Cours 1

Systèmes d'unités
Conventions d'écriture

Dérivées différentielles

Fonction,
Définition de la dérivée
Propriétés de la dérivée
Ces des fonctions composées
Dérivées d'ordres supérieurs,
Formules de Taylor, Mc Laurin
Différentielle

Exercices d'application

Fonctions de plusieurs variables
Dérivée partielle
Différentielle totale,
Différentielle exacte

Exercices d'application

Cours et exercices largement inspirés du site

http://www.sup-numerique.gouv.fr

Supports disponibles sur Chamillo :
http://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/PAX5TEAC

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

28 1

A A A

Page d'accueil

Mathématiques appliquées et analyses numériques pour les géosciences

Vous n'êtes pas autorisé à accéder à cette page. Soit votre connexion a expiré, soit vous essayez d'accéder à une page pour laquelle vous ne disposez pas des permissions suffisantes.

Veuillez vous connecter pour accéder au cours

Vous possédez déjà un compte institutionnel

Connectez-vous avec votre compte

Vous ne possédez pas de compte institutionnel

S'authentifier avec un compte extérieur à l'établissement

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

26 1

A A A

Page d'accueil Mes cours Agenda perso

Mathématiques appliquées et analyses numériques pour les géosciences

Passer en vue apprenant

Site pédagogique de l'U.E. « Mathématiques appliquées et analyse numérique pour les géosciences » de L3STE

Année universitaire 2018-2019 - 6 ECTS

Code APOGEE du module : PAX5TEAC

Contenu du module : 16.5h de CM, 18h de TD, 24h de TP

Modalités de contrôle des connaissances : CC1 écrit 25% + CC2 écrit 25% + ET écrit 2h 50% (session 2 : report CC, écrit ou oral)

Enseignants : CM et TD par Emmanuel Le Meur; TP info par Gilles Molinié et Gilles Delaygue

Responsable du module : Gilles Delaygue

Production

Description de cours
Liens
Cahier de notes
Documents
Exercices
Glossaire
Parcours
Annonces
Présences

Interaction

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

27 1

A A A

Page d'accueil Mes cours Agenda perso

Mathématiques appliquées et analyses numériques pour les géosciences / Documents / Archives / Cours2016

Passer en vue apprenant

Vous pouvez ajouter une introduction à votre cours dans cette section en cliquant sur l'icône d'édition

Rechercher

Répertoire courant — Cours2016

Type	Nom ↓	Taille	Date	Action
	cours1	4.29M	1 mois, 3 semaines 2018-07-16 18:19:19	
	cours2	2.32M	1 mois, 3 semaines 2018-07-16 18:19:19	
	cours3	6.68M	1 mois, 3 semaines 2018-07-16 18:19:19	
	cours4	1.94M	1 mois, 3 semaines 2018-07-16 18:19:19	

Tout sélectionner annuler toutes les sélections Action

Le système international d'unités

Pour créer un système d'unités, il faut définir des unités de base, leurs valeurs et définir les unités dérivées. Pour les unités mécaniques le choix le plus courant est de prendre la longueur, la masse et le temps mais d'autres options sont possibles comme longueur, force et temps ou masse, vitesse et temps…

Le système international (SI) a été mis en place par la 11^{e} Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) qui fixa en 1960 des règles pour les préfixes, les unités dérivées et d'autres indications. Le SI est fondé sur un choix de sept **unités de base** bien définies et considérées par convention comme indépendantes du point de vue dimensionnel : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela. Les **unités dérivées** sont formées en combinant les unités de base d'après les relations algébriques qui lient les grandeurs correspondantes. Les noms et les symboles de certaines de ces unités peuvent être remplacés par des noms et des symboles spéciaux qui peuvent être utilisés pour exprimer les noms et symboles d'autres unités dérivées.

Tableau des unités fondamentales du SI

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Intensité du courant électrique	ampère	A	I
Température thermodynamique	kelvin	K	Θ
Quantité de matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	candela	cd	J

Équations aux dimensions

Dans une relation entre grandeurs, on remplace chaque terme par la grandeur fondamentale correspondante L pour une longueur, M pour une masse, T pour un temps, I pour une intensité électrique…
On obtient ainsi l'équation aux dimensions.

Cette équation permet :

- De déterminer l'unité composée d'une grandeur en fonction des grandeurs fondamentales.
- De tester si une formule est homogène.
- De faire des conversions d'unités.

Exemple d'unité composée :

De la formule : $e = ½.g\ t^2$, on tire la dimension de g = LT-2 ⇨ accélération en $m.s^{-2}$.

Homogénéité :

Des formules : $½.m.v^2. = m.g.h$, on tire $M.(L.T^{-1})^2 = M.L.T^{-2}.L$
La dimension d'une énergie est donc : $M.L^2.T^{-2}$

Conversion d'unité :
Pression $p = F/S = M.L.T^{-2}.L^{-2} = M.L^{-1}.T^{-2}$.
En CGS l'unité est la barye ($dyne/cm^2$)
En SI l'unité est le pascal ($newton/m^2$)

Définitions des unités fondamentale du SI

Ces définitions ont été copiées sur le site du Bureau international des poids et mesure :
www.bipm.org/fr/si

Définition du mètre adoptée en 1983 :

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 299 792 458 mètres par seconde exactement, c_0 = 299 792 458 m/s.

Définition du kilogramme :

Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme ;

Le terme *poids* désigne une grandeur de la même nature qu'une *force* ; le poids d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération de la pesanteur ; en particulier, le poids normal d'un corps est le produit de la masse de ce corps par l'accélération normale de la pesanteur ; le nombre adopté dans le Service international des Poids et Mesures pour la valeur de l'accélération normale de la pesanteur est 980,665 cm/s^2, nombre sanctionné déjà par quelques législations.

Le kilogramme est actuellement défini comme la masse d'un cylindre en platine iridié (90 % de platine et 10% d'iridium) de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut déclaré unité SI de masse depuis 1889 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM).
Cette unité de mesure est la dernière du SI à être définie au moyen d'un étalon matériel fabriqué par l'homme. Celui-ci est conservé sous trois cloches de verre scellées dont il n'est extrait que pour réaliser des étalonnages (opération qui n'a eu lieu que trois fois depuis sa création).

Définition de la seconde adoptée en 1967

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Il en résulte que la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium est égale à 9 192 631 770 hertz exactement, ν(hfs Cs) = 9 192 631 770 Hz.
Lors de sa session de 1997, le Comité international a confirmé que :
Cette définition se réfère à un atome de césium au repos, à une température de 0 K.

Définition de l'ampère adoptée en 1948

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2 . 10^{-7} newton par mètre de longueur.

Définition du kelvin adoptée en 1967

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

Il en résulte que la température thermodynamique du point triple de l'eau est égale à 273,16 kelvins exactement, T_{tpw} = 273,16 K.

Définition de la mole

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ; son symbole est « mol ».

Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules. Dans cette définition, il est entendu que l'on se réfère à des atomes de carbone 12 non liés, au repos et dans leur état fondamental.

Il en résulte que la masse molaire du carbone 12 est égale à 0,012 kilogramme par mole exactement, $M(^{12}C)$ = 12 g/mol.

Définition de la candela adoptée en 1979

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540 x 10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

Il en résulte que l'efficacité lumineuse spectrale d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 x 10^{12} hertz est égale à 683 lumens par watt soit K = 683 lm/W = 683 cd sr/W.

