Primitives - Intégrales

Somme de Rieman et convergence vers intégrale définie
Lien avec les aires
Propriétés des intégrales
Primitives essentielles
Calculs de primitives
Changement de variable
Intégration par parties
Valeur moyenne d'une fonction
Calcul des longueurs, des aires et des volumes de révolution
Généralisation aux intégrales doubles
Calculs de volumes
Applications au centres de gravité avec distributions de masses
Surfaciques
Exercices d'application

Définition d'une fonction primitive

Définition : Fonction primitive

On appelle **fonction primitive** de la fonction d'une variable $f(x)$, une fonction $F(x)$ telle que : $F'(x) = f(x)$

Exemple

la fonction $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ admet comme primitive $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Deux primitives $F(x)$ et $G(x)$ d'une même fonction $f(x)$ diffèrent d'une constante C. En effet :

$F'(x) = G'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - G'(x) = [F(x) - G(x)]' = 0$ d'où $F(x) - G(x) = C$

Exemple

$F(x) = \cos^2 x$ et $G(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ admettent pour fonction dérivée :

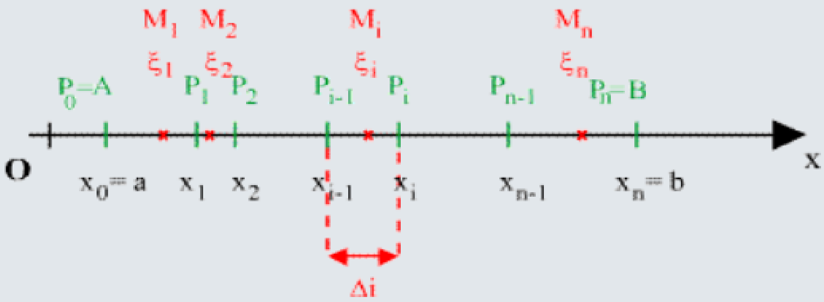
$f(x) = F'(x) = G'(x) = -2\sin x \cos x$ d'où $F(x) - G(x) = C$

Sachant que $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2}$

Somme de Rieman

- Sur un axe Ox orienté, on considère les points A et B d'abscisses respectives a et b $(b > a)$.
- Positionnons entre A et B, une succession de points arbitraires P_i d'abscisses x_i pour former n intervalles de longueurs $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$:

  $P_0(x_0 = a),\ P_1(x_1),\ \ldots,\ P_i(x_i),\ \ldots,\ P_n(x_n = b).$
- Considérons dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ un point M_i d'abscisse ζ
- Une fonction f définie et continue sur $[a, b]$ prendra la valeur $f(\zeta_i)$ au point M_i.



La somme S_n, associée à la fonction f :

$$S_n = (x_1 - x_0)f(\zeta_1) + \ldots + (x_i - x_{i-1})f(\zeta_i) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\zeta_i)$$

avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-}$, $x_0 = a$ et $x_n = b$

est appelée **somme de Riemann** de f sur $[a, b]$.

Exemple : Somme de Riemann

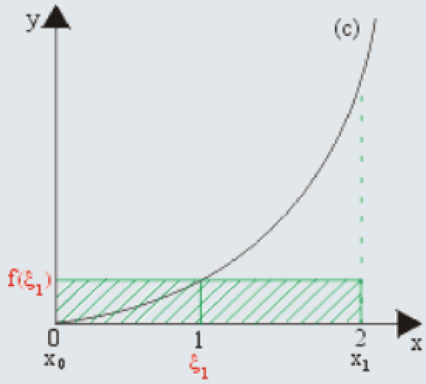
Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie et continue sur $[0, 2]$.

Calculons la somme de Riemann dans le cas où l'intervalle $[0, 2]$ est divisé en $n = 1$, puis $n = 2$ intervalles avec les points M_i choisis au centre des segments $[x_{i-1}, x_i]$.

Cas où $n = 1$ **:**

$S_1 = (x_1 - x_0)f(\zeta_1) = 2f(1) = 2\ u.a.$

$(\zeta_1 = 1$ et $f(\zeta_1) = 1)$

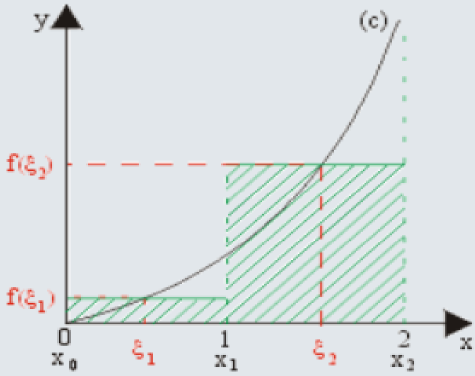


Cas où $n = 2$ **:**

$S_2 = (x_1 - x_0)f(\zeta_1) + (x_2 - x_1)f(\zeta_2)$

$= 1.\frac{1}{4} + 1.\frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5\ u.a.$

$(\zeta_1 = \frac{1}{2}$ et $f(\zeta_1) = \frac{1}{4}$ $\zeta_2 = \frac{3}{2}$ et $f(\zeta_2) = \frac{9}{4})$



On appelle **intégrale définie** de $f(x)$ sur $[a, b]$, la limite, si elle existe, de la somme de Riemann S_n quand le nombre n d'intervalles tend vers l'infini (c.a.d. quand $Dx_i \to 0$) et sera notée :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\zeta_i) = \int_a^b f(x)dx = I$$

Cas où $a = b$: La somme de Riemann est nulle car $S = (a - a)f(a) = 0$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

Exemple : Somme de Riemann : Intégrale définie

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie et continue sur $[0, 2]$.

