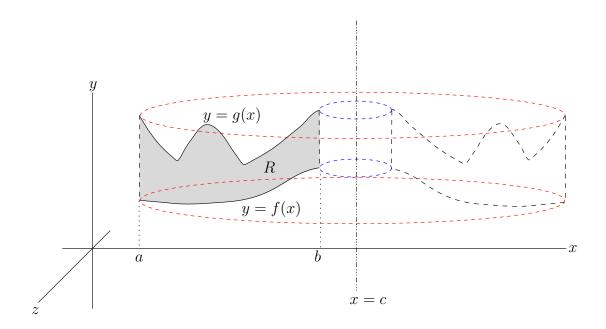


FIGURE 2.17 – La rotation de la région R autour de l'axe x=c (et z=0) donne un solide S.

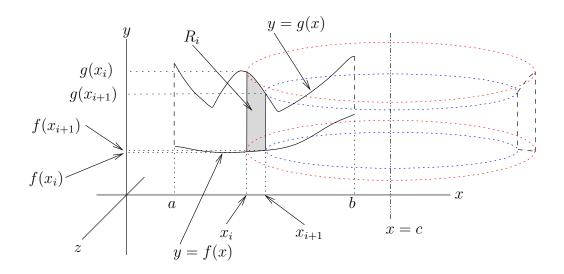


FIGURE 2.18 – la région R_i donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x,y): x_i \leq x \leq x_{i+1}\}.$

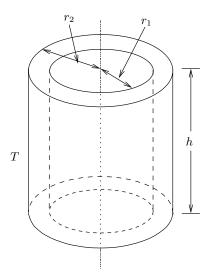


FIGURE 2.19 – Le volume de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2

Pour estimer le volume du i^e tube, nous aurons besoin de la formule pour calculer l'aire d'un tube T comme celui de la figure 2.19. Le volume V_T de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2 . Ainsi

$$V_T = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) (r_2 - r_1) . \tag{2.3.3}$$

Pour estimer le volume V_i du i^e tube, on applique la formule (2.3.3) au tube S_i que l'on retrouve à la figure 2.20. La valeur du rayon r_1 et celle du rayon r_2 dans la formule (2.3.3) sont $r_1 = c - x_{i+1}$ et $r_2 = c - x_i$. On a alors que

$$r_2 - r_1 = x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

et

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(c - x_{i-1}) + (c - x_i)}{2} = c - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

où $(x_{i-1}+x_i)/2$ est le point milieu de l'intervalle $[x_i,x_{i+1}]$. Si on pose

$$x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

 et

$$h = |f(x_i^*) - g(x_i^*)|,$$

alors le volume de S_i est

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} (r_2 - r_1)h = 2\pi (c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x$$

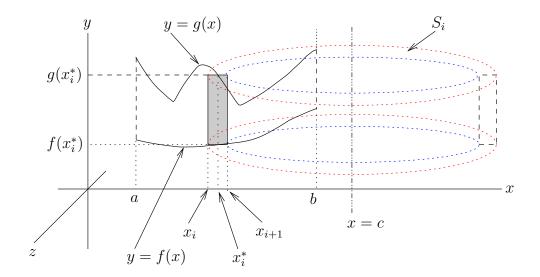


FIGURE 2.20 – Un tube S_i d'épaisseur Δx et de hauteur $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$.

Pour Δx petit (i.e. pour des grandes valeurs de k), le volume V_i du i^e tube produit par la rotation de la région R_i autour de l'axe x = c est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx 2\pi \left(c - x_i^*\right) |f(x_i^*) - g(x_i^*)| \Delta x$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ et Δx petit.

La somme du volume de chaque tube S_i donne un estimé du volume V de S.

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} 2\pi (c - x_i^*) |f(x_i^*) - g(x_i^*)| \Delta x.$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S. À la limite, on obtient le volume V de S.

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_{a}^{b} (c-x)|f(x) - g(x)| dx. \qquad (2.3.4)$$

Un raisonnement identique à celui qui a été utilisé pour développer (2.3.4) donne

$$2\pi \int_a^b (x-c)|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

lorsque l'axe de rotation x = c est à la gauche de la région R.

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.3.7

Soit R une région bornée par les courbes y = f(x) et y = g(x), et les droites x = a et x = b. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe x = c qui ne coupe pas la région R. Le volume V du solide S est

$$V = 2\pi \int_{a}^{b} |c - x| |f(x) - g(x)| dx.$$
 (2.3.5)

Exemple 2.3.8

Quelle est le volume V du solide S obtenu de la rotation autour de l'axe x=2 de la région R donnée à l'exemple 2.3.5 et à la figure 2.16.

On peut utiliser la formule (2.3.5) pour calculer le volume V de S. On a

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x) \left((3 - x^2) - (x^2 + 1) \right) dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x) (2 - 2x^2) dx = 2\pi \int_{-1}^{1} (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx$$
$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{x=-1}^{1} = \frac{32\pi}{3}.$$

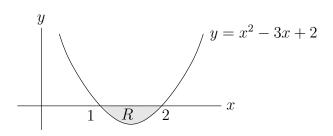
Exemple 2.3.9

Trouver le volume V de chacun des solides S suivant.

- a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $y = x^2 3x + 2$ et l'axe des x.
- b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe x=1 de la région bornée par la courbe $y=x^2$ et les droites y=0, x=1 et x=2.
- c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe x=1 de la région bornée par la courbe $y=e^x$ et les droites y=e et x=0.
- d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe x=-2 de la région bornée par les courbes $y=4x-x^2$ et $y=8x-2x^2$.

Au risque de ce répéter, il est préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

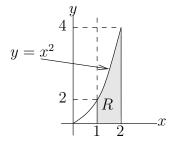
a) On a vue à l'exemple 2.3.6 que la région R bornée par $y=x^2-3x+2$ et l'axe des x est la région que l'on retrouve dans la figure ci-dessous



On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (2.3.5). On a

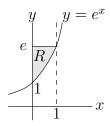
$$V = 2\pi \int_{1}^{2} x \left(0 - \left(x^{2} - 3x + 2 \right) \right) dx = 2\pi \int_{1}^{2} \left(-x^{3} + 3x^{2} - 2x \right) dx$$
$$= 2\pi \left(-\frac{x^{4}}{4} + x^{3} - x^{2} \right) \Big|_{x=1}^{2} = \frac{\pi}{2}.$$

b) On retrouve dans la figure suivante le dessin de la région R qui est bornée par la courbe $y=x^2$, les droites x=1 et x=2, et l'axe des x.



$$V = 2\pi \int_{1}^{2} (x-1)(x^{2}-0) dx = 2\pi \int_{1}^{2} \left(x^{3}-x^{2}\right) dx = 2\pi \left(\frac{x^{4}}{4} - \frac{x^{3}}{3}\right) \Big|_{1}^{2} = \frac{17\pi}{6}.$$

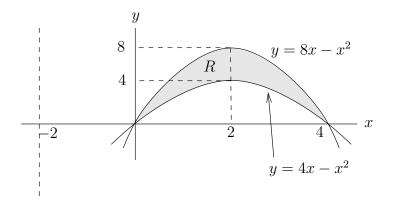
c) La figure suivante contient le dessin de la région R qui est bornée par la courbe $y=e^x$, la droite y=e et l'axe des y.



La formule (2.3.5) pour le volume d'un solide de révolution donne

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - x)(e - e^x) dx = 2\pi \int_0^1 (e - e^x - e^x + xe^x) dx$$
$$= 2\pi \left(e^x - \frac{e}{2}x^2 - e^x + xe^x - e^x \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(2 - \frac{e}{2} \right).$$

d) On retrouve dans la figure suivante le graphe des courbes $y = 4x - x^2$ et $y = 8x - 2x^2$, et la région R qui est bornée par ces deux courbes.



Pour déterminer les points d'intersections de ces deux courbes, il faut résoudre l'équation $4x - x^2 = 8x - 2x^2$ pour trouver les valeurs de x où la valeur de y est la même sur les deux courbes. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$. Les solutions sont x = 0 et x = 4. Pour x = 0, on a le point d'intersection (0,0) et pour x = 4 on a le point d'intersection (2,0). Les deux graphes se coupent sur l'axe des x.

On peut calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (2.3.5). On a

$$V = 2\pi \int_0^4 (x+2) \left(\left(8x - 2x^2 \right) - \left(4x - x^2 \right) \right) dx = 2\pi \int_0^4 (x+2) \left(4x - x^2 \right) dx$$
$$= 2\pi \int_0^4 \left(-x^3 + 2x^2 + 8x \right) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right) \Big|_{x=0}^4 = \frac{4^4\pi}{3}.$$

2.4 Masse d'un objet 🖍

Comme à la section précédente pour le calcul du volume d'un solide, on peut utiliser l'intégration pour calculer le masse M d'un solide S comme celui de la figure 2.9.

On suppose que la densité du solide varie de façon continue en fonction de x seulement. C'est très proche de la réalité lorsque le solide S est un tube de petit diamètre. Soit $\rho(s)$ la densité du solide pour la section où x=s.

Pour estimer la masse M du solide S, on partage le solide S en fines tranches parallèles au plan y,z et on estime la masse de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation de la masse de S.

On utilise les tranches (voir la figure 2.8), les sections (voir la figure 2.9) et les cylindres (voir la figure 2.10) qui ont été définies à la section précédente. On peut assumer que la densité de la i^e tranche est approximativement constant à $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire que $\rho(x) = \rho(x_i^*)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Si Δx est très petit, il est raisonnable de supposer que la densité $\rho(x)$ ne changera presque pas pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Comme la masse d'un objet de densité constante est le produit de sa densité par son volume, la masse M_i de la i^e tranche est approximativement la masse du solide S_i pour

lequel on assume que la densité est $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire

$$M_i \approx \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x$$

où A(s) est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan x = s avec le solide S. La somme de la masse de chaque solide S_i donne une estimation de la masse M de S.

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x .$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près de la masse M du solide S. À la limite, on obtient la masse M de S.

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b \rho(x) A(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.4.1

Soit S est solide dont la densité varie seulement dans une direction. On peut supposer que cet direction est donnée par l'axe des x et que $\rho(x)$ est la densité de la section x=s engendrée par l'intersection du plan x=s avec le solide S. Si A(s) est l'aire de cette section, alors le masse du solide S est

$$M = \int_a^b \rho(x)A(x) dx. \qquad (2.4.1)$$

2.5 Travail

La force exercée sur un objet qui se déplace en ligne droite est donnée par le produit de sa masse par son accélération. Ainsi, si m est la masse en kilogrammes de l'objet et x(t) est sa position en mètres au temps t en secondes, l'accélération de l'objet en m/s^2 est

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$$

et la force en Newtons exercée sur l'objet au temps t est

$$F(t) = m \ a(t) = m \ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) \ .$$

L'abréviation pour un Newton est la lettre N. Ainsi, $N = kg m/s^2$.

Le travail en joules fait pour déplacer un objet en ligne droite sur une distance d, lorsque la force F exercée est constante durant tout le déplacement, est donnée par

$$W = F d. (2.5.1)$$

L'abréviation pour un joule est la lettre J. Ainsi, J = N m.

Avec ces deux résultats de physique, on est en mesure de répondre aux questions suivantes.

2.5. Travail 🔑 123

2.5.1 Travail pour déplacer un objet

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force qui varie avec la distance parcourue. Si cette force est de F(x) N lorsque l'objet est à x m de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de L m à partir de l'origine; son point de départ?

Si la force était constante, la formule (2.5.1) résoudrait le problème. Malheureusement, ce n'est pas le cas présentement.

Divisons l'intervalle [0, L] en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = L/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = i \, \Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Si le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est très court, on peut supposer que la force F est presque constante sur cet intervalle et est égale à $F(x_i^*)$ où $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$. Le travail pour déplacer l'objet de x_i à x_{i+1} est donc $F(x_i^*)$ Δx grâce à la formule (2.5.1).

Ainsi, le travail pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donc approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} F(x_i^*) \, \Delta x \; ;$$

la somme du travail fait pour déplacer l'objet sur chacun des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^L F(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Donc, si k tend vers l'infini, on trouve que le travail pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donnée par

$$W = \int_0^L F(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Méthode 2.5.1

Le travail nécessaire pour déplacer un objet d'un point x=a à un point x=b (en ligne droite) est donné par l'intégrale

$$W = \int_a^b F(x) \, \mathrm{d}x \;,$$

où F(x) est la force exercée sur l'objet lorsqu'il occupe la position x.

Exemple 2.5.2

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force. Si cette force est de $F(x) = 5x^2 + 3x + 1$ N lorsque l'objet est à x mètres de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de 6 mètres à partir de l'origine.

Le travail est donnée par

$$W = \int_0^6 \left(5x^2 + 3x + 1 \right) dx = \left(\frac{5}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + x \right) \Big|_{x=0}^6 = 420 \text{ J}.$$

å

Exemple 2.5.3

On veut lever un bloc de glace de 100 kg à partir du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Le bloc de glace font à une vitesse de 4 kg/min et la vitesse à laquelle on peut lever le bloc est de 1.5 m/min. Si la masse de la corde est de 0.5 kg/m, déterminer le travail nécessaire pour lever le bloc à la hauteur désirée. Le problème est illustré à la figure 2.21.

Commençons par éliminer le temps dans l'énoncé du problème. Le bloc de glace font à une vitesse de 4 kg/min et en une minute le bloc monte de 1.5 mètres. Donc, la masse du bloc diminue de 4 kg par 1.5 mètres; c'est-à-dire de 8/3 kg/m.

Divisons l'intervalle [0, 50] en k sous-intervalles de longueur $\Delta y = 50/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[y_i, y_{i+1}]$ où $y_i = i \Delta y$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. On choisit $y_i^* \in [y_i, y_{i+1}]$ pour tout i.

Si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, on peut assumer que le bloc de glace n'a pas le temps de fondre entre y_i et y_{i+1} mètres et donc que sa masse est constante et égale à $(100 - (8/3)y_i^*)$ kg car le bloc font à 8/3 kg/m. Le travail pour lever le bloc de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8\left(100 - \frac{8}{3}y_i^*\right)\Delta y$$
.

De même, si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, on peut assumer que la corde que l'on doit lever entre y_i et y_{i+1} est de longueur constante égale à $(50 - y_i^*)$ mètres. La masse de cette portion de la corde est de $0.5 (50 - y_i^*)$ kg. Le travail pour lever cette portion de la corde de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8(0.5(50-y_i^*))\Delta y$$
.

Donc, le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde de y_i à y_{i+1} mètres est approximativement

$$9.8 \left(100 - \frac{8}{3}y_i^*\right) \Delta y + 9.8 \left(0.5 \left(50 - y_i^*\right)\right) \Delta y = 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y_i^*\right) \Delta y.$$

Ainsi, le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6} y_i^* \right) \Delta y$$
.

Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6} y \right) \, \mathrm{d}y \ .$$

Donc, si k tend vers l'infini, on trouve que le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est donnée par

$$W = \int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6} y \right) \, \mathrm{d}y \ .$$

2.5. Travail 🔑 125

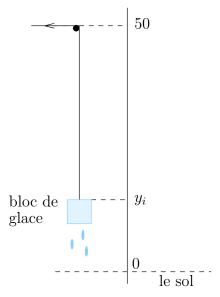


FIGURE 2.21 – Travail pour lever à la vitesse de 1.5 m/min un bloc de glace qui font à une vitesse de 4 kg/min. On veut lever le bloc jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Il faut aussi tenir compte dans ce problème de la masse de la corde qui est de 0.5 kg/m.

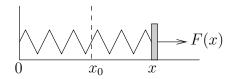


FIGURE 2.22 – Lois de Hooke pour les ressorts

On trouve donc

$$W = 9.8 \left(125y - \frac{19}{12} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{50} = 22,458.\overline{3} \text{ J}.$$

Une autre situation où l'on peut avoir à calculer le travail pour déplacer une objet est lorsque cet objet est attaché à un ressort.

On considère un mécanisme comme à la Figure 2.22 où l'on ignore toute friction et où la gravité peut être négligée. La **lois de Hooke** pour les ressorts dit que la force F(x) nécessaire pour maintenir un ressort à un longueur de x m est $F(x) = k(x - x_0)$, où x_0 est la longueur du ressort au repos et k est une constante positive. Si $x > x_0$, la force est dans la direction positive alors que, si $x < x_0$, la force est dans la direction négative.

Exemple 2.5.4

Une force de 20 N est nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de 10 m. Si la longueur au repos du ressort est 5 m, calculer le travail nécessaire pour étirer le ressort de

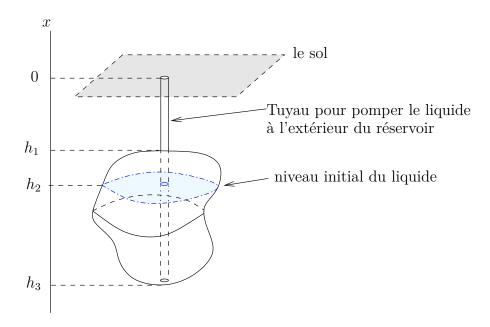


FIGURE 2.23 – Un réservoir de forme quelconque est enfoui à h_1 mètres sous le sol.

15 à 20 m.

Si F(x) = k(x-5) est la force nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de x m, on obtient de F(10) = 20 = 5k. Donc k = 4. Le travail nécessaire pour étirer le ressort de 15 à 20 m est

$$W = \int_{15}^{20} 4(x-5) \, \mathrm{d}x = 2(x-5)^2 \Big|_{15}^{20} = 2(15^2 - 10^2) = 250 \, \mathrm{J} \, .$$

2.5.2 Travail pour vider un réservoir

Un réservoir rempli d'un liquide non-visqueux est enfoui h_1 m sous le sol. Ce réservoir est représenté à la figure 2.23. Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial du liquide est à h_2 m sous le sol? Pour les besoins de la discussion, la distance positive est vers le haut et 0 est le niveau du sol. Tout autre choix serait acceptable et conduirait à des formules équivalents.

Pour obtenir une formule qui nous permettra de trouver le travail fait pour vider le réservoir, on divise l'intervalle $h_3 \le x \le h_2$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$. Chaque sous-intervalle est de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

On peut utiliser (2.5.1) pour estimer le travail fait pour retirer du réservoir la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} . Cette mince couche de liquide est représentée à la figure 2.24.

2.5. Travail 🔑 127

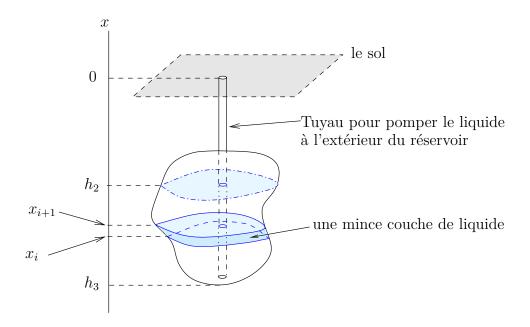


FIGURE 2.24 – Une mince couche de liquide pour x entre x_i et x_{i+1}

Soit x_i^* un point de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si Δx est très petit, on peut estimer le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} qui est représentée à la figure 2.24 est le volume du solide V_i que l'on retrouve à la figure 2.25. V_i est un solide borné par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et dont la paroi verticale est définie par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir. Les sections horizontales de V_i sont alors identiques à la section produite par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir.

Le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} est donc approximativement le volume du solide V_i ; c'est-à-dire,

$$A(x_i^*)\Delta x \tag{2.5.2}$$

où $A(x_i^*)$ est l'air de la section produite par l'intersection du plan $x=x_i^*$ avec le réservoir.

En supposant que la densité $\rho(x)$ du liquide à x m sous le sol ne varie presque pas pour x entre x_i et x_{i+1} , on peut assumer que la densité du liquide dans la mince couche est constante et égale à $\rho(x_i^*)$. Ainsi la masse de la mince couche entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$.

La force nécessaire pour déplacer la mince couche de liquide est approximativement

$$-9.8\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$$

où $9.8~\rm m/s^2$ est l'accélération terrestre. Un utilise le signe négatif car la direction positive est vers le haut, dans la direction opposée à l'attraction terrestre.

Grâce au résultat (2.5.1), le travail fait pour déplacer la mince couche de liquide jusqu'au niveau du sol (donc pour retirer cette couche de liquide du réservoir) est approximativement $-9.8(0-x_i^*)\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$.

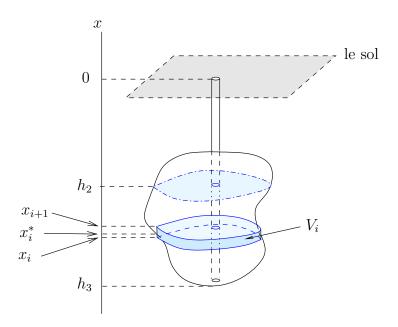


FIGURE 2.25 – Le volume de la mince couche de liquide de la figure 2.24 peut être estimé par le volume du solide V_i bornée par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et une paroi verticale.

Si on fait cela pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on trouve que le travail W fait pour vider le réservoir est approximativement

$$W \approx -9.8 \sum_{i=0}^{k-1} x_i^* \rho(x_i^*) A(x_i^*) \Delta x$$
.

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$-9.8 \int_{h_2}^{h_2} x \rho(x) A(x) dx$$
.

Donc, si k tend vers plus l'infini, on trouve que le travail fait pour vider le réservoir est

$$W = -9.8 \int_{h_3}^{h_2} x \rho(x) A(x) \, dx . \qquad (2.5.3)$$

Remarque 2.5.5

Lors de la discussion précédente, on a assumé que la densité du liquide variait seulement en fonction de la profondeur. Cette hypothèse est réaliste. Le lecteur a certainement déjà remarqué la séparation qui se produit dans les vinaigrettes à salade où l'eau, le vinaigre et l'huile se partage en couches biens distinctes.

De plus, on suppose qu'il y a une prisse d'aire, non-inclusse avec le dessin du réservoir à la figure 2.23, pour permettre à l'aire d'occuper l'espace libérée par le liquide qui s'échappe du réservoir par le tuyau. Autrement, le réservoir se déformerait suite au retrait du liquide.

2.5. Travail 🔑 129

Finalement, le liquide est aspiré près du font du réservoir. On pourrait croire que le calcul du travail fait pour retirer la mince couche de liquide à la profondeur x_i^* devrait être fait sur une distance plus grande que x_i^* . Ce n'est pas le cas. La pression dû à l'attraction terrestre maintient à égalité le niveau du liquide dans le réservoir et dans le tuyau. Le niveau du liquide est la profondeur de la mince couche de liquide qui est retirée du réservoir à ce moment. Aucun travail n'est fait par la pompe pour amener le liquide dans le tuyau au niveau du liquide dans le réservoir.

Exemple 2.5.6

Un réservoir d'eau de forme sphérique est représenté à la figure 2.26. Ce réservoir est enfoui à 3 m sous le sol. Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial de l'eau est au trois quarts du réservoir. La densité de l'eau est constante et égale à 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (2.5.3), on a que $h_3 = -7$, $h_2 = -4$ et $\rho(x) \equiv 1000$. Il ne manque que A(x) qui, dans le cas présent, représente l'aire d'une section où x est constant. Comme on peut le voir à la figure 2.26, cette section est un cercle de rayon $r(x) = \sqrt{2^2 - (-5 - x)^2}$. Ainsi,

$$A(x) = \pi r^{2}(x) = \pi (2^{2} - (-5 - x)^{2}) = \pi (-21 - 10x - x^{2}).$$

Le travail fait pour vider le réservoir est

$$W = -9,800\pi \int_{-7}^{-4} x(-21 - 10x - x^2) dx = -9,800\pi \left(-\frac{21}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_{x=-7}^{-4}$$
$$= \pi (4.6305 \times 10^5) \text{ J}.$$

Exemple 2.5.7

Un réservoir en forme de cône inversé est enfoui à 2 m sous le sol. La base du cône à un rayon de 3 m et le cône à une hauteur de 5 m (voir figure 2.27). Si le cône est rempli d'eau dont la densité est de 1000 kg/m^3 , déterminer le travail nécessaire pour vider ce réservoir.

Dans la formule (2.5.3), on a $h_2 = -2$, $h_3 = -7$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x. L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s². Les sections horizontales sont des cercles de rayon $r = \frac{3}{5}(7+x)$. Donc, $A(x) = \frac{9\pi}{25}(7+x)^2$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$W = -\int_{-7}^{-2} 9,800 \left(\frac{9\pi}{25}\right) x (7+x)^2 dx$$

$$= -9,800 \left(\frac{9\pi}{25}\right) \int_{-7}^{-2} \left(x^3 + 14x^2 + 49x\right) dx$$

$$= -9,800 \left(\frac{9\pi}{25}\right) \left(\frac{x^4}{4} + \frac{14x^3}{3} + \frac{49x^2}{2}\right) \Big|_{-7}^{-2} = \pi (4.7775 \times 10^5) \text{ J}.$$

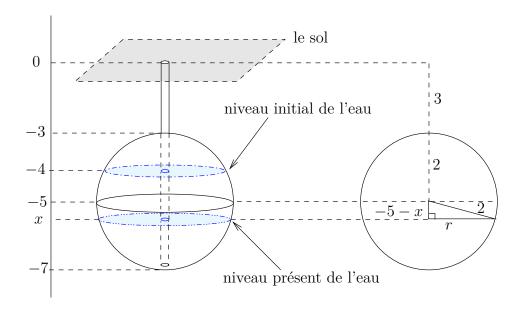


FIGURE 2.26 – Un réservoir sphérique de 2 mètres de rayon enfoui à 3 mètres sous le sol.

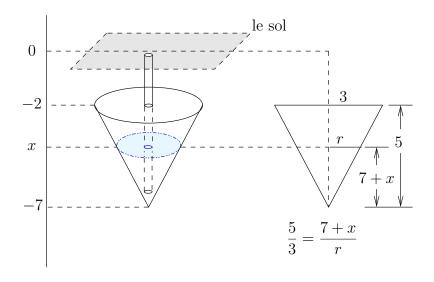


FIGURE 2.27 – Un réservoir conique dont la base à 3 mètres de rayon et la hauteur est de 5 mètres est enfoui à 2 mètres sous le sol.

2.5. Travail 🔑 131

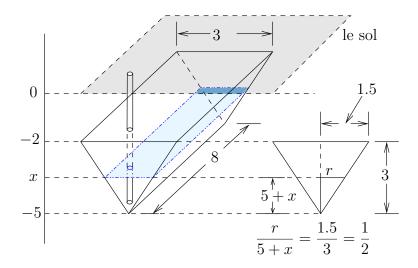


FIGURE 2.28 – Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles est enfoui à 2 m sous le sol. Les triangles ont une hauteur de 3 m et une basse de 3 m.

Exemple 2.5.8

Le réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles renversés comme on retrouve à la figure 2.28 est enfoui à 2 m sous le sol. Si le niveau d'eau initial dans le réservoir est au 2/3 d'eau, quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir? La densité de l'eau est de $1000~{\rm kg/m^3}$.

Dans la formule (2.5.3), on a $h_2 = -3$ car le réservoir est rempli au 2/3, $h_3 = -5$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x. L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s². Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 8 m de long et le deuxième est de 2r = 5 + x m de long. Donc, A(x) = 8(5 + x).

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$W = -\int_{-5}^{-3} 9,800 \left(8x(5+x) \right) dx = -9,800 \times 8 \int_{-5}^{-3} \left(x^2 + 5x \right) dx$$
$$= -9,800 \times 8 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-5}^{-3} = 5.74933\overline{3} \times 10^5 \text{ J}.$$

Exemple 2.5.9

Un réservoir cylindrique (voir figure 2.29 est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur. Le cylindre à un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres. Si on suppose que le cylindre est rempli d'eau, déterminer le travail nécessaire pour vider le réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (2.5.3), on a $h_2 = -5$, $h_3 = -9$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x. L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s². Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 9 m de long et le deuxième est de $2r = 2\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$ m de long. Donc, $A(x) = 18\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$W = -\int_{-9}^{-5} 9,800 \left(18x\sqrt{2^2 - (x+7)^2} \right) dx$$
$$= -9,800 \times 18 \int_{-2}^{2} (u-7)\sqrt{2^2 - u^2} du$$

où on a utilisé la substitution u = x + 7 qui donne u = -2 lorsque x = -9, u = 2 lorsque x = -7 et du = dx. Or,

$$\int_{-2}^{2} u\sqrt{2^2 - u^2} \, \mathrm{d}u = 0$$

car $u\sqrt{2^2-u^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine. Pour évaluer $-7\int_{-2}^2 \sqrt{2^2-u^2}\,\mathrm{d}u$, on pose $u=2\sin(t)$ pour $-\pi/2\le t\le \pi/2$. Donc u=-2 pour $t=-\pi/2$, u=2 pour $t=\pi/2$ et $\mathrm{d}u=2\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$-7 \int_{-2}^{2} \sqrt{2^{2} - u^{2}} \, du = -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \sin^{2}(t)} \, 2 \cos(t) \, dt$$

$$= -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^{2}(t) \, dt = -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \left(1 + \cos(2t) \right) \, dt$$

$$= -14 \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -14\pi .$$

Donc,

$$W = -9,800 \times 18 \times (-14\pi) = 2469600\pi \text{ j}.$$

2.6 Force et pression hydrostatique 🖍

Pour un liquide donné (e.g. l'eau dans l'océan), plus on est profond plus la pression exercée par le liquide augmente. Si $\rho(x)$ est la densité d'un liquide en kg/m³ à une profondeur de x mètres et 9.8 m/s² est l'attraction terrestre en m/s², alors la pression p(x) en N/m² à une profondeur de x mètres est donnée par la formule

$$p(x) = 9.8 \ x \ \rho(x) \ .$$

La force en Newtons exercée sur une surface de très $petite\ hauteur$ à la profondeur de x mètres est approximativement

$$F(x) = p(x)A(x)$$

où A(x) est l'aire en m² de la surface. On a supposé dans le raisonnement précédent que la hauteur de la surface est très petite. Si la hauteur de la surface est grande comme à la figure 2.30, il faut décomposer la surface en minces tranches horizontales de très petite hauteur et calculer la force sur chacune de ces tranches.

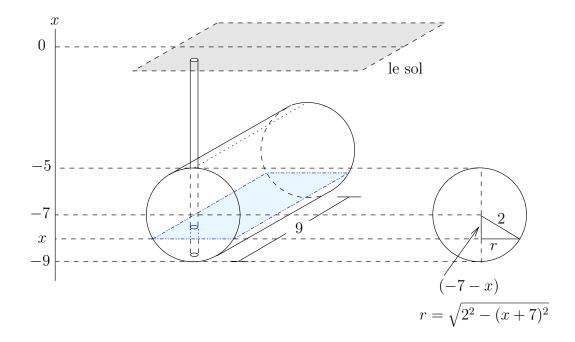


FIGURE 2.29 – Un réservoir cylindrique est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur. Le cylindre à un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres.

Supposons que l'origine soit à la surface du liquide et la direction positive soit vers le haut comme on la fait pour le calcul du travail à la section précédente. On désire calculer la force exercée sur une surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur.

On partage le segment $[h_3, h_2]$ en k sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour i = 0, 1, 2, ..., k.

la pression à une profondeur de x_i^* mètres, où $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$, est

$$p(x_i^*) = -9.8 \ x_i^* \ \rho(x_i^*) \ .$$

On utilise le signe négatif car la direction positive est vers le haut, dans la direction opposée à l'attraction terrestre. On obtient que la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement

$$F(x_i^*) = p(x_i^*)A(x_i^*) = -9.8 x_i^* \rho(x_i^*)A(x_i^*) .$$

où $A(x_i^*)$ est approximativement l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres. Puisque l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres tend vers 0 lorsque la longueur $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, on peut exprimer $A(x_i^*)$ comme le produit $S(x_i^*)\Delta x$ où S est une fonction qu'il faut déterminer pour chaque type de surfaces. Dans les cas simple, $S(x_i^*)$ sera une longueur mais ce ne sera pas toujours le cas comme on verra dans les exemples qui suivent.

Si on fait la somme de la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres pour $i=0, 1, \ldots, k-1$, on trouve que la force F exercée sur la surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est approximativement

$$F \approx \sum_{j=0}^{k-1} -9.8 \ x_i^* \ \rho(x_i^*) \ S(x_i^*) \Delta x \ .$$

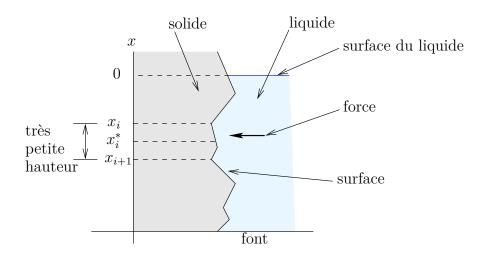


FIGURE 2.30 – Vue transversale d'une surface verticale soumisse à la force exercée par la pression.

La somme dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$-\int_{h_2}^{h_2} 9.8 \, x \, \rho(x) \, S(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Ainsi, si on regarde la limite lorsque k tend vers plus l'infini, on trouve que la force F exercée sur la surface verticale entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est

$$F = -\int_{h_2}^{h_2} 9.8 x \,\rho(x) \,S(x) \,\mathrm{d}x \,. \tag{2.6.1}$$

Exemple 2.6.1

Un réservoir de forme cylindrique repose sur le côté au font d'un lac de 30 mètres de profondeur. Le réservoir a 2 mètres de diamètre et 5 mètres de longueur. Si le réservoir est vide, calculer la force sur les deux extrémités du réservoir et sur le long du cylindre. Utiliser le fait que l'attraction terrestre est de 9.8 m/s^2 et la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

i) Si on utilise l'information fournie à la figure 2.31, on a que l'aire $A(x_i^*)$ de la surface de l'extrémité du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement l'aire du rectangle R_i de base $2\sqrt{1-(x_I^*+29)^2}$ et de hauteur Δx . Donc, $A(x_i^*) \approx S(x_i^*)\Delta x$ où

$$S(x) = 2\sqrt{1 - (x + 29)^2} .$$

La formule (2.6.1) avec $h_3 = -30$ et $h_2 = -28$ nous donne la force F exercée sur une des extrémités du réservoir.

$$F = -\int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \,\rho(x) \,S(x) \,\mathrm{d}x = -2 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} x \sqrt{1 - (x + 29)^2} \,\mathrm{d}x \;.$$

Si on pose y = x + 29. Alors, dy = dx. De plus, y = -1 pour x = -30 et y = 1 pour x = -28. Donc,

$$F = -19,600 \int_{-1}^{1} (y - 29) \sqrt{1 - y^2} \, dy$$

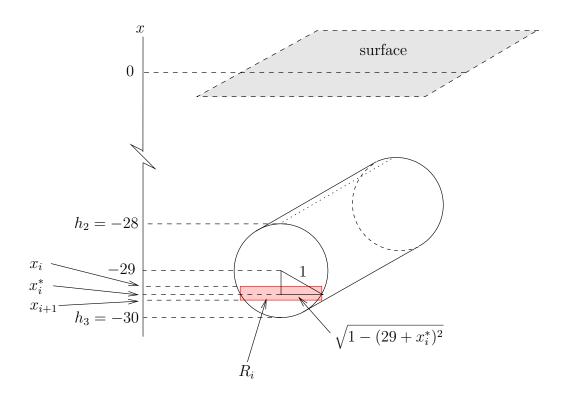


FIGURE 2.31 – Le calcul de la force exercée sur une des extrémités d'un réservoir circulaire qui repose au font d'un lac de 30 mètres de profondeur.

$$= -19,600 \int_{-1}^{1} y \sqrt{1 - y^2} \, dy + 19,600 \times 29 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2} \, dy.$$

Or $y\sqrt{1-y^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine. Donc,

$$\int_{-1}^{1} y \sqrt{1 - y^2} \, \mathrm{d}y = 0 \; .$$

Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2} \, \mathrm{d}y \; ,$$

il suffit de noter que c'est la formule pour calculer l'aire d'une demi-disque de rayon 1. Donc, sa valeur est $\pi/2$. On peut aussi vérifier cela en utilisant la substitution trigonométrique $y=\sin(\theta)$ pour $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Ainsi, $\mathrm{d}y=\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. De plus, $\sin(\pi/2)=-1$ et $\sin(\pi/2)=1$. Donc,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2} \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \, \cos(\theta) \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\theta = -\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) = \frac{\pi}{2} .$$

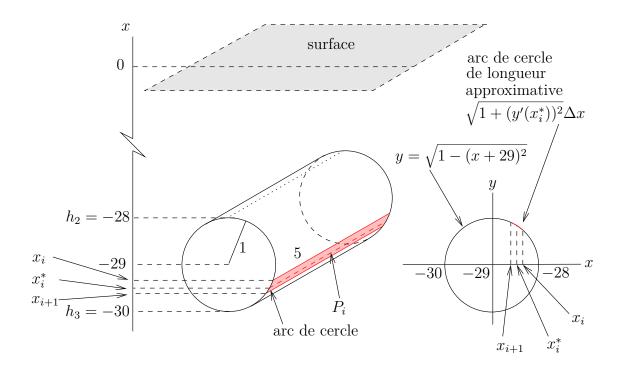


FIGURE 2.32 – Le calcul de la force exercée sur la surface courbée externe d'un réservoir circulaire qui repose au font d'un lac de 30 mètres de profondeur.

On trouve que $F = 19,600 \times 29 \times \frac{\pi}{2} = 284,200\pi$ Newtons.

ii) Pour calculer la force exercée sur le côté courbé illustré à la figure 2.32, il faut calculer l'aire $A(x_i^*)$ de la surface courbée P_i du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres. Cette surface représente un rectangle dont deux des côtés ont 5 mètres de longueur et la longueur des deux autres côtés est la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x+29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} .

On montre à la section sur le calcul de la longueur d'une courbe que, si Δx est assez petit, la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x + 29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \Delta x$ pour un nombre x_i^* entre x_i et x_{i+1} . Donc,

$$A(x_i^*) \approx 5\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \,\Delta x = \frac{5}{\sqrt{1 - (x_i^* + 29)^2}} \,\Delta x$$

car
$$y'(x) = -(x+29)/\sqrt{1-(x+29)^2}$$
.

Ainsi, $A(x_i^*) \approx S(x_i^*) \Delta x$ où

$$S(x) = \frac{5}{\sqrt{1 - (x + 29)^2}} \ .$$

Il découle de (2.6.1) avec $h_3=-30$ et $h_2=-28$ que la force exercée sur l'un des deux

2.7. Centre de masse & 137

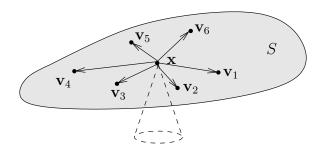


FIGURE 2.33 – Centre de masse d'une surface plane dont la masse est concentrée en un nombre fini de points

côtés courbés est

$$F = -\int_{h_3}^{h_2} 9.8 \, x \, \rho(x) \, S(x) \, dx = -5 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} \frac{x}{\sqrt{1 - (x + 29)^2}} \, dx \, .$$

Si on pose y = x + 29, on a dy = dx, y = -1 pour x = -30 et y = 1 pour x = -28. Donc,

$$F = -49,000 \int_{-1}^{1} \frac{y - 29}{\sqrt{1 - y^2}} \, dy = -49,000 \int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \, dy + 49,000 \times 29 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \, dy.$$

Puisque $y/\sqrt{1-y^2}$ est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle symétrique à l'origine, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \, \mathrm{d}y = 0 \; .$$

De plus,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \arctan(y) \Big|_{y=-1}^{1} = \pi .$$

On trouve que $F = 49,000 \times 29 \pi = 1,421,000\pi$ Newtons.

2.7 Centre de masse

Pour cette section, on assume que le lecteur sait ce qu'est un vecteur et connaît les opérations de bases sur les vecteurs. Le matériel que l'on retrouve dans les deux premières sections du chapitre 4 suivit amplement.

Le **centre de masse** d'une mince surface plane S est le point de la surface pour lequel la surface sera en été d'équilibre si on la dépose sur un cône de telle sorte que la pointe du cône soit en contact avec ce point.

On suppose que la masse de la surface plane S est concentrée en n points de S (voir figure 2.33). Si m_j est la masse au point \mathbf{v}_j pour $1 \leq j \leq n$, on cherche le point \mathbf{x} de S tel que

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{x}) = \mathbf{0} . \tag{2.7.1}$$

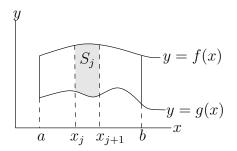


FIGURE 2.34 – Centre de masse d'une surface plane de densité constante

La somme des forces exercées sur le point \mathbf{x} est nulle. Si $\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, on obtient des coordonnées de (2.7.1) que

$$\sum_{j=1}^{n} m_j (p_j - p) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} m_j (q_j - q) = 0 .$$

Donc,

$$p = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j p_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$
 et $q = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j q_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$.

 $M_x = \sum_{j=1}^n m_j q_j$ est le moment par rapport à l'axe des x et $M_y = \sum_{j=1}^n m_j p_j$ est le moment

par rapport à l'axe des y. La masse totale est $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$. Le centre de masse est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$.

On suppose maintenant que la surface plane S est de densité constante. De plus, on suppose que la surface S est de la forme $\{(x,y):g(x)\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$ pour deux fonctions continues f et g.

On veut estimer le moment par rapport à l'axe des y de S. On partage le segment [a,b] en k sous intervalles $[x_j,x_{j+1}]$ de longueur $\Delta x=(b-a)/k$ où $x_i=a+j\Delta x$ pour $j=0,1,2,\ldots,k$. On choisit $x_j^*\in [x_j,x_{j+1}]$ pour $j=0,1,2,\ldots,k-1$. On a donc

$$M_y \approx \sum_{j=0}^{k-1} x_j^* \rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x$$

où ρ est la densité de S car x_j^* est la distance approximative entre l'axe des y et les points de la portion $S_j = \{(x,y) : g(x) \leq y \leq f(x), x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$ de S et ρ $\left(f(x_j^*) - g(x_j^*)\right) \Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S.

De même, on peut estimer le moment par rapport à l'axe des x de S à l'aide de la formule

$$M_x \approx \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f(x_j^*) + g(x_j^*))}{2} \rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x = \sum_{j=0}^{k-1} \rho \frac{1}{2} \left(f^2(x_j^*) - g^2(x_j^*) \right) \Delta x$$

2.7. Centre de masse 🖋 139

où $(f(x_j^*) + g(x_j^*))/2$ est la distance moyenne entre l'axe des x et les points de la portion S_j de S et, comme précédemment, $\rho\left(f(x_j^*) - g(x_j^*)\right)\Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S.

La masse de S peut être estimer à l'aide de la formule

$$m \approx \sum_{j=0}^{k-1} \rho \left(f(x_j^*) - g(x_j^*) \right) \Delta x$$
.

Lorsque $k \to \infty$, on obtient les formules

$$M_y = \rho \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx$$
 et $M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

pour le moment par rapport à l'axe des ${\bf x}$ et le moment par rapport à l'axe des ${\bf x}$ respectivement. La masse de S est donnée par

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Le **centre de masse** est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$.

Exemple 2.7.1

Trouver le centre de masse de la surface bornée par les courbes $y=1-x^2$ et y=0. La densité de la surface est $\rho=10$.

La courbe $y=1-x^2$ coupe l'axe des x aux points x=-1 et x=1. Donc, la masse de la surface est

$$m = \int_{-1}^{1} 10(1-x^2) dx = 10\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{1} = \frac{40}{3}.$$

Le moment par rapport à l'axe des x est

$$M_x = \frac{10}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = 5 \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 5 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

et le moment par rapport à l'axe des y est

$$M_y = 10 \int_{-1}^{1} x(1-x^2) \, \mathrm{d}x = 0$$

car la fonction $h(x) = x(1-x^2)$ est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe des y. Ce n'est pas surprenant que $M_y = 0$ car la surface est symétrique par rapport à l'axe des y et elle est de densité constante.

Le centre de masse est (0, 2/5).

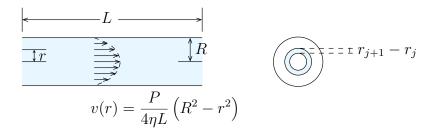


FIGURE 2.35 – La distribution de vélocité d'après le modèle de Poiseuille

2.8 Débit sanguin 🌲

Le modèle de Poiseuille pour la distribution de vélocité d'un liquide visqueux et incompressible qui s'écoule dans un tube de rayon constant R cm et de longueur L cm (voir figure 2.35) est

$$v(r) = \frac{P}{4\eta L} \left(R^2 - r^2 \right) \quad , \quad 0 \le r \le R \; ,$$

où v(r) cm/s est la vélocité du liquide à un distance r cm de l'axe central du tube, P dyn/cm² est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et η est le coefficient de viscosité du liquide. Dans ce modèle, on suppose que la vélocité varie seulement en fonction de la distance par rapport à l'axe du tube. On suppose de plus que la vélocité est nulle sur la paroi du tube. Ce sont de bonnes suppositions si le tube est un vaisseau sanguin et le liquide est du sang.

La formule pour la vélocité donnée ci-dessus est une approximation de la solution de l'équation de Navier et Stokes en mécanique des fluides (voir [2]).

On veut calculer le débit dans le tube; c'est-à-dire, le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps. Pour ce faire, on utilise la technique des sommes de Riemann.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta r = R/k$ et $r_j = j\Delta r$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. On obtient une partition de l'intervalle [0, R] en sous-intervalles de la forme $[r_j, r_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

On considère l'anneau définie par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$. Pour estimer D_j , le volume de liquide qui passe au travers de cet anneau par unité de temps, on suppose que la vélocité du liquide est constante dans cet anneau. L'aire de l'anneau définie par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$ est

$$\pi r_{j+1}^2 - \pi r_j^2 = 2\pi \left(\frac{r_{j+1} + r_j}{2}\right) (r_{j+1} - r_j) = 2\pi r_j^* \Delta r$$
,

où $r_j^* = (r_{j+1} + r_j)/2$. Ainsi,

$$D_j \approx 2\pi r_i^* v(r_i^*) \Delta r$$
.

On a donc que D, le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps est donné approximativement par

$$D = \sum_{j=0}^{k-1} D_j \approx 2\pi \sum_{j=0}^{k-1} r_j^* v(r_j^*) \Delta r .$$

2.8. Débit sanguin ♣ 141

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_0^R rv(r) \, \mathrm{d}r \ .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$D = 2\pi \int_0^R rv(r) \, \mathrm{d}r \ .$$

Pour le modèle de Poiseuille, le débit est donc donné par la formule

$$D = 2\pi \int_0^R rv(r) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}.$$

Les unités de D sont les cm³/s.

Exemple 2.8.1

Supposons que l'on veuille mesurer le diamètre de l'aorte ascendante d'une patiente pour déterminer le risque de celle-ci d'avoir un accident cardio-vasculaire. On ne veut pas avoir recours à une chirurgie.

Si on peut déterminer le débit cardiaque D, le débit sanguin dans l'aorte ascendante, alors la formule $D=\frac{\pi PR^4}{8\eta L}$ peut être utilisée pour déterminer le rayon R de l'aorte car la pression sanguine P peut être mesurée, η est une constante connue pour le sang, et L est la longueur de l'aorte ascendante. Pour un adulte de grandeur moyenne, $L\approx 6$ cm, $P\approx 106,658$ dyn/cm² et $\eta\approx 0.027$ s \times dyn/cm².

Pour mesurer expérimentalement le débit cardiaque, on injecte A mg d'un <u>produit de contraste</u> dans le coeur (naturellement, pas directement dans le coeur) et on mesure le débit sanguin dans l'aorte ascendante. On estime qu'il faut T s pour que le coeur de la patiente se vide du produit de contraste. On va utiliser les sommes de Riemann pour calculer la quantité total du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante pendant la période de temps T.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_j = j\Delta t$ pour j = 0, 1, 2, ..., k. On obtient une partition de l'intervalle [0, T] en sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour j = 0, 1, ..., k-1.

Soit c(t) la concentration du produit de contraste en mg/cm³ au temps t s dans l'aorte ascendante. Si on suppose que la concentration du produit de contraste est constante entre t_j et t_{j+1} , la quantité Q_i du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante entre t_i et t_{i+1} est approximativement

$$Q_i \approx c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L}\right) \Delta t$$

car $\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L}\right) \Delta t$ représente le volume de sang qui passe par l'aorte ascendante durant la période de temps Δt . La quantité total Q du produit de contraste qui passe par l'aorte

ascendante durant les Ts est donc donnée approximativement par

$$Q = \sum_{i=0}^{k-1} Q_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L}\right) \int_0^T c(t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, on obtient

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \int_0^T c(t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Or, après T s seconde on a Q = A. Donc, le débit est

$$D = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} = A / \left(\int_0^T c(t) \, \mathrm{d}t \right) .$$

Supposons que 6 mg du produit de contraste est injecté dans le coeur de la patiente. On mesure la concentration du produit de contraste à intervalle régulier pour obtenir les données suivantes.

Évaluer le débit sanguin avec les sommes à droite. De plus, si $P \approx 106,658 \text{ dyn/cm}^2$, L = 6 cm et $\eta \approx 0.027$, déterminer le diamètre de l'aorte ascendante de cette patiente.

Posons
$$t_i = \frac{i}{2}$$
 pour $i = 0, 1, ..., 10$. On a

$$\int_0^5 c(t) dt \approx \sum_{i=1}^{10} c(t_i) \Delta t = \frac{1}{2} (0.021 + 0.045 + \dots + 0) = 0.1415 \text{ s mg/cm}^3.$$

Donc, le débit est

$$D = \frac{6}{0.1415} \approx 42.4028 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

On déduit de la formule $D = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}$ que

$$R = \left(\frac{8\eta LD}{\pi P}\right)^{1/4} \approx 0.11317 \text{ cm} .$$

Donc, le diamètre de l'aorte ascendante est approximativement 0.2263 cm. Pour un adulte de grandeur normale, le diamètre de l'aorte ascendante est beaucoup plus grand (au moins 10 fois plus grand). La patiente est a risque.

2.9 Applications à l'économie

Avant de donner un exemple de l'utilité de l'intégrale en économie, il faut introduire quelques concepts de base.

Si on dépose dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de I% par année, après un an on aura

$$M_1 = M_0 + \frac{I}{100} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100} \right) \text{ dollars}.$$

C'est le montant en banque au début de l'année plus les intérêts pour l'année. Après deux ans on aura

$$M_2 = M_1 + \frac{I}{100} M_1 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100} \right)$$
 dollars.

C'est le montant en banque au début de la deuxième année plus les intérêts pour l'année. Donc,

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100} \right)^2 \quad \text{dollars} .$$

Par induction, après n années on aura le résultat suivant.

Méthode 2.9.1

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé annuellement** au taux de I%, alors le montant M_n dans le compte après n années est donnée par la formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100} \right)^n$$
 dollars,

οù

Si on dépose dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de I% par année calculé k fois par année, à la fin de la première période de l'année (i.e. au premier versement des intérêts), on aura

$$M_{0,1} = M_0 + \frac{I}{100k} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)$$
 dollars.

C'est le montant en banque au début de la première période plus les intérêts pour la période qui sont 1/k des intérêts de l'année. À la fin de la deuxième période de l'année (i.e. au deuxième versement des intérêts), on aura

$$M_{0,2} = M_{0,1} + \frac{I}{100k} M_{0,1} = M_{0,1} \left(1 + \frac{I}{100k} \right)$$
 dollars.

C'est le montant en banque au début de la deuxième période plus les intérêts pour la période qui sont encore 1/k des intérêts de l'année. Il est naturellement assumé que l'année est divisée en k périodes de même durées. On a donc

$$M_{0,2} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^2$$
 dollars.

Par induction, à la fin de l'année (c'est à dire à la fin de la k^e période ou, si vous préférez, au k^e versement) on aura

$$M_1 = M_{0,k} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^k$$
 dollars.

De même, à la fin de la deuxième année on aura

$$M_2 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^k \quad \text{dollars} .$$

Donc,

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^{2k} \quad \text{dollars} .$$

Par induction, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.9.2

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé** k **fois par année** au taux de I%, alors le montant M_n que l'on aura après n années est donnée par la formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^{nk}$$
 dollars.

Dans le cas précédent où l'intérêt est composé k fois par année, si le nombre k de périodes devient de plus en plus grand (tend vers plus l'infini) on obtient la formule suivante.

Méthode 2.9.3

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé de façon continue** au taux I% par année, alors le montant M_n dans le compte après n année est donnée par la formule

$$M_n = M_0 e^{(nI)/100}$$
 (2.9.1)

Dans le cas continue, n peut être un nombre réel. On n'est plus limité aux entiers comme dans les deux premiers cas.

Pour démontrer la formule (2.9.1), il suffit de noter que

$$\lim_{k \to \infty} M_0 \left(1 + \frac{I}{100k} \right)^{nk} = \lim_{k \to \infty} M_0 \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100k/I} \right)^{100k/I}}_{\to e \text{ lorsque } k \to \infty} \right)^{nI/100} = M_0 e^{nI/100} .$$

2.9.1 Valeurs présentes et futures

Définition 2.9.4

La valeur future d'un montant M_0 est le montant obtenu après t années si le montant M_0 est placé aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de I% par année.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur future après n année est $M_n = M_0 e^{nI/100}$.

Définiton 2.9.5

La valeur présente d'un montant M_t est le montant M_0 qu'il faut placer aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de I% pour obtenir M_t dans t années.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur présente de M_t dollars dans t années est $M_0 = M_t e^{-I \, n/100}$. Si l'intérêt est composé k fois par année, la valeur présente de M_n dollars dans n années est $M_0 = M_n \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{-k \, n}$.

Exemple 2.9.6

Vous venez de gagner \$1,000,000 à la loterie. Le montant vous est donné en quatre versements égaux; le premier versement aujourd'hui, le deuxième dans un an à partir d'aujour-d'hui, le troisième dans deux ans à partir d'aujourd'hui, etc. Avez-vous réellement gagné \$1,000,000? Assumez que le taux d'intérêt pour les prochaines années est de 4% composé de façon continue.

Il faut déterminer la valeur présente de l'argent qui vous est donné. La valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans un an est 250,000 $e^{-4/100}$, la valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans deux ans est 250,000 $\left(e^{-4/100}\right)^2$, etc.

Donc, la valeur présente de montant que vous avez gagné à la loterie est

$$250,000 + 250,000 e^{-4/100} + 250,000 (e^{-4/100})^{2} + 250,000 (e^{-4/100})^{3}$$
$$= 250,000 \left(\frac{1 - (e^{-4/100})^{4}}{1 - e^{-4/100}}\right) = 942,706.56 \text{ dollars}.$$

En raison de leur très grand volume de vente, on peut supposer que le taux de revenu d'une grande entreprisse (e.g. Une chaîne de restaurants ou de magasins à rayons) est donné par une fonction continue R(t) où t est le temps. Puisque R(t) est un taux de revenu, ses unités sont des dollars/jour, des dollars/année, des euros/mois, etc. Le temps t utilise les

mêmes unités de temps que ceux utilisé pour le taux de revenu. Par exemple, si le taux de revenu est en dollars/jour, le temps t sera en jours.

Si l'entreprisse investi ses revenus dans un compte dont le taux d'intérêt est de I% composé de façon continue, quelle sera la valeur future V_f des placements de cette entreprisse au temps T?

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. On obtient une partition de l'intervalle [0, T] en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour i = 0, 1, ..., k-1.

Pour $i=0, 1, 2, \ldots, k-1$, on choisit t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur future de ces revenus est alors approximativement $e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t$ car ces revenus sont investis pour une période d'environ $T-t_i^*$.

La somme des valeurs futures estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivant de la valeur future V_f des placements de l'entreprisse pour une période T.

$$V_f \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t$$
.

On remarque de plus que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.9.7

Si R(t) représente est le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de I% composé de façon continue, alors la valeur future V_f des investissement après une période T est donnée par la formule

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt$$
.

De façon semblable, on peut obtenir la valeur présente V_p des gains d'une grande entreprisse pour une période de temps T. On assume que le taux d'intérêt sur les placements est de I% composé de façon continue.

Soit k, un entier positif. On pose $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour i = 0, 1, 2, ..., k. On obtient une partition de l'intervalle [0, T] en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour i = 0, 1, ..., k-1.

Pour i = 0, 1, 2, ..., k-1, on choisit t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur présente de ces revenus est alors approximativement $e^{-It_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t$.

La somme des valeurs présentes estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivant de la valeur présente V_p des revenus de l'entreprisse pour une période T.

$$V_p \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{-I t_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t$$
.

On remarque de plus que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{-It/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, on obtient le résultat suivant.

Méthode 2.9.8

Si R(t) représente est le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de I% composé de façon continue, alors la valeur présente V_p des investissement pour une période T est donnée par la formule

$$V_p = \int_0^T e^{-I t/100} R(t) dt .$$

Exemple 2.9.9

Si le taux de revenus d'une chaîne de locations de voitures est R(t) = 10,000 dollars/jour, quelle sera la valeur future des revenus de cette chaîne de locations dans 10 ans si elle investi ses revenus pour obtenir un taux d'intérêt est de 5% composé de façon continue.

On a que la valeur future V_f est

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt ,$$

où T = 10, I = 5 et R(t) = 10,000 pour tout t. Donc,

$$V_f = \int_0^{10} 10,000 e^{5(10-t)/100} dt = -2 \times 10^5 e^{5(10-t)/100} \Big|_{t=0}^{10}$$
$$= -2 \times 10^5 \left(1 - e^{0.5}\right) \approx 129,744.25 \text{ dollars.}$$

2.9.2 Surplus du consommateur et du producteur

Soit D(q) le prix par unité que le consommateur est prêt à payer s'il y a q unités disponibles sur le marché et soit P(q) le prix par unité que le producteur ou manufacturier est prêt a demander s'il y a q unités disponibles sur le marché.

Il est raisonnable de penser que D est une fonction décroissante. Quand le nombre d'unités disponibles sur le marché est grand, les consommateurs espèrent que les vendeurs vont

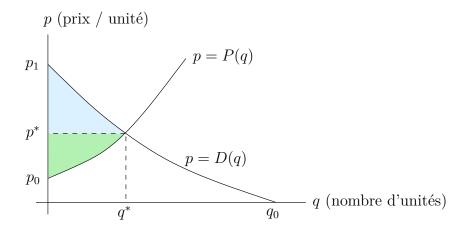


FIGURE 2.36 – La région en bleu représente le surplus du consommateur alors que la région en vert représente le surplus du producteur.

baisser le prix par unité pour pouvoir écouler leur stock. Par contre, la fonction P sera probablement croissante. Si les marchants commandent un grande nombre d'unités pour vendre, les producteurs ou manufacturiers vont augmenter le prix par unité pour bénéficier de l'enjouement pour le produit et pour pouvoir augmenter leur production.

On retrouve à la figure 2.36 le graphe de D et celui de P. Dans cette figure, q_0 est le nombre maximal d'unité que le marché peut supporter (tous ceux susceptibles d'acheter le produit en ont déjà fait l'achat), p_0 est le prix minimal par unité que le producteur ou manufacturier est prêt à demander, et p_1 est le prix maximal par unité que le consommateur est prêt à payer. Le point q^* est le **point d'équilibre** pour le nombre d'unités sur le marché. À ce point, les consommateurs et les producteurs ou manufacturiers sont en accord sur le prix par unité p^* .

Le surplus du consommateur S_c est le montant économisé par les consommateurs s'ils payent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à payer normalement pour $q < q^*$.

$$S_c = \int_0^{q^*} D(q) \, \mathrm{d}q - p^* \, q^* \, .$$

C'est l'aire de la région en bleu dans la figure 2.36.

Le **surplus du producteur** S_p est le revenu additionnel fait par les producteurs ou manufacturiers s'ils demandent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à demander normalement pour $q < q^*$.

$$S_c = p^* q^* - \int_0^{q^*} P(q) dq$$
.

C'est l'aire de la région en vert dans la figure 2.36.

Exemple 2.9.10

En mai 2003, on retrouvait sur le marché 50 unités d'un modèle de voiture de lux que le consommateur (pour ce genre de voitures) était prêt à acheter pour \$370,000 l'unité. On a estimé que le point d'équilibre pour le nombre d'unités était de 350 voitures au prix de

\$250,000 par unités. Quelle a été le surplus du consommateur si le prix par unité que le consommateur est prêt à payer est une fonction affine du nombre d'unités disponibles?

Le graphe de D est une droite qui passe par les points (50, 370, 000) et $(q^*, p^*) = (350, 250, 000)$. L'équation de cette droite est

$$P(q) = \frac{370,000 - 250,000}{50 - 350} (p - 350) + 250,000 = -400(p - 350) + 250,000.$$

Le surplus du consommateur est

$$S_c = \int_0^{350} (-400(p - 350) + 250,000) dp - 350 \times 250,000$$
$$= \left(-200(p - 350)^2 + 250,000 p \right) \Big|_{p=0}^{350} - 350 \times 250,000 = 24,500,000 \text{ dollars.}$$

2.10 Test de l'intégrale

Il est possible de déterminer si une série de termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge à l'aide d'une intégrale impropre.

Théorème 2.10.1 (Le test de l'intégrale) Soit $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction continue et décroissante. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série dont les termes sont donnés par $a_n = f(n)$ pour tout n, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^\infty f(x) dx$ converge.

La démonstration de ce théorème est simple et repose sur les deux graphiques donnés à la figure 2.37.

Posons $T_n = \int_1^n f(x) dx$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Les sommes S_n sont les sommes partielles de la séries.

La région en gris dans le graphe à gauche dans la figure 2.37 représente la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{6} a_k = S_6 - a_1$ alors que la région en gris dans le graphe à droite dans la figure 2.37 représente la valeur de la somme $S_6 = \sum_{k=1}^{6} a_k$.

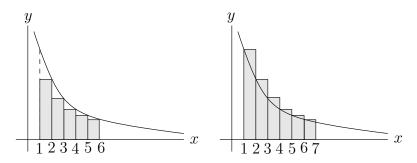


FIGURE 2.37 – La justification du test de l'intégrale pour déterminer si une série converge.

A) Supposons que $\int_1^\infty f(x) dx$ diverge. Cela implique que $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$. Or, à partir du graphe à droite dans la figure 2.37, on obtient que $0 \le T_n \le S_{n-1}$ pour tout $n \ge 2$. Ainsi

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = +\infty$$

et on conclus que la séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Cela implique que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

B) Supposons que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge. Cela implique que la limite $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe et est réel. Or, à partir du graphe de gauche à la figure 2.37, on obtient que $0 \le S_n - a_1 \le T_n$ pour tout $n \ge 2$. Donc, $0 \le S_n \le T_n + a_1$ pour tout $n \ge 2$. Ainsi $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante (car $a_n \ge 0$ pour tout n) et bornée par

$$a_1 + \lim_{n \to \infty} T_n = a_1 + \int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$$

Il découle du théorème ?? que la suite $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. C'est à dire que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Exemple 2.10.2

Démontrons le proposition ??

Si $p \le 0$, on a que la suite $\{n^{-p}\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers zéro. Donc, par le théorème ??, on a que la séries $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge.

On peut donc supposer que p > 0. La proposition ?? est alors une conséquence immédiate du résultat que l'on a obtenu à la proposition 1.5.4; c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x \text{ converge si seulement et seulement si } p > 1.$

On considère $f(x) = 1/x^p$. On a que f(x) > 0 pour x > 0 et f(x) est un fonction continue et décroissant pour x > 0 car $f'(x) = -px^{-p+1} < 0$ pour x > 0. On peut donc utiliser le test

de l'intégrale pour conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x \text{ converge} \Leftrightarrow p > 1 \ .$$

Exemple 2.10.3

Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge ou diverge.

Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = n5^{-n}$. Posons $f(x) = x5^{-x}$. On a que f(x) > 0 pour tout $x \ge 1$ et f est une fonction continue et décroissante; en fait, $f'(x) = (1 - x \ln(5))5^{-x} < 0$ pour $x \ge 1$. De plus, $a_n = f(n)$ pour tout $n \ge 1$.

On considère l'intégrale $\int_1^q x 5^{-x} dx$. Cette dernière intégrale se calcul à l'aide de la méthode d'intégration par parties. Si u(x) = x et $v'(x) = 5^{-x}$, alors u'(x) = 1, $v(x) = -5^{-x}/\ln(5)$ et

$$\int_{1}^{q} x 5^{-x} dx = \int_{1}^{q} u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_{x=1}^{q} - \int_{1}^{q} u'(x)v(x) dx$$

$$= -\frac{x 5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^{q} + \int_{1}^{q} \frac{5^{-x}}{\ln(5)} dx = -\frac{x 5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^{q} - \frac{5^{-x}}{(\ln(5))^{2}} \Big|_{x=1}^{q}$$

$$= -\frac{q 5^{-q}}{\ln(5)} + \frac{1}{5\ln(5)} - \frac{5^{-q}}{(\ln(5))^{2}} + \frac{1}{5(\ln(5))^{2}}.$$

Grâce à la Règle de l'Hospital, on a $\lim_{q\to\infty} q5^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{q}{5^q} = 0$. De plus, $\lim_{q\to\infty} 5^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{5^q} = 0$. Donc,

$$\lim_{q \to \infty} \int_1^q x 5^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5 \ln(5)} + \frac{1}{5(\ln(5))^2} \, .$$

Puisque $\int_1^q x5^{-n} dx$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge.

Exemple 2.10.4

Déterminer si la série suivante converge ou diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \ .$$

Cette série est de la forme $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. Posons $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$. On a que f(x) > 0 pour tout $x \ge 2$ et f est une fonction continue et décroissante car $x \ln(x)$ est croissante pour $x \ge 2$. De plus, $a_n = f(n)$ pour tout $n \ge 2$.

On considère l'intégrale $\int_2^q \frac{1}{x \ln(x)} dx$. Cette dernière intégrale se calcul à l'aide de la méthode de substitution. Si $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x} dx$, $u = \ln(q)$ lorsque x = q et $u = \ln(2)$ lorsque x = 2. Ainsi,

$$\int_{2}^{q} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(q)} \frac{1}{u} du.$$

Or, cet intégrale diverge d'après la proposition 1.5.4; c'est le cas p = 1. Donc, grâce au test de l'intégrale, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

2.11 **Exercices**

Question 2.1

Calculez l'aire de chacune des régions décrient ci-dessous.

- a) La région entre la droite y = 2x et la courbe $y = x^2$ pour $0 \le x \le 2$.
- b) La région entre la droite y = 2x et la courbe $y = x^2$ pour $0 \le x \le 4$.
- c) La région entre les courbes $y = e^x$ et $y = \frac{e^{2x}}{2}$ pour $0 \le x \le 1$.
- d) La région bornée par la droite $y = \frac{3}{2} + x$ et la courbe $y = \frac{x^2}{2}$.
- e) La région bornée par la droite $y = \bar{x}$ et la courbe $y = 7x \bar{3}x^2$.
- f) La région bornée par la courbe $y^2 = x$ et la droite x y = 2. g) La région bornée par la courbe $y = f(x) = \frac{x}{1+x}$ et la droite $y = g(x) = \frac{x}{2}$.
- h) La région bornée par les courbes $y = (x-2)^2$ et $y = 10 x^2$.

Question 2.2 🗲 🏝

Trouvez l'aire entre les courbes $y = f(x) = \sin(2x)$ et $y = g(x) = \cos(2x)$ pour $0 \le x \le \pi$.

Question 2.3

Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - x^3$ pour $-1 \le x \le 1$. Tracez le graphe de f sur l'intervalle [-1,1] et la droite horizontale qui représente la valeur moyenne.

Question 2.4

Le taux (instantané) auquel l'eau est versé dans un bocal après t minutes est donné par la formule r(t) = 4t(3-t) litres/minute.

- a) Quelle est le volume d'eau qui a été versé dans le bocal au cours des deux premières minutes (i.e. $0 \le t \le 2$)?
- b) Quelle est le taux moyen auquel l'eau est versé dans le bocal au cours des deux première minute?
- c) Comparez le taux moyen calculé en (b) avec le taux au cours de la première minute $0 \le t \le 1$ minute. Lequel est le plus grand?

2.11. Exercices 153

d) Tracez le graphe du taux instantané en fonction du temps (i.e. de r) et la droite horizontal qui correspond au taux moyen durant les deux premières minutes.

Question 2.5

Le taux (instantané) auquel l'eau entre un réservoir varie dans le temps et est donné par la formule $r(t) = 360t - 39t^2 + t^3$ où t est en heures et r est en litres/heure. Quelle est le volume d'eau qui a entré dans le réservoir au cours des 15 premières heures (i.e. pour $0 \le t \le 15$)? Quelle est le taux moyen au cours des 15 premières heures?

Question 2.6

Si le taux d'énergie produite par une réaction (chimique) au temps t en heures est donnée par $E(t) = |360t - 39t^2 + t^3|$ joules/heure, Calculer l'énergie totale produite entre t = 0 heure et t = 24 heures. Calculez le taux moyen de production d'énergie durant cette période. Suggestion : Les racines du polynôme $360t - 39t^2 + t^3$ sont 0, 15 et 24.

Question 2.7

Un très mince fils de 2 mètres de longueur est formé d'une substance organique dont la densité linéaire à une distance de x cm d'une de ses extrémités est de $\rho(x)$ g/cm où

$$\rho(x) = 1 + 2 \times 10^{-8} x^2 (240 - x) .$$

- a) Trouvez la densité maximale et minimale le long du fils. À quel endroit a-t-on la plus forte densité?
- **b**) Quelle est la masse totale du fils?
- c) Quelle est la densité linéaire moyenne du fils? Comparez avec la valeur maximale et minimale que vous avez trouvée en (a).
- d) Dans une même figure, tracez le graphe de la densité et la droite horizontale qui correspond à la densité moyenne.

Question 2.8

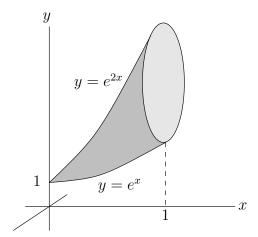
Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume du cône droit de hauteur 3 dont la base est un disque de rayon 2.

Question 2.9

Utilisez la méthode des tranches pour trouver <u>un somme de Reimann</u> qui approche le volume d'un cône de hauteur h dont la base est un disque de rayon r. Déduire de votre somme une formule exacte pour calculer le volume d'un cône.

Question 2.10

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume de la corne représenté dans la figure suivante pour $0 \le x \le 1$. Les sections transverses sont des cercles



.

Question 2.11

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume d'un ballon de football (ayant la forme d'un ellipsoïde) de 30 cm de longueur et de 18 cm de diamètre dans sa partie la plus large. Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du volume du ballon de football pour en déduire une intégrale définie pour le volume du ballon de football.

Question 2.12

- a) Trouvez le volume du solide dont la base est la région $\{(x,y)|x^2 \le y \le 1\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des y sont des demi-cercles.
- b) Trouvez le volume du solide dont la base est la région $\{(x,y)|y^2 \le x \le 2\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

Question 2.13

On considère la région R bornée par l'axe des x, la courbe $y=x^{1/3}$ et la droite x=1.

- a) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de l'axe des x.
- b) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite y = -3.
- c) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite y=7.
- d) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.
- e) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

Question 2.14

Pour chacun des problèmes suivants, trouvez le volume du solide produit par la rotation de la région donnée autour de l'axe donné.

a) La région est bornée par la courbe $y = \cos(x)$, l'axe des x, et les droites x = 0 et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x. 2.11. Exercices 155

b) La région est bornée par la courbe $y = \cos(x/2)$, l'axe des x, et les droites $x = -\pi$ et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x.