Grandeurs supplémentaires du système international

Deux grandeurs supplémentaires ont été introduites pour assurer la cohérence du système

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Angle plan	radian	rad	
Angle solide	stéradian	sr	(Ω)

Grandeurs dérivées du système international

Espace

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Longueur	L	mètre	m	mille marin =1852 m
Nombre d'onde	L^{-1}		m^{-1}	
Aire	L^2	mètre carré	m^2	are (a) =100 m^2 hectare (ha) = 10 000 m^2
Volume	L^3	mètre cube	m^3	litre (l) = 1 10^{-3} m^3
Angle plan		radian	rad	tour (tr) = 2π rad degré (°) = π/180 rad minute (') = π/10 800 rad seconde ('') = π/648 000 rad grade = π/200 rad

Masse

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Masse	M	kilogramme	kg	gramme (g) = 10^{-3} kg tonne (t) = 10^3 kg
Masse volumique	$M.L^{-3}$	kilogramme par mètre cube	$kg.m^{-3}$	

Temps

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Temps	T	seconde	s	minute (min) = 60 s heure (h) = 3600 s jour (d) = 86400 s
Fréquence	T^{-1}	hertz	Hz	

Quantité de matière

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Quantité de matière	N	mole	mol	

Mécanique

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Vitesse	LT^{-1}	mètre par seconde	m/s	kilomètre par heure (km/h) nœud (mille par heure)
Accélération	LT^{-2}	mètre par seconde carrée	m/s^2 ms^{-2}	
Force	MLT^{-2}	newton	N	
Moment de force	ML^2T^{-2}	newton-mètre	N.m	
Tension superficielle	MT^{-2}	newton par mètre	N/m	
Travail Energie	ML^2T^{-2}	joule	J	wattheure (Wh) = $3{,}610^3$ J kilowattheure (kWh) = $3{,}610^6$ J
Puissance	ML^2T^{-3}	watt	W	
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa	bar (bar) = 10^5 Pa
Moment d'inertie	ML^2	kilogramme-mètre carré	$kg.m^2$	
Quantité de mouvement	MLT^{-1}	newton-seconde	N.s	
Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$	pascal-seconde	Pa.s	
Viscosité cinématique	L^2T^{-1}	mètre carré par seconde	m^2/s	

Les unités de pression :
Le **pascal** est l'une des rares unités du SI qui n'est pas adaptée à la vie courante. De ce fait on utilise toujours des unités hors système.
Le **bar** (1 bar = 10^5 pascals) est très utilisé dans l'industrie.
L'hectopascal est utilisé en météorologie.
Il se trouve que le bar correspond pratiquement à la valeur de l'atmosphère normale :

$$1 \text{ atm} = 1{,}01325\ 10^5 \text{ Pa} = 1{,}01325 \text{ bar}$$

L'hectopascal est utilisé en météorologie.
La pression atmosphérique a longtemps été mesurée avec des baromètres à mercure. On utilise toujours le **torr** (mm de Hg à 0°C) qui correspond à 133,3 pascals et le cm de mercure (1333 Pa).
Dans certaines industries on utilise aussi le psi (pound per square inch) 1 psi = $6{,}89476\ 10^3$ Pa

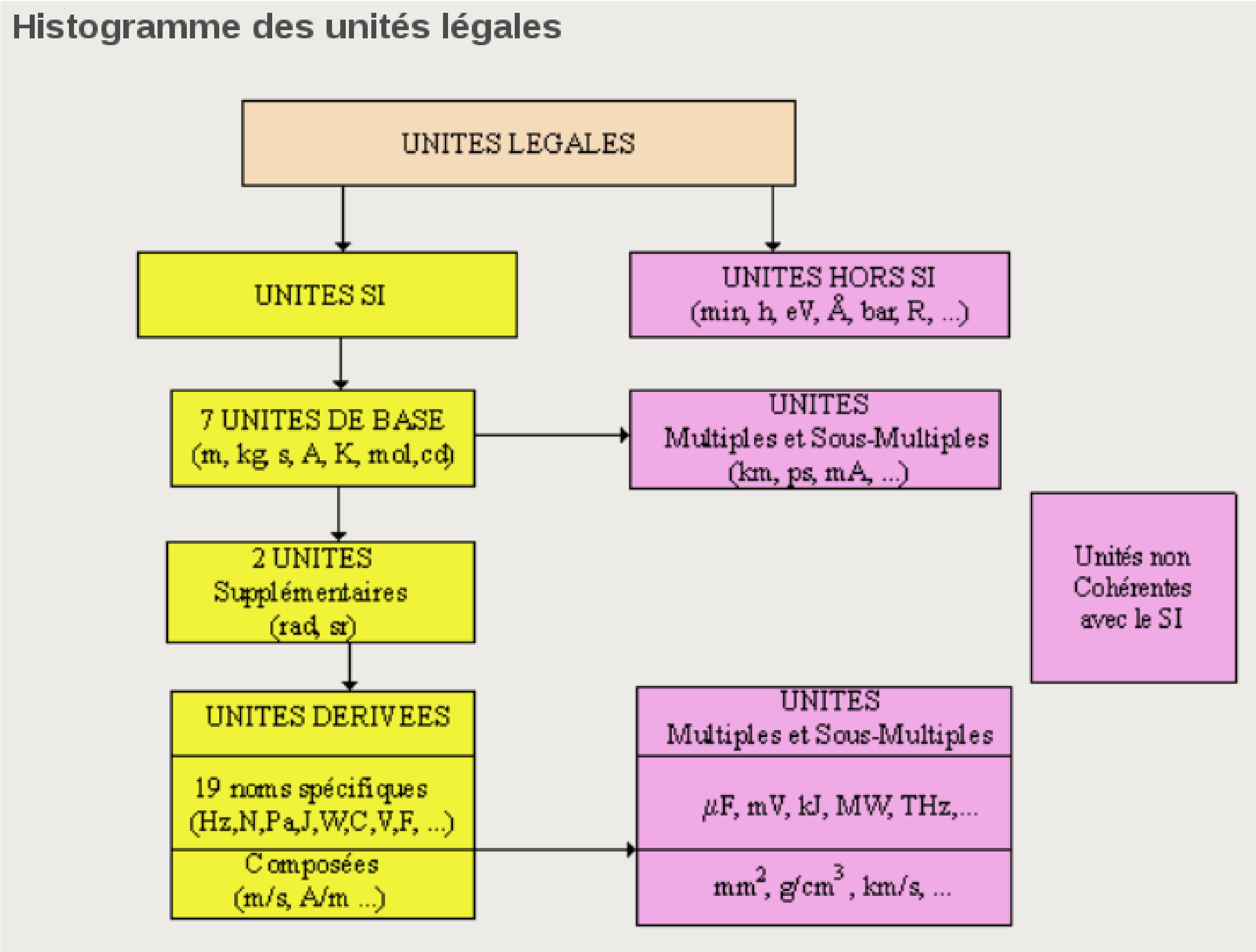
Électricité

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Courant électrique	I	ampère	A	
Force électromotrice, différence de potentiel	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	volt	V	
Quantité d'électricité	TI	coulomb	C	ampère-heure = 3600 C
Résistance, Impédance	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	ohm	Ω	
Conductance	$M^{-1}L^{-2}T^3I^2$	siemens	S	
Capacité électrique	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	farad	F	
Inductance électrique	$ML^2T^{-2}I\text{-}^2$	henry	H	
Induction magnétique	$MT^{-2}I^{-2}$	tesla	T	
Flux d'induction magnétique	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	weber	Wb	
Intensité de champ magnétique	$L^{-1}I$	ampère par mètre	A/m	
Puissance apparente	ML^2T^{-3}	voltampère	VA	
Puissance réactive	ML^2T^{-3}	voltampère réactif	var	

Chaleur

Grandeur	Dimension	Nom	Symbole	Autres unités légales
Température thermodynamique	Θ	kelvin	K	degré Celsius °C
Capacité thermique	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	joule/kelvin	J/K	
Conductivité thermique	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	watt par mètre-kelvin	W/(m.K)	
Convection thermique	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	watt par mètre carré-kelvin	$W/(m^2.K)$	
Intensité acoustique	MT^{-3}	watt par mètre carré	W/m^2	

En résumé :



Convention d'écriture des nombres

Puissance de 10

- Les grands et les petits nombres peuvent s'exprimer à l'aide des puissances de 10 . En notation "scientifique", un chiffre différent de zéro se trouve devant la virgule.

