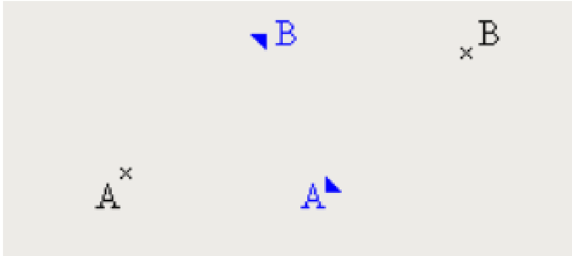
Vecteurs

Bipoint

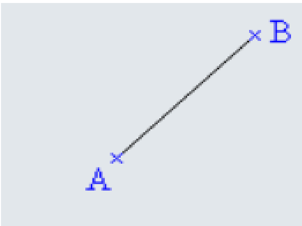
Un bipoint noté (A, B) est un couple ordonné de points. Le bipoint (A, B) est donc différent du bipoint (B, A) .

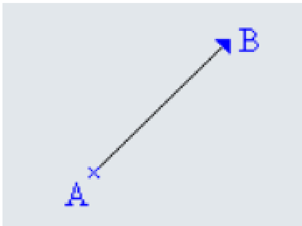


Segment orienté

Un segment noté $[A, B]$ est l'ensemble des points de la droite AB .

D'après cette définition : $[A, B] = [B, A]$.





Un segment orienté $[A, \dot{B}]$ est un segment sur lequel la flèche est orientée de A (origine) vers B (extrémité).

Comme pour le bipoint $[\overrightarrow{A, B}]$ est différent de $[\overrightarrow{B, A}]$.

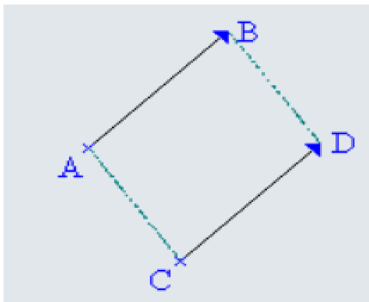
Relation d'équivalence

Deux segments orientés $[\overrightarrow{A, B}]$ et $[\overrightarrow{C, D}]$ sont équipollents ou égaux, s'ils ont

même direction,

même sens

et même longueur.



Pour l'ensemble des segments orientés l'équipollence est une relation d'équivalence. Par convention, deux segments orientés équipollents ne sont pas différenciés et appartiennent à une même classe d'équivalence. Ils peuvent donc être représentés par un même vecteur.

Nous adopterons la notation suivante :

Un bipoint (A, B) ou un segment orienté $[\overrightarrow{AB}]$ sera représenté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou par une lettre surmontée par une flèche $\vec{U}$).

Norme - Intensité - Module

Une unité de longueur ayant été choisie sur la droite (Δ) support du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on appelle longueur (ou norme, intensité, module ou valeur absolue) du vecteur $\overrightarrow{AB}$, désignée par $||\overrightarrow{AB}||$ la distance AB .

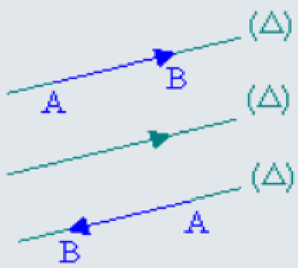
Cas particulier : si $||\overrightarrow{AB}|| = 1$, le vecteur est dit unitaire.

Mesure algébrique

- On appelle axe une droite support orientée.
- La mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\overline{AB}$, porté par un axe est le nombre relatif dont la valeur absolue est la longueur du vecteur et définie par :

$\overline{AB} = AB$ si $\overrightarrow{AB}$ a pour sens le sens positif de l'axe orienté.

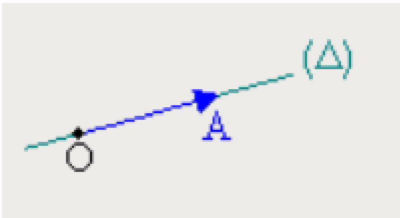
$\overline{AB} = -AB$ si $\overrightarrow{AB}$ a pour sens le sens négatif de l'axe orienté.



Deux vecteurs $A\dot{B}$ et $C\dot{D}$ sont dits opposés si leurs supports sont parallèles et leurs mesures algébriques comptées sur le même axe (Δ) sont opposées.

Cas particulier : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont deux vecteurs opposés.

L'abscisse d'un point A d'un axe est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OA}$, O étant un point de l'axe que l'on choisit pour origine. La connaissance de l'abscisse suppose que l'on a fixé l'origine O , l'axe (Δ) et l'unité de longueur .



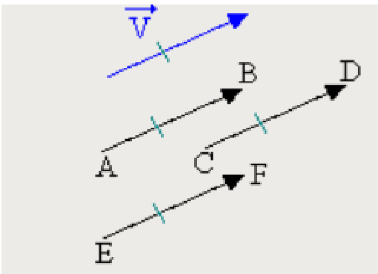
Vecteur libre

Définition

Un vecteur est appelé "vecteur libre" s'il est défini par sa direction, son sens et sa longueur.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{V}$.



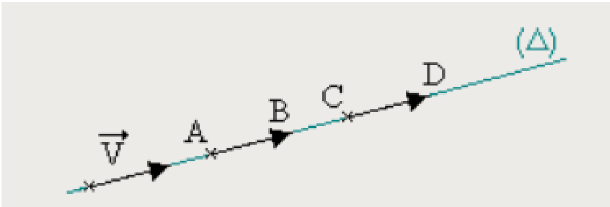
Vecteur glissant

Définition

Un vecteur est nommé "vecteur glissant" si l'on impose sa droite support (Δ) .

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur glissant $\vec{V}$.



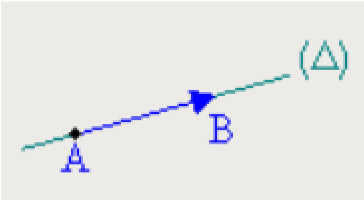
Vecteur lié

Définition

Un vecteur est nommé "vecteur lié" si l'on fixe le point d'application A

Exemple

La position du vecteur est complètement définie sur la droite support (Δ)

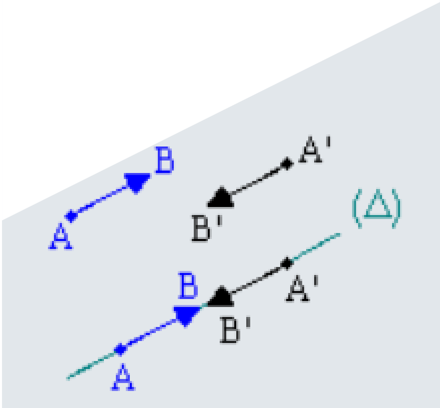


Deux vecteurs liés d'origines différentes (d'origine A et A') sont :

égaux s'ils ont même direction, même sens et même grandeur.

Ils représentent le même vecteur libre ou le même vecteur glissant s'ils ont même support (Δ) .

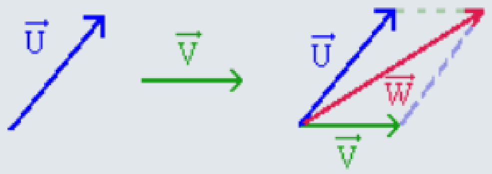
- opposés s'ils ont même direction, sens opposés, même grandeur et dits "directement opposés" s'ils ont même support (Δ) .



Addition vectorielle

Définition

La somme de deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, notée $\vec{U} + \vec{V}$, est un vecteur libre $\vec{W}$, obtenu par la "règle du parallélogramme".



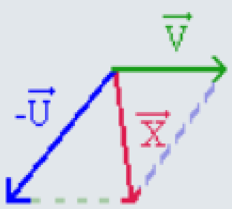
$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$$

Propriété

L'addition vectorielle est une loi de composition interne et possède les propriétés suivantes :

- Associativité : $\left(\vec{U} + \vec{V}\right) + \vec{W} = \vec{U} + \left(\vec{V} + \vec{W}\right)$
- Commutativité : $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$
- Elément neutre : $\vec{U} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{U} = \vec{U}$ ($\vec{0}$ vecteur nul)
- Elément symétrique : $\vec{U} + \left(-\vec{U}\right) = \vec{0}$ ($-\vec{U}$ vecteur opposé de $\vec{U}$)

Différence de deux vecteurs



Etant donné deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ il existe un unique vecteur $\vec{X}$ tel que :

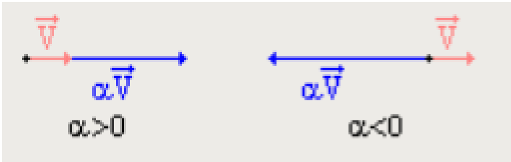
$$\vec{U} + \vec{X} = \vec{V} \Rightarrow \vec{X} = \vec{V} - \vec{U} = \vec{V} + \left(-\vec{U}\right)$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire α est un vecteur, noté $\alpha\vec{V}$, tel que :

- sa direction est celle de $\vec{V}$
- son sens : celui de $\vec{V}$ si $\alpha > 0$, celui $-\vec{V}$ de si $\alpha < 0$.
- sa norme est égale au produit de celle de $\vec{V}$ par la valeur absolue de α : $\|\alpha\vec{V}\| = |\alpha|\,\|\vec{V}\|$



Propriété

La multiplication d'un vecteur par un scalaire est une loi de composition externe vérifiant les propriétés :

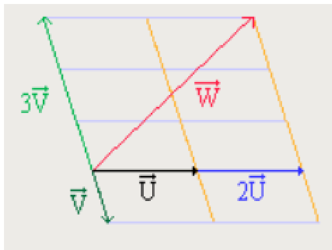
Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\alpha\left(\vec{U}+\vec{V}\right) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}$

Distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $\left(\alpha+\beta\right)\vec{U} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{U}$

Associativité : $\alpha\left(\beta\vec{U}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{U}$

Elément neutre : $1\vec{U} = \vec{U}$

Combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ du plan.



Exemple : Combinaison linéaire de deux vecteurs

Etant donnés les deux vecteurs de base $\vec{U}$ et $\vec{V}$, déterminons le vecteur $\vec{W}$, combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$: $\vec{W} = 2\,\vec{U} - 3\,\vec{V}$

Exemple : Vecteurs coplanaires

Les vecteurs $\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ n'étant pas colinéaires, cherchons si il existe deux réels a et b tels que $\vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = \alpha - 2\beta \\ -5 = \beta \\ -17 = -\alpha + 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

$\vec{W} = 2\vec{U} - 5\vec{V}$

Exemple : Intéraction entre deux charges éléctriques

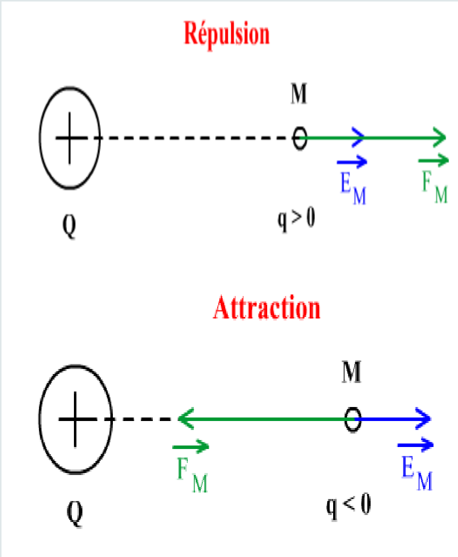
Une charge Q (>0 ou <0) crée en un point M de l'espace un champ électrostatique $\overrightarrow{E_M}$. Une charge ponctuelle q (>0 ou <0) placée en M subira une force $\overrightarrow{F_M}$ dont le sens dépendra des signes des charges Q et q . Déterminer le sens de $\overrightarrow{F_M}$.

Par définition : $\overrightarrow{F_M} = q\,\overrightarrow{E_M}$

Pour visualiser le champ et la force, cliquez sur la charge Q .

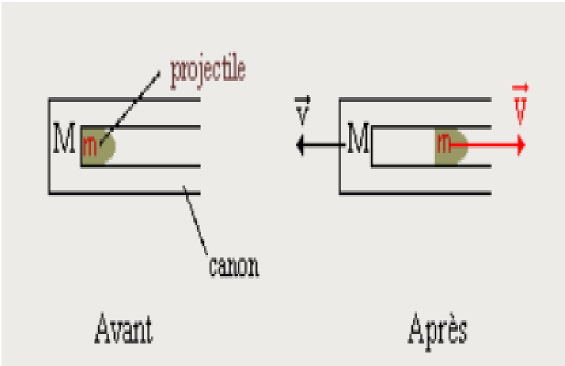
1^er^ cas : $Q > 0,\ q > 0$

2^ème^ cas : $Q > 0,\ q < 0$



Exemple : Conservation de la quantité de mouvement

Conservation de la quantité de mouvement lors du recul d'une arme à feu.



L'ensemble (arme - projectile) forme le système.

Avant la mise à feu : la quantité de mouvement est nulle.

Après la mise à feu : la somme des quantités de mouvements doit rester nulle.

d'où : $M\vec{v} + m\vec{V} = \vec{0}$

la vitesse de recul de l'arme à feu : $\vec{v} = -\dfrac{m}{M}\vec{V}$

Barycentre

Les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace. Un point A_i affecté d'un réel α_i, noté (A_i, α_i), est appelé point pondéré (point massif en physique quand $\alpha_i > 0$ représente une masse).

Définition

- Le point G est appelé le barycentre, de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ si :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Pour un point O arbitraire, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Coordonnées du barycentre : Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, en notant $(x_i; y_i; z_i)$ les coordonnées du point pondéré (A_i, α_i) et $(x_G; y_G; z_G)$ celles de G, alors :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; \; y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \; ; \; z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Exemple : Détermination des coordonnées du barycentre

On donne trois points dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$A(-3,1,2);\ B(-2,-1,1);\ C(0,3,-3)$

Calculer les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du barycentre G de ces trois points pondérés respectivement des coefficients 2 , -1 et 1 .

Calculons $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 2-1+1 = 2 \neq 0$, d'où

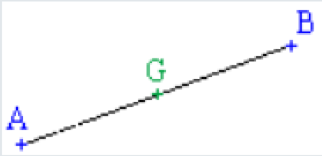
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i} = \frac{1}{2}\left(2\left(-3\right)+\left(-1\right)\left(-2\right)+\left(1\right)\left(0\right)\right) = -2$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i} = \frac{1}{2}\left(2\left(1\right)+\left(-1\right)\left(-1\right)+\left(1\right)\left(3\right)\right) = 3$$

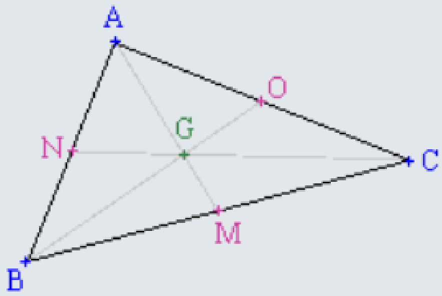
$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i} = \frac{1}{2}\left(2\left(2\right)+\left(-1\right)\left(1\right)+\left(1\right)\left(-3\right)\right) = 0$$

donc $G\,(-2,3,0)$ coordonnées du barycentre

L'isobarycentre G ***de deux points*** A ***et*** B se situe au milieu du segment $[AB]$.