- c) La région est bornée par la courbe $y=x^{3/2}$, l'axe des x et la droite x=1. L'axe de rotation est l'axe des x.
- d) On utilise la même région qu'en (c). L'axe de rotation est l'axe des y.
- e) La région est bornée par la courbe y = 1/x, l'axe des x, et les droites x = 1 et x = 2. L'axe de rotation est l'axe des x.

Question 2.15

Trouvez le volume du solide que l'on obtient dans chacun des cas suivants.

- a) Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et la droite y = x autour de l'axe y = -1.
- **b**) Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = \sqrt{x}$ et la droite y = x autour de l'axe des x.
- c) Si on fait la rotation de la région bornée par les courbes $y=x^2$ et $x=y^2$ autour de l'axe des y?
- d) Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 6x + 9$ et la droite y = 4 autour de l'axe x = -1.
- e) Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 8x + 16$ et la droite y = 4 autour de l'axe x = -2.
- f) Si on fait la rotation de la région bornée par la courbe $y = -x^2 + 10x 25$ et la droite y = -4 autour de l'axe x = -1.
- g) Si on fait la rotation de la région bornée par les courbes $x = y^2 4y + 2$ et $x = -y^2 + 4y 4$ autour de la droite x = 1.

Question 2.16

Si on fait la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ autour de l'axe y = 3, on obtient un tore (une figure de la forme d'un bagel). Quelle est le volume de ce tore?

Question 2.17

La densité de l'huile à une distance de r mètres du centre d'une nappe d'huile circulaire sur la surface de l'océan est donnée par $\rho(r) = 50/(1+r)$ kg/m².

- a) Si la nappe d'huile a un rayon de 1,000 m, donnez une somme de Reimann qui approche la masse total de l'huile dans la nappe.
- b) En transformant la somme donnée en (a) en une intégrale, trouvez la valeur exacte de la masse totale d'huile dans la nappe.
- \mathbf{c}) Quelle est la valeur de r pour laquelle on a la moitié de la masse totale d'huile.

Question 2.18

Trouvez la position du centre de masse de la région plane bornée par la courbe $y = x^2$ et les droites y = 0, x = 0 et x = 2. La densité est constante.

Question 2.19

Trouvez la position du centre de masse de la région bornée par les courbes $y = e^x$, y = 0, x = 0 et x = 2. La densité est constante et égale à 3 kg/m².

Question 2.20

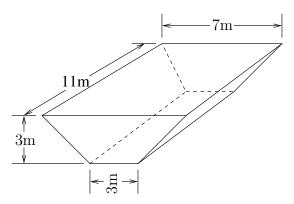
Un travailleur est en haut d'un échafaudage de 30 mètres de hauteur. Il doit lever à l'aide

d'une corde une chaudière de ciment à partir du sol jusqu'à une hauteur de 10 mètres. La chaudière a une masse de 50 kg et la corde a une masse de 0.5 kg/m. Trouvez le travail total nécessaire pour lever cette chaudière.

Question 2.21

Une piscine (voir la figure ci-dessous) est remplie d'eau. Calculez le travail nécessaire pour vider cette piscine. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.



Question 2.22

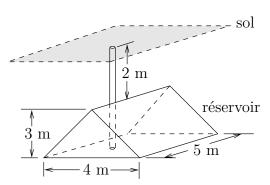
Une citerne de forme rectangulaire possède les dimensions suivantes : 3 m de long, 1 m de large et 2 m de haut. La citerne est plein d'eau. Calculez le travail nécessaire pour pomper la moitié de l'eau à une hauteur de 1 m au-dessus du citerne. La densité de l'eau est de 1000 kg/m³ et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 2.23

Les réservoirs ci-dessous sont plein d'huile dont la densité est de 570 kg/m³. Quelle est le travail nécessaire pour vider chacun des réservoirs?

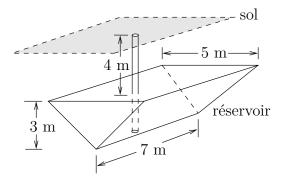
Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale.

a) le réservoir est enfoui 2 mètres sous le sol.



2.11. Exercices 157

a) le réservoir est enfoui 4 mètres sous le sol.



Question 2.24

Un réservoir cylindrique de deux mètres de rayon et de six mètres de hauteur (donc l'axe du cylindre est vertical) est à moitié rempli d'eau. Trouvez le travail nécessaire pour vider le réservoir si on pompe l'eau a partir d'un point trois mètres au dessus réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 2.25

Un réservoir rectangulaire de 20 mètres de longueur, 10 mètres de largeur et 15 mètres de profondeur est rempli d'eau. Quelle est la force totale exercée sur le font et sur chaque coté du réservoir?

Question 2.26

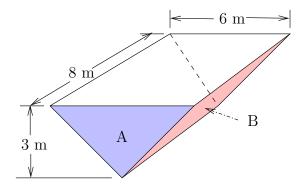
Un réservoir a un barrage à une extrémité. Le barrage forme un mur rectangulaire de 50 m de longueur et 20 m de hauteur. Quelle est la force exercée sur ce barrage?

Question 2.27

Une piscine (voir la figure ci-dessous) est remplie d'eau. Calculez la force exercée par la pression sur les deux côtés suivants de la piscine.

Dans chacun des cas, vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation de la force exercée sur le coté et en déduire une intégrale définie pour la force exercée sur le coté. Finalement, vous devez évaluer cette intégrale. Prenez soin de bien définir toutes vos variables.

- a) Pour le coté A de la piscine
- b) Pour le coté B de la piscine.



Question 2.28

Un cylindre fermé aux extrémités se retrouve sur le côté au font d'un lac. Le diamètre du cylindre est de 10 cm et sa longueur de 20 cm. Si la profondeur du lac est de 6 mètres, quelle est la force exercée sur les extrémités du cylindre? Il faut se rappeler que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 . Bien identifier les variables utilisées dans votre solution.

Question 2.29

Le taux de croissance (instantané) d'une population de bactéries au temps t en minutes est donné par la formule $r(t) = \frac{1000}{(2+3t)^{3/4}}$ bactéries/heure.

- a) Si la population initiale est de 10^6 bactéries, quelle est le nombre de bactéries après T minutes?
- **b**) Est-ce que cette population de bactéries peut supporter ce taux de croissance? En d'autre mots, est-ce que le nombre de bactéries tend vers une valeur finie lorsque T tend vers plus l'infini?
- c) Si la population initiale est toujours de 10^6 bactéries comme en (a), combien de temps s'écoule-t-il avant que l'on atteigne 2×10^6 bactéries? Est-ce que ce résultat pourrait justifier une réponse différente en (b)?

Question 2.30

Si \$5000 est investit à un taux de 7% d'intérêt, quelle est la valeur de l'investissement après 2 ans si l'intérêt est calculé mensuellement? De façon continue?

Question 2.31

Un placement garantie un revenu de 100 + 10t dollars par année pour une période de dix ans où t est le nombre d'années depuis la date du placement que l'on assume comme étant aujourd'hui. Trouvez la valeur présente de ce placement à la fin des dix ans si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue.

Question 2.32

On sait qu'un bon vin prend de la valeur avec l'âge. Supposer que vous êtes un marchant de vin et que vous savez que le prix d'une bouteille de votre vin sera de $P(1+20\sqrt{t})$ dollars dans t années où P dollars est le prix présent d'une bouteille de votre vin. Si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue, qu'elle est le meilleur temps pour vendre votre vin?

Question 2.33

On vous doit une certaine somme d'argent. On vous offre deux options pour vous rembourser. Pour la première option, on vous offre de payer cette dette en quatre versements de \$5,000 chacun sur une période de trois ans en commençant maintenant avec le premier versement de \$5,000. Pour la deuxième option, on vous offre de payer la dette en un seul versement de \$23,000 dans exactement trois ans à partir de maintenant. Si on suppose que le taux d'intérêt est de 6% par année, composé de façon continue, quelle option de remboursement est le plus profitable?

Question 2.34

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n^2}$ converge ou diverge?



Équations différentielles

Introduction 3.1

Exemple $3.1.1 \clubsuit$

Un des plus simples modèles de croissance de population est celui où l'on assume que le taux de croissance (instantané) d'une population est proportionnel au nombre d'individus dans la population. Si p(t) est le nombre d'individus au temps t, alors la supposition précédente se traduit mathématiquement par

$$p'(t) = kp(t)$$

pour tout t, où k est la constante de proportionnalité. La constante k est appelée le taux de croissance relatif car on a $k = \frac{p'(t)}{p(t)}$; le taux de croissance divis par la taille de la population.

L'équation p'(t) = kp(t) est ce que l'on appelle une équation différentielle. C'est une équation qui contient une fonction et des dérivées de cette fonction.

Quelles sont les fonctions qui satisfont l'équation p'(t) = k p(t) pour tout t? La fonction $\phi(t) = C e^{kt}$, où C est une constante, satisfait cette équation car $\phi'(t) = kC e^{kt}$ et ainsi

$$\phi'(t) - k \, \phi(t) = kC \, e^{kt} - kC \, e^{kt} = 0$$

pour tout t. La fonction ϕ est appelée une solution de l'équation différentielle p'(t) = k p(t).

Exemple 3.1.2

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0$$

est une autre équation différentielle.

La fonction $\phi(t) = \sin(\sqrt{5}t)$ est une solution de l'équation différentielle g''(t) + 5g(t) = 0car $\phi'(t) = \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t)$ et $\phi''(t) = -5\sin(\sqrt{5}t)$. Ainsi,

$$\phi''(t) + 5\phi(t) = -5\sin(\sqrt{5}t) + 5\sin(\sqrt{5}t) = 0$$

pour tout t. Vérifier que $\phi(t) = \cos(\sqrt{5}t)$ est aussi une solution de g''(t) + 5g(t) = 0.

Combien de solutions peut avoir une équation différentielle? On a vue que $\phi(t) = Ce^{kt}$, où C est une constante arbitraire, est une solution de p'(t) = k p(t). On trouve donc un nombre infini de solutions, une pour chaque valeur de C. On montrera prochainement que toutes les solutions de p'(t) = k p(t) sont de cette forme. La possibilité d'avoir un nombre infini de solutions est en fait très bénéfique comme on peut le constater à l'exemple qui suit.

Exemple 3.1.3 **\$**

Soit une population de bactéries ayant un taux de croissance relatif de 1.1. C'est-à-dire que p'(t) = 1.1p(t) où p(t) est le nombre de bactéries au temps t. Si on suppose que le temps t est mesuré en heures et qu'initialement on a 10^5 bactéries, combien de bactéries aurons-nous après 2 heures?

Il faut trouver la fonction ϕ qui satisfait l'équation différentielle p'(t) = 1.1p(t) et la condition initiale $\phi(0) = 10^5$. On a vu que ϕ était de la forme $\phi(t) = C e^{1.1 t}$ pour une constante arbitraire C. La constante C est utilisée pour satisfaire la condition initiale $\phi(0) = 10^5$. On a $\phi(0) = C = 10^5$. La solution est donc $\phi(t) = 10^5 e^{1.1 t}$.

À
$$t=2$$
 heures, on trouve $\phi(2)=10^5\,e^{2.2}\approx 902,501$ bactéries.

Il y a un type d'équations différentielles que nous pouvons résoudre à l'aide des techniques d'intégration que nous avons étudiées. Les équations de la forme

$$f'(t) = g(t) ,$$

où g est une fonction connue, sont des équations différentielles. L'intégrale de g nous donne la fonction f. Cette fonction f contient une constante d'intégration qui est utilisée pour satisfaire une condition initiale.

Exemple 3.1.4

Supposons que le taux instantané d'évaporation de l'eau contenu dans un lac soit décrit par la formule $r(t) = \alpha t(24 - t)$ l/h où t en heures varie de 0 à 24 heures et $\alpha > 0$ est une constante qui peut dépendre de l'ensoleillement, du taux d'humidité dans l'air, etc. Plus la journée sera ensoleillée et sèche, plus α sera grand.

On remarque que le taux d'évaporation est nul à minuit (lorsque t=0 ou 24 heures) et qu'il est maximal à midi (lorsque t=12 heures). Supposons qu'un ruisseau déverse β l/h d'eau dans le lac. La constante β dépend entre autres du niveau d'eau dans le ruisseau.

Donner une équation différentielle pour le taux de variation instantanée du volume d'eau V(t) dans le lac au temps t. Résolvez cette équation pour obtenir une formule pour V(t) qui dépendra des paramètres α et β . Si $\alpha=1.1$, combien de litres d'eau par heure devront être déversé dans le lac par le ruisseau pour que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée ? La valeur de β peut être utilisée pour contrôler le niveau d'eau dans le ruisseau.

L'équation différentielle qui décrit le volume d'eau V(t) dans le lac au cours de la journée est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = -\alpha t(24 - t) + \beta$$

pour $0 \le t \le 24$. Le signe négatif qui précède le terme $\alpha t(24-t)$ indique une diminution du volume d'eau dans le lac dû à l'évaporation.

3.1. Introduction 161

Ainsi,

$$V(t) = \int (-\alpha t(24 - t) + \beta) dt = -24\alpha \int t dt + \alpha \int t^2 dt + \beta \int 1 dt$$

= -12\alpha t^2 + \frac{\alpha t^3}{3} + \beta t + C,

où C est la constante d'intégration. La valeur de C est déterminé par la condition initiale $V(0) = V_0$, la quantité initiale d'eau dans le lac. Dans le cas présent, $C = V_0$.

Pour déterminer la valeur de β qui fera que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée, il faut résoudre pour β l'équation V(0) = V(24) avec $\alpha = 1.1$. C'est-à-dire, il faut trouver β tel que

$$V_0 = -12 \times 1.1 \times 24^2 + \frac{1.1}{3} \times 24^3 + 24 \beta + V_0.$$

On obtient $\beta = 105.6 \text{ l/h}$.

Définition 3.1.5

Une équation différentielle est une équation de la forme

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x), ...) = 0$$
 , $a < x < b$ (3.1.1)

où G est une équation de plusieurs variables et y est une fonction inconnue qui satisfait l'équation pour tout x dans l'intervalle]a,b[.

Le but est de trouver cette ou ces fonctions y.

Exemple 3.1.6

L'équation p'(t) = kp(t) est de la forme G(t, p(t), p'(t)) = 0. En effet, si $G(t, u_1, u_2) = u_2 - ku_1$, on obtient G(t, p(t), p'(t)) = p'(t) - kp(t) = 0 si et seulement si p'(t) = kp(t).

Exemple 3.1.7

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0 (3.1.2)$$

est une équation différentielle car (3.1.2) est de la forme G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = 0.

En effet, si $G(t, u_1, u_2, u_3) = u_3 + 5u_1$, on obtient G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = g''(t) + 5g(t) = 0 si et seulement si g''(t) + 5g(t) = 0.

Définition 3.1.8

Une fonction ϕ est une **solution** de l'équation différentielle (3.1.1) si cette équation est satisfaite pour tout x dans l'intervalle a, b lorsque y est remplacé par ϕ .

Exemple 3.1.9

Les trois équations suivantes sont des équations différentielles pour la fonction inconnue y.

$$y'(x) = y(x) , (3.1.3)$$

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 (3.1.4)$$

et

$$y''(x) + 4y(x) = 5e^{-x}. (3.1.5)$$

L'équation (3.1.3) est de la forme (3.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3) = u_3 - u_2$, l'équation (3.1.4) est de la forme (3.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_3 + 4u_2$, et l'équation (3.1.5) est de la forme (3.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_2 - 5e^{-u_1}$.

La fonction $\phi(x) = e^x$ est une solution de (3.1.3) car

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (e^x) = e^x = \phi(x)$$

pour tout x.

La fonction $\phi(x) = e^{-2x}$ est une solution de (3.1.4) car

$$\phi''(x) + 4\phi'(x) + 4\phi(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(e^{-2x} \right) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^{-2x} \right) + 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 8e^{-2x} + 4e^{-2x} = 0$$

pour tout x. De même, $\phi(x) = xe^{-2x}$ est une solution de (3.1.4). Toutes les solutions de (3.1.4) sont de la forme $\phi(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ où A et B sont des constantes. Il y a donc un nombre infini de solutions de (3.1.4).

Finalement, $\phi(x) = \cos(2x) + e^{-x}$ est une solution de (3.1.5) car

$$\phi''(x) + 4\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\cos(2x) + e^{-x}\right) + 4\left(\cos(2x) + e^{-x}\right)$$
$$= -4\cos(2x) + e^{-x} + 4\cos(2x) + 4e^{-x} = 5e^{-x}$$

pour tout x. De même, $\phi(x) = \sin(2x) + e^{-x}$ est une solution de (3.1.5) ainsi que toutes les fonctions de la forme $\phi(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + e^{-x}$ où A et B sont des constantes. \clubsuit

Définition 3.1.10

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal des dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle.

Ainsi, (3.1.3) est d'ordre un alors que (3.1.4) et (3.1.5) sont d'ordre deux.

L'étude des équations différentielles (i.e. trouver si une solution existe, trouver les solutions, décrire le comportement des solutions, etc) est un vaste domaine qui est toujours en évolution.

La prochaine section montre comment résoudre un type simple d'équations différentielles du premier ordre que l'on appelle équations différentielles séparables.

3.2 Équations différentielles séparables

Définition 3.2.1

Une équation différentielle séparable est une équation différentielle de la forme

$$g(y(x))y'(x) = f(x)$$
 (3.2.1)

où f et g sont deux fonctions.

Si on intègre par rapport à x des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int f(x) dx.$$

L'intégrale du côté gauche de l'égalité est

$$\int g(y) \, \mathrm{d}y$$

après la substitution y = y(x) et dy = y'(x) dx. On obtient donc

$$\int g(y) \, \mathrm{d}y = \int f(x) \, \mathrm{d}x \; .$$

Si on intègre des deux côtés de l'égalité et résout pour y en fonction de x (si cela est possible), on obtient une famille de solutions paramétrées par la constante d'intégration.

Les équations différentielles de la forme (3.2.1) sont dites séparables car on peut les réduire à une égalité où l'un des côtés dépend seulement de la variable dépendante et l'autre seulement de la variable indépendante.

Exemple 3.2.2

Trouver une famille de solutions pour

$$y'=y^3$$
.

Il est commun de ne pas mentionner explicitement la dépendance de y par rapport à x. Ainsi, on écrit seulement y mais il faut sous-entendre y(x).

Si on sépare les variables, on obtient

$$\frac{y'}{y^3} = 1 .$$

Si on intègre par rapport à x des deux côtés de l'égalité, on trouve

$$\int \frac{1}{y^3} \, \mathrm{d}y = \int \frac{y'(x)}{y^3(x)} \, \mathrm{d}x = \int \, \mathrm{d}x \; .$$

Ainsi

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si on résout pour y en fonction de x on obtient

$$y = \frac{1}{\sqrt{-2(x+C)}}$$

pour x < -C. On a une solution différente pour chaque valeur de C.

*

Exemple 3.2.3

Trouver une famille de solutions pour

$$x^3y' + y = 0. (3.2.2)$$

Si on sépare les variables, on obtient

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^3} \ .$$

Si on intègre par rapport à x, on trouve

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int x^{-3} dx.$$

Ainsi,

$$\ln|y| = \frac{x^{-2}}{2} + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$|y| = e^{1/(2x^2) + C} = e^C e^{1/(2x^2)} = De^{1/(2x^2)}$$

où $D = e^C > 0$ est une constante. Donc,

$$y = \pm De^{1/(2x^2)} .$$

L'expression $\pm D$ avec D > 0 désigne une constante E qui peut être positive ou négative. En fait, on peut aussi accepter que E soit nul car y(x) = 0 pour tout x est une solution de (3.2.2). On obtient la famille de solutions

$$y = Ee^{1/(2x^2)}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante.



On peut spécifier une solution particulière de la famille de solutions d'une équation différentielle en ajoutant une condition initiale.

Définition 3.2.4

Une **condition initiale** pour une équation différentielle G(x, y(x), y'(x)) = 0 d'ordre un est une condition de la forme $y(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des valeurs données.

Exemple 3.2.5

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

avec la condition initiale y(0) = 1/2.

On commence par trouver la famille de solutions de l'équation différentielle. Si on sépare les variables et intègre par rapport à x, on trouve

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2(x)}} y'(x) \, \mathrm{d}x = \int \, \mathrm{d}x \,.$$

Ainsi

$$\arcsin(y) = x + C$$
.

La condition initiale y(0) = 1/2 implique que $\pi/6 = \arcsin(1/2) = 0 + C$. Donc, $C = \pi/6$ et on trouve la solution

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .$$

Exemple 3.2.6

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$ye^{-x}y' = x$$

avec la condition initiale y(0) = 1.

Si on sépare les variables et intègre par rapport à x, on obtient

$$\int y \, dy = \int y(x)y'(x) \, dx = \int xe^x \, dx.$$

Ainsi,

$$\frac{y^2}{2} = xe^x - e^x + C \ .$$

La condition initiale y(0)=1 donne $\frac{1}{2}=-1+C$. Donc, $C=\frac{3}{2}$ et on obtient la solution

$$y = \sqrt{2xe^x - 2e^x + 3} \ . \tag{3.2.3}$$

Notez que $y = -\sqrt{2xe^x - 2e^x + 3}$ est aussi une solution de l'équation différentielle mais elle ne satisfait pas y(0) = 1; on a y(0) = -1 dans ce cas.

De plus, la solution en (3.2.3) est définie pour tout x car $g(x) = 2xe^x - 2e^x + 3 \ge 1$ pour tout x. Pour démontrer cela, il suffit de trouver le minimum absolu de g. On a $g'(x) = 2xe^x$. Donc, g'(x) < 0 pour x < 0, g'(x) = 0 à x = 0 et g'(x) > 0 pour x > 0. g a donc un minimum absolu à x = 0 qui est g(0) = 1.

Exemple 3.2.7

La loi de Newton pour la chaleur affirme que le taux de variation de la température d'un

objet, qui se trouve dans un milieu où la température est constante, est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante.

Mathématiquement, la loi de Newton pour la chaleur affirme que

$$y'(t) = K(M - y(t)) (3.2.4)$$

où y(t) est la température d'un objet au temps t, M est la température ambiante du milieu dans lequel se trouve l'objet et K est une constante positive qui dépend de la conductivité thermique de l'objet et de sa surface exposée. La loi de Newton est valable si la différence de température entre la température ambiante et la température de l'objet n'est pas trop grande. Si y et M sont en degrés centigrades et t est en minutes alors les unités de la constante K sont des min⁻¹.

L'équation de la chaleur est séparable. Si on sépare les variables et intègre des deux côtés par rapport à t, on trouve

$$\int \frac{1}{M-y} dy = \int \frac{1}{M-y(t)} y'(t) dt = \int K dt.$$

Ainsi,

$$-\ln|M - y| = Kt + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si on multiplie par -1 des deux côtés et prend l'exponentielle, on obtient

$$|M - y| = e^{-Kt - C} = De^{-Kt}$$

où $D = e^{-C} > 0$ est une constante. Donc.

$$y = M - \pm De^{-Kt}$$

où $\pm D$ désigne une nombre positif ou négatif que l'on désigne par E. Comme E peut aussi être nul, car y(t)=M pour tout t est une solution de (3.2.4), on obtient la famille de solutions

$$y = M - Ee^{-Kt}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante qui est déterminée par la condition initiale.

Si t est en minutes, $M = 10^{\circ}$ C et $K = 0.5 \text{ min}^{-1}$, on obtient

$$y = 10 - Ee^{-0.5t} .$$

Si on suppose que la température de l'objet est de 30°C lorsque t=0 min., alors E est déterminé par l'équation 30=10-E. Ainsi, E=-20 et la solution cherchée est

$$y = 10 + 20e^{-0.5t} .$$

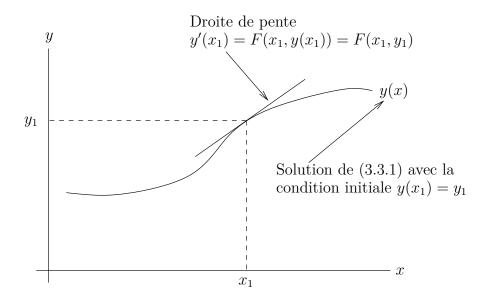


FIGURE 3.1 – Le graphe possible de la solution y de (3.3.1) qui passe par (x_1, y_1) .

3.3 Étude qualitative des équations différentielles – Équations non-autonomes **\$**

Bien souvent il est très difficile et même impossible de trouver une solution explicite pour une équation différentielle. Il est alors préférable (et bien souvent suffisant) d'étudier le comportement qualitatif des solutions.

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y'(x) = F(x, y(x))$$
 , $a < x < b$, (3.3.1)

où F est une fonction de deux variables. Soit y(x), la solution de (3.3.1) qui passe par le point (x_1, y_1) ; c'est-à-dire que $y(x_1) = y_1$. Un graphe possible pour la solution y est tracé à la figure 3.1. La pente de la droite tangente à la solution y au point $(x_1, y(x_1)) = (x_1, y_1)$ est $y'(x_1) = F(x_1, y(x_1)) = F(x_1, y_1)$.

Sans connaître la solution qui passe par le point (x_1, y_1) , on peut déterminer la direction de cette solution (i.e. la pente de la tangente à cette solution au point (x_1, y_1)) simplement en évaluant $F(x_1, y_1)$.

On peut donc déterminer l'aspect qualitatif des solutions à l'aide d'un **champ de pentes** pour l'équation différentielle. Pour dessiner un champ de pentes, on choisit un ensemble de points du plan x, y et à chacun de ces points (x, y) on trace une courte droite de pente F(x, y). On donne un champ de pentes possible pour (3.3.1) à la figure 3.2.

À la figure 3.2, si une solution passe dans une région où les courtes droites ont une pente positive, cette solution doit être croissante car la pente d'une droite tangente à cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être positive (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage). De même, une solution qui passe dans une

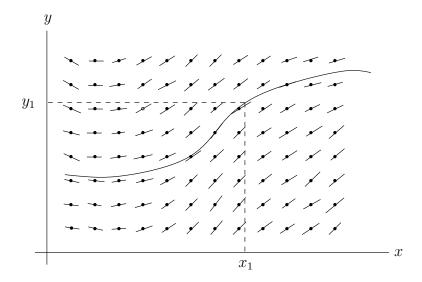


FIGURE 3.2 – Un champ de pentes possible pour (3.3.1)

région où les courtes droites ont une pente négative doit être décroissante car la pente d'une droite tangente à cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être négative (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage).

Exemple 3.3.1

Dessiner un champ de pentes pour l'équation différentielle

$$y' = xe^{xy} (3.3.2)$$

Cette équation différentielle n'est pas séparable. On ne peut donc pas utiliser la méthode introduite précédemment pour trouver les solutions de (3.3.2).

On retrouve un champ de pentes pour (3.3.2) à la figure 3.3. Quatres solutions ont été tracées : les solutions qui passent par (0, -2), (0, -1), [0, 0] et (-1, 1). Les solutions ont été tracées à l'aide d'une méthode numérique comme la méthode d'Euler que nous verrons dans une prochaine section.

Exemple 3.3.2

On donne à la figure 3.4, le champ de pentes associé à l'équation différentielle

$$y'(x) = (x-1)^2 - y - 1.$$

- a) Tracez approximativement la solution qui passe par le point (-1,1). Est-ce que cette solution augmente lorsque x = -1? Lorsque x = 2?
- **b**) Existe-t-il une solution dont le graphe est une parabole?
- c) Quelles sont les valeurs de x_0 et y_0 pour que la solution qui passe par (x_0, y_0) ait un minimum à $x = x_0$?
- d) Est-ce que pour tout x_0 il existe au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) sera concave à $x = x_0$?

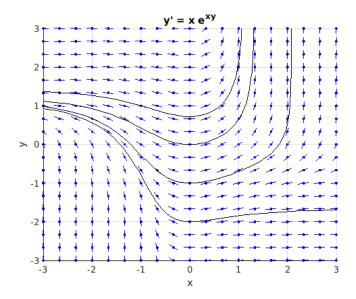


FIGURE 3.3 – Un champ de pentes pour l'équation différentielle en (3.3.2)

Nous répondons à chacune de ces questions.

- a) À la figure 3.4, on a tracé à l'aide du champ de pentes le graphe possible de la solution qui passe par le point (-1,1). La solution est croissante lorsque x=-1 alors qu'elle est décroissante lorsque x=2.
- **b**) On cherche une solution de la forme $y = ax^2 + bx + c$. Si on substitue dans l'équation différentielle, on trouve

$$2ax + b = (x - 1)^{2} - (ax^{2} + bx + c) - 1 = (1 - a)x^{2} - (b + 2)x - c.$$

Si on regroupe les constantes et les coefficients de x et de x^2 , on obtient

$$0 = (1 - a)x^{2} - (b + 2 + 2a)x - (c + b).$$

Comme cette équation doit être satisfaite pour tout x, on a 1-a=0, b+2+2a=0 et c+b=0. On obtient a=1, b=-4 et c=4. Il y a une seule solution dont le graphe est une parabole et cette solution est $y=x^2-4x+4$.

c) La solution aura un minimum au point x_0 si $y'(x_0) = 0$ et $y''(x_0) > 0$. Or,

$$y'(x_0) = (x_0 - 1)^2 - y(x_0) - 1$$

et

$$y''(x_0) = 2(x_0 - 1) - y'(x_0) = 2(x_0 - 1) - ((x_0 - 1)^2 - y(x_0) + 1)$$

= $-x_0^2 + 4x_0 - 4 - y(x_0)$.

De $y'(x_0) = 0$, on trouve $y(x_0) = (x_0 - 1)^2 - 1 = x_0^2 - 2x_0$. Si on substitue cette valeur de $y(x_0)$ dans l'équation pour y'', on obtient

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 4 - (x_0^2 - 2x_0) = -2x_0^2 + 6x_0 - 4 = -2(x_0 - 2)(x_0 - 1).$$

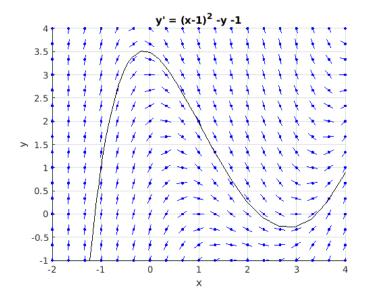


FIGURE 3.4 – Champ de pentes de l'équation différentielle $y' = (x-1)^2 - y + 1$. La courbe est le graphe de la solution qui satisfait y(-1) = 1.

Donc, $y''(x_0) > 0$ pour $x_0 < 1$ ou $x_0 > 2$. Les solutions qui passent par les points $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2 - 2x_0)$ lorsque $x_0 < 1$ ou $x_0 > 2$ auront donc un minimum local en ce point.

d) On rappelle que la solution sera concave au point x_0 si $y''(x_0) < 0$. Or, on vient de montrer que

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 4 - y(x_0) .$$

Il suffit donc de prendre $y_0 = y(x_0)$ assez grand pour que $x_0^2 - 4x_0 + 4 + y(x_0) > 0$. Il existe donc au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) est concave à $x = x_0$.

3.4 Existence et unicité des solutions

Avant de continuer l'étude des équations différentielle, il faut donner des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions. Il est inutile d'essayer de trouver une solution si la théorie nous dit qu'aucune solution existe.

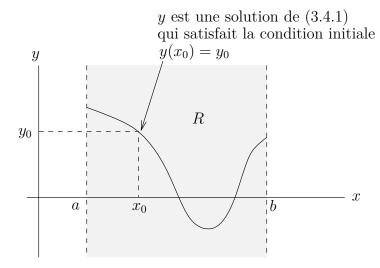


FIGURE 3.5 – Domaine d'existence et d'unicité des solutions avec la solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$

Théorème 3.4.1 (Existence et Unicité)

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = F(x, y(x))$$
 (3.4.1)

avec la condition initiale

$$y(x_0) = y_0 .$$

Soit

$$R = \{(x, y) : a < x < b \text{ et } -\infty < y < \infty\}$$
.

Cette région est représenté à la figure 3.5. Si la fonction F est différentiable sur R et $(x_0, y_0) \in R$ alors, il existe une et une seule solution de l'équation différentielle (3.4.1) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exemple 3.4.2

Existe-t-il une solution de l'équation différentielle

$$xy' = 2y \tag{3.4.2}$$

avec y(0) = 1?

Cette équation différentielle est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{2}{x} dx.$$

Ainsi,

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

où C est une constante d'intégration. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, on obtient $|y|=e^C x^2$. On a donc que $y=\pm e^C x^2$. Si on remplace $\pm e^C$ par une constante $D\in\mathbb{R}$, on obtient la famille de solutions

$$y = Dx^2$$

où D est une constante. Cependant, la condition y(0) = 1 implique que 1 = 0 quel que soit D. Il n'y a donc pas de solution qui puisse satisfaire y(0) = 1.

Si on remplace la condition initiale par y(0) = 0 alors on a un nombre infini de solutions pour (3.4.2) avec y(0) = 0. Toutes les solutions de la forme $y = Dx^2$ avec $D \in \mathbb{R}$ satisfont y(0) = 0.

On remarque que (3.4.2) peut être écrite de la forme y' = F(x,y) où F(x,y) = 2y/x. Cette dernière fonction n'est pas différentiable par rapport à x à l'origine.

Exemple 3.4.3

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' = y^2 - 4 (3.4.3)$$

avec la condition initiale y(0) = -2.

Cette équation différentielle est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y^2 - 4} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{y^2(x) - 4} \, y'(x) \, \mathrm{d}x = \int \, \mathrm{d}x \,. \tag{3.4.4}$$

Pour évaluer l'intégrale en y, on remarque que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y - 2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y + 2} \right) .$$

Ainsi,

$$\int \frac{1}{y^2 - 4} \, dy = \frac{1}{4} \int \frac{1}{y - 2} \, dy - \frac{1}{4} \int \frac{1}{y + 2} \, dy = \frac{1}{4} \ln|y - 2| - \frac{1}{4} \ln|y + 2| + E$$
$$= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{y - 2}{y + 2}\right| + E$$

où E est une constante d'intégration. On a donc de (3.4.4) que

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = x + C$$

où C est une constante. Si on multiplie chacun des côtés de cette égalité par 4 et l'on prend l'exponentielle, on obtient

$$\left| \frac{y-2}{y+2} \right| = e^{4C} e^{4x} \ .$$

Donc,

$$\frac{y-2}{y+2} = De^{4x}$$

où $D=\pm e^{4C}$ est une constante réelle. Si on résout pour y en fonction de x, on trouve

$$y = 2 \, \frac{1 + De^{4x}}{1 - De^{4x}} \; .$$

La condition y(0) = -2 donne

$$-2 = 2\frac{1+D}{1-D} \ .$$

Donc, -2(1-D) = 2(1+D) et l'on trouve -2 = 2.

Il semble qu'il n'y ait pas de solution avec la condition initiale y(0) = -2. Cependant, (3.4.3) est de la forme y' = F(x, y) avec $F(x, y) = y^2 - 4$. La fonction F est différentiable pour tout x et y. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions nous dit qu'il devrait y avoir une solution unique.

En fait la solution est y(x) = -2 pour tout x. La méthode de séparation des variables ne peut être utilisé quand y = 2 ou y = -2 car $1/(y^2 - 4)$ donnerait une division par zéro.

Il faut donc être prudent avec les méthodes de résolution des équations différentielles, elle peuvent ne pas donner toutes les solutions.

3.5 Étude qualitative des équations différentielles – Équations autonomes **\$**

Les équations différentielles de la forme

$$y'(x) = F(y(x))$$
 , $a < x < b$, (3.5.1)

sont très fréquentes et possèdent des propriétés que les équations différentielles de la forme (3.3.1) n'ont pas. On remarque que le côté droit de (3.5.1) ne dépend pas explicitement de x.

Définition 3.5.1

Une équation différentielle de la forme (3.5.1) (i.e. dont le côté droit ne dépend pas explicitement de x) est dite **autonome**.

3.5.1 Points d'équilibre

Certaines solutions d'une équation différentielle autonome joue un rôle particulièrement important. C'est le cas des points d'équilibre.

Si F(p) = 0, alors $\phi(x) = p$ pour tout x est une solution de (3.5.1) car $\phi'(x) = 0$ et $F(\phi(x)) = F(p) = 0$ pour tout x.

Définiton 3.5.2

Une solution constante de l'équation différentielle autonome (3.5.1) est appelée un **point d'équilibre** ou **état d'équilibre**.

Pour apprécier l'importance des points d'équilibre, il faut considérer le <u>portrait de phases</u> de l'équation différentielle (3.5.1). Le portrait de phases explique aussi pourquoi les solutions constantes sont appelées des points d'équilibre.

Définiton 3.5.3

L'orbite d'une solution ϕ d'une équation différentielle autonome (3.5.1) est l'image

$$\{\phi(x) : a < x < b\}$$

de cette solution. C'est donc un ensemble de points que l'on peut tracer sur la droite réelle (et auquel on ajoute une flèche pour indiquer la direction parcourue quand x augmente). Le **portrait de phases** d'une équation différentielle autonome est l'ensemble des orbites représentés sur la droite réelle.

Remarque 3.5.4 ②

Une conséquence importante du théorème d'existence et d'unicité des solutions est que si R_1 est l'image d'une solution ϕ_1 et R_2 est l'image d'une solution ϕ_2 d'une équation différentielle autonome alors $R_1 = R_2$ ou $R_1 \cup R_2 = \emptyset$.

En effet, si $R_1 \cup R_2 \neq \emptyset$ alors ils existent x_1 et x_2 tels que $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$. Si on définie la fonction ϕ_3 par $\phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x, alors ϕ_3 est une solution de l'équation différentielle autonome (on laisse au lecteur le soin de vérifier cet énoncé) avec la même condition initiale que ϕ_1 car

$$\phi_3(x_1) = \phi_2(x_1 + x_2 - x_1) = \phi_2(x_2) = \phi_1(x_1)$$
.

Il découle du théorème d'existence et d'unicité des solutions que $\phi_1(x) = \phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x et ainsi $R_1 = R_2$.

La meilleure façon de comprendre ce qu'est un portrait de phases est avec un exemple.

Exemple 3.5.5

Considérons la loi de Newton pour la chaleur que l'on a vue à l'exemple 3.2.7. C'est-à-dire,

$$y'(t) = K(M - y(t)) (3.5.2)$$

où y(t) est la température d'un objet au temps t, M est la température du milieu dans lequel se trouve l'objet et K est une constante positive.

La fonction constante $\phi(t) = M$ pour tout t est une point d'équilibre pour la lois de Newton. Si on substitue y = M dans (3.5.2), on obtient 0 des deux côtés du signe d'égalité.

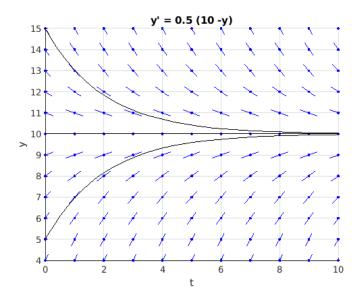


FIGURE 3.6 – Le champ de pentes pour l'équation différentielle (3.5.2) qui gouverne la loi de Newton pour la chaleur, où M = 10 et K = 0.5. De plus, on retrouve dans la figure les solutions avec les conditions initiales y(0) = 5, y(0) = 10 et y(0) = 15.

L'existence du point d'équilibre M ne devrait pas surprendre le lecteur car cela veut seulement dire que si l'objet est à la température du milieu alors sa température ne changera pas.

On donne à la figure 3.6 le champ de pentes pour la loi de Newton dans le cas où M=10 et K=0.5. On voit que toute solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 est décroissante alors que toute solution qui débute avec une valeur plus petite que 10 est croissante. Toutes les solutions approchent la droite y=10 lorsque t tend vers plus l'infini.

Le portrait de phases de l'équation différentielle pour la loi de Newton est donné à la figure 3.7. Il nous permet de visualiser facilement le comportement des solutions. Les flèches indiquent la direction parcourue quand t augmente. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur plus petite que 10 augmentent et approchent 10 alors que celles qui débutent avec une valeur plus grande que 10 diminuent et approchent 10.

Puisque y'(t) = F(y(t)), le signe de F(y) détermine si la solution y(t) est croissante ou décroissante. Si F(y) > 0, on a y'(t) > 0 et y(t) est croissante. Si F(y) < 0, on a y'(t) < 0 et y(t) est décroissante. C'est ce que l'on observe à la figure 3.7 pour la solution de l'équation différentielle pour la loi de Newton.

Remarque 3.5.6

Dans l'exemple précédent, serait-il possible qu'une solution ϕ qui débute avec une valeur plus grande que 10 à t=0 atteigne une valeur plus petite que 10 pour une valeur positive de t? Dans un milieu où la température est constante, il est intuitivement claire que si un objet débute à une température supérieure à celle du milieu, l'objet va refroidir en approchant de plus en plus la température du milieu. L'objet n'atteindra jamais une température inférieure

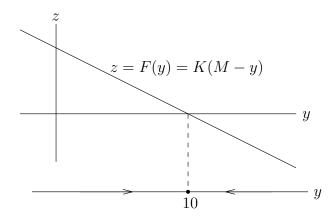


FIGURE 3.7 – Le portrait de phases de l'équation différentielle (3.5.2) qui gouverne la loi de Newton pour la chaleur, où M=10 et K=0.5. On a aussi tracé le graphe de F(y)=K(M-y) pour M=10 et K=0.5.

à celle du milieu. On peut obtenir la même conclusion en utilisant des arguments purement mathématiques. On a démontré à la remarque 3.5.4 que l'image d'une solution est soit identique à ou distincte de l'image d'une autre solution. Ainsi l'image d'une solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 ne pourra jamais avoir la valeur 10 dans sont image car 10 est l'image de la solution constante $y(t) \equiv 10$ pour tout x.

Définition 3.5.7

Un point d'équilibre p pour (3.5.1) est **stable** si toute solution de (3.5.1) avec une condition initiale assez près de p demeure près de p lorsque x augmente. Si p n'est pas stable, on dit que p est **instable**.

Un point d'équilibre p pour (3.5.1) est **asymptotiquement stable** s'il est stable et de plus, toutes solutions de (3.5.1) avec une condition initiale assez près de p tend vers p lorsque x tend vers plus l'infini.

Exemple 3.5.8

Dans le cas de la loi de Newton pour la chaleur qui a été étudiée à l'exemple 3.5.5, le portrait de phases de l'équation différentielle (3.5.2) donné à la figure 3.7 montre que le point d'équilibre 10 est asymptotiquement stable.

Il y a une façon simple de déterminer si un point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 3.5.9

Si p est une point d'équilibre de (3.5.1), alors p est asymptotiquement stable si F'(p) < 0. Si F'(p) > 0, le point d'équilibre est instable.

Exemple 3.5.10

L'équation différentielle pour la loi de Newton pour la chaleur est de la forme y' = F(y) où

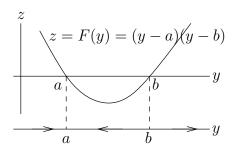


FIGURE 3.8 – Le portrait de phases de l'équation différentielle y' = F(y). On a aussi tracé le graphe de F(y) = (y - a)(y - b).

F(y) = K(M-y). Ainsi, F'(M) = -K < 0 et M est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Puisque F'(M) < 0, donc F est décroissante, et F(M) = 0, on a que F(t) > 0 pour t < M et F(t) < 0 for t > t. C'est ce que l'on retrouve pour le graphe de la fonction F à la figure 3.7,

Exemple 3.5.11

L'équation différentielle y' = F(y) = (y - a)(y - b) où a < b a deux points d'équilibre. Puisque F'(y) = (y - b) + (y - a), on a que F'(a) = a - b < 0 et F'(b) = b - a > 0. Ainsi, a est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors que b est instable.

On retrouve le portrait de phases du système y' = F(y) à la figure 3.8.

Exemple 3.5.12

On considère l'équation différentielle

$$y' = y^3 - 4y^2 - y + 4$$

- a) Trouvez les points d'équilibre.
- b) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre (théorème 3.5.9).
- c) Tracez le portrait de phases.
- d) Tracez la solution qui possède la condition initiale y(0) = 3.

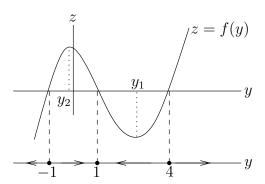
On a l'équation différentielle y' = f(y) où $f(y) = y^3 - 4y^2 - y + 4 = (y+1)(y-1)(y-4)$. Les points d'équilibre sont les solutions de f(y) = 0. On obtient trois points d'équilibre y = -1, y = 1 et y = 4. Ce qui répond à la question en (a).

Pour déterminer la stabilité des points d'équilibre que nous avons trouvés, il faut utiliser $f'(y) = 3y^2 - 8y - 1$. Puisque f'(-1) = 10 > 0, le point d'équilibre y = -1 est instable. Il en est de même pour le point d'équilibre y = 4 car f'(4) = 15 > 0. Par contre, le point d'équilibre y = 1 est stable car f'(1) = -6 < 0. Ce qui répond à la question en (b).

Le portrait de phases demandé en (c) est

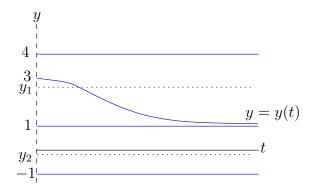


Pour déterminer la direction des flèches, on peut utiliser la stabilité des points d'équilibre que l'on a trouvés ci-dessus ou le graphe suivant.



Puisque y'=f(y), on a que y augmente lorsque f(y)>0 car y'>0 alors que y diminue lorsque f(y)<0 car y'<0. On note que f a une minimum local au point $y_1=\approx 2.7862996$ et un maximum local au point $y_2=\approx -0.119633$. Ce sont les points critiques de f; c'est-à-dire, les solutions de $f'(y)=3y^2-8y-1=0$.

Finalement, pour répondre à la question en (d), on utilise le fait que la solution avec la condition initiale y(0) = 3 va se trouver entre 1 et 4. Donc, la solution est décroissante car y' = f(y) est négative lorsque y est entre 1 et 4, et tend vers 1 lorsque t tend vers plus l'infini. On obtient



Si on regarde le graphe de la solution avec y(0) = 3, on remarque que la concavité change lorsque $y = y_1$. Pourquoi peut-on dire cela? Pour comprendre pourquoi la concavité change, il faut regarder le graphe de la fonction f ci-dessus. À partir de y = 4, f(y) devient de plus en plus négative lorsque y diminue jusqu'à ce que f atteigne son minimum local à $y = y_1$. Si y continue a diminuer, f(y) devient de moins en moins négative, mais toujours négative, et approche 0 lorsque y approche 1. Donc, la pente y' = f(y) de y diminue lorsque y approche y_1 par la droite et augmente après avoir passé y_1 . Ce que l'on vient de d'écrire est une point d'inflexion pour y; la pente y' diminue puis augmente lorsque t augmente.

Donc, le graphe d'une solution à un point d'inflexion lorsque f atteint un minimum local. Un raisonnement semblable montre que c'est aussi vrai lorsque f atteint un maximum local.

3.5.2 L'équation logistique

Un modèle mathématique simple pour décrire une population animale est donné par l'équation différentielle

$$y'(t) = ky(t) \tag{3.5.3}$$

où y(t) est le nombre d'individus dans la population au temps t et k est le **taux de croissance relatif** de la population. C'est-à-dire, k est la constante de proportionnalité entre le **taux de croissance (absolu)** de la population (i.e. y') et la taille de la population (i.e. y).

Dans le modèle précédent, on doit assumer que la population animale est très grande pour justifier l'utilisation de fonctions continues pour décrire cette population. De plus, bien souvent, y(t) décrit une densité de population pour une superficie ou un volume donnée.

L'équation différentielle (3.5.3) est séparable. On a

$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{y(t)} y'(t) \, \mathrm{d}t = \int k \, \mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$ln |y| = kt + C$$

où C est une constante. Si on résout pour y, on trouve

$$y = \pm e^C e^{kt}$$

où $\pm e^C$ désigne un nombre positif ou négatif que l'on représente par la lettre E. Comme E=0 est aussi acceptable, on obtient la solution

$$y = Ee^{kt} (3.5.4)$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante.

Pour k > 0, ce modèle est valide pour une courte période de temps (en particulier pour les populations de bactéries qui augmentent très rapidement au début de leur période de croissance) mais n'est pas valide lorsque t tend vers plus l'infini car on aurait que y(t) (la population au temps t) augmente sans borne supérieure.

On doit donc modifier le modèle précédent pour tenir compte du nombre maximal d'individus d'une population que le milieu peut supporter.

Soit M, le nombre maximal d'individus qu'un milieu peut supporter. Le **modèle logistique** de croissance d'une population est donné par l'équation différentielle autonome

$$y'(t) = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) \tag{3.5.5}$$

où y(t) est le nombre d'individus dans la population au temps t et k est le taux de croissance relatif de la population s'il n'y a pas de contraintes imposées par le milieu (i.e. $M \to \infty$).

La solution constante y(t) = M pour tout t est un point d'équilibre pour (3.5.5). Il en est de même pour la solution constante y(t) = 0 pour tout t. L'équation logistique est de la

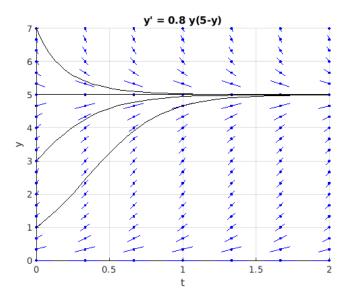


FIGURE 3.9 – Le champ de pentes pour l'équation logistique (3.5.5) où M=5 et k=0.8. On retrouve aussi dans cette figure les solutions avec les conditions initiales y(0)=1, y(0)=3, y(0)=5 et y(0)=7.

forme y' = F(y) où F(y) = ky(1-y/M). Puisque F'(y) = k-2ky/M, on a F'(M) = -k < 0 et F'(0) = k > 0. Ainsi, M est un point d'équilibre asymptotiquement stable et 0 est un point d'équilibre instable.

On peut aussi déterminer la stabilité des points d'équilibre directement à partir de l'équation différentielle (3.5.5). Si le nombre d'individus y(t) est initialement supérieur à M alors y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) < 0 pour $t \ge 0$ et y est une fonction décroissante qui approche le point d'équilibre M. Par contre, si le nombre d'individus y(0) est initialement inférieur à M (et supérieure à 0) alors y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) > 0 pour $t \ge 0$ et y est une fonction croissante qui approche le point d'équilibre M.

À la figure 3.9, on retrouve le champ de pentes ¹ pour l'équation logistique (3.5.5) dans le cas où k = 0.8 et M = 5. On assume que y(t) est le nombre d'individus en unité de milles (ou plus) au temps t.

Le portrait de phases de l'équation logistique se trouve à la figure 3.10. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur plus petite que 5 augmentent et approchent 5 alors que celles qui débutent avec une valeur plus grande que 5 diminuent et approchent 5. Le point d'équilibre 5 est asymptotiquement stable.

La solution avec la condition initiale y(0) = 1 possède un point d'inflexion. On peut déterminer la valeur de y où la solution a un point d'inflexion. On cherche en premier les

^{1.} Les segments de droites que l'on trace pour produire le champ de pentes sont de même longueur. Cependant, comme l'axe horizontal et l'axe vertical ne sont pas de la même échelle, l'axe horizontal va seulement de 0 à 2 alors que l'axe vertical va de 0 à 7, les segments paraissent de moins en moins longs lorsque la pente augmente. Si on avait utilisé la même échelle pour les deux axes, les solutions auraient convergé trop rapidement vers y=5.

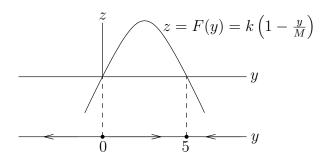


FIGURE 3.10 – Le portrait de phases de l'équation logistique (3.5.5) où M=5 et k=0.8. On a aussi tracé le graphe de F(y)=ky(1-y/M) pour nous aider à déterminer les régions où y est croissante et celles où y est décroissante.

valeurs de y où F(y) = ky(1 - y/M) a un maximum ou un minimum local. Le graphe de F(y) est une parabole concave vers le bas car le coefficient de y^2 est -k/M < 0. Comme les racines du polynôme ky(1 - y/M) sont y = 0 et y = M, ce polynôme a un seul maximum local (qui est aussi un maximum global) au point y = M/2. Donc, lorsque la solution y(t) passe d'une valeur plus petite à une valeur plus grande que M/2, y'(t) = F(y(t)) augmente pour atteindre son maximum lorsque y(t) = M/2 puis diminue.

Dans le cas de la figure 3.9 où M=5, on a que la solution avec la condition initiale y(0)=1 a un point d'inflexion lorsque y=2.5. Les solutions qui traversent la droite y=2.5 ont un point d'inflexion au temps t où elles coupent la droite y=2.5. Les solutions qui ne coupent pas la droite y=2.5 n'ont pas de point d'inflexion.

Sans résoudre l'équation logistique, on a été capable de tirer les conclusions les plus importantes de cette équation. On peut résoudre l'équation logistique car c'est une équation séparable.

Si on sépare les variables de (3.5.5) et intègre par rapport à t, on obtient

$$M \int \frac{1}{y(M-y)} \, dy = M \int \frac{1}{y(t)(M-y(t))} y'(t) \, dy = \int k \, dt .$$
 (3.5.6)

Pour calculer l'intégrale à gauche, il faut utiliser la méthode des fractions partielles. Puisque

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right)$$

on a

$$\int \frac{1}{y(M-y)} dy = \frac{1}{M} \int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{M} \int \frac{1}{M-y} dy = \frac{1}{M} (\ln|y| - \ln|M-y|)$$
$$= \frac{1}{M} \ln\left| \frac{y}{M-y} \right| + E,$$

où E est une constante. Ainsi, (3.5.6) donne

$$\ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = kt + C$$

où C est une constante. Si on prend l'exponentielle des deux côtés, on trouve

$$\left| \frac{y}{M - y} \right| = e^C e^{kt}$$

et ainsi

$$\frac{y}{M-y} = Qe^{kt}$$

où $Q = \pm e^C$. En fait, on peut simplement assumer que $Q \in \mathbb{R}$ car Q = 0 est aussi acceptable et donne la solution y = 0. Si on résout pour y, on trouve

$$y = \frac{MQe^{kt}}{1 + Qe^{kt}} \ .$$

Il y a une solution qui n'est pas donnée par cette formule. La solution y(t) = M pour tout t n'est pas donnée par cette formule. La constante Q est déterminée par la condition initiale.

Exemple 3.5.13

Un lac peut supporter 10⁴ truites. On ensemence le lac avec 1,000 truites et un an plus tard on compte 2,000 truites. Combien de truites y aura-t-il dans le lac après 5 ans? Combien d'années faut-il avant d'atteindre 3/4 de la population de truites que le lac peut supporter?

Si on assume que le nombre de truites y(t) au temps t en années est gouverné par le modèle logistique avec $M=10^4$ donnée dans l'énoncé du problème, alors

$$y(t) = \frac{10,000Qe^{kt}}{1 + Qe^{kt}} \ .$$

La condition initiale y(0) = 1,000 donne

$$1,000 = \frac{10,000Q}{1+Q} ...$$

Ainsi Q = 1/9. Pour déterminer k, on utilise l'information y(1) = 2000 donnée dans l'énoncé du problème pour obtenir

$$2,000 = \frac{10,000(1/9)e^k}{1 + (1/9)e^k} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{e^k}{9 - e^k} \Rightarrow 9 - e^k = 5e^k$$
$$\Rightarrow e^k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

On a donc

$$y(t) = \frac{10,000e^{t\ln(3/2)}}{9 + e^{t\ln(3/2)}} .$$

La réponse à la première question est

$$y(5) = \frac{10,000e^{5\ln(3/2)}}{9 + e^{5\ln(3/2)}} = \frac{10,000(3/2)^5}{9 + (3/2)^5} \approx 4.576271186 \times 10^3$$

ou approximativement 4,576 truites.

Pour répondre à la seconde question, il faut trouver t tel que

$$7500 = \frac{10,000e^{t\ln(3/2)}}{9 + e^{t\ln(3/2)}} .$$

Si on résout pour t on trouve

$$t = \frac{3\ln(3)}{\ln(3/2)} = 8.12853387\dots$$
 ans;

soit un peu plus de 8 ans.

3.6 Applications aux sciences physiques, biologiques et économiques

Exemple 3.6.1 **\$**

La diffusion d'une substance chimique au travers de la parois d'une cellule est gouvernée par une équation différentielle semblable à celle de la lois de Newton pour la chaleur. En effet, le taux de variation de la concentration d'une substance chimique à l'intérieure d'une cellule est proportionnel à la différence de concentration de cette substance chimique à l'intérieure et à l'extérieure de la cellule.

Dans le modèle le plus simple, la proportionnalité est constante et dépend de la substance chimique et du type de membrane qui forme la parois de la cellule. De plus, on assume qu'il n'est pas plus difficile pour la substance chimique de sortie de la cellule que d'y entrer.

Si $C_i(t)$ est la concentration au temps t de la substance chimique à l'intérieure de la cellule et $C_o(t)$ est la concentration au temps t de cette même substance chimique à l'extérieure de la cellule, alors

$$C_i'(t) = K(C_o(t) - C_i(t))$$

où K est une constante positive.

Dans la majorité des situations, les cellules baignent dans un vaste milieu. On peut donc supposer que la concentration C_o de la substance chimique à l'extérieure de la cellule est constante – La quantité de substance chimique à l'intérieure de la cellule représente une infime partie de la quantité à l'extérieur de la cellule.

Un modèle un peu plus compliqué tient compte du fait qu'il est généralement plus facile pour la substance chimique de sortir de la cellule que d'y entrer. Ainsi on a deux constantes $K_i > K_o$ telles que

$$C_i'(t) = K_o C_o - K_i C_i(t) .$$

Finalement, un modèle plus précis va tenir compte du fait que K_o n'est pas une constante mais une fonction de la concentration $C_i(t)$ au temps t. Plus la concentration de la substance chimique dans la cellule est grande, plus il devient difficile pour la substance chimique d'entrer

dans la cellule. Si C_m est la concentration maximale de la substance chimique que l'on peut retrouver dans la cellule, alors

$$C'_{i}(t) = K_{u}(C_{m} - C_{i}(t))C_{o} - K_{i}C_{i}(t)$$

où K_u est une nouvelle constante et $0 \le C_i(t) \le C_m$.

Normalement, on normalise la concentration de la substance chimique dans la cellule; c'est-à-dire que l'on remplace C(t) par $C(t)/C_m$. Si on divise l'équation différentielle précédente par C_m , on obtient

$$\frac{C_i'(t)}{C_m} = K_u \left(1 - \frac{C_i(t)}{C_m} \right) C_o - K_i \frac{C_i(t)}{C_m} .$$

Si on pose $q(t) = C(t)/C_m$ pour tout t, on obtient

$$q'(t) = K_u(1 - q(t))C_o - K_i q(t) = K_u C_o - (K_u C_o + K_i)q(t)$$

où $0 \le q(t) \le 1$ pour tout t.

Exemple $3.6.2 \clubsuit$

Un modèle pour la propagation d'une maladie infectieuse causée par un microbe est donné par l'équation différentielle

$$m'(t) = \alpha \ m(t)(1 - m(t)) - \beta \ m(t) \tag{3.6.1}$$

où m(t) est la fraction de la population totale qui porte le microbe au temps t. On assume qu'il n'y a pas d'individus qui puissent être porteur du microbe sans être malade. Pour étudier un tel problème, il faudrait deux inconnus et deux équations différentielles. C'est un sujet que nous aborderons prochainement.

Le premier terme du côté droit de l'équation (3.6.1) représente le taux auquel le microbe est transmis des individus qui sont malades à ceux qui ne le sont pas. Le produit m(t)(1-m(t)) représente les contacts entre les individus malades et ceux qui ne le sont pas. La constante positive α est déterminée en tenant compte de la vitesse et de la facilité à laquelle le microbe est transmis d'un individu à un autre.

Le deuxième terme du côté droit de l'équation (3.6.1) représente le taux auquel les individus guérissent. La constante positive β est déterminée par la rapidité à laquelle les individus malades guérissent.

Il y a deux points d'équilibre pour (3.6.1). Si $0 = \alpha m(1-m) - \beta m$, on trouve m = 0 et $m = 1 - \beta/\alpha$.

Lorsque $\beta > \alpha$, le graphe de $y = \alpha m(1-m) - \beta m$ ainsi que le portrait de phases de (3.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 3.11. On considère seulement les valeurs positives de m(t) car m(t) < 0 n'a pas de sens réel. La fraction m(t) de la population qui est malade tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie va disparaître. Puisque $\beta > \alpha$, le taux de guérison est supérieur au taux auquel la maladie est transmise. Il n'est pas nécessaire d'éliminer le taux de propagation de la maladie (i.e.

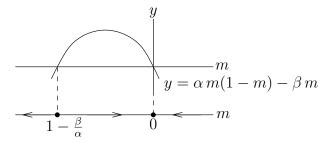


FIGURE 3.11 – Comportement de la fraction m(t) de la population qui porte le microbe lorsque $\beta > \alpha$

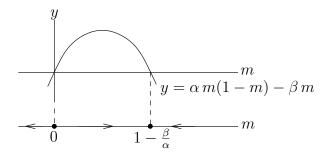


FIGURE 3.12 – Comportement de la fraction m(t) de la population qui porte le microbe lorsque $\beta < \alpha$

d'avoir $\alpha = 0$) pour enrayer la maladie. Lorsque $\beta < \alpha$, le graphe de $y = \alpha \ m(1-m) - \beta \ m$ ainsi que le portrait de phases de (3.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 3.12. Comme précédemment, on considère seulement les valeurs positives de m(t). La fraction m(t) de la population qui est malade tend vers $1 - \beta/\alpha$ lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie ne disparaîtra pas mais touchera toujours une fraction $1 - \beta/\alpha$ de la population. On dit que la maladie est **endémique**.

Exemple 3.6.3 **\$**

On a vu à l'exemple ?? un modèle pour déterminer le facteur d'efficacité des pêcheurs pour maximiser la récolte de poissons capturés lors des futures années de pêche.

On considère une question semblable à celle de l'exemple ??. Au lieu d'utiliser un système dynamique discret pour décrite la population de poissons en fonction du temps, nous utiliserons une équation différentielle.

Soit x(t) le nombre de poissons au temps t en années. L'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps est construite à partir de l'équation logistique à laquelle on ajoute l'effet de la pêche.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right) - hx , \qquad (3.6.2)$$

où M>0 est le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, r>0 est le taux de croissance relatif de la population de poissons si le milieu peut supporter un nombre infini de poissons et il n'y a pas de pêche, et h>0 est le facteur d'efficacité des pêcheurs.

On veut maximiser la récolte de poissons à long termes; c'est-à-dire, on veut maximiser R(h) = hp(h) où p(h) est un point d'équilibre positif pour l'équation différentielle (3.6.2).

Les points d'équilibre de (3.6.2) sont les solutions de

$$rp\left(1 - \frac{p}{M}\right) - hp = 0 ,$$

Le seul point d'équilibre positif est $p(h) = M\left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Donc,

$$R(h) = Mh\left(1 - \frac{h}{r}\right) .$$

On a donc que R'(h) = M(1 - 2h/r) et le seul point critique est h = r/2. On résume dans le tableau suivant l'information que l'on a au sujet de la fonction R.

h	0 < h < r/2	r/2	r/2 < h < r
R(h)	+	Mr/4	+
R'(h)	+	0	_
		max. local	

On conclut que h=r/2 nous donnera la plus grand récolte de poissons pour les futures années de pêche.

Remarque 3.6.4

Un modèle plus réaliste devrait assumer que la pêche est bien souvent saisonnière; la pêche n'est généralement pas permise toute l'année mais seulement durant une partie de l'année. Par exemple, si la pêche n'est pas permise pour une portion S de l'année, l'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps en années pourrait être de la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right) - H(t)hx , \qquad (3.6.3)$$

οù

$$H(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t - \lfloor t \rfloor < S \\ 1 & S \le t - \lfloor t \rfloor < 1 \end{cases}$$
 (3.6.4)

et $\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que t. Voir le graphe de H à la figure 3.13. Une équation de la forme (3.6.3) n'a pas de points d'équilibre. Le côté droit de (3.6.3) n'est pas une fonction continue car H est discontinue à t=n et t=n-S pour $n\in\mathbb{N}^+$. On peut utiliser une méthode numérique pour résoudre ce type d'équations différentielles en portant une attention toute particulière aux points où le côté droit de l'équation différentiel n'est pas continu. Ce n'est pas le sujet du cours.

On retrouve à la figure 3.14 le graphe de la solution de (3.6.3) pour r = 0.8, M = 1000, S = 1/2, h = 0.1 et x(0) = 800. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 938 poissons et l'amplitude est environ 12. Il faudrait

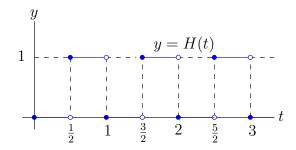


FIGURE 3.13 – Graphe de la fonction H définie en (3.6.4) avec S = 1/2.

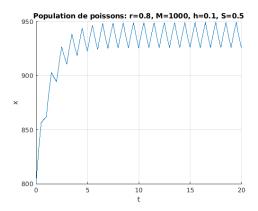


FIGURE 3.14 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (3.6.3) pour r = 0.8, M = 1000, S = 1/2, h = 0.1 et x(0) = 800.

une analyse mathématique plus poussée pour prouver que c'est effectivement ce que l'on observe graphiquement. Si on utilise la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, on trouve $R(0.1) = 0.1 \times 938 = 93.8$.

À l'exemple 3.6.3, on a trouvé que la valeur optimale de h pour maximiser la récolte de poissons pour les futures années de pêche est h=r/2. Si on utilise cette valeur lorsque r=0.8, on obtient h=0.4. On retrouve à la figure 3.15 le graphe de la solution de (3.6.3) pour r=0.8, M=1000, S=1/2, h=0.4 et x(0)=800. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 751 poissons et l'amplitude est environ 37. Si on utilise la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, on trouve $R(0.4)=0.4\times751=300.4$.

On peut montrer qu'il existe une valeur de h qui maximise R(h). On a donc une population de poissons qui a un bon taux de reproduction et qui peut supporter de bonnes saisons de pêche.

Exemple 3.6.5 🔑

Un réservoir contient 40 litres d'eau pure. On verse dans ce réservoir une saumure (solution saline) qui contient 0.125 kg de sel par litre. Le débit auquel on verse la saumure dans le réservoir est de 8 litres/minute. On suppose que le contenu du réservoir est instantanément bien mélangé (homogène). Si le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant

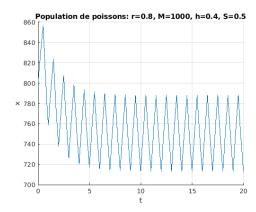


FIGURE 3.15 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (3.6.3) pour r = 0.8, M = 1000, S = 1/2, h = 0.4 et x(0) = 800.

de 8 litres/minute, à quel moment le mélange dans le réservoir contiendra-t-il 0.0625 kg de sel par litre?

Il est généralement plus simple de travailler avec la quantité de sel dans le réservoir que la concentration de sel. Soit q(t) la quantité de sel en kg dans le réservoir au temps t en minutes.

Si on verse 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors on ajoute $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

S'il s'échappe 8 litres du mélange par minute de façon constante et puisque le volume du mélange est maintenu à 40 litres, on perd 8/40 de la quantité de sel dans le réservoir par minute.

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 1 - \frac{8}{40} \ q(t) = 1 - \frac{q(t)}{5} = \frac{5 - q(t)}{5}$$

où q'(t) est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le réservoir au temps t.

C'est une équation différentielle séparable. Si on sépare les variables et intègre par rapport à t on obtient

$$\int \frac{5}{5-q} \, dq = \int \frac{5}{5-q(t)} \, q'(t) \, dt = \int \, dt \, .$$

Ainsi,

$$-5\ln|5-q| = t + C$$

où C est une constante. Si on divise par -5 des deux côtés de l'égalité et prend l'exponentielle, on obtient

$$5 - q = \pm e^{-C/5}e^{-t/5}$$

où $\pm e^{-C/5}$ représente une constante positive ou négative que l'on appelle E. Donc,

$$q = 5 - Ee^{-t/5}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut accepter E=0. Pour E=0, on trouve le point d'équilibre 5. Si initialement on avait 5 kg de sel dans le réservoir, l'ajout de set provenant de la saumure que l'on ajoute au contenu du réservoir serait exactement compensé par la quantité du sel qui s'échappe du réservoir. Pour déterminer la valeur de la constante E, on utilise l'hypothèse qu'initialement on a de l'eau pure dans le réservoir. Donc, q(0)=0 kg de sel. D'où 0=5-E et E=5. La quantité de sel au temps t est donc donnée par

$$q(t) = 5\left(1 - e^{-t/5}\right) .$$

Pour répondre à la question, il faut trouver la valeur de t telle que $q(t)=40\times0.0625=2.5$ kg. On trouve $t=5\ln(2)\approx3.47$ min.

Exemple 3.6.6

Si à l'exemple précédent, on suppose que le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant de 6 litres/minute seulement, donnez une équation différentielle satisfaite par la quantité de sel q(t) (en kilogrammes) au temps t en minutes. Pouvez-vous résoudre cette équation? On suppose que le réservoir est assez grand pour accommoder l'augmentation de volume du mélange (du moins pour un certain temps).

Comme à l'exemple précédent, si on verse 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors on ajoute $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

Par contre, s'il s'échappe seulement 6 litres du réservoir par minute, la volume V_r du mélange dans le réservoir va augmenté et sera de $V_r(t) = 40 + 2t$ litres après t minutes. Le volume V_m du mélange qui aura échappé du réservoir après t minutes sera $V_m(t) = 6t$. Donc, au temps t, le taux de variation instantané de la quantité de sel est

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{V_m(t)}{V_r(t)} \right) q(t) = \frac{-60}{(20+t)^2} q(t) \text{ kg/min}.$$

Le signe négatif est parce que le mélange s'échappe du réservoir.

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t)$$

où q'(t) est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le mélange au temps t.

On n'est pas en mesure de résoudre cette équation différentielle car elle n'est pas séparable. La méthode d'Euler que l'on verra dans une prochaine section va nous permettre de tracer le graphe de q.

Exemple 3.6.7

Un réservoir contient 10^8 litres d'eau pour l'alimentation d'une ville. À chaque jour, la consommation de la ville est de 10^6 litres, et le réservoir reçoit 0.9×10^6 litres d'eau de source et 10^5 litres d'eau d'une rivière qui se déverse dans le réservoir. L'eau de la rivière contient 0.0001 kg de sel par litre alors que l'eau de source ne contient pas de sel. On suppose qu'initialement il n'y a pas de sel dans le réservoir et que le sel se mélange instantanément

et uniformément à l'eau du réservoir. Ceci est raisonnable si la prise d'eau de la ville est à une extrémité du réservoir et la rivière se déverse à l'autre extrémité du réservoir. De plus, on suppose que la consommation de la ville est répartie uniformément durant la journée. Donnez une équation différentielle qui sera satisfaite par la concentration C(t) de sel dans l'eau du réservoir au temps t en jours. Résolvez cette équation différentielle.

Lorsque que le volume d'eau est constant, ce qui est le cas dans ce problème car il se déverse dans le réservoir autant d'eau qu'il en sort, il est généralement plus simple de commencer par donner une équation différentielle pour q(t), la quantité de sel en kilogrammes dans le réservoir au temps t en jours. Une division de cette équation différentielle par le volume d'eau dans le réservoir (i.e. 10^8 kg) donnera l'équation différentielle pour la concentration C(t) au temps t en jour.