Exemples : $12\ 400 = 1,24 \times 10^4$; $0{,}000\ 034\ 27 = 3,427 \times 10^{-5}$

En notation "ingénieur", l'exposant est un multiple de 3 .

Exemples : $12\ 400 = 12,4 \times 10^3$; $0{,}000\ 034\ 27 = 34,27 \times 10^{-6}$

Les chiffres significatifs

- La précision d'une mesure d'un phénomène physique se traduit dans l'expression du résultat par le nombre de chiffres dits "significatifs".

  Exemples : la mesure $m = 125,7\ \mathrm{g}$ (quatre chiffres significatifs) indique une mesure de la masse avec une précision au $1/10$ de gramme. C'est au milligramme près si le résultat est exprimé par $m' = 125,700\ \mathrm{g}$ avec 6 chiffres significatifs.

- Les chiffres significatifs sont :
  - les chiffres différents de zéro.
  - les zéros placés entre les chiffres.
  - les zéros placés derrière les autres chiffres quand ils sont le résultat de la mesure.

Exemples : les chiffres significatifs sont en **gras**

2 ; **45** ; 0,**203** ; 0,00**4 57**

7,30 × 10^3 ; **40,700** × 10^6

42 300 environ ou **423** × 10^2

300 m (mesuré au m près)

600 000 habitants environ

600 000 habitants exactement

Présentation du résultat d'une mesure

Un résultat de mesure de $42,3\ \mathrm{cm}$ (trois chiffres significatifs) suggère l'intervalle de certitude suivant : $42,25\ \mathrm{cm} \leq 42,3\ \mathrm{cm} \leq 42,35\ \mathrm{cm}$.

Si des mesures expérimentales ont conduit aux résultats suivants : $42,27\ \mathrm{cm}$ - $42,45\ \mathrm{cm}$ - $42,72\ \mathrm{cm}$ avec trois chiffres significatifs, nous obtenons respectivement : $42,3\ \mathrm{cm}$ - $42,5\ \mathrm{cm}$ et $42,7\ \mathrm{cm}$ suivant la règle :

Règle

On arrondit par défaut si le premier chiffre supprimé est inférieur à 5 et par excès s'il est supérieur ou égal à 5 .

DERIVEES DIFFERENTIELLES

Définition : Fonction

On appelle **fonction** f d'un ensemble E vers un ensemble F, une application qui à tout élément $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$.

Notation : $f : x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$

Définition : Fonction scalaire

La fonction est dite **fonction scalaire**, ou fonction numérique si les ensembles de départ E et d'arrivée F sont de sous-ensembles de R.

Exemple

$f_1 : x \mapsto y_1 = x^2 \qquad E = F = R$

$f_2 : x \mapsto y_2 = \cos x \qquad E = R$ et $F = [-1, +1]$

$f_3 : x \mapsto y_3 = \arcsin x \qquad E = [-1, +1]$ et $F = [-\pi/2, \pi/2]$

Définition : Domaine de définition

On appelle **ensemble de définition** (D_f), l'ensemble des nombres réels qui ont une image $f(x)$ dans R.

Exemple

$f : x \mapsto y = \dfrac{1}{x^2} \qquad D_f = R^*$

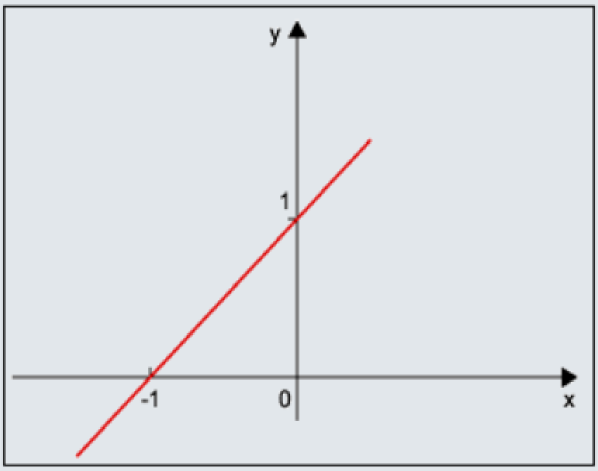
$g : x \mapsto y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \qquad D_g = [0, 1[$

Définition : Graphe

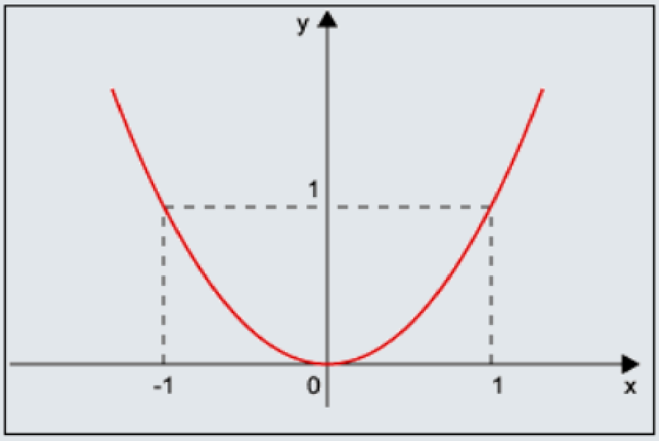
La courbe (C) représentative des points $f(x)$ quand la variable x décrit le domaine de définition est appelé **graphe** de f dans R.

Exemple

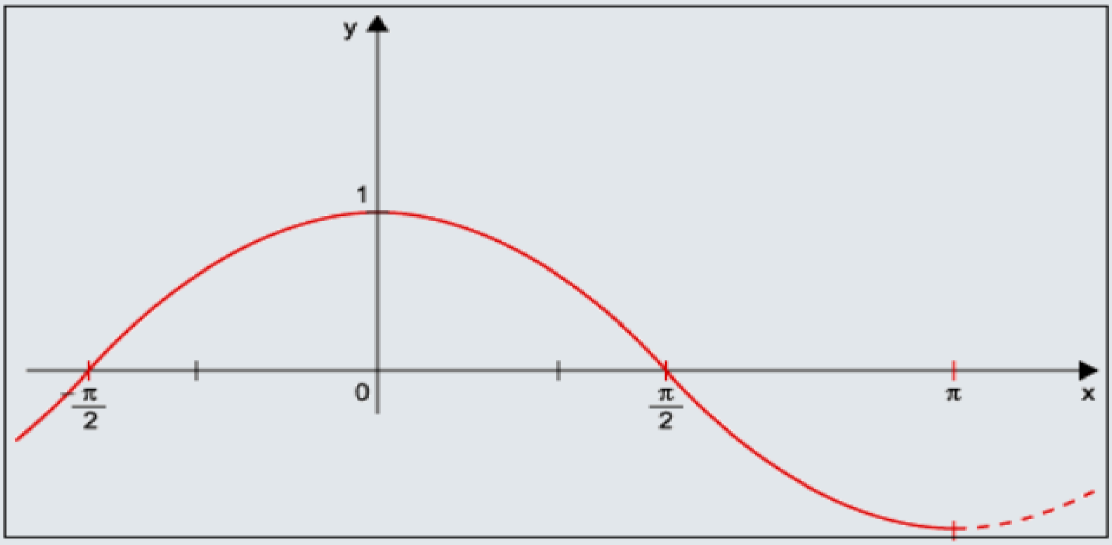
Fonction affine : $y_1 = x + 1$



Fonction puissance : $y_2 = x^2$



Fonction trigonométrique : $y_3 = \cos x$



Définition : Fonction réciproque

On appelle **fonction réciproque** f^{-1}, si elle existe, l'application de F dans E qui à chaque élément $y \in F$ fait correspondre un élément unique $x \in E$.