La somme de Riemann $S_n \to I = \int_0^2 f(x)dx$ quand $n \to \infty$

Nous avons vu dans l'exercice précédent que pour $n = 1$ et $n = 2$ nous obtenions respectivement $S_1 = 2\,u.a.$ et $S_2 = 2,5\,u.a.$

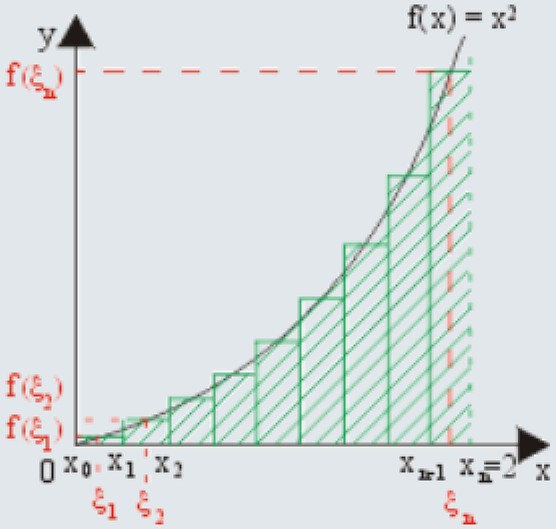
Quand n croit la somme de Riemann tend vers une limite :

$$\lim_{x\to\infty} S_n \to I = \int_0^2 f(x)d(x) \# 2.67\ u.a.$$

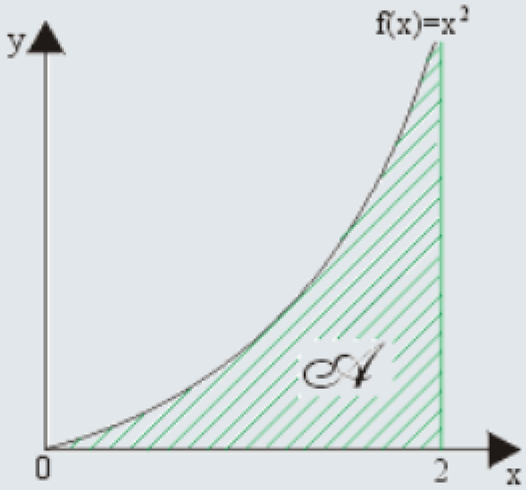
aire de la surface comprise entre la courbe (c), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$. (voir le calcul de l'intégrale définie à partir d'une primitive de $f(x)$).

Cas $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\zeta_i)$$



$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A} \# 2.7\ u.a.$$



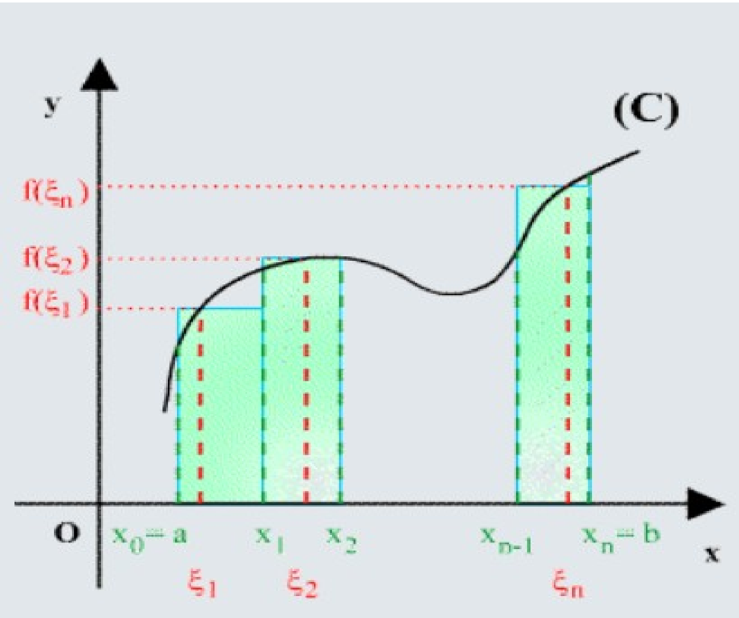
Interprétation géométrique

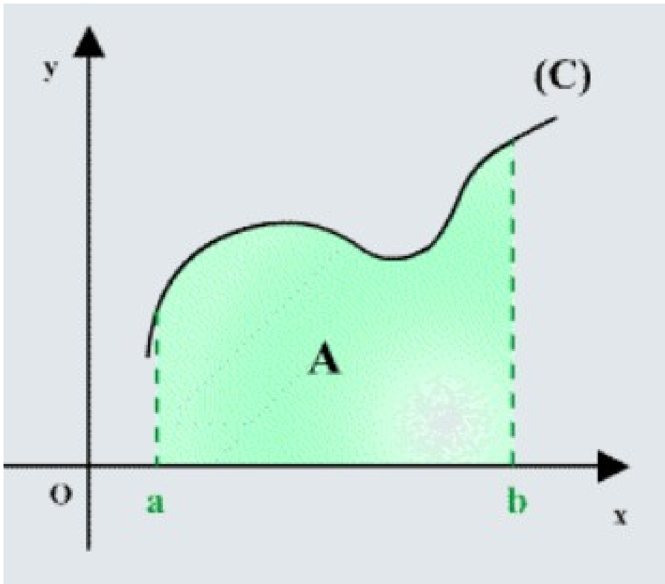
Soit la courbe (C) représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie et continue sur $[a, b]$.