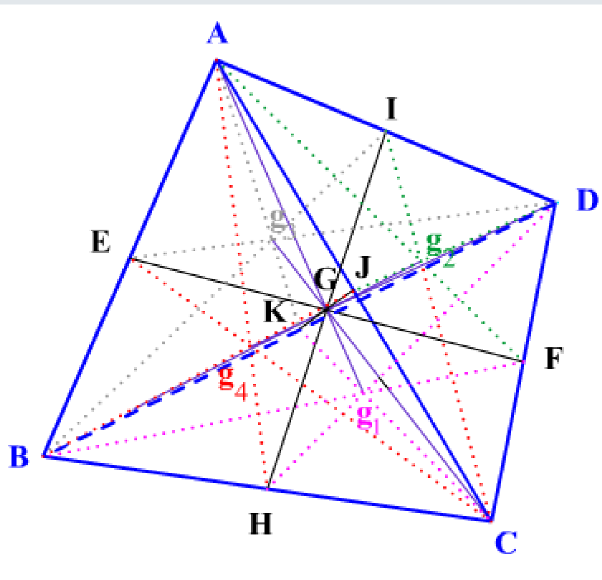
L'isobarycentre G ***de trois points*** A ***,*** B ***et*** C ***, non alignés***, se trouve au centre de gravité du triangle ABC , point de concours des trois médianes.



G point de concours des 3 médianes

AM , BO et CN du triangle ABC .

L'isobarycentre G ***de quatre points*** A ***,*** B ***,*** C ***et*** D , non coplanaires, est le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$, point de concours des quatre médianes et des trois droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.



g_2 , g_3 et g_4 centre de gravité des triangles BCD , ACD , ABD , ABC

G point de concours des quatre médianes (Ag_1, Bg_2, Cg_3, Dg_4) et des trois droites (EF, HI, JK) joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Souvenir … souvenir….

- **En Physique**

Le barycentre G d'un système de n points matériels P_i , de masse m_i , est appelée centre de gravité ou centre d'inertie du système et défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}$$

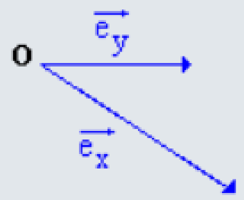
avec $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ masse totale du système

Le barycentre G d'un système matériel continu, se définit par :

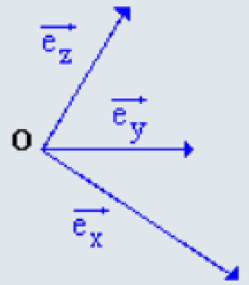
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int_{P \in \text{Système}} \overrightarrow{OP} \, \mathrm{dm}$$

Repère et coordonnées d'un point

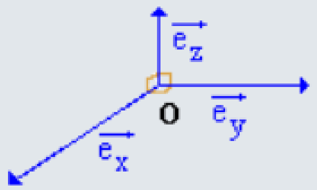
- Un repère (ou repère cartésien) du plan est un triplet $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\right)$ où O est un point arbitrairement choisi comme origine et $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\right)$ deux vecteurs non colinéaires.



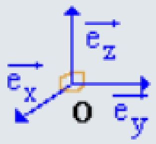
Un repère (ou repère cartésien) de l'espace est un quadruplet $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ où O est un point arbitrairement choisi comme origine et $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ trois vecteurs non coplanaires.



Le repère $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est dit repère cartésien orthogonal (ou rectangulaire) si les vecteurs $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ sont deux à deux perpendiculaires.



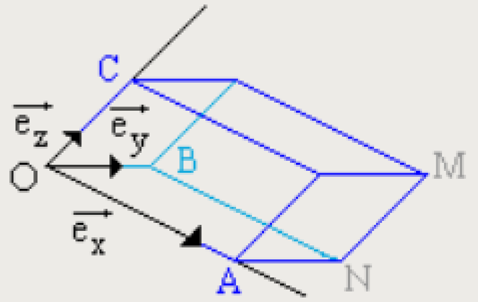
Le repère $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ est dit repère cartésien orthonormal (ou orthonormé) si les trois vecteurs du repère cartésien orthogonal sont des vecteurs unitaires. $(\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1)$



On appelle coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace, les trois réels uniques (x_M, y_M, z_M) définis respectivement par les relations :

$\overrightarrow{OA} = x_M \vec{e}_x$; $\overrightarrow{OB} = y_M \vec{e}_y$; $\overrightarrow{OC} = z_M \vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{e}_x + y_M \vec{e}_y + z_M \vec{e}_z$ (le point A , par exemple, est obtenu par projection de M sur un axe associé à $\vec{e}_x$, parallèlement au plan défini par $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$)

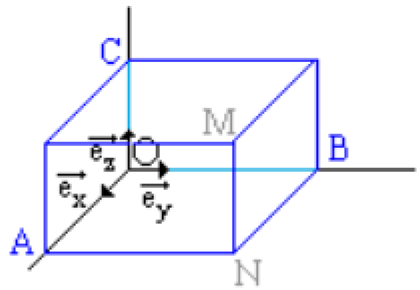
Repère cartésien non orthonormal



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{e_x} + y_M \overrightarrow{e_y} + z_M \overrightarrow{e_z}$$

Repère cartésien orthonormal



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{e_x} + y_M \overrightarrow{e_y} + z_M \overrightarrow{e_z}$$

Coordonnées d'un vecteur d'un repère

- Si $\overrightarrow{OM}$ représente un vecteur $\overrightarrow{U}$ de l'espace, on appelle x_M, y_M, z_M, les coordonnées (ou composantes) du vecteur $\overrightarrow{U}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$:

  On écrit :

$$\overrightarrow{U} = x_M\overrightarrow{e_x} + y_M\overrightarrow{e_y} + z_M\overrightarrow{e_z}$$

Propriété

Soient les vecteurs $\overrightarrow{U}(X,Y,Z)$ et $\overrightarrow{V}(X',Y',Z')$ alors :

$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V} \Leftrightarrow X = X', Y = Y', Z = Z'$

$\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{W_1}(X'',Y'',Z'')$ avec $X'' = X + X',\ Y'' = Y + Y',\ Z'' = Z + Z'$

$\overrightarrow{W_2} = k\overrightarrow{U}\ (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \overrightarrow{W_2}(X''',Y''',Z''')$ avec $X''' = kX,\ \ Y''' = kY,\ \ Z''' = kZ$

Etant donnés les points $M(x,y,z)$ et $N(x',y',z')$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

- le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour composantes :

  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x' - x, y' - y, z' - z)$
- la norme de $\overrightarrow{MN}$ est définie par : $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$
- le milieu I de MN a pour coordonnées $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2} = \left(\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2}, \dfrac{z + z'}{2}\right)$

Exemple

Dans un repère cartésien orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(1,2)$ et $B(-3,4)$.

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la norme de ce vecteur, les coordonnées de I , milieu de AB .

Composantes de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$$

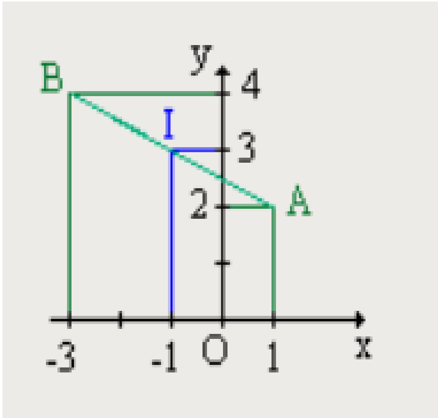
Norme de $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(-4\right)^2 + \left(2\right)^2} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

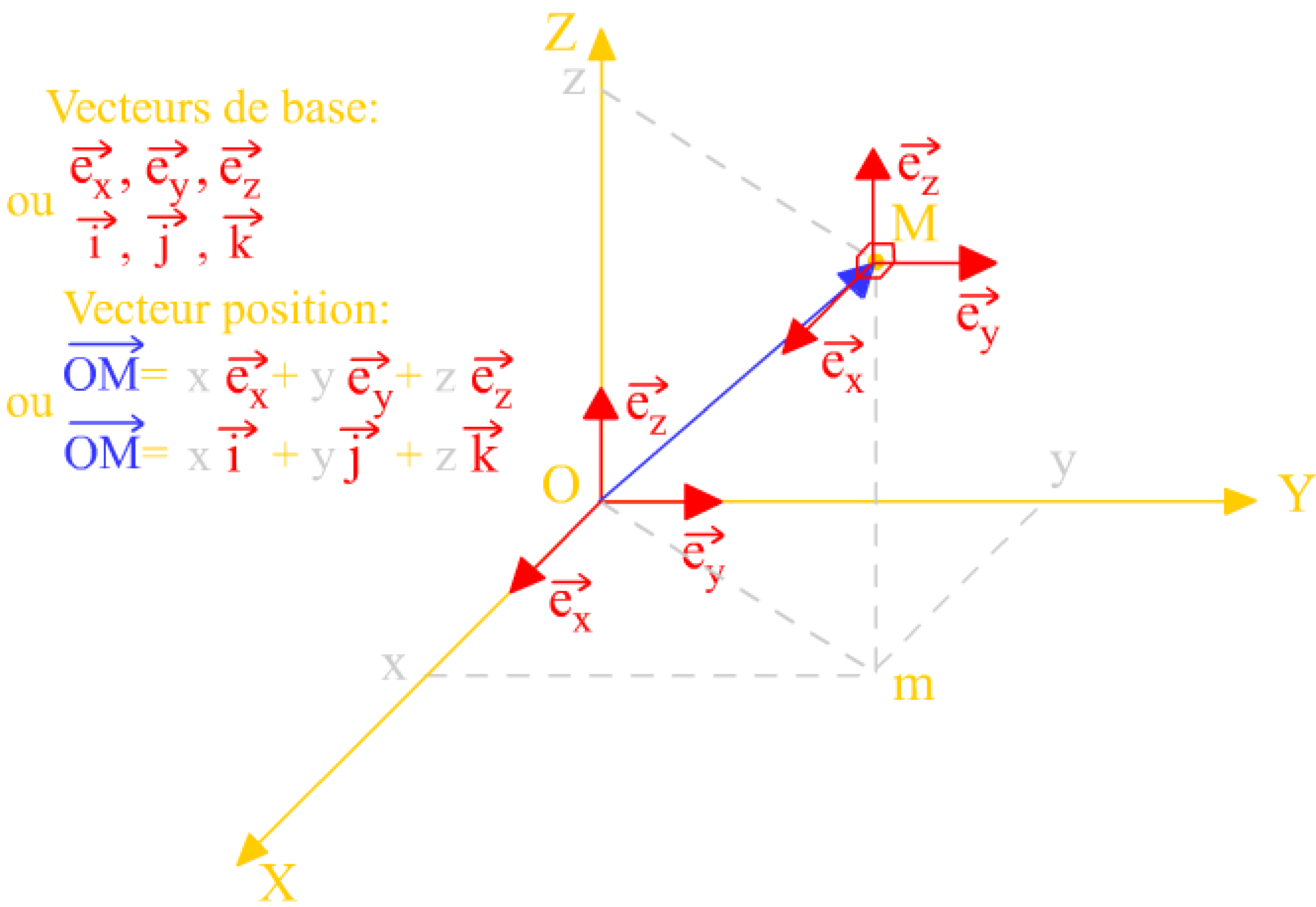
Coordonnées de I milieu de AB

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

coordonnées de I : $x_I = -1$ et $y_I = 3$



Représentation de la base cartésienne



Représentation de la base polaire

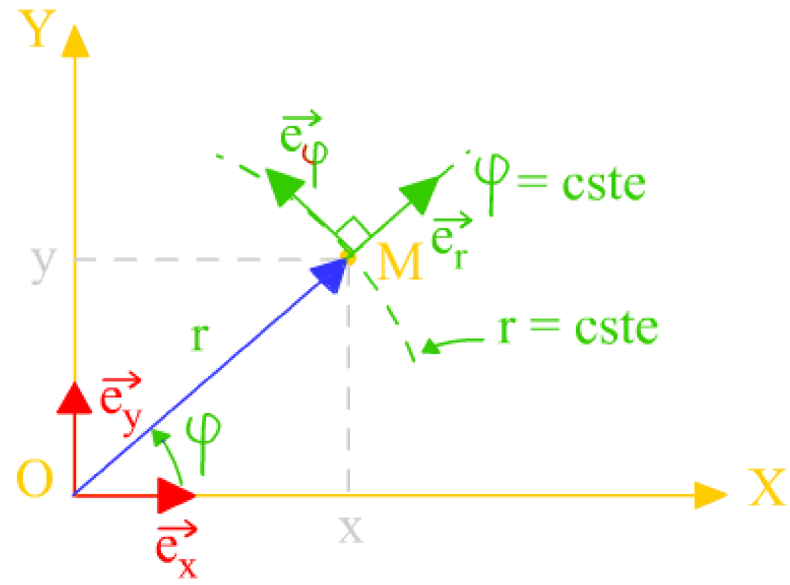
Vecteurs de base:

$\vec{e}_r$: radial

$\vec{e}_\varphi$: orthoradial

Vecteur position:

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

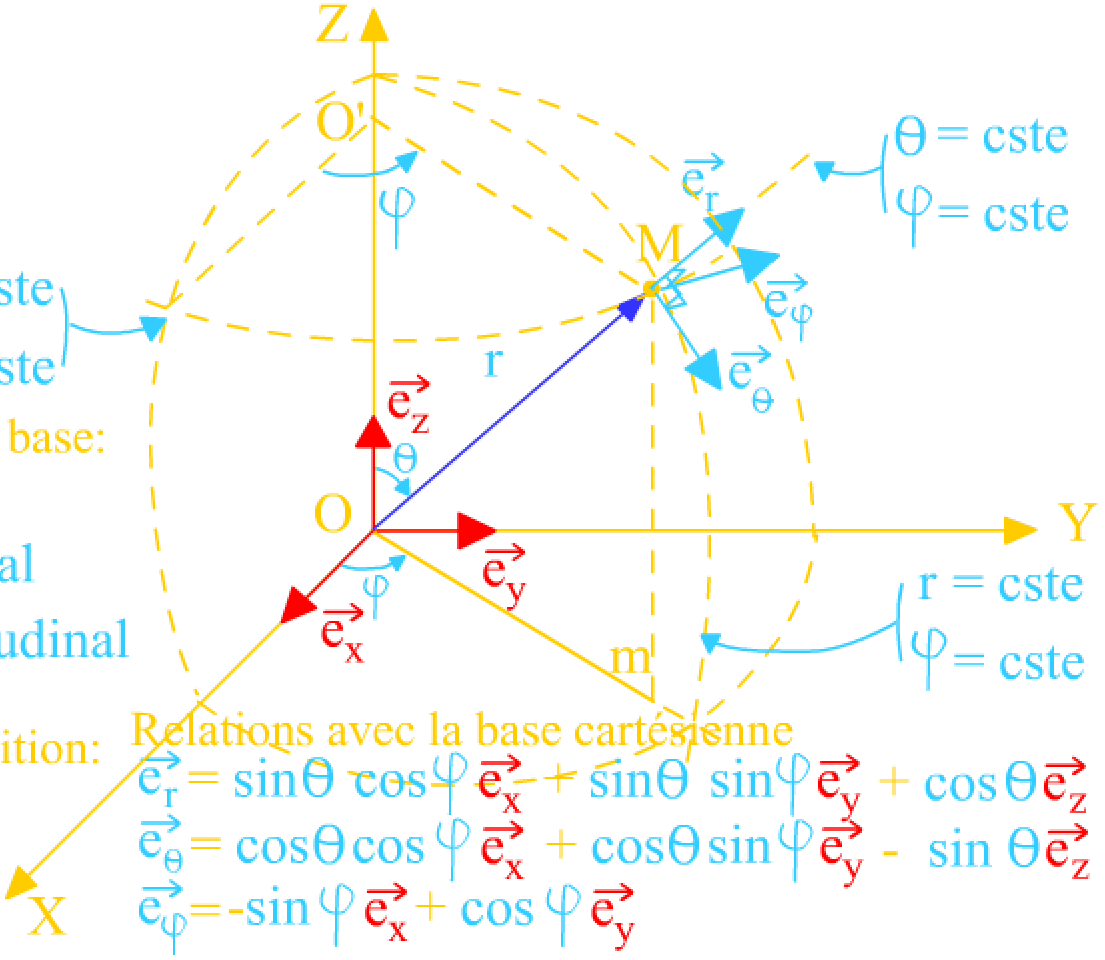


Relations avec la base cartésienne

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

Représentation de la base sphérique



Vecteurs de base:

$\vec{e}_r$: radial

$\vec{e}_\theta$: zénithal

$\vec{e}_\varphi$: longitudinal

Vecteur position:

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

Relations avec la base cartésienne

$$\vec{e}_r = \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

Orientation de l'espace et du plan

Orientation de l'espace :

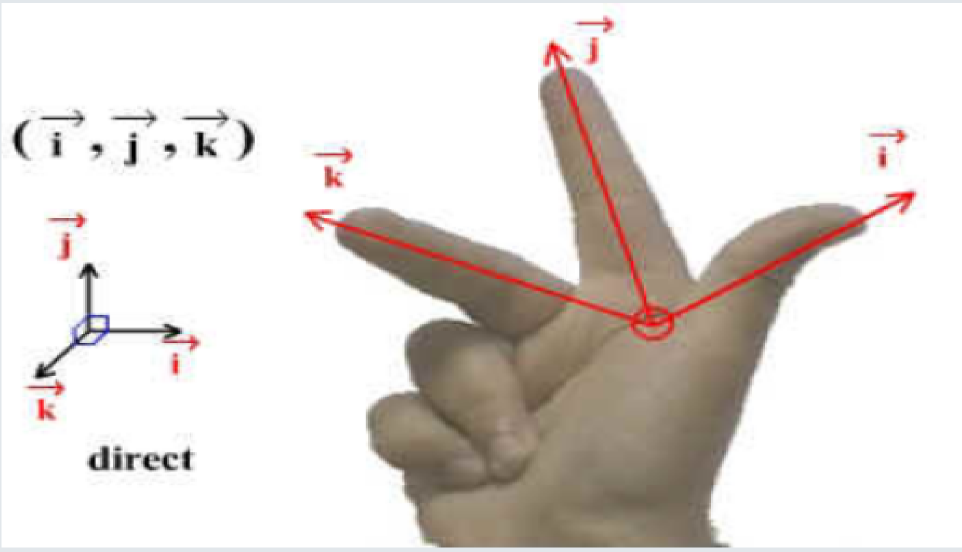
Soit un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace.

Notons : $\vec{i}=\overrightarrow{OA},\ \vec{j}=\overrightarrow{OB},\ \vec{k}=\overrightarrow{OC}$

Orienter l'espace, c'est distinguer les repères "directs" de ceux qui ne le sont pas et nommés "indirects". Certaines règles permettent de les différencier.

- ***"Règles des trois doigts" de la main droite.***

On associe les vecteurs de base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ aux axes d'un trièdre rectangle formé par les trois doigts de la main droite :



$\vec{i}$ dans la direction du *pouce*.

$\vec{j}$ dans la direction de l'*index*.

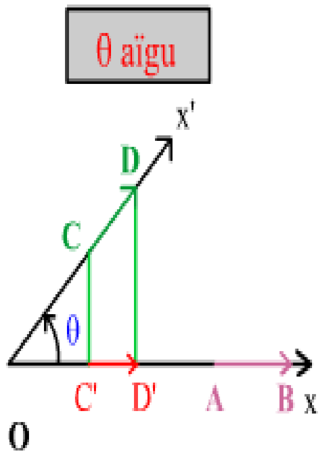
$\vec{k}$ dans la direction du *majeur*.

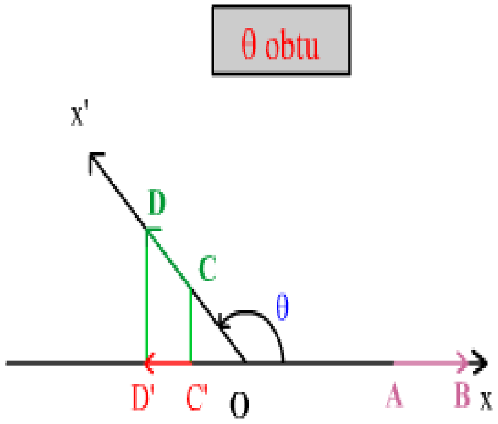
pour former un *trièdre direct*.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}\cdot\vec{V}$, est un scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de leur angle $\theta = \left(\vec{U},\vec{V}\right)$.

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|\cos\theta$$

Le produit scalaire est donc positif pour θ aigu, négatif pour θ obtu.





$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} > 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} < 0$$

Par définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{CD}\|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \|\overrightarrow{AB}\|\times\overrightarrow{C'D'}$$

car $\overline{C'D'} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CD}\|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur lui.

Forme analytique :

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}) \cdot (V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

sachant que :

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

Disposition pratique

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

Propriété

Commutativité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$

Bilinéarité : $\begin{cases} (\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W} \\ (\alpha\vec{U}) \cdot (\beta\vec{V}) = (\alpha\beta)(\vec{U} \cdot \vec{V}) \; (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Relations :

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = \vec{U}^2 > 0 \text{ si } \vec{U} \neq 0 \left(\vec{U}^2 = \|\vec{U}\|^2\right)$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \text{ si } \vec{U} = \vec{0} \text{ ou } \vec{V} = \vec{0} \text{ ou } \vec{U} \perp \vec{V}$$

$$(\vec{U} \pm \vec{V})^2 = (\vec{U})^2 \pm 2(\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{V})^2$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = (\vec{U})^2 - (\vec{V})^2$$

$(\vec{U} \cdot \vec{V})^2 \leq (\vec{U})^2(\vec{V})^2 \Leftrightarrow |\vec{U} \cdot \vec{V}| \leq \|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\|$ (***inégalité de Schwartz***)

$$\|\vec{U}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{0}$$

$\|\alpha\vec{U}\| = |\alpha| \, \|\vec{U}\|$ (α scalaire)

$\|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$ (***inégalité triangulaire***)

Valeur absolue !

En géométrie (dans un repère orthonormé)

- Module d'un vecteur $\vec{V}\left(V_x, V_y, V_z\right)$

  On a : $\vec{V} \cdot \vec{V} = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

Exemple

Module du vecteur $\vec{V}\left(2, -3, 6\right)$

Par définition de $\vec{V}\left(V_x, V_y, V_z\right)$, nous avons la norme de $\vec{V}$:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{V}\| &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \\
&= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (6)^2} \\
&= \sqrt{4 + 9 + 36} \\
&= \sqrt{49} = 7
\end{aligned}
$$

- Distance entre deux points $M(x, y, z)$ et $N(x', y', z')$

  $$d(M, N) = MN = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Exemple

Distance entre les points $M(-2, 1, 3)$ ***et*** $N(1, 4, -2)$

Par définition :

$$
\begin{aligned}
d(M, N) &= MN \\
&= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (4 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} \\
&= \sqrt{9 + 9 + 25} \\
&= \sqrt{43}
\end{aligned}
$$

Détermination du cosinus de l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$

Par application du produit scalaire :

$$\cos\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\|} = \frac{U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\,\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

Exemple

Détermination du cosinus de l'angle entre les vecteurs $\vec{U}(0, -3, -3)$ ***et*** $\vec{V}(1, -2, -1)$

Par application du produit scalaire : $\cos\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \dfrac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\|}$

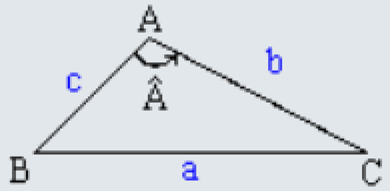
$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (0)(1) + (-3)(-2) + (-3)(-1) = 9$$

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

d'où $\cos\left(\vec{U}, \vec{V}\right) = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Relation métrique dans un triangle quelconque



Nous avons $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ d'où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^2 &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

Exemple

Déterminer l'angle intérieur à un sommet d'un triangle

On considère un triangle de sommets $A(-4,-2,0)$; $B(-1,-2,4)$ et $C(9,-2,-1)$ dans un repère orthonormé. Déterminer l'angle intérieur au sommet A .

Relation du triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

avec

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 9 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow b^2 = 13^2 + 1^2 = 170$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

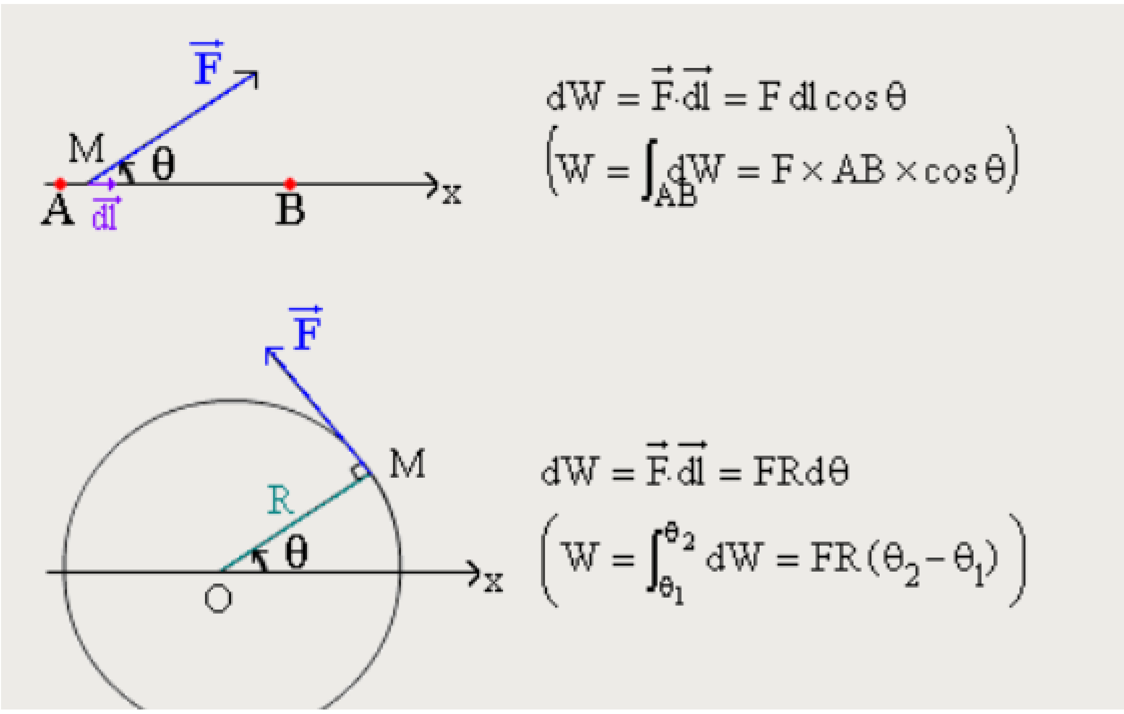
$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 9 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{vmatrix} \Rightarrow a^2 = 10^2 + (-5)^2 = 125$$

d'où

$$\cos \hat{A} = \frac{170 + 25 - 125}{2\sqrt{170} \times 5} = \frac{7}{\sqrt{170}} \Rightarrow \hat{A} \# \frac{\pi}{3}\ (57°53)$$

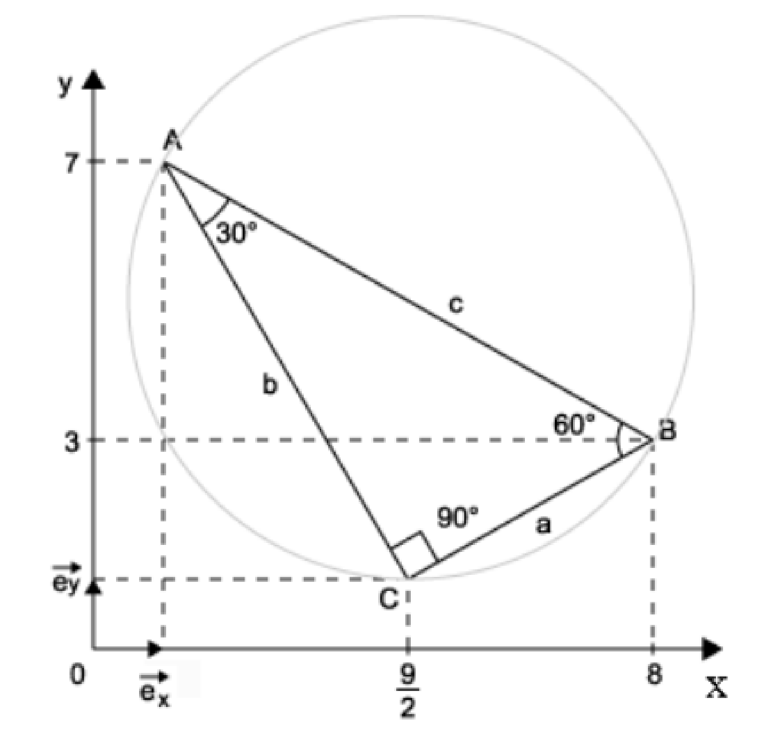
En Physique

- Travail élémentaire dW d'une force $\vec{F}$ constante dont le point d'application se déplace de $\vec{dl}$: $dW = \vec{F}\,.\vec{dl}$



Dans un repère cartésien orthonormé $\left(O;\vec{e_x},\vec{e_y}\right)$,on donne les trois points $A(1,7)$; $B(8,3)$ et $C\left(\frac{9}{2},1\right)$ formant le triangle ABC .

A partir du produit scalaire, retrouver l'équation cartésienne du cercle (C_0) de diamètre AB dans le plan xOy et vérifier, aux approximations prés, que le sommet C du triangle ABC appartient à ce cercle .



Pour un point $M(x,y) \in C_0$ nous avons :

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) \bullet (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 7 & -y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 & -x \\ 3 & -y \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (1-x)\,(8-x) + (7-y)\,(3-y) = 0$

$\Leftrightarrow 8 - 9x + x^2 + 21 - 10y + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - 10y + 29 = 0$

ou $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2$ de la forme $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

avec $x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9}{2}$ et $y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = 5$ les coordonnées du centre du cercle .

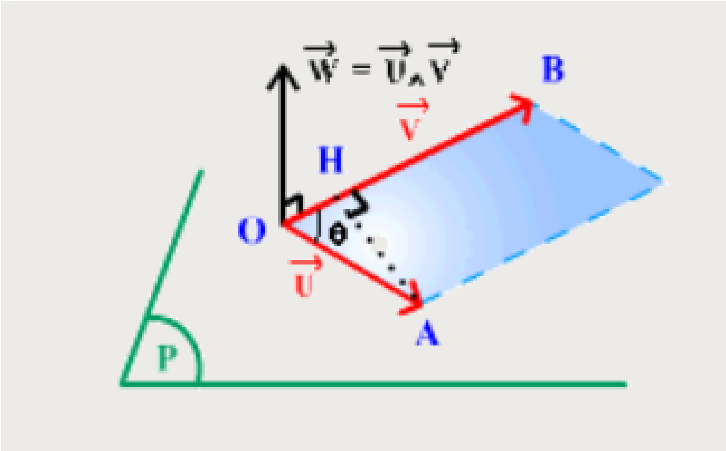
Remarque : Le triangle ABC étant approximativement demi-équilatéral , le sommet C d'angle $90°$, doit appartenir au cercle (C_0) d'où :

$$x^2 + y^2 - 9x - 10y + 29 = \frac{81}{4} + 1 - \frac{81}{2} - 10 + 29 = -0,25 \approx 0$$

Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un vecteur $\vec{W}$, noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ de :

- direction : $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$
- sens : trièdre $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$ direct
- norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\| \, \left|\sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right)\right|$



$\|\vec{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, $AH = OA \sin\theta = \|\vec{U}\| \, \left|\sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right)\right|$ et l'aire du parallélogramme devient :

$OB \times AH = \|\vec{V}\| \, \|\vec{U}\| \, \left|\sin\left(\vec{U}, \vec{V}\right)\right|$.