Notation : $f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y)$

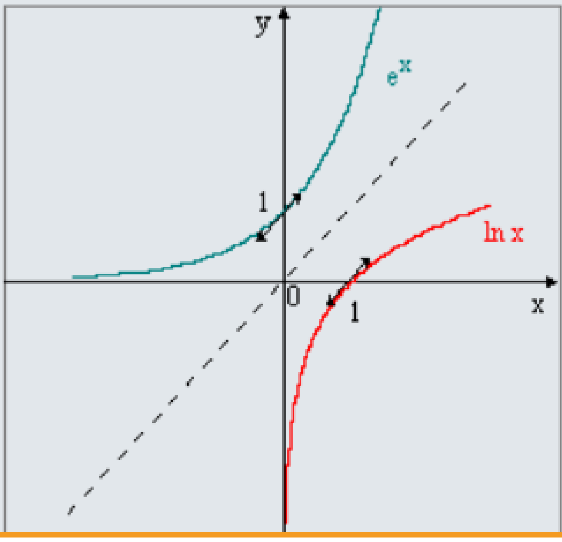
$F \mapsto E$

Les graphes (C) de $f(x)$ et (C^{-1}) de $f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple

Les fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

> Cas de e^x et $\ln x$



Définition : Fonction composée d'une variable

On appelle **fonction composée** de x, une fonction $f(u)$ où la variable u est elle-même fonction d'une autre variable x.

Notation : $f(u) = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$

Exemple

Fonctions :

$y_1 = \sin(3x+1)$ est la composée de $y_1 = \sin u$ avec $u = 3x+1$

$y_2 = e^{x^2}$ est la composée de $y_2 = e^v$ avec $v = x^2$

$y_3 = (x^3+2)^4$ est la composée de $y_3 = w^4$ avec $w = x^3+2$

Dérivée d'une fonction scalaire en un point. Fonction dérivée

Définition

Dérivée en un point x_0

Soit $y = f(x)$ une fonction définie et continue au voisinage d'un point $x = x_0$. A un accroissement Δx $(> 0$ ou $< 0)$ de la variable, correspond un accroissement Δy de la fonction telle que :

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

On appelle **dérivée** de la fonction $f(x)$ au point d'abscisse x_0, la limite, ***si elle existe***, du rapport de l'accroissement Δy de la fonction à l'accroissement Δx de la variable lorsque ce dernier tend vers zéro :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Exemple

$y = f(x) = (x-2)(x+1)$ au point $x_0 = 1$

quand $x_0 \to x_0 + \Delta x,\ y \to y + \Delta y = [(x_0 + \Delta x) - 2][(x_0 + \Delta x) + 1]$

d'où $y + \Delta y = [1 + \Delta x - 2][[1 + \Delta x + 1] = (\Delta x - 1)(\Delta x + 2)$

et $\Delta y = (\Delta x - 1)(\Delta x + 2) - (1-2)(1+1)$

$\Delta y = (\Delta x)^2 + \Delta x - 2 - (-1)(2)$

$\Delta y = (\Delta x)^2 + \Delta x - 2 + 2$

$\Delta y = (\Delta x)^2 + \Delta x$

et $f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(1 + \Delta x) = 1$

Définition : Fonction dérivée sur un intervalle

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$, si elle est dérivable en tout point $x_0 \in]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Notation : $y'(x) = f'(x)$ ou $\frac{df(x)}{dx}$

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\text{cotan } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotan}^2 x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccotan } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
$\ln \lvert x \rvert$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a \ (a > 0)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x$
$\text{th } x$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$

Exemple : Fonction dérivée sur un intervalle

$y = f(x) = \cos x$

quand $x_0 \to x_0 + \Delta x,\ y \to y_0 + \Delta y = \cos(x_0 + \Delta x)$

d'où $\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0$

$\Delta y = \cos x_0 \cos \Delta x - \sin x_0 \sin \Delta x - \cos x_0$

et $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x_0$

car $\lim_{\Delta x \to 0} \cos \Delta x \sim 1$ et $\lim_{\Delta x \to 0} \sin \Delta x \sim \Delta x$

Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors :

$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Dérivée d'une fonction composée

Si les fonctions f et u sont des fonctions dérivables, la fonction composée $F(x) = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$ admet pour fonction dérivée :

$$F'(x) = f'(u).u'_x$$

avec $f'(u)$: fonction dérivée de $f(u)$ par rapport à u.

$u'(x)$: fonction dérivée de $u(x)$ par rapport à x.

Exemple

Déterminer la dérivée de $y(x) = \ln(3x^2 + 5)$

La fonction est de la forme : $F(x) = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$

avec $u(x) = 3x^2 + 5$, et $f(x)$ la fonction logarithme népérien,

d'où

$$y' = [\ln(3x^2 + 5)]' = \frac{(3x^2 + 5)'}{3x^2 + 5} = \frac{6x}{3x^2 + 5}$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Si la fonction f est continue, strictement monotone sur un intervalle I, dérivable sur I, dérivable sur I et si $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et admet pour fonction dérivée :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} \quad \forall y \in f(I)$$

En effet on peut écrire : $x \xrightarrow{f} y = y = f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x = f^{-1}(y)$

C'est-à-dire $x = f^{-1}(y) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1} \circ f(x)$: (application identité)

Par application de la dérivation des fonctions composées : $[f^{-1}(f(x))]' = (f^{-1}(y))' * f'(x) = (x)' = 1$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

Pour une variable x, on posera pour la dérivée de la fonction réciproque :

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Propriétés algébrique des fonctions dérivables

Remarque

Pour les fonctions composées, on remplace x par la fonction $u(x)$ et on multiplie le numérateur par la fonction dérivée $u'(x)$.

Exemple

$$(\cos u(x))' = -\sin u(x) u'(x)$$

$$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

Exemple

Déterminer la dérivée de $y(x) = \sin 3x + x^2 + e^{-2x}$

La fonction étant de la forme $y = u + v + w$, nous aurons pour la fonction dérivée :

$$y'(x) = u' + v' + w' = 3\cos 3x + 2x - 2e^{-2x}$$

Déterminer la dérivée de $y(x) = x^3 \cos^2 x$

La fonction étant de la forme $y = uv$, nous aurons pour la fonction dérivée :

$$y'(x) = u'v + uv'$$

$$= (x^3)' \cos^2 x + x^3 (\cos^2 x)'$$

$$= 3x^2 \cos^2 x + x^3 (2) \cos x (-\sin x)$$

$$y'(x) = 3x^2 \cos^2 x - 2x^3 \sin x \cos x$$

Exemple

Déterminer la dérivée de $y(x) = \tan x$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction de la forme u/v admet pour fonction dérivée :

$$y'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exemple : Fonctions réciproques des fonctions circulaires

fonction $\arcsin x$

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$; $f = \sin$; $f(I) =]-1\,;+1[$ et $f^{-1} = \arcsin$

Or $f' = \cos$, donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\cos[\arcsin x]} = \dfrac{+1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}$

pour $x \in]-1\,;+1[$

Remarque : La fonction $(\arcsin x)$ est positive car $\arcsin x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Fonction $\arccos x$

La fonction dérivée $\boxed{(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ pour $x \in]-1\,;+1[$ se déduit de la relation : $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Fonction $\arctan x$

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$; $f = \tan$; $f(I) = \mathbb{R}$ et $f^{-1} = \arctan$

Or $f' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$

$\boxed{(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz.