1^{er} cas : $f(x)$ est positive sur $[a, b]$

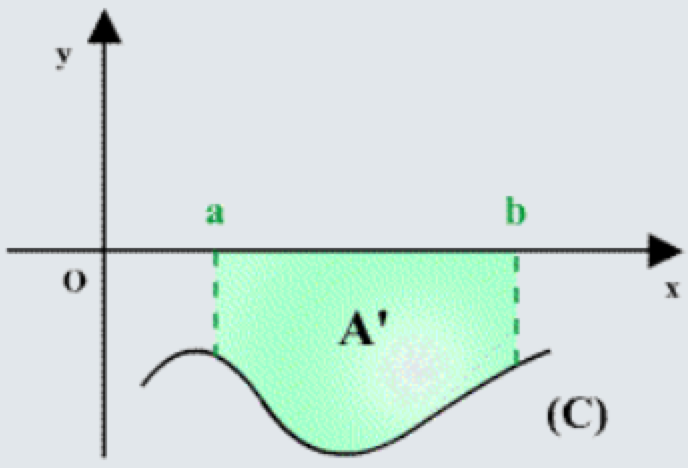
La somme de Riemann $S_n = (x_1 - x_0)f(\zeta_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\zeta_i)$ est la somme des aires des rectangles de longueur $(x_i - x_{i-1})$ et de hauteur $f(\zeta_i)$ (fig1). Donc S_n est une valeur approchée de l'aire du domaine A limité par la courbe (C), l'axe Ox et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (fig2). D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\zeta_i) \Leftrightarrow I_1 = \int_a^b f(x)dx = +A$$





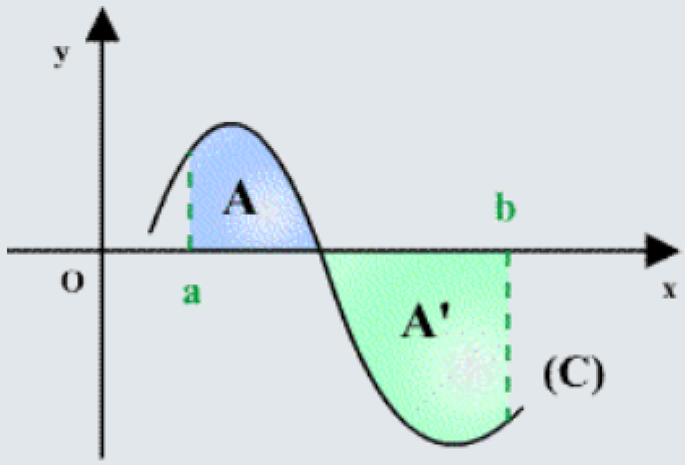
$f(x)$ est négative sur $[a, b]$



L'intégrale $I_2 = \int_a^b f(x)dx = -A'$

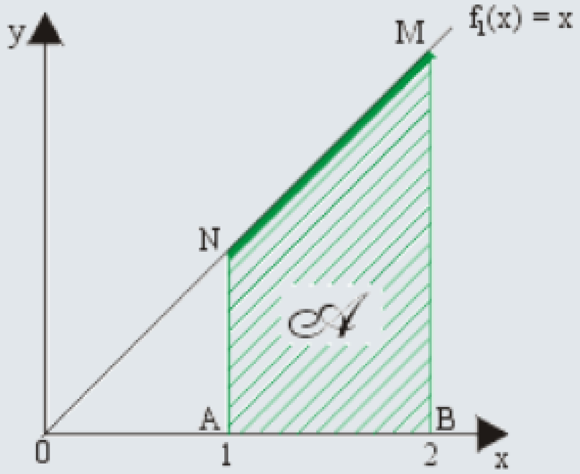
(La valeur de l'intégrale est l'opposée de l'aire A').

$f(x)$ **prend des valeurs positives et négatives sur** $[a, b]$



L'intégrale $I_3 = \int_a^b f(x)dx = A - A'$

Soit la fonction $f_1(x) = x$ définie et continue sur $[1, 2]$.



$$I_1 = \int_1^2 xdx = +\mathcal{A} = +(\text{aire du trapèze } ABMN) = \frac{AN + BM}{2}.AB = \frac{3}{2}u.a.$$

Propriétés des intégrales définies

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies et continues $\forall x \in [a, b]$ avec $a \leq b$.