Le réservoir reçoit 10^6 litres d'eau par jour. De ces 10^6 litres, 0.9×10^6 litres ne contiennent pas de sel et 10^5 litres contiennent 0.0001 kg de sel par litre. Donc, l'influx d'eau ajoute 10 kg de sel par jour dans le réservoir.

Par contre, il s'échappe aussi 10⁶ litres d'eau par jour du réservoir, donc le réservoir perd

$$\frac{10^6}{10^8} q(t) = \frac{q(t)}{100}$$
 kg/jour

de sel au temps t.

On obtient l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 10 - \frac{q(t)}{100}$$

où q'(t) est le taux de variation de la quantité de sel dans le réservoir au temps t.

Si on divise l'équation différentielle précédente par 10^8 , on obtient l'équation différentielle satisfaite par la concentration $C(t) = q(t)/10^8$; c'est-à-dire,

$$C'(t) = 10^{-7} - \frac{C(t)}{100} = \frac{10^{-5} - C(t)}{100}$$
.

C'est une équation différentielle séparable. Si on sépare les variables et intègre par rapport à t on obtient

$$\int \frac{10^2}{10^{-5} - C} dC = \int \frac{10^2}{10^{-5} - C(t)} C'(t) dt = \int dt.$$

Ainsi,

$$-10^2 \ln \left| 10^{-5} - C \right| = t + D$$

où D est une constante. Si on divise par -10^2 des deux côtés de l'égalité et calcul l'exponentielle des deux côtés, on obtient

$$10^{-5} - C = \pm e^{-D/100} e^{-t/100}$$

où $\pm e^{-D/100}$ représente une constante positive ou négative que l'on appelle E. Donc,

$$C = 10^{-5} - Ee^{-t/100}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. On peut accepter E = 0. Pour E = 0, on trouve le point d'équilibre 10^{-5} . Si initialement on avait 10^{-5} % de sel dans le réservoir, la quantité de sel perdu par l'utilisation de la ville serait exactement compensée par l'ajout de sel provenant de la rivière.

Pour déterminer la valeur de la constante E, on utilise l'hypothèse qu'initialement l'eau du réservoir ne contient pas de sel. Donc, C(0) = 0 % de sel; c'est-à-dire que $0 = 10^{-5} - E$ et ainsi $E = 10^{-5}$. La concentration de sel au temps t en jours est donc donnée par

$$C(t) = 10^{-5} \left(1 - e^{-t/100} \right) .$$

Exemple 3.6.8

Si le revenu d'un compte en banque est proportionnel au montant dans le compte, donnez une équation différentielle pour m(t), le montant en dollars dans le compte au temps t en années, qui décrit cette relation. Interprétez l'équation différentielle que vous obtenez.

Puisque m'(t) représente le revenu au temps t (le taux de croissance au temps t), on obtient de l'énoncé du problème que

$$m'(t) = km(t)$$

où k est une constante. C'est l'équation différentielle (3.5.3) (où l'on remplace y par m) qui possède la solution donnée en (3.5.4). Donc,

$$m(t) = E e^{kt}$$

où E est le montant initial dans le compte et k le taux d'intérêt composé de façon continue (i.e. le compte rapporte 100k % par année, composé de façon continue).

Exemple 3.6.9 🖍

On considère une personne qui saute en parachute. Une des lois de la physique dit que la résistance de l'air est proportionnel au carré de la vitesse du parachutiste. La constante de proportionnalité représente la surface du parachute qui est soumise à la résistance de l'air et le poids du parachute.

Si v(t) est la vitesse (en m/s) du parachutiste t secondes après avoir ouvert son parachute, alors v satisfait l'équation différentielle

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + dv^2 , \qquad (3.6.5)$$

où l'on assume que la direction positive du déplacement est vers le haut, m est la masse (en kg) du parachutiste et $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est l'accélération dû à la gravité.

Le premier terme à droite du signe d'égalité dans l'équation (3.6.5 est une conséquence de la lois de Newton qui dit que la force exercée par l'attraction terrestre sur le parachutiste est de -mg N. Le signe négative pour l'accélération indique que la force est dans la direction opposée à la direction positive.

Quelles sont les unités de la constante de proportionnalité d pour que l'équation différentielle soit cohérente? Si on traduit l'équation différentielle en termes des unités de ses composantes, on obtient

$$\mathrm{kg}\,\mathrm{m/s^2} = -\mathrm{kg}\,\mathrm{m/s^2} + \mathrm{unit\acute{e}s}$$
 de $d\times\mathrm{m^2/s^2}$.

Donc, les unités de d doivent être des kg/m.

Les points d'équilibre de l'équation différentielle (3.6.5) sont les solutions de $f(v) = -mg + dv^2 = 0$. On trouve $v_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{mg}{d}}$. Si le poids du parachutiste est de 75 km, donc m = 75, et d = 50, on obtient les points d'équilibre $v_{\pm} = \pm \sqrt{14.7} \approx \pm 3.834$.

Puisque f(v) > 0 pour $v < v_-$ et $v > v_+$, et f(v) < 0 pour $v_- < v < v_+$, on obtient le portrait de phases suivant.



La vitesse initiale v_0 du parachutiste est inférieure à v_+ car il saute d'un avion. En fait, on a probablement $v_0 \leq 0$ lorsque le parachute ouvre. Ne pas oublier que la direction positive est vers le haut. Donc, v(t) tend $v_- = -3.834$ lorsque t tend vers l'infini. C'est-à-dire que la vitesse de descente du parachutiste approchera 3.834 m/s quand il arrivera au sol si, naturellement, il est assez loin du sol lorsqu'il ouvre son parachute.

On aurait pu trouver la solution de l'équation différentielle (3.6.5) car c'est une équation séparable. En fait, on a

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + dv^2 \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{d}{m}$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} \, \mathrm{d}v = -\int \frac{d}{m} \, \mathrm{d}t . \tag{3.6.6}$$

Si on pose $k^2 = mg/d$, on a

$$\int \frac{1}{\left(\frac{mg}{d}\right) - v^2} \, dv = \int \frac{1}{k^2 - v^2} \, dv = \int \frac{1}{(k - v)(k + v)} \, dv$$

$$= \frac{1}{2k} \int \left(\frac{1}{k - v} + \frac{1}{k + v}\right) \, dv = \frac{1}{2k} \left(-\ln|k - v| + \ln|k + v|\right) + E$$

$$= \frac{1}{2k} ln \left| \frac{k + v}{k - v} \right| + E$$

grâce à la méthode d'intégration par fractions partielles. Donc, on obtient de (3.6.6) que

$$\frac{1}{2k}ln\left|\frac{k+v}{k-v}\right| = -\frac{d}{m}t + C \ .$$

Si on résout pour v, on trouve

$$v = \frac{k(De^{-2kdt/m} - 1)}{De^{-2kdt/m} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{d}} \left(\frac{(De^{-2t\sqrt{gd/m}} - 1)}{De^{-2t\sqrt{gd/m}} + 1} \right) ,$$

où $D=\pm e^{2kC}$. Comme c'est bien souvent le cas, la cas D=0 est aussi acceptable et on peut donc assumer que $D\in\mathbb{R}$. On a bien que $v(t)\to -\sqrt{\frac{mg}{d}}$ lorsque t tend vers l'infini.

Comme on peut voir, l'analyse qualitative avec le portrait de phases nous a fourni toute l'information nécessaire au sujet du comportement à long terme de v(t) sans avoir à faire de long calculs pour résoudre l'équation différentielle (3.6.5).

Exemple 3.6.10 **\(\int_{\color} \)**

Une personne se trouve dans une pièce de 3 m de profondeur, 2 m de largeur et 2.5 m de hauteur. On suppose que la pièce ne bénéficie pas d'un bon système d'aération. On sait que la quantité d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne dépend linéairement de la concentration d'oxyde de carbone dans l'air. Si une personne aspire $0.015 \text{ m}^3/\text{minute}$ d'oxyde de carbone lorsqu'il y a 0.04% d'oxyde de carbone dans l'air et deux fois plus d'oxyde de carbone lorsque qu'il y a 0.3% d'oxyde de carbone dans l'air, et si de plus l'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré, donnez une équation différentielle pour la concentration d'oxyde de carbone C(t) (en pourcentage) dans l'air au temps t minutes. Résolvez l'équation que vous avez trouvée.

On commence par trouver une formule pour la quantité y (en m^3) d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne en fonction de la concentration C d'oxyde de carbone dans l'air. On sait que la relation entre ces deux quantités est linéaire. Donc, y = mC + b pour deux constantes m et b. Dans la question, on donne y = 0.015 m³/minute pour C = 0.0004 et y = 0.03 m³/minute pour C = 0.003. On obtient le système

$$0.015 = 0.0004m + b$$
$$0.03 = 0.003m + b$$

dont la solution est $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

Puisque l'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré, on a donc que la variation instantanée de la quantité d'oxyde de carbone q(t) (en m³) dans l'air au temps t en minutes satisfait

$$q'(t) = 0.04 (mC(t) + b)$$
.

Puisque le volume d'air dans la pièce est la valeur constante $3 \times 2 \times 2.5 = 15$ m³, la concentration d'oxyde de carbone dans la pièce au temps t est donc donnée par C(t) = q(t)/15. Si on divise les deux côtés de l'équation différentielle précédente par 15, on trouve l'équation différentielle satisfaite par la concentration d'oxyde de carbone C(t) dans la pièce au temps t; c'est-à-dire,

$$C'(t) = \frac{q'(t)}{15} = \frac{0.04}{15} (mC(t) + b) = \frac{m}{375} C(t) + \frac{b}{375}$$
.

C'est une équation différentielle séparable. On a

$$\int \frac{375}{mC+b} dC = \int \frac{375}{mC(t)+b} C'(t) dt = \int dt.$$

Donc,

$$\frac{375}{m}\ln\left(mC+b\right) = t+K$$

où K est une constante d'intégration. Si on résout pour C, on trouve

$$C(t) = -\frac{b}{m} + \frac{De^{mt/375}}{m}$$

où D est une constante qui est déterminée par la concentration initiale d'oxyde de carbone dans la pièce, et $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

On note que le modèle précédent n'est pas valide pour tout t. Il est claire qu'à un moment donné, la quantité d'oxyde de carbone dans la pièce sera trop élevée pour que la personne puisse survive dans cette pièce. Heureusement, nos maisons ne sont pas isolées au point de ne pas permettre l'aire d'entrer. Donc, les chances d'empoissonnement sont nulles sauf s'il y a une autre source d'oxyde de carbone. C'est là qu'un bon détecteur d'oxyde de carbone est utile.

3.7 Famille de courbe orthogonales 🗲

Définition 3.7.1

Une équation de la forme F(x, y, c) = 0, où c est une paramètre réel, représente une **famille de courbes** dans le plan.

Exemple 3.7.2

L'équation $F(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ définie la famille des cercles centrés à l'origine et de rayon r. L'équation $G(x, y, c) = x^2 - y + c = 0$ définie la famille des paraboles $y = x^2 + c$. L'équation $F(x, y, r) = y - ce^x = 0$ définie la famille des courbes $y = ce^x$.

Définition 3.7.3

Une famille de courbes F(x, y, c) = 0 est **orthogonale** à une autre famille de courbes G(x, y, d) = 0 si, en tout point où une courbe de la première famille coupent une courbe de la deuxième famille, les tangentes à ces deux courbes sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Exemple 3.7.4

La famille des cercles de rayon r centrés à l'origine $F(x,y,r)=x^2+y^2-r^2=0$ est orthogonale

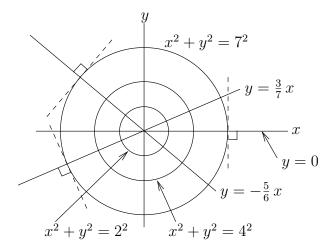


FIGURE 3.16 – Les cercles centrées à l'origine forment une famille de courbes orthogonales à la famille des droites qui passent par l'origine.

à la famille des droites qui passe par l'origine G(x, y, m) = y - mx = 0. Ces droites sont des rayons pour les cercles centrés à l'origine. Voir la figure 3.16.

On peut utiliser les équations différentielles pour trouver une famille de courbes orthogonales à une famille donnée de courbes. Il faut se rappeler que si une droite ℓ_1 de pente m_1 coupe perpendiculairement une autre droite ℓ_2 de pente m_2 alors $m_1m_2=-1$.

Si y_c est une courbe de la famille de courbes F(x, y, c) = 0 et (x_0, y_0) est un point de cette courbe, alors la pente de la tangente à la courbe y_c au point (x_0, y_0) est $y'_c(x_0)$ (sauf si la tangente est verticale à ce point). Si la famille de courbe G(x, y, d) = 0 est orthogonale à la famille de courbes F(x, y, c) = 0 et y_d est une courbe de la famille G(x, y, d) = 0 qui coupe la courbe y_c de la famille F(x, y, c) = 0 au point (x_0, y_0) , alors la pente de la tangente à la courbe y_d au point (x_0, y_0) est $y'_d(x_0) = \frac{-1}{y'_c(x_0)}$.

C'est ce raisonnement qui nous permet d'utiliser la méthode suivante pour trouver une famille de courbes orthogonale à une famille donnée de courbes.

1. À partir de l'équation F(x, y, c) = 0, déduire une équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y) .$$

On doit éliminer la constante c à l'aide de l'équation F(x, y, c) = 0 qui définie la famille de courbe – Autrement, on trouve une famille de courbes orthogonale à une seule courbe de la famille F(x, y, c) = 0.

2. On résout l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{-1}{f(x,y)} \tag{3.7.1}$$

pour trouver une famille de courbe G(x, y, d) = 0 orthogonale à la famille de courbes F(x, y, c) = 0.

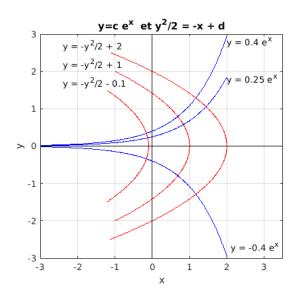


FIGURE 3.17 – Quelles courbes des familles de courbes $y = ce^x$ et $\frac{y^2}{2} = -x + d$. Ces deux familles de courbes sont mutuellement orthogonales.

La constante d de la famille G(x, y, d) = 0 est la constante d'intégration que l'on obtient lorsque l'on résout l'équation différentielle (3.7.1) sans condition initiale.

Exemple 3.7.5

Trouver la famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y = ce^x$.

Si on dérive $y = ce^x$, on obtient $y' = ce^x$. Or $ce^x = y$. Donc, y' = y. C'est une équation différentielle de la forme y' = f(x, y) avec f(x, y) = y qui ne dépend pas de c.

La famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y=ce^x$ est donnée par la solution de l'équation différentielle séparable

$$y' = -\frac{1}{y} \ .$$

On a

$$\int y \, \mathrm{d}y = -\int \, \mathrm{d}x \; .$$

Donc, $\frac{y^2}{2} = -x + d$ est la famille de courbes cherchée. Quelques courbes des deux familles sont représentés à la figure 3.17.

3.8 Méthode d'Euler 🖋

Soit l'équation différentielle avec une condition initiale

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
 , $x_0 \le x \le x_f$
 $y(x_0) = y_0$ (3.8.1)

3.8. Méthode d'Euler 🔑 197

où f est une fonction de deux variables.

Avant même d'essayer de trouver une solution (numérique ou algébrique) de (3.8.1), il faut se poser les questions suivantes :

- 1. Est-ce qu'il existe une solution?
- 2. S'il en existe une, est-elle unique?
- 3. De plus, pour une solution numérique de (3.8.1), est-ce qu'une petite <u>perturbation</u> de (3.8.1) entraı̂ne un énorme changement de la solution?

La raison pour la première question est évidente. Il est inutile de chercher une solution de (3.8.1) s'il en n'existe pas. La raison pour la deuxième question est plus subtile. S'il y a plusieurs solutions pour une équation différentielle avec une condition initiale, on peut questionner la valeur et véracité de cette équation pour modéliser un phénomène (physique, biologique, etc), en particulier si les expériences montrent qu'un seul comportement est possible. De plus, comment peut-on savoir si la solution que l'on trouve est vraiment la solution qui décrit le phénomène que nous voulons analyser? Nous avons répondu au deux premières questions à la section 3.4.

La troisième question est fondamentale lorsque l'on veut résoudre numériquement des équations différentielles. Puisque les calculs numériques ne sont jamais exacts, il ne faut pas que les erreurs de troncature produisent des résultats qui sont très loin des valeurs exactes qui devraient être obtenues.

Il y a aussi une raison pratique pour la troisième question. Comme les modèles mathématiques sont souvent construis à partir d'expériences en laboratoire, les équations différentielles utilisées pour la modélisation sont bien souvent des approximations des équations différentielles qui gouvernent vraiment les phénomènes observés. On veut donc que deux équations différentielles qui sont presque identiques aient des solutions qui soient presque identiques.

On dit qu'une équation différentielle avec une condition initiale, comme en (3.8.1), est **bien-posée** si la solution existe et est unique, et si une petite perturbation de (3.8.1) entraîne seulement un petit changement de la solution de (3.8.1).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que (3.8.1) soit bien posée.

```
Théorème 3.8.1 \odot
Soit R=\{(x,y):x_0\leq x\leq x_f \text{ et } -\infty < y < \infty\} \ . Si f:R\to\mathbb{R} est différentiable, alors (3.8.1) est bien posé.
```

La méthode numérique que nous allons introduire dans le reste de cette section n'est pas très efficace mais elle est simple et permet d'illustrer clairement les difficultés que l'on retrouve lors de la résolution numérique d'équations différentielles. À partir de maintenant, on suppose que (3.8.1) est bien posée.

La procédure générale pour **résoudre numériquement** une équation différentielle comme (3.8.1) est la suivante :

- 1. Choisir un entier positif N.
- 2. Choisir N+1 noeuds $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = x_f$. Pour les méthodes simples comme la méthode d'Euler que l'on verra ci-dessous, on utilise la même distance entre les noeuds x_{i-1} et x_i pour $i=1, 2, \ldots, N$.
- 3. On trouve une approximation w_i de $y_i = y(x_i)$ for i = 1, 2, ..., N.
- 4. On utilise une interpolation linéaire entre les points (x_i, w_i) pour estimer les valeurs y(x) de la solution de (3.8.1) aux autres points x de l'intervalle $[x_0, x_f]$ (voir figure 3.18).

La **méthode d'Euler** est une méthode simple pour résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre un avec une condition initiale; c'est-à-dire, des problèmes de la forme (3.8.1).

Méthode 3.8.2 (Méthode d'Euler)

Soit y, la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale comme on retrouve en (3.8.1)

La méthode d'Euler se résume ainsi : Soit $h = (x_f - x_0)/N$ et $x_i = x_0 + ih$ pour i = 0, 1, 2, ..., N. L'approximation w_i de $y(x_i)$ provient de la solution de l'équation aux différences finies

$$w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i)$$

$$w_0 = y_0$$
(3.8.2)

pour i = 1, 2, ..., N.

Remarque 3.8.3

On peut justifier la méthode d'Euler de la façon suivante. Grâce au théorème de Taylor, on a

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) (x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2} (x_{i+1} - x_i)^2$$

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Si on substitue $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), y_i = y(x_i)$ et $h = x_{i+1} - x_i$ dans cette équation, on obtient

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) h + \frac{y''(\xi_i)}{2} h^2$$

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Finalement, si on suppose que $y''(\xi_i)h^2/2$ est beaucoup plus petit que $y_i + f(x_i, y_i)h$ pour tout i (i.e. si h est assez petit), on obtient

$$y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i) h$$

qui nous permet d'écrire (3.8.2)

Remarque 3.8.4

Pour évaluer la qualité d'une méthode numérique, on utilise souvent l'erreur absolue, qui est la différence $|y_i - w_i|$, et l'erreur relative, qui est $|y_i - w_i|/|y_i|$.

3.8. Méthode d'Euler 🔑 199

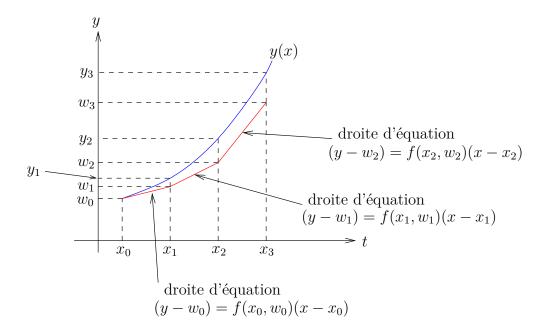


FIGURE 3.18 – Le graphe d'une solution possible y de (3.8.1) et de la solution calculée avec la méthode d'Euler.

L'erreur relative donne une meilleure idée de l'erreur des approximations w_i car elle donne le pourcentage d'erreur (après multiplication par 100) par rapport à la valeur exacte y_i . En effet, une erreur absolue de 0.1 est énorme si les valeurs cherchées y_i sont plus petites que 1 en valeurs absolues. Par contre, une erreur absolue de 0.1 est minuscule si les valeurs cherchées sont plus grandes que 10^7 en valeurs absolues.

Exemple 3.8.5

Utiliser la méthode d'Euler avec N=5 pour estimer la solution y de

$$y'(x) = 0.2xy$$
 , $1 \le x \le 1.5$
 $y(1) = 1$ (3.8.3)

On a $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$, $y_0 = 1$ et f(x, y) = 0.2xy. Ainsi $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + i h = 1 + 0.1 i$ et les approximations w_i de $y_i \equiv y(x_i)$ sont données par

$$w_0 = 1$$

 $w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.02(1 + 0.1 i)w_i$

pour i = 0, 1, ..., 4. Ainsi,

$$w_1 = w_0 + hf(x_0, w_0) = w_0 + 0.02w_0 = 1.02$$

 $w_2 = w_1 + hf(x_1, w_1) = w_1 + 0.02(1 + 0.1)w_1 = 1.04244$
 \vdots

i	$ x_i $	$\mid w_i \mid$	$\mid y_i \mid$	erreur	erreur
				absolue	relative
0	1.00	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.10	1.02	1.0212220516	0.0012220516	0.0011966561
2	1.20	1.04244	1.0449823549	0.0025423549	0.0024329166
3	1.30	1.06745856	1.0714362091	0.0039776491	0.0037124461
4	1.40	1.0952124826	1.100759064	0.0055465814	0.0050388696
5	1.50	1.1258784321	1.1331484531	0.007270021	0.006415771

Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant :

Comme l'équation différentielle (3.8.3) est séparable, on peut trouver la solution exacte de (3.8.3). On trouve $y(x) = e^{0.1x^2-0.1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$ qui ont été utilisées pour calculer l'erreur absolue et l'erreur relative. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ 0.64 %. C'est bon.

Exemple 3.8.6

Utiliser la méthode d'Euler avec N=5 pour estimer la solution y de

$$y'(x) = 2xy$$
 , $1 \le x \le 1.5$
 $y(1) = 1$ (3.8.4)

Comme à l'exemple précédent, on a $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$ et $y_0 = 1$. Cependant, f(x, y) = 2xy. Ainsi $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + ih = 1 + 0.1i$ et les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$w_0 = 1$$

 $w_{i+1} = w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.2(1 + 0.1i)w_i$

pour i = 0, 1, ..., 4. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant :

i	$ x_i $	$\mid w_i \mid$	$\mid y_i \mid$	erreur	erreur
				absolue	relative
0	1.0	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.1	1.2000	1.23367806	0.03367806	0.0272989048
2	1.2	1.4640	1.5527072185	0.0887072185	0.0571306795
3	1.3	1.81536	1.9937155332	0.1783555332	0.0894588673
4	1.4	2.2873536	2.6116964734	0.3243428734	0.1241885789
5	1.5	2.927812608	3.4903429575	0.5625303495	0.1611676435

Comme l'équation différentielle (3.8.4) est séparable, on peut trouver la solution exacte de (3.8.4). On trouve $y(x) = e^{x^2-1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ 16.12 %. Ce n'est pas bon. Comme on peut constater à partir de l'erreur relative, la méthode d'Euler ne donne pas de bonnes approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ pour i = 1, 2, ..., 5.

Remarque 3.8.7

On pourrait penser qu'en prenant h assez petit on peut obtenir la précision désirée mais ce

3.8. Méthode d'Euler 🔑 201

n'est pas le cas. En fait, l'erreur absolue satisfait

$$|w_i - y_i| \approx \frac{1}{L} \left(\frac{Mh}{2} + \frac{\delta}{h} \right) \left(e^{L(x_i - x_0)} - 1 \right)$$

où L et M sont des constantes qui dépendantes de la fonction f et δ est la précision de l'ordinateur utilisé pour les calculs. Ainsi, si h tend vers 0, l'erreur absolue tend vers $+\infty$ due au terme δ/h

Exemple 3.8.8

On a obtenu l'équation différentielle suivante à l'exemple 3.6.6.

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t)$$
 , $q(0) = 0$,

où q(t) est la quantité de sel en kilogrammes dans un mélange au temps t en minutes. Comme cette équation n'est pas séparable, on ne peut pas la résoudre exactement. C'est une équation différentielle <u>linéaire</u>. Ceux qui poursuivrons leurs études des mathématiques verront comment on peut résoudre cet équation. Pour l'instant, nous allons utiliser la méthode d'Euler pour estimer la solution sur l'intervalle [0, 10].

L'équation différentielle est de la forme q'(t) = f(t, q(t)) avec $f(t, q) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2}q$. Si on choisit N = 10, on a $x_0 = 0$, $x_{10} = 10$, $h = (x_{10} - x_0)/10 = 1$, et $x_i = x_0 + h i = 1 + 0.1 i$ pour i = 0, 1, 2, ..., 10. les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$w_0 = 0$$

$$w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) = w_i + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20 + t_i)^2} w_i \right)$$

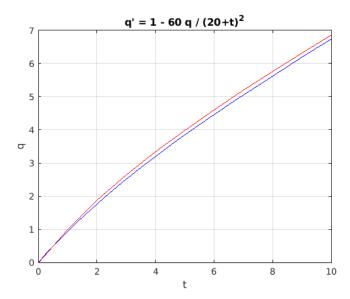
pour i = 0, 1, ..., 9. Les premières valeurs de w_i sont données ci-dessous.

$$w_1 = w_0 + hf(x_0, w_0) = 0 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0)^2} \times 0 \right) = 1$$

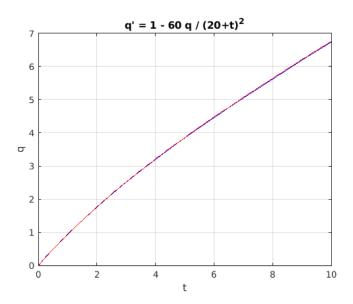
$$w_2 = w_1 + hf(x_1, w_1) = 0.1 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0.1)^2} \times 0.1 \right) \approx 1.863945578$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

On retrouve dans la figure suivante le graphe de la solution exacte en bleu ainsi que le graphe de l'approximation de la solution en rouge donnée par la méthode d'Euler dans le cas où N=10.



On a répété les calculs avec N=100 pour obtenir une seconde approximation de la solution avec la méthode d'Euler. On peut voir dans la figure suivante que l'approximation est très bonne. La méthode d'Euler est assez bonne quand la solution varie lentement.



3.9 Exercices

Question 3.1

Répondre à chacune des questions suivantes de deux façons : (1) en calculant une intégrale définie et (2) en utilisant le Théorème fondamental du calcul différentiel.

a) Si L(t) satisfait l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=6.48e^{-0.09t}$ avec L(0)=5, quelle est la variation de L entre t=1 et t=5?

- b) Si P(t) satisfait l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = 5.0e^{-2.0t}$ avec P(0) = 2, quelle est la variation de P entre t = 5 et t = 10?
- c) Si A(t) satisfait l'équation différentielle $\frac{dA}{dt} = 523.8(t 1981)^2$ avec A(1981) = 13,400, quelle est la variation de A entre t = 1985 et t = 1987?

Question 3.2

Expliquez pourquoi, à la question 1, la solution ne dépend pas de la condition initiale.

Question 3.3

Un été chaud et humide provoque une invasion de moustiques dans le voisinage immédiat d'un lac. Le nombre moyen de moustiques par km^2 croît à un taux de $2200+10e^{0.8t}$ moustiques par jour où t est le nombre de jours depuis le début des mesures. Quel a été l'augmentation du nombre de moustiques par km^2 entre le 5^e et le 9^e jours?

Question 3.4

Quelle est le déplacement entre 1 et 5 secondes d'une pierre qui tombe si la position p(t) en mètres au temps t en secondes est donnée par l'équation différentielle $\frac{dp}{dt} = -9.8t - 5.0$.

Question 3.5

Un guépard se trouve dans une savane. Il repère un zèbre qui se trouve à 200 m de lui et part à la course vers le zèbre. Si la vitesse du guépard est $v(t) = e^t$ m/s après t secondes,

- a) Tracez le graphe de la vitesse v du guépard en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle satisfaite par la position x(t) du guépard en fonction du temps t.
- c) Trouvez la solution de cette équation différentielle.
- d) Tracez le graphe de la position du guépard en fonction du temps.
- e) Combien de temps faudra-t-il au guépard pour atteindre le zèbre si celui ci demeure immobile?

Notez que c'est un guépard végétarien qui veut seulement jouer avec le zèbre, donc le zèbre n'en a pas peur. La fonction exponentiel n'est pas a bon modèle pour la vitesse du guépard. Il est vrai que la vitesse du guépard augmente très rapidement au départ. Cependant, le guépard atteint sa vitesse maximale très rapidement. Pouvez-vous penser à une autre fonction qui pourrait décrire plus précisément la vitesse du guépard?

Question 3.6

Un escargot traverse un trottoir de 1 mètre de large. Sa vélocité après t min. est de $v(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$ m/min.

- a) Tracez un graphe de la vélocité en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle pour la position x(t) de l'escargot en fonction du temps t.

- c) Trouvez la solution de l'équation différentielle que vous avez donné en (b). On peut supposer que la position initial de l'escargot est x(0) = 0. L'escargot est au bord du trottoir.
- d) Dessinez le graphe de la position en fonction du temps.
- e) Combien de temps va prendre l'escargot pour traverser le trottoir.

Question 3.7

Pour chacune des équation différentielles suivantes, utilisez l'intégrale indéfinie pour trouver la solution particulière qui satisfait la condition initiale donnée, tracez le graphe de cette solution ainsi que celui de son taux de variation instantanée.

a)
$$\frac{dp}{dt} = 5t^2 + \frac{5}{t^2}$$
 avec $p(1) = 12$ b) $\frac{dM}{dt} = t^3 + t^{-3}$ avec $M(2) = 8$
c) $\frac{dp}{dt} = -0.25t^3$ avec $p(0) = 5$ d) $\frac{dM}{dt} = 2t^{-1/2}$ avec $M(0) = 5$

Question 3.8

La fonction L(t) est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0.001 \ t(365 - t) \ .$$

Si L(100) = 1000, quelle sera la valeur de L(200).

Question 3.9

La fonction L(t) est déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 T(t)$$
 où $T(t) = 20 + 10 \cos\left(\frac{2\pi(t - 90)}{182.5}\right)$.

- a) Tracez le graphe de T(t) en fonction du temps pour deux périodes.
- b) Si L(0) = 0.1, quelle sera la valeur de L(30)?
- c) Si L(150) = 0.1, quelle sera la valeur de L(300)?

Question 3.10

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes pour la condition initiale qui est donnée. Décrire ce qui arrive quand $t \to \infty$ dans chacun des cas. Il pourrait être utile de tracer le graphe de la solution.

a)
$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{5}{1+2t}$$
 avec $P(0) = 5$ b) $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{(1+t)^2}$ avec $P(0) = 0$

Question 3.11

La fonction W(t) satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dW}{dt} = (4t - t^2)e^{-3t} \quad , \quad W(0) = 0 \ .$$

- a) Résoudre cette équation différentielle et déterminé la valeur de W(2).
- b) À quel moment W augmente-t-elle le plus rapidement?

c) Quelle serait la valeur de W(2) si le taux de croissance de W était constant et égale au taux maximal calculé en (a). On assume toujours que la condition initiale est W(0) = 0.

Question 3.12

La fonction M(t) est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = (1+t^2)e^{-2t}$$
 , $M(0) = 1$.

- a) Résoudre cette équation différentielle et déterminé la valeur de M(1).
- **b**) Quelle est le taux de croissance maximal?
- c) Si le taux de croissance était constant et égal à la valeur maximale trouvée en (b), quelle serait la valeur de M(1)?

Question 3.13

Une expérience réalisée par une sonde spatial lors de son atterrissage sur une planète, et lorsqu'elle se trouve à une distance de 100 m du sol, est de lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s par rapport au sol. L'attraction dû à la gravité de cette planète est g = -10.5 m/s². Le signe négatif indique que les objets sont attirés vers la planète. On suppose que la direction positive du déplacement est vers le haut.

- a) Trouvez la vélocité et la position de l'objet en fonction du temps.
- **b)** Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet?
- c) Combien de temps s'écoule avant que l'objet revienne à une distance de 100 m de la planète après avoir été lancé. Quelle est sa vélocité à ce moment?
- d) Combien de temps s'écoule avant que l'objet frappe le sol (où la sonde qui vient de se poser)? Quelle est sa vélocité à ce moment?
- e) Dessinez le graphe de la position et de la vélocité en fonction du temps.

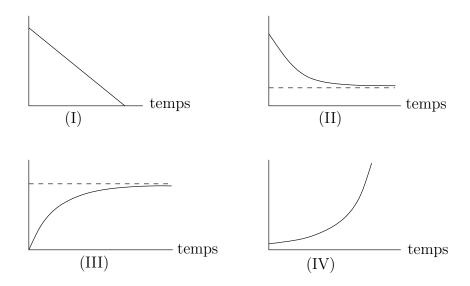
Question 3.14

Une cellule meure lorsque la concentration d'une certaine toxine dans la cellule dépasse 30 μ mol/l. Est-ce qu'une cellule peut survivre si la concentration initiale de la toxine dans la cellule est de 10 μ mol/l et la concentration augmente à un taux de 50 e^{-2t} μ mol/l/s?

Question 3.15

Associez chacun des graphiques ci-dessous à une des descriptions suivantes et donnez un équation différentielle possible pour chacun des cas.

- a) La température d'un verre d'eau glacé que l'on a laissé sur le comptoir.
- b) Le montant dans un compte avec intérêt composé de façon continue dans lequel on a déposé 100 dollars.
- c) La vitesse d'une voiture qui a une décélération constante.
- d) La température d'une pièce de métal chaude qu'on laisse refroidir.



Question 3.16

Montrez que $x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle x'(t) = 1 + 2x(t) et satisfait la condition initiale x(0) = 1.

Question 3.17

On considère l'équation différentielle $g'(t) = g^2(t) + 2t$. Est ce que la solution g de cette équation est croissante ou décroissante à t = 0 si g(0) = 1?

Question 3.18

Montrez que $b(t) = \ln(t)$ est une solution de l'équation différentielle $b'(t) = e^{-b(t)}$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante? Justifiez votre réponse.

Question 3.19

Montrez que $b(t) = 3e^{2t} - 0.5$ satisfait l'équation différentielle b'(t) = 1 + 2b(t) et la condition initiale b(0) = 2.5. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante? Justifiez votre réponse.

Question 3.20

Montrez que $b(t) = e^{-t}$ satisfait l'équation différentielle b'(t) = -b(t) et la condition initiale b(0) = 1. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction décroissante? Justifiez votre réponse.

Question 3.21

Montrez que $b(t) = 5 + 20e^{-2t}$ est une solution de l'équation différentielle b'(t) = 10 - 2b(t) avec la condition initiale b(0) = 25. Est-ce que la solution est croissante ou décroissante? Justifiez votre réponse précédente de deux façons, un argument qui utilise la formule pour b et un argument qui ne l'utilise pas.

Question 3.22

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation.

a)
$$y'' - y = 0$$

b) $x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0$
I) $y = e^x$
II) $y = x^3$
c) $x^2 y'' - 6y = 0$
III) $y = e^{-x}$

IV)
$$y = x^{-2}$$

Question 3.23

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation. k est une constante arbitraire.

a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}$
c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x \ln x}$
II) $y = kx$
III) $y = x^k$

Question 3.24

La demie-vie du Césium 137 est 30 ans. Le taux de décomposition du Césium 137 est proportionnel à la quantité de Césium 137 présent. Si au départ on a 50 mg, combien en restera-t-il au temps t? Combien de Césium 137 reste-t-il après 50 ans?

Question 3.25

Résoudre les problèmes aux valeurs initiales suivants à l'aide de la méthode de séparation des variables.

a)
$$\frac{dy}{dt} = 2y$$
 , $y(0) = 3$
b) $\frac{dx}{dt} = 3tx^2$, $x(1) = -0.4$
c) $\frac{dh}{dt} = 1000 - h$, $h(0) = 500$
d) $\frac{dg}{dx} = \frac{5}{1 + 2g}$, $g(0) = 0$
e) $\frac{dq}{dt} = tq^2 \sin(t^2)$, $q(0) = 1$
f) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1 + x^2}$, $y(0) = 2$
g) $\frac{dy}{dx} = (y - 1)(x + 2)$, $y(1) = 0$

Question 3.26

On considère l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + \frac{1}{x} \ .$$

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- b) Si $y = x^2$, trouvez une équation différentielle satisfaite par y.
- \mathbf{c}) Résolvez l'équation différentielle en y que vous avez trouvée en (b).
- d) Montrez que l'on peut obtenir la solution que vous avez trouvée en (a) à partir de la solution que vous avez trouvée en (c).

Question 3.27

La <u>lois de Fick</u> dit que la diffusion d'une solution au travers de la membrane d'une cellule

est décrite par l'équation différentielle

$$c'(t) = \frac{kA}{V} (C - c(t))$$

où c(t) est la concentration de la solution à l'intérieure de la cellule au temps t, A est l'aire de la surface représentée par la membrane de la cellule, V est le volume de la cellule, C est la concentration de la solution à l'extérieure de la cellule (que l'on suppose constante), et k est une constante de proportionnalité. Trouvez c(t) si la concentration initiale de la solution dans la cellule est de c_0 .

Question 3.28

Un médicament est administré de façon continue à un patient à un taux de r mg/hr. Ce médicament est éliminé de l'organisme à un taux qui est proportionnel à la quantité du médicament présent dans l'organisme. Supposons que cette constante de proportionnalité soit α .

- a) Donner et résoudre une équation différentielle qui décrit la quantité Q(t) du médicament dans l'organisme en milligrammes par rapport au temps en heures. Votre solution va dépendre de r et α . b) Dessiner le graphe de Q(t). Quelle est la valeur, Q_{∞} , de Q(t) lorsque t tend vers l'infini?
- c) Qu'arrive-t-il à Q_{∞} si on double r?
- d) Qu'arrive-t-il à Q_{∞} si on double α ?

Question 3.29

Résoudre le problème aux valeurs initiales $\frac{dy}{dt} = y^{1.1}$ avec y(0) = 100 à l'aide de la méthode de séparation des variables. Tracez le graphe de cette solution. Trouver les valeurs de t où la solution approche l'infini.

Question 3.30

On considère le problème aux valeurs initiales $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+x}$ avec x(0) = 1.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème ci-dessus. Vous ne serez pas capable d'exprimer x en fonction de t.
- b) Exprimez t en fonction de x et tracez le graphe de t en fonction de x pour $0 \le x \le 10$.
- c) Utilisez (b) pour tracer le graphe de x en fonction de t.

Question 3.31

On considère l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - 1$. Utilisez la substitution y = 2x - 1 pour réduire l'équation différentiel précédente en une équation différentiel plus simple. Utilisez cette dernière équation différentielle pour résoudre l'équation différentielle initiale $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - 1$.

Question 3.32

Une tasse de café dont la température est de 60°C est laissée dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 22°C.

a) D'après la Loi de Newton pour la chaleur, quelle est l'équation différentielle satisfaite par la température T(t) du café au temps t?

- b) Résoudre l'équation différentielle que vous avez trouvez en (a).
- c) Si la température du café est de 40°C après 20 minutes, quelle est la température du café après une heure?

Question 3.33

Une panne d'électricité se produit au milieu de janvier. Votre maison possède seulement un système de chauffage électrique. La panne débute à une heure de l'après-midi. À ce moment, la température à l'intérieur de votre maison est de 20° C. À dix heures du soir, il n'y a toujours pas d'électricité et la température à l'intérieur de votre maison est de 15° C. Vous notez que la température à l'extérieur est de -12° C.

- a) Si on suppose que la température T à l'intérieur de votre maison satisfait la lois de la chaleur de Newton, donnez l'équation différentielle satisfaite par cette température. Quelle hypothèse devez-vous faire sur la température extérieure?
- **b**) Résoudre l'équation différentielle en (a) et déterminez la température dans la maison à sept heures le matin suivant si la panne n'est toujours pas terminée.
- c) Étant donné l'hypothèse que vous avez faite en (a), est-ce que la température dans votre maison sera plus élevée ou plus base que la valeur que vous avez trouvé en (b)?

Question 3.34

Si b(t) est le nombre d'individus d'une population et $\lambda(t) = 1/(1+t)$ est le taux de reproduction par individu au temps t (le taux de reproduction n'est pas constant), alors

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \lambda(t) \, b$$

est une équation différentielle qui décrit le nombre d'individus.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- **b**) Tracez le graphe de la solution avec la condition initial $b(0) = 10^6$.

Question 3.35

La **Lois de Torricelli** pour l'écoulement d'un fluide (non-visqueux) hors d'un cylindre dont le font est percé dit que le taux auquel le fluide s'échappe du cylindre est proportionnel à la racine carrée de la profondeur du fluide dans le cylindre. Mathématiquement, si y(t) est la profondeur en centimètres du fluide au temps t en secondes, on a que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c\sqrt{y}$$

où c est une constante. Si le fluide est de l'eau, on a $c = -2.0 \, cm^{1/2}/s$. On assume pour le reste de la question que le fluide est de l'eau.

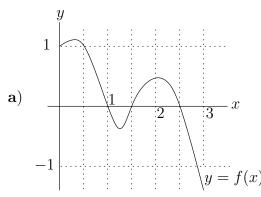
- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- **b**) Tracez le graphe de la solution avec la condition initial y(0) = 16 (0n a initialement 16 cm d'eau dans le cylindre).
- c) Déterminez le temps nécessaire pour vider le cylindre. (i.e. Pour quelle valeur de t a-t-on y(t) = 0?)

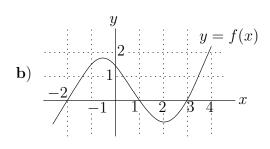
d) Quelle serait la profondeur de l'eau dans le cylindre après le nombre de secondes que vous avez trouvé en (c) si la lois qui gouverne l'écoulement de l'eau était

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2y \ .$$

Question 3.36

Pour chacun des graphes de f donnés ci-dessous, tracez le portrait de phases de l'équation différentielle x' = f(x). Déterminez la stabilité des points d'équilibre.





Question 3.37

Trouvez les points d'équilibre de chacune des équations différentielles suivantes et déterminez si possible leur stabilité à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.

a)
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x^2$$
 b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha e^{\beta y} - 1 \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0$

Question 3.38

Pour chacune des équations différentielles :

I: Trouvez les points d'équilibres et déterminez leur stabilité.

II: Tracez le portrait de phase.

III: Trouvez la solution qui satisfait la condition initiale donnée.

a)
$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4x + 3$$
 et $x(0) = 5$ b) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 7x + 10$ et $x(0) = 7$

Question 3.39 **\$**

Une équation différentielle de la forme x' = f(x) possède le portrait de phases suivant :



Les points 2, 4 et 6 sont trois points d'équilibre de l'équation différentielle. Tracez un graphe possible pour la solution x qui possède la condition initiale $x_0 = 5$.

Question 3.40

On considère l'équation différentielle autonome $\frac{dy}{dt} = y(y^2 - 6y + 5)$.

- Trouver les trois points d'équilibre.
- b) Déterminer la stabilité des points d'équilibre en (a) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.
- c) Dessiner le portrait de phase du système. Soyez aussi précis que possible.
- d) Sans résoudre l'équation différentielle, tracer un graphe possible pour la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale y(0) = 4.

Question 3.41

Déterminez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$. Tracez le portrait de phases de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$ pour $-\pi \le \theta \le 2\pi$.

Question 3.42

Trouvez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$. Tracez le graphe de f(x) = x^2 et le portrait de phases de ce système. Déterminez la stabilité des points d'équilibre. Est-ce que cela contredit le théorème de stabilité des points d'équilibre?

Question 3.43 **4 ©**

Est-il possible d'avoir un portrait de phases avec deux points d'équilibre asymptotiquement stables qui sont côte à côte? Justifiez votre réponse à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Question 3.44

En chimie, une équation de réaction-diffusion est une équation différentielle qui décrit la concentration d'un produit chimique sous l'effet d'une réaction chimique et de la diffusion. Un exemple simple d'une telle équation est

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \beta(\gamma - C) + \frac{C}{2 + C}$$

où le terme $\beta(\gamma-C)$ représente la diffusion et le terme $\frac{C}{2+C}$ représente la réaction chimique. les unités de la constante β sont les m⁻¹ et les unités de la constante γ sont les mol/l. Si $\beta = 1$ et $\gamma = 5$, trouvez les points d'équilibre et déterminez leur stabilité.

Question 3.45

Associez a chacune des équations différentielles suivantes un des champs de pentes ci-dessous.

a)
$$y' = \sin(x)$$
 b) $y' = y$ c) $y' = x$
d) $y' = 4 - y$ e) $y' = 1 + y^2$ f) $y' = x - y$

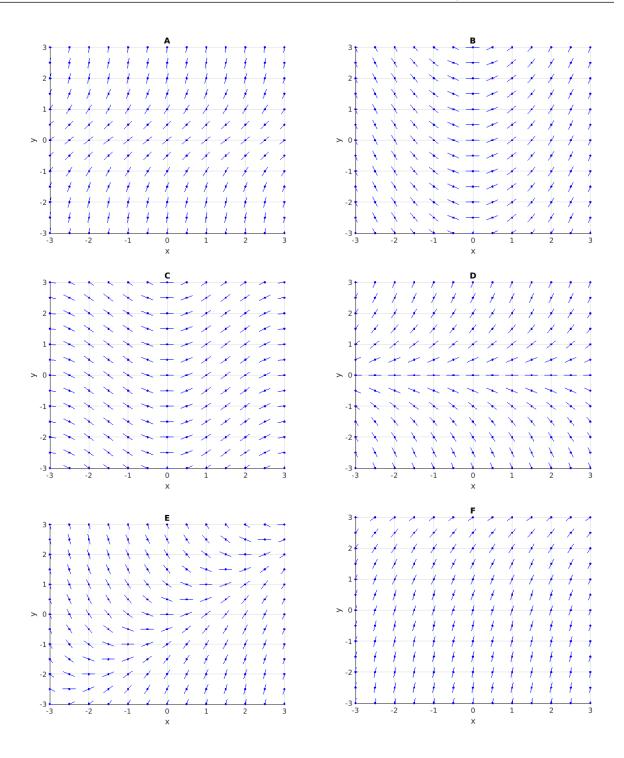
$$\mathbf{b}) \quad y' = y$$

$$\mathbf{c}) \quad y' = x$$

$$\mathbf{d}) \quad y' = 4 - y$$

e)
$$y' = 1 + y^2$$

$$\mathbf{f}) \quad y' = x - y$$

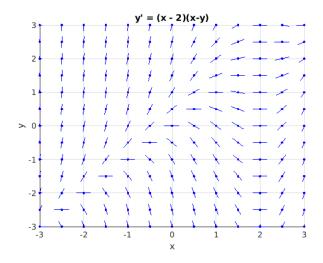


Question 3.46

Le champs de pentes de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x-2)(x-y)$$

est donné dans la figure ci-dessous.



- a) Tracez (de façon aussi précise que possible) le graphe de la solution qui passe par le point (0,0).
- b) Pour quelle valeur de x la solution particulière qui passe par le point (0,0) a-t-elle un minimum local? Un maximum local? Justifiez vos réponses.
- c) Pour quelles régions du champs de pentes a-t-on que la pente est positive. Justifiez votre réponse en utilisant seulement l'équation différentielle; sans utiliser le champ de pentes.

Question 3.47

On considère l'équation différentielle y' = -y/x.

- a) Dessinez le champ de pentes de cet équation différentielle.
- b) Dessinez sur la même figure que celle pour votre champ de pentes plusieurs solutions de cette équation différentielle.
- $\mathbf{c})$ Trouvez la solution générale de l'équation différentielle.
- d) Que ce passe-t-il lorsque x = 0?

Question 3.48

L'équation différentielle suivante décrit la concentration C(t) d'un produit chimique au temps t dans une cellule.

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \beta(\Gamma - C) + 0.5 C . \tag{3.9.1}$$

Le terme 0.5C représente la réaction en réponse à un facteur externe (la cellule fabrique le produit chimique) et le terme $\beta(\Gamma - C)$ représente la diffusion au travers de la membrane de la cellule. C'est un exemple d'une **équation de réaction diffusion**.

Répondez aux questions suivantes pour $\beta = 1.0 \text{ min}^{-1}$ et $\Gamma = 5.0 \text{ mol/l}$.

- a) Quelles sont les points d'équilibre?
- b) Utilisez le théorème sur la stabilité des points d'équilibre pour déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- ${f c})$ Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- d) Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.

e) Quelles seraient les points d'équilibre s'il n'y avait pas le terme de réaction (i.e. 0.5C) dans l'équation différentielle ci-dessus.?

Question 3.49

Un troupeau de gnous (de la famille des antilopes) habite une réserve faunique. La population initiale est de 1000 gnous. Après un an, la population est de 1100 gnous. La population satisfait le modèle logistique de croissance avec une capacité optimale pour le milieu de 1800 gnous. Combien de temps faut-il pour que la population atteigne 1500 gnous?

Question 3.50

Pour une certaine population, le nombre d'individus N(t) en unités de cent individus au temps t satisfait

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N \ . \tag{3.9.2}$$

- a) Quelles sont les points d'équilibre?
- b) Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- c) Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- d) Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.
- e) Déterminez le seuil de la population pour que celle-ci augmente?

Question 3.51

Le modèle suivant est appelé le modèle de méta-population de Levins. Pour étudier une population animale habitant un territoire, on divise le territoire en petites sections. Soit p la fraction des sections qui sont habitées et d la fractions des sections qui sont détruites (e.g. par une développeur immobilier). On suppose que les sections détruites ne sont pas habitées (et habitables). La fraction 1-p est donc la fraction des sections qui ne sont pas habitées et 1-p-d est la fraction des sections qui ne sont pas habitées mais habitables.

La fraction de sections habitées est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = c\,p(1 - d - p) - m\,p$$

où m=1 est le taux auquel les animaux d'une section habitée quittent cette section et c=2 est le taux auquel les animaux s'installent dans une section inhabitée et habitable.

Pour que le modèle soit consistant, on doit avoir $0 \le p \le 1$ et $0 \le d \le 1$. De plus, on doit avoir $1 - p - d \ge 0$. Donc, on doit avoir en fait $0 \le p \le 1 - d$.

- a) Trouvez les deux points d'équilibre de l'équation différentielle. Un des points d'équilibre va dépende du paramètre d. Pour quelles valeurs de d ce point d'équilibre a-t-il un sens biologique?
- b) Tracez le graphe de la fonction qui génère l'équation différentielle et tracez le portrait de phases lorsque d = 1/4 et d = 3/4.
- c) Utilisez le test de la dérivée pour déterminer la stabilité des deux points d'équilibres. La stabilité va dépende de d.

d) Est-ce que la population va survivre si 1/4 des sections (i.e. d = 1/4) sont détruites? Si 3/4 des sections sont détruites?

Question 3.52

La concentration de sel dans un réservoir de 1000 litres d'eau salée est de 0.025 kg par litre. De l'eau salée dont la concentration de sel est de 0.01 kg par litre est ajoutée au réservoir à raison de 10 litres par minute. De plus, 10 litres d'eau salée par minute s'échappe du réservoir. Si on suppose que le contenue du réservoir est bien mélangé, combien de temps s'écoule-t-il avant que l'on atteigne une concentration de 0.02 kg de sel par litre?

Question 3.53

Un réservoir contient 1000 litres d'eau pure. Une saumure contenant 0.1 kg de sel par litre d'eau est versée dans le réservoir au taux de 5 litres par minute. Une saumure contenant 0.05 kg de sel par litre est aussi versée dans le réservoir au taux de 15 litres par minute. En supposant que le contenu du réservoir est toujours bien mélangé et que le réservoir perd 20 litres par minutes, quelle est la quantité de sel dans le réservoir après t minutes? quelle est la concentration de sel dans le réservoir après t minutes?

Question 3.54

On considère l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - x^2$ où a est un paramètre.

- a) Trouvez les points d'équilibre de cette équation différentielle. Un des points d'équilibre devrait dépendre de a.
- b) Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de a pour a au voisinage de l'origine. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stables et une ligne hachurée pour les points d'équilibre instables.
- c) Que ce passe-t-il au voisinage de l'origine? Ce genre de phénomène est appelé <u>bifurcation</u>. Dans le cas présent, on parle de bifurcation transcritique.

Question 3.55 **\$**

On considère l'équation logistique

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = b(1-b) - hb \tag{3.9.3}$$

pour une population animale où h est la fraction de la population qui a été récolté.

- a) Trouvez les points d'équilibre de (3.9.3). Un des points d'équilibre va dépendre de h.
- b) Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de h pour $0 \le h \le 2$. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stable et une ligne hachurée pour les point d'équilibre instable. Même s'ils n'ont pas de sens biologique, inclure les valeurs négative des points d'équilibre.
- c) Quelle type de bifurcation obtenez-vous?

Question 3.56

On considère l'équation différentielle y'(x) = f(x) avec y(0) = 0. Expliquer pourquoi l'approximation de y(x) donnée par la méthode d'Euler correspond à une somme de Reimann à

droite associée a l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$.

Question 3.57

a) Utiliser la méthode d'Euler pour trouver une approximation de la solution y(t) de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1/t$$

à t=2. Commencer à (t,y)=(1,0) et utiliser 10 sous-intervalles.

- **b**) Trouver la valeur exacte de y(t) à t=2.
- c) Est-ce que votre approximation de y(t) à t=2 est plus petite ou plus grande que la valeur exacte à t=2. Utiliser le champ de pentes (i.e. la courbure de la solution) pour expliquer la différence.

Question 3.58 🔑

Utilisez la méthode d'Euler avec 10 sous-intervalles pour résoudre numériquement l'équation différentielle

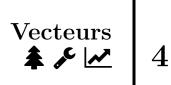
$$y' = \frac{y+t}{t} \quad , \quad 1 \le t \le 2$$
$$y(1) = 0$$

Est-ce que les valeurs données par la méthodes d'Euler sont des surestimations ou des sous-estimations de la solution y?

Question 3.59

- a) Utilisez la méthode d'Euler avec h = 0.25 pour trouver une approximation de y(0.5) où y est la solution de l'équation différentielle y' = 2xy avec la condition initiale y(0) = 1.
- **b**) Trouvez la solution exacte de l'équation différentielle y' = 2xy avec y(0) = 1.
- c) Quelle est l'erreur de l'approximation de y(0.5) trouvée en (a)?





Dans ce chapitre, nous revoyons rapidement quelques notions de géométrie analytique que le lecteur devrait avoir étudié à l'école secondaire. Une grande partie des concepts présentés dans ce chapitre seront utilisés lors de l'étude des fonctions de plusieurs variables dans un prochain chapitre.

4.1 Vecteurs

Définition 4.1.1

On peut associer un **vecteur p** à tout point $P = (p_1, p_2)$ du plan \mathbb{R}^2 ; c'est-à-dire, une flèche qui part de l'origine (0,0) dans le plan et se termine au point P. Puisque chaque vecteur \mathbf{p} est associé à un unique point $P = (p_1, p_2)$ et vice-versa, on écrit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

De même, on peut associer un **vecteur p** à tout point $P = (p_1, p_2, p_3)$ de l'espace \mathbb{R}^3 ; c'est-à-dire, une flèche qui part de l'origine (0,0,0) dans l'espace et se termine au point P. On écrit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Puisqu'il y a une bijection entre les vecteurs et les points, nous utiliserons à partir de maintenant la notation \mathbf{p} pour désigner un point ou un vecteur. Le contexte déterminera comment on doit interpréter \mathbf{p} .

Exemple 4.1.2

On retrouve à la figure 4.1 la représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$.

Définiton 4.1.3

La longueur (euclidienne) du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est

$$\|\mathbf{p}\| \equiv \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \ .$$

Cette définition découle du théorème de Pythagore qui affirme que le carré de l'hypoténuse d'un triangle droit est égal à la somme des carrés des deux côtés adjacents à l'angle droit. La justification de la formule pour la longueur d'un vecteur est donnée à la figure 4.2.

4. Vecteurs **♣** № ₩

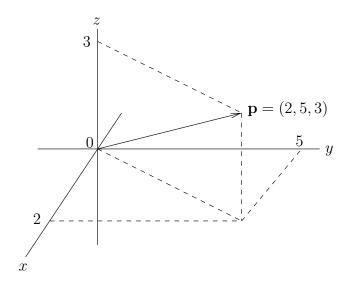


Figure 4.1 – Représentation graphique du vecteur $\mathbf{p}=(2,5,3)$ de l'espace

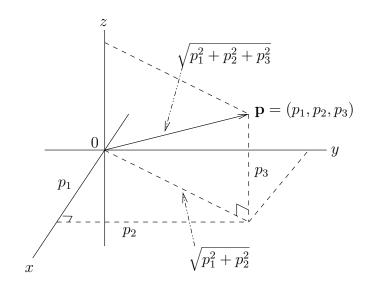


FIGURE 4.2 – Longueur du vecteur $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$

4.2 Opérations sur les vecteurs

On peut définir des opérations algébriques sur les vecteurs comme ils en existent pour les nombres. De plus, on peut aussi définir des opérations sur les vecteurs qui ont une importante signification géométrique comme on verra dans les prochaines sections.

On commence par définir deux opérations algébriques sur les vecteurs : <u>le produit d'un</u> vecteur par un nombre réel et la somme de vecteurs.

Par la suite, nous définirons deux opérations sur les vecteurs, <u>le produit scalaire</u> et <u>le</u> produit vectoriel, qui jouent des rôles majeurs dans l'analyse géométrique.

4.2.1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définiton 4.2.1

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et ρ est un nombre réel. On définit le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} comme étant le vecteur

$$\mathbf{q} = \rho \, \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2) = (\rho p_1, \rho p_2) \ .$$

De même, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et ρ est un nombre réel. On définit le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} comme étant le vecteur

$$\mathbf{q} = \rho \, \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2, p_3) = (\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3) .$$

Le vecteur \mathbf{q} est de longueur $|\rho| ||\mathbf{p}||$ et pointe dans la même direction que \mathbf{p} si $\rho > 0$ et dans la direction opposée à \mathbf{p} si $\rho < 0$.

Exemple 4.2.2

Le vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$, où \mathbf{p} est le vecteur donné à l'exemple 4.1.2, est dessiné à la figure 4.3. On a

$$\mathbf{q} = -2\mathbf{p} = -2(2, 5, 3) = (-4, -10, -6)$$
.

å

220 4. Vecteurs ♣ № 🗠

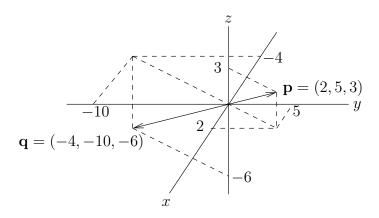


FIGURE 4.3 – Représentation du vecteur $\mathbf{q}=-2\mathbf{p}$ où le vecteur $\mathbf{p}=(2,5,3)$ est représenté à la figure 4.1

4.2.2 Somme de vecteurs

Définiton 4.2.3

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, on définit la **somme** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$
.

De même, si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, on définit la **somme** des deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$
.

Exemple 4.2.4

Le résultat $\mathbf{r} = (5, 9, 4)$ de la somme des vecteurs $\mathbf{p} = (6, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (-1, 3, 2)$ est illustré à la figure 4.4.

On remarque que les trois vecteurs \mathbf{p} , \mathbf{q} et \mathbf{r} sont tous dans le même plan. On verra à la section 4.2.5 sur le produit vectoriel comment on peut facilement vérifier cette affirmation.

4.2.3 Notation vectorielle classique

Les vecteurs suivants sont fondamental en analyse vectorielle. Pour cette raison, ils ont leur propre notation.

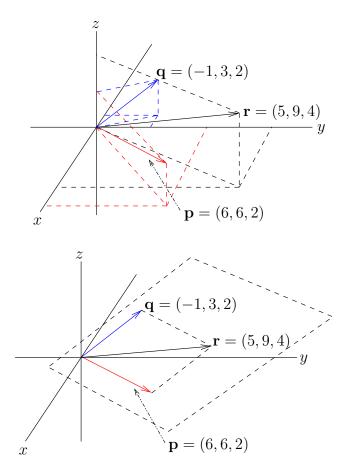


FIGURE 4.4 – Ces figures illustrent l'aspect géométrique de la somme des deux vecteurs donnés à l'exemple 4.2.4

222 4. Vecteurs ♣ ⊁ 🗠

Définiton 4.2.5

Dans le plan, les vecteurs $\mathbf{i} = (1,0)$ et $\mathbf{j} = (0.1)$ sont appelés les vecteurs canoniques. On remarque que si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, alors $\mathbf{p} = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j}$.

De même, dans l'espace à trois dimensions, les **vecteurs canoniques** sont les vecteurs $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0.1,0)$ et $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, on a $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$.

Dans les livres de mathématiques, on utilise aussi la notation \mathbf{e}_1 pour \mathbf{i} , \mathbf{e}_2 pour \mathbf{j} et \mathbf{e}_3 pour \mathbf{k} .

4.2.4 Produit scalaire

Alors que le produit d'un vecteur par un nombre réel et l'addition de vecteurs ont un rôle principalement algébrique, le produit scalaire est l'une des deux opérations sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique; l'autre opération étant le produit vectoriel.

Définiton 4.2.6

On définit le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ et $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$, comme étant le nombre réel

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 \ .$$

De même, on définit le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, comme étant le nombre réel

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 .$$

On utilise aussi la notation $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ pour le produit scalaire des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} quand cela ne cause pas de confusion.

Pourquoi définir un produit de deux vecteurs comme on vient de le faire? N'aurions-nous pas pu définir le produit de deux vecteurs composante par composante comme on l'a fait pour la somme de deux vecteurs? En fait, on aurait pu le faire mais cela n'a pas d'intérêt car il n'y a pas d'interprétations géométriques du produit de deux vecteurs composante par composante. Par contre, le produit scalaire défini ci-dessus a une interprétation géométrique très importante.

Définition 4.2.7

Le cosinus de l'angle entre les vecteurs non-nuls ${\bf p}$ et ${\bf q}$ (et ainsi l'angle entre ces vecteurs) est déterminé par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|}.$$
 (4.2.1)

C'est cette définition qui fait le lien entre l'opération algébrique qu'est le produit scalaire de deux vecteurs et l'interprétation géométrique que l'on a des vecteurs.

Remarque 4.2.8

On remarque que la longueur d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur par lui-même. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, on a que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = ||\mathbf{p}||^2$$
.

Si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, alors le cosinus entre les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est 0. On a donc que l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\pi/2$ ($+n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 4.2.9

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} , deux vecteurs. On dit que \mathbf{p} est **perpendiculaire** ou **orthogonal** à \mathbf{q} (et vice-versa) si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

Remarque 4.2.10

Vous avez probablement appris que le produit des pentes de deux droites orthogonales est -1. Il est facile à l'aide des vecteurs de vérifier cette énoncé. Supposons que $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_1 et que $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_2 . Si les droite ℓ_1 et ℓ_2 sont perpendiculaires, alors il en est de même pour les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} , et vice-versa. On a donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0 .$$

Ainsi

$$\frac{p_2}{p_1} = -\frac{q_1}{q_2} \ .$$

Puisque $m_1=\frac{p_2}{p_1}$ est la pente de la droite ℓ_1 et $m_2=\frac{q_2}{q_1}$ est celle de la droite ℓ_2 , on obtient que $m_1=-\frac{1}{m_2}$.

Remarque 4.2.11

Nous justifierons ci-dessous la définition 4.2.7 dans le plan. La justification est identique pour les vecteurs dans l'espace.

Commençons par un petit rappel. À la figure 4.5, on retrouve le triangle $\triangle ABC$. La **loi** des cosinus dit que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) .$$

224 4. Vecteurs **♣ №**

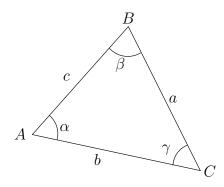


FIGURE 4.5 – La loi des cosinus dit que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

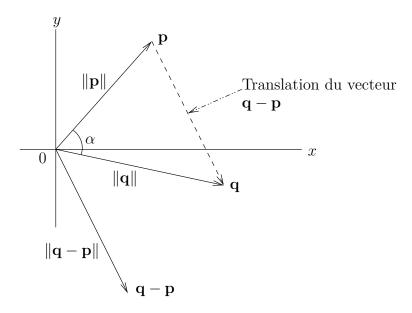


FIGURE 4.6 – Interprétation géométrique du produit scalaire

Soit
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2)$$
 et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$.

De la loi des cosinus, on déduit que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos(\alpha)$$
 (4.2.2)

où α est l'angle entre **p** et **q** (voir figure 4.6).

Puisque $\mathbf{q} - \mathbf{p} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$, on a que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2$$

$$= (p_1^2 + p_2^2) + (q_1^2 + q_2^2) - 2(p_1q_1 + p_2q_2)$$

$$= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle.$$

Ainsi, (4.2.2) devient

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos(\alpha)$$
.

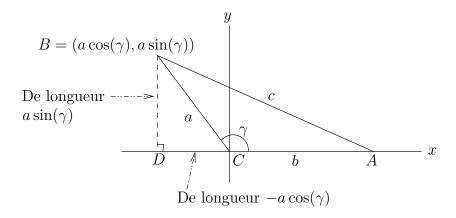


FIGURE 4.7 – Démonstration de la loi des cosinus

Après avoir simplifié les termes identiques de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\alpha)$$
.

Si on isole $\cos(\alpha)$, on retrouve la définition 4.2.7.

Remarque 4.2.12 ②

Il est facile de démontrer la loi des cosinus en utilisant les coordonnées cartésiennes.

Pour démontrer la loi des cosinus pour l'angle au sommet C d'un triangle $\triangle ABC$. on place le sommet C à l'origine et le sommet A (ou B) sur l'axe des x comme on peut le voir à la figure 4.7.

Les coordonnées du point B sont donc $(a\cos(\gamma), a\sin(\gamma))$ et celle du point A sont (b,0). Le triangle $\triangle DAB$ a un angle droite au sommet D. Le théorème de Pythagore nous donne donc

$$c^{2} = (a\sin(\gamma))^{2} + (-a\cos(\gamma) + b)^{2}$$
.

Si on développe le côté droit de cette équation, on trouve

$$c^{2} = a^{2} \sin^{2}(\gamma) + a^{2} \cos^{2}(\gamma) - 2ab \cos(\gamma) + b^{2}$$
$$= a^{2} \left(\cos^{2}(\gamma) + \sin^{2}(\gamma)\right) + b^{2} - 2ab \cos(\gamma)$$
$$= a^{2} + b^{2} - 2ab \cos(\gamma)$$

puisque $\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1$.

4.2.5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique.

226 4. Vecteurs **♣** № ...

Définiton 4.2.13

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ sont deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires (i.e. un multiple l'un de l'autre), on définit le **produit vectoriel** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i} + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k}$$
 (4.2.3)

Donc, $\mathbf{m} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1).$

Le vecteur qui résulte du produit vectoriel de deux vecteurs a une relation géométrique très particulière avec les deux vecteurs du produit.

Proposition 4.2.14

Le vecteur $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Pour vérifier que $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire à \mathbf{p} , il suffit de vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle = 0$. En effet,

$$\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle = \langle (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1), (p_1, p_2, p_3) \rangle$$

$$= p_1 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + p_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + p_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

$$= p_1 p_2 q_3 - p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1 - p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 - p_2 p_3 q_1$$

$$= 0.$$

De même, on peut vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle = 0$.

Définiton 4.2.15

La direction du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est déterminée par la **règle de la main droite**. C'està-dire, si la paume de votre main droite entoure la droite qui contient le vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ de telle sorte que vos doigts indiquent la plus petite direction angulaire de \mathbf{p} à \mathbf{q} , alors votre pouce pointe dans la direction de $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ (voir la figure 4.8).

Exemple 4.2.16

On peut facilement vérifier avec la règle de la main droite que $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ et $-\mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{i}$.

Quelques manipulations algébriques vont nous permettre de trouver une formule pour la longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$. Soit θ , le plus petit angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} (donc, $0 < \theta < \pi$). On a déjà vu que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\theta)$$
.

Ainsi,

$$\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\|^2 = (p_2q_3 - p_3q_2)^2 + (p_3q_1 - p_1q_3)^2 + (p_1q_2 - p_2q_1)^2$$

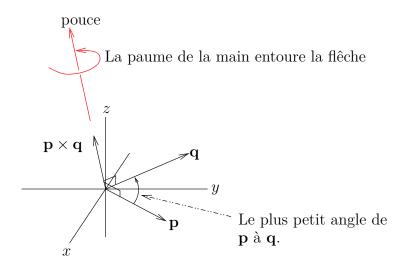


FIGURE 4.8 – Le vecteur obtenu du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan généré par ces deux vecteurs.

$$= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_2)^2$$

$$= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 - (\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle)^2 = \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \cos^2(\theta)$$

$$= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \sin^2(\theta).$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 4.2.17

$$\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| == \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$$

où $0 < \theta < \pi$ est l'angle entre **p** et **q**.

Exemple 4.2.18

On a que le plus petit angle entre les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} est $\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = \|\mathbf{i}\| \|\mathbf{j}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

comme il se doit.

Il y a une interprétation géométrique très intéressante de la longueur du vecteur obtenu d'un produit vectoriel. On remarque à la figure 4.9 que $\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme définie par \mathbf{p} et \mathbf{q} . Donc, la longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est l'aire de ce parallélogramme.

228 4. Vecteurs ♣ № 1

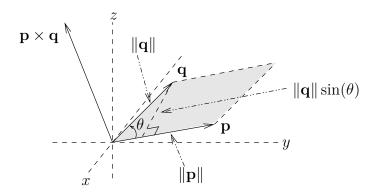


FIGURE 4.9 – L'aire du parallélogramme définie par les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$.

4.3 Équation d'une droite

On peut utiliser les vecteurs pour décrire les droites.

La droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} (voir figure 4.10) est formé des points \mathbf{r} où

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} \tag{4.3.1}$$

et α prend toutes les valeurs réelles.

Rappelons que l'on utilise la même notation pour désigner un point ou un vecteur. On peut donc faire référence au point \mathbf{r} et à ses coordonnées quand cela est nécessaire à un certain moment et traiter \mathbf{r} comme un vecteur à d'autres moments.

Définition 4.3.1

La formule (4.3.1) est la **représentation vectorielle** de la droite qui passe par **p** et est parallèle au vecteur **q**.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ et $\mathbf{r} = (x, y, z)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ sont

$$x = p_1 + \alpha \ q_1 \ , \ y = p_2 + \alpha \ q_2 \quad \text{et} \quad z = p_3 + \alpha \ q_3 \ .$$
 (4.3.2)

Définition 4.3.2

la formule (4.3.2) est la **représentation paramétrique** de la droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} . Le **paramètre** est α .