Forme analytique :

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \left(U_y V_z - U_z V_y\right)\vec{i} + \left(U_z V_x - U_x V_z\right)\vec{j} + \left(U_x V_y - U_y V_x\right)\vec{k}$$

sachant que :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

Disposition pratique :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \left[\begin{array}{c} U_x \\ U_y \\ U_z \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array}\right. = \left[\begin{array}{c} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{array}\right.$$

Pour obtenir les composantes du produit vectoriel :

1. Ajouter dans chacune des colonnes des composantes de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$ les composantes sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2. Effectuer la différence des "produits en croix"

Propriété

Non Commutativité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

Bilinéarité : $\begin{cases} \left(\vec{U} + \vec{V}\right) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W} \\ \left(\alpha\vec{V}\right) \wedge \left(\beta\vec{V}\right) = (\alpha\beta)\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Relation :

$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\vec{U} \parallel \vec{V}$

Mesure de l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ ou d'un triangle ABC

Aire du parallélogramme $(ABCD) = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

Aire du triangle $(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

Exemple : Calcul de l'aire d'un triangle

Dans le plan xOy , nous avons les trois points $A(2, 1)$; $B(-1, 0)$; $C(3, -4)$

Calculer l'aire S du triangle ABC .

Par définition $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 1)$

et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, -5)$

d'où

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left[\begin{array}{c} -3 \\ -1 \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{c} 1 \\ -5 \end{array}\right. = 15 + 1 = 16\vec{k}$$

(composante sur (Oz))

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 8 \text{ ua}$$

Equation cartésienne d'une droite (D) passant par deux points A et B d'un plan xOy .

Si un point $M \in (D)$ alors $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

Exemple : Détermination de l'équation cartésienne d'une droite

A partir du produit vectoriel, retrouver l'équation cartésienne de la droite (D) qui passe par les points $A(2,-1)$ et $B(1,2)$ du plan xOy rapporté à un repère orthonormé.

Si un point $M(x,y) \in (D)$ alors : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, comme

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

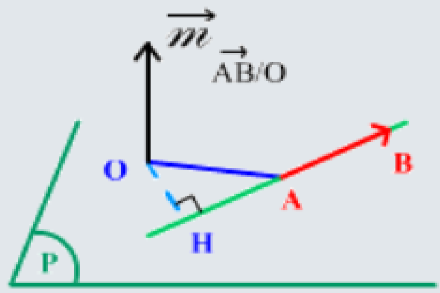
d'où

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x-2) \\ (y+1) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [3(x-2) + (y+1)]\vec{k} = \overrightarrow{0}$$

donc $3(x-2) + y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $3x + y - 5 = 0$ Equation cartésienne de la droite (D)

Moment d'un vecteur par rapport à un point



Moment de vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est le vecteur :

$$\vec{m}\,\overrightarrow{AB}/o = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Module : $\left\|\vec{m}\,\overrightarrow{AB}/o\right\| = \left\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)$

avec $OH = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)$

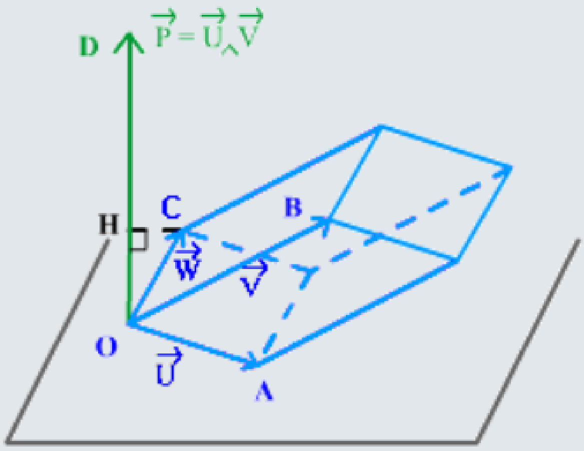
Force subie par une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{(}\textbf{Force de Lorentz}\text{)}$$

produit mixte

On appelle produit mixte entre trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$, le scalaire défini par :

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}$$



Posons $\vec{p}=\vec{U}\wedge\vec{V}$

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\vec{p}\cdot\vec{W}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$$

Si H désigne la projection orthogonale de C sur OD alors :

$$\begin{aligned}\left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right| &= \left\|\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}\right\|=\left\|\overrightarrow{OD}\right\|\,\left\|\overrightarrow{OC}\right\|\,\left|\cos\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right)\right|\\ &= \left\|\overrightarrow{OD}\right\|\,\left\|\overrightarrow{OH}\right\|\end{aligned}$$

avec $\left\|\overrightarrow{OD}\right\|=\left\|\vec{U}\wedge\vec{V}\right\|$ aire du parallélogramme construit sur $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et donc :

$\left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right|$ ***: Volume du parallélépipède d'arêtes*** OA **,** OB ***et*** OC

Dans la base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ le produit mixte de trois vecteurs :

$$\vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U_z\vec{k}$$
$$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$$
$$\vec{W}=W_x\vec{i}+W_y\vec{j}+W_z\vec{k}$$

s'exprime par le scalaire :

$$\begin{aligned}\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) &= \left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}\\ &= \left(U_yV_z-U_zV_y\right)W_x+\left(U_zV_x-U_xV_z\right)W_y+\left(U_xV_y-U_yV_x\right)W_z\end{aligned}$$

Exemple : Calcul de produit mixte

Soit $\vec{U}(3,1,2)$, $\vec{V}(1,1,1)$ et $\vec{W}(1,2,1)$. Calculer $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$.

Par définition du produit mixte : $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) = \left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W}$

or

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ -(2-3) \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)\cdot\vec{W} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(1) + (1)(2) + (2)(1) = 3$$

Détermination du volume d'un parallélépipède connaissant les arêtes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right|$$

Exemple : Volume d'un parallélépipède

Détermination du volume du parallélépipède construit sur les arêtes $\overrightarrow{OA}(3,6,3)$; $\overrightarrow{OB}(1,3,-2)$ et $\overrightarrow{OC}(2,2,2)$.

$$V = \left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right| = \left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|$$

avec $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12-9=-21 \\ -(-6-3)=9 \\ 9-6=3 \end{bmatrix}$

et $\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} -21 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -(21)(2) + (9)(2) + (3)(2) = -18$

et volume du parallélépipède :

$$V = \left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right| = \left|-18\right| = 18 \text{ uv}$$

- Equation cartésienne d'un plan (P) passant par trois points A , B et C .

Si $M \in (P)$ alors : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = 0$

Exemple : Equation d'un plan

Equation cartésienne du plan (P) passant par les points : $A(1,7,1)$; $B(3,4,1)$ et $C(-1,-2,5)$ rapportés à un repère orthonormé.

Si un point $M(x,y,z) \in (P)$ alors : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-7 \\ z-1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \\ -24 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} &= \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \\ -24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-7 \\ z-1 \end{bmatrix} \\ &= -12(x-1) - 8(y-7) - 24(z-1) = 0 \\ &= -12x + 12 - 8y + 56 - 24z + 24 = 0 \\ &= -12x - 8y - 24z + 92 = 0 \end{aligned}$$

après simplification, l'équation du plan est :

$3x + 2y + 6z - 23 = 0$

Les champs en physique.

Définition. Lorsque dans une région de l'espace, on a attaché à chaque point une grandeur scalaire $(C(\overrightarrow{X},t)$ ou vectorielle $(\overrightarrow{C}(\overrightarrow{X},t)$, on a défini ce qu'on appelle un ***champ*** (respectivement scalaire ou vectoriel).

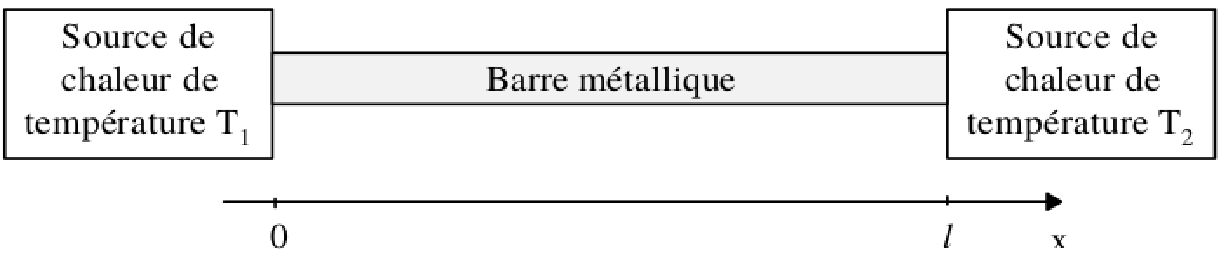
En Physique, on définit un *champ de scalaires* ou un *champ de vecteurs* lorsque l'on associe à chaque point d'une région de l'espace une grandeur scalaire ou vectorielle. Par exemple:

- Température en chaque point d'une pièce : champ de scalaires

- Champ électrique entre les armatures d'un condensateur : champ de vecteurs défini par les trois fonctions scalaires: $E_x(x,y,z)$ $E_y(x,y,z)$ et $E_z(x,y,z)$.

Pour définir complètement le champ, on doit se donner le domaine D de l'espace où le champ prend ses valeurs.

Bien souvent en Physique, la connaissance des valeurs du champ sur les limites du domaine D (les "conditions aux limites") sera fondamentale pour la détermination complète du champ.



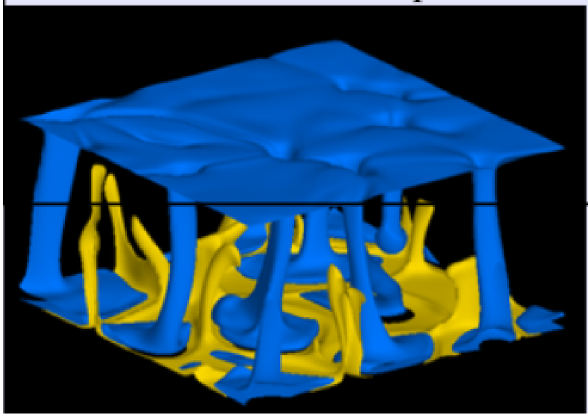
En tout point d'abscisse x de la barre, on définit le champ de température $T(x)$ (champ de scalaires). Le domaine D est la barre. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$T(x{=}0) = T_1 \quad \text{et} \quad T(x{=}l) = T_2 \,.$$

- On dit qu'un champ est *uniforme* dans une région D de l'espace si la grandeur définissant le champ prend la même valeur en chaque point de D.

On dit qu'un champ est *stationnaire* ou *permanent* dans une région D de l'espace si la grandeur définissant le champ ne dépend pas du temps en chaque point de D.

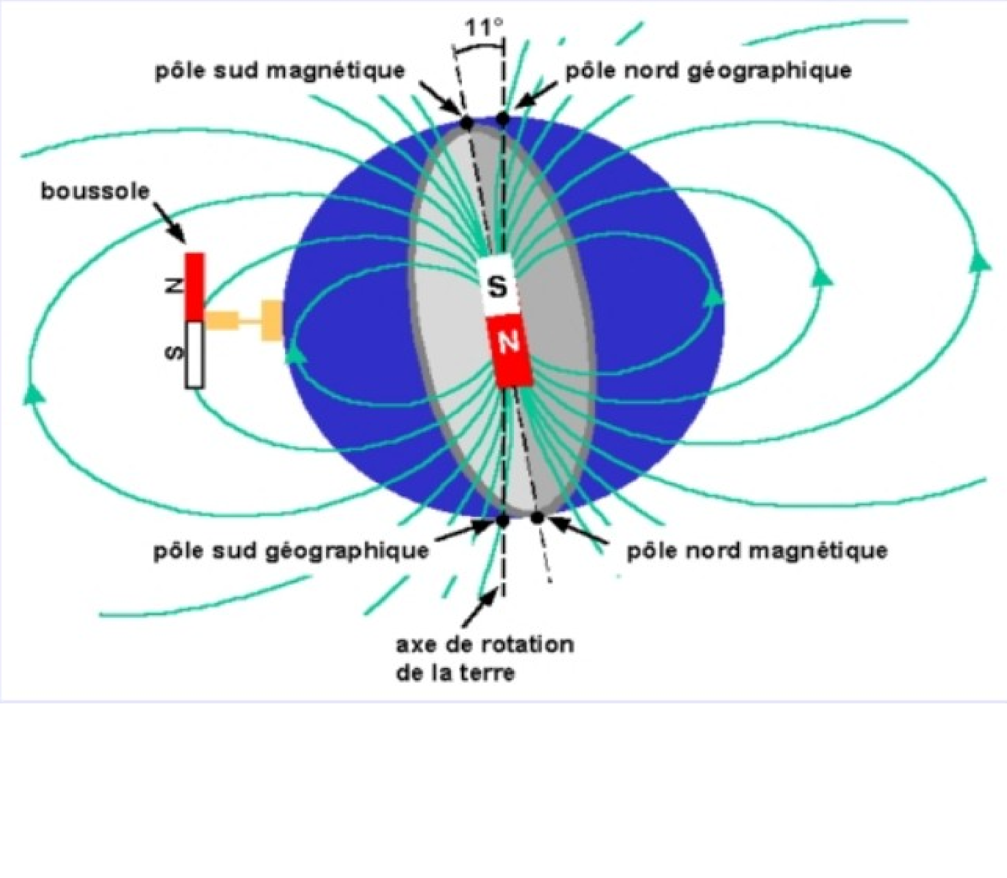
☞ Le champ de température **SCALAIRE**, $T(\overrightarrow{X}, t)$.
Calcul numérique dans un parallélépipède avec chauffage par le bas ($Ra = 10^7$), avec chauffage interne ($H = 20$, sans dimension). Deux iso-surfaces de température sont représentées, une chaude et une froide, pour visualiser les courants ascendant et descendant au cours du temps.



Labrosse (2000)

☞ Le champ de gravité est un champ VECTORIEL $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{X}, t)$. En tout point un objet lâché tombera en suivant la direction locale du champ de gravité!

☞ Le champ magnétique $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{X}, \mathrm{t})$ VECTORIEL.



Gradient scalaire

Soit un champ scalaire dépendant des trois variables d'espace f(x,y,z)

Différentielle(variation de f quand M(x,y,z) $\to$ M(x+dx, y+dy, z+dz) à un temps t constant:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

or le vecteur déplacement infinitésimal s'écrit

$$\overrightarrow{dM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

$\to$ $\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{dM}}$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z}$$

définition du GRADIENT scalaire en coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient scalaire

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

Le gradient quantifie les variations de f selon les 3 coordonnées (x, y, z).

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ pointe dans la direction où la variation d'amplitude est max.

Exemple: Si on a une carte topographique avec des lignes de niveaux, le vecteur gradient pointe dans la direction où les lignes de niveaux sont le plus rapprochées, dans la direction de plus grande pente.

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{dM} = |\ \overrightarrow{\text{grad}}\ f\ |\ |\ \overrightarrow{dM}\ |\ \cos\theta$$

☞ Si on se déplace parallèlement au gradient ($\cos\theta = 1$), on maximise les variations de f.