Par application de la formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

nous avons les propriétés suivantes :

Propriété : 1 : Symétrie

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Démonstration

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -[F(x)]_b^a = -\int_b^a f(x)dx$$

Exemple : Symétrie

$$\int_1^3 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$-\int_3^1 x^2 dx = -[\frac{x^3}{3}]_3^1 = -[\frac{1}{3} - \frac{27}{3}] = \frac{26}{3}$$

donc

$$\boxed{\int_1^3 x^2 dx = -\int_3^1 x^2 dx}$$

Propriété : 2 : Additivité

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, b]$$

(Relation de Chasles)

Démonstration

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$$

$$= [F(x)]]_c^b + [F(x)]_a^c = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemple : Additivité

Pour tout $x \in [-2, 2]$,

- $|x| = -x$ pour $-2 \leq x \leq 0$
- $|x| = +x$ pour $0 \leq x \leq 2$

$$\int_{-2}^2 |x|dx = \int_{-2}^0 -xdx + \int_0^2 xdx = [-\frac{x^2}{2}]_{-2}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^2 = -[0 - \frac{4}{2}] + [\frac{4}{2}] = 4$$

Propriété : 3 : Multiplication par un scalaire λ

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Démonstration

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = [\lambda F(x)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a)$$

$$= \lambda[F(b) - F(a)] = \lambda[F(x)]_a^b = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Exemple : Multiplication par un scalaire λ

$$\int_1^3 3x^2dx = [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

$$3\int_1^3 x^2dx = 3[\frac{x^3}{3}]_1^3 = 3[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}] = 26$$

donc

$$\boxed{\int_1^3 3x^2dx = 3\int_1^3 x^2dx}$$

Propriété : 4 : Distributivité par rapport à l'addition

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Démonstration

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = [\alpha F(x) + \beta G(x)]_a^b$$

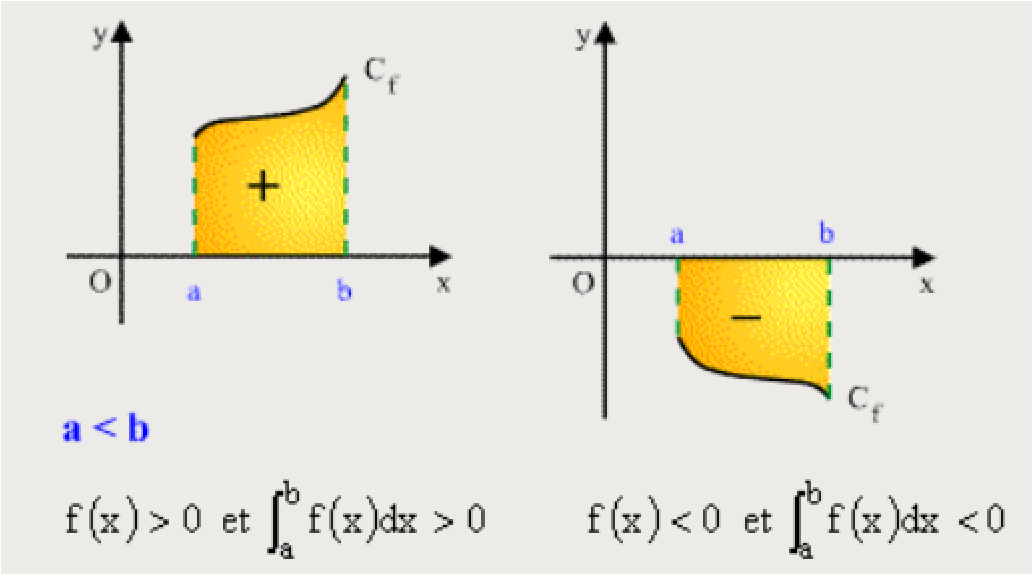
$$= (\alpha F(b) + \beta G(b)) - (\alpha F(a) + \beta G(a))$$

$$= \alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a)$$

$$= \alpha[F(x)]_a^b - \beta[G(x)]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Propriété : 5 : Signe de l'intégrale

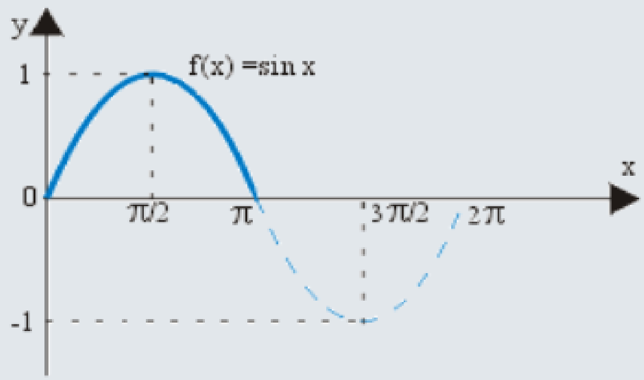
Si $f \geq 0$ (resp. ≤ 0) alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (resp. ≤ 0)



Exemple : Signe de l'intégrale (2)

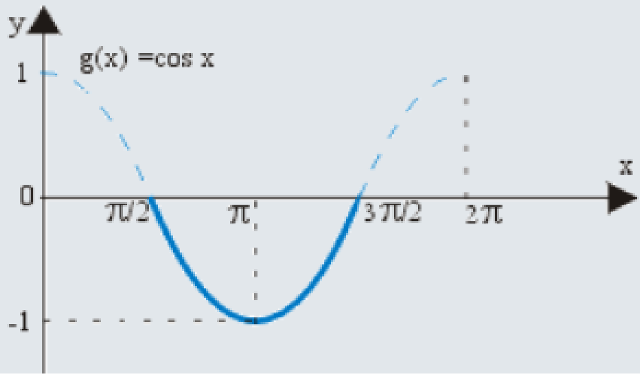
$\sin x \geq 0$ pour $x \in [0, \pi]$

$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2 > 0$



$\cos x \leq 0$ pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$

$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2 < 0$



Propriété : 9 : Propriétés des fonctions paires, impaires et périodiques

- Si f est paire, $f(-x) = f(x)$, alors

  $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

- Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$, alors

  $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

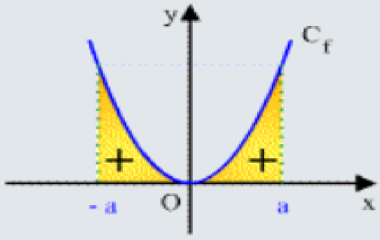
- Si f est périodique, de période T, $f(x+T) = f(x)$, alors