Définition : Dérivées d'ordres supérieures

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$. Si f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée f'' (ou $f^{(2)}$) est appelée **dérivée seconde** de f.

On peut continuer le processus de dérivation et définir une relation de récurrence pour calculer la fonction dérivée $f^{(n)}$ à l'ordre n.

La fonction f est de classe C^n sur l'intervalle I si $f^{(n)}$ existe sur I en étant continue sur I.

Elle sera de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable.

Exemple des polynômes ….

Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un fonction

Soit $y_1 = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2 \times \pi/2)$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3 \times \pi/2)$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \ldots = \sin(x + n \times \pi/2)$$

Soit $y_2 = \ln(1 + x)$

$$y' = \frac{(1+x)'}{1+x} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y'' = -1(1+x)^{-2}$$

$$y''' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{(1+x)^n}$$

Formule de Leibniz

Si les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ admettent des dérivées à l'ordre n sur un intervalle I, alors $u(x)v(x)$ est dérivable à l'ordre n et son expression sera :

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

Exemple

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $y = x^2 e^{-2x}$ par la formule de Leibniz

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^0 v^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + \dots$$

en posant

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ avec } C_n^0 = 1 \;;\; C_n^1 = n \;;\; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

comme

$$u = x^2 \;;\; u' = 2x \;;\; u'' = 2 \;;\; u''' = \dots = u^{(n)} = 0 \text{ pour } n \geq 3$$

$$v = e^{-2x} \;;\; v' = -2e^{-2x} \;;\; v'' = (-2)^2 e^{-2x} \;;\; \dots \;;\; v^{(n)} = (-2)^n e^{-2x}$$

nous avons :

$$y^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x} x^2 + n(-2)^{n-1} e^{-2x} 2x + \frac{n(n-1)}{2} (-2)^{n-2} e^{-2x}$$

d'où

$$y^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{-2x} [2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2}]$$

Formule de Taylor. Formule de Mac-Laurin. Développements limités usuels

Définition

Une fonction f, définie et continue au voisinage de x_0, admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de x_0, s'il existe un polynôme $P(x-x_0)$ de degré n au plus tel que :

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = P(x-x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \\ \text{ou} \\ f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x) \\ \text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \end{array}}$$

Formule de Taylor

Si la fonction f est définie, continue et dérivable jusqu'à l'ordre n sur un intervalle I contenant x_0, alors le développement limité de f, à l'ordre n, au voisinage de x_0 s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0) \\ \text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0 \end{array}}$$

Exemple

Déterminer le développement limité du polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 3$ suivant les puissances de $(x-2)$

Par définition

$$P(x) = P(2) + (x-2)P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}P'''(2)$$

car $P^{(4)}(2) = \ldots = P^{(n)}(2) = 0$

or $P(2) = -11$

$P'(x) = 3x^2 - 16x + 5$ et $P'(2) = -15$

$P''(x) = 6x - 16$ et $P''(2) = -4$

$P'''(x) = 6$

d'où

$$P(x) = -11 - 15(x-2) - 2(x-2)^2 + (x-2)^3$$

Formule de Mac Laurin

Quand le développement de Taylor s'effectue au voisinage de $x_0 = 0$, nous obtenons la formule de Mac Laurin :

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x)}$$

Exemple

Déterminer le développement limité de Mac Laurin de la fonction $f(x) = \cos x$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = +\sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = +\cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\ \ldots & \end{array}$$

d'où

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\text{Pour } \alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1*3*5\ldots(2n-3)x^n + x^n\varepsilon(x)}{2*4*6\ldots 2n}$$

$$\text{Pour } \alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\text{Pour } \alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

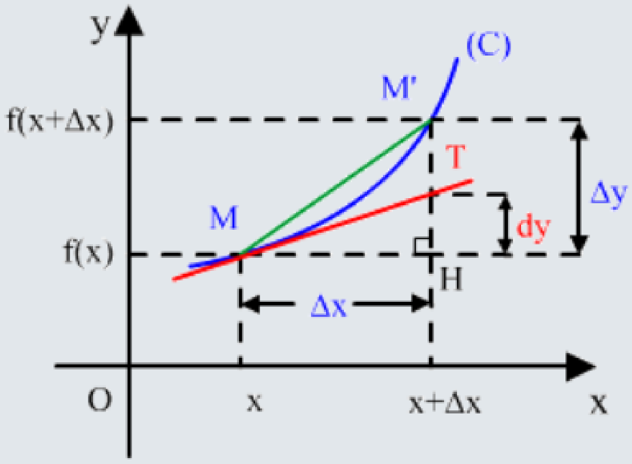
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + x^7\varepsilon(x)$$

Différentielle d'une fonction scalaire en un point

Définition

- Si une fonction $y = f(x)$ est dérivable en tout point d'un intervalle I, on définit la différentielle df de cette fonction par : $df = f'(x)\Delta x$ où Δx est un accroissement arbitraire de la variable x.

Soient les points : $M(x, f(x))$ et $M'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ appartenant au graphe (C) de f et la tangente MT à la courbe au point M.



A l'accroissement Δx de la variable correspond l'accroissement Δy de la fonction représentée par $\overline{HM'}$.

- La pente de la corde MM' est définie par $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\overline{HM'}}{\overline{MH}}$
- La **dérivée** de f au point M sera

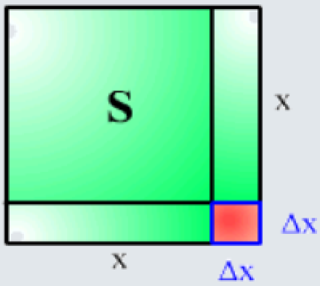
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{array}{c}\text{pente de la tangente } MT \\ \text{au point } M \text{ à la courbe } (C)\end{array}$$

- La **différentielle** de f : $df = f'(x)\Delta x = \overline{HT}$

On remarquera que $\Delta f \to df$ quand $\Delta x \to 0$

Exemple : Variation de Surface

Variation de la surface $S = x^2$ d'un carré quand son côté augmente de Δx.



La surface du carré de côté x étant $S = x^2$, à l'accroissement Δx de la variable x, va correspondre un accroissement ΔS de la fonction S, d'où :

$x \to x + \Delta x \quad S \to S + \Delta S = (x + \Delta x)^2$

et $\Delta S = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

La différentielle de la surface étant $dS = 2x\Delta x$

nous avons $\Delta S - dS = (\Delta x)^2$ qui tend vers 0 quand Δx tend vers 0

Géométriquement **cette différence représente l'aire du carré de côté Δx.**

Opérations sur les différentielles

- **Cas d'une somme, d'un produit d'un quotient**

En multipliant par dx, le résultat de la dérivée d'une fonction, nous obtenons sa différentielle. Donc pour deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv \\ d(uv) &= vdu + udv \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - udv}{v^2} \end{aligned}}$$

et les différentielles logarithmiques

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(uv)}{uv} &= \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \\ \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{\frac{u}{v}} &= \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \end{aligned}}$$

- **Cas d'une fonction composée d'une variable**

Connaissant la dérivée de la fonction composée $(f[u(x)])' = f'(u)u'(x)$, nous en déduisons la différentielle :

$$\boxed{df[(u(x))] = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du}$$

Exemple : Différentielle d'une fonction

Soient $u(x) = \sin x$ **et** $v(x) = \cos x$ **deux fonctions de la variable x. Alors :**

$$d(u+v) = d(\sin x + \cos x) = d(\sin x) + d(\cos x)$$
$$= (\cos\ \ x - \sin^{-} x)dx$$
$$d(uv) = d(\sin x \cos x) = d(\sin x)\cos x + \sin x\, d(\cos x)$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \cos 2x\, dx = d((\sin 2x)/2)$$
$$d(\frac{u}{v}) = d(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos x\, d(\sin x) - \sin x\, d(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$= (1 + \tan^2 x)dx$$
$$= d(\tan x)$$

Exemple : Différentielle d'une fonction composée

Soit $y = \sin 5x$ alors $y = f(u) = \sin u$ avec $u = 5x$

$$dy = f'(u)du = f'(u)u'(x)dx = \cos 5x.(5)dx$$
$$dy = 5\cos 5x dx$$

Si $y = \exp(x^2+1)$ alors $y = f(u) = e^u$ avec $u = x^2 + 1$

$$dy = f'(u)du = f'(u)u'(x)dx = 2x\exp(x^2+1)dx$$

Différentielles d'ordre supérieur

Définition

La différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction admettant une dérivée $n^{\text{ième}}$ est de la forme :

$$dy = f'(x)dx \Leftrightarrow d(dy) = d^2y = d[f'(x)dx] = f''(x)(dx)^2$$

à l'ordre n nous aurons :

$$\boxed{d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n}$$

Exemple

Différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction.