☞ Si on suit une ligne d'isovaleur ($df = 0$), alors la définition ci-dessus nous indique qu'on se déplace perpendiculairement au vecteur gradient de la fonction f.

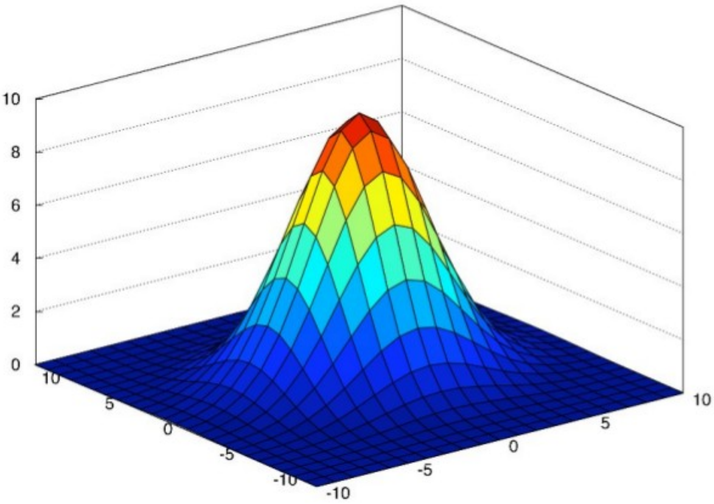
$\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaire aux lignes de niveaux.

II/ Colline synthétique (4 points)

On représente un relief (cf. schéma) de type colline axi-symétrique d'altitude totale 10 m par la fonction des 2 variables d'espace x_1 et x_2 f telle que :

$$f(x_1, x_2) = 10\, e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{20}},$$

les unités associées étant le mètre.



1/ Donnez l'expression littérale des coordonnées du vecteur gradient de cette fonction. Que représente le gradient dans le cas particulier de ce relief ?

2/ Calculez la norme du vecteur gradient. Où s'annule-t-elle ?

3/ En considérant la nouvelle variable

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

exprimez cette norme en fonction de r. Quelle disposition va adopter la projection dans le plan (O,x_1,x_2) d'un ensemble de points d'égale pente ?

4/ Dérivez cette norme du gradient par rapport à r et déterminez ensuite l'ensemble des points (x_1,x_2) pour lesquels la pente de cette colline est maximale.

La divergence d'un vecteur

Soit un vecteur $\overrightarrow{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Par définition, la divergence du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le résultat de la divergence d'un vecteur est un SCALAIRE.

La divergence caractérise comment un champ évolue dans sa propre direction car cet opérateur fait intervenir des dérivées partielles non-croisées (par exemple $\frac{\partial A_x}{\partial x}$).

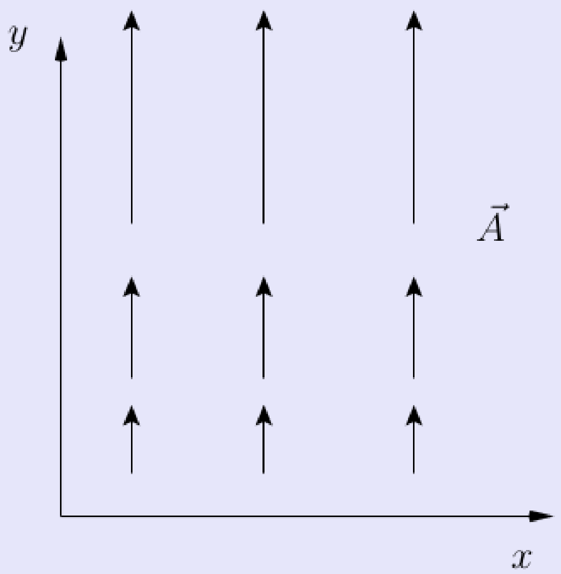
Si $\mathrm{div}\overrightarrow{A} \neq 0$ alors on dit que le champ possède une *source* ou un *puits* de champ, il est dit à flux non-conservatif (voir les exemples plus loin).

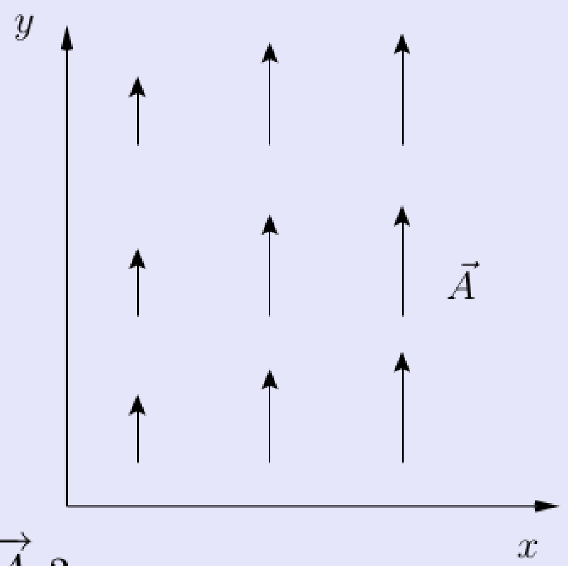
Si $\mathrm{div}\overrightarrow{A} = 0$, le flux est dit à champ conservatif, il est dit solenoïdal.

Par définition, la divergence du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exemples





$\mathrm{div}\overrightarrow{A}$?

Le rotationnel d'un vecteur

Soit un vecteur $\overrightarrow{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

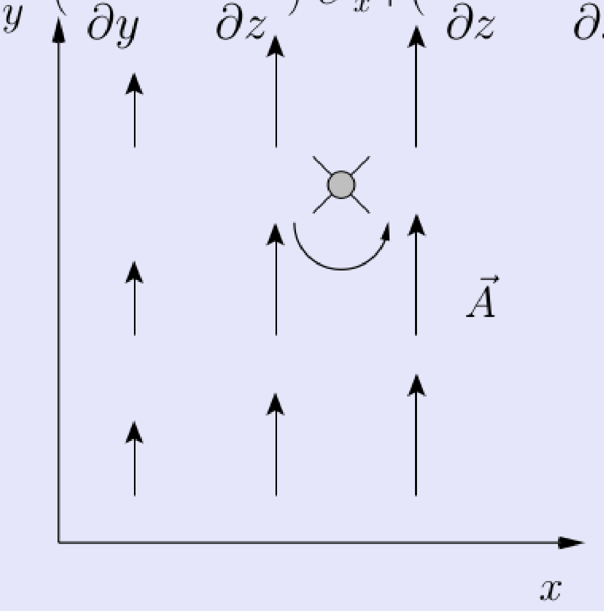
Par définition, le rotationnel du vecteur $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\overrightarrow{e}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\overrightarrow{e}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\overrightarrow{e}_z$$

Le résultat du rotationnel d'un vecteur est un VECTEUR.

Le rotationnel fait intervenir les les dérivées partielles croisées d'un champ de vecteur $\left(\text{par exemple } \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$. Il caractérise le *cisaillement* d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\overrightarrow{e}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\overrightarrow{e}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\overrightarrow{e}_z$$



Laplacien scalaire

Soit un champ scalaire f($\overrightarrow{X}$)=f(x,y,z).
Par définition le **laplacien** d'un champ scalaire est

$$\Delta f = \nabla^2 f = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien interviendra dans tous les problèmes de diffusion: diffusion de la chaleur, diffusion d'un concentré chimique, diffusion de la quantité de mouvement, etc...

Opérateur nabla : ∇

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$$

$$\mathrm{div} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$$

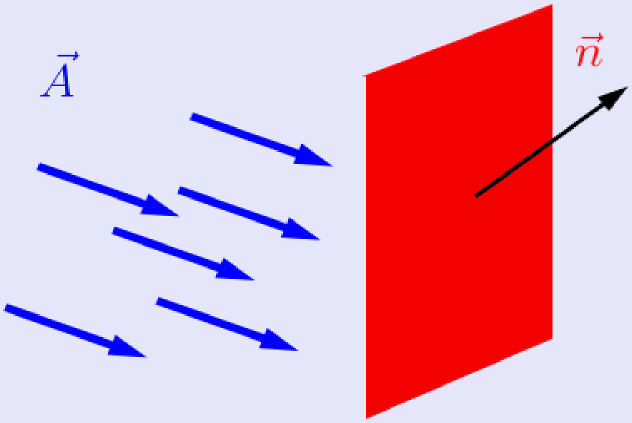
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

Flux vectoriel

Par définition, le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ à travers une surface dont le vecteur unitaire normal à la surface s'écrit $\overrightarrow{n}$ est:

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} dS$$

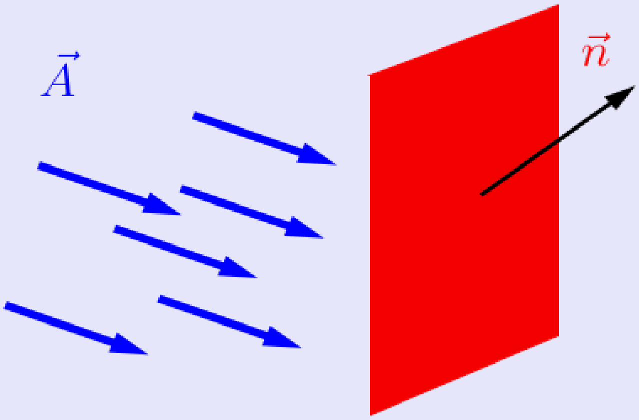


Dans cette notation, on a $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n} dS$.

Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ *traversant* la surface S.
$\longrightarrow$ La seule composante de $\overrightarrow{A}$ qui va intervenir dans le flux est la composante parallèle à $\overrightarrow{n}$, puisque la composante perpendiculaire à la surface ne peut la traverser.
Mathématiquement, la composante parallèle est

$$\overrightarrow{A}_{//} = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{A}_{\perp} = \overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$$

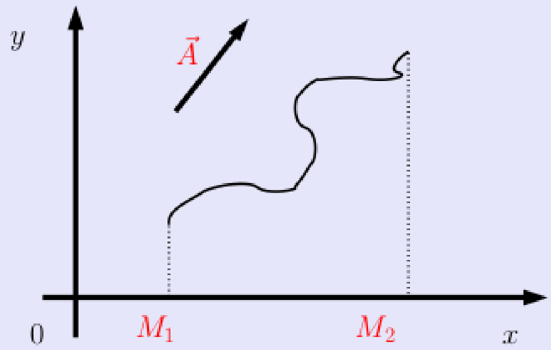


Circulation d'un vecteur

Soit un champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ donné défini dans un espace donné. On se donne un chemin délimité par deux points M_1 et M_2. Ce chemin est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dM}$.

Par définition, la circulation de $\overrightarrow{A}$ entre M_1 et M_2 est:

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM}$$



Dans notre cours, on aura souvent $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$. On dit que le champ $\overrightarrow{A}$ dérive du **potentiel scalaire** f si en tout point M du domaine $\mathcal{D}$ la relation

$$\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M)$$

est vérifiée.

$\longrightarrow$

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1)$$

La circulation du vecteur $\overrightarrow{A}$ est alors indépendante du chemin choisi, puisque ne dépendant que du point de départ et du point d'arrivée. Dans le cas particulier ou l'on intègre sur un contour fermé, on a

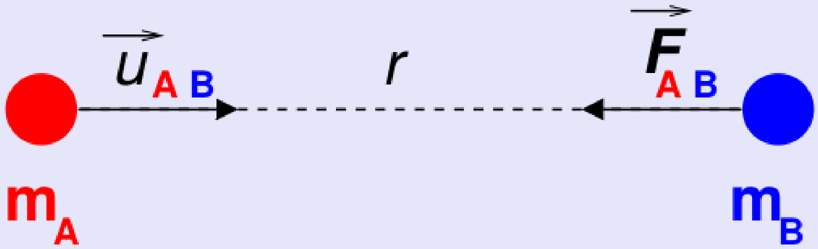
$$\oint \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dM} = 0$$

Application au champ gravitationnel

Loi universelle de gravitation

Forces de gravité: forces exclusivement attractives

$$\overrightarrow{F}_{A \longrightarrow B} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A \longrightarrow B}$$



$$\boxed{m_A\, m_B > 0}$$

Constante de gravitation universelle (Cavendish, 1798)
$\mathcal{G} = 6.67\ 10^{-11}$ S.I. (Nm^2/kg^2)

$$\overrightarrow{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{A \rightarrow B}$$

Champ gravitationnel

$$\overrightarrow{g}_{A} = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{u}_{A \longrightarrow B}$$

$$\overrightarrow{F}_{B} = m_B\, \overrightarrow{g}_{A}$$

Principe de superposition:

$$\overrightarrow{F}_{\rightarrow B} = \sum_{i=1}^{N} -\mathcal{G}\frac{m_i m_B}{r^2}\overrightarrow{u}_{i\rightarrow B}$$

$$\overrightarrow{g}_{\rightarrow B} = \sum_{i=1}^{N} -\mathcal{G}\frac{m_i}{r^2}\overrightarrow{u}_{i\rightarrow B}$$

ou sous forme intégrale

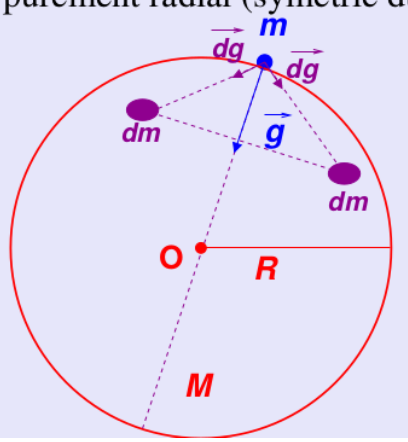
$$\overrightarrow{g}_{\rightarrow B} = \iiint_{\mathcal{V}} -\mathcal{G}\frac{dm}{r^2}\overrightarrow{u}_{\rightarrow B}$$

Poids d'un corps

Définition:**Le poids d'un corps est la force gravitationnelle résultante de l'attraction gravitationnelle des autres corps présents dans l'Univers.**

Exemple: A la surface de la terre, la force d'attraction est si grande devant les forces des autres corps (présents dans l'Univers) que l'attraction gravitationnelle peut être considérée comme provenant uniquement de la Terre.

Supposons maintenant que la Terre soit une sphère parfaitement homogène. Supposons un corps de masse m à la surface terrestre. Le champ de gravité est purement radial (symétrie du problème).