  $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Exemple : Propriétés des fonctions paires

Fonction paire : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

ici $f(x) = x^2$

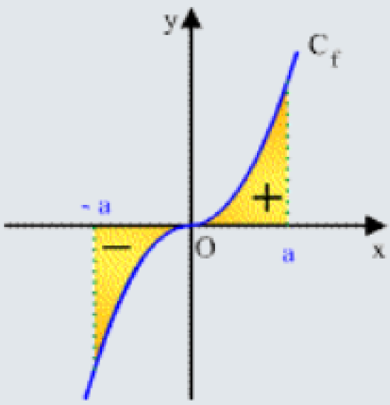


Exemple : $\int_{-2}^{2} x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - (-\frac{8}{3}) = 2 \times \frac{8}{3} = 2\int_{0}^{2} x^2dx$

Exemple : Propriétés des fonctions impaires

Fonction impaire : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

ici $f(x) = x^3$



Exemple : $\int_{-1}^{1} x^3dx = [\frac{x^4}{4}]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

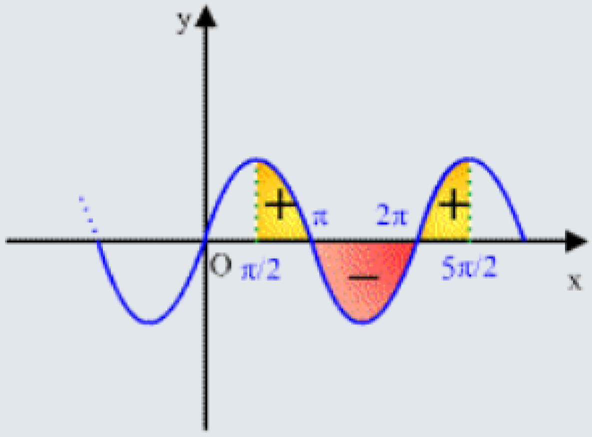
Exemple : Propriétés des fonctions périodiques

Fonction f périodique de période T :

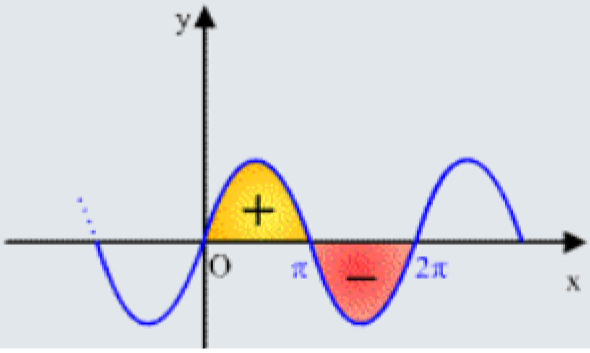
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

ici $f(x) = \sin x$

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2+2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi/2}^{5\pi/2} = -\cos\frac{5\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$



Ensemble de définition	Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)+C$ (C : constante)
$\mathbb{R}$	0	C
$\mathbb{R}$	a (cste)	$ax+C$
$\mathbb{R}$	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \ (n \in \mathbb{Z}-\{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x+C
$\mathbb{R}$	a^x (a $\in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x+C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin(\omega x+\varphi)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x+\varphi)+C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos(\omega x+\varphi)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x+\varphi)+C$
$\mathbb{R}-\{k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\tan\dfrac{x}{2}\rvert+C$
$\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi/2\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\lvert\tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})\rvert+C$
$\mathbb{R}-\{k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\text{cotan}^2 x$	$-\text{cotan}\,x+C$
$\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi/2\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x + C$
$\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi/2\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
$\mathbb{R}-\{k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}\,x$	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$
$\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi/2\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\tan^2 x$	$\tan x - x + C$
$\mathbb{R}-\{k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}^2 x$	$-\text{cotan}\,x - x + C$
$]-1\ ;1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$]-1\ ;1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

Astuces !

Exemple : Intégration par décomposition

$$I = \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx$$
$$= \int (x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{2}{3}})dx$$
$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$
$$J = \int \frac{x-3}{x+1}dx = \int \frac{x+1-4}{x+1}dx$$
$$= \int (1 - \frac{4}{x+1})dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= x - 4\ln|x+1| + C$$
$$K = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1)dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)dx - \int_0^{\pi/4} dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4}$$
$$= \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Intégration par changement de variable

Le choix de la variable doit être conditionné par l'obtention d'une forme à intégrer proche de celles listées dans le tableau des primitives classiques.