Soit $y = \cos x$. Calculer d^3y

$$dy = -\sin x = \cos(x + \pi/2)dx$$
$$d^2y = -\cos x = \cos(x + 2'\pi/2)(dx)^2$$

et $d^3y = +\sin x = \cos(x + 3'\pi/2)(dx)^3$

Soit $y = ex$. Calculer $d^n y$.

Sachant que $(ex)' = (ex)'' = \ldots = (ex)(n) = ex$

nous avons : $d^n y = e^x(dx)^n$

Cas d'une fonction composée

Soit $y = f(u)$ avec $u = u(x)$ alors

$$dy = f'(u)du$$
$$d^2y = d[f'(u)du] = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u$$

de même on trouverait :

$$d^3y = f'''(u)(du)^3 + 3f''(u).du.d^2u + f'(u)d^3u$$

Soit y = $\ln(\sin x)$. Calculer $d3y$.

Fonction de la forme $y = f(u) = \ln u$ avec $u = \sin x$

f'où $d^3y = f'''(u)(du)^3 + 3f''(u)du\, d^2u + f'(u)d^3u$

avec : $f'(u) = u^{-1}$; $f''(u) = -u^{-2}$; $f'''(u) = 2u^{-3}$

et : $du = \cos x\, dx$; $d^2u = -\sin x(dx)^2$; $d^3u = -\cos x(dx)^3$

d'où

$$d^3y = 2u^{-3}(\cos x\, dx)^3 + 3(-u^{-2})(\cos x\, dx)(-\sin x(dx)^2) + u^{-1}(-\cos x(dx)^3)$$

$$= 2(\sin x)^{-3}(\cos^3 x)(dx)^3 + 3(\sin x)^{-2}(\cos x)(\sin x)(dx)^3 - (\sin x)^{-1}(\cos x)(dx)^3$$

$$= (2\sin^{-3} x.\cos^3 x + 3\sin^{-1} x.\cos x - \sin^{-1} x.\cos x)(dx)^3$$

et $d^3y = \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}(dx)^3$

Calculer les fonctions dérivées par rapport à la variable x des fonctions algébriques :

$$y_1 = a\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + b\frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (a, b \text{ : constantes })$$

$$y_2 = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

Mettre sous forme de "fonction puissance" avant dérivation :

$$y_1 = ax^2x^{-1/3} + bx^{-1}x^{-1/2} = ax^{5/3} + bx^{-3/2}$$

donc

$$y_1' = a(\frac{5}{3})x^{2/3} - b(\frac{3}{2})x^{-5/2}$$

$$y_2 = \sqrt{x + \sqrt{x}} = [x + x^{1/2}]^{1/2}$$

donc

$$y_2' = \frac{1}{2}[x + x^{1/2}]^{-1/2}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}[1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}]$$

Calculer la dérivée de y= f(x) telle que :

$$y_6 = x^{x^2} \quad (x > 0)$$

$$y_6 = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$$

$$y_6' = e^{x^2 \ln x}(2x \ln x + \frac{x^2}{x}) = (1 + 2 \ln x)x^{x^2+1}$$

Soit la fonction : $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Déterminer $D = |\Delta f - df|$ différence entre l'accroissement total Δf et a différentielle df pour une variation Δx de la variable x dans les cas suivants :

$x = x_0 = 1$ et $\Delta x = 0,1$; $0,01$; $0,001$. Conclusion.

Par définition $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ et $df = f'(x_0)\,\Delta x = \frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}\Delta x$

si $\Delta x = 0,1$

$\Delta f = (1,1)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,065$

$df = (2/3).0,1 = 0,066 \Rightarrow D\#10^{-3}$

si $\Delta x = 0,01$

$\Delta f = (1,01)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,00665$

$df = (2/3)0,01 = 0,00666 \Rightarrow D\#10^{-5}$

si $\Delta x = 0,001$

$\Delta f = (1,001)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,0006665$

$df = (2/3)0,001 = 0,0006666 \Rightarrow D\#10^{-7}$

Donner les expressions approchées, quand $\Delta x \to 0$, de :

- a. $\sqrt{x + \Delta x}$
- b. $\ln(x + \Delta x)$
- c. $\tan(x + \Delta x)$

Nous avons : $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \cong df = f'(x)\Delta x$

si $\Delta x \to 0$ d'où :

a. $\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$

b. $\ln(x + \Delta x) \cong \ln x + \dfrac{\Delta x}{x}$

c. $\tan(x + \Delta x) \cong \tan x + (1 + \tan^2 x)\Delta x$

Définition : Fonction scalaire de plusieurs variables

Définition : Fonction scalaire de plusieurs variables

On appelle **fonction réelle** de n variables indépendantes réelles, une application f d'un domaine D_f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Notation : $\begin{array}{rcl} f:(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \to & f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{array}$

Si f est une fonction d'un point M de l'espace, de coordonnées (x, y, z), on dit que $f(x, y, z) = f(M)$ est une **fonction à variables scalaires**.

Exemple

- **Cas de 2 variables**

$$P = n\frac{RT}{V} = f(T, V)$$

La pression d'un Gaz Parfait est fonction de la température T et du volume V.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} = f(1, g)$$

La période d'un pendule simple est fonction de la longueur du fil et de l'accélération de la pesanteur g.

- **Cas de 3 variables**

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Le potentiel scalaire d'un point $M(x, y, z)$ dans l'espace.

$$W = RI^2t = f(R, I, t)$$

Chaleur dégagée par effet Joule dans une résistance ohmique.

Définition : Fonction composée de plusieurs variables

Soit une fonction $f(u, v)$ avec u et v fonctions des variables indépendantes x et y, alors

$f[u(x, y), v(x, y)]$ **est une fonction composée de** x **et** y.