Le POIDS du corps m s'écrit d'après la définition:

$$\text{Poids}_{m} = |\overrightarrow{F_m}| = mg = m\,\mathcal{G}\,\frac{M}{R^2}$$

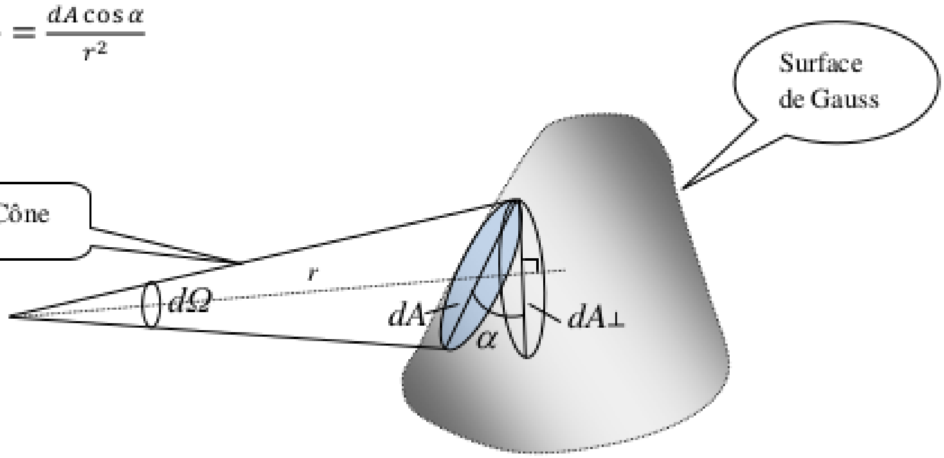
Théorème de Gauss:

$$\Phi = \oiint_S \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi\, \mathcal{G} \iiint_V \rho d\tau = -4\pi\, \mathcal{G}\, M_{\text{int}}$$

Démonstration en electrostatique :

1) Définition de l'angle solide $d\Omega$: portion d'espace compris à l'intérieur d'un cône.

$$d\Omega = \frac{dA_\perp}{r^2} = \frac{dA\cos\alpha}{r^2}$$

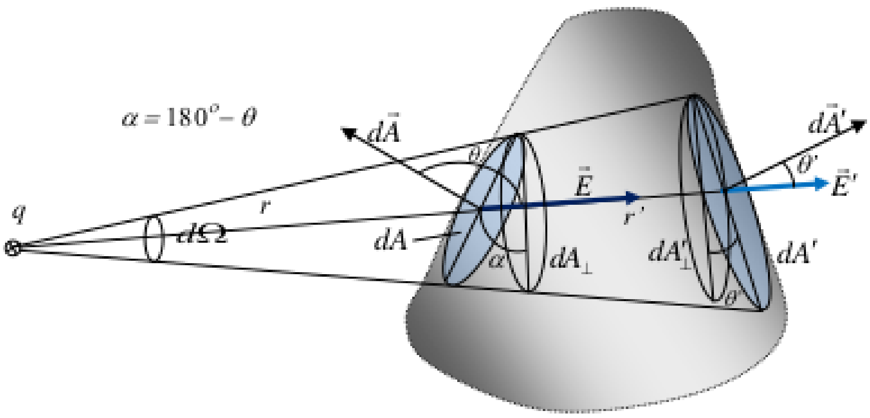


2) Flux du champ électrique à travers une surface **fermée** :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos\theta$$

3) Contribution au flux d'une charge extérieure à la surface de Gauss.

La charge extérieure q donne deux contributions au flux : une contribution rentrante $d\Phi$ à travers dA et une contribution sortante $d\Phi'$ à travers dA'



$$d\Omega = \frac{dA_\perp}{r^2} = \frac{dA'_\perp}{r'^2}$$

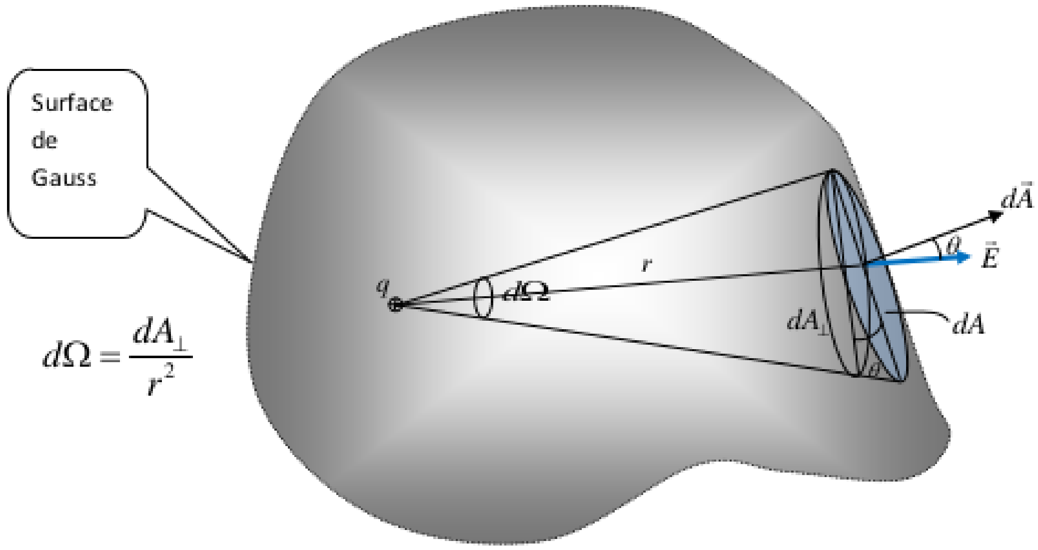
Flux à travers un angle solide $d\Omega$

$$d\Phi = EdA\cos\theta = \frac{kq}{r^2}dA\cos\theta = -\frac{kq}{r^2}dA\cos\alpha = -\frac{kq}{r^2}dA_\perp = -kq\,d\Omega$$

$$d\Phi' = E'dA'\cos\theta' = \frac{kq}{r'^2}dA'\cos\theta' = \frac{kq}{r'^2}dA'_\perp = kq\,d\Omega$$

La somme de ces deux flux étant nulle, le flux pour une charge extérieure est toujours nul.

4) Contribution des charges internes



$$d\Omega = \frac{dA_{\perp}}{r^2}$$

Flux à travers l'angle solide $d\Omega$

$$d\Phi = EdA\cos\theta = \frac{kq}{r^2}dA\cos\theta = \frac{kq}{r^2}dA_{\perp} = kq\,d\,\Omega$$

Le flux pour une charge interne dans toutes les directions.

On doit intégrer sur toutes les directions de l'espace, c'est-à-dire sur l'angle solide complet autour de q qui vaut 4π sr (sr = stéradian est l'unité d'angle solide) :

$$\Omega = \oint d\Omega = 4\pi$$ [1]

Le flux dans toutes les directions est donc :

$$\Phi = kq\oint d\Omega = kq4\pi$$

Donc, pour l'ensemble des charges internes :

$$\boxed{\Phi_{total} = 4\pi\, k\sum q_{int} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_o}}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

---

[1] Preuve de $\Omega = \oint d\Omega = 4\pi$: Pour une sphère complète de rayon R: $A = A_{\perp} = 4\pi R^2$, donc

$$\Omega = \frac{A_{\perp}}{R^2} = 4\pi$$

Exercice: Supposons que la valeur moyenne du module du champ de gravité $|\overrightarrow{g}| = 9.8$ m/s^2 et que le rayon de la terre soit de 6370 km. Quelle est la valeur moyenne de la densité volumique de masse de la Terre?

$$|\overrightarrow{g}| = \mathcal{G}\frac{M}{R^2} \simeq 9.8$$

$$\mathcal{G} = 6.67\ 10^{-11} \text{ SI et } R = 6370\ 10^3 \text{ m}$$

$$M \simeq 5.96\ 10^{24} \text{ kg}$$

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$$

$$\bar{\rho} = 5500 \text{ kg/m}^3$$

Potentiel gravitationnel:

Pour les même raisons qu'en **électrostatique**, $\overrightarrow{g}$ dérive d'un potentiel scalaire; par définition,

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}U$$

soit

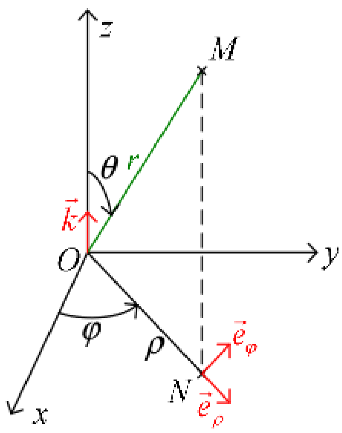
$$U = -\mathcal{G}\frac{m}{r} + K$$

Remarque : lorsqu'on considère le champ gravitationnel terrestre, le potentiel décroît vers l'intérieur de la Terre .

Pour démontrer ce résultat :

→ expression du gradient dans le système sphérique

I Les coordonnées sphériques



On considère un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$r = OM$

$\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$: colatitude.

$\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{ON})$: longitude.

(N est la projection de M sur xOy)

On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

Pour un déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\vec{e}_r$$

$$d\vec{e}_r = \vec{k}(-\sin\theta.d\theta) + \vec{e}_\rho(\cos\theta.d\theta) + \sin\theta.d\vec{e}_\rho$$

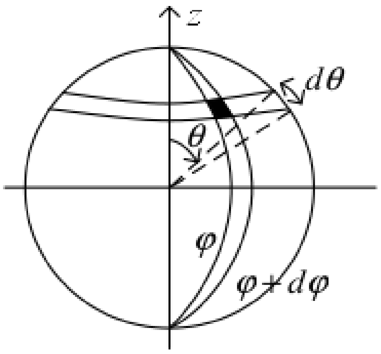
$$= (-\vec{k}.\sin\theta + \vec{e}_\rho\cos\theta)d\theta + \sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

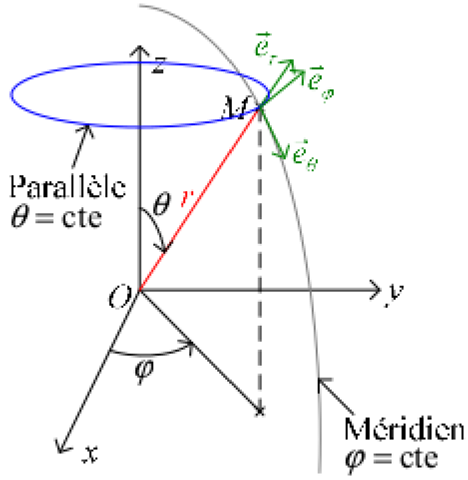
$$= d\theta.\vec{e}_\theta + \sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

Donc $d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$

Gradient d'un champ scalaire en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M F = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{array}\right.$$





- Périmètre d'un méridien (½ cercle) : $\pi \times R$

Longueur de la portion de chacun des méridiens : $Rd\theta$ (longueur de la corde)

- Périmètre d'un parallèle : $2\pi \times R\sin\theta$

Longueur du parallèle interceptée par le méridien : $R\sin\theta.d\varphi$

(pour le parallèle du bas : $R\sin(\theta + d\theta).d\varphi = R\sin\theta.d\varphi$)

Donc $dS = R\sin\theta.d\varphi.Rd\theta$

$$= R^2\sin\theta.d\varphi.d\theta$$

Volume élémentaire en coordonnées sphériques :

$$dV = dr \times dS = R^2\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$$

Exemple :

Aire de la sphère de centre O et de rayon R :

$$S = \oiint_S dS = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2\sin\theta.d\theta.d\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi R^2\sin\theta.d\theta = 4\pi R^2$$

C Expression des opérateurs en coordonnées cylindro - polaires

$$gr\vec{a}df = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \tag{56}$$

$$div\left(\vec{a}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ a_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{57}$$

$$r\vec{o}t\ \left(\vec{a}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ a_r\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \tag{58}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{59}$$

Expression des opérateurs en coordonnées sphériques

$$gr\vec{a}df = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \tag{60}$$

$$div\left(\vec{a}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\ a_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta a_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \tag{61}$$

$$r\vec{o}t\ \left(\vec{a}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta a_\varphi\right) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(ra_\varphi\right)\right]\vec{e}_\theta \quad *(62)$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ a_\theta\right) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi \tag{63}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{64}$$

Énergie potentielle

Définition: Formellement, on appelle énergie potentielle gravitationnelle la fonction $E_p(M)$ telle que :

$$m\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p(M)$$

On a vu (définition):

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}U(M)$$

où $U(M)$ est le champ potentiel de gravité en un point M de l'espace.

On en déduit:

$$E_p(M) = m\,U(M)$$

Soit en considérant le champ U dû à un corps de masse M^* (M^* étant situé à une distance r de la masse m),

$$E_p(M) = m\,U(M) = -\frac{\mathcal{G}M^*}{r}m + K'$$

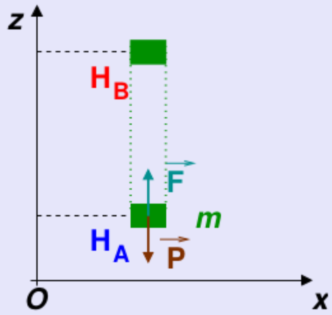
Remarque : L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Par convention, l'énergie potentielle de pesanteur d'une masse m située à une distance r infinie du centre de gravité d'un corps de masse M est nulle (plus d'effets gravitationnels)
→ K' =0

$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE D'UNE MASSE m À UNE DISTANCE r DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS DE MASSE M.

Travail



Supposons **un corps de masse** m que l'on veut soulever d'une hauteur H_A à une hauteur H_B. On effectue un travail pour soulever cette masse m.

Par définition, le TRAVAIL D'UNE FORCE s'écrit:

$$W = \int_{H_A}^{H_B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{H_A}^{H_B} F \cos\theta \, dl$$

On revient à l'exemple du corps de masse m que l'on soulève de H_A à H_B. Calculons le travail des forces de gravité:

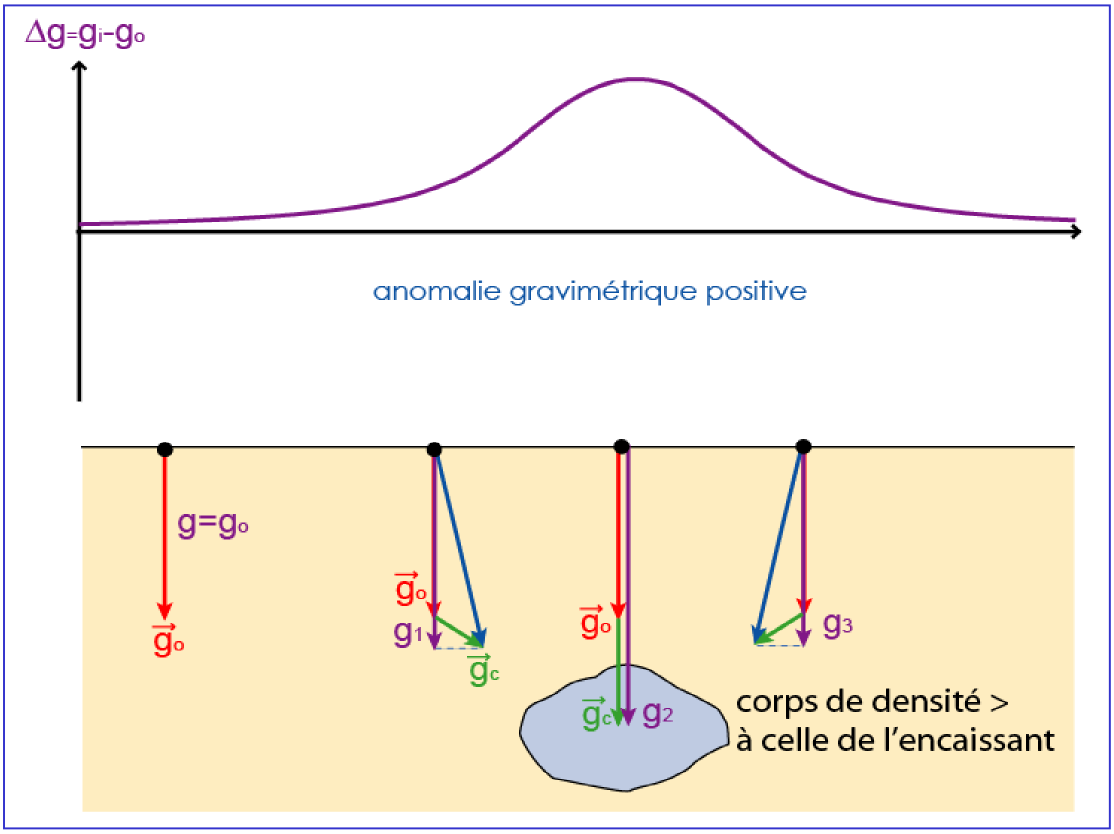
$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_{H_A}^{H_B} m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{H_A}^{H_B} -m \, \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{dl} \\ &= \int_{H_A}^{H_B} -m \, dU = mU(H_A) - mU(H_B) \\ &= -\Delta E_p \end{aligned}$$