Changement de variable pour le calcul des primitives $\int f(x)dx$

- **Changement de variable** $u = \Psi(x)$

Dans le calcul de $F(x) = \int f(x)dx$ si l'élément différentiel $f(x)dx$ peut se mettre sous la forme $g[\Psi(x)]\Psi'(x)dx$, alors en posant

$u = \Psi(x)$ et $du = \Psi'(x)dx$ nous obtiendrons $G(u) = \int g(u)du$ et

$\boxed{F(x) = G[\Psi(x)] + C}$

Intégration avec changement de variable $u = \Psi(x)$

Calculer $I = \int x\sqrt{1+x^2}dx$

posons : $u = 1 + x^2 \Leftrightarrow du = 2xdx$,d'où :

$$I = \int \frac{1}{2}u^{1/2}du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

- **Changement de variable** $x = \varphi(t)$

Dans le calcul de $F(x) = \int f(x)dx$ en posant $x = \varphi(t) \Leftrightarrow dx = \varphi'(t)dt$, l'élément différentiel, fonction de la variable t, devient $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, d'où $G(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]$ et :

$$\boxed{F(x) = G[j^{-1}(x)] + C}$$

(La fonction φ doit être choisie bijective car $t = \varphi^{-1}(x)$)

Exemple

Intégration avec changement de variable $x = \varphi(t)$

Calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Posons $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$

avec $x \in]-1;1[$ ou $t \in]-\pi/2;\pi/2[$

et $dx = \cos t dt$, d'où

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}dt = \int dt = t = \arcsin x$$

(avec $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$)

Changement de variable pour le calcul des intégrales $\int_a^b f(x)dx$

La fonction f est définie et continue sur $[a, b]$.

- **Changement de variable** $u = \Psi(x)$

Dans le cas où l'élément différentiel $f(x)dx$ peut se mettre sous la forme $g[\Psi(x)]\Psi'(x)dx$, en posant $u = \Psi(x)$ nous obtiendrons :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\Psi(x)]\Psi'(x)dx = \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} g(u)du}$$

Intégration avec changement de variable $u = \Psi(x)$

Calculer $I = \int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin x dx$

Posons $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x dx$ et $\begin{cases} u_1 = \cos 0 = 1 \\ u_2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$, d'où

$$I = \int_0^{1/2} u^2(-du) = [-\frac{u^3}{3}]_1^{1/2} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{8} - 1) = \frac{7}{24}$$

- **Changement de variable** $x = \varphi(t)$

La fonction φ admet une dérivée continue sur un intervalle $[t_1 ; t_2]$

défini par : $t_1 = \varphi^{-1}(a)$ et $t_2 = \varphi^{-1}(b)$.

L'élément différentiel étant $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, l'intégrale s'exprimera par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

Intégration avec changement de variable $x = \varphi(t)$

Calculer $I = \int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x} \quad (x > 0)$

Posons $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ et $\begin{cases} t_1 = \ln e = 1 \\ t_2 = \ln e^3 = 3 \end{cases}$

avec $dx = e^t dt$ d'où :

$$I = \int_1^3 \frac{e^t dt}{e^t t} = \int_1^3 \frac{dt}{t} = [\ln |t|]_1^3 = \ln 3$$

Intégration par parties

Cas des primitives

La méthode d'intégration par parties est basée sur la formule de la différentielle du produit de deux fonctions d'une variable $u = u(x)$ et $v = v(x)$:

$$d(uv) = udv + vdu$$

On suppose que : $f(x)dx = u(x)dv(x)$ où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions continues de x avec

$dv(x) = v'(x)dx$
$du(x) = u'(x)dx$ alors :

$$\int f(x)dx = \int u(x)dv(x) = \int d(u(x)v(x)) - \int v(x)du(x)$$

ou $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

et $\int udv = uv - \int vdu$

Cette méthode est employée quand le calcul de $\int vdu$ est plus simple que celui de $\int udv$

Exemple : Primitivation par parties

Calculer $I = \int x \sinh x dx$

on pose $u = x, \quad dv = \sinh x dx$

alors $du = dx, \quad v = \cosh x,$

d'où : $I = \int x \sinh x dx = x \cosh x - \int \cosh x dx = x \cosh x - \sinh x + C$

Cas des intégrales

Si $u(x)$ et $v(x)$ possèdent des dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'intégration de la fonction $f(x)dx = u(x)dv(x)$ sur $[a, b]$ conduit à :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dv(x) = \int_a^b d(u(x)v(x)) - \int_a^b v(x)du(x)$$

d'où $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

Exemple : Intégration par parties cas des intégrales

Calculer $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$

on pose $u = \ln x, \quad dv = x^2 dx$

alors $du = dx/x, \quad v = x^3/3,$

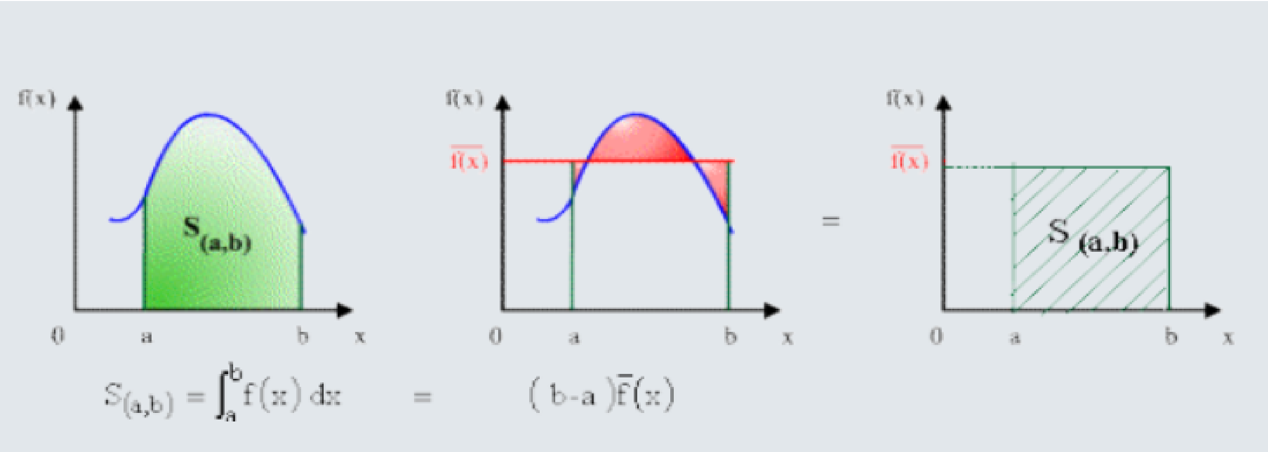
d'où : $I = \int_1^e x^2 \ln x dx = [\frac{x^3}{3} \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = [\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}]_1^e = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$