Si on suppose que q_1 , q_2 et q_3 sont non nuls et que l'on résout chacune des trois équations de la représentation paramétrique pour α , on obtient

$$\frac{x-p_1}{q_1} = \frac{y-p_2}{q_2} = \frac{z-p_3}{q_3} \ . \tag{4.3.3}$$

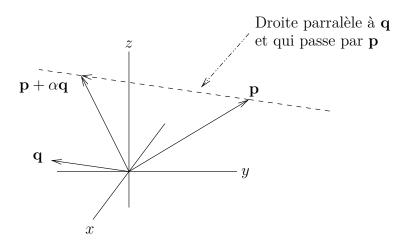


FIGURE 4.10 – Représentation vectorielle d'une droite

Si q_2 et q_3 sont non nuls mais $q_1 = 0$, on obtient

$$\frac{y-p_2}{q_2} = \frac{z-p_3}{q_3}$$
 et $x = p_1$. (4.3.4)

C'est une droite dans le plan $x = p_1$. Le lecteur est invité à analyser les autres cas possibles.

Définiton 4.3.3

Les formules (4.3.3) et (4.3.4) sont des **représentations standard** d'une droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} .

Remarque 4.3.4

On peut déduire de la figure 4.11 que, dans le plan, les points \mathbf{r} de la droite passant par le point \mathbf{p} et perpendiculaire au vecteur \mathbf{q} sont donnés par

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$$
.

Exemple 4.3.5

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{q} = (-1, 2, 2)$, alors l'ensemble des points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de la droite passant par \mathbf{p} et parallèle à \mathbf{q} est donnée par la relation

$$(x, y, z) = \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} = (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) = (1 - \alpha, 2 + 2\alpha, 3 + 2\alpha)$$
.

On a donc la représentation paramétrique

$$x = 1 - \alpha$$
, $y = 2 + 2\alpha$ et $z = 3 + 2\alpha$,

et la représentation standard

$$-(x-1) = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} .$$

230 4. Vecteurs **♣** № <u>№</u>

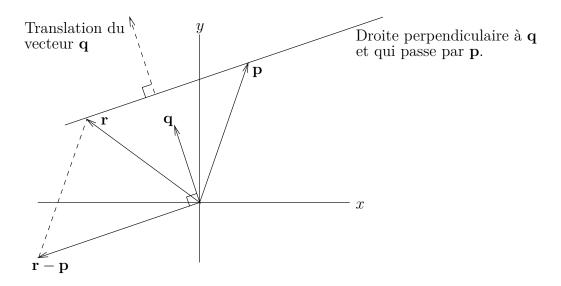


FIGURE 4.11 – L'équation d'une droite du plan passant par un point \mathbf{p} et perpendiculaire à un vecteur \mathbf{q} est $\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

Remarque 4.3.6

La représentation classique d'une droite dans le plan est y = mx + b où m est la pente de la droite et b est l'abscisse à l'origine.

Quel est la relation entre la représentation paramétrique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} , et la représentation standard de l'équation de cette droite? On va répondre à cette question à l'aide d'un exemple.

Soit $\mathbf{p} = (2,3)$ et $\mathbf{q} = (4,3)$. Pour trouver l'équation classique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} , il faut premièrement trouver la pente de la droite qui passe par l'origine et \mathbf{q} ; c'est-à-dire, la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . La pente de cette droite est 3/4.

La forme **point-pente** de la droite cherchée est donc

$$y - 3 = \frac{3}{4} (x - 2) .$$

On obtient la représentation classique

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

de la droite.

L'ensemble des points ${\bf r}=(x,y)$ de la droite qui passe par le point ${\bf p}$ et est parallèle au vecteur ${\bf q}$ est donnée par

$$(x,y) = \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} = (2,3) + \alpha(4,3) = (2+4\alpha,3+3\alpha)$$
.

Une représentation paramétrique de la droite qui passe par le point ${\bf p}$ et est parallèle au vecteur ${\bf q}$ est donc

$$x = 2 + 4\alpha$$
 et $y = 3 + 3\alpha$.

De la première équation, on obtient que $\alpha = (x-2)/4$. Si on substitue cette expression pour α dans l'équation $y = 3 + 3\alpha$, on obtient

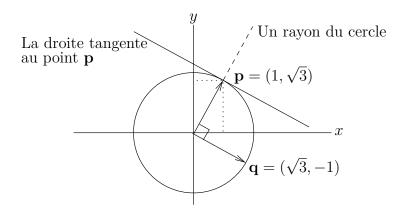
$$y = 3 + 3 \frac{x - 2}{4} = 3 + \frac{3}{4}(x - 2) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

et on retrouve la représentation classique de le droite.

4.3.1 Droites tangentes

Exemple 4.3.7

Trouver l'équation de la droite tangent au point $\mathbf{p}=(1,\sqrt{3})$ du cercle de rayon 2 centré à l'origine



On présente trois solutions à ce problème.

a) On remarque que le vecteur \mathbf{p} est perpendiculaire à la droite tangente au cercle. Donc \mathbf{p} représente un rayon. Donc, les points $\mathbf{r} = (x, y)$ de la droite tangente cherchée satisfont

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x - 1, y - \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = (x - 1) + \sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0$$
.

Si on résout pour y, on obtient

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$
;

la représentation classique pour la droite tangente.

b) Une autre solution fait appel à la représentation paramétrique d'une droite. Premièrement, on trouve un vecteur parallèle à la tangent au cercle au point \mathbf{p} . C'est-à-dire que l'on cherche un vecteur perpendiculaire au vecteur $\mathbf{p} = (1, \sqrt{3})$. Il est facile de voir que $\mathbf{q} = (\sqrt{3}, -1)$ est perpendiculaire au vecteur \mathbf{p} car $\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = 0$. Ainsi, les points $\mathbf{r} = (x, y)$ de la droite tangent au cercle au point \mathbf{p} satisfont

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$$
.

232 4. Vecteurs **♣** № <u>№</u>

La représentation paramétrique de la droite tangent au cercle au point $(1, \sqrt{3})$ est alors

$$x = 1 + \alpha \sqrt{3}$$
 et $y = \sqrt{3} - \alpha$

pour tout nombre réel α .

Si on résout pour α la première équation de la représentation paramétrique, on trouve $\alpha = (x-1)/\sqrt{3}$. Si on substitue cette expression pour α dans la deuxième équation de la représentation paramétrique, on obtient la représentation classique pour l'équation d'une droite tangente.

$$y = \sqrt{3} - \frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$
.

c) La façon traditionnelle de trouver l'équation de la tangente au point \mathbf{p} est de commencer par trouver la pente de la tangente. Pour cela, on note que la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} est $m_1 = \sqrt{3}$. Comme la droite tangente est perpendiculaire à la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} , sa pente est donc

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$
.

La forme **pente-point** de l'équation de la tangente au cercle au point **p** est donc

$$y - \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1) \ .$$

Donc,

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}} x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$
.

4.3.2 Intersection de deux droites

Dans le plan, deux droites non-parallèles se coupent en un point. Dans l'espace, deux droites non-parallèles ne se coupent généralement pas en un point. L'exemple suivant illustre une méthode pour trouver l'intersection de deux droites si cette intersection existe.

Exemple 4.3.8

Trouver l'intersection (s'il y en a une) des droites ℓ et ℓ' données par les représentations paramétriques suivantes. La droite ℓ possède la représentation paramétrique

$$x = 2s - 3$$
, $y = s - 1$ et $z = -s + 5$

pour $s \in \mathbb{R}$, et la droite ℓ' possède la représentation paramétrique

$$x = t - 3$$
, $y = -2t + 1$ et $z = t - 1$,

pour $t \in \mathbb{R}$.

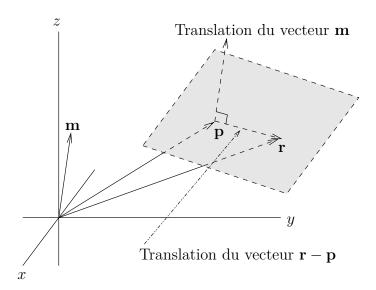


FIGURE 4.12 – Représentation vectorielle d'un plan

Ces deux droites ne sont pas parallèles car ℓ est parallèle au vecteur (2,1,-1) et ℓ' au vecteur (1,-2,1), et ces deux vecteurs ne sont pas parallèles. Pour que ces deux droites se coupent en un point (x,y,z) commun, il faut qu'ils existent s et t tels que

$$t-3=2s-3$$
 , $-2t+1=s-1$ et $t-1=-s+5$.

La première équation donne t = 2s. Si on substitue cette expression pour t dans la deuxième équation, on trouve -4s + 1 = s - 1 et donc s = 2/5. On obtient de t = 2s que t = -4/5. Malheureusement, si on substitue s = 2/5 dans la troisième équation, on obtient t = 28/5. Donc, il n'y a pas de valeurs de s et t qui satisfont les trois équations simultanément. Les deux droites ne se coupent pas.

4.4 Équation d'un plan 🔑

Proposition 4.4.1

Le plan qui passe par un point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{m} (voir la figure 4.12) est l'ensemble des points \mathbf{r} tels que le vecteur $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ est perpendiculaire à \mathbf{m} . Si on utilise le produit scalaire, on peut définir ce plan comme l'ensemble des points \mathbf{r} tels que

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0$$
.

Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, la formule donnée à la proposition (4.4.1) devient

$$m_1(x - p_1) + m_2(y - p_2) + m_3(z - p_3) = 0$$
 (4.4.1)

234 4. Vecteurs ♣ ⊁ 🗠

ou simplement

$$m_1 x + m_2 y + m_3 z - d = 0 (4.4.2)$$

où $d = m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$. On pourrait penser que la valeur de d va changer si on choisie différent points \mathbf{p} du plan. En fait, ce n'est pas le cas. Soit \mathbf{t} un autre point du plan. Puisque $\mathbf{t} - \mathbf{p}$ est un vecteur parallèle au plan et donc perpendiculaire à \mathbf{m} , on a

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle - \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{t} - \mathbf{p} \rangle = 0$$

Ainsi $\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$.

Définiton 4.4.2

la formule (4.4.1) (ou (4.4.2)) est la **représentation standard** d'un plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{m} . On dit que le vecteur \mathbf{m} est orthogonal ou perpendiculaire au plan.

Si $m_3 \neq 0$ on peut écrire

$$z = z_0 - \frac{m_1}{m_3}(x - x_0) - \frac{m_2}{m_3}(y - y_0)$$
.

Si $m_3 = 0$ et $m_2 \neq 0$, l'équation du plan est simplement

$$y = y_0 - \frac{m_1}{m_2}(x - x_0)$$

et z est libre (i.e. z varie entre $-\infty$ et ∞). C'est un plan qui est parallèle à l'axe des z. On laisse aux lecteurs l'étude des autres cas possibles.

Exemple 4.4.3

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{m} = (1, -2, 4)$, l'ensemble des points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan est donnée par la relation

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x, y, z) - (1, 2, 3), (1, -2, 4) \rangle = (x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$
.

Si on résout pour z on trouve

$$z = 3 - \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 2)$$
.

Exemple 4.4.4

Trouver l'équation du plan tangent au point $\mathbf{p} = (1, 2, 2)$ de la sphère de rayon 3 centré à l'origine.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent de la sphère au point \mathbf{p} est donné par le vecteur \mathbf{p} lui-même. Ainsi, les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan tangent cherché satisfont l'équation

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x - 1, y - 2, z - 2), (1, 2, 2) \rangle = (x - 1) + 2(y - 2) + 2(z - 2) = 0$$
.

Si on résout pour z, on trouve

$$z = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - (y - 2)$$
.

On sait qu'un plan est déterminé par trois points non-alignés. Comment peut-on trouver l'équation du plan qui passe par trois points non-alignés? On reformule la question de la façon suivante. Étant donné trois points non-alignés, comment peut-on trouver un vecteur normal au plan qui contient ces trois points? La réponse à cette question nous est fournie par le produit vectoriel.

Proposition 4.4.5

Si \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} sont trois points non-alignés d'un plan, alors $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p}$ et $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p}$ sont deux vecteurs parallèles au plan qui ne sont pas colinéaires, et $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$ est un vecteur perpendiculaire au plan. Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est un point du plan, la représentation standard du plan est alors donnée par

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0$$
.

Exemple 4.4.6

Trouvons l'équation du plan qui contient les trois points (2,1,3), (1,-2,3) et (1,5,4).

On peut choisir $\mathbf{p} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ et $\mathbf{v} = (1, 5, 4)$. Tout autre choix pour \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} est valable.

Ainsi,

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p} = (1, -2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, -3, 0)$$

et

$$\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p} = (1, 5, 4) - (2, 1, 3) = (-1, 4, 1)$$
.

On obtient

$$m = s \times t = (-3, 1, -7)$$
.

Les points $\mathbf{r}=(x,y,z)$ du plan contenant $\mathbf{p},\,\mathbf{u}$ et \mathbf{v} satisfont donc l'équation

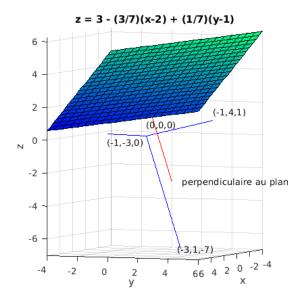
$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x, y, z) - (2, 1, 3), (-3, 1, -7) \rangle = -3(x - 2) + (y - 1) - 7(z - 3) = 0$$
.

On peut résoudre pour z pour obtenir

$$z = 3 - \frac{3}{7}(x-2) + \frac{1}{7}(y-1)$$
.

Le graphe (d'une partie) du plan est présenté dans la figure suivante.

236 4. Vecteurs ♣ ⊁ 🗠



On remarque que $\mathbf{m} = (-3, 1, -7)$ satisfait bien la règle de la main droite avec les vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 3, 0)$ et $\mathbf{t} = (-1, 4, 1)$.

4.4.1 Représentations vectorielles et paramétriques du plan

Comme pour la droite dans le plan, il existe des représentations vectorielles et paramétriques pour le plan.

Le plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires (voir la figure 4.13) est formé des points $\mathbf{r}(x,y,z)$ de la forme

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \tag{4.4.3}$$

où α et β prennent toutes les valeurs réelles.

Définiton 4.4.7

La formule (4.4.3) est une **représentation vectorielle** du plan qui contient le point \mathbf{p} et est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaire.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ et $\mathbf{r} = (x, y, z)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{s}$ sont

$$x = p_1 + \alpha s_1 + \beta t_1 \tag{4.4.4a}$$

$$y = p_2 + \alpha s_2 + \beta t_2 \tag{4.4.4b}$$

$$z = p_3 + \alpha s_3 + \beta t_3 \tag{4.4.4c}$$

pour α et β des nombres réels.

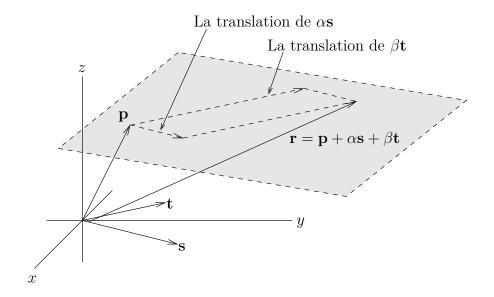


FIGURE 4.13 – Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires

Définiton 4.4.8

L'ensemble des formules en (4.4.4) est une **représentation paramétrique** du plan contenant **p** et parallèle à deux vecteurs **s** et **t** qui ne sont pas colinéaires. Les **paramètres** sont α et β .

Exemple 4.4.9

Les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du plan contenant $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et parallèle aux vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 2, 2)$ et $\mathbf{t} = (1, -1, 2)$ sont donnés par

$$(x, y, z) = \mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} ,$$

= (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) + \beta(1, -1, 2)
= (1 - \alpha + \beta, 2 + 2\alpha - \beta, 3 + 2\alpha + 2\beta) .

On a donc la représentation paramétrique

$$x = 1 - \alpha + \beta$$
, $y = 2 + 2\alpha - \beta$ et $z = 3 + 2\alpha + 2\beta$.

Remarque 4.4.10 •

Il existe une relation entre la représentation paramétrique et standard du plan.

Si on soustrait (4.4.4b) multipliée par t_1 de (4.4.4a) multipliée par t_2 , on obtient

$$xt_2 - yt_1 = (p_1t_2 - p_2t_1) + \alpha(s_1t_2 - s_2t_1)$$
.

238 4. Vecteurs **♣** № <u>№</u>

Ainsi

$$\alpha = \frac{1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} \left(x t_2 - y t_1 - p_1 t_2 + p_2 t_1 \right) = \frac{t_2}{s_1 t_2 - s_2 t_1} \left(x - p_1 \right) - \frac{t_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} \left(y - p_2 \right)$$

 $si \ s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0.$

Si on soustrait (4.4.4b) multipliée par s_1 de (4.4.4a) multipliée par s_2 , on obtient

$$xs_2 - ys_1 = (p_1s_2 - p_2s_1) + \beta(t_1s_2 - t_2s_1)$$
.

Ainsi

$$\beta = \frac{1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} \left(x s_2 - y s_1 - p_1 s_2 + p_2 s_1 \right) = \frac{s_2}{t_1 s_2 - t_2 s_1} \left(x - p_1 \right) - \frac{s_1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} \left(y - p_2 \right)$$

 $si \ s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0.$

Si on substitue α et β dans (4.4.4c), on trouve

$$z = p_3 + \frac{t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x - p_1) - \frac{t_1 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (y - p_2) + \frac{s_2 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x - p_1)$$
$$- \frac{s_1 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (y - p_2)$$
$$= p_3 - \frac{s_2 t_3 - t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x - p_1) - \frac{t_1 s_3 - s_1 t_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (y - p_2) .$$

On peut récrire cette expression sous la forme suivante.

$$(s_2t_3-t_2s_3)(x-p_1)+(t_1s_3-s_1t_3)(y-p_2)+(s_1t_2-s_2t_1)(z-p_3)=0.$$

C'est la représentation vectorielle donnée en (4.4.1) où $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$.

4.4.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Si une droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} , alors la droite coupe le plan en un point. La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si le produit scalaire d'un vecteur \mathbf{q} parallèle à la droite ℓ avec un vecteur \mathbf{m} perpendiculaire au plan est 0 car le plan \mathcal{M} est une translation de l'ensemble des vecteurs \mathbf{u} tels que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle = 0$ (voir la figure 4.14).

Exemple 4.4.11

Considérons la droite ℓ définie par la représentation standard

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{2} = z+2$$

et le plan \mathcal{M} donné par x+2y+z=4. Trouvez l'intersection (s'il y en a une) de la droite ℓ et du plan \mathcal{M} .

Une représentation paramétrique de la droite ℓ est

$$x = 3\alpha + 5$$
, $y = 2\alpha + 1$ et $z = \alpha - 2$.

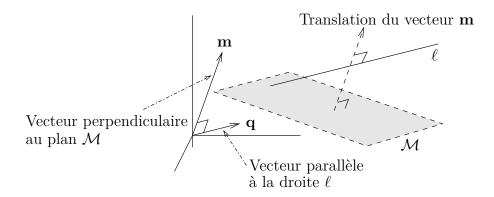


FIGURE 4.14 – La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si $\langle \mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle = 0$ où le vecteur \mathbf{q} est parallèle à la droite ℓ et \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

Le point (x, y, z) de la droite ℓ qui appartient aussi au plan \mathcal{M} doit satisfaire

$$(3\alpha + 5) + 2(2\alpha + 1) + (\alpha - 2) = 4.$$

On obtient $\alpha = -1/8$. Les coordonnées du point d'intersection sont donc

$$x = 3\left(\frac{-1}{8}\right) + 5 = \frac{37}{8}$$
, $y = 2\left(\frac{-1}{8}\right) + 1 = \frac{3}{4}$ et $z = \left(\frac{-1}{8}\right) - 2 = -\frac{17}{8}$.

Remarque 4.4.12

Il est facile de trouver un vecteur tangent à la droite ℓ de l'exemple 4.4.11 et un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

À partir de la représentation standard ou paramétrique de la droite ℓ , on déduit la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (5, 1, -2)$ et $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$. Le vecteur $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$ est parallèle à la droite ℓ .

Un vecteur $\mathbf{m} = (m_1.m_2.m_3)$ perpendiculaire au plan \mathcal{M} est donné par les coefficients de x, y et z dans l'équation x + 2y + z - 4 = 0. En effet, x + 2y + z - 4 = 0 est la représentation standard (voir 4.4.2) du plan \mathcal{M} . Ainsi, $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ et $\langle \mathbf{s}, \mathbf{m} \rangle = 4$ pour \mathbf{s} un point du plan \mathcal{M} .

Puisque $\langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle = 8 \neq 0$, on a que la droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} , et donc coupera le plan \mathcal{M} .

4.4.3 Intersection de deux plans

Deux plans distincts non-parallèles vont se couper en une droite. Si \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} et \mathbf{n} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{N} , alors les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont parallèles si les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} sont colinéaires; c'est-à-dire, un multiple l'un de l'autre.

240 4. Vecteurs **♣** № 2

Si le plan \mathcal{M} est représenté par l'équation $m_1x + m_2y + m_3z = k_m$ et le plan \mathcal{N} par $n_1x + n_2y + n_3z = k_n$, l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} est donc l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfont ces deux équations simultanément. En d'autres mots, l'intersection des deux plans est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires

$$m_1 x + m_2 y + m_3 z = k_m (4.4.5a)$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = k_n (4.4.5b)$$

Les deux plans sont parallèles

Si les deux plans sont parallèles, alors $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n}$ pour un nombre réel λ .

1. Si $k_m \neq \lambda k_n$, il ne peut pas y avoir de points (p_1, p_2, p_3) qui satisfassent (4.4.5a) et (4.4.5b) simultanément. Si c'était le cas, alors on aurait

$$m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = k_m$$

 $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = k_n$

avec $m_i = \lambda n_i$. Si on soustrait λ fois la deuxième équation de la première équation, on obtient $0 = k_m - \lambda k_n$. Ce qui contredit notre hypothèse. Donc, on a deux plan distincts et parallèles.

2. Si $k_m = \lambda k_n$ alors l'équation (4.4.5a) est un multiple par λ de l'équation (4.4.5b) et tout point (x, y, z) qui satisfait (4.4.5b) satisfait aussi (4.4.5a) et vice-versa. Les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont en fait un seul et même plan.

Les deux plans ne sont pas parallèles

Si les deux plan ne sont pas parallèles, \mathbf{m} n'est pas un multiple de \mathbf{n} . Nous verrons lors de l'étude de l'algèbre linéaire que les solutions du système d'équations linéaires donné par (4.4.5a) et (4.4.5b) représente alors une droite ℓ . Puisque cette droite est contenue dans les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} , elle doit être perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} . Donc, ℓ est parallèle au vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Si \mathbf{p} est un point de ℓ , donc une solution du système d'équations linéaires donné par (4.4.5a) et (4.4.5b), alors l'équation de la droite d'intersection ℓ est donnée par

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle = r_1(x_1 - p_1) + r_2(x_2 - p_2) + r_3(x_3 - p_3) = 0$$
.

Donc, le problème est de trouver au moins une solution du système d'équations linéaires donné par (4.4.5a) et (4.4.5b). En fait, trouver une solution n'est pas plus difficile que de trouver toutes les solutions et donc l'équation de la droite d'intersection. C'est ce que nous décrivons ci-dessous.

Si (4.4.5a) définie un plan dans l'espace, ces coefficients m_i ne peuvent pas tous être nuls. Supposons que $m_1 \neq 0$; le raisonnement est semblable si m_2 ou m_3 est non-nul. Si on soustrait le produit de (4.4.5a) par n_1/m_1 de (4.4.5b), on obtient

$$\frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{m_1} y + \frac{m_1 n_3 - n_1 m_3}{m_1} z = \frac{k_n m_1 - n_1 k_m}{m_1} . \tag{4.4.6}$$

Puisque l'on suppose que \mathbf{m} et \mathbf{n} ne sont pas colinéaires, les coefficients de y et z ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons que le coefficient de y est non-nul. Le raisonnement est semblable si le coefficient de z est non-nul. On peut alors résoudre pour y.

$$y = C_1 + C_2 z (4.4.7)$$

où $C_1 = \frac{k_n m_1 - n_1 k_m}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_2 = -\frac{m_1 n_3 - n_1 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Si on substitue y dans (4.4.5a) par (4.4.7), et on résout pour x, on trouve

$$x = C_3 + C_4 z (4.4.8)$$

où $C_3 = \frac{k_m n_2 - m_2 k_n}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_4 = -\frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Notez que C_2 et C_4 ne peuvent pas être tous les deux nuls pour la même raison que les coefficients de y et z dans (4.4.6) ne peuvent pas être tous les deux nuls 1

On obtient donc la représentation paramétrique

$$x = C_3 + C_4 \alpha$$
 , $y = C_1 + C_2 \alpha$ et $z = \alpha$

pour la droite d'intersection des plan \mathcal{M} et \mathcal{N} .

Il ne faut surtout pas essayer de mémoriser les formules ci-haut pour trouver la représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans. L'exemple suivant illustre comment trouver l'intersection de deux plans.

Exemple 4.4.13

Trouver, si elle existe, l'intersection des plans représentés par les équations suivantes.

$$\mathcal{M}: x + 2y + z = 5 \tag{4.4.9a}$$

$$\mathcal{N}: 2x + y + z = 3 \tag{4.4.9b}$$

Le vecteur $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} et le vecteur $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{N} . Comme ils ne sont pas colinéaires (on ne peut pas écrire \mathbf{m} comme un multiple de \mathbf{n}), les deux plans se coupent en une droite ℓ .

 $\mathbf{1}^{er}$ méthode: Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = (1, 1, -3)$ est parallèle à la droite ℓ . Il est facile de vérifier que (0, 2, 1) est un point de la droite ℓ puisque c'est une point qui appartient aux deux plans. La représentation standard de ℓ est donc

$$x = y - 2 = \frac{z - 1}{-3} \tag{4.4.10}$$

 2^e méthode: Si on soustrait deux fois l'équation (4.4.9a) de l'équation (4.4.9b), on trouve -3y-z=-7. Ainsi,

$$y = \frac{z-7}{-3} = -\frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \ .$$

^{1.} On verra dans le chapitre sur l'algèbre linéaire que, si la matrice de dimension 2×3 dont les lignes sont données par les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} est de rang 2, alors au moins deux des expressions $m_1n_2 - n_1m_2$, $m_2n_3 - n_2m_3$ et $m_1n_3 - n_1m_3$ sont non-nuls.

242 4. Vecteurs **♣** ✓

Si on substitue cette expression pour y dans (4.4.9a), on obtient

$$x + 2\left(\frac{z-7}{-3}\right) + z = 5.$$

Ceci donne

$$x = -2\left(\frac{z-7}{-3}\right) - z + 5 = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}$$
.

On obtient donc la représentation paramétrique suivante pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$$
 , $y = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{7}{3}$ et $z = \alpha$. (4.4.11)

3^e **méthode**: On aurait tout aussi bien pu résoudre -3y - z = -7 pour z. On trouve z = -3y + 7. Si on substitue cette expression dans (4.4.9a), on obtient x + 2y + (-3y + 7) = 5. Ainsi, x = y - 2. On obtient une nouvelle représentation paramétrique pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x = \beta - 2$$
 , $y = \beta$ et $z = -3\beta + 7$. (4.4.12)

(4.4.10), (4.4.11) et (4.4.12) sont trois représentations équivalentes de la droite d'intersection ℓ .

On a bien obtenu des représentations équivalentes de la droite ℓ . En effet, on note que les trois représentations décrivent des droites qui ont la même direction : (1,1,-3), (-1/3,-1/3,1) et (1,1,-3) respectivement. De plus, ils contiennent tous le point (0,2,1). On obtient (0,2,1) avec $\alpha=1$ dans (4.4.11) et $\beta=2$ dans (4.4.12). Puisque les trois représentation décrivent des droites parallèles qui passent par le même point, on a donc la même droite.

On remarque de plus, que si on substitue $\alpha = -3\beta + 7$ dans (4.4.11), on obtient (4.4.12). De même, si on substitue $\beta = -(\alpha - 7)/3$ dans (4.4.12), on obtient (4.4.11). Ainsi, l'ensemble des points produits par la représentation (4.4.11) est le même que l'ensemble des points produits par la représentation (4.4.12). Par exemple, si $\alpha = 1$ dans la représentation (4.4.11), on obtient (x, y, z) = (0, 2, 1). La représentation (4.4.12) donne ce même point avec $\beta = -(1-7)/3 = 2$. Si $\beta = 1$ dans la représentation (4.4.12), on obtient (x, y, z) = (-1, 1, 4). La représentation (4.4.11) donne ce même point avec $\alpha = -3(1) + 7 = 4$.

4.4.4 Intersection de trois plans

Les exemples suivants montre comment on peut résoudre un systèmes de trois équations avec trois inconnues en utilisant la technique de substitution. Malheureusement, cette méthode ne nous permet pas de classifier les cas possibles d'intersections; c'est-à-dire, une intersection vide, une droite ou un plan.

L'algèbre linéaire que nous verrons dans un prochain chapitre simplifiera grandement l'étude des cas possibles d'intersections de trois plans.

Exemple 4.4.14

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + y + z = 3 (4.4.13a)$$

$$3x + 2y + z = 5 \tag{4.4.13b}$$

$$x + y - 2z = 1 \tag{4.4.13c}$$

De (4.4.13a) on obtient z = 3 - x - y que l'on substitue dans (4.4.13b) et (4.4.13c) pour obtenir

$$2x + y = 2 (4.4.14a)$$

$$3x + 3y = 7 \tag{4.4.14b}$$

De (4.4.14a) on obtient y = 2-2x que l'on substitue dans (4.4.14b) pour obtenir -3x = 1. Ainsi x = -1/3, y = 2 - 2x = 8/3 et z = 3 - x - y = 2/3. Le point (-1/3, 8/3, 2/3) est le seul point commun (i.e. qui appartient) au trois plans.

Exemple 4.4.15

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + 2y + z = 5 (4.4.15a)$$

$$2x - y + z = 2 \tag{4.4.15b}$$

$$3x + y + 2z = 7 \tag{4.4.15c}$$

De (4.4.15a) on obtient z = 5 - x - 2y que l'on substitue dans (4.4.15b) et (4.4.15c) pour obtenir x - 3y = -3 dans les deux cas. Ainsi y = x/3 + 1 et z = 5 - x - 2y = -5x/3 + 3. On trouve la représentation paramétrique

$$x = \alpha$$
, $y = \frac{\alpha}{3} + 1$ et $z = -\frac{5x}{3} + 3$

d'une droite ℓ . La droite ℓ est l'ensemble des points commun au trois plans.

Exemple 4.4.16

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants.

$$x + 2y + z = 5 (4.4.16a)$$

$$2x - y + z = 2 \tag{4.4.16b}$$

$$-x + 3y = 7 (4.4.16c)$$

De (4.4.16a) on obtient z = 5 - x - 2y que l'on substitue dans (4.4.16b) pour obtenir x - 3y = -3. Ainsi, y = x/3 + 1. Malheureusement, si on substitue cette expression pour y dans (4.4.16c), on trouve 3 = 7. Ce qui est absurde. Il n'existe donc aucun point (x, y, z) qui satisfasse les trois équations simultanément; c'est-à-dire, qui est commun au trois plans. \clubsuit

244 4. Vecteurs **♣** № <u>№</u>

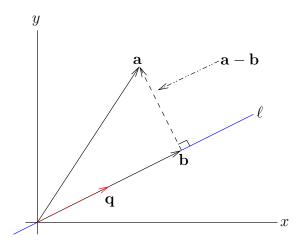


FIGURE 4.15 – Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ passant pas l'origine.

4.5 Projections

4.5.1 Plus courte distance entre un point et une droite

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et une droite ℓ qui passe par l'origine? Pour répondre à cette question, nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} comme on peut le voir à la figure 4.15.

Soit \mathbf{q} un vecteur contenu dans la droite ℓ . Pour trouver les coordonnées de \mathbf{b} , on remarque que $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{q}$ pour un certain nombre réel α . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à \mathbf{q} . On a donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle.$$

Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \,. \tag{4.5.1}$$

On a donc trouvé que

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} \; .$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, on a le résultat suivant.

4.5. Projections **®** 245

Définiton 4.5.1

Soit ℓ une droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . Si \mathbf{a} un point quelconque, la **projection** (orthogonale) du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ est le vecteur

$$\mathbf{b} = rac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}
angle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}
angle} \mathbf{q} \; .$$

Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à la droite ℓ . La plus courte distance entre \mathbf{a} et la droite ℓ est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Exemple 4.5.2

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a}=(1,1,1)$ et la droite ℓ donnée par x=4y=2z.

Il faut premièrement trouver la projection \mathbf{b} du vecteur $\mathbf{a} = (1,1,1)$ sur la droite ℓ . Pour cela, il faut choisir un vecteur \mathbf{q} sur la droite ℓ . Comme on considère seulement des droites qui passent par l'origine, il suffit de prendre le vecteur qui donne la direction de la droite dans l'une des représentations de la droite. Par exemple, la représentation standard de la droite ℓ est

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1/4} = \frac{z}{1/2} \ .$$

Donc $\mathbf{q} = (1, 1/4, 1/2)$ est un bon choix. En fait, tout multiple non nul de \mathbf{q} est acceptable. Ainsi,

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = \frac{4}{3} \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) .$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ est donc

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Exemple 4.5.3

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a}=(2,7,6)$ et la droite ℓ donnée par la représentation standard

$$x - 1 = y - 6 = \frac{z - 2}{-3} \ .$$

On remarque que la droite ℓ ne passe pas par l'origine. On ne peut donc pas utiliser directement les formules précédentes. Que peut-on faire? Il suffit de faire une translation du point \mathbf{a} et de la droite ℓ par un vecteur \mathbf{c} de telle sorte que la nouvelle droite ℓ' passe par l'origine. La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' obtenus de la translation par le vecteur \mathbf{c} sera égale à la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ car les translations préservent la distance entre les objets. Voir la figure 4.16.

246 4. Vecteurs **♣** № №

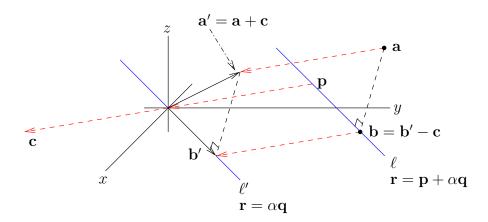


FIGURE 4.16 – Le point \mathbf{a} ' et la droite ℓ' résultent d'une translation par le vecteur \mathbf{c} du point \mathbf{a} et de la droite ℓ respectivement.

La droite ℓ a la représentation vectorielle $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (1, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$. Si on fait une translation par $\mathbf{c} = -\mathbf{p}$, on obtient la droite ℓ' donnée par la formule $\mathbf{r} = \alpha \mathbf{q}$ et le point

$$a' = a + c = a - p = (1, 1, 4)$$
.

La droite ℓ' passe par l'origine car, avec cette translation, le point \mathbf{p} de la droite ℓ est envoyé à l'origine. Notez que ℓ et ℓ' sont parallèles comme il se doit pour deux droites dont l'une est la translation de l'autre.

Le vecteur $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$ est naturellement sur la droite ℓ' . La projection \mathbf{b}' du vecteur \mathbf{a}' sur la droite ℓ' est

$$\mathbf{b'} = \frac{\langle \mathbf{a'}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = -\frac{10}{11} (1, 1, -3) = \left(-\frac{10}{11}, -\frac{10}{11}, \frac{30}{11} \right) .$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' (et donc entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ) est

$$\|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| = \|\left(\frac{21}{11}, \frac{21}{11}, \frac{14}{11}\right)\| = \sqrt{\left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} = \frac{7\sqrt{22}}{11}.$$

4.5.2 Plus courte distance entre un point et un plan de l'espace

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et un plan \mathcal{M} qui contient l'origine? La méthode utilisée pour répondre à cette question est très semblable à la méthode utilisée pour trouver la plus courte distance entre un point et une droite.

Nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} comme on peut le voir à la figure 4.17.

4.5. Projections **®** 247

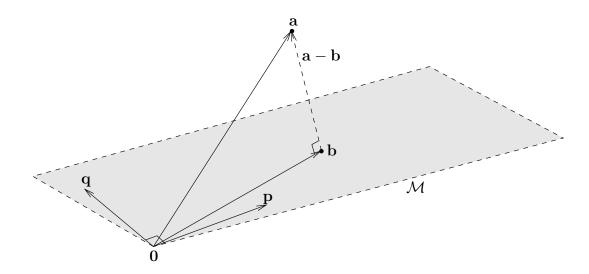


FIGURE 4.17 – Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur le plan \mathcal{M} contenant l'origine.

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} deux vecteurs perpendiculaires contenus dans le plan \mathcal{M} . On choisit deux vecteurs perpendiculaires pour simplifier les calculs qui vont suives. Il est en générale plus simple de travailler avec un système de coordonnées orthogonales.

Pour trouver les coordonnées de **b**, on remarque que $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}$ pour deux nombres réels α et β . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire au deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} . On a donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{p} - \beta \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$$

et

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha \mathbf{p} - \beta \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

 $\operatorname{car} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} .$$
 (4.5.2)

Donc,

$$\mathbf{b} = rac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p}
angle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}
angle} \mathbf{p} + rac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}
angle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}
angle} \mathbf{q} \; .$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, on a le résultat suivant.

248 4. Vecteurs **♣ ⊁** ✓

Définiton 4.5.4

Soit \mathcal{M} un plan qui contient deux vecteurs perpendiculaires \mathbf{p} et \mathbf{q} . Si \mathbf{a} un point quelconque, la **projection (orthogonale)** du vecteur \mathbf{a} dans le plan \mathcal{M} est le vecteur

$$\mathbf{b} = rac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p}
angle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}
angle} \mathbf{p} + rac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}
angle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q}
angle} \mathbf{q} \; .$$

Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} . La plus courte distance entre \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

4.6 Exercices

Question 4.1

Donnez une représentation de la droite qui passe par les points (2, -5, 5) et (-4, 3, 4).

Question 4.2

Trouvez l'équation du plan parallèle au plan 2x+3x-z=1 et qui passe par le point (2,3,2).

Question 4.3

Trouvez l'équation du plan \mathcal{M} qui contient la droite ℓ définie par

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

et le point (1,2,1).

Question 4.4

Déterminez si les deux plans suivants se coupent et, si c'est le cas, trouvez l'intersection des deux plans.

$$2x + 5z + 3 = 0$$
 et $x - 3y + z + 2 = 0$.



5.1 Systèmes d'équations linéaires

Exemple 5.1.1

On a eu à quelques reprises dans le passé à résoudre des systèmes d'équations linéaires comme, par exemple,

$$5x + 3y = 7$$

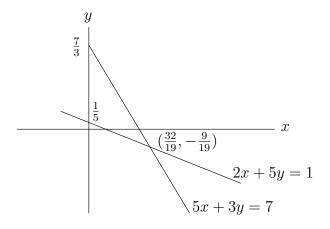
$$2x + 5y = 1$$
(5.1.1)

Pour résoudre un tel système, on résout la première équation pour y. On trouve y = (7 - 5x)/3. Puis, on substitue cette dernière expression pour y dans la deuxième équation pour obtenir

$$2x + 5(7 - 5x)/3 = 1.$$

Après simplification, on trouve x = 32/19 et donc y = (7 - 5x)/3 = -9/19.

On peut donner une interprétation graphique à la solution (x, y) = (32/19, -9/19) du système d'équations linéaires précédent. Chacune des équations du système d'équations linéaires ci-dessus est l'équation d'une droite dans le plan et la solution (x, y) = (32/19, -9/19) de ce système est le point d'intersection de ces deux droites comme on peut le voir dans la figure suivante.



Les coordonnées du point d'intersection satisfont les deux équations linéaires simultanément puisque que ce point appartient aux deux droites.

Nous présentons une autre façon de résoudre un système d'équations linéaires.

250 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

Méthode 5.1.2

Pour résoudre les systèmes d'équations linéaires comme celui en (5.1.1), on peut utiliser les trois opérations suivantes pour réduire (avec une bonne combinaison de ses opérations) le système initial en un système plus simple qui possède les mêmes solutions.

- 1. On peut multiplier une équation par un nombre réel.
- 2. On peut additionner une équation à une autre équation.
- 3. On peut échanger l'ordre des équations.

Les opérations (1) et (2) peuvent être combinées pour permettre l'addition d'un multiple d'une équation à une autre équation.

Exemple 5.1.3

Résoudre le système d'équations linéraires (5.1.1) à l'aide des opérations sur les équations.

Si on multiplie la première équation de (5.1.1) par 1/5, on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (5.1.1).

$$x + \frac{3}{5}y = \frac{7}{5}$$

$$2x + 5y = 1$$
(5.1.2)

Si on soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.2), on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède toujours les mêmes solutions que (5.1.1).

$$x + \frac{3}{5}y = \frac{7}{5}$$

$$\frac{19}{5}y = -\frac{9}{5}$$
(5.1.3)

Si on multiplie la deuxième équation de (5.1.3) par 5/19, on obtient le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (5.1.1).

$$x + \frac{3}{5}y = \frac{7}{5}$$

$$y = -\frac{9}{19}$$
(5.1.4)

Finalement, si on soustrait 3/5 fois la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (5.1.4), on obtient la solution de (5.1.1).

$$x = \frac{32}{19}$$
$$y = -\frac{9}{19}$$

5.1.1 Systèmes d'équations linéaires avec deux inconnues

Exemple 5.1.4

Résoudre si possible le système d'équations linéaires

$$2x - 5y = 1
4x - 10y = 1$$
(5.1.5)

Pour résoudre ce système, on procède comme on a fait pour le système d'équations linéaires de l'exemple de la section précédente. Si on multiplie la première équation de (5.1.5) par 1/2, on obtient le système d'équations linéaires suivant.

$$x - \frac{5}{2}y = \frac{1}{2}$$

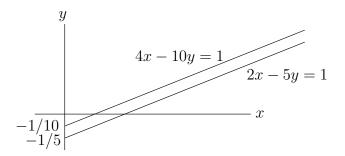
$$4x - 10y = 1$$
(5.1.6)

Si on soustrait 4 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.6), on obtient le système d'équations linéaires suivant.

$$x - \frac{5}{2}y = \frac{1}{2}$$
$$0 = -1$$

Ce système est absurde. Cela veut dire qu'il n'y a pas de solutions pour le système (5.1.5).

Graphiquement, ce n'est pas une surprise qu'il n'y ait pas de solutions car les deux droites sont parallèles comme on peut le voir dans la figure suivante. Elles ne se couperont donc jamais.



Exemple 5.1.5

Le système d'équations linéaires

$$3x - 5y = 1$$

1.5x - 2.5y = 0.5 (5.1.7)

a un nombre infini de solutions. Ce sont tous les points (x, y) de la droite y = 3x/5 - 1/5. En effet, si on soustrait 1/2 fois la première équation de la seconde équation, on obtient le système

$$3x - 5y = 1$$

$$0 = 0$$

Les deux équations du système (5.1.7) représentent donc la même droite dans le plan. Tous les points de cette droite satisfont les deux équations linéaires. La forme paramétrique de cette droite est (x,y)=(s,3s/5-1/5) pour $s\in\mathbb{R}$.

Jusqu'à maintenant, on a considéré des systèmes d'équations linéaires formés de seulement deux équations linaires. Il pourrait y avoir plus de deux équations linaires.

Exemple 5.1.6

Résoudre le système d'équations linéaires

$$2x + 3y = 1$$

$$x - 2y = 4$$

$$3x + y = 5$$
(5.1.8)

On échange la première et deuxième équation du système d'équations linéaires (5.1.8) pour obtenir le système

$$x - 2y = 4$$

 $2x + 3y = 1$
 $3x + y = 5$ (5.1.9)

On soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.9) pour obtenir le système

$$x - 2y = 4$$
$$7y = -7$$
$$7y = -7$$

On soustrait la deuxième équation de la troisième équation dans ce dernier système d'équations linéaires pour obtenir le système

$$x - 2y = 4$$

$$7y = -7$$

$$0 = 0$$
(5.1.10)

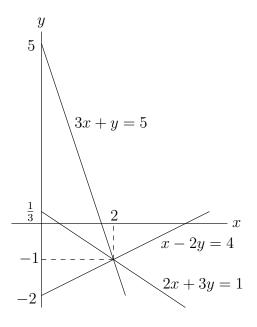
On peut éliminer la troisième équation du système d'équations linéaires (5.1.10) car elle est évidemment toujours satisfaite. De plus, on peut diviser la deuxième équation par 7 pour obtenir le système

$$\begin{aligned}
 x - 2y &= 4 \\
 y &= -1
 \end{aligned} (5.1.11)$$

Finalement, si on additionne 2 fois la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (5.1.11), on obtient la solution de (5.1.8).

$$x = 2$$
$$y = -1$$

On voit dans la figure suivante que le point (2, -1) est le point d'intersection des trois droites 2x + 3y = 1, x - 2y = 4 et 3x + y = 5.



Les exemples précédents semblent indiquer que pour un système d'équations linéaires à deux inconnues, on retrouve une des situations suivantes : le système n'a pas de solutions, le système a une seule solution, ou le système a une nombre infini de solutions. C'est en fait ce que l'interprétation graphique démontre. En géométrie Euclidienne, deux droites distinctes peuvent être parallèles, et donc elles ne se coupent pas, ou elles peuvent se couper en un seul point.

5.1.2 Systèmes d'équations linéaires avec plus de deux inconnues

Exemple 5.1.7

Résoudre si possible le système d'équations linéaires avec trois inconnues

$$2x + y + z = 1$$

$$x + 2y + z = 1$$

$$x + y + 3z = 1$$
(5.1.12)

Pour résoudre un tel système, on peut utiliser la méthode classique de substitution. De la première équation, on obtient

$$z = 1 - 2x - y (5.1.13)$$

Si on substitue cette expression pour z dans la deuxième équation, on obtient

$$x + 2y + (1 - 2x - y) = -x + y + 1 = 1$$
.

Après simplification, on trouve

$$y = x (5.1.14)$$

Si on substitue (5.1.14) dans (5.1.13), on trouve

$$z = 1 - 3x (5.1.15)$$

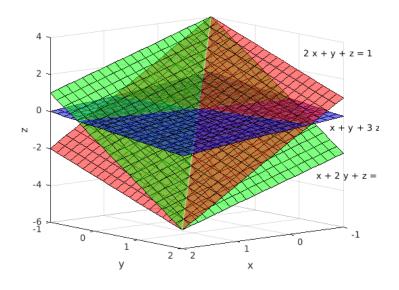
Finalement, si on substitue (5.1.14) et (5.1.15) dans la troisième équation, on trouve

$$x + y + 3z = x + x + 3(1 - 3x) = 1$$
.

Ce qui donne x = 2/7. Si on substitue cette valeur de x dans (5.1.14) et (5.1.15), on trouve y = 2/7 et z = 1/7.

On a donc la solution (x, y, z) = (2/7, 2/7, 1/7).

On peut interpréter graphiquement la solution du système d'équations linéaires ci-dessus. Chaque équation est l'équation d'un plan. La solution est le point d'intersection des trois plans. On peut constater dans la figure suivante qu'il est difficile de repérer le point d'intersection des trois plans.



On peut aussi utiliser les opérations sur les équations pour résoudre le système d'équations linéaires (5.1.12).

Exemple 5.1.8

Résoudre le système d'équations linéraires (5.1.12) à l'aide des opérations sur les équations.

On échange la première et troisième équation de (5.1.12) pour obtenir le système

$$x + y + 3z = 1$$

 $x + 2y + z = 1$
 $2x + y + z = 1$ (5.1.16)

On soustrait la première équation de la deuxième équation et on soustrait 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.16) pour obtenir le système

$$x + y + 3z = 1$$

$$y - 2z = 0$$

$$-y - 5z = -1$$
(5.1.17)

On additionne la deuxième équation à la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.17) pour obtenir le système

$$x + y + 3z = 1$$
$$y - 2z = 0$$
$$-7z = -1$$

On multiplie la troisième équation de ce système d'équations linéaires par -1/7 pour obtenir le système

$$x + y + 3z = 1$$

 $y - 2z = 0$
 $z = 1/7$ (5.1.18)

On additionne 2 fois la troisième équation à la deuxième équation et on soustrait 3 fois la troisième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (5.1.18) pour obtenir le système

$$x + y = 4/7$$

 $y = 2/7$
 $z = 1/7$ (5.1.19)

Finalement, on soustrait la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (5.1.19, pour obtenir la solution du système d'équations linéaires (5.1.12) que l'on a trouvé ci-haut; c'est-à-dire,

$$x = 2/7$$
$$y = 2/7$$
$$z = 1/7$$

Exemple 5.1.9

Résoudre si possible le système d'équations linéaires

$$2x + y + z = 1$$

$$x + 2y + z = 1$$

$$x - y = 0$$
(5.1.20)

å

256 5. Algèbre linéaire **≱** <u>✓</u>

On échange la première et troisième équation de (5.1.20) pour obtenir le système

$$x - y = 0$$

 $x + 2y + z = 1$
 $2x + y + z = 1$ (5.1.21)

On soustrait la première équation de la deuxième équation et on soustrait 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.21) pour obtenir le système

$$x - y = 0$$

 $3y + z = 1$
 $3y + z = 1$ (5.1.22)

On soustrait la deuxième équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.22) pour obtenir le système

$$x - y = 0$$
$$3y + z = 1$$
$$0 = 0$$

On peut éliminer la troisième équation. Si on multiplie la deuxième équation de ce système par 1/3, on obtient le système

$$x - y = 0$$

$$y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$
(5.1.23)

On additionne la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (5.1.23) pour obtenir le système

$$x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

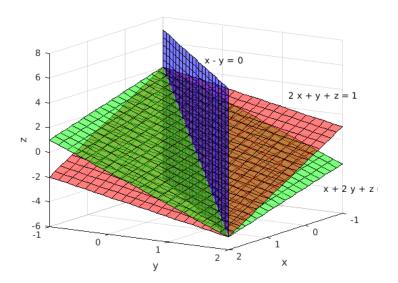
$$y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$
(5.1.24)

On ne peut plus simplifier le système. On a x=1/3-z/3 et y=1/3-z/3. Les points (x,y,z) qui résolvent le système d'équations linéaires (5.1.20) forment donc une droite dont la représentation paramétrique est

$$(x, y, z) = (-s/3 + 1/3, -s/3 + 1/3, s)$$

pour $s \in \mathbb{R}$.

On peut voir dans la figure suivante que les solutions du système d'équations linéaires forment une droite dans l'espace qui représente l'intersection des trois plans.



Cette droite possède la représentation paramétrique (x,y,z)=(-s/3+1/3,-s/3+1/3,s) pour $s\in\mathbb{R}.$ La forme standard pour cette droite est $x=y=\frac{z-1}{-3}.$

Exemple 5.1.10

On laisse au lecteur la tâche de montrer que le système d'équations linéaires

$$2x + y + z = 1$$
$$4x + 2y + 2z = 2$$
$$-2x - y - z = -1$$

possède un nombre infini de solutions de la forme (x, y, z) = (s, t, 1 - 2s - t) pour tout s et t réels. L'ensemble des solutions forme le plan z = 1 - 2x - y. En fait, les trois équations linéaires du système sont trois équations qui représentent le même plan.

Exemple 5.1.11

Montrer que le système d'équations linéaires

$$2x + y + z = 1$$

$$x + 2y + z = 2$$

$$3x + 3y + 2z = 1$$
(5.1.25)

n'a pas de solution.

On échange la première et deuxième équation de (5.1.25) pour obtenir le système

$$x + 2y + z = 2$$

 $2x + y + z = 1$
 $3x + 3y + 2z = 1$ (5.1.26)

258 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

On soustrait 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (5.1.26) pour obtenir le système

$$x + 2y + z = 2$$

$$-3y - z = -3$$

$$-3y - z = -5$$
(5.1.27)

Il est impossible de satisfaire simultanément la deuxième et la troisième équation du système d'équations linéaires (5.1.17); si on soustrait la deuxième équation de la troisième équation on obtient 0 = -2 qui est impossible.

*

L'interprétation des solutions de systèmes d'équations linéaires à l'aide de plan dans l'espace nous permet de conclure qu'un système d'équations linéaires (avec trois inconnues et trois équations) peut avoir aucune solution, une seule solution, un nombre infini de solutions qui forment une droite, ou un nombre infini de solutions qui forment un plan.

Avec trois inconnues, on a déjà atteint les limites de la visualisation graphique des systèmes d'équations linéaires. De plus, il devient laborieux de résoudre algébriquement de tels systèmes. On doit donc introduire une nouvelle approche pour résoudre les systèmes d'équations linéaires qui nous permettra de travailler avec plus de trois inconnues. Ce nouvel outil est l'algèbre linaire.

5.2 Matrices

À la section précédente, on a constaté que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec trois équations et trois inconnues demandait beaucoup d'attention. On peut facilement imaginer que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec plus que trois inconnues et trois équations devient rapidement très ardu.

Nous devons donc développer des outils qui nous permettront de résoudre efficacement les systèmes avec un grand nombre d'inconnues et d'équations. Notre premier but est de représenter de façon simple et claire les systèmes d'équations linéaires. En fait, cette notation va grandement influencer le développement des outils pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

5.2. Matrices 259

Définition 5.2.1

Une **matrice** A est un tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a n lignes et m colonnes. On dit que c'est une matrice de dimension $n \times m$. Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés les composantes ou éléments de la matrice A. Le nombre $a_{i,j}$ est la composante sur la i^e ligne et dans la j^e colonne.

On dit que la matrice A est **carrée** lorsque n=m; on a le même nombre de lignes et colonnes.

Exemple 5.2.2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \pi & 5 & 2.3\\ 0 & 4 & -7.56 & 1 & -10\\ -7 & e^2 & 10^6 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension 3×5 alors que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension 1×4 . On a que $a_{1,3} = \pi$, $a_{3,2} = e^2$, $a_{3,5} = \sqrt{5}$, $b_{1,1} = 1$, $b_{1,3} = 7$, etc.

5.2.1 Opérations sur les matrices

Avant de définir des opérations sur les matrices, il faut définir quand deux matrices sont égales.

Définition 5.2.3

On dit que deux matrices A et B sont **égales**, dénoté A=B, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1. A et B ont le même nombre de lignes et de colonnes.
- 2. Si n est le nombre de lignes et m est le nombre de colonnes, alors $a_{i,j} = b_{a,j}$ pour tout $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$.

On veut définir des opérations sur les matrices qui prolongeront les opérations sur les vecteurs que l'on connaît déjà; c'est-à-dire, le produit d'un vecteur par un scalaire, la somme de deux vecteurs et le produit scalaire de deux vecteurs.

Définiton 5.2.4

Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est une flèche de l'origine à un point (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n . On identifie un vecteur par le point (x_1, x_2, \dots, x_n) où le vecteur se termine. On écrit

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{5.2.1}$$

ou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \tag{5.2.2}$$

La représentation du vecteur \mathbf{x} en (5.2.1) est associée à l'aspect géométrique des vecteurs alors que la représentation de \mathbf{x} en (5.2.2) est associée à l'aspect algébrique des vecteurs. En effet, la représentation de \mathbf{x} en (5.2.2) représente une matrice de dimension $n \times 1$. Par la suite, on parlera souvent du vecteur \mathbf{x} quand, en fait, on fera référence à la matrice que l'on retrouve en (5.2.2). C'est le contexte qui déterminera quelle interprétation doit être donnée à \mathbf{x} .

Le produit d'un vecteur \mathbf{x} par un scalaire α et la somme des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} prennent alors la forme suivante :

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} .$$

La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire sont des extensions de ces mêmes opérations pour les vecteurs.

Définiton 5.2.5

Soit A et B deux matrices de dimension $n \times m$ et α un nombre réel.

1. La **somme** de A et B, dénotée A+B, est la matrice C de dimension $n\times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{a,j}$$

pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$.

2. Le **produit** du scalaire α et de la matrice A, dénoté αA , est la matrice C de dimension $n \times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$

pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$.

5.2. Matrices 261

On remarque que la somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas les mêmes dimensions. La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire possèdent les propriétés suivantes.

Proposition 5.2.6

- 1. A + B = B + A pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ (commutativité de l'addition).
- 2. A + (B + C) = (A + B) + C pour toutes matrices A, B et C de dimension $n \times m$ (associativité de l'addition).
- 3. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α (distributivité du produit scalaire sur la somme de matrices).
- 4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α et β .
- 5. $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha \beta)A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α et β .

Exemple 5.2.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$C = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -10 & 4 \\ 4 & -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 4 & -1 + 4 & 3 + 4 & 1 - 2 \\ -4 - 6 & 5 + 2 & -7 - 10 & 2 + 4 \\ 3 + 4 & 6 - 8 & 9 + 10 & 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & -1 \\ -10 & 7 & -17 & 6 \\ 7 & -2 & 19 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avant d'introduire le produit de deux matrices, revoyons le produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, on aura besoin de la notion de <u>transposée d'une matrice</u>.

Définiton 5.2.8

Soit A une matrice de dimension $n\times m$, la **transposée de** A, dénotée A^{\top} , est la matrice de dimension $m\times n$ dont les éléments $a_{i,j}^{\top}$ sont $a_{i,j}^{\top}=a_{j,i}$ pour $1\leq i\leq m$ et $1\leq j\leq n$.

262 5. Algèbre linéaire **♣** ✓

La première ligne de A est la première colonne de A^{\top} . La deuxième ligne de A est la deuxième colonne de A^{\top} , etc.

Exemple 5.2.9

Si

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 & -3 & 5 & 7} \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$A^{\top} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix} .$$

Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} , deux vecteurs de \mathbb{R}^n que l'on représente sous la forme de matrices de dimension $n \times 1$. On définit le produit de \mathbf{x}^{\top} et \mathbf{y} de la façon suivante :

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{x}^{\top} est de dimension $1 \times n$, la matrice \mathbf{y} est de dimension $n \times 1$, et le produit $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y}$ est la matrice de dimension 1×1 définie par $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)$.

La tradition veut qu'une matrice (z) de dimension 1×1 soit simplement dénotée z, la valeur de son unique composante. Avec cette convention, le produit de \mathbf{x}^{\top} et \mathbf{y} est

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle . \tag{5.2.3}$$

C'est cette présentation du produit scalaire de deux vecteurs que l'on prolonge pour définir le produit de deux matrices.

Définition 5.2.10

Soit A et B deux matrices. La matrice A est de dimension $n\times m$ et la matrice B est de dimension $m\times q$. Le produit A B est la matrice C de dimension $n\times q$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m} a_{i,k} b_{k,j} \tag{5.2.4}$$

pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le q$.

5.2. Matrices 263

Les rectangles dans le produit suivant indiquent la ligne de A et la colonne de B qui sont utilisées pour calculer $c_{3,2}$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \hline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,q} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,q} \end{pmatrix}.$$

On a $c_{3,2} = a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} + \ldots + a_{3,m}b_{m,2}$.

La formule (5.2.4) est le produit scalaire du vecteur formé par les composantes de la i^e ligne de A avec le vecteur formé de composantes de la j^e colonne de B. En effet, si

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,m} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix} ,$$

alors $c_{i,j} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^{\top} \mathbf{b}$.

Exemple 5.2.11

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \hline -4 & 5 & -7 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 22 & -9 \\ -37 & 25 & -68 & 28 \\ 6 & -24 & 21 & -9 \end{pmatrix}.$$

On a
$$c_{2,3} = (-4) \times 2 + 5 \times (-5) + (-7) \times 5 = -68$$
.

Le produit BA est impossible car on ne peut pas faire le produit scalaire d'une ligne de B qui a 4 composantes avec une colonne de A qui a seulement 3 composantes.

Exemple 5.2.12

Si A est une matrice de dimension 3×4 et B est une matrice de dimension 4×2 , alors AB est une matrice de dimension 3×2 . Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (i.e. 2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (i.e. 3).

Le produit de matrices possède les propriétés suivantes :

264 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

Proposition 5.2.13

1. A(BC) = (AB)C pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et toute matrice C de dimension $q \times p$ (associativité du produit de matrices).

- 2. A(B+C) = AB + AC pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et toutes matrices B et C de dimension $m \times q$ (distributivité du produit de matrices sur la somme de matrices).
- 3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et tout nombre réel α .

Le produit de nombres réels est commutatif; c'est-à-dire que ab = ba pour tous les nombres réels a et b. On ne retrouve pas cette propriété dans la liste ci-dessus car elle n'est pas vraie pour le produit de matrices.

Pour pouvoir parler de commutativité du produit de matrices, il faut que les matrices soient carrées; si A et B sont des matrices carrées de dimension $n \times n$, alors il est possible de multiplier A à droite par B pour obtenir AB et de multiplier A à gauche par B pour obtenir BA. Malheureusement, même si A et B sont deux matrices carrées de dimension $n \times n$, il est rare que l'on ait AB = BA. L'exemple suivant illustre ce fait.

Exemple 5.2.14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ce sont deux matrices carrées de dimension 2×2 . On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} .$$

Donc, $AB \neq BA$.

On termine cette section avec une proposition qui lie la transposée d'une matrice au produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant qui, en lieu même, est très important. La démonstration de ce résultat est une simple mais fastidieuse conséquence de la définition du produit de matrices. On laisse donc le soin aux lecteurs de s'en convaincre.

Proposition 5.2.15

Si A est une matrice de dimension $n \times m$ et B est une matrice de dimension $m \times q$ alors $(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top}$.

5.2. Matrices 265

Proposition 5.2.16

Soit A, une matrice de dimension $n \times m$, alors

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \rangle$$

pour tout vecteur $\mathbf x$ de $\mathbb R^m$ et tout vecteur $\mathbf y$ de $\mathbb R^n$

Comme les expressions de la forme $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jouent un rôle prédominant en algèbre linéaire, nous allons prouver cette proposition.

Grâce à la relation (5.2.3), on a

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^{\top} \mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\top} A^{\top}) \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\top} (A^{\top} \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A^{\top} \mathbf{y} \rangle$$

où nous avons utilisé la proposition 5.2.15 pour obtenir la deuxième égalité.

Une autre façon de prouver la proposition précédente est de développer chacun des côtés de l'égalité donnée à la proposition précédente. Posons $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$. Les composantes de \mathbf{z} sont

$$z_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \right) y_i = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} a_{i,j} x_j y_i . \tag{5.2.5}$$

De plus, posons $\mathbf{w} = A^{\mathsf{T}} \mathbf{y}$. Les composantes de \mathbf{w} sont

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i$$

pour $j = 1, 2, \ldots, m$. Ainsi,

$$\left\langle \mathbf{x}, A^{\top} \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} x_j \, w_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} y_i \right) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} a_{i,j} x_j y_i . \tag{5.2.6}$$

Il découle de (5.2.5) et (5.2.6) que la conclusion de la proposition précédente est vraie.

Exemple 5.2.17

Vérifier que

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \rangle$$

si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 , $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Algèbre linéaire 🌲 🔀

On a

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Donc,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8.$$

De plus,

$$\mathbf{w} = A^{\top} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Donc,

$$\langle \mathbf{x}, A^{\mathsf{T}} \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -8.$$

Pour conclure cette section, on présente une dernière opération sur le matrices. Celle-ci est valide seulement pour les matrices carrées. Elle ne jouera pas un grand rôle dans ce manuel mais elle est utile en algèbre linéaire, en analyse numérique, etc.

Définition 5.2.18

Soit la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

la **Trace** de la matrice A, dénotée $\operatorname{tr}(A)$, est la somme des éléments sur la diagonale de A; c'est-à-dire, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$.

5.2.2 Inverse additif et multiplicatif d'une matrice

On sait que 0 est un élément neutre pour l'addition de nombres réels; c'est-à-dire que a+0=0+a=a pour tout nombre réel a. De même, le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication de nombres réels; c'est-à-dire que $a\times 1=1\times a=a$ pour tout nombre réel a. Est-ce que l'addition de matrices possède un élément neutre? De même, est-ce que le produit de matrices possède un élément neutre? Pour l'addition, la réponse est simple.

Définition 5.2.19

0 dénote une matrice dont les composantes sont toutes nulles.

5.2. Matrices 267

Proposition 5.2.20

La matrice 0 de dimension $n\times m$ est l'élément neutre pour l'addition de matrices de dimension $n\times m$. C'est-à-dire que 0+A=A+0=A pour toutes matrices A de dimension $n\times m$.

Définiton 5.2.21

L'inverse additif d'une matrice A de dimension $n\times m$ est la matrice B de dimension $n\times m$ telle que A+B=B+A=0 où 0 est la matrice nulle de dimension $n\times m$.

Comme l'addition de matrices est définie par l'addition composante par composante, on a $b_{i,j} = -a_{i,j}$ pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$. La matrice B est dénotée -A. On a -A = (-1)A.

L'inverse additif d'une matrice A est unique. En effet, si B et C sont deux inverses additifs de A alors

$$B = B + 0 = B + \underbrace{(A+C)}_{=0} = \underbrace{(B+A)}_{=0} + C = 0 + C = C$$
.

Toute matrice A a un seul inverse additif.

Pour définir un élément neutre I pour le produit de matrices, il faut considérer seulement les matrices carrées car cet élément neutre doit satisfaire IA = AI = A pour toutes matrices A. Les deux produits IA et AI sont définis si et seulement si I et A ont le même nombre de lignes et de colonnes.

Certaines composantes d'une matrice carrée jouent un rôle particulier dans l'étude des matrices, c'est le cas des composantes qui forment la diagonale de la matrice.

Définiton 5.2.22

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La **diagonale** de la matrice A est l'ensemble des éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ de A.

Définition 5.2.23

I dénote une matrice carrée dont les composantes sur la diagonale sont 1 et les autres composantes sont nulles. La matrice I est appelée la **matrice identité**.

Proposition 5.2.24

La matrice I de dimension $n \times n$ est l'élément neutre pour la multiplication de matrices carrées de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que I A = A I = A pour toutes matrices carrées A de dimension $n \times n$.

Exemple 5.2.25

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A$$

et

$$A I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A.$$

Maintenant que l'on a un élément neutre pour le produit de matrices carrées, il est naturel de chercher à définir ce que serait l'inverse d'une matrice. Commençons par revoir la définition de l'inverse multiplicatif pour les nombre réels. L'inverse multiplicatif pour le nombre réel a est le nombre réel b tel que ba = ab = 1. Sauf pour a = 0, tout nombre réel a possède un inverse multiplicatif.

Exemple 5.2.26

Si a = 4, alors b = 0.25 est l'inverse de a car ab = ba = 1.

Comme pour la multiplication de nombres réels, on peut définir l'inverse d'une matrice carrée.

Définition 5.2.27

S'il existe, l'inverse (multiplicatif) d'une matrice carrée A de dimension $n \times n$ est la matrice B de dimension $n \times n$ telle que AB = BA = I. La matrice B est dénotée A^{-1} . On dit que la matrice carrée A est inversible si A possède un inverse.

Contrairement aux nombres réels, les matrices carrées ne possèdent pas toutes des inverses. Par contre, si la matrice carrée A a un inverse B alors cet inverse est unique. En effet, si C est une autre matrice telle que AC = CA = I alors

$$B = B I = B \underbrace{(AC)}_{=I} = \underbrace{(BA)}_{=I} C = I C = C$$
.

Exemple 5.2.28

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

On a que
$$AB = BA = I$$
. Donc, $A^{-1} = B$.

*

Exemple 5.2.29

Par contre, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

n'a pas d'inverse. Supposons que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

soit l'inverse de A. On doit donc avoir que AB = I; c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-2c & -b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il est impossible de trouver a et b tels que a+2c=1 et -a-2c=0 simultanément. De même, il est impossible de trouver b et d tels que b+2d=0 et -b-2d=1. On ne peut donc pas trouver d'inverse pour A.

Il est généralement très difficile de déterminer si une matrice possède un inverse et de trouver cet inverse s'il existe. Dans une prochaine section, nous donnerons une méthode pour trouver l'inverse d'une matrice si cet inverse existe.

5.3 Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires

Les matrices nous permettent de développer une méthode pour déterminer si un système d'équations linéaires possède une solution, un nombre infini de solutions ou aucune solution. Nous commençons par une méthode qui nous permet de trouver les solutions d'un système d'équations linéaires quand celui-ci a des solutions.

Considérons le système d'équations linéaires suivant avec m inconnues et n équations.

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n$$

$$(5.3.1)$$

On peut exprimer ce système d'équations linéaires à l'aide des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} , \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 et
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Alors, le système d'équations linéaires (5.3.1) peut être exprimé sous la forme

$$A\mathbf{x} = B. \tag{5.3.2}$$

Proposition 5.3.1

Résoudre (5.3.1) est équivalent à trouver les vecteurs ${\bf x}$ qui satisfont (5.3.2) s'il y en a.

La matrice A est la matrice des coefficients de ${\bf x}$ dans le système d'équations linéaires (5.3.1).

5.3.1 Méthode d'élimination de Gauss

Définiton 5.3.2

La matrice augmentée associée au système d'équations linéaires (5.3.1) est la matrice

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \mid b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \mid b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \mid \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \mid b_n \end{pmatrix}.$$

Au lieu d'effectuer les opérations sur les équations du système d'équations linéaires (5.3.1) présentées à la méthode 5.1.2, on effectue les mêmes opérations sur les lignes de la matrice augmentée. À fin de simplifier la description des opérations sur les lignes, nous utiliserons la terminologie suivante :

- 1. R_i désigne la i^e ligne.
- 2. Multiplier la i^e ligne par α est dénoté $\alpha R_i \to R_i$.
- 3. Additionner α fois la j^e ligne à la i^e ligne est dénoté $\alpha R_i + R_i \to R_i$.
- 4. Échanger les i^e et j^e lignes est dénoté $R_i \leftrightarrow R_j$.

Exemple 5.3.3

Utiliser la notation matricielle pour résoudre le système d'équations linéaires

$$3x + 2y + 5z = 2$$

 $x + y + 2z = -2$
 $-2x - y + z = 1$ (5.3.3)

La matrice augmentée associée à ce système d'équations linéaires est

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \mid & 2 \\ 1 & 1 & 2 \mid & -2 \\ -2 & -1 & 1 \mid & 1 \end{pmatrix}.$$

 $R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$(A \mid B) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) .$$

 $R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ et $2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$(A \mid B) \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \mid -2 \\ 0 & -1 & -1 \mid 8 \\ 0 & 1 & 5 \mid -3 \end{pmatrix}.$$

 $-R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$(A \mid B) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 \mid -2 \\ 0 & 1 & 1 \mid -8 \\ 0 & 1 & 5 \mid -3 \end{array} \right) .$$

 $R_3 - R_2 \rightarrow R_2$ et $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$(A \mid B) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right) .$$

 $(1/4) R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid B) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right) .$$

Finalement, $R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 - R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$(A \mid B) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19/4 \\ 0 & 1 & 0 & -37/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right) .$$

Puisque la première, deuxième et troisième colonne de la matrice augmentée sont respectivement associées à x, y et z, on obtient la solution

$$x = 19/4$$
 , $y = -37/4$ et $z = 5/4$

du système d'équations linéaires (5.3.3).

5.3.2 Matrices inverses

Avec cette nouvelle notation pour les systèmes d'équations linéaires, on peut maintenant donner une méthode pour trouver la matrice inverse d'une matrice carrée si un tel inverse existe.

Soit A et B deux matrices carrées tel que $B = A^{-1}$. On peut déduire de l'égalité AB = I que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Par exemple, on obtient de

 2^e colonne

 2^e colonne

272 5. Algèbre linéaire **♣** ✓

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

que

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \\ \vdots \\ b_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La deuxième colonne de la matrice I est A multiplié à droite par la deuxième colonne de la matrice B. En générale, la k^e colonne de la matrice identité I est A multiplié à droite par la k^e colonne de la matrice B.