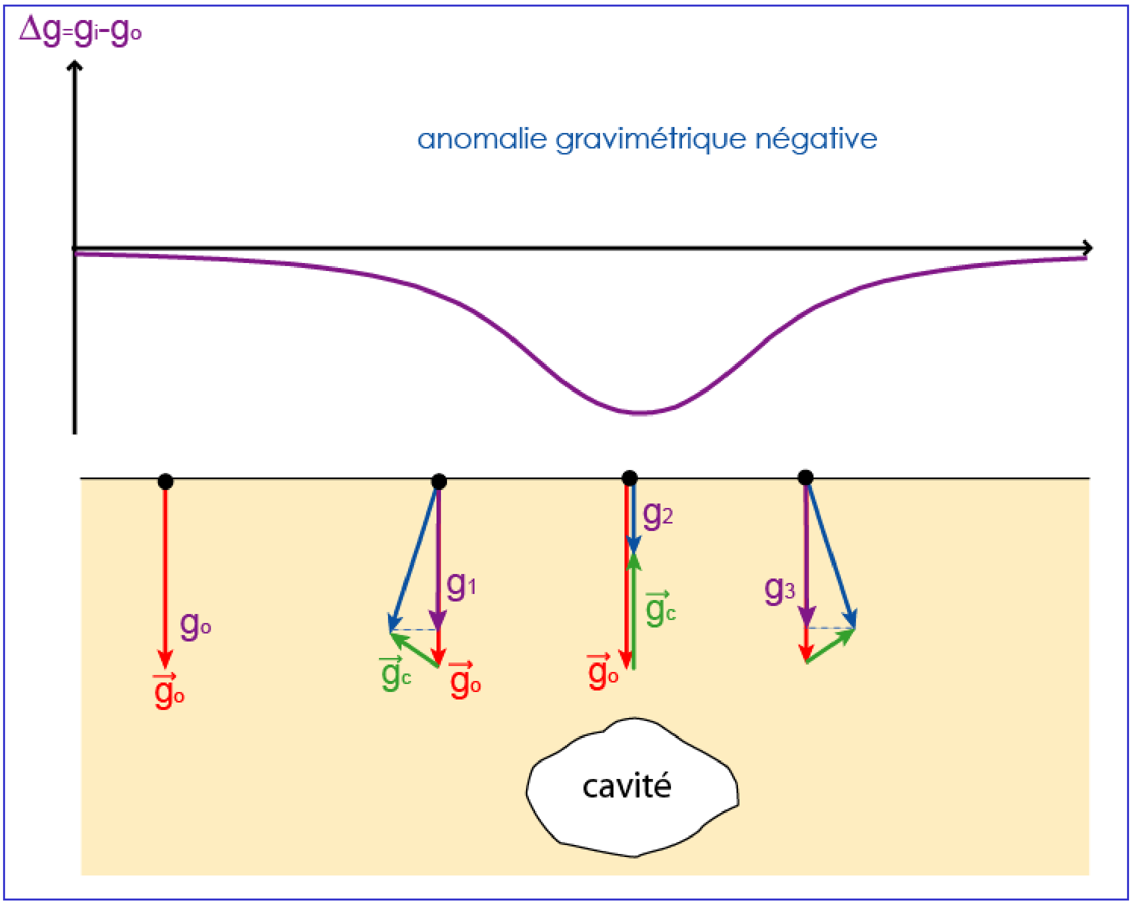
Le travail des forces de gravité est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle.

Dans notre exemple: le travail des forces de gravité est bien négatif et la variation d'énergie potentielle est bien positive puisqu'on s'élève dans le champ de gravité.

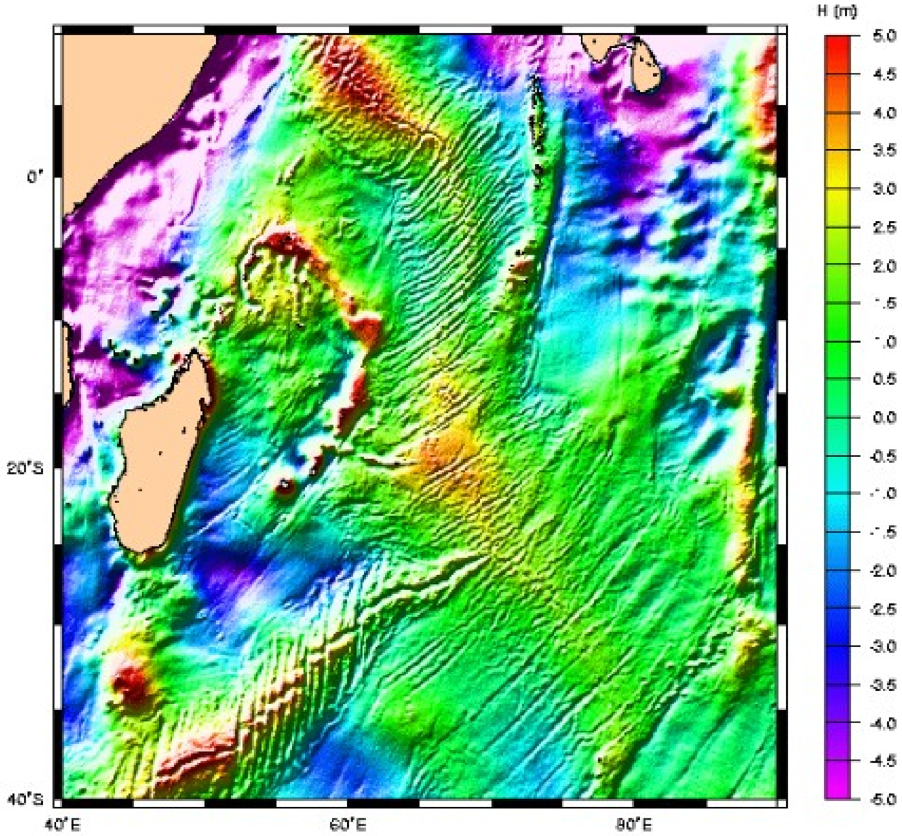
Prospection gravimétrique

Etude des variations de de g mesurées par rapport à une valeur théorique g0 et indicatrices de contrastes de masse en profondeur (particularité géologique, minerai, cavités, gros objets lourds enfouis….





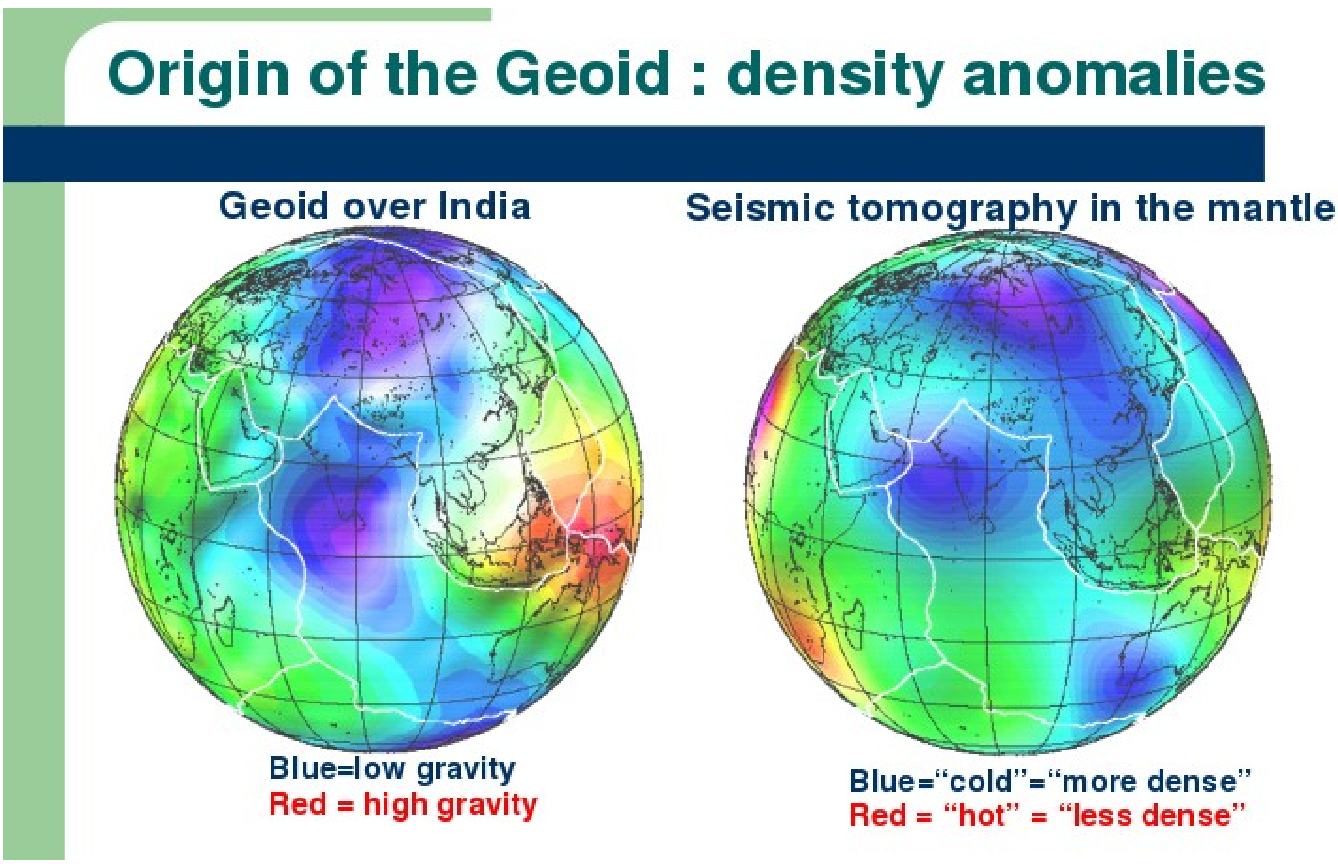
Anomalies du géoide à petite échelle



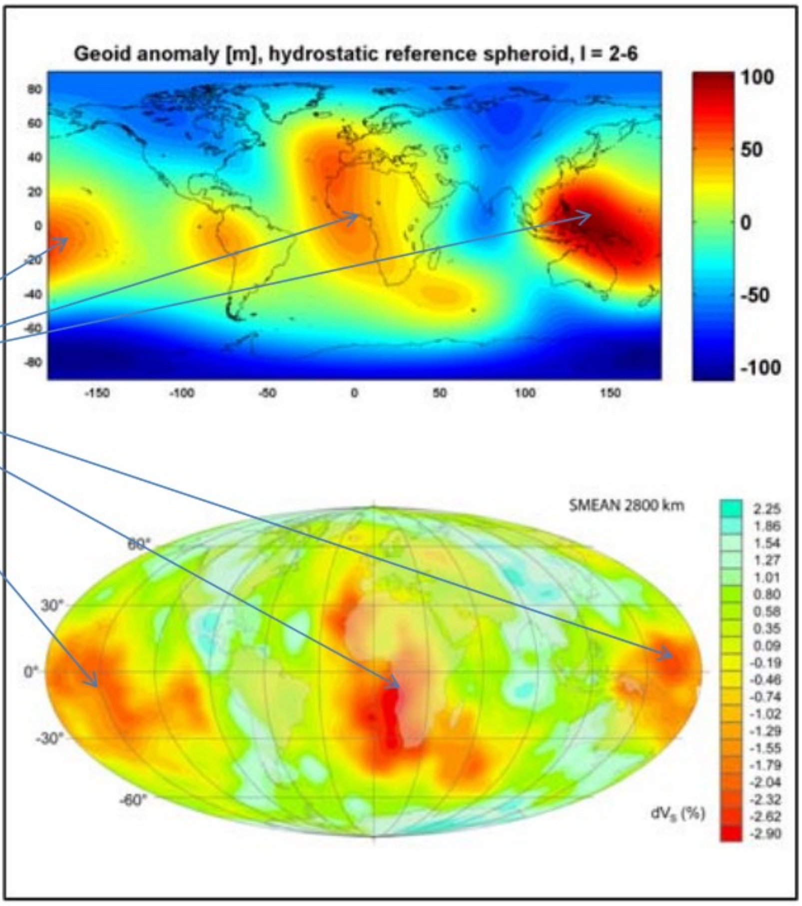
A zoom of the oceanic Geoid shows that we see in detail **short wavelength** gravity anomalies

These come from density anomalies at the surface of the sea bottom. They are **ridges**, **sea mounts**, **transform faults**, etc…

Anomalies du géoide à grande échelle c’est plus compliqué à cause des phénomènes de compensation



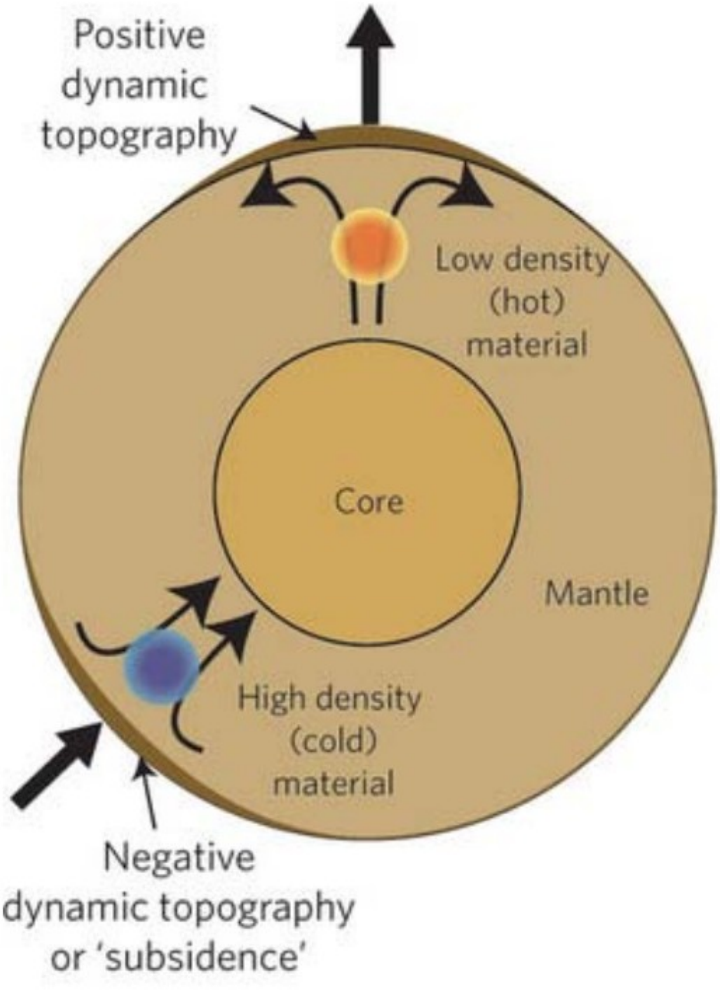
Forte corrélation géographique



Anomalies du géoide

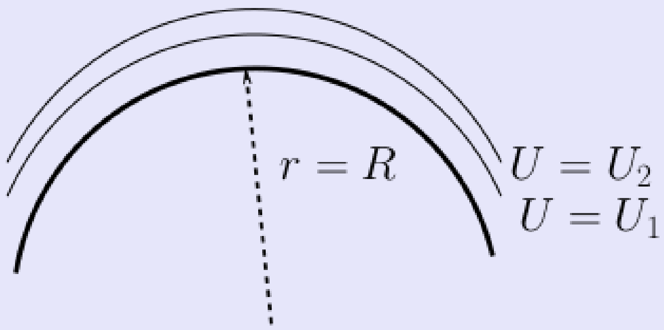
Anomalies de vitesses sismiques dans le manteau inférieur

Topographie 'dynamique'

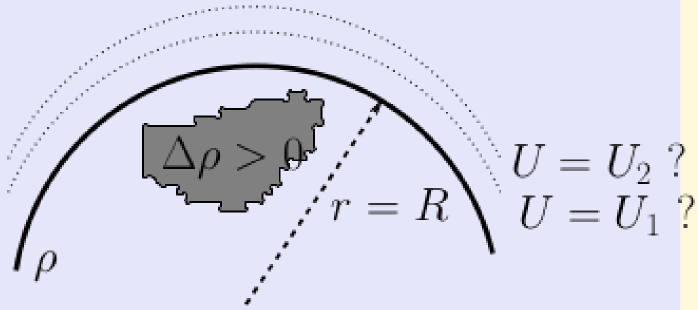


Influence d'une anomalie superficielle de densité sur le champ de gravité terrestre

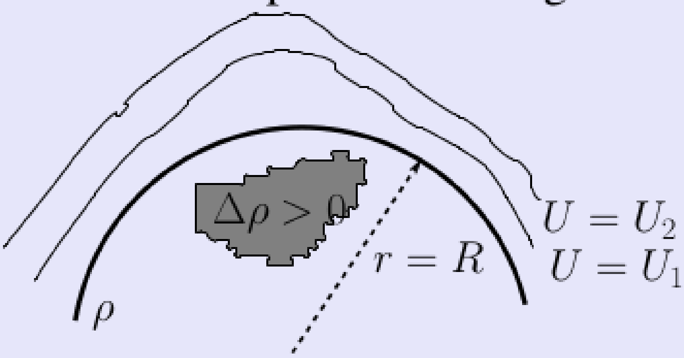
Plaçons nous proche de la surface terrestre. Les lignes d'equipotentiel sont concentriques autour de la Terre si on suppose que la répartition de masse est homogène dans la Terre.