Dérivées partielles du 1er ordre en un point

Accroissement partiel d'une fonction

Soit $f(x, y)$ une fonction, à valeur scalaire, de deux variables indépendantes x et y. En un point $M_0(x_0, y_0)$, faisons subir à la variable x l'accroissement Δx (y restant constant), alors la fonction varie de l'accroissement :

$$\boxed{\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}$$

Définition : Dérivée partielle de f en un point

Par définition, la dérivée de f en M_0, si elle existe, est appelée **dérivée partielle de** f par rapport à x au point M_0 et sera notée :

$$\boxed{f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

De même pour la variable y, nous aurons :

$$\boxed{f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}}$$

Fonction dérivée partielle

Si la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles en tout point d'un domaine D, on définit les fonctions dérivées premières de f par les applications :

$$f'_x \ : (x, y) \to f'_x(x, y) = \frac{\delta f}{\delta x}(x, y)$$

$$f'_y \ : (x, y) \to f'_y(x, y) = \frac{\delta f}{\delta y}(x, y)$$

Dérivation partielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions f et g

Nous avons les mêmes règles de dérivation que pour les fonctions d'une variable. Considérons le **cas de trois variables** :

Si f et g sont deux fonctions de variables indépendantes x, y et z, alors :

si $F = f + g \Rightarrow F'_x = (f + g)'_x = f'_x + g'_x$

si $G = fg \Rightarrow G'_y = (fg)'_y = f'_y g + f g'_y$

si $H = f/g \Rightarrow H'_z = (\frac{f}{g})'_z = \frac{f'_z g - f g'_z}{g^2}$

Dérivation partielle d'une fonction composée f (u, v)

- Cas où $u = u(x)$ et $v = v(x)$ avec $F(x) = f[u(x), v(x)]$

  La fonction dérivée par rapport à la variable x s'écrit :

  $$F'(x) = f'_u(u, v).u'(x) + f'_v(u, v).v'(x)$$

  Notation :

  $F'(x) = \dfrac{dF}{dx}$: fonction dérivée de F par rapport à x.

  $f'_u(u, v) = \dfrac{\delta f(u, v)}{\delta u}$: dérivée partielle de f par rapport à u.

  $u'(x) = \dfrac{du}{dx}$: dérivée de u par rapport à x.

Cas où $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ et avec $G(x, y) = g[u(x, y), v(x, y)]$

La fonction $G(x, y)$ admet deux dérivées partielles :

$$G'_x(x, y) = g'_u(u, v).u'_x(x, y) + g'_v(u, v).v'_x(x, y)$$

$$G'_y(x, y) = g'_u(u, v).u'_y(x, y) + g'_v(u, v).v'_y(x, y)$$

Notation :

$G'_x(x, y) = \dfrac{\delta G}{\delta x}(x, y)$

$G'_y(x, y) = \dfrac{\delta G}{\delta y}(x, y)$ dérivées partielles premières de G par rapport à x ou y.

$g'_u(x, y) = \dfrac{\delta g}{\delta u}(u, v)$

$g'_v(x, y) = \dfrac{\delta g}{\delta v}(u, v)$ dérivées partielles premières de g par rapport à u ou v

$u'_x(x, y) = \dfrac{\delta u}{\delta x}(x, y),\ u'_y(x, y) = \dfrac{\delta u}{\delta y}(x, y)$

$v'_x(x, y) = \dfrac{\delta v}{\delta x}(x, y),\ v'_y(x, y) = \dfrac{\delta v}{\delta y}(x, y)$ dérivées partielles de u et v par rapport aux variables x et y.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Dérivée partielle d'ordre 2 d'une fonction de 2 variables

Soit f une fonction de 2 variables x et y, qui admet deux fonctions dérivées :

$$f'_x(x,y) = \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \rho(x,y) \text{ et } f'_y(x,y) = \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \psi(x,y)$$

Si ces deux fonctions ρ et ψ sont aussi dérivables, alors leurs dérivées sont appelées dérivées partielles de f et seront notées

$$\frac{\delta\rho(x,y)}{\delta x} = \frac{\delta f^2(x,y)}{\delta x^2} = f''_{x^2} \qquad \frac{\delta\psi(x,y)}{\delta x} = \frac{\delta f^2(x,y)}{\delta x\delta y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\delta\rho(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta f^2(x,y)}{\delta y\delta x} = f''_{yx} \qquad \frac{\delta\psi(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta f^2(x,y)}{\delta y^2} = f''_{y^2}$$

Théorème : de Schwarz

Si une fonction $f(x,y)$ admet en un point des dérivées partielles continues $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$, alors les dérivées partielles secondes croisées sont égales :

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \text{ ou } \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}$$

Cas d'une **fonction de 3 variables** $f(x,y,z)$ alors :

$$f''_{xy} = f''_{yx}\ ;\ f''_{xz} = f''_{zx}\ ;\ f''_{yz} = f''_{zx}$$

Formule de Taylor. Formule de Mac-Laurin

Formule de Taylor

Pour une fonction de deux variables $f(x,y)$, au voisinage d'un point $M_0(x_0,y_0)$, la formule de Taylor s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}[(x-x_0)f'_x(x_0,y_0) + (x-x_0)f'_y(x_0,y_0)] + \\ \frac{1}{2!}[(x-x_0)^2 f''_{x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0,y_0) + \\ (y-y_0)^2 f''_{y^2}(x_0,y_0)] + \ldots \end{aligned}$$

Formule de Mac Laurin

Pour le point $(0,0)$, la formule de Taylor nous fournit celle de Mac Laurin :

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) + [xf'_x(0,0) + yf'_y(0,0)] \\ + \frac{1}{2!}[x^2 f''_{x^2}(0,0) + 2xyf''_{xy}(0,0) + y^2 f''_{y^2}(0,0)] \end{aligned}$$

Forme différentielle. Différentielle totale. Facteur intégrant

Définition : Différentielle totale du 1er ordre

On appelle différentielle totale du 1er ordre d'une fonction $f(x,y)$ l'expression :

$$df(x,y) = df = f'_x dx + f'_y dy \text{ (2 variables)}$$

$$df(x,y,z) = df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \text{ (3 variables)}$$

Définition : Forme différentielle

On appelle forme différentielle à 2 variables x et y, une expression de la forme :

$$\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

où P et Q sont des fonctions de variables x et y.

Définition : Différentielle exacte

La forme différentielle est dite **exacte**, si il existe une application f dont la différentielle totale est :

$$df = \omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Cette différentielle totale est une forme différentielle particulière où les fonctions P et Q sont reliées aux dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ par :

$$P(x,y) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} \text{ et } Q(x,y) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta y}$$

L'application du théorème de Schwarz entre les dérivées "croisées" conduit dans le cas de la différentielle exacte à la relation entre les fonctions P et Q :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \Leftrightarrow \frac{\delta P(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta x} \Leftrightarrow P'_y = Q'_x$$

Dans le cas d'une fonction de 3 variables $f(x,y,z)$: la différentielle totale s'exprime par :

$$df = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

avec les relations dues au théorème de Schwarz :

$$P'_y = Q'_x \; ; \; Q'_z = R'_y \; ; \; P'_z = R'_x$$

Définition : Facteur intégrant

On appelle **facteur intégrant** de la forme différentielle $\omega(x,y)$, une fonction $\lambda(x,y)$ telle que $\lambda\, \omega\,(x,y)$ soit une différentielle $F(x,y)$:

$$\boxed{\lambda\, \omega\,(x,y) = dF}$$

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions :

$$z_1(x,y) = x^y$$

$$z_2(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Quand $y = cste,$ z_1 est de la forme d'une fonction puissance $x^n,$ et si $x = cste,$ z_1 est une fonction exponentielle $a^y = e^{y\ln a}$ avec $a > 0,$ d'où :

$$\frac{\delta z_1}{\delta x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\delta z_1}{\delta y} = e^{y\ln x}\ln x \qquad \frac{\delta z_1}{\delta y} = x^y \ln x$$

La fonction z_2 est de la forme $\arctan u$ ayant pour fonction dérivée : $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2},$ ainsi :

$$\frac{\delta z_2}{\delta x} = \frac{(\frac{y}{x})'}{1+(\frac{y}{x})^2} \text{ soit } \frac{\delta z_2}{\delta x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\delta z_2}{\delta y} = \frac{(\frac{y}{x})'}{1+(\frac{y}{x})^2} \text{ soit } \frac{\delta z_2}{\delta y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Monter que : $x\dfrac{\delta z}{\delta x} + y\dfrac{\delta z}{\delta y} = xy + z$ si $z(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = x + e^{\frac{y}{x}}$$

donc

$$x[y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}] + y[x + e^{\frac{y}{x}}] = 2xy + xe^{\frac{y}{x}} = xy + z$$

Trouver l'accroissement total Δf et la différentielle totale df de la fonction : $f(x,y) = x^2 - xy$ au point $(2,1)$ si $\Delta x = 0,2$ et $\Delta y = 0,1$.