Chaque colonne de B donne un vecteur (i.e. une matrice de dimension $n\times 1$). La k^e colonne de B donne le vecteur

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{pmatrix} .$$

De même, la k^e colonne de I donne le vecteur \mathbf{e}_k dont les composantes sont 0 sauf pour la k^e qui est 1. Par exemple,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On peut donc reformuler la remarque du paragraphe précédent par $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \le k \le n$. C'est cette dernière propriété qui justifie la méthode suivante pour trouver l'inverse d'une matrice carrée si celui-ci existe.

Proposition 5.3.4

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ qui possède une matrice inverse, alors la k^e colonne \mathbf{b}_k de la matrice A^{-1} est la solution de l'équation

$$A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$$

pour $1 \le k \le n$. De plus, si A est une matrice de dimension $n \times n$ et une des équations $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \le k \le n$ n'a pas de solution, alors A n'est pas inversible.

Soit A une matrice inversible (i.e. qui a un inverse) de dimension $n \times n$. Pour trouver les n colonnes de la matrice inverse A^{-1} , il faut résoudre n équations de la forme $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$. Pour chaque valeur de k, il faut donc réduire la matrice augmentée $(A \mid \mathbf{e}_k)$ à une forme simple qui donnera la k^e colonne \mathbf{b}_k de A^{-1} . Comme A est une matrice carrée inversible de dimension $n \times n$, on peut assumer que la forme simple qui résulte de la réduction de la matrice augmentée $(A \mid \mathbf{e}_k)$ remplace A par la matrice identité de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que la forme simple finale est $(\mathbf{I} \mid \mathbf{b}_k)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait qu'une des équations $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ n'a pas de solutions.

Or, pour les n matrices augmentées $(A | \mathbf{e}_k)$ pour $1 \le k \le n$, les mêmes opérations sur les lignes sont effectuées pour réduire la matrice A à la matrice identité. On peut donc regrouper les n matrices augmentées en une large matrice augmentée

$$(A \mid I) = (A \mid \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$$
.

Si on réduit la matrice A à la matrice identité I de dimension $n \times n$, on obtient

$$(\mathbf{I} \mid B) = (\mathbf{I} \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) .$$

 \mathbf{b}_1 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, \mathbf{b}_2 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$, etc. Ainsi,

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} .$$

Exemple 5.3.5

Trouver l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

On considère la matrice augmentée

$$(A \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

 $3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid I) \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $R_3 - 5 R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid I) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) .$$

 $(1/2) R_2 \to R_2 \text{ et } (1/10) R_3 \to R_3 \text{ donnent}$

$$(A \mid I) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

5. Algèbre linéaire 🛊 🔀

 $R_2 + (1/2) R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid I) \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$(A \mid I) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right) .$$

L'inverse de la matrice A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{pmatrix} .$$

On invite le lecteur à vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Proposition 5.3.6

Si A est une matrice inversible de dimension $n \times n$ et \mathbf{b} est un vecteur de dimension $n \times 1$, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution et cette solution est unique. Cette solution est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

En effet, si A est inversible, une solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ car

$$A\mathbf{x} = A\left(A^{-1}\mathbf{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\mathbf{b} = \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{b}$$
.

De plus, si y est un solution de Ax = b alors

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}(A\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow I\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$$
.

De la proposition précédente on déduit que si A est une matrice inversible alors la seule solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ce qui est un peu plus surprenant est que l'inverse est aussi vrai.

Proposition 5.3.7

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ telle que la seule solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors A est inversible.

5.3.3 Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3

Lors de l'étude des vecteurs, nous avons donné quelques exemples où il fallait déterminer si trois plans se coupaient simultanément et, si oui, déterminer l'intersection de ces trois plans.

Considérons les trois plans suivants :

$$\mathcal{M}_1: \quad m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 = b_1 ,$$

 $\mathcal{M}_2: \quad m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 = b_2$

et

$$\mathcal{M}_3: \quad m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 = b_3.$$

Les points ${\bf x}$ qui appartiennent à l'intersection des trois plans doivent satisfaire le système d'équations linéaires

$$m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 = b_1$$

 $m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 = b_2$
 $m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 = b_3$

C'est un système de la forme $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\begin{pmatrix}
m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & b_1 \\
m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & b_2 \\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & b_n
\end{pmatrix}.$$

Il y a quatre possibilités:

- 1. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solutions. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 n'ont aucun point en commun.
- 2. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une seule solution. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 ont un seul point commun.
- 3. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent d'un paramètre. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est une droite donnée par la représentation paramétrique des solutions.
- 4. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent de deux paramètres. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est un plan. C'est le cas où les trois équations linéaires sont des multiples l'une de l'autre et représentent le même plan.

276 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

5.4 Déterminant

Dans cette section, nous définissons une fonction qui, à toute matrice carrée A, associe un nombre réel dénoté $\det(A)$ (certains auteurs écrivent simplement $\det A$ mais nous ne ferons pas comme eux). Cette fonction permettra en théorie de déterminer si une matrice possède un inverse. L'expression « en théorie » indique qu'il est en fait très onéreux d'évaluer cette fonction. En pratique, pour les matrices de grandes dimensions, on utilise d'autres méthodes (par exemple, la proposition 5.3.7) pour déterminer si une matrice est inversible.

5.4.1 introduction

Pour définir ce qu'est le déterminant d'une matrice $n \times n$, nous devons premièrement définir ce qu'est une permutation des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Définiton 5.4.1

Comme le nom l'indique, une **permutation** des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., n\}$ est tout simplement une liste ordonnée $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ de tous les éléments de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. En termes mathématiques, $\sigma_i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ et $\sigma_i \neq \sigma_j$ pour $i \neq j$.

Par exemple, les permutations de l'ensemble $\{1,2\}$ sont (1,2) et (2,1). Les permutations de l'ensemble $\{1,2,3\}$ sont (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) et (3,2,1). Quelles seront les 24 permutations de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$?

On dénote par S_2 l'ensemble $\{(1,2),(2,1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1,2\}$. On dénote par S_3 l'ensemble $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1,2,3\}$. En générale, on dénote par S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.

Définiton 5.4.2

Inverser deux éléments d'une permutation est appelé une **transposition** sur une permutation.

Par exemple, inverser le deuxième et troisième élément de (1,3,2) donne (1,2,3), inverser le troisième et quatrième élément de (1,4,3,2,5) donne (1,4,2,3,5), et inverser le deuxième et quatrième élément de (1,4,3,2) donne (1,2,3,4).

5.4. Déterminant 277

Définition 5.4.3

Le signe d'une permutation de S_n est définie par

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut effectuer un nombre pair de transpositions} \\ & \text{pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{s'il faut effectuer un nombre impair de transpositions} \\ & \text{pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{sgn}(2,1) = -1$ car une seule transposition est nécessaire pour réduire (2,1) à (1,2); il suffit d'inverser le premier et deuxième élément. On a que $\operatorname{sgn}(2,3,1) = 1$ car deux transpositions sont nécessaires pour réduire (2,3,1) à (1,2,3); on inverse le deuxième et troisième élément de (2,3,1) pour obtenir (2,1,3) et on inverse le premier et deuxième élément de (2,1,3) pour obtenir (1,2,3).

Définition 5.4.4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} .$$

Le **déterminant** de la matrice A, dénoté det(A), est défini par

$$\det(A) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2) \ a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2}$$
$$= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} \ .$$

Exemple 5.4.5

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

alors $det(A) = 1 \times 5 - 2 \times (-1) = 7$.

Définiton 5.4.6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Le **déterminant** de la matrice A, dénoté det(A), est défini par

$$\begin{split} \det(A) &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2) \in \mathcal{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \ a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} a_{3, \sigma_3} \\ &= a_{1, 1} a_{2, 2} a_{3, 3} - a_{1, 1} a_{2, 3} a_{3, 2} - a_{1, 2} a_{2, 1} a_{3, 3} \\ &+ a_{1, 2} a_{2, 3} a_{3, 1} + a_{1, 3} a_{2, 1} a_{3, 2} - a_{1, 3} a_{2, 2} a_{3, 1} \ . \end{split}$$

5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

Exemple 5.4.7

Si

278

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$det(A) = 1 \times 5 \times 4 - 1 \times 3 \times (-5) - 2 \times (-2) \times 4 + 2 \times 3 \times (-3) + (-1) \times (-2) \times (-5) - (-1) \times 5 \times (-3) = 8.$$

En générale, le déterminant est définie de la façons suivante.

Définiton 5.4.8

Si A est une matrice de dimension $n \times n$, le **déterminant** de A, dénoté $\det(A)$, est définie par

$$\det(A) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \ a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} \cdots a_{n, \sigma_n} \ .$$

5.4.2 Le signe d'une permutation •

Est-ce que le déterminant est bien défini? En particulier, il y a plusieurs choix possibles de transpositions pour réduire une permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ à la permutation trivial $(1, 2, \ldots, n)$. Est-ce que le nombre de transpositions pour chaque choix est toujours pair ou impaire? Il faut une réponse affirmative à cette question si on veut que le signe d'une permutation soit indépendant du choix de transpositions utilisées pour réduire cette permutation à la permutation trivial.

On commence par donner une définition plus précise d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Définition 5.4.9

Une **permutation** sur l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$ est une fonction injective de l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$ dans lui même.

L'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$ est dénoté S_n

Une **transposition** est une permutation $\tau \in S_n$ qui est définie de la façon suivante. Ils existent i et j dans $\{1, 2, 3, ..., n\}$ tels que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour $k \in \{1, 2, 3, ..., n\} \setminus \{i, j\}$.

5.4. Déterminant 279

Théorème 5.4.10

Si σ est une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ alors ils existent des transpositions $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s .$$

La représentation de σ en termes de transpositions n'est pas unique. Par contre, si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$ est un autre ensemble de transpositions telles que

$$\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \ldots \circ \rho_t$$

alors t est pair si et seulement si s est pair (donc, t est impair si et seulement si s est impair).

Ce dernier théorème nous permet donc de définir sans ambiguïté le signe d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Définiton 5.4.11

Le signe d'une permutation $\sigma \in S_n$, dénoté $sgn(\sigma)$, est définie par

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut un nombre pair de transpositions} \\ & \text{pour représenter } \sigma \\ -1 & \text{s'il faut un nombre impair de transpositions} \\ & \text{pour représenter } \sigma \end{cases}$$

Maintenant que l'on sait que le signe d'une permutation est bien défini, on peut dire que le déterminant d'une matrice carré est bien définie.

5.4.3 Calcul du déterminant

Il y a un lien entre la formule pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 2×2 et celle pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 3×3 .

Soit A une matrice de dimension 3×3 et posons

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} , A_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } A_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} .$$

Alors

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

$$= a_{1,1} (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2} (a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3} (a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1})$$

$$= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{1,2} \det(A_{1,2}) + a_{1,3} \det(A_{1,3}) .$$

De façon semblable, on peut démontrer la proposition suivante

5. Algèbre linéaire 🏝 🔀

Proposition 5.4.12

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension 2×2 obtenue d'une matrice A de dimension 3×3 en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j})$$
(5.4.1)

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$
(5.4.2)

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3\}$.

La somme en (5.4.1) est un développement selon une ligne pour calculer le déterminant de A alors que la somme en (5.4.2) est un développement selon une colonne pour calculer le déterminant de A. Un bon choix de développement peut grandement simplifier le calcul du déterminant.

Exemple 5.4.13

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} ,$$

il est très avantageux de développer selon la deuxième ligne. On a

$$\det(A) = -a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{2,2} \det(A_{2,2}) - a_{2,3} \det(A_{2,3})$$

$$= -0 \times \det(A_{2,1}) + 5 \times \det(A_{2,2}) - 0 \times \det(A_{2,3})$$

$$= 5 \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 5 (3 \times 7 - (-1) \times (-2)) = 95.$$

Les matrices $A_{i,j}$ proviennent de la matrice A à laquelle on a enlevé la i^e ligne et la j^e colonne.

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{provient de} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{provient de} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{provient de} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -\blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -2 & 4 & \blacksquare \end{pmatrix}.$$

5.4. Déterminant 281

£

La proposition 5.4.12 a une version équivalent pour les matrices de dimension $n \times n$ avec n un entier positif.

Proposition 5.4.14

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension $(n-1) \times (n-1)$ obtenue d'une matrice A de dimension $n \times n$ en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, on a que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j})$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

On peut utiliser cette proposition récursivement pour calculer le déterminant d'une matrice.

Exemple 5.4.15

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on développe selon la troisième ligne, on obtient

$$\det(A) = a_{3,1} \det(A_{3,1}) - a_{3,2} \det(A_{3,2}) + a_{3,3} \det(A_{3,3}) - a_{3,4} \det(A_{3,4}) + a_{3,5} \det(A_{3,5})$$

$$= 0 \times \det(A_{3,1}) - 3 \det(A_{3,2}) + 0 \times \det(A_{3,3}) - 0 \times \det(A_{3,4}) + 0 \times \det(A_{3,5})$$

$$= -3 \det(A_{3,2}).$$

Posons

$$B = A_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on développe la matrice B selon la deuxième ligne, on obtient

$$\det(B) = -b_{2,1}\det(B_{2,1}) + b_{2,2}\det(B_{2,2}) - b_{2,3}\det(B_{2,3}) + b_{2,4}\det(B_{2,4})$$

$$= -0 \times \det(B_{2,1}) + 0 \times \det(B_{2,2}) - 0 \times \det(B_{2,3}) + 3 \det(B_{2,4})$$

= $3 \det(B_{2,4})$.

Ainsi,

$$\det(A) = -3\det(B) = -9\det(B_{2,4}) .$$

Posons

$$C = B_{2,4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si on développe selon la deuxième ligne de C (toute autre choix de ligne ou colonne serait valable), on obtient

$$\det(C) = -c_{2,1} \det(C_{2,1}) + c_{2,2} \det(C_{2,2}) - c_{2,3} \det(C_{2,3})$$

$$= 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 7 \det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5 \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2(1-3) + 7(-3-3) - 5(3+1) = -66.$$

Ainsi.

$$\det(A) = -9 \det(C) = -9 \times (-66) = 594.$$

Exemple 5.4.16

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ,$$

il est très avantageux de développer selon la première colonne. On a

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{3,1} \det(A_{3,1})$$

$$= 3 \det(A_{1,1}) - 0 \times \det(A_{2,1}) + 0 \times \det(A_{3,1})$$

$$= 3 \det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times 5 \times 4 = 60.$$

La matrice de l'exemple précédent est d'un type particulier.

Définition 5.4.17

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire supérieure** si les composantes de A qui sont sous la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour i > j.

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire inférieure** si les composantes de A qui sont au-dessus de la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour i < j.

5.4. Déterminant 283

L'exemple précédent montre que le déterminant des matrices triangulaires supérieures (de dimensions 2×2 ou 3×3) est le produit des éléments sur la diagonale. Il en est de même pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 5.4.18

Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure) de dimension $n \times n$, alors

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$
.

C'est-à-dire que le déterminant de A est le produit des éléments sur la diagonale de A.

Remarque 5.4.19 •

La démonstration de cette proposition est très simple. Le seul terme de la forme

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\dots a_{n,\sigma(n)}$$

dans la définition 5.4.8 du déterminant qui ne contient possiblement pas un facteur nul est donné par la permutation $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Toutes les autres permutations σ vont avoir $\sigma(k) < k$ pour au moins une valeur de k.

Le déterminant possède les propriétés suivantes.

Proposition 5.4.20

Soit A un matrice de dimension $n \times n$.

- 1. Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de A, on obtient une matrice B telle que $\det(B) = -\det(A)$.
- 2. Si on ajoute une ligne de A à une autre ligne de A, on obtient une matrice B telle que det(B) = det(A).
- 3. Si on ajoute une colonne de A à une autre colonne de A, on obtient une matrice B telle que det(B) = det(A).
- 4. Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par une nombre α , on obtient une matrice B telle que $\det(B) = \alpha \det(A)$.

On peut utiliser ces propriétés pour calculer le déterminant d'une matrice. Dans l'exemple qui suit, on dénote la i^e ligne par R_i et la j^e colonne par C_j , comme on l'a fait précédemment.

Exemple 5.4.21

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} .$$

284 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

On utilise les opérations sur les lignes et colonnes de A pour réduire le calcul du déterminant de A au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

 $R_1 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

 $(1/3) R_2 \to R_2 \text{ et } -(1/3) R_3 \to R_3 \text{ donnent}$

$$\det(A) = -(3)(-3) \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

 $R_2 + R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\det(A) = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \end{pmatrix}.$$

 $R_2 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

 $C_2 + C_3 \rightarrow C_2$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\det(A) = -9 \times 1 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{10}{3} = 40.$$

Les propriétés énoncées à la proposition 5.4.20 sont vrais pour toutes les valeurs positives de n. Pour calculer le déterminant d'une matrice A, on n'utilise pas la définition du déterminant mais on utilise les propriétés données à la proposition 5.4.20 pour réduire la matrice A à un matrice triangulaire supérieure. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est alors très simple a calculer, c'est le produit des éléments sur sa diagonale.

On conclut cette section en remplissant la promesse que nous avons fait au premier paragraphe de la section.

Théorème 5.4.22

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

5.5. Suites dans \mathbb{R}^n 285

5.5 Suites dans \mathbb{R}^n

Dans les exemples qui suivent, nous aurons besoin de la notion de convergence dans \mathbb{R}^n . Soit $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$, une suite de vecteurs dans \mathbb{R}^n . Que veut-on dire par la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$ tend vers un vecteur \mathbf{w} ?

Définition 5.5.1

On dit que la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ converge (ou tend) vers \mathbf{w} si $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}\| \to 0$ lorsque $j \to \infty$. On écrit $\mathbf{v}_j \to \mathbf{w}$ lorsque $j \to \infty$ ou $\lim_{j \to \infty} \mathbf{v}_j = \mathbf{w}$.

Dans la définition précédente, nous avons utilisé la formule pour calculer la longueur d'un vecteur introduite en (4.1.3) pour calculer la distance entre deux vecteurs. Plus précisément, nous avons utilisé la formule

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$$
 , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 5.5.2

La suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ converge vers \mathbf{w} si et seulement si la i^{th} composante de \mathbf{v}_i converge vers la i^{th} composante de \mathbf{w} lorsque $j \to \infty$ pour tout i.

5.6 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.6.1

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Le nombre λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul \mathbf{v} tel que $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Les vecteurs non nuls \mathbf{v} qui satisfont $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ sont appelés les **vecteurs propres** de A associés à la valeur propre λ .

Notons que si \mathbf{v} est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $\alpha \mathbf{v}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En effet,

$$A(\alpha \mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\alpha \mathbf{v}).$$

Il y a donc un nombre infini de vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée A, on remarque que

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{v}$$

286 5. Algèbre linéaire **♣** ✓

donne l'équation

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0} . \tag{5.6.1}$$

Le nombre λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul qui satisfait (5.6.1). Or, il découle de la proposition 5.3.6 qu'une condition nécessaire pour que (5.6.1) ait une solution non nulle est que $A - \lambda I$ n'ait pas d'inverse. Grâce au théorème 5.4.22, $A - \lambda I$ n'a pas d'inverse si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$. On obtient ainsi la méthode suivante pour trouver les valeurs propres d'une matrice carré.

Proposition 5.6.2

Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines du **polynôme caractéristique**

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
.

Pour trouver un vecteur propre ${\bf v}$ associé à une valeur propre $\lambda,$ il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Rappelons ce qu'est un <u>nombre complexe</u>. Cela va être nécessaire pour bien comprendre les valeurs propres.

Définition 5.6.3

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$$z = a + bi$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la **partie réelle** de z, $b \in \mathbb{R}$ est la **partie imaginaire** de z et $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est dénoté \mathbb{C} .

On a que i est la racine carrée de -1. Pour cette raison, il est fréquent de voir l'énoncé $i = \sqrt{-1}$. Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle représentent les nombres réelles. Pour cette raison, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 5.6.4

Les opérations d'addition et de multiplication pour les nombres complexes $a_1+b_1\,i$ et $a_2+b_2\,i$ sont définies par :

1.
$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

2.
$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

Définiton 5.6.5

Le **complexe conjugué** d'un nombre complexe z = a + bi est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.

Définiton 5.6.6

La valeur absolue d'un nombre complexe z=a+b i est définie par $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Si z = a + bi et b = 0 (i.e. $z \in \mathbb{R}$), alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. La valeur absolue pour les nombres complexes est donc une extension de la valeur absolue pour les nombres réelles. Puisque $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}$, on a que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque 5.6.7

Toute les matrices A que nous allons considérer ont seulement des composantes réelles. Néanmoins, les racines du polynôme caractéristique associé à A, et donc les valeurs propres de A, peuvent être des nombres complexes. Si λ est une valeur propre complexe (i.e. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) pour une matrice dont toutes les composantes sont réelles, alors les composantes d'un vecteur propre associé à λ seront généralement complexes.

Exemple 5.6.8

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3\\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$. Ce sont les deux valeurs propres de A.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 4$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

on obtient le système

$$(A - 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 3\\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix} . \tag{5.6.2}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) .$$

$$(-1/3)R_1 \rightarrow R_1$$
 donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) .$$

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$
 donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (5.6.2) satisfont donc $x_1 - x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
.

On peut vérifier que $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$. Tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_1 associé à λ_1 .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A+I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{5.6.3}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) .$$

 $R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (5.6.3) satisfont donc $2x_1+3x_2=0$; c'est-à-dire, $x_2=-2x_1/3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha/3 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 3$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

On peut vérifier que $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. Comme pour la valeur propre λ_1 , tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_2 associé à λ_2 .

Exemple 5.6.9

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$
.

et

$$\lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i = \overline{\lambda_1}.$$

Il est normal que λ_2 soit le complexe conjugué de λ_1 car, pour les polynômes avec coefficients réels, si z est une racine du polynôme alors \overline{z} est aussi une racine du polynôme. λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de A.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

on obtient le système

$$(A - (1+2i) I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2i & -1\\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix} . \tag{5.6.4}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -1 & 0 \\ 4 & -2i & 0 \end{array}\right) .$$

 $R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

 $(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Finalement, $R_2 + 2i R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (5.6.4) satisfont donc $x_1 - (i/2) x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = (i/2) x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i/2) \, \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

290 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

On a bien $A\mathbf{x}_1 = (1+2i)\mathbf{x}_1$.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1 - 2i$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - (1 - 2i) \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2i & -1\\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}$$
 (5.6.5)

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 0 \\ 4 & 2i & 0 \end{array}\right) .$$

 $R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array}\right).$$

 $(1/4) R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Finalement, $R_2 - (2i) R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (5.6.5) satisfont donc $x_1 + (i/2) x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = -(i/2) x_2$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(i/2)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

On a bien $A\mathbf{x}_2 = (1-2i)\mathbf{x}_2$.

À l'exemple précédent, on aurait pu trouver un vecteur propre associé à λ_2 sans faire de calculs grâce au résultat de la proposition qui suit. Si \mathbf{v} est un vecteur dons les composantes sont les nombres complexes v_1, v_2, \ldots, v_n . On définit le **complexe conjugué** du vecteur \mathbf{v} comme étant le vecteur $\overline{\mathbf{v}}$ dont les composantes sont $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$.

Proposition 5.6.10

Soit A une matrice de dimension $n \times n$ avec des composantes réelles. Si λ est une valeur propre complexe de A et \mathbf{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A et $\overline{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

À l'exemple précédent, on a trouvé le vecteur propre $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$. Il découle de la proposition précédente que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ est une valeur propre et $\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$ est une vecteur propre associé à λ_2 . C'est effectivement ce que l'on a trouvé à l'exemple précédent.

Exemple 5.6.11

Trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

et donner un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 - \lambda & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-0.5 - \lambda) ((1 - \lambda)(1.5 - \lambda) - 3) + (3(1.5 - \lambda) + 4.5) + 3.5(-3 - 1.5(1 - \lambda))$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

où on a calculé le déterminant en développant selon la première ligne. Il y a une formule pour calculer les racines d'un polynôme de degré trois mais elle n'est pas simple. Il a été prouvé qu'il n'existe pas de formule générale pour calculer les racines d'un polynôme de degré plus grand que quatre. Après avoir essayé certaines valeurs entières, on trouve que 1 est une racine. On peut alors diviser le polynôme caractéristique par $\lambda-1$ pour obtenir

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 3$. Ce sont les trois valeurs propres de A.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ,$$

292 5. Algèbre linéaire **♣** ✓

on obtient le système

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
 (5.6.6)

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
-1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\
3 & 0 & -3 & 0 \\
1.5 & -1 & 0.5 & 0
\end{array}\right).$$

 $(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

 $-(1/2)R_3 \to R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
-1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0
\end{array}\right).$$

Finalement, $R_1 + 1.5R_2 + R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{x} de (5.6.6) satisfont donc $x_1 - x_3 = 0$ et $x_2 - 2x_3 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_3$ et $x_2 = 2x_3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De façon semblable à ce que nous venons de faire pour λ_1 , on trouve que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 2x_3$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1\\2\\1 \end{pmatrix} .$$

Finalement, pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On trouve que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = x_3$ et $x_2 = 0$. On obtient une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Remarque 5.6.12 •

La recherche de vecteurs propres est plus complexe que les exemples précédents semblent indiquer.

Supposons que le polynôme caractéristique après factorisation d'une matrice A de dimension $n \times n$ soit

$$p(\lambda) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_s)^{n_s}.$$

Les racines distinctes de ce polynôme sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Comme p est un polynôme de degré n, on a que

$$n = \sum_{j=1}^{s} n_j .$$

On dit que n_j est la **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ_j .

Si $n_j > 1$, on peut s'attendre à ce que l'ensemble E_j des vecteurs propres de A associé à la valeur propre λ_j ne soit pas seulement une ligne dans l'espace qui passe par l'origine mais un plan qui contient l'origine ou un espace plus grande si $n_j \geq 3$. La dimension de E_j est la **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ_j .

Il n'est pas rare que la multiplicité géométrique soit plus petite que la multiplicité algébrique. Il faut alors parler de **vecteurs propres généralisées**. Cela est pour un futur cours d'algèbre linéaire.

5.7 Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires 🌲

Exemple 5.7.1

On considère le système dynamique discret en deux dimensions

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$$
 , $n = 0, 1, 2, \dots$
 $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}$

οù

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0\\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

On a

$$\mathbf{v}_{1} = A\mathbf{v}_{0} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{2} = A\mathbf{v}_{1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{3} = A\mathbf{v}_{2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{4} = A\mathbf{v}_{3} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ -61/324 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

On semble avoir $\mathbf{v}_n \to \mathbf{0}$ lorsque $n \to \infty$ (chacune des composantes de \mathbf{v}_n semble tendre vers 0). Mais! En est-on certain? Existe-t-il une façon de répondre à cette question sans avoir à calculer les vecteurs \mathbf{v}_n ?

On pourrait penser que $\mathbf{v}_n \to \mathbf{0}$ lorsque $n \to \infty$ car tous les éléments de la matrice A sont plus petit que 1 en valeur absolue. Mais l'exemple suivant montre que ce n'est pas une bonne raison.

On considère le système dynamique discret en deux dimensions

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$$
 , $n = 0, 1, 2, \dots$
 $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$

οù

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

On a

$$\mathbf{v}_{1} = A\mathbf{v}_{0} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{2} = A\mathbf{v}_{1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{3} = A\mathbf{v}_{2} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.728 \\ 2.736 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\mathbf{v}_{40} = A\mathbf{v}_{39} \approx \begin{pmatrix} 1469.77156796909 \dots \\ 1763.72588156290 \dots \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\mathbf{v}_{100} = A\mathbf{v}_{99} \approx \begin{pmatrix} 8.28179745220147 \dots \times 10^{7} \\ 9.93815694264176 \dots \times 10^{7} \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

On ne semble pas avoir $\mathbf{v}_n \to \mathbf{0}$ lorsque $n \to \infty$.

Il est donc nécessaire de trouver un critère infaillible pour déterminer si l'origine est stable; c'est-à-dire, pour déterminer si $\mathbf{v}_n \to \mathbf{0}$ lorsque $n \to \infty$ quelle que soit la condition initial \mathbf{v}_0 .

Exemple 5.7.2

On a vu que l'on pouvait estimer périodiquement le nombre d'individus (par km²) d'une population à l'aide d'un système dynamique discret de la forme

$$p_{k+1} = rp_k (5.7.1)$$

où p_k est le nombre d'individus à la fin de la k^e période et r est le taux de croissance relatif. Cette formule ne tient pas compte du fait que le taux de reproduction peut varier avec l'âge. Le taux de croissance r utilisé dans la formule ci-dessus est une moyenne pour l'ensemble de la population.

Supposons que l'on a une population que l'on peut diviser en quatre groupes d'âge. Le premier groupe est formé des jeunes individus qui ne peuvent pas encore se reproduire. Le deuxième groupe est formé des individus qui sont les plus « performants » au niveau reproductif. Le troisième groupe est formé des individus dont les capacités de reproduction déclinent. Finalement, le quatrième groupe est formé des individus qui sont trop âgés pour pouvoir se reproduire.

On possède les statistiques suivantes pour une période donnée (e.g. une année).

groupe	taux de	taux de décès	taux de transfert
	reproduction		au groupe suivant
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.2
3	0.1	0.1	0.2
4	0	0.4	0

Le taux de reproduction des jeunes individus est 0 car ils ne peuvent pas encore se reproduire. Le taux de reproduction des individus les plus âgés est aussi 0 car ils ont passé la période de reproduction. Le deuxième groupe a le taux de reproduction le plus élevé. On note qu'à la fin de chaque période, plusieurs individus d'un groupe ont atteint l'âge requise pour passer au groupe suivant. On indique ce transfert d'un groupe au groupe suivant dans la dernière colonne du tableau ci-dessus.

On aimerait prédire le nombre d'individus dans chacun des quatre groupes à la fin de chaque période.

Posons

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k,1} \\ v_{k,2} \\ v_{k,3} \\ v_{k,4} \end{pmatrix}$$

où $v_{k,i}$ est le nombre d'individus du groupe i après k périodes. On déduit les équations suivantes des statistiques ci-dessus.

$$v_{k+1,1} = 0.7v_{k,1} + 0.2v_{k,2} + 0.1v_{k,3}$$

$$v_{k+1,2} = 0.2v_{k,1} + 0.7v_{k,2}$$

$$v_{k+1,3} = 0.2v_{k,2} + 0.7v_{k,3}$$

$$v_{k+1,4} = 0.2v_{k,3} + 0.6v_{k,4}$$

Par exemple, pour obtenir la première équation, on note qu'il reste $0.7v_{k,1}$ individus du premier groupe après une période : $0.1v_{k,1}$ individus sont décédés et $0.2v_{k,1}$ ont transférés au deuxième groupe. Par contre, durant cette période, $0.2v_{k,2}$ individus et $0.1v_{k,3}$ individus se sont ajoutés au premier groupe grâce aux naissances provenant du deuxième et troisième groupes respectivement. En raisonnant de façon semblable, on arrive aux trois autres équations.

On peut exprimer ces équations sous la forme du système dynamique discret

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k \tag{5.7.2}$$

οù

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Si \mathbf{v}_0 est donné, on peut calculer les autres vecteurs \mathbf{v}_k récursivement.

$$\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_0) = A^2\mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_2 = A(A^2\mathbf{v}_0) = A^3\mathbf{v}_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\mathbf{v}_k = A^k\mathbf{v}_0.$$

Soit

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5,000 \\ 20,000 \\ 15,000 \\ 4,000 \end{pmatrix} .$$

On obtient

$$\mathbf{v}_{1} = A\mathbf{v}_{0} = \begin{pmatrix} 9000 \\ 15000 \\ 14500 \\ 5400 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2} = A\mathbf{v}_{1} = \begin{pmatrix} 10750 \\ 12300 \\ 13150 \\ 6140 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\mathbf{v}_{20} = A\mathbf{v}_{19} \approx \begin{pmatrix} 4562.7737 \\ 3828.2253 \\ 3215.0260 \\ 1907.2974 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{30} = A\mathbf{v}_{29} \approx \begin{pmatrix} 2413.1867 \\ 2025.3504 \\ 1699.8553 \\ 1005.0093 \end{pmatrix}, \dots$$

où les valeurs ont été arrondie à quatre décimales. Les résultats numériques semblent indiquer que chacune des composantes de \mathbf{v}_k tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. Si c'est le cas, la population va disparaître?

Est-il possible qu'avec des conditions initiales \mathbf{v}_0 différentes, on ait que la population ne disparaît pas?

Pour le système dynamique discret (5.7.1), on a que la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ tend vers 0 si |r| < 1 et la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne converge pas si |r| > 1.

Pour le système dynamique discret (5.7.2), peut-on trouver une condition qui nous permettra de conclure que toute orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ approche $\mathbf{0}$. Donc, quelle que soit la condition initiale, la population va disparaître.

L'étude du comportement asymptotique (i.e. lorsque $k \to \infty$) des orbites $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ du système dynamique discret (5.7.2) est beaucoup plus complexe que l'étude du comportement asymptotique des orbites p_0, p_1, p_2, \ldots du système dynamique discret (5.7.1). Dans le cas de (5.7.1), la condition |r| < 1 est suffisante (et nécessaire) pour montrer que toutes les orbites approchent l'origine. On aimerait bien avoir un résultat équivalent pour (5.7.2). L'étude des valeurs propres et vecteurs propres va nous permettre d'obtenir un tel résultat. En fait, la valeur absolue de valeurs propres va nous permettre de déterminer si toutes les orbites de (5.7.2) vont converger vers $\mathbf{0}$.

Proposition 5.7.3

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. On considère le système dynamique discret $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont plus petites que 1 en valeur absolue, alors les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendent vers l'origine (i.e. $\mathbf{v}_k \to \mathbf{0}$ lorsque $k \to \infty$) quel que soit le choix de \mathbf{v}_0 .

Exemple 5.7.4 (suite de l'exemple 5.7.2)

Si on revient au système dynamique discret (5.7.2) du début de la section et que l'on calcule les valeurs propres de A, on trouve les quatre valeurs propres : $\lambda_1 \approx 0.9382976$, $\lambda_2 \approx 0.6$, $\lambda_3 \approx 0.58085121 + 0.050885178i$ et $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$. Puisque toutes les valeurs propres de A sont plus petite que 1 en valeur absolue, on aura que les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendront vers $\mathbf{0}$ quelle que soit la condition initiale \mathbf{v}_0 .

Remarque 5.7.5

Si les valeurs propres d'une matrice A de dimension $n \times n$ ne sont pas toutes plus petites que 1 en valeur absolue, une étude détaillée des vecteurs propres (généralisés) associés aux valeurs propres qui sont plus petites que 1 en valeur absolue nous permettrait de déterminer la région de l'espace où choisir la condition initiale \mathbf{v}_0 pour que l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ du système $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ tend vers l'origine. L'étude des <u>espaces propres (généralisés)</u> est le sujet d'un cours plus avancé d'algèbre linéaire.

En fait, la région mentionnée au paragraphe précédent est un sous-espace de dimension plus petite que n dans \mathbb{R}^n . Si \mathbf{v}_0 est dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ tendra vers l'origine. Par contre, si \mathbf{v}_0 n'est pas dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne tendra pas vers l'origine. Ce sous-espace est très petit dans le sens suivant. Si vous choisissez au hasard un point de \mathbb{R}^n , il est presque certain que ce point ne sera pas dans le sous-espace. Pour bien comprendre l'explication donnée précédemment, considérons \mathbb{R}^2 . Un sous-espace de dimension 1 dans \mathbb{R}^2 est une droite dans \mathbb{R}^2 qui passe par l'origine. Si vous choisissez un point au hasard de \mathbb{R}^2 , les chances sont nulles que ce soit un point de cette droite.

Nous ferons appel aux valeurs propres lors de l'étude de la stabilité des <u>points d'équilibre</u> des systèmes d'équations différentielles. Mais avant de quitter cette section, nous étudierons une application importante des valeurs propres et vecteurs propres.

5.8 Chaînes de Markov

Exemple 5.8.1

On considère la population d'une région donnée que l'on peut diviser en deux groupes : les citadins et les paysans. On suppose que la population totale de la région ne change pas.

Soit x_j le nombre de citadins à la j^e année et y_j le nombre de paysans à la j^e année. Comme on suppose que la population totale ne change pas, on a que $x_j + y_j$ est constant en fonction de j.

Une étude montre que 10% des citadins déménagent à la campagne chaque année et 20%

5.8. Chaînes de Markov 🗠 299

des paysans déménagent dans les villes. Étant donné x_j et y_j , on peut donc déterminer la population des villes et de la campagne l'année suivante.

Après un an, 0.9 des citadins demeurent dans les villes (0.1 des citadins quittent pour la campagne) et 0.2 des paysans déménagent dans les villes pour donner le total de x_{j+1} citadins. De même, après un an, 0.8 des paysans demeurent à la campagne (0.2 des paysans quittent pour les villes) et 0.1 des citadins déménagent à la campagne pour donner le total de y_{j+1} paysans. En termes mathématiques, on a le système dynamique discret

$$x_{j+1} = 0.9x_j + 0.2y_j$$
$$y_{j+1} = 0.1x_j + 0.8y_j$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots$ On peut récrire ce système sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} .$$

Notez que

$$x_{j+1} + y_{j+1} = (0.9x_j + 0.2y_j) + (0.1x_j + 0.8y_j) = x_j + y_j$$
.

Donc, effectivement, la population total ne change pas.

On suppose que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

où les populations sont en unités de un million par exemple.

Qu'arrivera-t-il dans $10, 20, \ldots, 100$ ans? Qu'arrivera-t-il lorsque j tend vers l'infini? Est-ce qu'on aura un équilibre entre le nombre de paysans et le nombre de citadins? Est-ce le nombre de paysans et le nombre de citadins vont toujours osciller? On peut répondre à ces questions à l'aide des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} .$$

Avant de répondre à ces questions, nous allons étudier les matrices comme la matrice A qui ont une structure assez spéciale.

La matrice A de l'exemple précédent a deux caractéristiques fondamentales que l'on présente dans la définition suivante.

Définition 5.8.2

Une matrice A de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice de Markov** si les composantes $a_{i,j}$ satisfont :

1.
$$a_{i,j} \ge 0$$
 for $1 \le i, j \le n$, et

$$2. \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Une chaîne de markov ou procédure de Markov est une système dynamique discret $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ où A est une matrice de Markov.

Les chaînes de Markov ont une propriété très particulière.

Proposition 5.8.3

Un matrice de Markov A possède toujours la valeur propre 1. Si on considère la chaîne de Markov $\mathbf{v}_{j+1} = A\mathbf{v}_j$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$ avec une condition initiale \mathbf{v}_0 donnée, l'orbite $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ tend vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Exemple 5.8.4 (Suite de l'exemple 5.8.1)

On considère la chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} , j = 0, 1, 2, \dots$$

où $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition précédente, $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers un vecteur propre associée à la valeur propre 1 lorsque j tend vers l'infini. Trouvons ce vecteur propre.

En premier, vérifions que 1 est bien une valeur propre de A. Pour trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

on considère le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 0.9 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix}$$
$$= (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.02 = \lambda^2 - 1.7\lambda - 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7) .$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0.7$. On a bien la valeur propre 1 comme il a été prédit par la proposition précédente.

Pour trouver les vecteurs propres de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ où

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

On obtient le système

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \end{array}\right) .$$

5.8. Chaînes de Markov 🗠 301

 $R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ suivie de $-10R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{v} du système $(A - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 - 2v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_1 = 2v_2$. Ainsi, les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer le vecteur propre associée à la valeur propre 1 vers lequel $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ converge lorsque j tend vers l'infini. Il faut utiliser le fait que la population total est constante. Or, au départ, on a 2 millions de personnes : $x_0 = 1$ million de citadins et $y_0 = 1$ million de paysans. Donc, le vecteur propre que l'on cherche est $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ où 2a + a = 2 (en unités de un million). Donc a = 2/3 et

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} .$$

Donc $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini

Remarque 5.8.5

À l'exemple précédent, on peut vérifier que $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini quelque soit la condition initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $x_0 + y_0 = 2$.

Pour ce faire, nous aurons besoin des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.7. Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0.7$, on doit résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = (A - 0.7 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - 0.7 \operatorname{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{array}\right) .$$

 $R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $10R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) .$$

Les solutions \mathbf{v} de $(A - 0.7 \,\mathrm{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 + v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_2 = -v_1$. Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0.7 sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour b un nombre réel. On a que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour a = 2/3 et b = -1/3. Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

car $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. De plus, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.7. De même,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

De façon générale,

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^j}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour $j=1,\,2,\,3,\,\ldots$ Puisque $\lim_{j\to\infty}0.7^j=0$, on obtient bien

$$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$
 lorsque $j \rightarrow \infty$.

5.9 Exercices

Question 5.1

Résoudre les systèmes d'équation linéaires suivants :

5.9. Exercices 303

a)
$$x + y + 2z = 9 2x + 4y - 3z = 1 3x + 6y - 5z = 0$$
 b)
$$5x + 2y + 6z = 0 -2x + y + 3z = 1$$

$$2x_1 + 2x_3 = 1
3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7
6x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$d) 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5
x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$3x + 2y - z = -15$$

$$3x + y + 3z = 11$$

$$-6x - 4y + 2z = 30$$

Question 5.2

Montrez que le système

$$x + y + 2z = a$$
$$x + z = b$$
$$2x + y + 3z = c$$

possède au moins une solution seulement si c = a + b.

Question 5.3

Pour chacun des systèmes d'équations linéaires suivant, donnez les valeurs de a et b pour que le système ait :

I: Une seule solution.

II: Un nombre infini de solutions.

III: Aucune solution.

a)
$$x + ay = 1$$

 $2x + 3y = b$ b) $x + ay = 1$
 $b + 5y = 2$

Question 5.4

On considère le système d'équations linéaires

$$2x - y + 3z = -1$$
$$x + y + 4z = h$$
$$2x - 3y + hz = 2$$

Donnez les valeurs de h pour que le système ait :

- a) Une seule solution.
- **b**) Aucune solution.
- c) Un nombre infini de solutions.

Question 5.5

Deux espèces d'insectes, X et Y, se nourrissent de deux espèces de plantes, A et B. L'espèce X consomme 5 unités de A et 3 unités de B par jour, et l'espèce Y consomme 2 unités de A et 4 unités de B par jour. Si l'on fournit 900 unités de A et 960 unités de B par jour. combien d'individus des espèces X et Y doit-on avoir dans notre insectarium pour que toutes les unités de A et B soient consommées à chaque jours.

Question 5.6

Un manufacturier vent trois types d'engrais (I, II et III) qui sont des mélanges de trois produits (A, B et C). L'engrais de type I contient 10 kg de A, 30 kg de B et 60 kg de C par sac. L'engrais de type II contient 20 kg de A, 30 kg de B et 50 kg de C par sac. Finalement, l'engrais de type III contient 50 kg de A et 50 kg de C par sac; cet engrais de contient pas de produit B. On a présentement en entrepôt 1600 kg de A, 1200 kg de B et 3200 kg de C. Combien de sacs de chaque type d'engrais doivent être produit par le manufacturier si celui-ci veut utiliser tous les produits A, B et C dans son entrepôt ?

Question 5.7

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Évaluez si possible les expressions suivantes :

- a) D+E
- **b**) D-E
- c) 5C

 \mathbf{d}) -7C

- e) 2B-C
- f) 4E 2D
- **g**) -3(D+2E)
- \mathbf{h}) A-A

- \mathbf{i}) $\operatorname{tr}(D)$
- \mathbf{j}) $\operatorname{tr}(D-3E)$
- \mathbf{k}) $\operatorname{tr}(A)$
- $\mathbf{1})^{'} \quad 2A^{\top} + C$

- \mathbf{m}) $D^{\top} E^{\top}$
- \mathbf{n}) $(D-E)^{\top}$
- o) $B^{\top} + 5C^{\top}$
- $(\mathbf{p}) \quad B B^{\mathsf{T}}$

- \mathbf{q}) AB
- \mathbf{r}) BA
- \mathbf{s}) (3E)D
- \mathbf{t}) A(BC)

- $\mathbf{u}) \quad (AB)C \\ \mathbf{v}) \quad (DE)^{\top}$
- $\mathbf{v}) \quad CC^{\top} \\ \mathbf{z}) \quad (C^{\top}B)A^{\top}$
- \mathbf{w}) $(DA)^{\top}$
- \mathbf{x}) $E^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$

Question 5.8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Évaluez A^2 .
- **b**) Évaluez A^3 .

5.9. Exercices 305

c) Quelle sera la forme générale de A^n ?

Question 5.9

Déterminez si les matrices suivantes ont un inverse. Pour celles qui ont un inverse, trouvez cet inverse.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{b}) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$
 e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{f}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 5.10

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 9 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix} \; .$$

- a) Montrez que $AB \neq BA$.
- b) Évaluez $\det(2A 3B^{\top} C)$.
- \mathbf{c}) Montrez que C n'a pas d'inverse.
- **d**) Trouvez A^{-1} .

Question 5.11

Trouvez les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes et donnez la multiplicité algébrique de chacune des valeurs propres.

$$\mathbf{a}) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$
 c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
 e) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{e}) \quad A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \qquad \mathbf{h}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \qquad \mathbf{i}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k}) \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 7 & -7 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}) \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 7 & -7\\ -1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Question 5.12

Pour chacune des matrices A ci-dessous.

306 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>

I: Montrez que le déterminant de A est différent de 0.

II: Trouvez l'inverse multiplicatif A^{-1} de A.

III: Résoudre le système d'équations linéaires $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour le vecteur \mathbf{b} donné.

IV: Trouvez les valeurs propres de A.

V: Pour chaque valeur propre, trouvez un ensemble de vecteurs propres linéairement indépendant.

a)
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
 et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

Question 5.13

Une compagnie de location de voitures possède deux succursales : succursale S et succursale T. Un analyse des inventaires à chacune des succursales à la fin de chaque mois révèle que 70% des voitures louées à la succursale S sont retournées à la succursale S alors que les autres voitures (30%) sont retournées à la succursale T. De plus, 80% des voitures louées à la succursale T sont retournées à la succursale T alors que les autres voitures (20%) sont retournées à la succursale S.

Soit x_0 et y_0 le nombre de voitures au début du mois aux succursales S et T respectivement, et soit x_1 et y_1 le nombre de voitures à la fin du mois aux succursales S et T respectivement.

a) Exprimez le nombre de voitures à chaque succursale à la fin du mois en fonction du nombre de voitures à chaque succursale au début du mois sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

pour une matrice A.

- b) Évaluez A^2 .
- c) Si au début de mars on a 60 voitures à la succursale S et 40 voitures à la succursale T, Combien de voitures y-aura-t-il dans chaque succursale au début d'avril? Au début de mai?
- d) Quel est le nombre de voitures que la compagnie devrait avoir à chaque succursale au début du mois pour qu'elle retrouve le même nombre de voiture à chaque succursale à la fin du mois? Vous devez premièrement écrire le problème sous la forme d'un problème de valeurs et vecteurs propres.

Question 5.14

Une île est divisée en 1000 lots dans le but de faire une étude écologique. Chaque année, un certain nombre de lots sont choisis pour une observation. La probabilité qu'un lot soit choisi une année est de 20% si le lot a été choisi l'année précédente et de 50% si le lot n'a pas été choisi l'année précédente.

5.9. Exercices 307

- a) Donnez la matrice de transition A pour cette procédure de markov.
- b) Combien de lots seront choisis l'année prochaine si on a choisi 300 lots cette année?
- b) Combien de lots seront choisis dans deux ans si on a choisi 300 lots cette année?
- c) Combien de lots seront choisis à long terme si on a choisi 300 lots cette année? En d'autre mots, combien de lots devrait-on choisir si on veut que le nombre de lots choisis chaque année soit constant?

Question 5.15

On divise une population de femelles en trois groupes.

- 1. Groupe I : Ceux dont le poids à la naissance était inférieure au poids minimal recommandé.
- 2. Groupe II : Ceux dont le poids à la naissance était entre le poids minimal et le poids maximal recommandés.
- 3. Groupe III : Ceux dont le poids à la naissance était supérieure au poids maximal recommandé.

On observe que les femelles du groupe I donnent naissance dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 5% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. De même, on observe que les femelles du groupe II donnent naissance dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. Finalement, on observe que les femelles du groupe III donnent naissance dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 40% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III.

Déterminez la tendance à long terme pour la distribution des poids à la naissance pour les femelles.

Note: Ce problème demande une connaissance (intuitive) des probabilités conditionnelles.

Question 5.16

Chaque jour, une épicerie offre en solde une variété de pommes parmi trois variétés possibles : Cortland, McIntosh and Spartan. L'épicerie a la politique de vente suivante :

- 1. Les pommes McIntosh ne sont jamais en vente deux jours de suite.
- 2. Si les pommes McIntosh sont en vente une journée, alors les pommes Cortland et Spartan ont la même probabilité d'être en vente le jour suivant.
- 3. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il y a une chance sur deux qu'ils seront en vente la journée suivante.
- 4. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il a une chance sur trois que les pommes McIntosh seront en vente le jour suivant.

Pour chaque item, déterminez la probabilité (ne faite pas les calculs) qu'il soit en vente après 100 jours si les items avaient une probabilité égale d'être en vente la première journée? Pour chaque item, déterminez la probabilité qu'il soit en vente dans un future éloigné?

308 5. Algèbre linéaire **♣** <u>✓</u>



Représentation paramétrique des courbes

Les deux premières sections de ce chapitre sont nécessaires pour l'étude des systèmes d'équations différentielles que nous ferons dans un prochain chapitre. Les solutions d'un système d'équations différentielles satisfaisant une condition initiale sont en fait des courbes paramétriques.

Les dernières sections de ce chapitre offrent plus d'information sur la représentation paramétrique des courbes et peuvent servir de matériel optionnel pour les étudiant.e.s en génie.

6.1 Définition

Définition 6.1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-intervalle de la droite réelle. De plus, soit $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ un ensemble de n fonctions continues à valeurs réelles définies sur I.

L'ensemble des points

$$\Gamma = \{ (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) : t \in I \}$$

définit une courbe (voir figure 6.1) dans l'espace \mathbb{R}^n . Les n fonctions $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ définissent une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ par

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$. L'image de ϕ est la courbe Γ . La fonction ϕ est une **représentation** paramétrique de la courbe Γ .

Puisque les élements de \mathbb{R}^n sont bien souvent représentés par des matrices colonnes avec une colonne et n ligne, on utilise bien souvent la notation suivante

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} .$$

La première notation est généralement associée à la représentation géométrique alors que la seconde est associée à la représentation algébrique.

Exemple 6.1.2

Une représentation paramétrique pour le cercle de rayon 1 centré à l'origine est donnée par la définition des fonctions trigonométriques $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. La courbe Γ est le cercle que l'on retrouve dans la figure suivante et une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x,y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$.

6.1. Définition 311

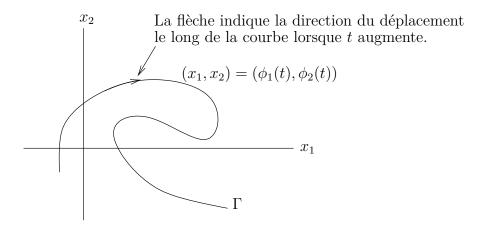
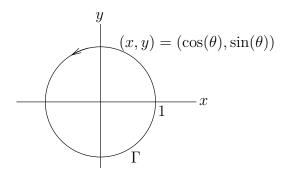


FIGURE 6.1 – Une courbe dans le plan donnée par une représentation paramétrique $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. On indique à l'aide d'une flèche le déplacement le long de la courbe lorsque t augmente.



Lorsque θ augmente, on parcourt le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des fonctions périodiques de période 2π , on parcourt la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de 2π .

Exemple 6.1.3

Une autre représentation paramétrique pour le cercle Γ de rayon 1 centré à l'origine est donnée par

$$(x,y) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Lorsque θ augmente, on parcourt le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ sont des fonctions périodiques de période π , on parcourt la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de π . Cette représentation permet de parcourir la courbe Γ deux fois plus rapidement que la représentation donnée à l'exemple précédent.

Les deux exemples précédents montrent qu'une courbe Γ a plus qu'une représentation paramétrique.

Exemple 6.1.4

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

$$(x,y) = (\sec(\theta), \tan(\theta))$$

pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

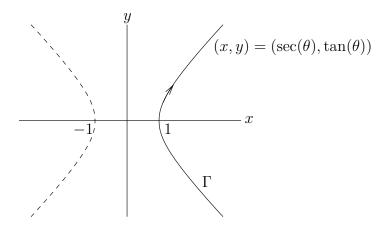
Puisque $\cos(\theta) = 1/x$, on a

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{x^2}$$
 et $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Ainsi,

$$y^{2} = \tan^{2}(\theta) = \frac{\sin^{2}(\theta)}{\cos^{2}(\theta)} = x^{2} - 1$$

Sur la courbe Γ , on a que $x^2 - y^2 = 1$. Donc, la courbe Γ fait partie de la courbe décrite par $x^2 - y^2 = 1$. L'équation $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation d'une hyperbole dont l'axe est la droite horizontale y = 0 et les sommets sont aux points (1,0) et (-1,0). On représente cette hyperbole dans la figure suivante.



Par contre, la représentation paramétrique ne représente pas toute l'hyperbole. On a $x=\sec(\theta)>0$ pour $-\pi/2<\theta<\pi/2$, $\lim_{\theta\to\pi/2}\sec(\theta)=\lim_{\theta\to\pi/2}\tan(\theta)=+\infty$, $\lim_{\theta\to-\pi/2}\sec(\theta)=\lim_{\theta\to\pi/2}\tan(\theta)=-\infty$ et $(\sec(0),\tan(0))=(1,0)$. La courbe Γ est donc la branche de l'hyperbole à droite de l'axe des y que l'on parcourt de bas en haut lorsque θ augmente. \clubsuit

Exemple 6.1.5

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

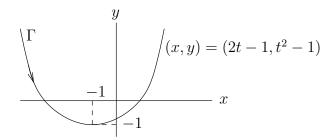
$$(x,y) = (2t-1,t^2-1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

De l'équation x = 2t - 1, on trouve t = (x + 1)/2. Si on substitue cette expression pour t dans l'équation $y = t^2 - 1$, on trouve $y = (x + 1)^2/4 - 1$. Cette dernière équation donne

$$(x+1)^2 = 4(y+1) ,$$

C'est l'équation d'une parabole convexe dont l'axe est la droite verticale x = -1 et le sommet est au point (-1, -1). On représente cette parabole dans la figure suivante.



Puisque x=2t-1 augmente de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque t augmente de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe est parcourue de gauche à droite.

6.2 Droite tangente à une courbe

Supposons qu'une courbe Γ possède la représentation paramétrique

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

ou, plus explicitement,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a,b[\subset \mathbb{R},$ où les fonctions $\phi_i:]a,b[\to \mathbb{R}$ sont différentiables. On ne demande pas seulement que les fonctions ϕ_i soient continues mais qu'elles soient aussi différentiables.

Pour trouver la direction de la droite tangente à la courbe Γ au point

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) ,$$

on considère la sécante qui passe par les points

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) \text{ et } \phi(t_0 + h) = (\phi_1(t_0 + h), \phi_2(t_0 + h), \dots, \phi_n(t_0 + h))$$

où h est petit. Le vecteur

$$\mathbf{v}_{h} = \frac{1}{h} \Big(\phi(t_{0} + h) - \phi(t_{0}) \Big)$$

$$= \frac{1}{h} \Big(\phi_{1}(t_{0} + h) - \phi_{1}(t_{0}), \phi_{2}(t_{0} + h) - \phi_{2}(t_{0}), \dots, \phi_{n}(t_{0} + h) - \phi_{n}(t_{0}) \Big)$$

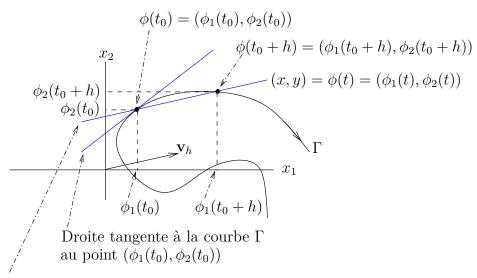
$$= \Big(\frac{\phi_{1}(t_{0} + h) - \phi_{1}(t_{0})}{h}, \frac{\phi_{2}(t_{0} + h) - \phi_{2}(t_{0})}{h}, \dots, \frac{\phi_{n}(t_{0} + h) - \phi_{n}(t_{0})}{h} \Big)$$

est parallèle à la sécante qui passe par les points $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$.

Lorsque h tend vers 0, le vecteur \mathbf{v}_h approche un vecteur parallèle à la droite tangente à Γ au point $\phi(t_0)$. Or, cette limite est

$$\lim_{h \to 0} \mathbf{v}_h = \left(\lim_{h \to 0} \frac{\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{\phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{\phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)}{h} \right)$$
$$= (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0)),$$

On a donc le résultat suivant :



Sécante qui passe par les points $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ et $(\phi_1(t_0 + h), \phi_2(t_0 + h))$

FIGURE 6.2 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x_1, x_2) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a aussi dessiné la sécante qui passe par $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$, et la tangente à la courbe au point $\phi(t_0)$.

Proposition 6.2.1

Soit Γ , une courbe qui possède la représentation paramétrique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}, \text{ où les fonctions } \phi_i :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ sont différentiables. Le vecteur}]$

$$\phi'(t_0) = (\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0), \dots, \phi_n'(t_0))$$

est parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$. De plus, le vecteur $\phi'(t_0)$ pointe dans la direction associée à t croissant.

Lorsque les éléments de \mathbb{R}^n sont représentés par des matrices colonnes, on utilise la notation

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi'(t) = \begin{pmatrix} \phi'_1(t) \\ \phi'_2(t) \\ \vdots \\ \phi'_n(t) \end{pmatrix}$$

Le contexte déterminera la notation à utiliser.

Ainsi, la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$ possède la représentation paramétrique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t_0) + \alpha \, \phi'(t_0)$$

$$= (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) + \alpha(\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0))$$

= $(\phi_1(t_0) + \alpha\phi'_1(t_0), \phi_2(t_0) + \alpha\phi'_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0) + \alpha\phi'_n(t_0))$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 6.2.2

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 (i.e. n=2 dans la discussion précédente) qui possède la représentation paramétrique

$$(x,y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}, \text{ où les fonctions } \phi_1 :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ et } \phi_2 :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ sont différentiables.}]$

Si $\phi_1'(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est verticale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0)) = (0, \phi_2'(t_0))$.

Si $\phi_2'(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est horizontale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0)) = (\phi_1'(t_0), 0)$.

Remarque 6.2.3

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 (i.e. n=2 dans la discussion précédente) qui possède la représentation paramétrique

$$(x,y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}, \text{ où les fonctions } \phi_1 :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ et } \phi_2 :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ sont différentiables.}]$

Il est possible de démontrer que si $\phi_1'(t_0) \neq 0$ alors on peut représenter Γ près du point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ par une expression de la forme y = f(x) où f est aussi différentiable. En effet, si $\phi_1'(t_0) \neq 0$ alors ϕ_1 est localement inversible et on peut écrire $t = \phi_1^{-1}(x)$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Si on substitue cette expression dans $y = \phi_2(t)$ on trouve $y = f(x) \equiv \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Cette situation est représenté à la figure 6.3.

À la figure 6.3, il est impossible de définir une fonction f pour x près de $\phi_1(t_1)$ de telle sorte que y = f(x) représenterait la courbe Γ près du point $(\phi_1(t_1), \phi_2(t_1))$.

Exemple 6.2.4

Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe Γ au point $(0, -\pi)$ si Γ possède la représentation paramétrique

$$(x,y) = (t\sin(t), t\cos(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

Il faut trouver t tel que $t\sin(t) = 0$ et $t\cos(t) = -\pi$. De la première équation, on trouve $t = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Parmi ces valeurs, seul $t = \pi$ satisfait la deuxième équation. On a donc que $(0, \pi)$ est donné par $t = \pi$ dans la représentation paramétrique.

Posons $\phi_1(t) = t \sin(t)$ et $\phi_2(t) = t \cos(t)$, la représentation paramétrique de la droite tangente à Γ au point $(\phi_1(\pi), \phi_2(\pi)) = (0, -\pi)$ est

$$(x,y) = (\phi_1(\pi) + \alpha \phi_1'(\pi), \phi_2(\pi) + \alpha \phi_2'(\pi))$$

$$= \left(\alpha \left(\sin(t) + t \cos(t)\right)\Big|_{t=\pi}, -\pi + \alpha \left(\cos(t) - t \sin(t)\right)\Big|_{t=\pi}\right) = (-\alpha \pi, -\pi - \alpha)$$

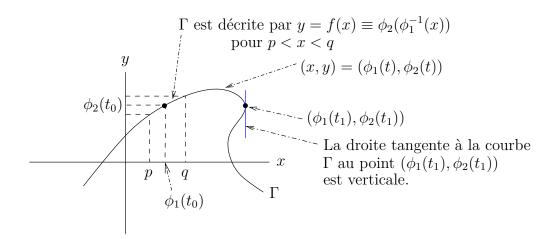


FIGURE 6.3 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour x près de $\phi_1(t_0)$, on peut représenter la courbe Γ par y = f(x).

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on élimine α des deux équations $x = -\alpha \pi$ et $y = -\pi - \alpha$, on trouve l'équation de la droite tangente

$$y = \frac{1}{\pi} x - \pi ,$$

Exemple 6.2.5

Tracer la courbe qui possède la représentation paramétrique

$$x = t^3 - 3t^2$$
 , $y = t^3 - 3t$,

Commençons par trouver les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontal si $y' = 3t^2 - 3 = 0$. Donc, $t = \pm 1$. Pour t = 1 on obtient le point (-2, -2) et pour t = -1 on obtient le point (-4, 2).

La tangente est verticale si $x' = 3t^2 - 6t = 0$. Donc, t = 0 ou t = 2. Pour t = 0 on obtient le point (0,0) et pour t = 2 on obtient le point (-4,2).

On a que la courbe passe deux fois par le point (-4, 2). De plus, x'(t) et y'(t) ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles $]-\infty, -1[,]-1, 0[,]0, 1[,]1, 2[$ et $]2, \infty[$.

On peut déterminer la pente de la tangente à la courbe au point (x(t), y(t)) à l'aide du rapport y'(t)/x'(t) si $x'(t) \neq 0$. Mais cela ne donne pas la courbure de la courbe. Pour déterminer la courbure, il faut utiliser la représentation locale y = f(x) de la courbe. Alors f''(x) va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Grâce au théorème de la dérivée de fonctions composées, on a que

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 - 6t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment (où $x'(t) \neq 0$). De plus,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(t)) \right) / \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3t^2 - 6t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t} \right) = \frac{-2(t^2 - t + 1)}{3(t^2 - 2t)(t^2 - 2t)^2}$$

pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents intervalles.

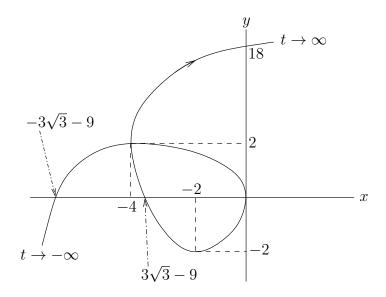
t	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$	description
$]-\infty,-1[$	+	_	croissante et concave
]-1,0[_	_	décroissante et concave
]0,1[+	+	croissante et convexe
]1,2[_	+	décroissante et convexe
$\overline{]2,\infty[}$	+	_	croissante et concave

Notons que la dérivée $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x(t))$ n'est jamais nulle et est définie pour tout t sauf 0, 1 et 2.

Donc, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans les intervalles considérés ci-dessus.

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y (quand cela est possible). La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = t^3 - 3t^2 = 0$) lorsque t = 0 et 3. On obtient les deux points (0,0) et (0,18). La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = t^3 - 3t = 0$) lorsque t = 0 et $\pm \sqrt{3}$. On obtient les trois points (0,0) et $(-3\sqrt{3} - 9,0)$ et $(3\sqrt{3} - 9,0)$.

Le dessin de la courbe est donné dans la figure suivante.



Exemple $6.2.6 \bigcirc$

Tracer la courbe qui possède la représentation paramétrique

$$x = \sin(2t)$$
 , $y = \sin(t)$,

å

Puisque cette représentation paramétrique est périodique de période 2π , on peut supposer que $0 \le t \le 2\pi$.

Commençons par trouver les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontal si $y' = \cos(t) = 0$; c'est-à-dire, si $t = \pi/2$ ou $3\pi/2$. On obtient les points suivants.

$$\begin{array}{c|c} t & (x,y) \\ \hline \pi/2 & (0,1) \\ 3\pi/2 & (0,-1) \end{array}$$

La tangente est verticale si $x'=2\cos(2t)=0$; c'est-à-dire, si $t=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$. On obtient les points suivants.

$$\begin{array}{c|c} t & (x,y) \\ \hline \pi/4 & (1,\sqrt{2}/2) \\ 3\pi/4 & (-1,\sqrt{2}/2) \\ 5\pi/4 & (1,-\sqrt{2}/2) \\ 7\pi/4 & (-1,-\sqrt{2}/2) \\ \end{array}$$

On a que la courbe passe trois fois par le point (0,0), lorsque $t=0, \pi$ et 2π . De plus, x'(t) et y'(t) ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles de la forme $]n\pi/4, (n+1)\pi/4[$.

Pour déterminer la courbure, il faut utiliser la représentation locale y = f(x) de la courbe. Alors f''(x) va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Grâce au théorème de la dérivée de fonctions composées, on a que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} / \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos(t)}{2\cos(2t)}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment. De plus,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(t)) \right) / \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\cos(2t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\cos(t)}{2\cos(2t)} \right)$$
$$= \frac{(2\cos^2(t) + 1)\sin(t)}{4\cos^3(2t)}$$

pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Pour simplifier le numérateur, les identités trigonométriques suivantes ont été utilisées : $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$. Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents

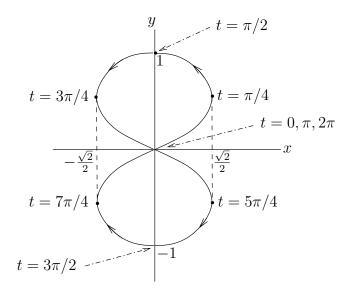
intervalles.

t	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$	description
$0, \pi/4[$	+	+	croissante et convexe
$\pi/4, \pi/2[$			décroissante et concave
$\pi/2, 3\pi/4$ [+	_	croissante et concave
$]3\pi/4,\pi[$	_	+	décroissante et convexe
$\phantom{aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$	_	_	décroissante et concave
$]5\pi/4, 3\pi/2[$	+	+	croissante et convexe
$3\pi/2, 7\pi/4$ [_	+	décroissante et convexe
$7\pi/4, 2\pi[$	+	_	croissante et concave

Notons que $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = 0$ n'est jamais nul et est définie pour tout t autre que $(2n+1)\pi/4$. Donc, $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans les intervalles considérés ci-dessus.

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y (quand cela est possible). La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = \sin(2t) = 0$) lorsque t = 0, pi/2, π et $3\pi/2$. On obtient seulement trois points, (0,0), (0,1) et (0,-1). La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = \sin(t) = 0$) lorsque t = 0, π et 2π . Dans les trois cas, on obtient l'origine.

Le dessin de la courbe est donné dans la figure suivante.



6.3 Longueur d'une courbe 🖍

Soit $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique d'une courbe Γ dans le plan. On peut estimer la longueur de la courbe Γ en approchant cette courbe par une courbe formée

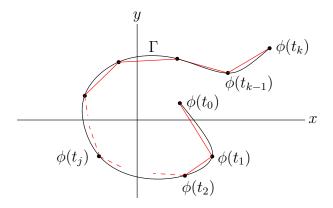


FIGURE 6.4 – Une courbe dans le plan que l'on approche avec des segments de droites.

de petits segments de droite comme on peut voir à la figure 6.4. La somme de la longueur de chacun des petits segments va donner une approximation de la longueur de la courbe qui ira en s'améliorant si on prend des segments de plus en plus petits.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta t = (b-a)/k$ et $t_j = a+j \Delta t$ pour $j=0,1,2,\ldots,k$. On a que $t_0 = a$ et $t_k = b$. L'intervalle [a,b] est partagé en sous-intervalles de la forme $[t_j,t_{j+1}]$ pour $j=0,1,2,\ldots,k-1$. La longueur du segment de droite qui joint les points

$$\phi(t_j) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_j) \\ \phi_2(t_j) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(t_{j+1}) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_{j+1}) \\ \phi_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}$$

est

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}$$

grâce au théorème de Pythagore. Ainsi, la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour $j=0,\,1,\,\ldots,\,k-1$ est

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2},$$
(6.3.1)

Si on utilise le théorème de la moyenne, on peut trouver α_j et β_j entre x_j et x_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi_1'(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_1'(\alpha_j)\Delta t$$

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi_2'(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_2'(\beta_j)\Delta t.$$

Ainsi, La longueur du segment de droite qui joint les points $\phi(t_j)$ et $\phi(t_{j+1})$ est

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} = \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j)\Delta t)^2 + (\phi_2'(\beta_j)\Delta t)^2}$$

$$= \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \,\Delta t \ .$$

Si on substitue cette expression dans (6.3.1) on obtient la formule suivante pour la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour j = 0, 1, ..., k - 1.

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \,\Delta t \ . \tag{6.3.2}$$

Si α_j était égale à β_j , on aurait une somme de Riemann mais α_j n'est généralement pas égal à β_j . De façon non-rigoureuse, on va quand même procéder comme si on avait une somme de Riemann car α_j et β_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \to \infty$. Ainsi, si $k \to \infty$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.3.1

La longueur L d'une courbe Γ qui possède la représentation paramétrique $\phi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{(\phi'_{1}(t))^{2} + (\phi'_{2}(t))^{2}} dt.$$
 (6.3.3)

Remarque 6.3.2 •

Si on utilisait la définition rigoureuse de l'intégrale de Riemann donnée à la section 1.3.5, on pourrait démontrer rigoureusement que la formule (6.3.3) est vrai.

On peut démontrer à l'aide de la règle de substitution pour l'intégration que la formule (6.3.3) est indépendante de la représentation paramétrique de la courbe Γ qui est utilisées.

Remarque 6.3.3

Lorsque l'on calcul la longueur d'une courbe décrite par une représentation paramétrique, il faut vérifier que celle-ci ne parcoure pas une section de la courbe plus d'une fois. Par exemple, les deux représentations paramétriques suivantes tracent le cercle unité.

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$
 , $0 \le t \le 2\pi$,

et

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$
 , $0 \le t \le 2\pi$.

Cependant,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2} \, \mathrm{d}t = 2\pi$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\psi_1'(t))^2 + (\psi_2'(t))^2} \, \mathrm{d}t = 4\pi \ .$$

La représentation paramétrique ψ parcoure deux fois le cercle unité. Ce qui fait que l'intégrale donne deux fois la circonférence du cercle unité.

Exemple 6.3.4

Calculer la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x=t^3$ et $y=t^2$ pour $0 \le t \le 4$.

Cette longueur est

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = \int_0^4 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} \, dt = \int_0^4 t \sqrt{9t^2 + 4} \, dt$$

Si on pose $u = 9t^2 + 4$, on a du = 18t dt. De plus, u = 4 lorsque t = 0 et u = 148 lorsque t = 4. Ainsi,

$$L = \frac{1}{18} \int_{4}^{148} u^{1/2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{27} u^{3/2} \bigg|_{4}^{148} = \frac{8}{27} \left(37^{3/2} - 1 \right) .$$

Dans le cas particulier où la courbe Γ peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur une intervalle [a,b], on peut utiliser la représentation $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ définie par $\phi_1(x)=x$ et $\phi_2(x)=f(x)$ pour obtenir le résultat suivant directement de (6.3.3).