Valeur moyenne -

Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** d'une fonction $f(x)$ définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, l'expression :

$$\boxed{\overline{f}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

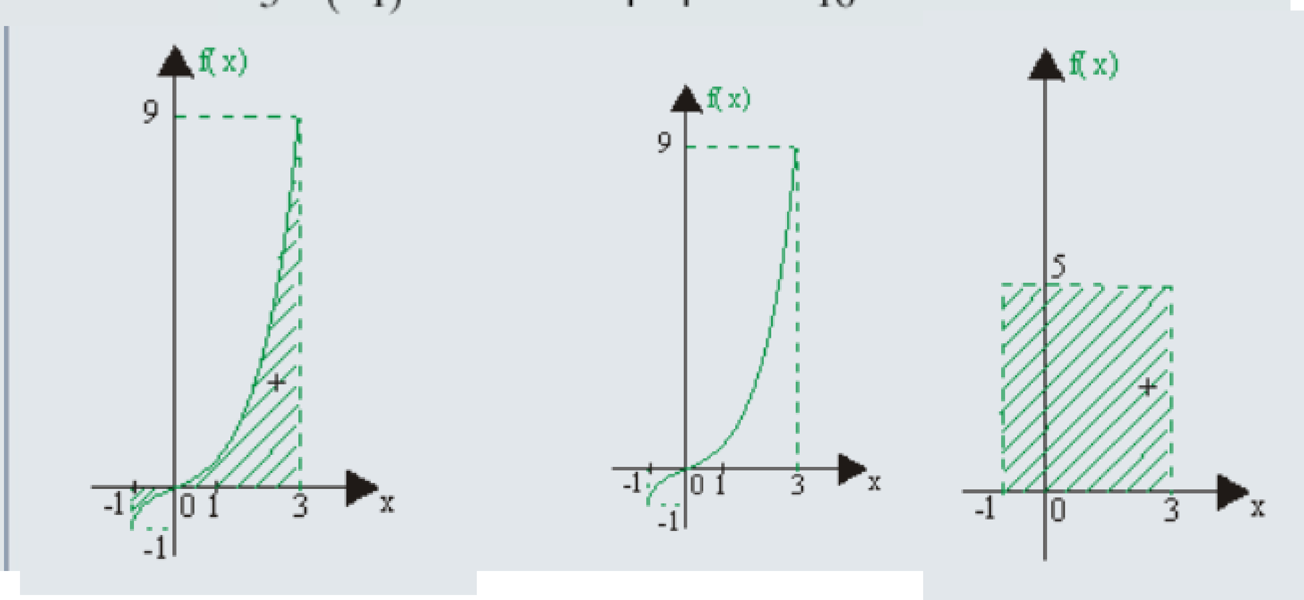


Exemple : Valeur moyenne d'une fonction f(x)

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.

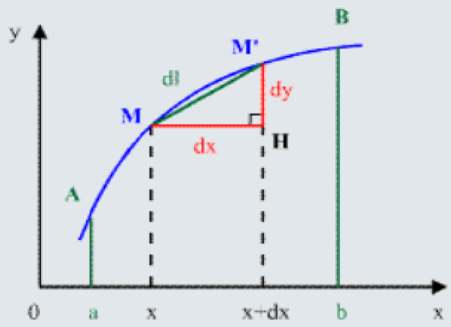
Par définition : $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

D'où $\boxed{\overline{f}(x)} = \dfrac{1}{3-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{3} x^3 dx = \dfrac{1}{4}[\dfrac{x^4}{4}]_{-1}^{3} = \dfrac{1}{16}(81 - 1) = \boxed{5}$



Calculs de longueurs

En coordonnées cartésiennes



La longueur AB, de l'arc de courbe est décomposée en segments élémentaires de longueur dl.

Dans le triangle MHM', on a :

$$\widehat{MM'} \approx MM' = \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{HM'}^2}$$

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

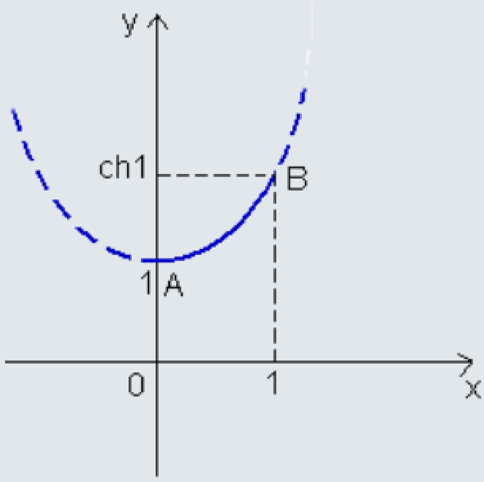
$$= (1 + (\frac{dy}{dx})^2)(dx)^2$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$\boxed{l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx}$$

Exemple : Longueur d'une chaînette

Calcul de la longueur de la chaînette d'équation $y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **comprise entre les points** $A(0, 1)$ **et** $B(1, \cosh(1))$.