Accroissement total : $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$

d'où :

$$\Delta f = ((x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)) - (x^2 - xy)$$

$$\Delta f = (2x - y)\Delta x - x\Delta y - \Delta x\Delta y + (\Delta x)^2$$

Différentielle totale :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy = (2x - y)dx - xdy$$

Application numérique :

$$\Delta f = (4 - 1)0,2 - 2 \times 0,1 - 0,2 \times 0,1 + (0,2)^2$$

$$= 0,402 \qquad \# df = 0,4$$

Calculer approximativement : $(2,03)^{1,98}$.

Considérons la fonction : $z = x^y$. Le nombre cherché s'obtient à partir de la valeur initiale $z = 2^2 = 4$ augmentée de l'accroissement $\Delta z \cong dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$.

Application numérique :

$x = 2$; $dx = 0,03$; $y = 2$; $dy = -0,02 \Rightarrow$

$\Delta z \cong 2 \times 2 \times 0,03 + 2^2 \times \ln 2 \times (-0,02) = 0,064$

Par conséquent

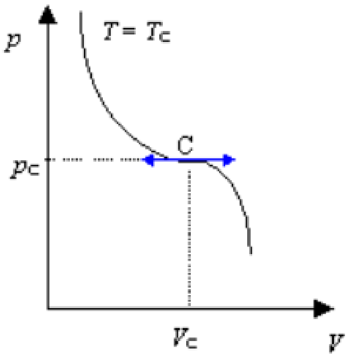
$(2,03)^{1,98} \cong 4 + 0,064 = 4,064$

Les gaz réels vérifient l'équation d'état de Van der Waals :

$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = rT$ (écrite pour 1 gramme de gaz)

L'isotherme critique $T = T_C$ (fig.), dans le diagramme (p, V) présente, au point $C(p_C, V_C, T_C)$, un point d'inflexion, à tangente horizontale.

Déterminer les deux relations liant V_C et T_C au point critique C.



A partir de l'équation de Van der Waals, nous tirons l'expression de $p = \frac{rT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$

Au point critique (p_C, V_C, T_C) les dérivées $\frac{dP}{dV} = \frac{d^2P}{dV^2} = 0$ d'où :

$$(\frac{dP}{dV})_{T=T_C} = 0 \text{ soit } \frac{-rT_C}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{V_C^3} = 0 \quad (1)$$

$$(\frac{d^2P}{dV^2})_{T=T_C} = 0 \text{ soit } \frac{2rT_C}{(V_C - b)^3} - \frac{6a}{V_C^4} = 0 \quad (2)$$

En déduire les valeurs des coefficients a, b et r en fonction des constantes critiques p_C, V_C et T_C du gaz.

Les équations (1) et (2) ont pour solution : $V_C = 3b$ (3) et $T_C = 8a/(27br)$ (4)

L'équation d'état permet de déterminer la pression critique p_C :

$$p_C = \frac{rT_C}{V_c - b} - \frac{a}{V_C^2} = \frac{8ra}{27br(3b - b)} - \frac{a}{(3b)^2} = \frac{a}{27b^2} \quad (5)$$

Les relations (3), (4) et (5) permettent d'exprimer les coefficients a, b et r en fonction de p_C, V_C et T_C :

$$a = 3p_C V_C^2 \qquad b = \frac{V_C}{3} \qquad r = \frac{8}{3}\frac{p_C V_C}{T_C}$$

La distance focale d'une lentille mince est donnée par la formule

$f = \dfrac{pp'}{p + p'}$ où

p : distance objet - lentille

p' : distance image - lentille

Déterminer la différentielle "ordinaire" df en fonction de dp et dp'

$$df = \frac{\delta f}{\delta p}dp + \frac{\delta f}{\delta p'}dp' = \frac{(p + p')p' - pp'}{(p + p')^2}dp + \frac{(p + p')p - pp'}{(p + p')^2}dp'$$

$$df = \frac{p'^2}{(p + p')^2}dp + \frac{p^2}{(p + p')^2}dp'$$

Montrer que, si l'objet et l'écran restent fixes $(p + p' = D)$, l'erreur commise sur f est minimum pour $p = D/2$.

Si $p + p' = D \Rightarrow p' = D - p$ et $dp' = -dp$ d'où en portant dans l'expression de df nous obtenons :

$$df = \frac{(D - p)^2}{D^2}dp + \frac{p^2(-dp)}{D^2} = \frac{(D^2 - 2pD + p^2 - p^2)}{D^2}dp = \frac{D - 2p}{D}dp$$

L'erreur sur f est minimum si $df = 0 \Rightarrow D - 2p = 0 \Rightarrow p = \dfrac{D}{2}$

Le volume d'un cône de hauteur h et de rayon R a pour expression : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Calculer la variation de volume pour $R = 10cm$, $h = 30cm$, si R diminue de $1mm$ et h augmente de $3mm$.

Calculons la différentielle d'une fonction $V = V(R, h)$

$$dV = \frac{\delta V}{\delta R}dR + \frac{\delta V}{\delta h}dh = \frac{1}{3}\pi[2RhdR + R^2dh] \qquad = \frac{1}{3}\pi R[2hdR + Rdh]$$

Application numérique :

$$dV = \frac{1}{3}\pi \times 10(2 \times 30(0,1) + 10(0,3)) = -10\pi = -31,4cm^3$$

La forme différentielle δp de la pression d'un gaz (entre 0 et 40 atmosphères) est donnée par l'équation, relative à une mole :

$$\delta p = -\frac{RT}{v^2}(1 + \frac{2\alpha}{v})dv + \frac{R}{v}(1 + \frac{\alpha}{v})dT$$

Montrer que δp est une différentielle totale.

En écrivant la forme différentielle sous la forme : $\delta p = Pdv + QdT$

δp est une différentielle totale si : $\frac{\delta P}{\delta T} = \frac{\delta Q}{\delta v}$

$$\frac{\delta P}{\delta T} = -\frac{R}{v^2}(1 + \frac{2\alpha}{v}) \qquad \frac{\delta Q}{\delta v} = -\frac{R}{v^2}(1 + \frac{\alpha}{v}) + \frac{R}{v}(-\frac{\alpha}{v^2}) = -\frac{R}{v^2}(1 + \frac{2\alpha}{v}) = \frac{\delta P}{\delta T}$$

δp est une différentielle totale de la forme :

$$dp = (\frac{\delta p}{\delta v})_T dv + (\frac{\delta p}{\delta T})_v dT$$

En déduire l'équation d'état, dans l'intervalle de pression $[0 - 40\ atm]$.

Par identification : $\frac{\delta p}{\delta v} = -\frac{RT}{v^2}(1 + \frac{2\alpha}{v})$ par intégration : $p(v,T) = \frac{RT}{v} + \frac{\alpha RT}{v^2} + \varphi(T)$

or comme $\frac{\delta p}{\delta T} = \frac{R}{v}(1 + \frac{\alpha}{v}) = \frac{R}{v} + \frac{\alpha R}{v^2} + \varphi'(T) \Rightarrow \varphi'(T) = 0 \Rightarrow \varphi(T) = K$

d'où $p(v,T) = \frac{RT}{v}(1 + \frac{\alpha}{v}) + K \Rightarrow pv = RT(1 + \frac{\alpha}{v}) + K\ v$