Proposition 6.3.5

La longueur L d'une courbe Γ qui peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur un intervalle [a,b] est

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(t))^{2}} \, dx . \tag{6.3.4}$$

Exemple 6.3.6

Trouver la longueur de la courbe donnée par le graphe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ pour $\pi/6 \le x \le \pi/3$. Puisque $f'(x) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$, on obtient la longueur

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + \cot^2(x)} \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\csc^2 x} \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x \, dx$$
$$= -\ln(\csc(x) + \cot(x)) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \ln(2 + \sqrt{3}).$$

 $\operatorname{car} \operatorname{csc}(x) = 1/\operatorname{cos}(x) > 0 \text{ pour } \pi/6 \le x \le \pi/3.$

Exemple 6.3.7

Calculer la longueur de la courbe définie par $y = (x - 1)^2$ entre les points (1.0) et (2, 1).

La courbe dont l'on veut calculer la longueur est la partie de la parabole $y = (x-1)^2$ pour $1 \le x \le 2$. Si on pose $f(x) = (x-1)^2$, on a f'(x) = 2(x-1). La longueur de la courbe est

$$L = \int_{1}^{2} \sqrt{1 + (f'(x))^{2}} dx = \int_{1}^{2} \sqrt{1 + 4(x - 1)^{2}} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} (x - 1)\sqrt{1 + 4(x - 1)^{2}} + \frac{1}{4} \ln \left| 2(x - 1) + \sqrt{1 + 4(x - 1)^{2}} \right| \right) \Big|_{x=1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left| 2 + \sqrt{5} \right|.$$

Le calcul de l'intégrale précédente demande plusieurs substitutions et une intégration par parties. Nous donnons les détails dans le paragraphe qui suit.

Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1+4(x-1)^2} \, \mathrm{d}x \; ,$$

on pose $x = 1 + \frac{1}{2} \tan(\theta)$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. On a que

$$\sqrt{1+4(x-1)^2} = \sqrt{1+\tan^2(\theta)} = \sec(\theta)$$

 $\operatorname{car} \sec(\theta) > 0 \text{ pour } -\pi/2 < \theta < \pi/2. \text{ De plus, } dx = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta. \text{ Ainsi}$

$$\int \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} \, dx = \int \sec(\theta) \left(\frac{1}{2} \sec^2(\theta)\right) \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) \, d\theta.$$

À l'exemple 1.2.22, on a montré que

$$\int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C.$$

Ainsi

$$\int \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4} \tan(\theta) \sec(\theta) + \frac{1}{4} \ln\left|\sec(\theta) + \tan(\theta)\right| + C.$$

Puisque $\tan(\theta) = 2(x-1)$ et $\sec(\theta) = \sqrt{1-4(x-1)^2}$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, on a

$$\int \sqrt{1+4(x-1)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (x-1)\sqrt{1-4(x-1)^2} + \frac{1}{4} \ln \left| 2(x-1) + \sqrt{1-4(x-1)^2} \right| + C.$$

Exemple 6.3.8

Calculer la longueur de la courbe définie par $y = \ln(1 - x^2)$ pour $0 \le x \le 1/2$.

Si on pose $f(x) = \ln(1-x^2)$, on a $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$. La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}} \, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}} \, dx$$
$$= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \, dx = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{2}{1 - x^2}\right) \, dx$$

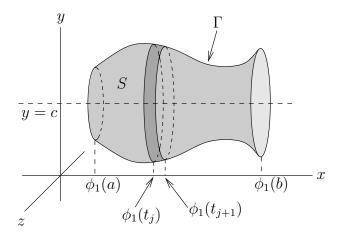


FIGURE 6.5 – Une surface produite par la rotation de la courbe Γ autour d'un axe horizontal y=c.

$$= \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = (-x - \ln|x-1| + \ln(x+1)) \Big|_0^{1/2}$$
$$= -\frac{1}{2} + \ln(3) .$$

Le calcul de l'intégrale précédente a demandé une intégration par fractions partielles.

6.4 Aire d'une surface

Soit Γ une courbe dans le plan possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} , \quad a \le t \le b .$$

La rotation autour d'un axe de cette courbe Γ produit une surface S dans l'espace comme celle que l'on retrouve à la figure 6.5. Il est possible de calculer l'aire de cette surface.

Avant de développer la formule pour calculer l'aire de la surface S que l'on retrouve à la figure 6.5, nous devons rappeler que l'aire d'une section horizontal d'un cône dont l'axe est vertical, comme celle que l'on retrouve à la figure 6.6, est $2\pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) L$.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta t = (b-a)/k$ et $t_j = a+j\,\Delta t$ pour $j=0,\,1,\,2,\,\ldots,$ k. On a que $t_0=a$ et $t_k=b$. L'intervalle [a,b] est partagé en sous-intervalles de la forme $[t_j,t_{j+1}]$ pour $j=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,k-1$.

La section de la surface S entre t_j et t_{j+1} , voir figure 6.7, représente approximativement une section d'un cône comme celui donné à la figure 6.6. L'aire de cette section est donc approximativement

$$2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2}\right) \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}.$$

6.4. Aire d'une surface 🗲 325

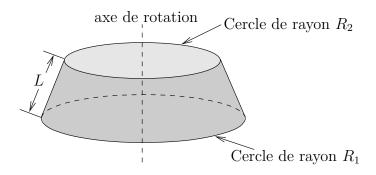


FIGURE 6.6 – Une section horizontal d'un cône dont l'axe est vertical.

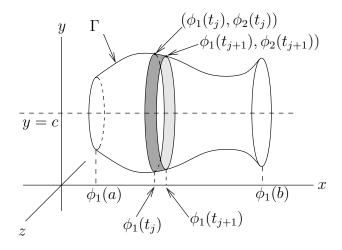


FIGURE 6.7 – La section de la surface S de la figure 6.5 pour $t_j \le x \le t_{j+1}$ est approximativement une section d'un cône comme celle que l'on trouve à la figure 6.6.

L'aire total A de la surface S est donc donné approximativement par

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) \times \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}.$$

D'après le théorème de la moyenne, ils existent α_j et β_j entre t_j et t_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi'_1(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi'_1(\alpha_j) \Delta t$$

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi_2'(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_2'(\beta_j) \,\Delta t \ .$$

Donc,

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} = \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j) \Delta t)^2 + (\phi_2'(\beta_j) \Delta t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\phi_1'(\alpha_j)\right)^2 + \left(\phi_2'(\beta_j)\right)^2} \,\Delta t$$

pour $j=0,\,1,\,2,\,\ldots$ De plus, le théorème des valeurs intermédiaires donne γ_j entre t_j et t_{j+1} tel que

$$\left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2}\right) = |\phi_2(\gamma_j) - c|.$$

L'aire A de la surface S est donc approximativement

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi |\phi_2(\gamma_j) - c| \sqrt{(\phi'_1(\alpha_j))^2 + (\phi'_2(\beta_j))^2} \Delta t.$$

Si α_j , β_j et γ_j étaient égaux, on aurait une somme de Riemann mais α_j , β_j et γ_j ne sont généralement pas égaux. De façon non-rigoureuse, on va quand même procéder comme si on avait une somme de Riemann car α_j , β_j et γ_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \to \infty$. Ainsi, si $k \to \infty$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.4.1

Soit S une surface produite par la rotation autour d'un axe y=c d'une courbe Γ possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} , \quad a \le t \le b .$$

L'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} |\phi_{2}(t) - c| \sqrt{(\phi'_{1}(t))^{2} + (\phi'_{2}(t))^{2}} dt.$$
 (6.4.1)

Si S est une surface produite par la rotation autour d'un axe x=c de la courbe Γ , alors l'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} |\phi_1(t) - c| \sqrt{(\phi'_1(t))^2 + (\phi'_2(t))^2} dt.$$

Remarque 6.4.2

Comme pour le calcul de la longueur d'une courbe, lorsque que l'on calcul l'aire d'une surface produite par la rotation d'une courbe autour d'un axe, il faut vérifier que la représentation paramétrique de la courbe ne parcoure pas une section de la courbe plus d'une fois.

Si la courbe Γ est donnée par le graphe d'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, en prenant la représentation paramétrique

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} , \quad a \le x \le b ,$$

on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.4.3

Soit Γ une courbe représentée par le graphe d'une fonction différentiable f sur l'intervalle [a,b]. L'aire A de la surface S produite par la rotation de Γ autour de l'axe y=c est

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^{2}} dx.$$
 (6.4.2)

Exemple 6.4.4

Trouver l'aire A de la surface S obtenue de la rotation autour de l'axe des x de la courbe Γ ayant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le 1 .$$

Si $x=t^3$ et $y=t^2$, et on résout pour y en fonction de x, on trouve que la courbe Γ est le graphe de la fonction $y=f(x)=x^{2/3}$ avec $0 \le x \le 1$. On pourrait donc utiliser (6.4.2) pour calculer l'aire de la surface S. Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. Nous calculerons l'aire de la surface S à l'aide de (6.4.1).

Puisque $\phi_1'(t) = 3t^2$ et $\phi_2'(t) = 2t$, on a

$$A = 2\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^2 + 4} dt.$$

Si on utilise la substitution $u = 9t^2 + 4$, alors u = 4 pour t = 0, u = 13 pour t = 1 et du = 18t dt. Ainsi,

$$\begin{split} A &= 2\pi \, \int_0^1 t^3 \, \sqrt{9t^2 + 4} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{9} \, \int_0^1 t^2 \, \left(9t^2 + 4\right)^{1/2} \, 18t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{9} \, \int_4^{13} \frac{u - 4}{9} \, u^{1/2} \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{81} \, \int_4^{13} \left(u^{3/2} - 4u^{1/2}\right) \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{81} \, \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{8}{3} u^{3/2}\right) \bigg|_{u=4}^{13} = \frac{16\pi \left(39\sqrt{13} + 8\right)}{1215} \approx 6.14837865 \; . \end{split}$$

6.5 Coordonnées polaires •

Chaque point P du plan est uniquement déterminé par ses coordonnées cartésiennes (x, y) où x est le déplacement horizontal et y est le déplacement vertical pour se rentre de l'origine O au point P.

Le système de coordonnées polaires est une autre façon d'identifier les points du plan. Ce système de coordonnées est très utile lorsque l'on travaille avec un objet qui exécute un mouvement circulaire.

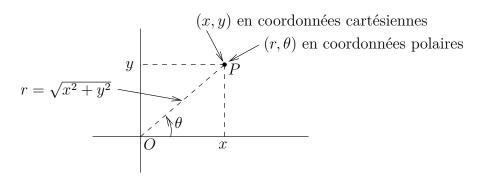


FIGURE 6.8 – Relation entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes d'un point P.

Dans le système de coordonnées polaires, le point P est représenté par le couple (r, θ) où r est la distance entre le point P et l'origine O et θ est l'angle entre l'axe des x et la droite \overline{OP} mesuré dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. La définition des coordonnées polaires d'un point P est illustrée à la figure 6.8.

Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point du plan ne sont pas uniques. Si (r, θ) représente un point P, alors $(r, \theta + 2n\pi)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ représentent aussi le point P. L'origine est encore plus problématique car $(0, \theta)$ représente l'origine quel que soit θ .

Si (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point P, alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de ce point sont données par

$$x = r\cos(\theta)$$
 , $y = r\sin(\theta)$.

Si $(x,y) \neq (0,0)$ sont les coordonnées cartésiennes d'un point P, alors les coordonnées polaires (r,θ) de ce point (modulo un multiple de 2π pour θ) sont donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} .$$

Puisque $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \neq 0$ et y, on a que θ donnée par la formule précédente satisfait $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Remarque 6.5.1

Il est permit d'avoir des coordonnées polaires de la forme (r, θ) où r < 0. Dans ce cas, il est sous-entendu que $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$. C'est-à-dire que (r, θ) avec r < 0 est la réflexion par rapport à l'origine du point $(|r|, \theta)$.

Exemple 6.5.2

Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point P dont les coordonnées polaires sont $(3, -\pi/3)$?

On a $x=3\cos(-\pi/3)=3/2$ et $y=3\sin(-\pi/3)=-3\sqrt{3}/2$. Les coordonnées cartésiennes de P sont donc $(3/2,-3\sqrt{3}/2)$.

Exemple 6.5.3

Quelles sont les coordonnées polaires du point P dont les coordonnées cartésiennes sont $(-1, -\sqrt{3})$?

On a
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$
. Puisque $x < 0$, on a

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$
.

Les coordonnées polaires de P sont donc $(2, 4\pi/3)$.

6.5.1 Équations en coordonnées polaires

Commençons notre apprentissage des courbes décrites par des équations en coordonnées polaires par l'étude de quelques équations élémentaires; c'est-à-dire, r constant ou θ constant.

Exemple 6.5.4

Quelle est la courbe décrite par l'équation r=3 et celle décrite par r=-3?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur l'angle θ dans l'équation r=3, l'angle θ est libre. En d'autres mots, l'équation r=3 est vrai quelle que soit la valeur de θ . La courbe représentée par cette équation est le cercle de rayon 3 centré à l'origine; c'est l'ensemble de tous les points dont les coordonnées cartésiennes (x,y) satisfont $\sqrt{x^2+y^2}=3$. Lorsque θ augmente, on parcoure le cercle de rayon 3 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

L'équation r = -3 décrit aussi le cercle de rayon 3 centré à l'origine car c'est la courbe qui est la réflexion par rapport à l'origine du cercle r = 3.

Exemple 6.5.5

Quelle est la courbe décrite par l'équation $\theta = \pi/4$?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur le rayon r dans l'équation $\theta=\pi/4$, le rayon r est libre. En d'autres mots, l'équation $\theta=\pi/4$ est vrai quelle que soit la valeur de $r\in\mathbb{R}$. La courbe représentée par cette équation est la droite de pente $\pi/4$ qui passe par l'origine; c'est-à-dire, la droite y=x au complet car on accepte les valeurs négatives de r. Lorsque r augmente, x et y vont de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple 6.5.6

Quelle est la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2\sin(\theta)$? Trouver l'équation cartésienne qui décrit cette courbe.

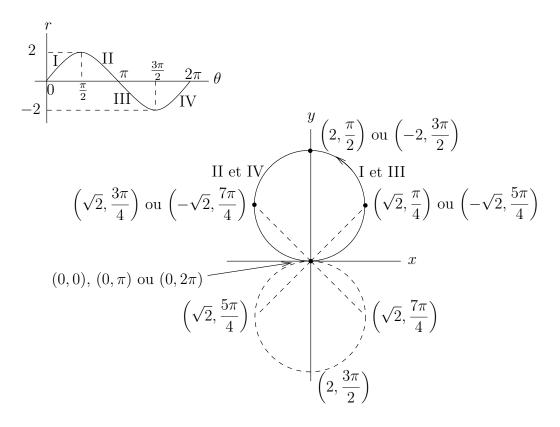
Si on multiplie l'équation $r = 2\sin(\theta)$ par r on obtient $r^2 = 2r\sin(\theta)$. Or $r^2 = x^2 + y^2$ et $y = r\sin(\theta)$. On a donc $x^2 + y^2 = 2y$. On obtient l'équation en coordonnées cartésiennes

$$1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + (y - 1)^2.$$

 Γ est le cercle de rayon 1 centré au point (0,1).

On a tracé la courbe décrite par $r=2\sin(\theta)$ dans la figure ci-dessous. En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

On a indiqué ces points sur la courbe Γ dans la figure suivante.

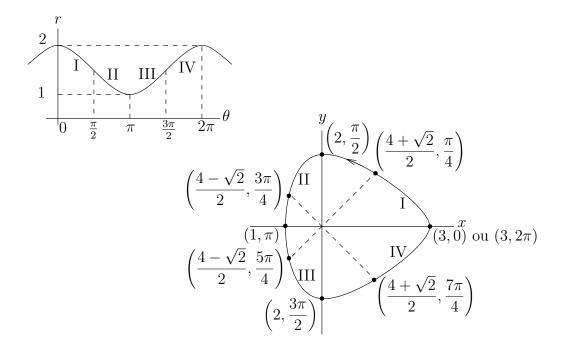


On parcoure la courbe Γ deux fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Exemple 6.5.7

Tracer la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2 + \cos(\theta)$.

On a tracé la courbe décrite par $r = 2 + \cos(\theta)$ dans la figure suivante.



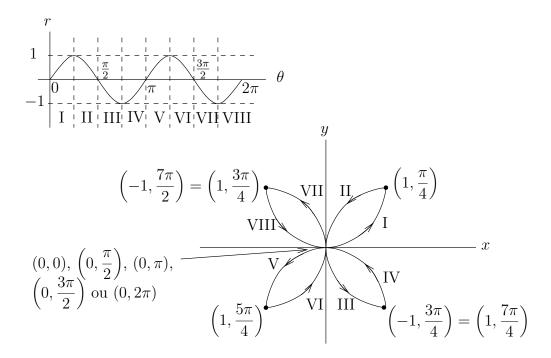
En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

On retrouve la courbe Γ dans la figure ci-dessus. On parcoure la courbe Γ une fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Exemple 6.5.8

Tracer la courbe Γ décrite par l'équation $r = \sin(2\theta)$.

On a tracé le graphe de r en fonction de θ dans la figure suivante.



En particulier, on atteint les points suivants sur la courbe Γ lorsque θ augmente.

On retrouve la courbe Γ dans la figure ci-dessus. On parcoure la courbe Γ en suivant l'ordre des intervalles I, II, III, ..., VIII.

Remarque 6.5.9

Les courbes que nous avons obtenues aux exemples 6.5.6, 6.5.7 et 6.5.8 ont certaines symétries. La courbe de l'exemple 6.5.6 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y. La courbe de l'exemple 6.5.7 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x. La courbe de l'exemple 6.5.8 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x, à l'axe des y, à la droite x = y, à la droite y = -x. et à l'origine. Elle est de plus inchangée par une rotation autour de l'origine de $\pi/2$, π ou $3\pi/2$. En fait, on dit que la courbe de l'exemple 6.5.8 à la symétrie d'un carré car les opérations qui transforment un carré en lui même vont aussi transformer cette courbe en elle même.

Résumons comment déterminer les principales symétries d'une courbe donnée en coordonnées polaires. Soit Γ une courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $f(r, \theta) = 0$.

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x si $f(r,\theta) = f(r,-\theta) = 0$ (ou $f(r,\theta) = f(-r,\pi-\theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y si $f(r,\theta) = f(r,\pi-\theta) = 0$ (ou $f(r,\theta) = f(-r,-\theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'origine (cela correspond aussi à une rotation par π) si $f(r,\theta) = f(-r,\theta) = 0$ (ou $f(r,\theta) = f(r,\pi+\theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = \pi/4$ (i.e. y = x) si $f(r, \theta) = f\left(r, \frac{\pi}{2} \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, -\frac{\pi}{2} \theta\right)$).

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = -\pi/4$ (i.e. y = -x) si $f(r, \theta) = f\left(r, -\frac{\pi}{2} \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, \frac{\pi}{2} \theta\right)$).
- La courbe Γ est inchangée par une rotation centrée à l'origine de $\pi/2$ dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre si $f(r,\theta) = f\left(r,\frac{\pi}{2}+\theta\right) = 0$ (ou $f(r,\theta) = f\left(-r,-\frac{\pi}{2}+\theta\right)$).

Les conditions entre parenthèses dans la liste précédente sont données car ils sont parfois plus simples à vérifier que les conditions standards.

6.5.2 Longueur d'une courbe donnée par une équation en coordonnées polaires

On suppose qu'un courbe Γ est décrite par l'équation en coordonnées polaires $f(r,\theta) = 0$. On suppose de plus que l'on peut résoudre cette équation pour r en fonction de θ . Dans ce cas, une représentation paramétrique pour la courbe Γ est donnée par

$$x = \phi_1(\theta) = r(\theta) \cos(\theta)$$
 , $y = \phi_2(\theta) = r(\theta) \sin(\theta)$ pour $a \le \theta \le b$.

Puisque

$$\phi_1'(\theta) = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta)$$
 et $\phi_2'(\theta) = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta)$,

on a

$$(\phi'_{1}(\theta))^{2} + (\phi'_{2}(\theta))^{2} = (r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta))^{2} + (r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta))^{2}$$

$$= (r'(\theta))^{2} \cos^{2}(\theta) - 2r'(\theta) r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^{2} \sin^{2}(\theta)$$

$$+ (r'(\theta))^{2} \sin^{2}(\theta) + 2r'(\theta) r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^{2} \cos^{2}(\theta)$$

$$= (r'(\theta))^{2} + (r(\theta))^{2} ,$$

Ainsi, la formule (6.3.3) pour calculer la longueur d'une courbe devient

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'_1(\theta))^2 + (\phi'_2(\theta))^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta.$$

On a donc le résultat suivant.

Proposition 6.5.10

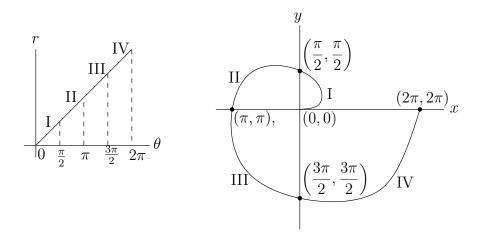
Soit Γ une courbe donnée par une équation en coordonnées polaire $r=r(\theta)$ pour $a\leq\theta\leq b$. La longueur L de cette courbe est donnée pas

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{(r'(\theta))^{2} + (r(\theta))^{2}} d\theta.$$
 (6.5.1)

Exemple 6.5.11

Quelle est la longueur de la courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $r=\theta$ pour $0 \le \theta \le 2\pi$. Tracer cette courbe.

La représentation graphique de la courbe se trouve dans la figure suivante.



C'est une spirale. Puisque $r(\theta) = \theta$ et $r'(\theta) = 1$, la longueur L de cette courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} \, \mathrm{d}\theta \ .$$

On a montré à l'aide d'une substitution trigonométrique à l'exemple 1.2.22 que

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right| + C.$$

Ainsi,

$$L = \left(\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right|\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right|.$$

6.5.3 Aire d'une région bornée par une courbe définie à l'aide d'une équation en coordonnées polaires

Supposons que l'on veuille calculer l'aire de la région R de la figure 6.9. La région R est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \le \theta \le \beta$.

Soit k une entier positif. Posons $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/k$ et $\theta_j = \alpha + j \Delta \theta$ pour j = 0, 1, 2, ..., k. On a que $\theta_0 = \alpha$ et $\theta_k = \beta$. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ est partagé en sous-intervalles de la forme $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ pour j = 0, 1, 2, ..., k-1.

Pour $j=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,k-1$, on choisit θ_j^* entre θ_j et θ_{j+1} . L'aire de la région bornée par les droites $\theta=\theta_j$ et $\theta=\theta_{j+1}$, et la courbe $r=r(\theta)$ pour $\theta_j\leq\theta\leq\theta_{j+1}$, est approximativement

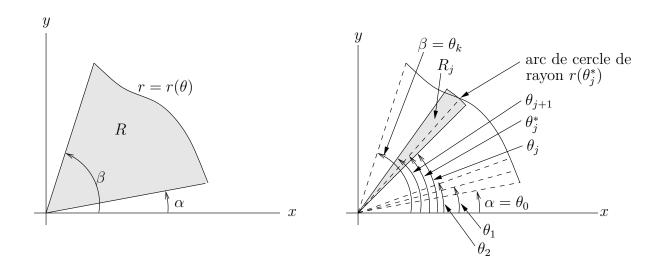


FIGURE 6.9 – La région R du plan est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \le \theta \le \beta$

l'aire A_j de la région R_j bornée par les droites $\theta = \theta_j$ et $\theta = \theta_{j+1}$, et l'arc de cercle $r = r(\theta_j^*)$ pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$. La région R_j est une pointe de tarte dont l'aire est

$$A_j = \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta \theta_j^*$$

car R_j représente $\Delta \theta_j^*/2\pi$ du disque de rayon $r(\theta_j^*)$ dont l'aire est $\pi r^2(\theta_j^*)$.

Ainsi, l'aire A de la région R est approximativement la somme de l'aire de chacune des régions R_i .

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} A_j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta \theta_j^* . \tag{6.5.2}$$

La somme précédente représente une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

Si k tend vers plus l'infini en (6.5.2), on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.5.12

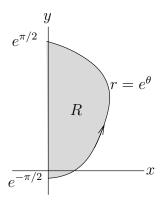
Soit R une région bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \le \theta \le \beta$. L'aire A de R est

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

Exemple 6.5.13

Tracez le dessin de la région R bornée par la courbe $r=e^{\theta}$ pour $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ et l'axe des y. Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région R dans la figure suivante.



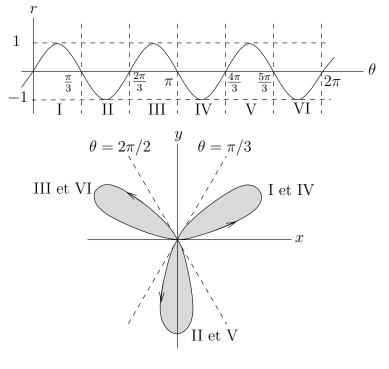
L'aire A de R est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{\theta} \right)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4} e^{2\theta} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right) = \frac{1}{2} \sinh(\pi) .$$

Exemple 6.5.14

Tracez le dessin de la région R bornée par la courbe $r=\sin(3\theta)$. Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région ${\cal R}$ dans la figure ci-dessous.



On parcoure la contour de R deux fois lorsque θ augment de 0 à 2π . De plus, on remarque que la courbe $r = \sin(3\theta)$ est invariante pour la rotation de $2\pi/3$ car

$$r = \sin(3\theta) \Rightarrow \sin\left(3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3\theta + 2\pi) = \sin(3\theta) = r$$
.

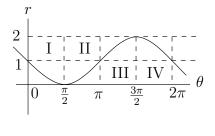
Il suffit donc de calculer l'aire de la partie de la région R dans le premier quadrant et de multiplier le résultat par 3 pour trouver l'aire A de R.

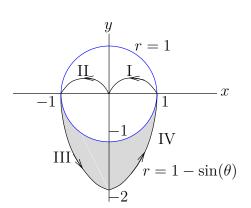
$$A = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2(3\theta) d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(6\theta)) d\theta$$
$$= \frac{3}{4} \left(\theta - \frac{1}{6} \sin(6\theta)\right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 6.5.15

Tracez le dessin de la région R qui est à l'intérieure de la courbe $r = 1 - \sin(\theta)$ et à l'extérieure du cercle r = 1. Trouvez l'aire de cette région.

On retrouve le dessin de la région R dans la figure suivante.





Pour obtenir l'aire A de la région R, il suffit de soustraire l'aire de la partie du disque de rayon 1 sous l'axe des x de l'aire de la région bornée par la courbe $r=1-\sin(\theta)$ pour $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ et l'axe des x. C'est-à-dire,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - \sin(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - 2\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - 2\sin(\theta) + \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta))) d\theta - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\sin(\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta)) d\theta - \frac{\pi}{2}$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \theta + 2 \cos(\theta) - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} + 4 \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2.$$

*

6.6 Exercices

Question 6.1

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x=t^2$, $y=1+t^3$ qui va du point (0,1) au point (4,9)?

Question 6.2 🔑

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x=e^t\sin t,$ $y=e^t\cos t$ pour $0\leq t\leq \pi/2$?

Question 6.3

Quelle est la longueur de la courbe $y = 1 + 2x^{3/2}$ pour $1 \le x \le 3$?

Question 6.4

Quelle est la longueur de la courbe $y = \ln |\cos(x)|$ pour $0 \le x \le \pi/4$?

Question 6.5

On considère la région R bornée par l'axe des x, la courbe $y=x^{1/3}$ et la droite x=1. Calculez le périmètre de cette région avec une précision de 0.001.



Fonctions de plusieurs variables 7

Dans ce chapitre, nous étudierons les fonctions de plusieurs variables.

Définition 7.0.1

Une fonction f de n variables (n > 1) est une opération d'un sous-ensemble D de \mathbb{R}^n à l'ensemble \mathbb{R}^m $(m \geq 1)$ qui, à chaque élément de D, associe un seul élément de \mathbb{R}^m . On écrit $f: D \to \mathbb{R}^m$ pour désigner une fonction f de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m .

Les fonctions $f:D\to\mathbb{R}^m$ où $D\subset\mathbb{R}^n$ sont généralement définies par m fonctions $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $i=1, 2, \ldots, m$. Lorsque l'on écrit $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, on résume la formule suivante

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

Les définitions du domaine et de l'image d'une fonction que nous avons vues précédemment prennent la forme suivante dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.

Définition 7.0.2

Le **domaine** d'une fonction $f: D \to \mathbb{R}^m$ est l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ où la fonction fest définie. On écrit

Dom
$$f = D$$
.

L'image d'une fonction $f: D \to \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des éléments $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ pour lesquels il existe au moins un élément $\mathbf{x} \in D$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. On écrit

Im $f \equiv \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = \mathbf{z} \text{ pour au moins un élément } \mathbf{x} \in D \}$.

Remarque 7.0.3

Pour être consistant avec la notation algébrique, on devrait représenter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par la matrice

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de dimension $n \times 1$. Par contre, la tradition veut que l'on utilise la notation géométrique

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour les fonctions à valeurs réelles sur \mathbb{R}^n . Le lecteur devrait toujours garder en tête la notation algébrique car c'est celle-ci qui doit être utilisée pour l'étude des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où m > 1.

Pour une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on a

$$Dom f = \bigcap_{i=1}^{m} Dom f_i.$$

C'est-à-dire que f est définie au point \mathbf{x} si tous les f_i 's sont définis au point \mathbf{x} .

Sans en être conscient, nous avons déjà travaillé avec des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Soit A une matrice de dimension $m\times n$. On peut utiliser cette matrice pour définir une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ de la façon suivante :

$$f(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{x}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, cette fonction associe à un vecteur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n le vecteur $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ dans \mathbb{R}^m .

Les fonctions $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définies par le produit d'une matrice avec un vecteur satisfont la définition suivante :

Définiton 7.0.4

Une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est appelée une fonction linéaire ou application linéaire si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

- 1. $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ pour tout vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n .

Exemple 7.0.5

La matrice

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

peut définir une fonction linéaire $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $f(\mathbf{x}) = R_{\theta}\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Essayons de voir quelle est l'action de cette fonction sur un vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_{\theta}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

le vecteur \mathbf{y} est de même longueur que \mathbf{x} . car

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right)^2 + \left(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) + b^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{x}\|$$

où nous avons évidemment utilisé l'identité trigonométrique $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour tout θ . De plus,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

= $(a^2 + b^2) \cos(\theta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta)$.

C'est exactement la formule (4.2.1) qui détermine le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . L'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} est donc θ .

L'image par f d'un vecteur \mathbf{x} est donc la rotation par θ radians du vecteur \mathbf{x} comme on peut le voir à la figure 7.1. Si $\theta > 0$, on a une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre et si $\theta < 0$ on a une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

Par exemple, si
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$
 et $\theta = \pi/3$, on a
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_{\pi/3}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

 \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs de longueur 2. Le vecteur \mathbf{y} est le résultat d'une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre par $\pi/3$ radians de \mathbf{x} ; le vecteur \mathbf{x} forme un angle de $\pi/6$ avec l'axe des x alors que \mathbf{y} forme un angle de $\pi/2$ avec l'axe des x.

Exemple 7.0.6

Nous avons déjà travaillé avec des fonctions de la forme $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Les représentations paramétriques des courbes dans \mathbb{R}^m sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m . C'est le cas où n=1.

Par exemple, la fonction $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par les fonctions

$$\phi_1(t) = 2\cos(t)$$
 , $\phi_2(t) = 2\sin(t)$, $\phi_3(t) = t$

est une représentation paramétrique d'un ressort de longueur infinie (car ϕ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$) en trois dimensions.

Exemple 7.0.7

Les fonctions

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

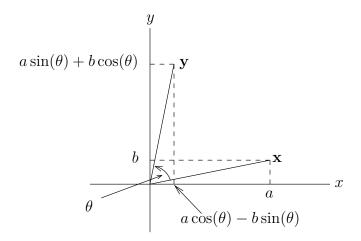


FIGURE 7.1 – Le vecteur \mathbf{y} est obtenu par la rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre et par un angle θ du vecteur \mathbf{x} lorsque $\theta > 0$.

et

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

définissent une fonction $f: D \to \mathbb{R}^2$ où $D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \}$. Le vecteur $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ possède les coordonnées

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

et

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

le domaine $D\subset\mathbb{R}^3$ de la fonction $f:D\to\mathbb{R}^2$ est

$$D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \}$$

car f_2 n'est pas définie pour $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

7.1 Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Dans cette section, nous considérons les fonctions à valeurs réelles; c'est-à-dire, m=1.

Exemple 7.1.1

La température maximale (en degrés centigrades) au point de longitude x et latitude y (en degrés) définit une fonction $T:D\to\mathbb{R}$ qui à chaque point de coordonnées (x,y) associe la température maximale T(x,y) à ce point. L'ensemble D est l'ensemble des coordonnées ; c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 360 \text{ et } -90 \le y \le 90\}$$

où on suppose que y < 0 dans l'hémisphère sud.

Exemple 7.1.2

Une fonction de plusieurs variables peut être définie à l'aide d'un tableau comme c'est le cas dans le tableau suivant qui donne l'indice de température en fonction de la température et du niveau d'humidité.

		Température en C°				
		20	22	24		
%	0	18	20	22		
, ue	10	19	21	23		
Iumidité en	20	19.5	21.5	23.5		
idit	30	20	22	25		
ım						
Нι						

Ce tableau définit une fonction $I: E \to \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x, y) : x = 20, 22, 24 \text{ et } y = 0, 10, 20, 30\}.$$

On a
$$I(0,22) = 20^{\circ}\text{C}$$
, $I(20,22) = 21.5^{\circ}\text{C}$, etc.

Exemple 7.1.3

On peut définir une fonction à l'aide d'une expression algébrique. Par exemple,

$$f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$$

définit une fonction sur l'ensemble des points (x,y) tel que $36-4x^2-9y^2 \ge 0$. Ainsi $f:D\to \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \le 36\} .$$

C'est la région du plan bornée par l'ellipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Pour les fonctions de plusieurs variables, la définition du graphe d'une fonction s'énonce de la façon suivante :

Définition 7.1.4

Soit $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction définit sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. On définie le graphe de la fonction f comme étant le sous-ensemble

graphe de
$$f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

de \mathbb{R}^{n+1} .

Seules les fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ pourront être représentées par un dessin (jusqu'au jour où quelqu'un imaginera une façon de visualiser un objet dans un espace de dimension plus grande que trois). On retrouve à la figure 7.2 le graphe d'une possible fonction $f: D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$.

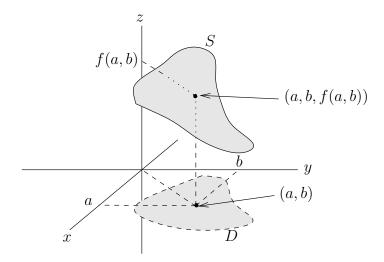


FIGURE 7.2 – Pour obtenir le graphe de la fonction f, on trace dans le système de coordonnées cartésiennes l'ensemble des points (x, y, f(x, y)) pour $(x, y) \in D$.

Définiton 7.1.5

Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$ où m_1 , m_2 et b sont des constantes.

Si b=0, on obtient une fonction linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} puisque f satsifait alors la définition 7.0.4.

On reconnaît l'équation d'un plan dans l'espace. Après les fonctions constantes, les fonctions linéaires sont les fonctions les plus simples à dessiner.

Exemple 7.1.6

Le tableau suivant donne quelques valeurs d'une fonction affine f. Trouver la formule $z = f(x, y) = m_1 x + m_2 y + b$ pour cette fonction.

($y \setminus x$	0	1	2	3
	-1	1.5	3.5	5.5	7.5
	0	1	3	5	7
	1	0.5	2.5	4.5	6.5
	2	0	2	4	6

1. On présente premièrement une approche géométrique pour résoudre ce problème. Comme l'intersection de deux plans est une droite, l'intersection du graphe de f et du plan x=1 est une droite qui contient les points (y,z)=(-1,3.5), (0,3), (1,2.5) et (2,2). C'est donc une droite de pente $\frac{3.5-3}{-1-0}=-0.5$. Or, si x=1 dans $z=f(x,y)=m_1\,x+m_2\,y+b$, on obtient la formule $z=m_2\,y+m_1+b$ pour la droite d'intersection. Donc, $m_2=-0.5$.

L'intersection du graphe de f et du plan y=2 est une droite qui contient les points (x,z)=(0,0), (1,2), (2,4) et (3,6). C'est donc une droite de pente $\frac{2-0}{1-0}=2$. Or, si y=2 dans $z=f(x,y)=m_1\,x+m_2\,y+b$, on obtient la formule $z=m_1\,x+2\,m_1+b$ pour la droite d'intersection. Donc, $m_1=2$.

On a donc trouvé que z = f(x, y) = 2x - 0.5y + b. Pour déterminer b, prenons le point (1, 1, 2.5) du graphe de f (tout autre point du graphe serait acceptable). On doit avoir 2.5 = f(1, 1) = 2 - 0.5 + b. Ainsi, b = 1.

La formule algébrique pour f est z = f(x, y) = 2x - 0.5y + 1.

2. La deuxième approche pour résoudre le problème est purement algébrique.

On sait qu'un plan est déterminé par trois points non-colinéaires (i.e. qui ne sont pas sur la même droite). On choisit les trois points non-colinéaires (1, -1, 3.5), (1, 2, 2) et (2, 1, 4.5) (tout autre choix de trois points non-colinéaires aurait été aussi bon). Ces trois points doivent satisfaire simultanément les trois équations linéaires suivantes :

$$3.5 = m_1 - m_2 + b$$
, $2 = m_1 + 2m_2 + b$ et $4.5 = 2m_1 + m_2 + b$.

On doit donc résoudre ce système d'équations linéaires pour m_1 , m_2 et b. Sous la forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix} .$$

On a la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 3.5 \\
1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 1 & 4.5
\end{array}\right).$$

 $R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 3.5 \\
0 & 3 & 0 & -1.5 \\
0 & 3 & -1 & -2.5
\end{array}\right).$$

 $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 3.5 \\
0 & 3 & 0 & -1.5 \\
0 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right).$$

 $(1/3)R_2 \to R_2 \text{ et } -R_3 \to R_3 \text{ donnent}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 3.5 \\
0 & 1 & 0 & -0.5 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right).$$

 $R_1 + R_2 - R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -0.5 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right).$$

On trouve donc $m_1 = 2$, $m_2 = -1/2$ et b = 1 comme pour la première méthode.

*

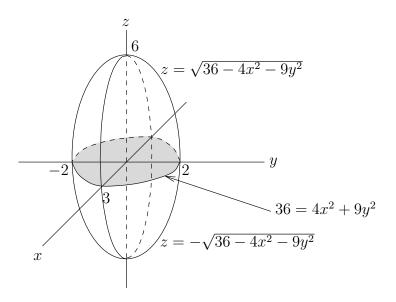
Exemple 7.1.7

À l'exemple 7.1.3, le domaine de f est

Dom
$$f = \{(x, y) : \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \le 1\}$$
.

Montrer que l'image de f est l'intervalle [0, 6].

Si on pose $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$, on obtient l'équation de l'ellipsoïde $z^2 + 4x^2 + 9y^2 = 36$ que l'on a représentée dans la figure ci-dessous.



La partie de l'ellipsoïde au-dessus du plan x,y est le graphe de f. La plus grande valeur de f est 6 lorsque (x,y)=(0,0) et la plus petite valeur de f est 0 lorsque $x^2/3^2+y^2/2^2=1$. La fonction f prend toutes les valeurs entre 0 et 6.

Exemple 7.1.8

Tracer le graphe de la fonction
$$f(x,y) = 5 - \sqrt{36 - 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2}$$
.

Même pour les fonctions de deux variables, il est souvent fort difficile de tracer le graphe d'une fonction. On a donc besoin de méthodes pour représenter l'information fournie par une fonction.

Définiton 7.1.9

Soit $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$. Une **courbe de niveaux** de f est une courbe $C \subset D$ définie par l'équation $f(x_1, x_2) = k$ où k est une constante; c'est-à-dire, $C = \{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = k\}$.

Si on trace plusieurs courbes de niveau d'une fonction f sur une même figure, on peut obtenir de l'information sur les maximums et minimums locaux de cette fonction ainsi que

sur les régions où cette fonction est croissante ou décroissante.

Exemple 7.1.10

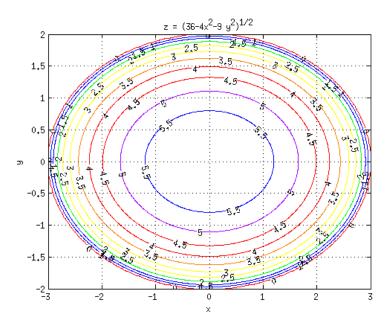
On veut tracer plusieurs courbes de niveau pour la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} \ .$$

Si f(x,y) = k, on obtient

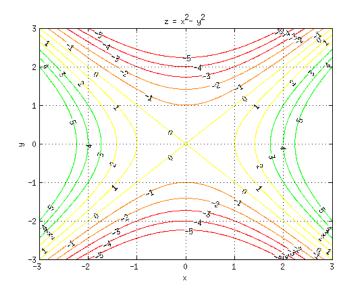
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 - \frac{k^2}{6^2} \ .$$

Les seules courbes de niveau sont pour $|k| \le 6$ car $x^2/3^2 + y^2/2^2 \ge 0$ pour tout x et y. Les courbes de niveau sont des ellipses. On obtient la figure suivante.



Exemple 7.1.11

On veut tracer plusieurs courbes de niveau pour la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$. Les courbes de niveau f(x,y) = k sont définies pour tout k. Les courbes de niveau sont des hyperboles sauf pour k = 0 où l'on obtient les droites $y = \pm x$. On obtient la figure suivante.



Exemple 7.1.12

Trouver le domaine et tracer quelques courbes de niveau pour chacune des fonctions suivantes.

$$\mathbf{a)} \ f(x,y) = \ln(xy - 1)$$

a)
$$f(x,y) = \ln(xy - 1)$$

b) $f(x,y) = \sqrt{(x+y)/(x-y)}$

Définition 7.1.13

Soit $f:D\to\mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ensemble $D\subset\mathbb{R}^2$ et $M\subset\mathbb{R}^3$ un plan défini par $x_2 = m x_1 + b$. Une **section verticale** de f est une courbe $C \subset M$ définie par l'intersection de M avec le graphe de f; c'est-à-dire,

$$C = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : x_2 = m x_1 + b \text{ et } (x_1, x_2) \in D\}$$
.

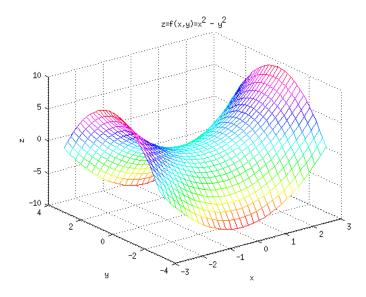
Deux plans verticaux sont plus fréquemment utilisés que les autres pour produire des sections verticales : les plans $x_1 = k_1$ et $x_2 = k_2$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

Exemple 7.1.14

Décrire les sections verticales $x = k_1$ et $y = k_2$ de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Si $x = k_1$, on obtient l'équation $z = f(k_1, y) = k_1^2 - y^2$. Ce sont des paraboles ouvertes vers le bas. Si $y = k_2$, on obtient l'équation $z = f(x, k_2) = x^2 - k_2^2$. Ce sont des paraboles ouvertes vers le haut

Le graphe de f est représenté dans la figure suivante.



On retrouve à la figure 7.3 quelques courbes dans le plan que l'on peut retrouver comme courbes de niveau ou sections verticales d'une fonction.

7.2 Limites et fonctions continues

La définition de la limite d'une fonction $f: D \to \mathbb{R}^m$ à un point \mathbf{c} de $D \subset \mathbb{R}^n$ ainsi que la définition de la continuité de la fonction f au point \mathbf{c} sont presqu'identiques aux définitions que l'on a données pour ces concepts à la section ?? dans le cas des fonctions d'une variable. La seule différence est que la valeur absolue est remplacée par la norme euclidienne.

Sur la droite réelle, la distance entre un point x et l'origine est donnée par la valeur absolue |x| de ce nombre. La distance entre deux points x et y est donnée par la valeur absolue |x-y|.

La distance Euclidienne dans \mathbb{R}^n joue le rôle de la valeur absolue dans \mathbb{R} . On a vue à la définition 4.1.3 que la longueur d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (ou sa **norme euclidienne**) est donnée par

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$
.

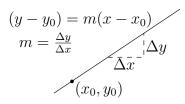
Le symbole $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^n remplace le symbole $|\cdot|$ pour la valeur absolue dans \mathbb{R} .

La distance euclidienne entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} de \mathbb{R}^n est la longueur du vecteur pour se rendre d'un point à l'autre. Ainsi, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} est

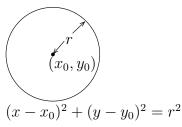
$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$
.

On retrouve à la figure 7.4 une représentation de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 . On voit que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ est la distance entre \mathbf{a} et \mathbf{b} que l'on obtient à l'aide du théorème de Pythagore.

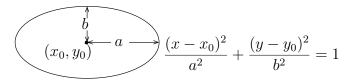
On commence par définir la notion de convergence d'une suite de points dans \mathbb{R}^n .



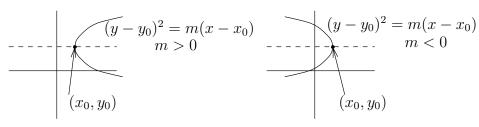
Équation d'une droite



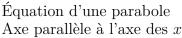
Équation d'un cercle

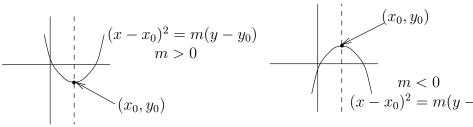


Équation d'une ellipse

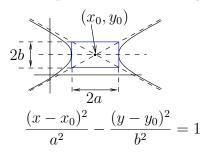


Équation d'une parabole Axe parallèle à l'axe des x



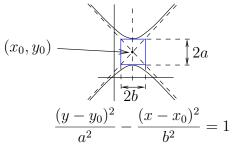


Équation d'une parabole Axe parallèle à l'axe des y



Équation d'une hyperbole Axe parallèle à l'axe des x

Équation d'une parabole Axe parallèle à l'axe des y



Équation d'une hyperbole Axe parallèle à l'axe des y

FIGURE 7.3 – Voici quelques courbes élémentaires dans le plan qui peuvent représenter des courbes de niveau ou des sections verticales d'une fonction.

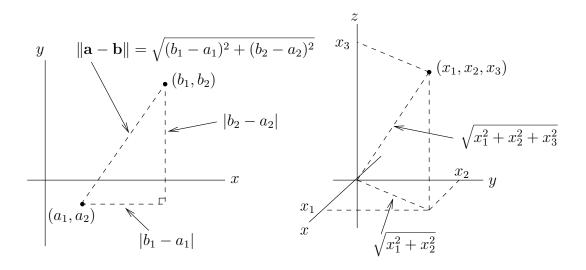


FIGURE 7.4 – Illustrations de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 dans la figure de gauche et de la longueur d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans la figure de droite.

Définiton 7.2.1

On dit qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n converge (ou tend) vers un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si la distance euclidienne entre \mathbf{x}_k et \mathbf{c} approche 0 lorsque k tend vers plus l'infini. En d'autres mots,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| = 0.$$

On écrit

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{c}\;.$$

On dit que **c** est la **limite** de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

La définition précédente de limite d'une suite est équivalente à la définition suivante en termes de ϵ et δ .

On dit qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n converge (ou tend) vers un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si <u>quel que soit $\epsilon > 0$ </u> il existe un entier K > 0 (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| < \epsilon$$
 si $k > K$.

On écrit

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{c}\;.$$

On dit aussi que \mathbf{c} est la **limite** de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$

Avant de définir la limite, la continuité et la dérivée d'une fonction de plusieurs variables à un point, il faut généraliser le concept d'intervalles que l'on retrouve sur la droite réelle.

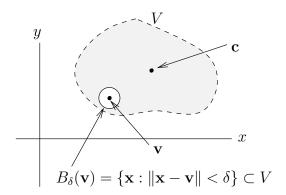


FIGURE 7.5 – V est un voisinage possible pour le point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Quel que soit le point \mathbf{v} de V que l'on choisit, on peut toujours trouver une boule $B_{\delta}(\mathbf{v})$ de rayon δ centrée à \mathbf{v} qui soit à l'intérieur de V. Plus \mathbf{v} sera près de la frontière de V, plus δ devra être choisi petit.

Définiton 7.2.3

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si <u>quel que soit $\mathbf{v} \in V$ </u> on peut trouver $\delta > 0$ (qui peut dépendre de \mathbf{v}) tel que

$$B_{\delta}(\mathbf{v}) = {\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{v}|| < \delta} \subset V$$
.

 $B_{\delta}(\mathbf{v})$ est la boule de rayon δ centrée au point \mathbf{v} (voir figure 7.5).

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est un **voisinage** d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si $\mathbf{c} \in V$ et V est ouvert. L'ensemble $V \setminus \{\mathbf{c}\}$, l'ensemble V auquel on a enlevé le point \mathbf{c} , est alors appelé un **voisinage troué** de \mathbf{c} .

On note que les boules $B_{\delta}(\mathbf{v})$ ne contiennent pas leur frontière $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \delta\}$. Cette propriété permet de dire qu'une fonction $f: V \to \mathbb{R}$ où V est un voisinage est définie «autour» de tout point $\mathbf{v} \in V$. C'est un détail subtile qui nous permet de bien définir la limite et la dérivée d'une fonction en un point.

Il est parfois utile de trouver la frontière d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . Il est facile de voir que la frontière de la boule $B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ est la sphère $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 2\}$. Malheureusement, ce n'est pas toujours aussi facile que cela de déterminer la frontière d'un ensemble de \mathbb{R}^3 (L'étude des frontières d'ensembles est le sujet principal de la géométrie fractale) . En fait, il faut commencer par définir ce qu'est la frontière d'une ensemble dans \mathbb{R}^n .

Définition 7.2.4

Soit S un sous ensemble de \mathbb{R}^n . La **frontière** de S, dénotée ∂S , est l'ensemble des points \mathbf{x} tels que, pour tout $\delta > 0$, on a $B_{\delta}(\mathbf{x}) \cap S \neq \emptyset$ et $B_{\delta}(\mathbf{x}) \cap S^c \neq \emptyset$, où $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$ est le complément de l'ensemble S. En d'autres mots, pour tout voisinage V de \mathbf{x} , $V \cap S \neq \emptyset$ et $V \cap S^c \neq \emptyset$.

Exemple 7.2.5 **②**

Soit

$$S_o = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| < 2 \text{ et } x_3 > 0 \right\}$$

et

$$S_f = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| \le 2 \text{ et } x_3 \ge 0 \right\} .$$

La frontière de S_o est

$$\partial S_o = S_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| = 2 \text{ et } x_3 > 0 \text{ , ou } ||\mathbf{x}|| \le 2 \text{ et } x_3 = 0 \right\}$$

On note que $\partial S_o \cap S_o = \emptyset$, la frontière de S_o n'appartient pas à S_o . Par contre, la frontière de S_f est aussi S_1 et on a $S_1 \subset S_f$. On pourrait aussi donner des exemples d'ensembles qui contiennent une partie seulement de leur frontière, une partie qui n'est pas l'ensemble vide et qui n'est pas la frontière au complet. Les ensembles qui contiennent leur frontière sont très importants et on leurs donne un nom.

Définiton 7.2.6

Les ensembles $S \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\partial S \subset S$ sont appelés des **ensembles fermés**.

Remarque 7.2.7

Les intervalles fermés de la droite réelle sont des exemples d'ensembles fermés. De même, la balle $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| \le 2\}$ et la sphère $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ||\mathbf{x}|| = 2\}$ sont fermées. On note que $\partial B = S$ et $\partial S = S$.

Exemple 7.2.8

L'exemple de voisinage le plus important, et celui que le lecteur devrait toujours avoir en tête lorsque l'on parle de voisinage, est

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{c}|| < r \} .$$

Pour n=2, c'est le disque de rayon r centré au point ${\bf c}$. Pour n=3, c'est la sphère de rayon r centrée au point ${\bf c}$,

L'ensemble

$$V' = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{c}|| < r \}$$

est un voisinage troué de \mathbf{c} car le point \mathbf{c} a été enlevé du voisinage V.

Définiton 7.2.9

Soit D un voisinage troué d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On écrit

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

s'il existe un unique point $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{w}$$

quelle que soit la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} .

Dans la limite ci-dessus, les points \mathbf{x}_k sont tous différents de \mathbf{c} car $\mathbf{c} \notin D$. De plus, il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

On dit que $f(\mathbf{x})$ converge (ou tend) vers le point w lorsque x tend vers c. On dit aussi que w est la limite de f au point c.

Comme pour la définition de limite d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à un point c, on peut donner une définition équivalente à la définition précédente en termes de ϵ et δ .

Définiton 7.2.10

Soit D un voisinage troué d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On écrit

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(x) = \mathbf{w}$$

pour $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ si <u>quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ </u> qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$||f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}|| < \epsilon \text{ si } ||\mathbf{x} - \mathbf{c}|| < \delta, \mathbf{x} \in D.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, $\mathbf{x} \neq \mathbf{c}$ car $\mathbf{c} \notin D$. De plus, Il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

On dit que $f(\mathbf{x})$ converge (ou tend) vers le point w lorsque x tend vers c. On dit aussi que w est la limite de f au point c.

Exemple 7.2.11

Quelle est la valeur de la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$?

On a vue que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 .$$

Puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y = 0$, on a que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$.

Pour être plus précis, si $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers l'origine lorsque kconverge vers plus l'infini, alors $\{x_k + y_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers 0 lorsque n converge vers plus l'infini. Donc,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = 1 .$$

Puisque cela est vrai pour tout suite $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers l'origine lorsque kconverge vers plus l'infini, on peut conclure que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1 .$$

Exemple 7.2.12

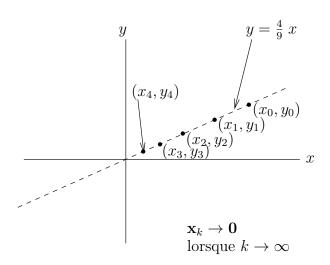
Exemple 7.2.12 Soit $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Est-ce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe? Si oui, quelle est sa valeur?

Si on approche l'origine avec des points (x_k, y_k) le long de la droite y = mx, alors $y_k = mx_k$ pour tout k et on obtient

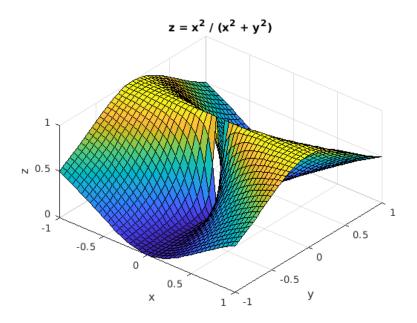
$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{x_k^2 + (m x_k)^2} = \frac{1}{1 + m^2} \to \frac{1}{1 + m^2}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Dans la figure suivante (x_k, y_k) converge vers l'origine le long de la droite y = 4x/9 lorsque k tend vers l'infini.



Comme on a des limites différentes pour différentes valeurs de m > 0 (i.e. lorsque l'on approche l'origine le long de différentes droites), on conclut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Le graphe de f est donné dans la figure ci-dessous.



Exemple 7.2.13

Évaluer la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1}\;.$$

(Suggestion:
$$\frac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1} = \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$
 avec $y-1=mx$.)

Définiton 7.2.14

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Comme $\mathbf{c} \in D$, on a que f est définie au point \mathbf{c} . La fonction f est **continue au point c** si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}) \ .$$

En d'autres mots,

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{c})$$

<u>quelle que soit la suite</u> $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} .

Si $f: D \to \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, on dit que f est continue sur D.

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous permet d'écrire la définition suivante pour la continuité d'une fonction à un point. Cette définition est évidemment équivalente à la définition précédente de la continuité.

Définition 7.2.15

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est **continue** au point \mathbf{c} si quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné on peut trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})|| < \epsilon$$
 si $||\mathbf{x} - \mathbf{c}|| < \delta$, $\mathbf{x} \in D$.

Si $f: D \to \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, on dit que f est continue sur D.

Comme pour les fonctions d'une variable, on a que les fonctions de plusieurs variables qui sont formées à partir de polynômes, de fonctions trigonométriques, de fonctions exponentielles et logarithmiques, ... sont continues en tout point où elles sont définies (où il n'y a pas de divisions par zéro, de racines carrés de nombres négatifs, ...). En particulier, il est possible (sous certaines conditions) de composer les fonctions de plusieurs variables qui sont continues pour produire des fonctions continues.

Théorème 7.2.16

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles ouverts. Soit $f: V \to \mathbb{R}^m$ et $g: W \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions continues. Si $f(V) \subset W$, alors $g \circ f: V \to \mathbb{R}^k$ est une fonction continue.

Exemple 7.2.17

La fonction $f(x,y) = e^{\sqrt{x+2y}}$ est continue sur l'ensemble $D = \{(x,y) : x+2y \ge 0\}$. En fait, D est le domaine de f. Ainsi, puisque $(1,4) \in D$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} f(x,y) = f(1,4) = e^3.$$



Exemple 7.2.18

Soit

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

Cette fonction est définie et continue à tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

Montrons que si on définit f au point (0,0) par f(0,0)=0, alors f est une fonction continue pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque

$$\left| \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right| \le \left| \frac{x^3 y^2}{y^2} \right| = |x^3| \to 0$$

lorsque $x \to 0$, on a que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0) .$$

Ainsi,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 7.2.19

Est-ce que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en tout point (x, y)?

La définition de limite d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est associée à la limite de chacune des composantes $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $i=1,\,2,\,\ldots,\,m$ de la fonction f. Il en est de même pour la continuité.

Proposition 7.2.20

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = w_i$$

pour i = 1, 2, ..., m.

Il découle de cette proposition que si $\mathbf{c} \in D$, alors

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c})$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{c})$$

pour i = 1, 2, ..., m. On a donc la proposition suivante.

Proposition 7.2.21

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \to \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est continue au point \mathbf{c} si et seulement si les fonctions f_i pour $i = 1, 2, \ldots, m$ sont continues au point \mathbf{c} .

Exemple 7.2.22

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par les deux fonctions à valeurs réelles suivantes

$$f_1(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

et

$$f_2(x,y) = 4 + e^{-(x^4 + y^4)}$$

Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{pmatrix} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4 + e^{-(x^4 + y^4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

car $4 + e^{-(x^4 + y^4)}$ est continue à l'origine. La limite de la première composante est donnée à l'exemple 7.2.11.

7.3 Propriétés des fonctions continues 🖍

Les fonctions continues de plusieurs variables possèdent plusieurs des propriétés que nous avons énoncées pour les fonctions continue d'une variable.

Certaines des propriétés, comme le Théorème des valeurs intermédiaires (??) peut être généralisé aux fonctions de plusieurs variables. Pour ce faire, il faudrait introduire la notion d'ensembles séparables. Pour ne pas trop s'éloigner du but de ces notes, nous n'aborderons pas ce sujet.

Il y a un résultat qui nous sera très utile par la suite et qui ne demande pas d'introduire de nouveaux concepts.

Théorème 7.3.1 (Théorème des valeurs extrêmes)

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et fermé, et $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, ils existent **a** et **b** dans D tels que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ pour tout **x** dans D.

Le résultat précédent est une conséquence du fameux **Théorème de Bolzano-Weierstrass** qui est un des piliers de l'analyse réel.

Ce théorème sera d'une très grande utilité quand nous chercherons les valeurs extrêmes d'une fonction à l'aide de la dérivée au prochain chapitre.

Nous verrons au prochain chapitre la généralisation du Théorème de la moyenne aux fonctions de plusieurs variables.

Exercices 7.4

Question 7.1

Quelle est l'équation de la fonction f(x,y) = mx + ny + c dont l'intersection du graphe avec le plan x, z est la droite z = 3x + 4 et l'intersection du graphe avec le plan y, z est la droite z = y + 4?

Question 7.2

Les courbes de niveau de $f(x,y) = y - x^2$ représentent quel type de courbe?

Question 7.3

Associez à chacune des fonctions suivantes un des diagrammes de courbes de niveau donnés ci-dessous. Expliquez votre choix.

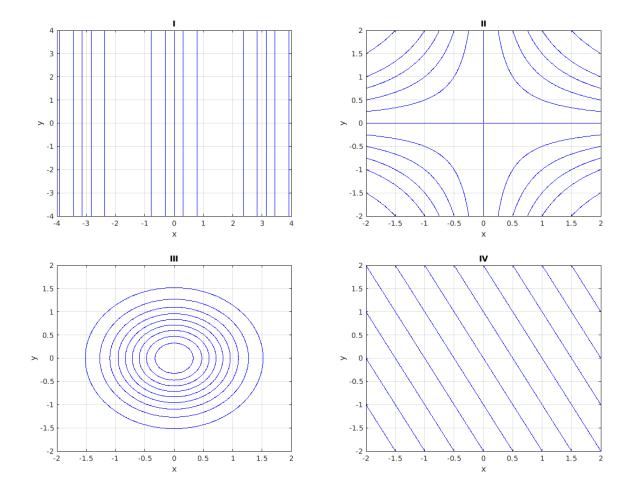
a)
$$z = x^2 + 4y^2$$

a)
$$z = x^2 + 4y^2$$
 b) $z = 1 - 2x - y$ c) $z = \sin(x)$

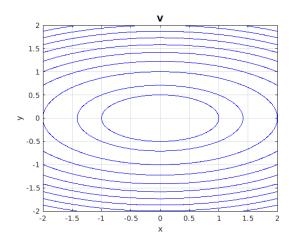
$$\mathbf{c}$$
) $z = \sin(x)$

$$\mathbf{d}) \quad z = xy$$

d)
$$z = xy$$
 e) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$

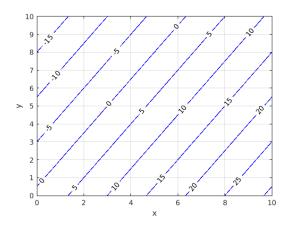


7.4. Exercices 361



Question 7.4

Trouvez l'équation de plan qui a le diagramme de courbes de niveau donné dans la figure suivante



Question 7.5

Trouvez l'équation de plan qui produit les données du tableau suivant.

$\downarrow x \backslash y \rightarrow$	10	20	30
5	-22	-62	-102
10	-7	-47	-87
15	8	-32	-72

Question 7.6

Trouvez le domaine et l'image, et tracez quelques courbes de niveau pour chacune des fonctions suivantes :

a)
$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$$

b)
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Question 7.7

Dessinez quelques courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

et utilisez ces courbes pour tracer le graphe de la fonction.

Question 7.8

Est-ce que la fonction suivante est continue au point (0,0)?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Justifiez votre réponse.



Dérivée de fonctions de plusieurs variables

On commence par prolonger aux fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles la notion de dérivée que l'on a vue pour les fonctions d'une variable. La seconde étape consiste à étudier la dérivée d'une fonction de plusieurs variables selon une direction donnée. Comme on a fait pour les fonctions d'une variable, nous étudierons l'approximation locale des fonctions de plusieurs variables et les points critiques des fonctions de plusieurs variables dans le but de pouvoir déterminer les valeurs extrêmes de ces fonctions avec ou sans contraintes. On termine le chapitre avec la dérivée d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où m et n sont plus grand que 1.

8.1 Dérivées partielles

Pour les prochaines sections, nous allons seulement considérer les fonctions à valeurs réelles. De plus, sans perte de généralité, on assume que les fonctions sont des fonctions de deux variables seulement. Sauf pour une légère modification des énoncés (e.g. remplacer (x_1, x_2) par (x_1, x_2, \ldots, x_n) , les définitions et résultats sur les fonctions de deux variables que nous présentons demeurent valides pour les fonctions de plus de deux variables.

Définition 8.1.1

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

La dérivée partielle de f au point c par rapport à la variable x_1 est définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{c}) = f_{x_1}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

La dérivée partielle de f au point c par rapport à la variable x_2 est définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{c}) = f_{x_2}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2 + h) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans les limites précédentes, on assume que h est assez petit pour que $(c_1 + h, c_2)$ et $(c_1, c_2 + h)$ soient dans V et donc que f soit définie à ces points.

Comme pour les fonctions d'une variable, si on considère tous les points où la dérivée partielle d'une fonction f existe, on peut définir une fonction que l'on appelle la dérivée partielle de la fonction f.

Définiton 8.1.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la dérivée partielle de f par rapport à x_1 existe en tout point de V, la **dérivée partielle de** f **par rapport** à x_1 sur V est la fonction définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V.

De même, si la dérivée partielle de f par rapport à x_2 existe en tout point de V, la **dérivée partielle de** f **par rapport à** x_2 **sur** V est la fonction définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = f_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V.

Puisque x_2 est fixe dans la définition de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, cette dérivée partielle est la dérivée d'une fonction d'une seule variable (i.e. x_1) qui dépend d'un paramètre (i.e. x_2). De même, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ est la dérivée d'une fonction d'une seule variable (i.e. x_2)

8.1. Dérivées partielles 365

qui dépend d'un paramètre (i.e. x_1). Donc, toutes les règles de dérivation pour les fonctions d'une variable sont valides si on traite comme une constante la variable qui n'est pas la variable de dérivation.

Exemple 8.1.3

Si $f(x,y) = \sin(y-x)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(y-x)\frac{\partial}{\partial x}(y-x) = -\cos(y-x)$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(y-x) \frac{\partial}{\partial y}(y-x) = \cos(y-x)$$
.

En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,4) = -\cos(4-2) = -\cos(2) .$$

Exemple 8.1.4

Si $f(x,y) = (3xy^2 - x^4 + 1)^4$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - x^4 + 1) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (3y^2 - 4x^3)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - x^4 + 1) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (6xy).$$

Par induction, on peut définir des dérivées partielles d'ordre deux.

Définiton 8.1.5

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f:V \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles d'ordre un sur V. Les **dérivées partielles d'ordre deux de** f sur V sont définies par

$$f_{x_1x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) ,$$

$$f_{x_2x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) ,$$

$$f_{x_1x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) ,$$

et

$$f_{x_2x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2)$$

si toutes ces dérivées partielles (d'ordre un) existent sur V.

On pourrait aussi définir des dérivées partielles d'ordre supérieure à deux. Par exemple, si $f:V\to\mathbb{R}$ alors

$$f_{x_2x_2x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)(x_1, x_2) .$$

si les dérivées d'ordre un et deux existent pour tout $(x_1, x_2) \in V$.

Définiton 8.1.6

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f: E \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k si les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont continues. On écrit $f \in C^k(E)$

Si $f \in C^k(E)$, puisque les dérivées partielles d'ordre k de f existent, il s'en suit que toutes les dérivées partielles de f d'ordre inférieure à k existent et sont continues.

Exemple 8.1.7

Soit
$$f(x,y) = \cos(5x + 3y)$$
. On a

$$f_x(x,y) = -5 \sin(5x + 3y) ,$$

$$f_y(x,y) = -3 \sin(5x + 3y) ,$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} (-5 \sin(5x + 3y)) = -25 \cos(5x + 3y) ,$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (-3 \sin(5x + 3y)) = -9 \cos(5x + 3y) ,$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-3\sin(5x + 3y) \right) = -15\cos(5x + 3y)$$

et

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} (-5 \sin(5x + 3y)) = -15 \cos(5x + 3y)$$
.

À l'exemple précédent, on a montré que $f_{xy} = f_{yx}$. Ce n'est pas toujours le cas mais il y a une très grande classe de fonctions f pour lesquelles $f_{xy} = f_{yx}$,

Proposition 8.1.8

Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ possède des dérivées partielles d'ordre deux qui sont continues, alors $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$.

Exemple 8.1.9

Montrer que les fonctions suivantes satisfont l'équation des ondes $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ où a et k sont des constantes.

 \mathbf{a}

$$u(x,t) = \sin(k x) \sin(ak t) = \frac{1}{2} (\cos(k x - ak t) - \cos(k x + ak t))$$

b)

$$u(x,t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$$

 \mathbf{c}

$$u(x,t) = f(x+at) + q(x-at)$$

où f et g sont deux fonctions qui possèdent des dérivées d'ordre deux.

a) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(ak \sin(kx) \cos(akt) \right) = -a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cos(k x) \sin(ak t) \right) = -k^2 \sin(k x) \sin(ak t) ,$$

on obtient

$$u_{tt} = -a^2 k^2 \sin(k x) \sin(ak t) = a^2 u_{xx}$$
.

b) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \cos(x - at) + \frac{a}{x + at} \right) = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2}$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(x - at) + \frac{1}{x + at} \right) = -\sin(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2},$$

on obtient

$$u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2} = a^2 u_{xx}$$
.

c) Puisque

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(a f'(x+at) - a g'(x-at) \right) = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(x+at) + g'(x-at) \right) = f''(x+at) + g''(x-at) ,$$

on obtient

$$u_{tt} = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at) = a^2 u_{xx}$$
.

La règle pour dériver la composition de fonctions d'une variable peut être utilisée pour dériver la composition de fonctions de plusieurs variables.

Proposition 8.1.10

Soient $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Si f et $g_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ possèdent des dérivées partielles, alors la fonction $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par $h = f \circ g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ possède aussi des dérivées partielles. Plus précisément,

$$\frac{\partial h}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_k}{\partial t_i}(\mathbf{t})
= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_n}{\partial t_i}(\mathbf{t})$$

pour $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ et $1 \le i \le m$.

Remarque 8.1.11

- 1. On a déjà utilisé cette proposition pour n=1 et m=2 dans plusieurs exemples précédents.
- 2. Un cas important de la proposition précédente est lorsque m=1. On a alors la formule

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}t}(t)$$
(8.1.1)

pour $t \in \mathbb{R}$.

8.1. Dérivées partielles 369

Exemple 8.1.12

Soit $z = e^x \cos(y)$, $x = t^2$ et $y = \sin(t)$, évaluez $\frac{dz}{dt}$.

La notation $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ peut porter à confusion car z n'est pas explicitement une fonction de t. Soit $\rho_1(t) = t^2$, $\rho_2(t) = \sin(t)$, $f(x,y) = e^x \cos(y)$ et $h(t) = f(\rho_1(t), \rho_2(t))$. Il faut interpréter $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ comme étant $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Ainsi,

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_2}{dt}(t)
= (e^x \cos(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (2t) + (-e^x \sin(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (\cos(t))
= 2t e^{t^2} \cos(\sin(t) - e^{t^2} \sin(\sin(t)) \cos(t) .$$
(8.1.2)

Si on pose

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \quad , \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}t}(t) \quad ,$$

alors (8.1.2) peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Cette notation est souvent utilisé en mathématiques appliquées (physique, génie, etc).

Exemple 8.1.13

Soit
$$z = \sin(x)\cos(y^2)$$
, $x = t^2 + s^2$ et $y = e^{st}$, évaluez $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Comme à l'exemple précédent, la notation $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ peut porter à confusion. Soit $\rho_1(t,s)=t^2+s^2,\ \rho_2(t,s)=e^{st},\ f(x,y)=\sin(x)\cos(y^2)$ et $h(t,s)=f(\rho_1(t,s),\rho_2(t,s))$. Les expressions $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ représentent respectivement $\frac{\partial h}{\partial t}$ et $\frac{\partial h}{\partial s}$.