Imaginons maintenant qu'un événement géologique a induit une anomalie de masse (excès de masse) sous la surface terrestre. Quel est alors l'effet de cet anomalie de masse sur la répartition des equipotentiels ?



Réponse : Une bosse sur le potentiel de gravité (géoïde) :



Demonstration :

1) **Qualitative :** La gravité est plus forte localement avec l'excès de masse. Il faut augmenter r pour retrouver la même valeur de la gravité et du potentiel.

2) **Quantitative :** Sans anomalie de masse : $U(r = R) = -\mathcal{G}\frac{M}{R}$

Avec anomalie de masse : $U'(r = R) = -\mathcal{G}\left(\frac{M + \Delta m}{R}\right)$

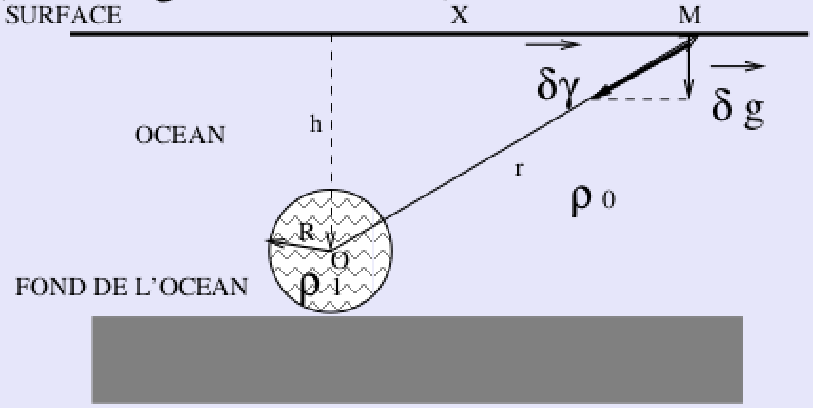
Si on veut tracer une ligne d'equipotentiel, on doit chercher Δr tel que: $U'(r = R + \Delta r) = U(R) \quad \rightarrow -\mathcal{G}\left(\frac{M + \Delta m}{r}\right) = -\mathcal{G}\frac{M}{R}$

Il faut Δr > 0 pour trouver la ligne d'equipotentiel.

Application : prospection gravimétrique

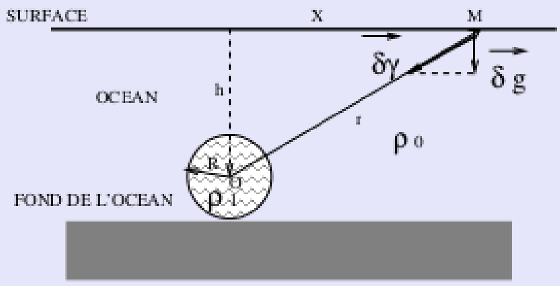
Exemple : Épave au fond d'un océan.

On veut tester l'efficacité de la prospection gravimétrique pour repérer certaines épaves qui reposent au fond des mers. Pour cela on dispose d'un gravimètre embarqué à bord d'un navire dont la précision est de 5 microgals. (1 microgal = 10^{-8}m/s^2).

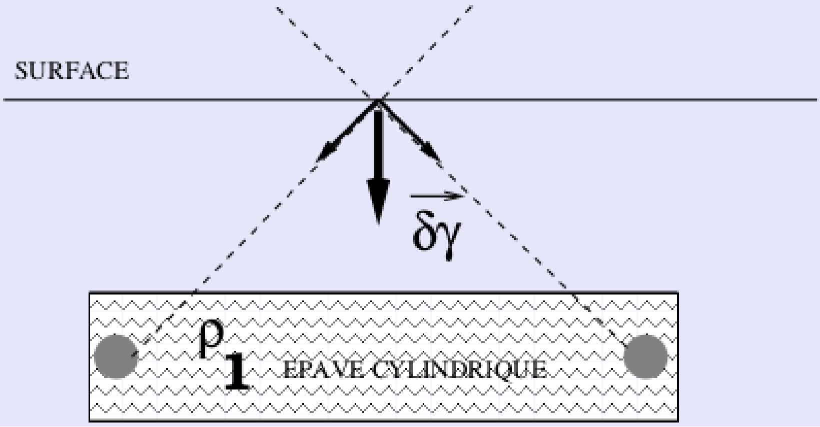


Pour simplifier les calculs, on suppose que l'épave recherchée est de forme cylindrique très allongée de longueur L, de rayon R (telle que $L/R \gg 1$) et de masse volumique ρ_1=1420 kg/m^3. Elle repose sur le fond de la mer à la profondeur de h=125 m. La masse volumique de l'eau est de ρ_0=1020 kg/m^3.

a) **En considérant une épave dont la longueur L est très grande, montrer à l'aide d'arguments de symétries pourquoi l'anomalie de gravité $\overrightarrow{\delta\gamma}$ n'a qu'une composante dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.**



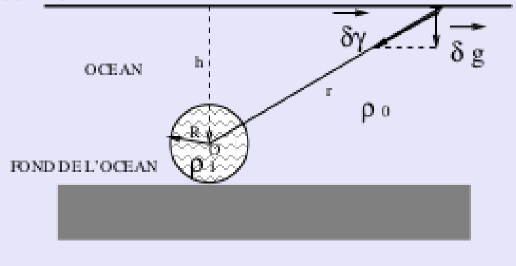
Réponse : Comme $L \gg R$, on peut comme le suggère l'énoncé se placer dans le cadre où l'épave est un cylindre infini : en se plaçant à la surface, $\forall X$, on constate que les contributions s'annulent deux à deux par symétrie excepté la composante $\overrightarrow{\delta\gamma}$.



b) **Appliquer alors le théorème de Gauss pour calculer l'anomalie gravimétrique en surface au point M, avec X la distance entre la projection à la surface de l'océan du centre de l'épave et le point de mesure en surface. On note que le théorème de Gauss s'écrit dans notre cas:**

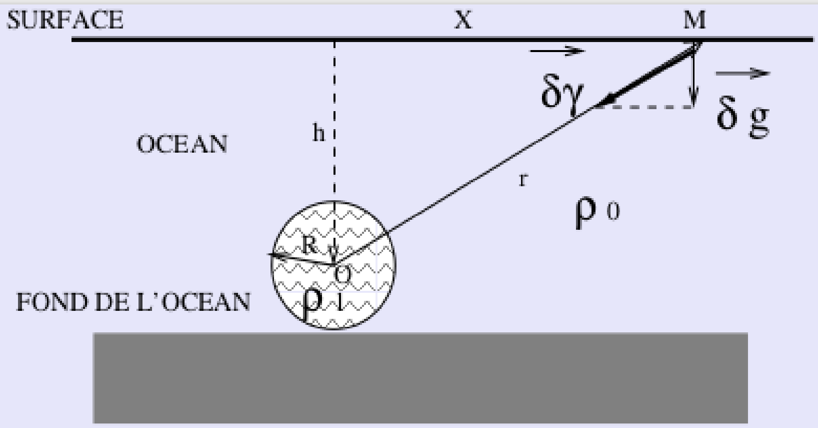
$$\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\textbf{int}}$$

où $\Delta M_{\textbf{int}}$ est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave, dans notre cas cela correspond au surplus de masse puisque $\rho_1 > \rho_0$. Pourquoi est-il adapté de prendre comme surface de Gauss un cylindre de rayon r dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de l'épave? Démontrer que l'on obtient au point M situé à une distance X:



$$\delta\gamma(X) = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2\Delta\rho}{\sqrt{h^2+X^2}} = -\frac{2\pi\mathcal{G}R^2(\rho_1-\rho_0)}{\sqrt{h^2+X^2}}$$

Réponse : On utilise $\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\text{int}}$ où ΔM_{int} est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave.



$$\Phi = \iint \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}\Delta M_{\text{int}}$$

où ΔM_{int} est l'anomalie de masse liée à la présence de l'épave.

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\delta\gamma} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{\mathcal{S}} (\delta\gamma(r)\overrightarrow{e}_r) \cdot (dS\overrightarrow{e}_r) = \delta\gamma(r)\, 2\pi r L = -4\pi\mathcal{G}\,\pi\, R^2\, L(\rho_1 - \rho_0)$$

valable $\forall$ M situé sur un cercle de rayon r,

$$\rightarrow \delta\gamma(r) = -\frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ \Delta\rho}{r}$$

C'est vrai en particulier pour M à la surface terrestre, en X.

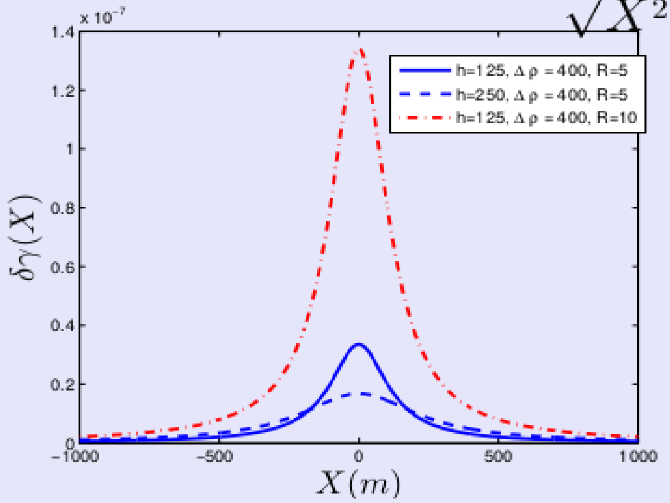
$$\rightarrow \delta\gamma(X) = -\frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ \Delta\rho}{\sqrt{X^2 + h^2}}$$

c) En déduire l'expression de la composante verticale $\overrightarrow{\delta g}$ de l'anomalie de gravité lié à la présence de l'épave en fonction de G,R,h,$\Delta\rho$ et X. Tracer qualitativement l'allure de $\overrightarrow{\delta g}$ quand on se déplace à la surface de la Terre (en faisant varier X). Comment varie la courbe si on fait varier h ou R ?

Réponse : On pose $\cos\theta = \dfrac{\delta g}{\delta\gamma}$, soit $\delta g = \cos\theta\ \delta\gamma = \dfrac{h}{\sqrt{X^2+h^2}}\delta\gamma$.

$$\rightarrow \delta g(X) = -\frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ h\ \Delta\rho}{X^2+h^2}.$$

Considérons maintenant que h est fixe et que l'on se déplace en X : l'anomalie de gravité évolue alors comme $\propto \dfrac{A}{\sqrt{X^2+B}}$.



d) On se place en X=0. Exprimer $\overrightarrow{\delta g}(X=0)$. En déduire la valeur numérique minimale de R pouvant être détectée avec le gravimètre embarqué à bord du navire.

Réponse : En $X=0$,

$$\delta g(0) = \frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ h\ \Delta\rho}{h^2} = \frac{2\pi\ \mathcal{G}\ R^2\ \Delta\rho}{h}.$$

Application numérique : si si $\delta g = 5\ 10^{-8}$ m/s^2

$$\rightarrow 5\ 10^{-8} = \frac{2\pi\ 6.67\ 10^{-11}\ R^2\ 4\ 10^2}{1.25\ 10^2},$$

d'où

$$R^2 = \frac{1.25\ 10^2\ 5\ 10^{-8}}{2\ \pi\ 6.67\ 10^{-11}\ 4\ 10^2} \rightarrow R \approx 6\ \text{m}.$$

ÉLECTROSTATIQUE	GRAVITÉ
q (Coulomb)	m (kg)
$\overrightarrow{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A\ q_B}{r^2}\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{F}_{A/B} = -\mathcal{G}\frac{m_A\ m_B}{r^2}\overrightarrow{u}$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\text{SI}$	$\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}\text{SI}$
$\overrightarrow{F}_{A/B} = q_B\,\overrightarrow{E}_A$	$\overrightarrow{F}_{A/B} = m_B\ \overrightarrow{g}_A$
$\overrightarrow{E}_A(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{r^2}\overrightarrow{u}$ (V/m)	$\overrightarrow{g}_A(B) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{u}$ (m/s^2)
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ où V= $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ + K	$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$ où U = $-\mathcal{G}\frac{m}{r}$ + K' (K'=0)
$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$
$= \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho dV$	$= -4\pi\mathcal{G}\iiint_{\mathcal{V}} \rho dV$
$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}\,\overrightarrow{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho$

Travail des forces de pesanteur

Dans le **cas de la Terre**, calculons le travail des forces de pesanteur ainsi que la variation d'énergie potentielle pour un corps de masse m entre la surface de la Terre et une altitude $h = r - R$.

$$\begin{aligned} W_{0\rightarrow h} &= \int_0^h \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_R^{R+h} mg\overrightarrow{e}_r \cdot dr\overrightarrow{e}r = -mM\mathcal{G}\int_R^{R+h} \frac{dr}{r^2} \\ &= -m\mathcal{G}\left[-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right] = -mM\left(U_h - U_0\right) = -\Delta E_p \end{aligned}$$

Si on se place à basse altitude telle que que $h \ll R$:

$$W_{0\rightarrow h} = -mM\mathcal{G}\left[\frac{-R+R+h}{R^2+hR}\right] \simeq -mM\mathcal{G}\left[\frac{h}{R^2}\right] = mg_{(h=0)}h$$

Remarque : On voit que la variation d'énergie potentielle entre 0 et h est indépendante du chemin choisi. (normal puisqu'on calcule le travail d'une force qui équivaut ici à la circulation d'un vecteur qui dérive d'un potentiel, voir partie ①).

Conséquence : En montagne, monter tout droit ou en zigzaguant est identique en terme d'énergie accumulée (énergie potentielle) et en terme d'énergie dépensée ...