Ainsi

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t,s), \rho_2(t,s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t,s), \rho_2(t,s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t,s)$$

$$= \left(\cos(x)\cos(y^2)\right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{ts}} (2t) + \left(-2y\sin(x)\sin(y^2)\right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} \left(se^{st}\right)$$

$$= 2t \cos\left(t^2 + s^2\right)\cos\left(e^{2st}\right) - 2se^{2st}\sin\left(t^2 + s^2\right)\sin\left(e^{2st}\right)$$
(8.1.3)

et

$$\frac{\partial h}{\partial s}(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t,s), \rho_2(t,s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t,s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t,s), \rho_2(t,s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t,s)$$

$$= \left(\cos(x)\cos(y^2)\right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{ts}} (2s) + \left(-2y\sin(x)\sin(y^2)\right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} \left(te^{st}\right)$$

$$= 2s \cos\left(t^2+s^2\right)\cos\left(e^{2st}\right) - 2te^{2st}\sin\left(t^2+s^2\right)\sin\left(e^{2st}\right) .$$
(8.1.4)

Si on pose

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t,s) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t,s),\rho_2(t,s)) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t,s),\rho_2(t,s)) \quad , \\
\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t,s) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t,s) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t,s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t,s) \, ,$$

alors (8.1.3) et (8.1.4) s'écrive respectivement

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

8.2 Plan tangent à une surface (forme explicite)

8.2.1 Surface donnée par une fonction de x et y

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles. Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ une région du plan. L'ensemble

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

définit une surface dans \mathbb{R}^3 comme celle que l'on retrouve à la figure 7.2.

Les dérivées partielles de f au point $(a,b) \in D$ vont nous permettre de trouver l'équation du plan tangent à la surface S au point (a,b,f(a,b)).

La courbe produite par l'intersection du plan y=b avec la surface S est donnée par z=f(x,b) et y=b (voir la figure 8.1). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x, y, z) = (\alpha, b, f(\alpha, b))$$

pour tout α tel que $(\alpha, b) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point (a, b, f(a, b)) (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \alpha \bigg|_{\alpha=a}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} b\bigg|_{\alpha=a}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} f(\alpha, b)\bigg|_{\alpha=a}\right) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right) .$$

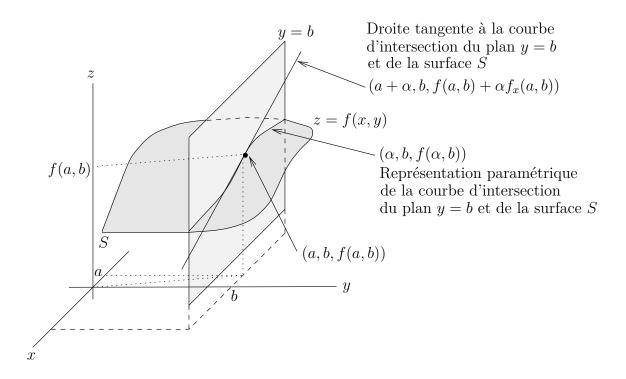


FIGURE 8.1 – Courbe produite par l'intersection de la surface z = f(x, y) et du plan y = b.

La courbe produite par l'intersection du plan x=a avec la surface S est donnée par z=f(a,y) et x=a (voir la figure 8.2). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x,y,z) = (a,\beta,f(a,\beta))$$

pour tout β tel que $(a, \beta) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point (a, b, f(a, b)) (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} a \bigg|_{\beta=b}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \beta \bigg|_{\beta=a}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} f(a,\beta) \bigg|_{\beta=a}\right) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) .$$

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent Π à la surface S au point (a, b, f(a, b)) (voir figure 8.3) est donné par le produit vectoriel de deux vecteurs non-colinéaires et parallèles à ce plan. C'est le cas des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 que l'on vient de définir. Donc, le vecteur

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a,b), -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(a,b), 1\right)$$

est perpendiculaire au plan Π .

L'équation du plan Π tangent à la surface S au point (a, b, f(a, b)) est

$$\left\langle \mathbf{n}, \left((x, y, z) - (a, b, f(a, b)) \right) \right\rangle = -\frac{\partial f}{\partial x} f(a, b) (x - a) - \frac{\partial f}{\partial y} f(a, b) (y - b) + (z - f(a, b)) = 0.$$

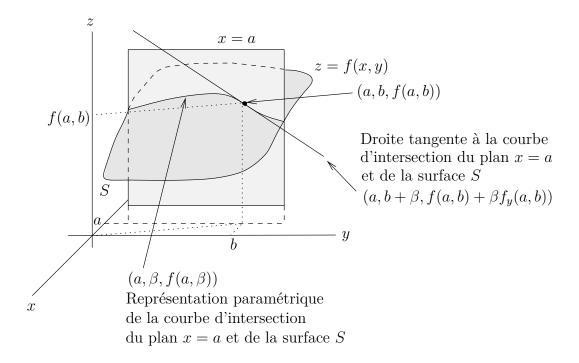


FIGURE 8.2 – Courbe produite par l'intersection de la surface z=f(x,y) et du plan x=a

L'équation du plan tangent à la surface S au point (a, b, f(a, b)) est souvent présentée sous la forme

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,f(a,b)) (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,f(a,b)) (y-b) . \tag{8.2.1}$$

Exemple 8.2.1

Trouver l'équation du plan tangent à la surface décrite par $z=x\sin(x^2y)$ au point $(1,\pi/2,1)$.

L'équation du plan tangent est donnée par (8.2.1) où $f(x,y)=x\sin(x^2y), a=1, b=\pi/2$ and $f(a,b)=\sin(\pi/2)=1$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2 y) + 2x^2 y \cos(x^2 y)$$
 et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos(x^2 y)$,

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi/2) = \sin(\pi/2) + \pi \cos(\pi/2) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$$
,

Ainsi, l'équation du plan tangent est z = 1 + (x - 1) = x.

Exemple 8.2.2

Trouver l'équation du plan tangent au point $P = (1, 2, \sqrt{2})$ de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

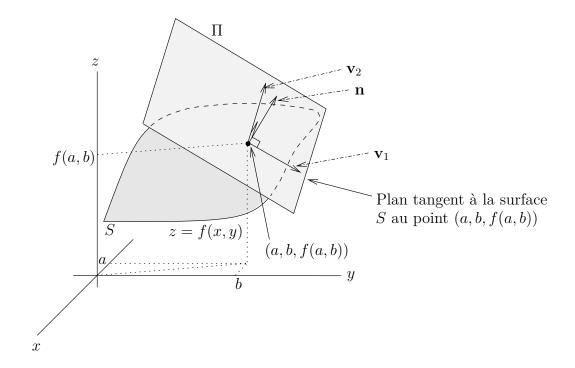


FIGURE 8.3 – Plan tangent à la surface S au point (a, b, f(a, b)). Les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont parallèles au plan Π et \mathbf{n} est perpendiculaire au plan Π . Pour illustrer la relation entre les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{n} et le plan Π , nous avons tracé les vecteurs à partir du point (a, b, f(a, b)). Normalement, on devrait tracer ces vecteurs à partir de l'origine.

Si, dans l'équation de l'ellipsoïde, on assume que z est une fonction de x et y, et on dérive implicitement cette équation par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x}{z}$$

et

$$\frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$
 et $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$.

L'équation du plan tangent est

$$z = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y-2)$$
.

8.2.2 Surface donnée par une représentation paramétrique

Ce ne sont pas toutes les surfaces qui sont décrite par l'image d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Il suffit de penser à la sphère ou au taure. Ce genre de surface possède une représentation paramétrique.

Définition 8.2.3

Une fonction $\mathbf{r}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ est la représentation paramétrique d'une surface S dans \mathbb{R}^3 si :

- 1. r_i est de classe C^1 pour $i=1,\,2$ et 3.
- 2. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ sont deux vecteurs linéairement indépendant dans \mathbb{R}^3 pour tout (u,v).

La deuxième condition est requise pour assurer qu'il y a un vecteur normal (perpendiculaire) à la surface S en tout point $\mathbf{r}(u,v)$ de la surface. On peut vérifier, comme on la fait à la section 6.2 pour la représentation paramétrique des courbes, que les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial u}(u, v)\right)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial r_3}{\partial v}(u, v)\right)$$

sont tangent à la surface S au point $\mathbf{r}(u,v)$. Ainsi, $\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ est un vecteur normal à la surface S au point $\mathbf{r}(u,v)$ de la surface. On a que $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ car \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sont linéairement indépendants.

Exemple 8.2.4

On cherche le plan tangent à la surface S donnée par la représentation paramétrique $\mathbf{r}(u,v) = (u+v, u\sin(v), v\cos(u))$ au point $(2\pi, 0, -\pi)$.

Notons premièrement que $\mathbf{r}(u,v)=(2\pi,0,-\pi)$ si et seulement si $u=\pi$ et $v=\pi$. En effet, $u\sin(v)=0$ est vrai si u=0 ou si $v=n\pi$ pour $n\in\mathbb{Z}$.

 $u + v = 2\pi$ donne $v = 2\pi$ pour u = 0. Mais alors, $v \cos(u) = 2\pi \neq -\pi$.

 $u + v = 2\pi$ donne $u = 2\pi - n\pi$ pour $v = n\pi$. On a donc

$$v\cos(u) = n\pi\cos(2\pi - n\pi) = n\pi\cos(n\pi) = (-1)^n n\pi$$

et $v\cos(u) = -\pi$ si et seulement si n = 1; c'est-à-dire, $v = \pi$.

Pour trouver un vecteur normal **m** à la surface S au point $(2\pi, 0, \pi)$, on utilise les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(\pi, \pi) = (1, \sin(v), -v\sin(u)) \bigg|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (1, 0, \pi)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(\pi, \pi) = (1, u \cos(v), \cos(u)) \bigg|_{(u,v) = (\pi,\pi)} = (1, -\pi, -1) .$$

On trouve

$$\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \pi \\ 1 & -\pi & 1 \end{pmatrix} = \pi^2 \mathbf{i} - \mathbf{j} - \pi \mathbf{k} = (\pi^2, -1, -\pi) .$$

Ainsi, l'équation du plan tangent à la surface S au point $(2\pi, 0, \pi)$ est donnée par

$$\langle \mathbf{m}, (x - 2\pi, y, z - \pi) \rangle = \pi^2 (x - 2\pi) - y - \pi (z + \pi) = 0$$
.

8.3 Dérivées selon une direction donnée

Si on regarde les figures 8.1 et 8.2, on remarque que le calcul des dérivées partielles assume que le déplacement ce fait seulement selon une direction parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y. Il n'y a aucune raison de se limité à ces deux seules directions.

En fait, il est très utile de définir des dérivées selon d'autres directions.

Définiton 8.3.1

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f: V \to \mathbb{R}$ une fonction a valeurs réelles. Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de longueur 1. La **dérivée de** f **selon la direction** \mathbf{u} au **point** \mathbf{a} , que l'on dénote $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$, est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) \right)$$

si cette limite existe. Dans la limite précédente, on assume que h est assez petit pour que $\mathbf{a} + h\mathbf{u} \in V$ et ainsi que f est définie à $\mathbf{a} + h\mathbf{u}$.

On peut donner une interprétation graphique de la dérivée selon une direction semblable à celle que l'on connaît pour la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Les figures 8.4 et 8.5 fournissent cette interprétation pour les fonctions de deux variables. Si $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{a} = (a, b)$, alors $\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (a + hu, b + hv)$. On retrouve à la figure 8.4 la sécante qui passe par les points (a, b, f(a, b)) et (a + hu, b + hv, f(a + hu, b + hv)).

Soit Π le plan qui est parallèle au vecteur (u, v) et à l'axe des z, et qui contient le point (a, b). La pente de cette sécante dans le plan Π est

$$\frac{1}{h}\left(f(\mathbf{a}+h\mathbf{u})-f(\mathbf{a})\right) .$$

À la limite, lorsque h tend vers 0, on obtient la pente dans le plan Π de la droite tangente à la courbe d'intersection du plan Π et de la surface z = f(x, y) (voir figure 8.5).

Exemple 8.3.2

Calculer la dérivée de la fonction $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ selon la direction (1,1) au point (1,0).

On remarque que le vecteur (1,1) n'est pas de longueur 1. C'est un abus de langage qui est très commun dans la littérature scientifique. Il faut alors comprendre que l'on demande de calculer la dérivée selon la direction d'un vecteur \mathbf{u} de longueur 1 qui pointe dans la même direction que le vecteur donné.

Le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pointe dans la même direction que le vecteur (1,1) et ait de longueur 1. On calcul la dérivée de f au point (1,0) selon la direction \mathbf{u} .

Si on pose $\mathbf{a} = (1,0)$, alors

$$\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (1,0) + h(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1 + h/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

 et

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}) - f(1,0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(1 + h/\sqrt{2})(h/\sqrt{2})}{(1 + h/\sqrt{2})^2 + (h/\sqrt{2})^2} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1/\sqrt{2} + h/2}{h^2 + h\sqrt{2} + 1}$$

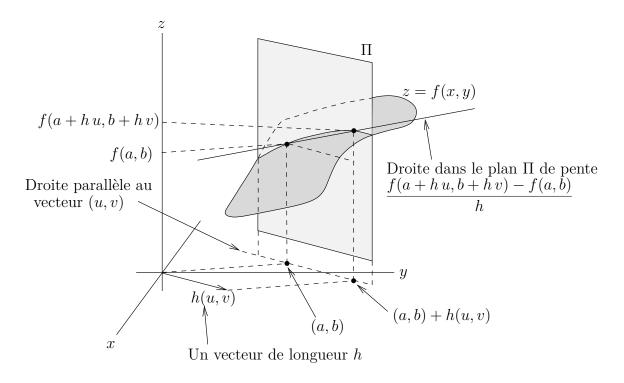


FIGURE 8.4 – La sécante qui passe par les points (a, b, f(a, b)) et (a + h u, b + h v, f(a + h u, b + h v)) qui font parties du plan Π . Ce plan est parallèle au vecteur $\mathbf{u} = (u, v)$ et à l'axe des z, et contient le point $\mathbf{a} = (a, b)$.

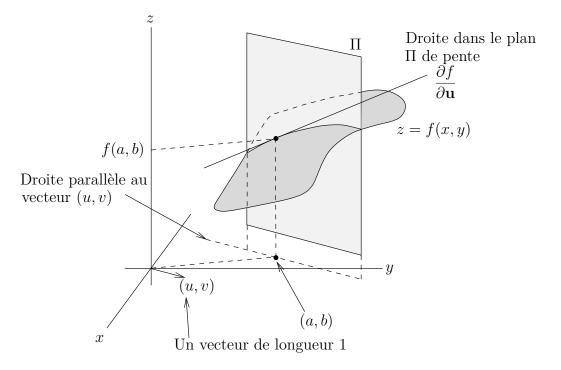


FIGURE 8.5 – La tangente à la courbe d'intersection du plan Π et de la surface z = f(x, y) au point (a, b, f(a, b)).

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
.

*

Calculer la dérivée selon une direction donnée à partir de la définition n'est généralement pas simple. On peut utiliser notre connaissance des dérivées partielles pour calculer la dérivée selon une direction donnée.

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur de longueur 1 dans \mathbb{R}^n et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . De plus, soit $\mathbb{R}^n : D \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles.

Posons $g(t) = f(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n)$ on peut utiliser nos règles de dérivation de fonctions composée, en particulier (8.1.1), pour obtenir

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_1$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2} (a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_2 + \dots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n} (a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_n.$$

Mais, par définition

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2, \dots, a_n + h u_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \ u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \ u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \ u_n \ .$$

On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 8.3.3

Posons

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right). \tag{8.3.1}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle$$
 (8.3.2)

 $\nabla f(\mathbf{a})$ est appelé le **gradient** de f au point \mathbf{a} .

Remarque 8.3.4

Pour être consistant avec la représentation algébrique des vecteurs (i.e. un vecteur est une

matrice de dimension $n \times 1$), on devrait définir le gradient de f à $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ comme la matrice de dimension $1 \times n$

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^\top$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \mathbf{u}$$

qui est le produit d'une matrice de dimension $1 \times n$ par une matrice de dimension $n \times 1$.

Exemple 8.3.5

Calculer la dérivée selon la direction $(1, \sqrt{3})$ de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ au point (2, 1).

Puisque $(1, \sqrt{3})$ n'est pas de longueur 1 mais de longueur 2, on utilise le vecteur $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et on calcule la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (2,1)$ est

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{(x,y)=(2,1)}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{(x,y)=(2,1)}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Exemple 8.3.6

Calculer la dérivée selon la direction (1, -1, -1) de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ au point (1, 1, 1).

Puisque (1, -1, -1) n'est pas de longueur 1 mais de longueur $\sqrt{3}$, on utilise le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ et on calcule la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ est

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a})\right)$$
$$= \left(2x\Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2y\Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2z\Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}\right) = (2,2,2) .$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \left\langle \left(2, 2, 2\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

đ

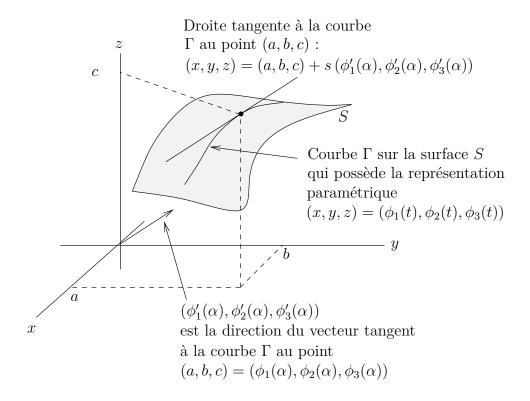


FIGURE 8.6 – La courbe Γ appartient à la surface S.

8.4 Propriétés du gradient 🖋

8.4.1 Plan tangent à une surface (forme implicite)

Soit $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Une équation de la forme F(x,y,z) = C définie une surface S dans l'espace.

Exemple 8.4.1

Si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et C = 4, alors F(x, y, z) = 4 est l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui représente une sphère de rayon 2 centrée à l'origine.

Soit (a, b, c) un point de la surface S et Γ une courbe sur la surface S qui panse par (a, b, c). Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de Γ . Supposons que $(a, b, c) = \phi(t)$ pour $t = \alpha$. On retrouve une représentation de S et Γ à la figure 8.6.

Puisque ϕ définie une courbe sur S, on a que

$$F(\phi(t)) = F(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = C$$

pour tout t. Si on dérive cette équation par rapport à t, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t)) \, \phi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\phi(t)) \, \phi_2'(t) + \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t)) \, \phi_3'(t) = 0 \; .$$

Cette expression n'est nulle autre que

$$\langle \nabla F(\phi(t)), \phi'(t) \rangle = 0$$
.

À $t = \alpha$, on obtient

$$\langle \nabla F(a, b, c), \phi'(\alpha) \rangle = 0$$
.

Le vecteur $\nabla F(a,b,c)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha)=(a,b,c)$.

Puisque $\phi'(\alpha)$ est une vecteur parallèle au plan tangent à la surface S au point $\phi(\alpha) = (a, b, c)$ et que le raisonnement précédent est vrai quelle que soit la courbe Γ sur la surface S qui passe par (a, b, c), on conclus que $\nabla F(a, b, c)$ est une vecteur perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point (a, b, c) (Voir la figure 8.7). On a donc le résultat suivant.

Proposition 8.4.2

Soit $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = C$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est une point de S, alors $\nabla F(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point \mathbf{a} . C'est-à-dire,

$$\langle \nabla F(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle = 0$$

pour tous les vecteurs v qui sont parallèles au plan tangent.

Remarque 8.4.3

Le résultat précédent est aussi vrai dans \mathbb{R}^n où n est différent de 3. La démonstration ne change pas. Si $n \neq 3$ et $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors $S = \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = 0\}$ définie une «surface» dans \mathbb{R}^n . Le cas n = 2 nous donne une courbe dans le plan. Nous reverrons le cas n = 2 à la prochaine section.

Ayant un vecteur perpendiculaire à un plan, il est maintenant facile de donner une équation représentant ce plan.

Proposition 8.4.4

Soit $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation F(x,y,z) = C et (a,b,c) est une point de S, alors l'équation du plan tangent à S au point (a,b,c) est donnée par

$$\langle \nabla F(a,b,c), (x-a,y-b,z-c) \rangle = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(z-c) = 0$$

Remarque 8.4.5

Soit S une surface donnée par z = f(x, y) où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si on définie la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par F(x, y, z) = f(x, y) - z, alors la surface S est donnée par F(x, y, z) = 0.

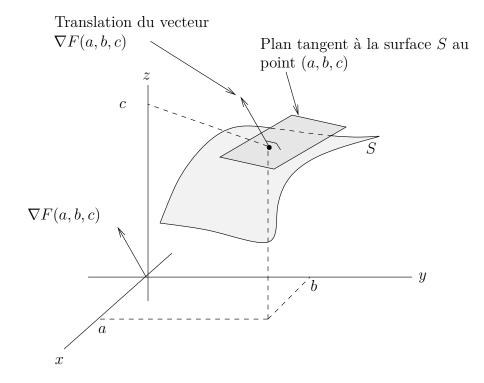


FIGURE 8.7 – Le vecteur $\nabla F(a, b, c)$ est perpendiculaire au plan S, le plan tangent à la surface S au point (a, b, c).

Si c = f(a, b), alors (a, b, c) est un point de S et l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c) est

$$\begin{split} 0 &= \langle \nabla F(a,b,c), (x-a,y-b,z-c) \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1 \right), (x-a,y-b,z-c) \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \left(x-a \right) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \left(y-b \right) - \left(z-c \right) \end{split}$$

que l'on peut récrire

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b).$$

C'est la formule (8.2.1) car c = f(a, b).

Exemple 8.4.6

Reprenons l'exemple 8.2.2. Trouver l'équation du plan tangent au point $P=(1,2,\sqrt{2})$ de l'ellipsoïde $F(x,y,z)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1.$

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point P est donnée par le gradient de F au point P. C'est-à-dire par

$$\mathbf{n} = \nabla F(1, 2, \sqrt{2})$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{2x}{3}\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2y}{9}\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2z}{9}\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right).$$

L'équation du plan tangent est

$$0 = \left\langle \nabla F(1, 2, \sqrt{2}), (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) \right\rangle$$
$$= \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9} \right), (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) \right\rangle$$
$$= \frac{2}{3} (x - 1) + \frac{4}{9} (y - 2) + \frac{2\sqrt{2}}{9} (z - \sqrt{2}).$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$z = \sqrt{2} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3} (x - 1) - \frac{4}{9} (y - 2) \right) = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} (x - 1) - \frac{2}{\sqrt{2}} (y - 2) .$$

C'est la réponse donnée à l'exemple 8.2.2.

8.4.2 Direction de croissance maximale

En plus d'être utile pour calculer des dérivées selon une direction donnée et pour trouver l'équation d'un plan tangent à une surface, le gradient d'une fonction a d'autres propriétés importantes que l'on ne peut pas ignorer.

Proposition 8.4.7

1. Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un point quelconque. La valeur maximale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est $\nabla f(\mathbf{a})$ (le gradient de f à \mathbf{a}). La valeur maximale M est alors

$$M = \|\nabla f(\mathbf{a})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)^2}.$$

2. De même, La valeur minimale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est donnée par $-\nabla f(\mathbf{a})$. La valeur minimale est -M.

Pour démontrer cette proposition (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), il faut utiliser un résultat que l'on a vue lors de l'étude des vecteurs. Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs et θ est le plus petit angle entre ces deux vecteurs, alors

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$$
.

Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{u} de longueur 1,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{u} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos(\theta) \tag{8.4.1}$$

où θ est le plus petit angle entre \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$. Il découle de (8.4.1) que la valeur maximale de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ est lorsque $\theta=0$. C'est-à-dire, lorsque \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$ pointent dans la même direction. Donc, puisque \mathbf{u} est de longueur 1, on doit avoir

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} \nabla f(\mathbf{a}) .$$

De plus, il découle de (8.4.1) que la valeur maximale de la dérivée selon une direction donnée est $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ lorsque $\theta = 0$

La démonstration de la deuxième partie de la proposition précédente est très semblable à celle de la première partie et est laissée aux lecteurs.

On a montré à la section précédente que, pour toute surface S définie par F(x,y,z)=C et tout point (a,b,c) sur cette surface, $\nabla F(a,b,c)$ est une vecteur perpendiculaire au plan tangente à S au point (a,b,c). On a indiqué à la remarque 8.4.3 que ce résultat était aussi vrai pour \mathbb{R}^2 et que dans ce cas on doit remplacer les surfaces par des courbes. En d'autres mots :

Proposition 8.4.8

Soit Γ une courbe du plan définie par f(x,y) = C où $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et C est une constante. Si (a,b) est une point de cette courbe, alors $\nabla f(a,b)$ est perpendiculaire à la droite tangente à Γ au point (a,b).

La démonstration de ce dernier résultat dans \mathbb{R}^2 est identique à la démonstration que nous avons donné dans \mathbb{R}^3 à la section précédente. Néanmoins, vu l'importance de ce résultat, nous répétons cette démonstration ci-dessous.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et

$$\Gamma = \{(x,y): f(x,y) = C\}$$

une courbe dans l'espace (en fait une courbe de niveau de f). Supposons que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soit une représentation paramétrique de la courbe Γ . On a donc

$$f(\phi(t)) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) = C$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on dérivée cette expression par rapport à t, on trouve

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \, \phi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \, \phi_2'(t)$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_1(t), \phi_2(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \right), (\phi_1'(t), \phi_2'(t)) \right\rangle$$

$$= \left\langle \nabla f(\phi(t)), \phi'(t) \right\rangle.$$

Si (a,b) est une point de la courbe Γ et $\phi(t)=(a,b)$ pour $t=\alpha$, alors

$$0 = \langle \nabla f(\phi(\alpha)), \phi'(\alpha) \rangle = \langle \nabla f(a, b), \phi'(\alpha) \rangle .$$

Or, $\phi'(\alpha)$ est une vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha) = (a, b)$. Donc, le gradient $\nabla f(a, b)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point (a, b).

Si on combine le résultat énoncé ci-dessus et le résultat de la proposition 8.4.7 on obtient que :

Proposition 8.4.9

Soit Γ une courbe de niveau d'une fonction différentiable $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = C\}$$

où C est une constante. Soit (a, b) une point de Γ . À partir de (a, b), la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement est perpendiculaire à la courbe de niveau Γ (voir figure 8.8.)

Exemple 8.4.10

Soit $f(x, y, z) = 5x^2z + 3x^2y + \sin(yz)$. Dans quelle direction la fonction f croît-elle le plus rapidement au point (2, 1, 0) et quelle est ce taux de croissance maximal?

La direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement est $\nabla f(2,1,0)$. Or

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$$
$$= \left(10xz + 6xy, 3x^2 + z\cos(yz), 5x^2 + y\cos(yz)\right)$$

Donc, $\nabla f(2,1,0) = (12,12,21)$ est la direction dans laquelle f croît le plus rapidement. Le taux de croissance maximal (i.e. le taux de croissance dans la direction $\nabla f(2,1,0)$) est

$$\|\nabla f(2,1,0)\| = \sqrt{12^2 + 12^2 + 21^2} = 27$$
.

£

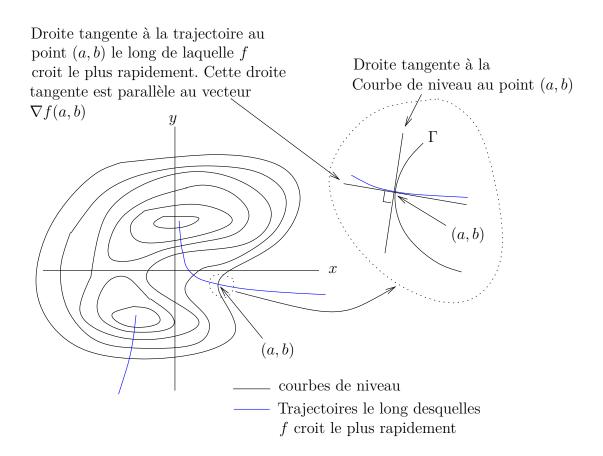


FIGURE 8.8 – Les trajectoires (i.e. courbes) le long desquelles f croît le plus rapidement coupent les courbes de niveau de f perpendiculairement.

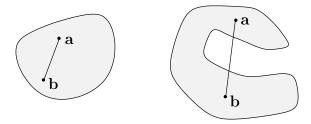


FIGURE 8.9 – L'ensemble à gauche est convexe alors que celui à droite ne l'est pas.

8.4.3 Théorème de la moyenne

le Théorème de la moyenne (??) pour les fonctions d'une variable a une généralisation aux fonctions de plusieurs variables.

Théorème 8.4.11 (Théorème de la moyenne)

Soit D, un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , qui contient les points \mathbf{a} et \mathbf{b} ainsi que le segment de droite L de \mathbf{a} à \mathbf{b} . Soit $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de L. Alors, il existe un point \mathbf{c} de L tel que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{c}), (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \rangle$$

Pour énoncer le prochain résultat, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définiton 8.4.12

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dira que D est un **ensemble convexe** si, quel que soit les points \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D, le segment de droite L de \mathbf{a} à \mathbf{b} est aussi inclus dans D.

Le concept d'ensembles convexes est illustré à la Figure 8.9.

Corollaire 8.4.13

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . S'il existe une constante M telle que $||\nabla f(\mathbf{x})|| \leq M$ pour tout $\mathbf{x} \in D$, alors $|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leq M \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D.

On a vue que pour une fonction d'une variable f, si f'(x) = 0 pour tout x sur un intervalle, alors f est une fonction constante sur l'intervalle. Le corollaire précédent généralise ce concept aux fonctions de plusieurs variables.

Corollaire 8.4.14

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . Si $f: D \to \mathbb{R}$ satisfait $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout \mathbf{x} dans D, alors f est constante sur D.

En effet, le Corrolaire 8.4.130 avec M=0 donne $f(\mathbf{b})=f(\mathbf{a})$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D.

8.5 Approximation locale des fonctions de plusieurs variables

On a vue à la Section ?? que l'on pouvait estimer la valeur d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ à l'aide de l'approximation linéaire $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ pour x près de a. Cela correspondait à utiliser la droite tangente pour estimer les valeurs de f(x) pour x près de a. De la même manière, on peut utiliser le plan tangent pour estimer la valeur d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ au voisinage d'une point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \rangle$$

= $f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{j}}(\mathbf{a})(x_{j} - a_{j})$ (8.5.1)

C'est un polynôme de degré un en x_1, x_2, \ldots, x_n .

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut obtenir une meilleure approximation locale d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si on utilise un polynôme de degré plus grand que un. On a une version du Théorème de Taylor, Théorème ??, pour les fonctions de plusieurs variables. Avant d'énoncer cette version du théorème, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$; c'est-à-dire, α est un vecteur dont les composantes sont des nombres naturels. On pose

$$\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right) \right) \right)$$

en respectant la convention que l'on ignore $\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ lorsque $\alpha_j = 0$.

De plus, on définie $\alpha!$, $|\alpha|$ et \mathbf{y}^{α} pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! ,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

 et

$$\mathbf{y}^{\alpha} = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} .$$

Exemple 8.5.1

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ et $\alpha = (2, 0, 1, 3)$. Alors

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} f = \frac{\partial^{2}}{\partial x_{1}^{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{3}} \left(\frac{\partial^{3}}{\partial x_{4}^{3}} f \right) \right) ,$$

$$\alpha! = 2! \ 0! \ 1! \ 3! = 12 ,$$

$$|\alpha| = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$$

et

$$\mathbf{y}^{\alpha} = y_1^2 \ y_2^0 \ y_3^1 \ y_4^3 = y_1^2 y_3 y_4^3 \ .$$

Théorème 8.5.2 (Théorème de Taylor)

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+1} . Quel que soit \mathbf{x} et \mathbf{a} dans \mathbb{R}^n , il existe $\xi = \xi(k, \mathbf{a}, \mathbf{x})$ sur le segment de droite de \mathbf{x} à \mathbf{a} tel que

$$f(\mathbf{x}) = p_k(x) + r_k(x)$$

οù

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}$$

et

$$r_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} f(\xi) (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}.$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour** x **près de** c et r_k est l'erreur de troncature.

Par la suite, nous aurons besoin de seulement deux cas particuliers du Théorème de Taylor.

Pour k = 1, nous avons

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j)$$
.

C'est l'approximation linéaire que l'on a donné en (8.5.1).

Pour k = 2, nous avons

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) .$$

Cette dernière expression possède une très jolie représentation algébrique qui nous sera très utile par la suite. Posons

$$D f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

et

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

La matrice $H(\mathbf{x})$ est appelée la **matrice Hessian** de f au point \mathbf{x} . Elle va jouer un rôle important quand nous ferons l'étude des valeurs extrêmes pour une fonction de plusieurs variables à la section suivante.

 $D f(\mathbf{x})$ est seulement $\nabla f(\mathbf{x})$ dans le format utilisé en algèbre linéaire; c'est-à-dire, une matrice de dimension $1 \times n$ (une ligne et n colonnes).

De même, si on représente le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sous la forme d'une matrice colonne utilisé en algèbre linéaire.

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} ,$$

on peut alors écrire.

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + D f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathsf{T}} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$
.

8.6 Points critiques et valeurs extrêmes 🔑

On a vue que pour trouver les minimums et maximums locaux d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il fallait trouver les points critiques de la fonction; C'est-à-dire, les points p où soit que f n'est pas différentiable à p, ou soit que f'(p) = 0. Cette procédure est aussi valable pour les fonctions de plusieurs variables après avoir définie ce qu'est un point critique pour une fonction de plusieurs variables.

Définiton 8.6.1

Une fonction continue $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possède un **point critique** $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si une des deux conditions suivantes est satisfaite.

- 1. Une des dérivées partielles de f n'existe pas à \mathbf{p} .
- 2. $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

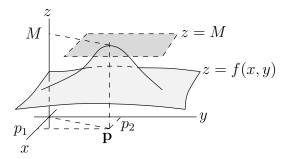


FIGURE 8.10 – La fonction f a un maximum local en \mathbf{p} . Le plan tangent à la courbe $y = f(\mathbf{x})$ au point $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est horizontal.

On a vue que si p est un maximum (ou minimum) local d'une fonction différentiable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors f'(0) = 0. La droite tangente à la courbe y = f(x) au point (p, f(p)) est horizontal donc sa pente est nulle. Le même raisonnement nous donne le résultat suivant.

Proposition 8.6.2

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si f a une maximum (ou minimum) local en un point \mathbf{p} , alors $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$; c'est-à-dire, \mathbf{p} est un point critique.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la Figure 8.10 qui possède un maximum local au point \mathbf{p} . On peut voir à la Figure 8.10 que le plan tangent à la courbe y = f(x,y) au point $(x,y) = \mathbf{p}$ est donné par z = M où $M = f(\mathbf{p})$ est la valeur maximale. On a donc que $\frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial y} f(\mathbf{p}) = 0$; c'est-à-dire, $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Pour compléter notre comparaison avec les fonctions d'une variable, on généraliser le test de la dérivée seconde, Proposition ??. Pour cela, on a besoin du développement de Taylor de la fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{a} de f. On suppose naturellement que la fonction est suffisamment différentiable au voisinage du point critique \mathbf{a} . On obtient du Théorème 8.5.2 que

$$f(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{x}) + r_2(\mathbf{x})$$

$$= f(\mathbf{a}) + D f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathsf{T}} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r_2(\mathbf{x})$$

$$= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathsf{T}} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r_2(\mathbf{x})$$

où nous avons utilisé le fait que D $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ au point critique \mathbf{a} .

Intuitivement, puisque $r_2(\mathbf{x})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}$ avec $|\alpha| = 3$ alors que $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\top}H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}$

avec $|\alpha| = 2$, on peut supposer que cette dernière expression est dominante lorsque \mathbf{x} est prêt de \mathbf{a} . Ainsi, à toute fin pratique, on peut écrire

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathsf{T}} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

pour **x** prêt de **a**.

Donc, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\top} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, on aura que f possède le minimum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. De même, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\top} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, on aura que f possède le maximum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Mais comment peut-on savoir si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\top} H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ est toujours négative ou positive pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Commençons par une définition.

Définition 8.6.3

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. On dit que A est strictement définie positive si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top} A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, et A est strictement définie négative si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top} A \mathbf{x} < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$,

On peut résumer le contenu du paragraphe qui précédent cette définition en disant que f possède le minimum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ si $H(\mathbf{a})$ est strictement définie positive, et f possède le maximum local $f(\mathbf{a})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ si $H(\mathbf{a})$ est strictement définie négative.

Remarque 8.6.4 @

Vous noterez que l'on parle maintenant de $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top} A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ et que l'on ne fait plus référence à \mathbf{x} prêt de $\mathbf{0}$. Cela est dû au fait que $q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 q(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, si \mathbf{x} est loin de \mathbf{x} , on peut choisir $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \mathbf{x}$ est suffisamment prêt de \mathbf{x} pour avoir $q(\lambda \mathbf{x}) = 0$. Puisque $\lambda \neq 0$, il s'en suit que $q(\mathbf{x}) = 0$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si une matrice carré A est strictement définie positive ou négative.

Théorème 8.6.5

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est strictement définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives. La matrice A est strictement définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont négatives.

Il peut s'avérer difficile de trouver toutes les valeurs propres d'une matrice, en particulier si les dimensions de la matrice sont grandes. Le critère suivante donne une condition suffisante pour déterminer si une matrice est définie positive.

Proposition 8.6.6

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Soit A_k la matrice formée des k premières colonnes et rangés de A. La matrice A est strictement définie positive si $\det(A_k) > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer une proposition semblable à la proposition précédente pour le cas d'une matrice strictement définie négative.

On conclut de la proposition précédente qu'un matrice $A = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est définie positive si $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} > 0$. Dans le cas où la matrice A est la matrice Hessian

$$H(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment différentiable ayant un point critique en $(x, y) = \mathbf{a}$, on peut conclure que $H(\mathbf{a})$ est strictement définie positive si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0$$
 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})\right)^2 > 0$.

Dans ce cas, la fonction f possède un minimum local au point $(x, y) = \mathbf{a}$.

En raisonnant avec la matrice Hessian $H(\mathbf{a})$, on peut en fait obtenir plus d'information sur le comportement de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{a} de f.

Proposition 8.6.7

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^3 et **a** un point critique de f.

- 1. Si $\det(H(\mathbf{a})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})\right)^2 < 0$, alors f à un col en $(x, y) = \mathbf{a}$ (voir Figure 8.11).
- 2. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0$ et det $(H(\mathbf{a})) > 0$, alors f à un minimum local en $(x, y) = \mathbf{a}$.
- 3. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) < 0$ et det $(H(\mathbf{a})) > 0$, alors f à un maximum local en $(x, y) = \mathbf{a}$.
- 4. Si $\det(H(\mathbf{a})) > 0$, alors on ne peut rien conclure (voir Figure 8.11).

Exemple 8.6.8

Soit $f(x,y) = x^3 - 6xy + 8y^3$. On cherche les points critiques de cette fonction et, pour chacun d'eux, on détermine s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

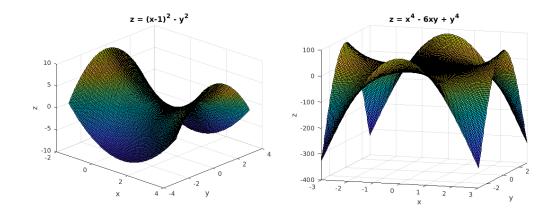


FIGURE $8.11 - \text{\`A}$ gauche : un col prédit par la première condition de la Proposition 8.6.7. \`A droite : un col que l'on ne peut pas prédire. C'est une situation possible lorsque la quatrième condition de la Proposition 8.6.7 est satisfaite.

Pour déterminer les points critiques, on considère $\nabla f(x,y) = (0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6y = 0 \tag{8.6.1}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow -6x + 24y^2 = 0 \Rightarrow 2(x+1)y = 0$$
. (8.6.2)

De (8.6.1), on a que $y = x^2/2$. Si on cette expression pour y dans (8.6.2), on obtient $-6x + 6x^4 = 6(x^3 - 1)x = 0$. Donc x = 0 ou 1. Pour x = 0, on obtient le point critique (0, 0) et pour x = 1 obtient le point critique (1, 1/2).

Pour déterminer si on a un maximum local, un minimum local ou un col, on a besoin de la matrice Hessian.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

Pour (0,0), on a

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det H(0,0) = -36 < 0$, on a un col.

Pour (1, 1/2), on a

$$H(1, 1/2) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$$

Puisque det H(1,1/2) = 108 > 0 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1/2) = 6 > 0$, on a un minimum local à ce point.

4

8.7 Les multiplicateurs de Lagrange

À la Section ??, on a vue comment trouver le maximum et minimum (s'ils existent) d'une fonction f(x,y) sous une contrainte g(x,y)=0. Par exemple, on aurait pu vous demander dans cette section de trouver les points de l'ellipse $x^2+2y^2=9$ qui sont les plus loin du point (0,1). Cela revient à vous demander de trouver les points (x,y) qui satisfont $g(x,y)=x^2+2y^2-9=0$ et qui donnent le maximum du carré de la distance au point (0,1); c'est-à-dire, le maximum de $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$.

La technique présentée à la Section ?? serait d'écrire y en fonction de x (ou l'inverse) à partir de $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et de substituer y dans $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ pour obtenir une fonction d'une variable en x dont on peut trouver le minimum absolu à l'aide des méthodes que l'on a vue pour les fonctions d'une variable.

Cette technique est valable dans le cas d'une fonction f de deux variables puisque le problème est réduit à l'étude d'une fonction d'une variable après la substitution. Si f est une fonction de plus de deux variables, la fonction obtenue après substitution aura toujours plus d'une variable. Le problème de trouver le maximum ou minimum absolu demeure difficile.

Considérons le problème de trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ où $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

l'équation $g(\mathbf{x}) = 0$ représente une surface S dans \mathbb{R}^n . Nous assumerons que f et g sont différentiables et que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in S$. Comme on a vu à la Section 8.4.1, cela implique que le plan tangent à la surface S est bien défini en tout point de S.

Supposons que la fonction f atteint son maximum absolu (et donc local) au point \mathbf{a} de la surface S. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un courbe sur S qui passe par \mathbf{a} ; c'est-à-dire, $g(\phi(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\phi(0) = \mathbf{a}$.

La fonction $g = f \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a donc un maximum local en t = 0. Donc, 0 est un point critique de g et, grâce à la Proposition 8.1.10, on a

$$0 = g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\phi(0)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi_i(0) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \phi'(0) \rangle$$

Comme cela est vrai pour toute courbe de S qui passe par \mathbf{a} , on a que $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire à tous les vecteurs du plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc, $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} .

Or, on a vu que $\nabla g(\mathbf{a})$ est aussi perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc, $\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla f(\mathbf{a})$ sont parallèles. On a donc

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$$

pour un nombre réel λ . Le paramètre λ est appelé le multiplicateur de Lagrange.

Méthode 8.7.1 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ où $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \ . \tag{8.7.1}$$

On trouve ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

a. On suppose que l'ensemble $\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x})=0\}$ est fermé et borné

On remarque que (8.7.1) est un système de n équations avec n+1 inconnues : x_1, x_2, \ldots, x_n et λ . On semble avoir compliqué le problème initial en ajoutant la variable λ . Cependant, dans plusieurs situations, il est plus simple de résoudre (8.7.1) que d'utiliser une méthode classique de substitution. Il ne faut pas oublier qu'il n'est généralement pas facile d'isoler une des variables de $g(\mathbf{x}) = 0$.

Exemple 8.7.2

Revenons à notre exemple du début de la section. Trouver les points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 9$ qui sont les plus loin du point (0,1). Comme on a mentionné, cela revient à trouver le points (x,y) qui satisfont $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et qui donnent le maximum du carré de la distance au point (0,1); c'est-à-dire, le maximum de $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \Rightarrow 2x = 2\lambda x \Rightarrow x(1-\lambda) = 0$$
 (8.7.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \Rightarrow 2(y-1) = 4\lambda y \Rightarrow y(1-2\lambda) = 1$$
 (8.7.3)

Si $\lambda \neq 1$, (8.7.2) donne x = 0. L'équation $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ devient $2y^2 = 9$ et on trouve $y = \pm 3/\sqrt{2}$. On obtient deux points : $(0, \pm 3/\sqrt{2})$.

Si $\lambda=1$, (8.7.3) donne y=-1. L'équation $x^2+2y^2-9=0$ devient $x^2=7$ et on trouve $x=\pm\sqrt{7}$. On obtient deux autres points : $(\pm\sqrt{7},-1)$.

Puisque l'ellipse S est un ensemble borné et fermé de \mathbb{R}^2 et que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut conclure du Théorème 7.3.1, Théorème des valeurs extrêmes, que f atteint sa valeur maximal (et minimal) en au moins un point de l'ellipse. Puisque le maximum absolu est aussi un maximum local, il faut donc que ce maximum absolu soit atteint à au moins un des quatre points que l'on a trouvé.

Or

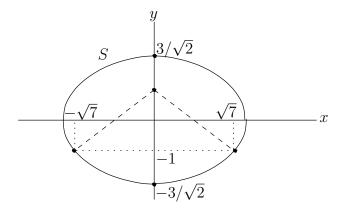
$$f(0,3/\sqrt{2}) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \approx 1.25736$$
$$f(0,-3/\sqrt{2}) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \approx 9.74264$$
$$f(\sqrt{7},-1) = (\sqrt{7})^2 + (-1-1)^2 = 11$$

 et

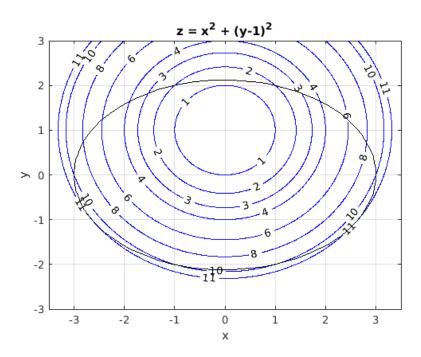
$$f(-\sqrt{7},-1) = (-\sqrt{7})^2 + (-1-1)^2 = 11$$
.

Donc la distance maximal est $\sqrt{11}$ aux points $(\pm\sqrt{7},-1)$.

On représente les quatre points d'intérêt dans la figure suivante.



De plus, nous avons tracé l'ellipse S et quelques courbes de niveau de f dans la figure suivante.



On peut bien voir que f atteint son maximum absolu aux points $(\pm\sqrt{7},-1)$. On note aussi que f a un minimum local au point $(0,-3/\sqrt{2})$ mais son minimum absolu est bien au point $(0,3/\sqrt{2})$.

En raisonnant comme on vient de la faire, on peut monter que la méthode de Lagrange se généralise au cas où il y a plus d'une contrainte.

Méthode 8.7.3 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous les contraintes que $g_i(\mathbf{x}) = 0$ où $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ_i le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \ .$$

On trouve ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

Pour la méthode précédente, on suppose que le système d'équations algébriques $g_i(\mathbf{x}) = 0$ pour $1 \le i \le m$ a un ensemble de solutions non-triviales. Il n'y a malheureusement pas de méthode générale pour résoudre un système d'équations algébriques de degré plus grand que un comme on a pour les systèmes d'équations linéaires.

8.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R}^m \otimes \clubsuit$

On aimerait bien que la définition de la dérivée d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soit très semblable à la définition de la dérivée d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a une dérivée au point $c \in \mathbb{R}$, on a que (??) est satisfait. C'est-à-dire,

$$\frac{|f(c+h) - f(c) - f'(c)h|}{|h|} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

Donc, f'(c) est le nombre A tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - Ah|}{|h|} = 0.$$
 (8.8.1)

C'est cette dernière formulation de la dérivée d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point c que nous généraliserons aux fonctions $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On doit remplacer

- 1. $c \in \mathbb{R}$ par $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$,
- 2. $h \to 0$ dans \mathbb{R} par $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^n et
- 3. |f(c+h) f(c) Ah| par $||f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) f(\mathbf{c}) A\mathbf{y}||$ où A est une matrice de dimension $m \times n$.

La multiplication par une nombre réel A est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ainsi, lorsque $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a que Ah dans l'expression |f(c+h) - f(c) - Ah| est le résultat de l'application linéaire A appliquée à h. Les matrices de dimensions $m \times n$ représentent les applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Ainsi, lorsque $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on a que $Ah \in \mathbb{R}^m$ dans l'expression $||f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}||$ est le résultat de l'application linéaire A appliquée à $h \in \mathbb{R}^n$.

On a donc la définition suivante.

Définition 8.8.1

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une matrice A de dimension $m \times n$ telle que

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0,$$
 (8.8.2)

on dit que f est **différentiable au point c** et on écrit $D f(\mathbf{c}) = A$.

Si (8.8.2) est satisfait, on que $f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}$ converge vers $\mathbf{0}$ plus rapidement que \mathbf{y} lorsque \mathbf{y} converge vers $\mathbf{0}$. Donc, pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$, on a

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) \approx f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}$$
.

En d'autres mots, $f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}$ est **l'approximation linéaire** de $f(\mathbf{c} + \mathbf{y})$ pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$. Si on pose $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{y}$, on peut reformuler l'expression précédente dans la forme bien connue

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{c}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

pour x près de c.

Il est très rare que l'on calcul la dérivée d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ à partir de la définition. On utilise le résultat suivant pour calculer la dérivée.

Théorème 8.8.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f: V \to \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable au point \mathbf{c} alors les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c})$$
 , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$,

existent. De plus,

$$D f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est le plus près d'un énoncé dans le sens inverse du théorème précédent que l'on puisse avoir. C'est ce résultat qui est très utile pour calculer les dérivées de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Proposition 8.8.3

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f: V \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivée partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{c})$$
 , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$,

existent et sont continues sur V, alors f est différentiable pour tout $\mathbf{x} \in V$ et

$$D f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.8.4

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$
$$f_2(x,y) = \sin(\pi(x^2 + y^2))$$

Calculer la dérivée de f au point $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puisque

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} ,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x \pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2y \pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) ,$$

on obtient

$$D f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(1,2)} & \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(x,y)=(1,2)} \\ 2x \pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \Big|_{(x,y)=(1,2)} & 2y \pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \Big|_{(x,y)=(1,2)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2/25 & -4/25 \\ -2\pi & -4\pi \end{pmatrix}.$$

8.9. Exercices 401

1. Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le cas m=1, on a que

$$D f(\mathbf{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c})\right) = \nabla f(\mathbf{c}) .$$

Donc, la définition de dérivée d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un prolongement de la définition du gradient d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. Si $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, le cas n=1, on a que ϕ est la représentation paramétrique d'une courbe dans \mathbb{R}^m . De plus, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ est en fait une nombre réel que l'on peut simplement appeler c. Ainsi,

$$D \phi(c) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(c) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(c) \\ \dots \\ \frac{d\phi_m}{dt}(c) \end{pmatrix} = \phi'(c)$$

où $\phi'(c) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur parallèle à la tangente à la courbe

$$\Gamma = \{ \phi(t) : t \in \mathbb{R} \}$$

au point $\phi(c)$ comme on a vue lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes.

Définiton 8.8.6

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f: U \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe C^k si, pour tout i, les dérivées partielles d'ordre k de f_i existent et sont continues en tout point du domaine de f. On écrit $f \in C^k(U)$

Exercices 8.9

Question 8.1

Evaluez toutes les dérivées premières des fonction suivantes :

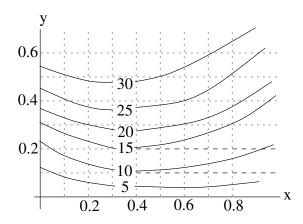
a)
$$f(x, y, z, t) = xy^2 z^3 t^4$$
 b) $f(x, y) = \frac{2x + y}{x - y}$ c) $h(x, y) = f(x)g(y)$
d) $h(x, y) = f(xy)$ e) $h(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

d)
$$h(x,y) = f(xy)$$
 e) $h(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Question 8.2

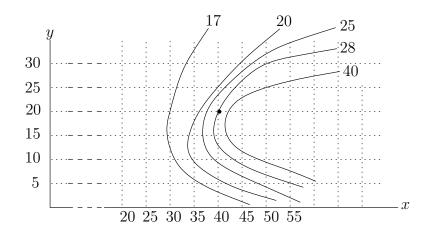
Le graphique suivant donne quelques courbes de niveau de la fonction f(x,y). Utiliser ce graphique pour estimer

$$\frac{\partial f(0.6, 0.4)}{\partial x}$$
 et $\frac{\partial f(0.2, 0.3)}{\partial y}$.



Question 8.3

Quelques courbes de niveau d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont données dans la figure suivante :



- a) Utilisez cette information pour obtenir une équation approximative de l'équation du plan tangent à la surface z = f(x, y) au point (x, y, z) = (40, 20, 28).
- b) Utilisez le résultat en (a) pour estimer f(43, 24).

Question 8.4

Si $w = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^3$ où $x = s + t^2$, y = st et $z = s^2 + t$, calculer $\frac{\partial w}{\partial s}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ au point (s, t) = (1, 2).

Question 8.5 🔑

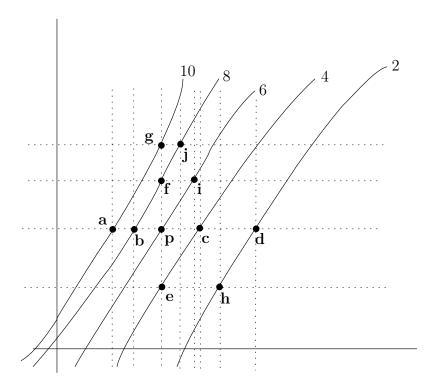
Calculez les dérivées partielles f_{xyy} et f_{xyz} de la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^2 + 3x^3y^2z^4.$$

Question 8.6

La figure suivante donne quelques courbes de niveau d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

8.9. Exercices 403



Déterminez le signe (possible) des dérivées partielles suivantes.

$$\mathbf{a}) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$$

b)
$$\frac{\partial f}{\partial y}$$
(**p**)

$$\mathbf{c}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})$$

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$$
 b) $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})$ c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})$
d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p})$ e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$

$$\mathbf{e}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$$

Question 8.7

Les courbes $y = x^3$ et $x^2 + 3y^2 = 4$ se coupent aux points (1,1) et (-1,-1). Utilisez le gradient pour déterminer si elles se coupent orthogonalement.

Question 8.8

Pour chacune des surfaces données ci-dessous, trouvez l'équation du plan tangent au point donné.

- a) La surface $z = f(x, y) = \sin(xy)$ au point (1, 0, 0).
- **b**) La surface $z = f(x, y) = 1 \cos(x) + \sin(y)$ au point $(0, \pi, 0)$.

Question 8.9

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z^2 + x^2 - 4xy + y^2 = 2$ au point (1, 1, 2).

Question 8.10

Soit S une surface donnée par la représentation paramétrique x = u - v, y = u + v et $z = u^2$. Trouvez l'équation du plan tangent à cette surface au point (0, 2, 1).

Question 8.11

Pour chacune des fonctions f(x,y) suivantes, trouvez l'équation du plan tangent à la surface z = f(x, y) au point (x_0, y_0, z_0) donné, et déterminez dans quelle direction la fonction f(x, y)augmente le plus rapidement à partir de (x_0, y_0) .

a)
$$f(x,y) = x^2y^4$$
 et $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$.

b)
$$f(x,y) = x^2y - xy^3 + 3$$
 et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3)$

Question 8.12

Quels sont les points (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ dont le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) est parallèle au plan 3x - y + 3z = 1?

Question 8.13

Si la dérivée de f(x,y) au point (1,2) dans la direction (1,1) est 4 et la dérivée de f(x,y) au point (1,2) dans la direction (-1,1) est 3, calculez le gradient $\nabla f(1,2)$. De plus si f(1,2)=5, donner l'équation du plan tangent à la surface z = f(x, y) au point (1, 2, 5).

Question 8.14

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculez la dérivée au point donnés et dans la direction données.

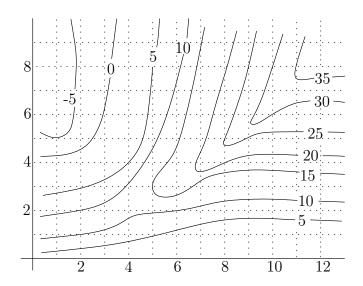
- a) $f(x,y) = x^2y + 4y^2$ au point (2,1) dans la direction du vecteur $(1,\sqrt{3})$. b) $f(x,y,z) = xyz + \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ au point (1,1,2) dans la direction du vecteur $\mathbf{v} = (1,1,2)$ $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
- c) $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{xyz}$ au point (1,0,3) dans la direction du vecteur (2,1,-2).

Question 8.15

Soit f(x,y) = xy, utiliser la définition (avec la limite) de la dérivée selon une direction pour calculer la dérivée de f(x,y) au point (2,-1) dans la direction $\mathbf{u}=(1,-2)$.

Question 8.16

Utilisez les courbes de niveaux de la fonction f(x,y) données dans la figure ci-dessous pour estimer la dérivée $f_{\mathbf{u}}(5,3)$ de f dans la direction $\mathbf{u}=(-1,1)$.



Question 8.17

Utilisez l'approximation linéaire de :

- a) $f(x,y) = 2x^2y^2 + 3xy + x$ au point (1,1) pour estimer f(0.9,1.1).
- **b**) $f(x,y) = \ln\left(\frac{2x^2 + 5y^2}{7}\right)$ au point (1,1) pour estimer f(0.98, 1.01).

8.9. Exercices 405

c) $f(x,y) = (x^2 - y^5)^{4/3}$ au point (3,1) pour estimer f(3.2,1.2).

d)
$$f(x,y) = 1 - \frac{2x}{y} + 3y - 4xy^2 + e^{3x}$$
 au point $(0,1)$ pour estimer $f(-0.1,0.9)$.

Question 8.18

Soit $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$. Les points (0,1) et (1/3,1/3) sont des points critique de f. Pour chacun de ces points, déterminez s'il est un maximum local, un minimum local, un col ou autre chose.

Question 8.19 🔑

Pour chacune des fonctions suivantes, trouvez les points critiques de cette fonction et, pour chacun d'eux, déterminez s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

a)
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

c) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

b)
$$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$$

c)
$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

b)
$$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$$

d) $h(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy + 290$

e)
$$h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + \frac{1}{8}$$

Question 8.20

L'aire d'une ellipse de demi axes a et b est donnée par $A = \pi ab$. Si a + b = 2, pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'aire maximale?

Question 8.21

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le minimum et maximum absolu de la fonction sous la contrainte donnée.

- a) f(x,y) = xy avec la contrainte $x^2 + y^2 = 2$.
- **b**) $f(x,y) = 9y^2 + 4x^2$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
- c) f(x, y, z) = x + 3y z avec la contrainte $x^2 + 4y^2 + z^2 = 17$.

Question 8.22

Trouvez le volume maximal de la boite ayant des côtés parallèles aux axes de coordonnées qui est contenu à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$.

Question 8.23

La base d'un aquarium de volume V est faite de marbre et les côtés sont fait de verre. Le coût par unité de surface du marbre est cinq fois celui du verre. Trouvez les dimensions de l'aquarium qui minimisent le coût de l'aquarium

Question 8.24

Trouvez la valeur maximale de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sous la contrainte que $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Question 8.25

Pour chacune des fonctions suivante, déterminez si elle possède un maximum et minimum absolu sur le domaine D donnée. Si oui, trouvez ce maximum et minimum absolu.

a)
$$f(x,y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$$
 et $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$

b)
$$f(x,y) = y + x^2$$
 et $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

Question 8.26

Est-ce que $f(x,y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$ a un maximum absolu sur le disque $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$? Si oui, trouvez ce maximum absolu.

Question 8.27

Est-ce que $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ a un maximum absolu sur la région S bornée par l'axe des x, l'axe des y et la droite y = 6 - x. Si oui, trouvez ce maximum absolu.

Question 8.28 •

Pour chacune des fonctions $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ci-dessous,

I: Calculez la dérivée de la fonction f au point (-1,1).

II: Donnez l'approximation linéaire de f autour du point (-1,1)

III: Comparez la valeur de f au point (-0.9, 1.05) avec la valeur donnée par l'approximation linéaire au point (-0.9, 1.05).

a)
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x/y \\ 2xy \end{pmatrix}$$
 b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y + 2xe^y \\ \frac{x}{y} - 3ye^{-x} \end{pmatrix}$



Systèmes d'équations différentielles



Introduction 9.1

Exemple 9.1.1 (Système prédateurs-proies)

L'exemple suivant provient de Murray [9].

L'exemple classique d'un système d'équations différentielles est le système qui décrit le nombre d'individus de deux espèces animales; une espèce représentant les proies et l'autre représentant les prédateurs. Les deux espèces sont en compétition pour leur existence.

On peut imaginer que, si les prédateurs dévorent trop de proies, ces prédateurs mettront en danger leur propre existence en détruisant leur source de nourriture. Par contre, si le nombre de proies devient très grand, il sera facile pour les prédateurs de capturer des proies et le nombre de prédateurs va augmenter. Qu'arrivera-t-il à long terme? Est-ce que les espèces vont disparaître? Est-ce qu'il s'établira un équilibre entre le nombre de proies et de prédateurs?

On peut décrire l'interaction entre les deux espèces à l'aide d'équations différentielles. Soit q(t) le nombre de proies au temps t et p(t) le nombre de prédateurs au temps t dans un espace donné. Le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des proies et prédateurs. Les unités de temps normalement utilisées pour les mammifères sont les années. Pour certains insectes on utilisera les heures.

Lotka et Voltera, deux biomathématiciens à une époque où on ne parlait pas de biomathématiques, développèrent séparément (en 1920 et 1926 respectivement) le système d'équations différentielles suivant

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q(a - b p)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p(c q - d)$$
(9.1.1)

où a, b, c et d sont des constantes positives. Ce système d'équations différentielles porte maintenant le nom de système (d'équations différentielles) de Lotka-Voltera.

Commençons par expliquer le rôle et la signification des constantes dans le système (9.1.1). S'il n'y a pas d'interaction entre les proies et les prédateurs, le nombre de proies et de prédateurs est décrit par les équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = a \, q \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -d \, p \; .$$

Ces deux équations sont indépendantes et peuvent être résolues par la méthode de séparation des variables. La constante a représente le taux relatif de croissance pour les proies et la constante -d représente le taux relatif de croissance pour les prédateurs. Dans ce dernier cas, le taux de croissance est négatif car les prédateurs vont disparaître par manque de nourriture si la population de proies est absente.

On représente le nombre de contacts entre les proies et les prédateurs par le produit pq. Ainsi, le terme -bpq du côté droit de la première équation en (9.1.1) a un effet négatif sur le taux de croissance des proies car $-bpq \le 0$. Par contre le terme cpq du côté droit de la deuxième équation en (9.1.1) a un effet positif sur le taux de croissance car $cpq \ge 0$. Cela est consistant avec le fait que lorsqu'un prédateur entre en contact avec une proie, c'est la proie qui est la grande perdante.

Le système (9.1.1) semble dépendre de quatre paramètres : a, b, c et d. Par contre, il existe une dépendance entre ces quatre paramètres qui cache la simplicité du système. Le raisonnement suivant est appelé **non-dimensionalisation** et permet de réduire le nombre de paramètres au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire la comportement qualitatif de (9.1.1).

Si on pose

$$q(t) = \frac{d}{c}u(at)$$
, $p(t) = \frac{a}{b}v(at)$ et $\alpha = \frac{d}{a}$,

on obtient

$$q'(t) = \frac{d}{c} \frac{d}{dt} u(at) = \frac{da}{c} u'(at)$$

et

$$p'(t) = \frac{a}{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(at) = \frac{a^2}{b} v'(at) .$$

Ainsi, (9.1.1) donne

$$\frac{da}{c}u'(at) = \frac{d}{c}u(at)\left(a - b\frac{a}{b}v(at)\right) = \frac{ad}{c}u(at)\left(1 - v(at)\right)$$
(9.1.2a)

et

$$\frac{a^2}{b}v'(at) = \frac{a}{b}v(at)\left(c\frac{d}{c}u(at) - d\right) = \frac{ad}{b}v(at)\left(u(at) - 1\right) . \tag{9.1.2b}$$

Si on multiplie les deux côtés de (9.1.2a) par $\frac{c}{ad}$ et ceux de (9.1.2b) par $\frac{b}{a^2}$, on obtient

$$u'(at) = u(at) (1 - v(at))$$

$$v'(at) = \frac{d}{a} v(at) (u(at) - 1) = \alpha v(at) (u(at) - 1) .$$

9.1. Introduction 409

Finalement, si on ajuste le temps en posant $\tau = at$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u(1-v)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \alpha v(u-1)$$
(9.1.3)

Qualitativement, (9.1.3) est équivalant à (9.1.1); c'est-à-dire que l'on peut représenter tous les types de solutions que (9.1.1) possède en variant le paramètre α seulement.

Dans ce chapitre, nous développerons des outils pour analyser les systèmes d'équations différentielles comme (9.1.3).

Exemple 9.1.2 (Compétition – exclusion)

L'exemple suivant provient de Murray [9].

Le deuxième exemple de systèmes d'équations différentielles décrit le comportement de deux espèces animales, l'espèce P et l'espèce Q, restreintes à un même territoire et ayant la même source de nourriture.

Soit p(t) le nombre d'individus de l'espèce P au temps t et q(t) le nombre d'individus de l'espèce Q au temps t. Comme à l'exemple précédent, le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des deux espèces.

Si les deux espèces occupent des milieux distincts, ils n'entrent donc pas en compétition pour la nourriture, alors p est gouverné par une équation logistique et il en est de même pour q. Ce type d'équation a été étudié au chapitre sur les équations différentielles. On a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = a \, p \left(1 - \frac{p}{M_p} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = b \, q \left(1 - \frac{q}{M_q} \right) \,. \tag{9.1.4}$$

La constante a > 0 est associée au taux de croissance relatif de l'espèce P et la constante b > 0 est associée à celui de l'espèce Q. M_p est le nombre maximal d'individus de l'espèce P que le milieu peut supporter et M_q est le nombre maximal d'individus de l'espèce Q que le milieu peut supporter.

Les équations différentielles ci-dessus décrivent la situation où la consommation de nourriture d'une espèce n'a pas d'effet sur l'autre espèce. Par contre, si les deux espèces occupent le même milieu, elles entrent en compétition pour la nourriture disponible. Pour décrire le nombre d'individus d'une espèce, il faut donc tenir compte du nombre d'individus de l'autre espèce.

On considère le système d'équations différentielles suivant

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = a \, p \left(1 - \frac{p + c \, q}{M_p} \right) \tag{9.1.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = b \, q \left(1 - \frac{q + d \, p}{M_q} \right) \tag{9.1.5b}$$

Les constantes positives c et d sont déterminées par la quantité de nourriture consommée par chacun des individus des deux espèces — Peut-être qu'un individu de l'espèce P a besoin pour

survivre du double de la quantité de nourriture qu'un individu de l'espèce Q a besoin pour survivre. Les constantes c et d peuvent aussi dépendre de l'état de la source de nourriture après le passage d'une espèce – Peut-être que les individus d'une espèce détruisent plus de nourriture qu'ils en consomment.

Le terme $(p+cq)/M_p$ du côté droit de (9.1.5a) joue le même rôle que le terme p/M_p dans l'équation logistique à gauche en (9.1.4). Il faut tenir compte de l'impact de l'espèce Q sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce Q a un effet qui est c fois celle d'un individu de l'espèce P. De même, le terme $(q+dp)/M_q$ du côté droit de (9.1.5b) joue le même rôle que le terme q/M_q dans l'équation logistique à droite en (9.1.4). Il faut maintenant tenir compte de l'impact de l'espèce P sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce P a un effet qui est d fois celle d'un individu de l'espèce Q.

Le nombre de contacts entre les deux espèces est représenté par le produit pq. On parle de contact lorsque les individus des deux espèces vont se nourrir aux mêmes endroits.

Le système (9.1.5) semble dépendre de six paramètres : a, b, c, d, M_p et M_q . On peut utiliser la technique de **non-dimensionalisation** pour éliminer certains des paramètres.

Si on pose

$$p(t) = M_p u(at) \quad , \quad q(t) = M_q v(at) \; ,$$

$$\alpha = \frac{b}{a} \quad , \quad \rho = \frac{c M_q}{M_p} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{d M_p}{M_q} \; .$$

et que l'on ajuste le temps en posant $\tau = at$, le système (9.1.5) devient le système

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u(1 - u - \rho v)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \alpha v(1 - v - \xi u)$$
(9.1.6)

On a réduit le nombre de paramètres à trois. Comme à l'exemple précédent, (9.1.5) et (9.1.6) sont équivalant qualitativement.

Exemple 9.1.3

L'exemple suivant provient de Borelli et Coleman [3].

Médicament contre le rhume

Pour qu'un médicament contre le rhume soit efficace, il faut que la quantité du médicament dans le sang du patient soit plus grande qu'une certaine valeur minimale pour une période suffisamment longue.

Nous analyserons deux médicaments contre le rhume : un décongestionnant et un antihistaminique.

Une seule dose

Le nombre d'unités x(t) d'un médicament dans l'estomac au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1 x \tag{9.1.7}$$

9.1. Introduction 411

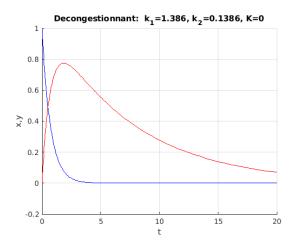


FIGURE 9.1 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge).

et le nombre d'unités y(t) de ce médicament dans le sang au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_1 x - k_2 y \ . \tag{9.1.8}$$

Les constantes k_1 et k_2 sont positives et déterminées par le médicament considéré.

 $k_1x(t)$ est le taux d'assimilation du médicament au temps t par le sang qui traverse l'estomac et $k_2y(t)$ est le taux d'élimination du médicament au temps t par le foie et les reins.

Si initialement on a x(0) = A unités du médicament (le patient avale une dose de A unités) et y(0) = 0 unité (c'est la première dose que le patient reçoit et il n'y a donc aucune trace du médicament dans le sang) la solution de (9.1.7) et (9.1.8) est

$$x(t) = Ae^{-k_1t}$$
 , $y(t) = -\frac{Ak_1e^{-k_1t}}{k_1 - k_2} + \frac{Ak_1e^{-k_2t}}{k_1 - k_2}$.

Pour un décongestionnant, on estime que $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Si on suppose que le patient prend initialement A = 1 unité du médicament. On obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 9.1.

Pour un antihistaminique, on estime que $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$. Si on suppose encore que le patient prend initialement A = 1 unité du médicament. On obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 9.2.

Si on considère seulement les quantités de médicament dans le sang, l'antihistaminique semble avoir un plus long effet. Par contre, le décongestionnant semble agir plus rapidement.

Un médicament administré de façon continue

Certaines pilules sont formées d'un très grand nombre de petites boules qui se dissolvent dans l'estomac à des rythmes différents. Le résultat est que le médicament n'est pas absorbé

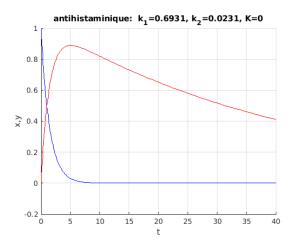


FIGURE 9.2 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge).

par l'estomac d'un seul coup comme dans le cas précédent mais il est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule).

Si on suppose que la fréquence à laquelle le patient prend une pilule est telle que le taux d'absorption dans l'estomac est constant à K unités par heure, alors le nombre d'unités x(t) dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités y(t) dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K - k_1 x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_1 x - k_2 y$$
(9.1.9)

Dans le présent problème, on a x(0) = 0 et y(0) = 0 unité initialement. La condition x(0) = 0 ne veut pas dire que le patient ne prend pas de médicament. Il reçoit une dose de K unités par heure. La condition x(0) = 0 veut dire que le patient n'a pas de médicament dans l'estomac au départ. De même, y(0) = 0 veut dire que le patient n'a pas de médicament dans le sang au départ.

La solution de (9.1.9) est

$$x(t) = -\frac{K\left(-1 + e^{-k_1 t}\right)}{k_1}$$
$$y(t) = -\frac{K\left(-k_1 + k_2 - k_2 e^{-k_1 t} + k_1 e^{-k_2 t}\right)}{k_2(k_1 - k_2)}$$

La quantité x(t) du médicament dans l'estomac converge vers $x = K/k_1$ lorsque t tend vers l'infini (on a aussi que $x'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$) et la quantité y(t) du médicament dans le sang converge vers $y = K/k_2$ lorsque t tend vers plus l'infini (on a aussi que $y'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$).

9.1. Introduction 413

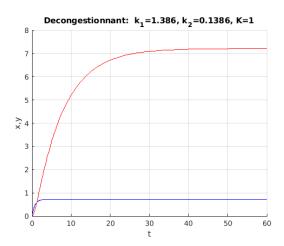


FIGURE 9.3 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication continue.

On a mentionné précédemment que $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$ pour un décongestionnant. Si on suppose que K = 1 unité par heure, on obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 9.3.

On a aussi mentionné précédemment que $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$ pour un antihistaminique. Si on suppose toujours que K = 1 unité par heure, on obtient les graphes de x et y que l'on retrouve à la figure 9.4.

Le décongestionnant et l'antihistaminique ont des comportements semblables à long terme dans le présent cas. $x'(t) \to 0$ et $y'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Plus précisément, x(t) est asymptotique à $x = K/k_1$ et y(t) est asymptotique à $x = K/k_2$ lorsque $t \to \infty$. Si on considère seulement les quantités de médicament dans le sang, le décongestionnant commence à agir beaucoup plus rapidement que l'antihistaminique. Par contre, l'action de l'antihistaminique est beaucoup plus forte.

Un médicament administré à intervalle régulier

Dans l'exemple précédent, on a supposé que le médicament est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule) et que le patient prend une pilule à intervalle régulier de façon à maintenir le taux d'absorption constant à K unités par heure. C'est une situation idéale qui est presque impossible à satisfaire.

La situation suivante est plus réaliste. Supposons que le type de pilule utilisée est comme celui de la section précédente. Plus précisément, on suppose que le médicament entre dans l'estomac à un taux constant de K=12 unités par heure durant une demi-heure. Après une demi-heure, la pilule a été complètement assimilée par l'organisme et il n'y a plus de médicament qui entre dans l'estomac. De plus, on suppose que le patient prend une pilule à toutes les six heures.

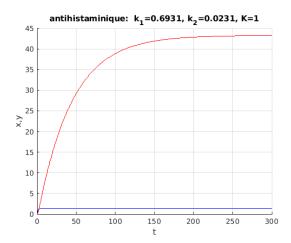


FIGURE 9.4 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication continue.

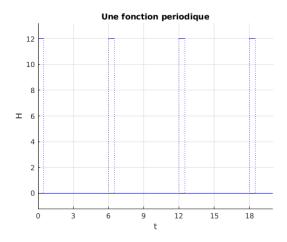


FIGURE 9.5 – Le taux d'absorption d'un médicament pris à intervalles réguliers.

Le taux d'absorption par l'estomac du médicament est décrit par la formule

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N} K(H(t+6n) - H(t-0.5+6n))$$

où H est la fonction de Heaviside définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

et N+1 est le nombre de pilules prisent par le patient. Le graphe de F pour les quatre premières pilules (i.e. N=3) est donné à la figure 9.5. C'est ce que l'on appelle une onde carrée.

9.1. Introduction 415

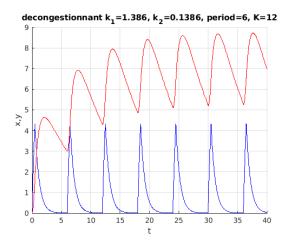


FIGURE 9.6 – Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administrée à intervalles réguliers.

Dans ce cas, le nombre d'unités x(t) dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités y(t) dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -k_1 x(t) + F(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t)$$
(9.1.10)

Reprenons les deux types de médicament que l'on a considérés précédemment ; à savoir le décongestionnant et l'antihistaminique.

On remarque que la première équation de (9.1.10) est indépendante de la fonction y. Cette équation peut donc être résolue à l'aide des <u>transformations de Laplace</u>; c'est un des sujets que l'on retrouve dans un premier cours d'équations différentielles. Lorsque l'on a trouvé x, la deuxième équation de (9.1.10) devient une équation linéaire d'ordre un pour la fonction y. On pourrait (avec amplement de temps et de patience, ou avec un logiciel de calculs symboliques) trouver une expression pour x et y. Puisque l'on veut tracer le graphe des solutions x et y de (9.1.10), au lieu de trouver une expression pour x et y, on résout numériquement le système (9.1.10). Il faut porter une attention particulière aux points où le côté droit de l'équation (9.1.10) est discontinu.

Comme dans le cas de la médication continue, on suppose que x(0) = 0 unité et y(0) = 0 unité.

Pour le décongestionnant, on a $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Les graphes de x et y sont donnés à la figure 9.6.

Les graphes de la figure 9.6 suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 4.5 unités. De plus, la quantité de médication dans le sang semble tendre vers une fonction périodique de moyenne 7 unités et d'amplitude environ 1.8 On suppose ici que le patient ne cesse pas de prendre des pilules

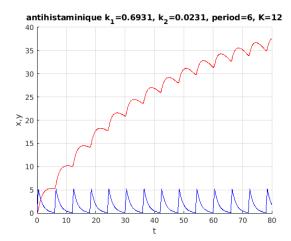


FIGURE 9.7 – Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administrée à intervalles réguliers.

et donc N augmente. Est-ce que le patient risque d'avoir une surdose du médicament? Une analyse mathématique plus poussée est nécessaire pour montrer que le patient ne souffrira pas d'une surdose.

On trace le graphe de la quantité d'antihistaminique $(k_1 = 0.6931 \text{ et } k_2 = 0.0231)$ dans l'estomac et dans le sang en fonction du temps à la figure 9.6. On suppose toujours que x(0) = 0 unité et y(0) = 0 unité.

Comme dans le cas du décongestionnant, le graphe de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac en fonction du temps suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 5 unités. Par contre, la quantité d'antihistaminique dans le sang semble en moyenne augmenter sans borne supérieure. En fait, une étude plus poussée montre que la quantité d'antihistaminique dans le sang approche une fonction périodique de moyenne environ 43 unités et de période environ 1. Dépendant des unités utilisées, on risque d'intoxiquer le patient car la quantité d'antihistaminique dans le sang devient en moyenne 11 fois la quantité dans l'estomac.

9.2 Énoncé du problème général

La forme générale d'un système d'équations différentielles dans \mathbb{R}^2 est

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, x_2)$$
(9.2.1)

où $f_i:]a, b[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2.$

La majorité des définitions et résultats que nous allons énoncés ont un équivalent pour

les systèmes d'équations différentielles qui ont plus de deux équations différentielles. Nous allons nous limiter aux systèmes composés de deux équations différentielles.

Si f_1 et f_2 ne dépendent pas de t, nous obtenons le système d'équations différentielles autonomes

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)
\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$
(9.2.2)

où $f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour i=1 et 2. C'est ce genre de systèmes d'équations différentielles que nous considérons dans ce chapitre. Une forme brève pour (9.2.2) est

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{9.2.3}$$

οù

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} .$$

Le but est de trouver 2 fonctions, $\phi_1:]a,b[\to\mathbb{R}$ et $\phi_2:]a,b[\to\mathbb{R}$, telles que si on remplace x_1 par ϕ_1 et x_2 par ϕ_2 dans (9.2.2) alors l'équation est satisfaite pour tout $t\in]a,b[$.

Définiton 9.2.1

Une fonction

$$\phi:]a, b[\to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

est une solution du système d'équations différentielles (9.2.2) si

$$\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t) = f_1(\phi_1(t), \phi_2(t))$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t) = f_2(\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour tout $t \in]a, b[$.

Exemple 9.2.2

Soit le système d'équations différentielles autonome

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + 2x_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 2x_2$$
 (9.2.4)

*

Les fonctions $\phi_1(t) = e^{3t} - 2e^{-4t}$ et $\phi_2(t) = e^{3t} + 5e^{-4t}$ satisfont (9.2.4) car

$$\frac{d\phi_1}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{3t} - 2e^{-4t} \right) = 3e^{3t} + 8e^{-4t}$$
$$= \left(e^{3t} - 2e^{-4t} \right) + 2\left(e^{3t} + 5e^{-4t} \right) = \phi_1(t) + 2\phi_2(t)$$

et

$$\frac{d\phi_2}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{3t} + 5 e^{-4t} \right) = 3 e^{3t} - 20 e^{-4t}$$
$$= 5 \left(e^{3t} - 2 e^{-4t} \right) - 2 \left(e^{3t} + 5 e^{-4t} \right) = 5\phi_1(t) - 2\phi_2(t)$$

pour tout t. Nous verrons plus tard comment trouver ϕ_1 et ϕ_2 pour un système d'équations différentielles de la forme (9.2.4).

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 donne la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - 2 \, e^{-4t} \\ e^{3t} + 5 \, e^{-4t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de (9.2.4).

Il est commun d'imposer une **condition initiale** au système d'équations différentielles (9.2.2). C'est-à-dire, de demander que la solution $\phi:]a, b[\to \mathbb{R}^2$ de (9.2.2) satisfasse

$$\phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

pour $t_0 \in]a, b[$ et $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ donnés.

Exemple 9.2.3

On peut montrer que

$$\phi(t) = a_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une solution du système d'équations différentielles (9.2.4) de l'exemple 9.2.2 quelles que soit les valeurs données aux constantes a_1 et a_2 .

Pour trouver la solution de (9.2.4) qui satisfasse la condition initiale

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} , \qquad (9.2.5)$$

on doit déterminer a_1 et a_2 tels que

$$\phi(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2 a_2 \\ a_1 + 5 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si on résout le système d'équations linéaires

$$a_1 - 2 a_2 = 4$$
 , $a_1 + 5 a_2 = -3$

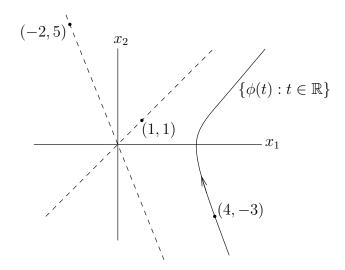


FIGURE 9.8 – L'orbite de la solution $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de l'équation différentielle de l'exemple 9.2.3. La flèche indique le déplacement le long de la courbe lorsque t augmente.

on trouve $a_1 = 2$ et $a_2 = -1$. La solution du système (9.2.4) qui satisfait la condition initiale (9.2.5) est

$$\phi(t) = 2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 e^{3t} + 2 e^{-4t} \\ 2 e^{3t} - 5 e^{-4t} \end{pmatrix} .$$

Définiton 9.2.4

L'orbite d'une solution $\phi:]a,b[\to \mathbb{R}^2$ de (9.2.2) est l'image

$$\{\phi(t) : a < t < b\}$$

de cette solution dans le plan. L'orbite est une courbe dans le plan. Le **portrait** de phases de (9.2.2) est l'ensemble des orbites.

Exemple 9.2.5

Une partie de l'orbite de la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-4t} \\ 2e^{3t} - 5e^{-4t} \end{pmatrix}$$

de l'exemple 9.2.3 est la courbe donnée à la figure 9.8.

Puisque nous allons généralement étudier les systèmes d'équations différentielles de la forme (9.2.2) où f_1 et f_2 sont différentiable, le théorème suivant nous assure qu'il y aura toujours une et une seule solution étant donné une condition initiale.

Théorème 9.2.6

Si $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (9.2.2) sont différentiables, et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ est une condition initiale donnée, alors il existe une et une seule solution ϕ de (9.2.2) qui satisfait la condition initiale $\phi(0) = \mathbf{x}_0$.

Remarque 9.2.7

Puisqu'il y a une et une seule solution de (9.2.2) qui passe par un point donné (i.e. qui satisfasse une condition initiale donnée), les orbites ne se coupent pas.

Il est généralement très difficile de résoudre les systèmes d'équations différentielles. Très souvent, nous ne sommes pas directement intéressés aux solutions du système d'équations différentielles mais simplement à leur comportement lorsque l'on progresse dans le temps. Qu'arrive-t-il aux solutions lorsque l'on regarde très loin dans le temps?

9.3 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Nous débutons notre étude des systèmes d'équations différentielles par l'étude d'une classe de systèmes qui sont très simples à analyser. Il ne faut pas en conclure que ces systèmes n'auront pas d'importance par la suite. C'est tout à fait le contraire. Ils joueront un rôle primordial dans l'analyse de systèmes d'équations différentielles beaucoup plus compliqués. Les résultats de la présente section et leur généralisation à \mathbb{R}^n sont des outils très fréquemment utilisés par les chercheurs en biomathématiques.

Un système d'équations différentielles linéaires dans \mathbb{R}^2 est un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a x_1 + b x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x x_1 + d x_2$$

où a, b, c et d sont des constantes. Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on peut récrire le système d'équations différentielles précédent sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{x} \tag{9.3.1}$$

οù

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
 et $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$.

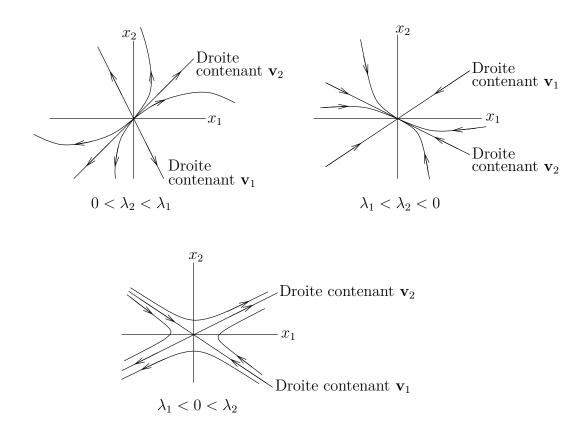


FIGURE 9.9 – Des portraits de phases possibles pour (9.3.1) si les valeurs propres sont distinctes.

Nos connaissances sur les valeurs et vecteurs propres vont nous permettre de résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires. En fait, les solutions possibles de (9.3.1), et donc les portraits de phases pour (9.3.1), peuvent être groupés en un petit nombre de classes selon le signe des valeurs propres de A et le nombre de vecteurs propres non-colinéaires. Nous résumons les résultats dans les trois propositions suivantes.

Proposition 9.3.1

Si la matrice A en (9.3.1) possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes. Soit \mathbf{v}_1 un vecteur propre associé à λ_1 et \mathbf{v}_2 un vecteur propre associé à λ_2 . Les solutions de (9.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$
 (9.3.2)

où a_1 et a_2 sont des constantes. On retrouve à la figure 9.9 les portraits de phases possibles dans cette situation.

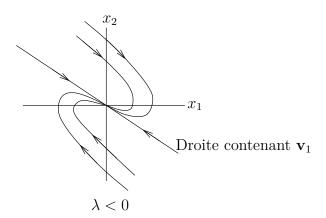


FIGURE 9.10 – Un portrait de phases possible s'il n'y a qu'une valeur propre et tous les vecteur propres sont colinéaires.

Proposition 9.3.2

Si la matrice A en (9.3.1) possède une seule valeur propre λ . On a deux cas possibles. S'ils existent deux vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 associés à λ qui ne sont pas colinéaires, alors la solution est donnée par (9.3.2). Si ce n'est pas le cas, donc les vecteurs propres associés à λ sont tous colinéaires, alors les solutions de (9.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + a_2 e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

où a_1 et a_2 sont des constantes, \mathbf{v} un vecteur propre associé à λ et \mathbf{u} est une solution de $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

La figure 9.10 donne un exemple possible de portraits de phases dans ce dernier cas. Les solutions s'approchent de l'origine lorsque $\lambda < 0$ et s'éloignent de l'origine lorsque $\lambda > 0$.

Proposition 9.3.3

Si la matrice A en (9.3.1) possède une paire de vecteurs propres complexes λ_1 et λ_2 . Puisque les composantes de la matrice A sont réelles, on doit avoir $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Supposons que $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$.

Soit $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$, avec $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 . les solutions de (9.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{at} (\cos(bt)\mathbf{u}_1 - \sin(bt)\mathbf{u}_2) + a_2 e^{at} (\sin(bt)\mathbf{u}_1 + \cos(bt)\mathbf{u}_2)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. On retrouve à la figure 9.11 un portrait de phases possible dans cette situation.

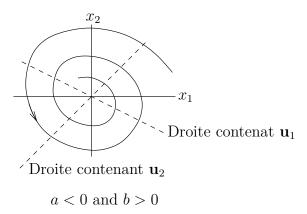


FIGURE 9.11 – Un portrait de phases possible pour un système ayant une paire de valeurs propres complexes

Considérons le système d'équations différentielles linéaire $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

On veut trouver la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2\\4 \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres et un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres de A sont donnés dans le tableau suivant :

valeur proprevecteur propre
$$\lambda_1 = -1$$
 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$ $\lambda_2 = 3$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$

Les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -a_1 e^{-t} + a_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 e^{-t} \\ -2 e^{-t} + 6 e^{3t} \end{pmatrix} .$$

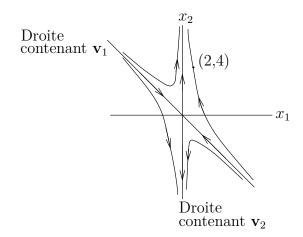


FIGURE 9.12 – Portrait de phases du système d'équations différentielles linéaires de l'exemple 9.3.4

Il est facile de tracer le portrait de phases de ce système. Remarquons premièrement que toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_1 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1$ pour une constante a_1 . Donc son orbite est sur la droite contenant \mathbf{v}_1 et approche l'origine quand $t \to \infty$. De même, toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_2 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_2 e^{-t} \mathbf{v}_2$ pour une constante a_2 . Donc son orbite est sur la droite contenant \mathbf{v}_2 et s'éloigne de l'origine quand $t \to \infty$. Il ne faut pas oublier que les orbites ne peuvent pas se couper en raison de l'unicité des solutions. Toutes les autres solutions de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{3t} \mathbf{v}_2$ vont s'approcher de la droite \mathbf{v}_2 mais s'éloigner de la droite \mathbf{v}_1 quand $t \to \infty$. On obtient le portrait de phase que l'on retrouve à la figure 9.12.

Remarque 9.3.5

Il serait plus laborieux de tracer l'orbite associée à la solution de l'exemple précédent si on n'avait pas la proposition 9.3.3. Voici comment on devrait procéder. Lorsque t tend vers plus l'infini, la première composante $x_1(t) = 2e^{-t}$ tend vers 0 alors que la deuxième composante $x_2(t) = -2e^{-t} + 6e^{3t}$ tend vers plus l'infini. On a donc que $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement l'axe x_2 lorsque t tend vers plus l'infini. Lorsque t tend vers moins l'infini, la composante $x_1(t)$ tend vers plus l'infini alors que la composante $x_2(t)$ tend vers moins l'infini. Puisque

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{-t}}{-e^{-t} + 3e^{3t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{-1 + 3e^{4t}} = -1$$

on a que $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement la droite $x_2 = -x_1$ lorsque t tend vers moins l'infini. Voir la figure 9.12.

Définiton 9.3.6

On considère le système d'équations différentielles linéaires (9.3.1). Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A.

- Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est appelé un **noeud stable**.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est appelé un **noeud instable**.
- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$), l'origine est appelé un **col**,
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et a < 0, l'origine est appelé un foyer stable.
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et a > 0, l'origine est appelé un foyer instable.
- Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et a = 0, l'origine est appelé un **centre**.

On peut classifier les différents portraits de phases pour (9.3.1) par rapport au signe du déterminant et de la trace de A.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$
.

On a que

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(A) + \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \operatorname{det}(A)}}{2} ,$$

$$\lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) - \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \operatorname{det}(A)}}{2} ,$$

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

et

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 .$$

Grâce à ces relations, on peut obtenir la classification des portraits de phases de (9.3.1) que l'on retrouve à la figure 9.13.

En résumé, nous avons

- 1. Toutes les solutions approchent de l'origine lorsque l'on a un noeud stable.
- 2. Toutes les solutions s'éloignent de l'origine lorsque l'on a un noeud instable.
- 3. Lorsque l'on a un col, les solutions dont la condition initiale est le long de la droite contenant les vecteurs propres associés à la valeur propre négative tendent vers l'origine. Les solutions dont la condition initiale n'est pas sur cette droite s'éloignent de l'origine.
- 4. Toutes les solutions approchent l'origine, en tournant autour, lorsque que l'on a un foyer stable
- 5. Toutes les solutions s'éloignent de l'origine, en tournant autour, lorsque que l'on a un foyer instable.
- 6. Les solutions tracent des ellipses autour de l'origine lorsque l'on a un centre.

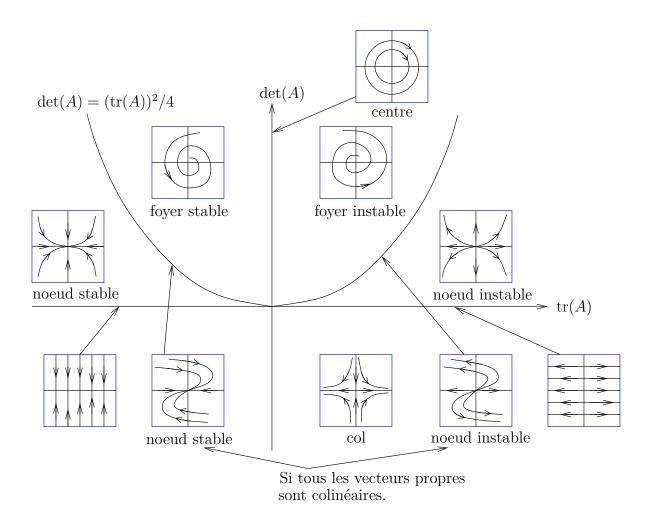


FIGURE 9.13 – Classification des portraits de phases pour le système d'équations différentielles linéaires (9.3.1).

Exemple 9.3.7

Considérons le système d'équations différentielles linéaire $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} .$$

On cherche la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2\\4 \end{pmatrix} .$$

La matrice A a une seule valeur propre $\lambda=2.$ Un vecteur propre associé à cette valeur propre est

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Tous les autres vecteurs propres associés à λ sont colinéaires au vecteur \mathbf{v} .

Il faut trouver un vecteur \mathbf{u} tel que $(A-1\,\mathrm{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}$; c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Si on résout ce système à l'aide de sa matrice augmentée, on trouve

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 e^{2t} + a_2(1+t) e^{2t} \\ -2 a_1 e^{2t} - a_2(3+2t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -2 a_1 - 3 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

On trouve $a_1 = 10$ et $a_2 = -8$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) == \begin{pmatrix} 10 e^{2t} - 8(1+t) e^{2t} \\ -20 e^{2t} + 8(3+2t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exemple 9.3.8

Considérons le système d'équations différentielles linéaires $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

On cherche la solution de ce système qui satisfait la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2\\4 \end{pmatrix} .$$

La matrice A possède les valeurs propres et vecteurs propres complexes suivants :

valeur proprevecteur propre
$$\lambda_1 = 2 + 3i$$
 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}^\top$ $\lambda_2 = 2 - 3i$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^\top$

On a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i \, \mathbf{u}_2$ où

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{2t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ a_2 e^{2t} \left(\sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{2t} \left(a_1 \cos(3t) + a_2 \sin(3t) \\ a_1 \sin(3t) - a_2 \cos(3t) \right).$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Ainsi $a_1 = 2$ et $a_2 = -4$. On a la solution

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2\cos(3t) - 4\sin(3t) \\ 2\sin(3t) + 4\cos(3t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 9.3.9

La matrice $\begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$ de l'exemple précédant est une matrice de rotation de 3t radians dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

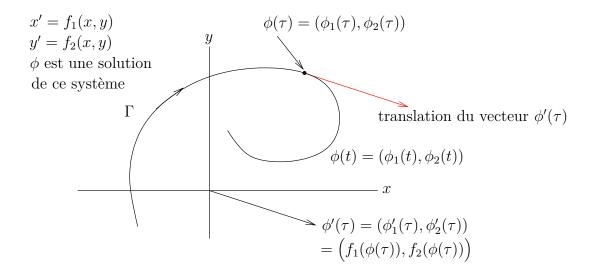


FIGURE 9.14 – La courbe Γ représente l'orbite associée à une solution ϕ du système d'équations différentielles (9.2.3). La direction de la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\tau)$ est donnée par le vecteur $\phi'(\tau)$.

9.4 Introduction à l'analyse globale

Nous allons utiliser dans les prochaines sections les concepts de point d'équilibre, stabilité et portrait de phases que nous avons introduits lors de l'étude des équations différentielles linéaires.

On considère le système d'équations différentielles (9.2.2) où f_1 et f_2 sont différentiables sur \mathbb{R}^2 . On a vu lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes que si ϕ : $]a.b[\to \mathbb{R}^2$ est une courbe dans le plan, alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1'(\tau) \\ \phi_2'(\tau) \end{pmatrix}$$

est un vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$. Si, en particulier, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une solution de (9.2.2), alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1'(\tau) \\ \phi_2'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \\ f_2(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \end{pmatrix}$$
(9.4.1)

est un vecteur parallèle à la droite tangente à l'orbite de la solution ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$ (voir figure 9.14). Donc, f(x,y) est un vecteur parallèle à l'orbite qui passe par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On peut déterminer le comportement qualitatif des solutions à l'aide d'un **champ de** vecteurs f associé au côté droit de (9.2.3). Pour dessiner un champ de vecteurs, on choisit

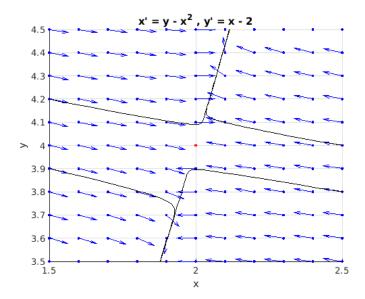


FIGURE 9.15 – Le champ de vecteurs pour le système (9.4.2) avec quelques orbites.

un ensemble de points du plan x, y (uniformément distribués) et à partir de chacun de ces points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on trace le vecteur $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$.

Exemple 9.4.1

Soit le système d'équations différentielles

$$x' = f_1(x, y) = y - x^2$$

$$y' = f_2(x, y) = x - 2$$
(9.4.2)

On retrouve à la figure 9.15 le champ de vecteurs pour ce système. On y retrouve aussi les orbites qui passent par les points

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$
 , $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.0 \end{pmatrix}$.

à t=0. Pour mieux visualiser le champ de vecteurs, on a choisi de tracer tous les vecteurs de même longueur. Ce n'est pas le cas près du point $\binom{2}{4}$ où les vecteurs sont beaucoup plus courts et indiquent une progression plus lente le long d'une orbite au voisinage de ce point. Nous verrons dans un instant que ce point, appelé un point d'équilibre, joue un rôle important dans l'étude du portrait de phases du système (9.4.2). La base des vecteurs est indiquée par un point ; le point est rouge si c'est un point d'équilibre.

9.4.1 Points d'équilibre

Les <u>points</u> d'équilibre du système d'équations différentielles (9.2.3) jouent un rôle fondamental dans la production du portrait de phases de ce système.

Définiton 9.4.2

Un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un **point d'équilibre** pour le système d'équation différentielles (9.2.3) si $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un point d'équilibre, alors $\phi(t) = \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pour tout t est une solution constante de (9.2.3).

On peut fréquemment déterminer le comportement des solutions près d'un point d'équilibre \mathbf{p} de (9.2.3) en étudiant le système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{p})\,\mathbf{x} \tag{9.4.3}$$

οù

$$D\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Si on développe le système précédent, on a

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2$$

Définition 9.4.3

Le système d'équations différentielles (9.4.3) est la **linéarisation du système** (9.2.3) au point d'équilibre **p**

L'importance de l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires est une conséquence du résultat suivant.

Proposition 9.4.4

Soit (9.4.3) la linéarisation du système d'équations différentielles (9.2.3) au point d'équilibre \mathbf{p} de (9.2.3). Si les valeurs propres de la matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{p})$ ont des parties réelles non nulles, les orbites de (9.2.3) au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p} se comportent comme les orbites de (9.4.3) près de l'origine.

La meilleure façon de comprendre ce qu'est un portrait de phases est d'en dessiner un. Cependant, cela va demander beaucoup plus d'information que la seule connaissance des points d'équilibre. La prochaine section présente un ensemble de courbes qui permettent de déterminer systématiquement la direction du déplacement le long des orbites du système (9.2.3) lorsque t augmente.

9.4.2 Nullclines

Définition 9.4.5

Pour j = 1 ou 2, les **nullclines** associés à la variable x_j sont les courbes définies par

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f_j(\mathbf{x}) = 0\}$$
.

On obtient l'information suivante des nullclines.

L'intersection des nullclines associés à \mathbf{x}_1 avec ceux associés à \mathbf{x}_2 sont les points d'équilibre car si \mathbf{q} est un tel point d'intersection alors $f_1(\mathbf{q}) = f_2(\mathbf{q}) = 0$.

Les orbites qui coupent un nullcline associé à \mathbf{x}_1 le font verticalement. Soit \mathbf{q} un point sur une des nullclines associés à x_1 et supposons que \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre. Soit ϕ la solution qui passe par le point \mathbf{q} et supposons que $\phi(t_s) = \mathbf{q}$ pour un certain $t_s \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t_s) = f_1(\phi(t_s)) = f_1(\mathbf{q}) = 0$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t_s) = f_2(\phi(t_s)) = f_2(\mathbf{q}) \neq 0 .$$

Donc, la tangente au point ${\bf q}$ de l'orbite produite par la solution ϕ est verticale car elle est parallèle à

$$\phi'(t_s) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t_s) \\ \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t_s) \end{pmatrix} .$$

De même, les orbites qui coupent un nullcline associé à \mathbf{x}_2 le font horizontalement. Soit \mathbf{q} un point sur un des nullclines associés à x_2 et supposons que \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre. Soit ϕ la solution qui passe par le point \mathbf{q} et supposons que $\phi(t_r) = \mathbf{q}$ pour un certain $t_r \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t_r) = f_1(\phi(t_r)) = f_1(\mathbf{q}) \neq 0$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t_r) = f_2(\phi(t_r)) = f_2(\mathbf{q}) = 0.$$

Donc, la tangente au point ${\bf q}$ de l'orbite produite par la solution ϕ est horizontale car elle est parallèle à

$$\phi'(t_r) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t_r) \\ \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}(t_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}(t_r) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Les nullclines sont des courbes qui partagent le plan en régions dans lesquelles les vecteurs du champ de vecteurs pointent tous dans une «direction semblable». Que veut-on dire par «direction semblable»? Supposons que U soit une de ces régions et que \mathbf{p} et \mathbf{q} soient deux points dans U, alors $f_1(\mathbf{p})$ et $f_1(\mathbf{q})$ sont de même signe, et $f_2(\mathbf{p})$ et $f_2(\mathbf{q})$ sont de même signe. Les fonctions f_1 et f_2 peuvent possiblement changer de signe seulement lorsque l'on traverse les nullclines.

Exemple 9.4.6

Traçons le portrait de phase du système d'équations différentielles

$$x' = y - x^{2} y' = x - 2$$
 (9.4.4)

La première étape est de trouver les nullclines.

Nullclines associés à x : On a $y - x^2 = 0$. Le long de la parabole $y = x^2$, les solutions vont satisfaire $\frac{dx}{dt} = 0$ et ainsi les orbites traverseront verticalement.

Nullclines associés à y : On a x-2=0. Le long de la ligne x=2, les solutions vont satisfaire $\frac{dy}{dt}=0$ et les orbites traverseront horizontalement.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent un seul point d'équilibre $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour déterminer la direction générale du champ de vecteurs dans chacune des régions délimitées par les nullclines, il suffit de choisir un point \mathbf{q} dans cette région et de calculer $f(\mathbf{q})$. Comme on a déjà mentionné précédemment, f_1 et f_2 peuvent changer de signe seulement lorsque l'on traverse les nullclines.

La linéarisation de (9.4.4) au point \mathbf{p} est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles, $-2 + \sqrt{5} > 0$ et $-2 - \sqrt{5} < 0$. Les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$
 et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

sont des vecteurs propres associés à $-2 + \sqrt{5}$ et $-2 - \sqrt{5}$ respectivement.

Le point d'équilibre **0** est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre **p** est un col pour le système (9.4.4). Le portrait de phases est donné à la figure 9.16.

Remarque 9.4.7

La proposition 9.4.4 est en fait beaucoup plus précise que l'énoncé que nous avons donnés. Dans l'exemple précédant, soit Γ_1 la courbe formée des orbites qui partent du point d'équilibre \mathbf{p} et du point d'équilibre lui même. La tangente à Γ_1 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_1 . De même, si Γ_2 est la courbe formée des orbites qui convergent vers le point d'équilibre \mathbf{p} et du point d'équilibre, alors la tangente à Γ_2 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_2 . Voir la figure 9.16.

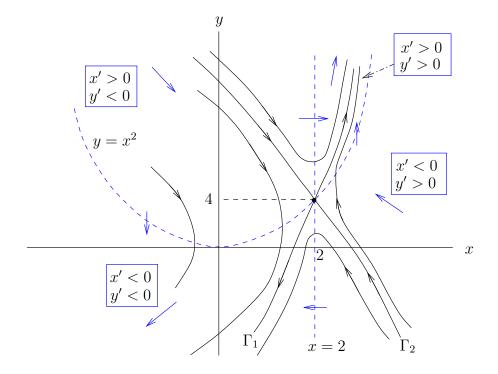


FIGURE 9.16 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (9.4.4). Les lignes hachurées sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Exemple 9.4.8

Traçons le portrait de phases du système d'équations différentielles

$$x' = y - x$$

 $y' = -x - x^2 - y$ (9.4.5)

On commence par tracer les nullclines.

Nullclines associés à x : On a y - x = 0. Le long de la droite y = x, on a que les solutions satisfont $\frac{dx}{dt} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y : On a $-x - x^2 - y = 0$. Le long de la parabole $y = -x^2 - x$, on a que les solutions satisfont $\frac{dy}{dt} = 0$ et les orbites sont horizontales.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre;

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2\\-2 \end{pmatrix}$$
 et $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}$.

La linéarisation de (9.4.5) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres conjuguées : $-1 \pm i$. On a donc un foyer stable à l'origine pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_2 est un foyer stable pour le système (9.4.5).

La linéarisation de (9.4.5) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : $-1 \pm \sqrt{3}$. Puisque $-1 - \sqrt{3} < 0 < -1 + \sqrt{3}$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_1 est un col pour le système (9.4.5). Le portrait de phases est donné à la figure 9.17.

Exemple 9.4.9

Le modèle compétition – exclusion présenté à l'exemple 9.1.2 se résume au système d'équations différentielles (9.1.6); c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 - x - \rho y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y(1 - y - \xi x)$$
(9.4.6)

où on a remplacé u, v et τ dans (9.1.6) par x, y et t respectivement. Les constantes α, ρ et ξ sont positives.

Commençons par trouver les nullclines de (9.4.6).

Nullclines associés à x: On a $x(1-x-\rho y)=0$. Le long des droites x=0 et $y=(1-x)/\rho$, on a que les solutions satisfont $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y: On a $\alpha y(1-y-\xi x)=0$. Le long des droites y=0 et $y=1-\xi x$, on a que les solutions satisfont $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ et les orbites sont horizontales.

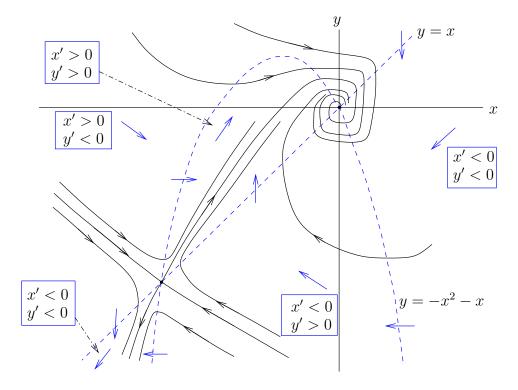


FIGURE 9.17 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (9.4.5). Les lignes hachurées sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Il y a plusieurs scénarios selon le choix des valeurs pour les paramètres α , ρ et ξ .

A) Prenons $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont alors x = 0 et y = -x/2 + 1/2, et ceux associés à y sont y = 0 et y = -x/3 + 1.

Puisque l'analyse des portraits de phases que nous ferons sera faite seulement pour x et y non-négatifs, car on ne peut pas avoir de population avec un nombre négatif d'individus, nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent trois points d'équilibre dans le premier quadrant.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour (9.4.6).

La linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : -1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un noeud stable pour le système (9.4.6).

Finalement, la linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un col pour le système (9.4.6).

Rappelons qu'une conséquence des transformations utilisées pour réduire le système d'équations différentielles (9.1.6) au système (9.4.6) est que x(t) et y(t) ne représentent pas le nombre d'individus de chaque espèce mais représentent une fraction du nombre maximum d'individus de chaque espèce que le milieu peut supporter.

Le portrait de phases de la figure 9.18 indique que l'espèce décrite par x va disparaître alors que l'espèce décrite par y va tendre vers 1.

B) Prenons $\rho = 1/2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont x = 0 et y = -2x + 2, et les nullclines associés à y sont y = 0 et y = -x/3 + 1.

Comme précédemment, nous tracerons le portrait de phases seulement pour x et y non-négatifs. Nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x et y donnent quatre points d'équilibre dans le premier quadrant.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 , $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.

La linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour le système (9.4.6).

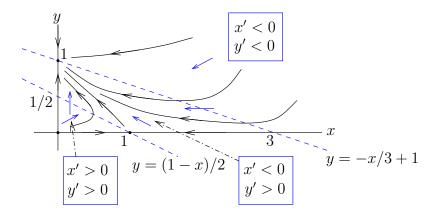


FIGURE 9.18 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (9.4.6) avec $\rho = 2, \xi = 1/3$ et $\alpha > 0$.

La linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_2 est un col pour le système (9.4.6).

La linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc, \mathbf{p}_3 est un col pour le système (9.4.6).

Finalement, la linéarisation de (9.4.6) au point \mathbf{p}_4 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -3/10 \\ -4\alpha/15 & -4\alpha/5 \end{pmatrix}$. Pour simplifier le problème, nous supposerons que $\alpha = 1$. Les valeurs propres de A sont alors -2/5 et -1. L'origine est un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_4 est un noeud stable pour le système (9.4.6).

Le portrait de phases de la figure 9.19 indique que les deux espèces vont cohabiter. Ni l'une ni l'autre ne disparaîtra.

Exemple 9.4.10

[Bifurcation du type col-noeud] Étudier le comportement du système d'équations différentielles

$$x' = x(1 - \alpha xy)$$
$$y' = y(1 - x - y)$$

lorsque α est près de 4.



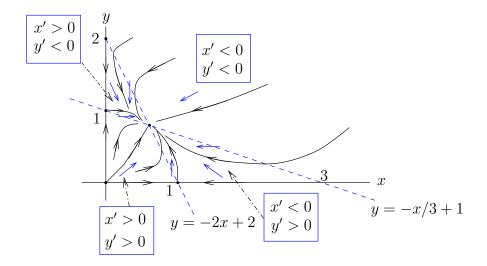


FIGURE 9.19 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (9.4.6) avec $\alpha = 1$, $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$.

9.5 Équation de Van der Pol

Jusqu'à maintenant, les solutions qui ont jouées un rôle fondamental lors de l'étude des portraits de phases ont été les points d'équilibre. Mais d'autres solutions jouent un rôle fondamental. C'est le cas des solutions périodiques que nous verrons à l'exemple qui suit.

Définition 9.5.1

Une solution ϕ d'un système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

est une solution périodique s'il existe une constante T telle que $\phi(t+T) = \phi(t)$ pour tout t. La plus petite constante positive T telle que $\phi(t+T) = \phi(t)$ pour tout t est appelée la **période** de la solution. L'orbite tracée par cette solution est une orbite fermée.

Exemple 9.5.2

L'exemple suivant décrit un système d'équations différentielles qui possède une solution périodique.

L'équation de Van der Pol est

$$x'' + \epsilon x'(x^2 - 1) + x = 0.$$

On peut transformer l'équation de Van der Pol en un système de deux équations différentielles

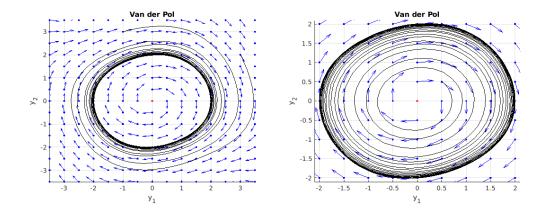


FIGURE 9.20 – Quatre orbites du système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol. Les orbites dans la figure à droite tracent des spirales vers l'extérieur alors que celles dans la figure à gauche tracent des spirales vers l'intérieur.

en posant $y_1 = x$ et $y_2 = x'$. On obtient

$$y_1' = y_2 y_2' = -\epsilon y_2 (y_1^2 - 1) - y_1$$
 (9.5.1)

C'est un système d'équations différentielles non-linéaire. Il est généralement impossible de trouver une expression pour les fonctions y_1 et y_2 qui donnent la solution de (9.5.1). On utilise donc des méthodes numériques pour évaluer ces fonctions.

Comme aucun des coefficients de (9.5.1) ne dépend de t, il est généralement plus informatif de faire le graphe des orbites $\{(y_1(t), y_2(t)) : t \ge 0\}$ pour observer l'effet qu'une composante peut avoir sur l'autre.

la figure 9.20 contient quatre orbites de (9.5.1) où $\epsilon = 0.1$. Les quatre orbites ont respectivement les conditions initiales (3, 2), (-1, 3), (-1, 1) et (0.5, 0.5) à t = 0.

Il semble y avoir une solution périodique car les orbites avec les conditions initiales (0.5,0.5) et (-1,1) à t=0 respectivement tracent des spirales vers l'extérieur alors que les deux autres orbites tracent des spirales vers l'intérieur. Comme les orbites ne peuvent pas se couper et qu'il n'y a pas de points d'équilibre autre que l'origine, on peut montrer à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il doit y avoir une solution périodique entre les orbites qui tracent des spirales vers l'intérieur et ceux qui tracent des spirales vers l'extérieur.

Avec la condition initiale (1,1) à t=0 et une très longue période d'intégration en t, on trouve l'orbite de la figure 9.21. Comme cette orbite se rapproche de plus en plus de la solution périodique, on obtient «l'ombre» de la solution périodique qui est représenté par la courbe fermée, tracée à l'aide d'un pinceau plus épais.

Ł

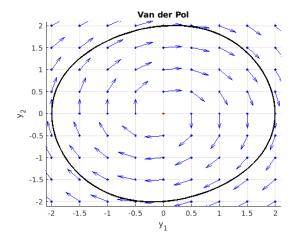


FIGURE 9.21 – L'ombre de la solution périodique pour le système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol

9.6 Système prédateurs-proies

9.6.1 Lotka-Voltera

Le modèle prédateurs-proies qui a été présenté à l'exemple 9.1.1 se résume au système d'équations différentielles (9.1.3); c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y(x-1)$$
(9.6.1)

où on a remplacé u, v et τ dans (9.1.3) par x, y et t respectivement. Le paramètre α est positif. Notons aussi que le changement de variable utilisé pour réduire le système (9.1.1) de Lotka-Voltera au système (9.6.1) a modifié l'ordre de grandeur de x et y. Les variables x et y ne représentent pas le nombre de proies et de prédateurs respectivement mais la fraction des populations de proies et prédateurs que le milieu peut supporter.

La première étape est de trouver les nullclines.

Nullclines associés à x: On a x(1-y)=0. Le long des droites x=0 et y=1, on a que les solutions satisfont $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à y: On a $\alpha y(x-1)=0$. Le long des droites y=0 et x=1, on a que les solutions satisfont $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ et les orbites sont horizontales.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La linéarisation de (9.6.1) au point \mathbf{p}_1 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (9.6.1).

La linéarisation de (9.6.1) au point \mathbf{p}_2 est $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\alpha > 0$, la matrice A a deux valeurs propres complexes : $\pm \alpha i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est nulles, on ne peut rien conclure (à partir du système linéarisé) au sujet du point d'équilibre \mathbf{p}_2 du système (9.6.1). Dans le portrait de phase de la figure 9.22, la stabilité du point \mathbf{p}_2 et le comportement des solutions dans le premier quadrant proviennent du fait que (9.6.1) est un **système conservateur**; c'est-à-dire que les orbites sont des courbes de niveau d'une certaine fonction que nous allons maintenant déterminer.

Commençons par remarquer que l'axe des x et l'axe des y sont des nullclines, alors les orbites dont la condition initiale est dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, une analyse détaillée du signe de x' et y' dans le premier quadrant nous permet de conclure que les orbites dans le premier quadrant font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Le système (9.6.1) peut être transformé en une équation différentielle séparable. Il suffit de diviser la deuxième équation de (9.6.1) par la première équation de (9.6.1). Puisque

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha \, \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \; .$$

Ainsi,

$$\int \frac{1-y}{y} \, \mathrm{d}y = \alpha \int \frac{x-1}{x} \, \mathrm{d}x \ .$$

Après intégration, on obtient

$$\ln(y) - y = \alpha(x - \ln(x)) + C$$

où C est une constante d'intégration. Donc, l'orbite $\{(x(t),y(t)): t \in \mathbb{R}\}$ associée à la condition initiale $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$ dans le premier quadrant est la courbe de niveau F(x,y)=C où

$$F(x,y) = \ln(y) - y - \alpha(x - \ln(x))$$

et
$$C = F(x_0, y_0)^{-1}$$

Nous tracerons les portraits de phases sur tout le plan x,y car ils sont intéressants, cependant nous ferons leur interprétation seulement pour x et y positifs car on ne peut pas avoir de population avec un nombre négatif d'individus.

^{1.} En fait, l'argument donné permet seulement de conclure que l'orbite fait partie d'une courbe de niveau de F. Une preuve plus élaborée, qui utilise le fait qu'il n'y a pas de point d'équilibre autre que \mathbf{p}_2 dans le premier quadrant est nécessaire pour démontrer qu'une orbite est une courbe de niveau de F et vice-versa

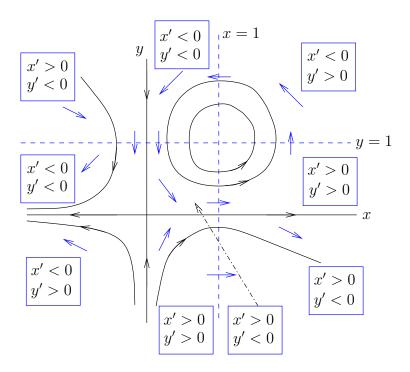


FIGURE 9.22 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (9.6.1) lorsque $\alpha > 0$.

Pour $\alpha > 0$, le portrait de phases de la figure 9.22 indique que les deux espèces ont un comportement périodique autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 . Le point \mathbf{p}_2 est un centre. Aucune des deux espèces n'est vouée à l'extinction.

Remarque 9.6.1

Même si la signification biologique est douteuse, il n'en reste pas moins que le cas $\alpha < 0$ est très intéressant du point de vue mathématique.

Si $\alpha < 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_1 . Ainsi, le point \mathbf{p}_1 (i.e. l'origine) est aussi un noeud instable pour le système (9.6.1). De plus, si $\alpha < 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_2 car la linéarisation de (9.6.1) au point \mathbf{p}_2 a les deux valeurs propres $\pm \sqrt{-\alpha}$. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un col pour le système (9.6.1).

Le portrait de phases de la figure 9.23 indique que l'une des espèces va croître sans borne supérieure alors que l'autre va disparaître. C'est la condition initiale qui détermine laquelle des populations croît sans borne supérieure et laquelle disparaît. La probabilité que les deux populations approchent le point d'équilibre \mathbf{p}_2 est presque nulle. Il faudrait que la condition initiale soit sur une des deux orbites qui approchent \mathbf{p}_2 , ce qui est improbable.

9.6.2 Un meilleur modèle prédateurs-proies

Il existe deux problèmes majeurs avec le modèle prédateurs-proies de Lotka-Voltera.

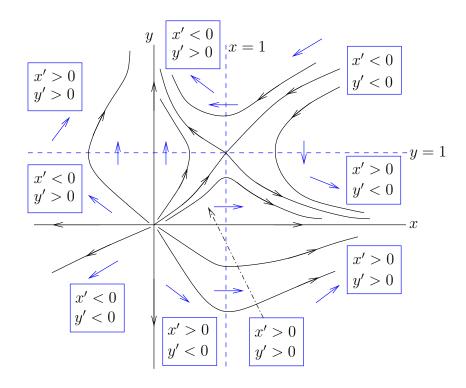


FIGURE 9.23 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (9.6.1) lorsque $\alpha < 0$

Le modèle prédateurs-proies de Lotka-Voltera n'est malheureusement pas un modèle «structurellement stable». Il existe une définition très rigoureuse de stabilité structurelle d'un système dynamique que nous ne donnerons pas. Nous donnerons seulement une explication intuitive de cette notion.

Supposons que l'on modifie légèrement le système (9.6.1) pour obtenir le système

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-y) + 0.0001y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y(x-1)$$
(9.6.2)

On dit que le système (9.6.2) est une «perturbation» du système (9.6.1). Nous avons ajouté le terme 0.0001y au membre de droite de la première équation. Pour (x, y) près de \mathbf{p}_2 , le terme 0.0001y est très petit et ne devrait donc pas modifier les orbites de façon dramatique, n'est-ce pas?

On a tracé à la figure 9.24 deux orbites du système (9.6.2) avec $\alpha = 1$ pour $0 \le t \le 500$, une avec la condition initiale (0.5, 1.5) et l'autre avec la condition initiale (1.1, 1.2). Ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci. Les solutions au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p}_2 ne sont plus périodiques comme on avait avec le système (9.6.1).

On a répété l'expérience précédente pour le système (9.6.2 avec $\alpha = 0.1$. On a tracé à la figure 9.25 deux orbites du système (9.6.2) pour $0 \le t \le 500$, une avec la condition initiale

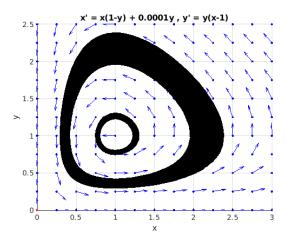


FIGURE 9.24 – Quelques orbites du système (9.6.2) obtenu du système prédateursproies (9.6.1) de Lotka-Voltera pour $\alpha = 1$.

(0.5, 1.5) et l'autre avec la condition initiale (1.1, 1.2). Comme dans le cas avec $\alpha = 1$, ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci.

Les orbites que l'on retrouve dans les deux dernières figures ne sont plus des solutions périodiques. Le portrait de phase a changé de façon «dramatique» en passant du système (9.6.1) au système (9.6.2). En fait, il existe des «perturbations» (aussi petites que l'on veuille) du système (9.6.1) qui produisent un portrait de phases très «différent» de celui du système (9.6.1). Pour cette raison, on dit que le système (9.6.1) n'est pas «structurellement stable».

La raison pour laquelle on exige que les systèmes d'équations différentielles que l'on utilise pour décrire des phénomènes biologiques, physiques, et autres soient structurellement stables est que ces systèmes sont seulement des approximations (que l'on espère très bonnes) des systèmes d'équations différentielles qui décrivent réellement les phénomènes étudiés. Si on utilise un système d'équations différentielle qui est structurellement stable, on peut espérer que son portrait de phases est qualitativement identique à celui du système qui décrit réellement le phénomène.

Un autre problème avec le système de Lotka-Voltera est qu'il n'existe pas une multitude de solutions périodiques. Il n'existe généralement qu'une seule solution périodique qui décrit l'équilibre entre les proies et les prédateurs. À la longue, le nombre y de prédateurs et le nombre x de proies vont tendre vers cet équilibre périodique quel que soit le nombre initial y_0 de prédateurs et le nombre initial x_0 de proies. En termes mathématiques, si la condition initial (x_0, y_0) n'est pas sur cette unique solution périodique, l'orbite qui passe par (x_0, y_0) va «tendre» vers la solution périodique.

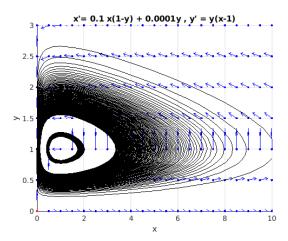


FIGURE 9.25 – Quelques orbites du système (9.6.2) obtenu du système prédateursproies (9.6.1) de Lotka et Voltera pour $\alpha = 0.1$.

On remplace le système (9.1.1) par un système de la forme

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = qf(p,q)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = pg(p,q)$$
(9.6.3)

où $f,g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

En s'inspirant du modèle logistique pour décrire une seule population animale dont la survie dépend des ressources du milieu, on déduit que la fonction f pourrait contenir un terme de la forme

$$a\left(1-\frac{q}{Q}\right)$$

où a est le taux de croissance relatif de la population de proies lorsque qu'il n'y a pas le limite supérieur au nombre de proie que le milieu peut supporter, et Q est le nombre maximal de proies que le milieu peut supporter. De plus la fonction f pourrait contenir une terme de la forme -ph(q) pour une fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera dans quelques instants. On suppose que

$$f(p,q) = a\left(1 - \frac{q}{Q}\right) - ph(q) .$$

Le terme -q p h(q) que l'on a ajouté dans la première équation en (9.6.3) représente l'impact des prédateurs sur la croissance de la population de proies.

De plus, on suppose que la fonction q est de la forme

$$g(p,q) = b\left(1 - \frac{kp}{q}\right)$$

où b et k sont des constantes positives. La population de prédateurs augmente lorsque q>kp; le nombre de proies est k fois supérieur au nombre de prédateurs.

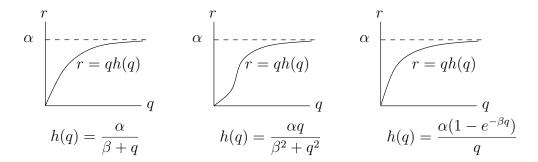


FIGURE 9.26 – Modèles possibles pour décrire le phénomène de saturation chez les prédateurs.

La fonction h doit tenir compte de l'effet de saturation chez les prédateurs. Ceux-ci ne peuvent pas maintenir un niveau de chasse constant quand la population de proies devient très grande (chaque prédateur a possiblement un territoire qu'il protège contre l'intrusion d'autres prédateurs, il faut donner le temps aux prédateurs de se reproduire, ...)

Il y a plusieurs choix possibles pour h. Pour le système (9.1.1) de Lotka-Voltera, la fonction h est constante. Le terme -bqp que l'on retrouve dans la première équation en (9.1.1) indique que le nombre de proies capturées par un prédateur dépend linéairement du nombre de proies et cela sans aucune borne supérieure sur le nombre de proies. On sait que ce n'est pas réaliste.

Les fonctions h les plus souvent utilisées sont

$$h(q) = \frac{\alpha}{q+\beta}$$
, $h(q) = \frac{\alpha q}{q^2 + \beta^2}$ et $h(q) = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta q})}{q}$.

Voir la figure 9.26. Dans ces trois cas, on a que

$$\lim_{q \to \infty} qh(q) = \alpha .$$

Le nombre de proies qu'un prédateur peut attraper est bornée par α .

Si on utilise la fonction $h(q) = \alpha/(\beta + q)$, on obtient donc le système suivant :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q \left(a \left(1 - \frac{q}{Q} \right) - \frac{\alpha p}{\beta + q} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = bp \left(1 - \frac{kp}{q} \right)$$
(9.6.4)

On peut éliminer au moins trois paramètres du système précédent. Posons

$$u = \frac{q}{Q}$$
, $v = \frac{kp}{Q}$ et $\tau = bt$.

Avec ces substitutions, le système précédent devient

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u \left(\frac{a}{b} \left(1 - u \right) - \frac{\frac{\alpha}{kb} v}{\frac{\beta}{O} + u} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v\left(1 - \frac{v}{u}\right) .$$

Si on pose

$$A = \frac{a}{b}$$
. $B = \frac{\alpha}{kb}$ et $C = \frac{\beta}{Q}$,

on obtient le système

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u\left(A\left(1 - u\right) - \frac{Bv}{C + u}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v\left(1 - \frac{v}{u}\right)$$
(9.6.5)

Commençons par trouver les nullclines de (9.6.5).

Nullclines associés à u : On a

$$0 = u \left(A (1 - u) - \frac{Bv}{C + u} \right) = \frac{u}{C + u} \left(A (1 - u)(C + u) - Bv \right) .$$

Le long de la droite u = 0 (l'axe des v) et le long de la parabole $v = \frac{A}{B}(1-u)(C+u)$, on a que les solutions satisfont $\frac{du}{d\tau} = 0$ et les orbites sont verticales.

Nullclines associés à v : On a

$$0 = v \left(1 - \frac{v}{u} \right) .$$

Le long des droites v = 0 (l'axe des u) et u = v, on a que les solutions satisfont $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et les orbites sont horizontales.

En fait l'axe des v n'est pas vraiment un nullcline car l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v\left(1 - \frac{v}{u}\right)$$

n'est pas définie pour u=0. De même, l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u\left(A\left(1 - u\right) - \frac{Bv}{C + u}\right)$$

n'est pas définie pour u = -C. Cependant, on peut ignorer ce problème car C > 0 et on considère seulement u > 0.

Afin de simplifier la discussion, nous allons assumer que A=5, B=10 et C=0.03. Le choix de ces valeurs n'est pas arbitraire. Ces valeurs ont été choisies pour obtenir une seule solution périodique vers laquelle les autres solutions «convergent». Nous avons donc le système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = u \left(5 \left(1 - u \right) - \frac{10v}{0.03 + u} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = v \left(1 - \frac{v}{u} \right)$$
(9.6.6)

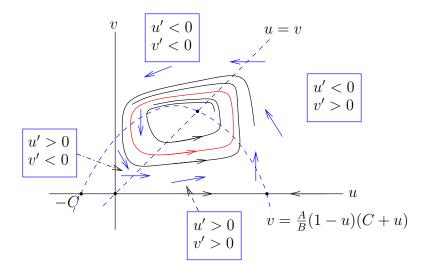


FIGURE 9.27 – Le portrait de phases du système (9.6.5) pour $A=5,\,B=10$ et C=0.03 ressemble (i.e. est qualitativement équivalent) à celui dans la figure ci-dessus. La solution périodique est en rouge.

L'intersection des nullclines associés à u avec ceux associés à v donnent deux points d'équilibre pour u>0 et v>0.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{p}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.028346114 \\ 0.028346114 \end{pmatrix} .$$

Le point d'équilibre \mathbf{p}_2 provient de la solution positive de l'équation quadratique $2u^2-0.04u-0.06=0$ que l'on obtient de l'intersection des nullclines v=u et $v=\frac{A}{B}(1-u)(C+u)=2(1-u)(0.03+u)$.

Avant de déterminer la stabilité des points d'équilibre, on trace les nullclines et analyse en détail le signe de x' et y' dans les quatre régions du premier quadrant qui sont découpées par les nullclines. Les résultats se retrouvent à la figure 9.27. On remarque en particulier que les orbites qui débutent dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, ces orbites font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Le côté droit du système (9.6.6) est

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} u \left(5\left(1-u\right) - \frac{10v}{0.03+u} \right) \\ v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$DF(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{du} & \frac{dF_1}{dv} \\ \frac{dF_2}{du} & \frac{dF_2}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-2u) - \frac{0.3v}{(0.03+u)^2} & -\frac{10u}{0.03+u} \\ \frac{v^2}{u^2} & 1 - \frac{2v}{u} \end{pmatrix} ,$$

la linéarisation de (9.6.6) au point \mathbf{p}_1 est

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{10}{1.03} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de la matrice sont 1 > 0 et -5 < 0. On a donc un col pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (9.6.5).

La linéarisation de (9.6.6) au point \mathbf{p}_2 est

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-2\hat{u}) - \frac{0.3\hat{u}}{(0.03+\hat{u})^2} & -\frac{10\hat{u}}{0.03+\hat{u}} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où $\hat{u} \approx 0.028346114$. Donc,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.218547616 & -4.858269396 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont approximativement $0.559133 \pm 1.506156 i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est positive, \mathbf{p}_2 est un foyer instable. Les orbites qui débutent près de \mathbf{p}_2 s'éloignent de ce point. On pourrait montrer à l'aide du <u>théorème de Poincaré-Bendixson</u> qu'il doit exister au moins une solution périodique qui entoure le point \mathbf{p}_2 .

On retrouve à la figure 9.28 le dessin de quelques orbites qui tendent vers une solution périodique. Les conditions initiales utilisées dans la figure sont (u, v) = (0.05; 0.05), (0.2; 0.03), (0.5, 0.3) et (0.8, 0.35) avec $0 \le \tau \le 200$. Comme on peut observer, la convergence vers la solution périodique est très rapide.

9.7 Exercices

Question 9.1

Dessinez le portrait de phase du système d'équations différentielles linéaires $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ et trouvez la solution avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si

$$\mathbf{a}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 9.2

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants :

9.7. Exercices 451

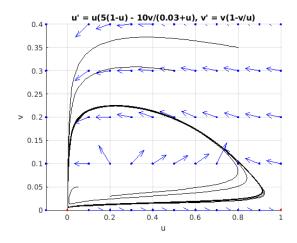


FIGURE 9.28 – Si A=5, B=10 et C=0.03 dans le système prédateurs-proies donné en (9.6.5), les orbites tendent vers une solution périodique représentant l'équilibre périodique entre les populations de prédateurs et de proies.

i: Trouvez les nullclines.

ii: Trouvez le point d'équilibre.

iii: Déterminez si possible le type de ce point d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles.

iv: Tracez le portrait de phases.

a)
$$\frac{dx}{dt} = 4x + y + 25$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 15$$
b)
$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2$$

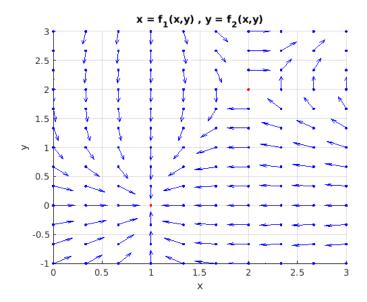
$$\frac{dy}{dt} = 4x - y - 1$$

Question 9.3

Le système d'équation différentielles

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

possède le portrait de phase suivant.



Il y a deux points d'équilibre marqués par des points en rouge. Déterminez le type de chacun des points d'équilibre.

Question 9.4

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants :

i: Trouvez les nullclines.

ii: Trouvez les points d'équilibre.

iii: Déterminez si possible le type de chacun des points d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles.

iv: Tracez le portrait de phases.

a)
$$\frac{dx}{dt} = \left(1 - x - \frac{y}{2}\right)x$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)y$$
b)
$$\frac{dx}{dt} = (1 - x - 2y)x$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - 2x - y)y$$

c)
$$\frac{dx}{dt} = 20 - 5xy - 5x$$

$$\frac{dy}{dt} = 5xy - 10y$$

$$d) \frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)x$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)y$$

Question 9.5

Le système d'équation différentielles

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x)(x-0.5) - \frac{1}{8}xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -dy + xy$$
(9.7.1)

9.7. Exercices 453

décrit un système prédateur-proies où x est la fraction des proies que le milieu peut supporter et y est la fraction des prédateurs que le milieu peut supporter.

- a) Donnez un sens biologique à chacun des termes de ce système.
- b) Quel est le seuil de survie des proies lorsqu'il n'y a pas de prédateurs?
- c) Trouvez les points d'équilibre et les nullclines.
- \mathbf{d}) Pour quelles valeurs de d aurons-nous un état d'équilibre stable où les prédateurs et proies peuvent coexister.
- e) Tracez le portrait de phases dans le cas où d = 0.9.
- \mathbf{f}) Tracez dans le portrait de phases en (e), la solutions qui possède la condition initiale (1.3,1).
- **g**) Tracez approximativement le graphe de chacune des composantes de la solution en (f) (i.e. x et y) en fonction du temps.

Bibliographie

- [1] F. R. Adler, Modeling the Dynamics of Life: Calculus and Probability for Life Scientists, Brooks/Cole, 2005.
- [2] D. Betounes, **Partial Differential Equations for Computational Science**, Springer-Verlag, 1998.
- [3] R. L. Borelli et C. S. Coleman, **Differential Equations**, a Modeling Perspective, Wiley, 1998.
- [4] L. Carroll, Alice's Adventures in Wonderland,
- [5] G. B. Folland, **Sdvanced Calculus**, Prentice Hall, 2002
- [6] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum et T. an Roode, Mathemtical Modelling: A Case Studies Approach, AMS, 2005.
- [7] S. Lipschutz, Linear Alegebra, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.
- [8] J. E. Marsden and A. J. Tromba, Vector Calculus, 2nd edition, W. H. Freedman and Company, 1981.
- [9] J. D. Murray, **Mathematical Biology**, 1 : An Introduction, 3th edition, Springer-Verlag, 2002.
- [10] C. Newhouser, Calculus for Biology and Medecine 2nd Edition, Prentice Hall, 2004
- [11] B. Noble and J. W. Daniel, **Applied Linear Algebra**, 3rd edition, Prentice-Hall, 1988.
- [12] M. Olinick, An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences, Addison-Wesley, 1978
- [13] D. A. Roff, **The Evolution of Life Histories**, Chapman and Hall, 1992

Index

Equation differentielle	Ensemble ferme, 353
point d'équilibre	Ensemble ouvert, 352
asymptotiquement stable, 176	Erreur absolue, 198
Équation de Van der Pol, 439	Erreur de troncature, 78, 82, 88, 389
Équation de réaction diffusion, 213	Erreur relative, 198
Équation de réaction diffusion, 211	espace propre généralisé, 298
Équation différentielle, 161	
autonome, 173	Famille de courbes, 194
bien posée, 197	Famille de courbes orthogonales, 194
modèle logistique, 179	Fonction
orbite d'une solution, 174	bornée, 34
point d'équilibre, 174	de plusieurs variables, 339
stable, 176	domaine, 339
point d'équilibre	graphe, 343
instable, 176	image, 339
portrait de phases, 174	Fonction affine, 344
séparable, 163	Fonction continue
,	en un point, 356, 357
Application linéaire, 340	Fonction continue par morceaux, 34
Approximation linéaire, 399	Fonction de classe C^k , 366, 401
Borne d'intégration, 36	Fonction linéaire, 340
	Formule de l'angle double pour la tangente,
Centre de masse, 137–139	19
Chaîne de Markov, 299	Formules de l'angle double, 9
Champ de pentes, 167	Frontière d'un ensemble, 352
Changement de variable, 6, 53	C . 1:
Condition initiale, 164	Gradient, 378
Coordonnées polaires, 327	Intégrable au sens de Riemann, 49
Courbe de niveaux, 346	Intégrale définie, 36
oodise de miredan, 910	Intégrale impropre
Dérivée d'une fonction, 399	convergence, 60, 65
Dérivée directionnelle, 376	divergence, 60, 65
Dérivée partielle, 364	pour une fonction non-bornée, 65
d'ordre supérieure, 366	sur un domaine non-borné, 60
Dérivée partielle en un point, 364	Intégrale indéfinie, 2
Déterminant, 277, 278	Intégrande, 2, 36
Distribution normale, 57	Intégration par parties, 14
D 11 205	Intérêt
Ensemble convexe, 387	

INDEX 457

Composé k fois par année, 144	Ordre d'une équation différentielle, 162
Composé annuellement, 143	·
Composé de façon continue, 144	Permutation, 278
Intervalle d'intégration, 36	signe, 279
Limite d'une fonction	Point critique, 390
en un point, 354	Polynôme caractéristique, 286 Polynôme de Taylor, 389
Lois de Hooke, 125	Primitive, 1
Lois de Hooke, 125	Procédure de Markov, 299
Méthode d'élimination de Gauss, 270	Projection orthogonale, 245, 248
Méthode de Lagrange, 396, 398	1 Tojection of thogonate, 240, 240
Méthode de Simpson, 88	Règle de la main droite, 226
Méthode des trapèzes, 82	Règle de substitution, 6, 53
Méthode du point milieu, 78	Représentation paramétrique d'une courbe,
Masse, 122	310
Matrice, 259	Représentation paramétrique d'une droite, 228
élément, 259	Représentation paramétrique d'une surface,
augmentée, 270	374
carrée, 259	Représentation paramétrique du plan, 237
composante, 259	Représentation standard d'un plan, 234
diagonale d'une matrice, 267	Représentation standard d'une droite, 229
identité, 267	Représentation vectorielle d'une droite, 228
inverse additif, 267	Représentation vectorielle du plan, 236
inverse multiplicatif, 268	Section Verticals, 248
inversible, 268	Section Verticale, 348 Solution, 161
matrices égales, 259	Somme à droite, 33
produit de deux matrices, 262	Somme à Gauche, 32
produit par un scalaire, 260	Somme de Riemann, 35
somme de deux matrices, 260	Somme de Riemann, 33 Somme de Riemann pour le point milieu, 37
Trace, 266	Somme inférieure, 48
transposée, 261	Somme supérieure, 48
triangulaire inférieure, 282	Suite
triangulaire supérieure, 282	convergence, 351
Matrice de Markov, 299	convergence dans \mathbb{R}^n , 351
Moment par rapport à l'axe des x , 138, 139	limite, 351
Moment par rapport à l'axe des y , 138	suite
Moment par rapport à l'axe des y , 139	convergence dans \mathbb{R}^n , 285
Multiplicateur de Lagrange, 395	Surplus du consommateur, 148
Nombre complexe, 286	Surplus du producteur, 148
conjugué, 287	Système conservateur, 442
partie imaginaire, 286	Système d'équations différentielles
partie réelle, 286	linéaire
valeur absolue, 287	centre, 425
Non-dimensionalisation, 408	col, 425
Norme euclidienne, 349	foyer instable, 425
	•

458 INDEX

fover stable, 425 noeud instable, 425 noeud stable, 425 Système d'équations différentielles champ de vecteurs, 429 orbite fermée, 439 solution périodique, 439 Système d'équations différentielles, 416 autonome, 417 condition initiale, 418 linéaire, 420 nullcline, 432 orbite, 419 période, 439 point d'équilibre, 431 solution, 417 Système de Lotka-Voltera, 407 Taux de croissance absolu, 179 Taux de croissance relatif, 159, 179 Test de l'intégrale, 149 Théorème de la moyenne pour l'intégrale, 104 Théorème de Taylor, 389 Théorème des valeurs extrêmes, 359 Théorème fondamental du calcul, 50 Théorème fondamental du calcul, deuxième version, 56 Transposition, 278 Travail, 123 Valeur future, 145, 146 Valeur movenne, 103 Valeur présente, 145, 147 Valeur propre, 285 multiplicité algébrique, 293 multiplicité géométrique, 293 Valeur propre généralisée, 293 Variable aléatoire, 57 Variable d'intégration, 2, 36 Vecteur, 217 canonique, 222 longueur, 217 orthogonal, 223 orthogonal à un plan, 234 perpendiculaire, 223

perpendiculaire à un plan, 234 produit avec un nombre réel, 219 produit scalaire, 222 produit vectoriel, 226 somme de vecteurs, 220 Vecteur propre, 285 Voisinage, 352 Voisinage troué, 352