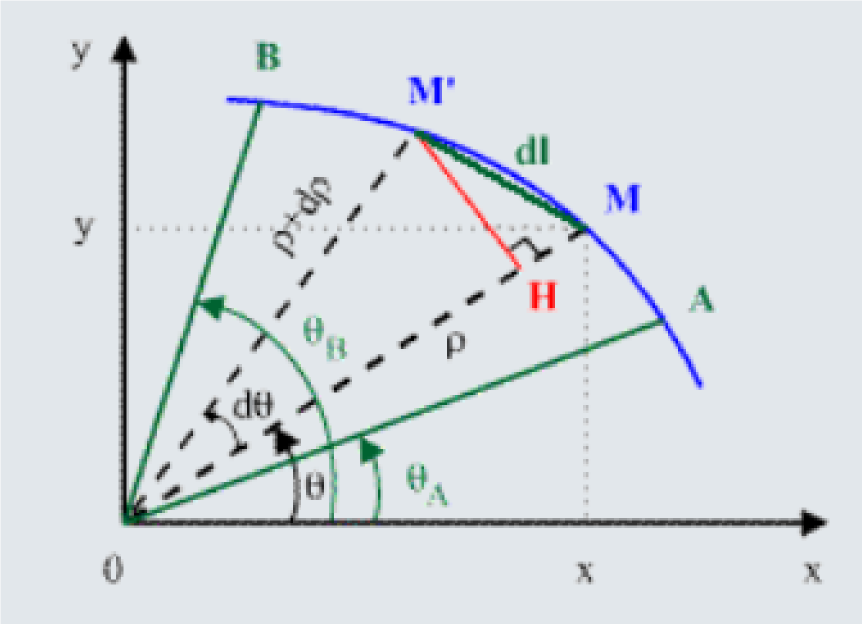


Par définition, en coordonnées cartésiennes: $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$

$$l = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}dx = \int_{x=0}^{x=1} \cosh x dx$$

d'où $= [\sinh(x)]_0^1 = \sinh(1) = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1,18ul$

En coordonnées polaires



Comme précédemment, la longueur dl de l'arc élémentaire est définie par :

$$\widehat{MM'} \approx MM' = \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{HM'}^2}$$

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Après transformation en coordonnées polaires, nous obtenons :

$$x = \rho\cos\theta \quad dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta$$
$$y = \rho\sin\theta \quad dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta$$

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2$$

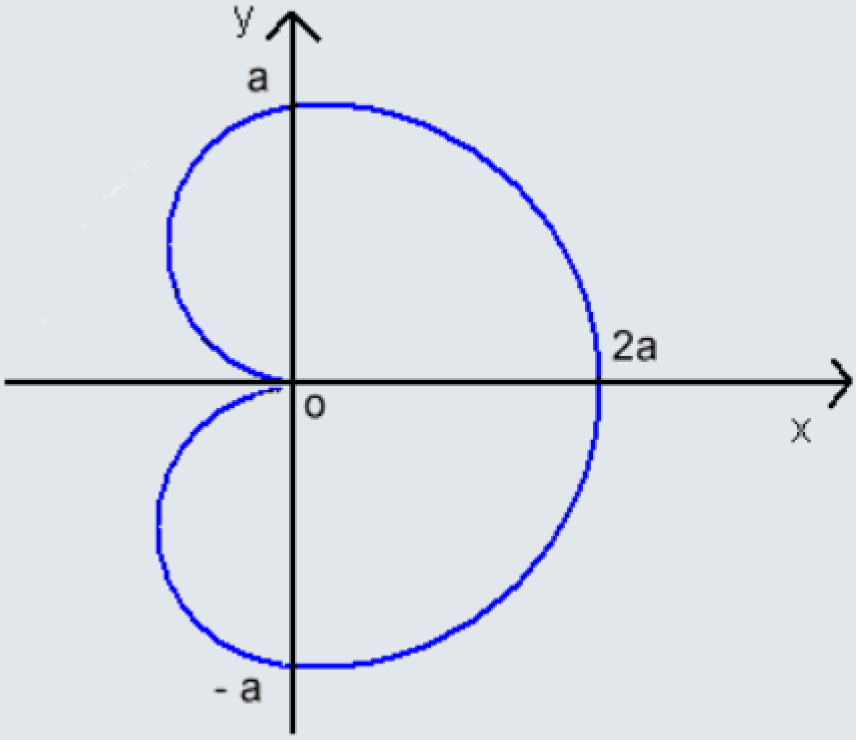
$$dl = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2} d\theta$$

pour $\rho = f(\theta)$

$$\boxed{l_{\widehat{AB}} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta}$$

Exemple : Longueur de la cardioïde

Calcul de la longueur de la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos\theta)$



Pour des raisons de symétries, la longueur totale de la cardioïde sera: $l = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$

avec $\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1 + \cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2$

$= 2a^2(1 + \cos\theta) = 4a^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

d'où $l = 2 \times 2a\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos\dfrac{\theta}{2}\, d\theta = 4a \times 2[\sin\dfrac{\theta}{2}]_0^{\pi}$

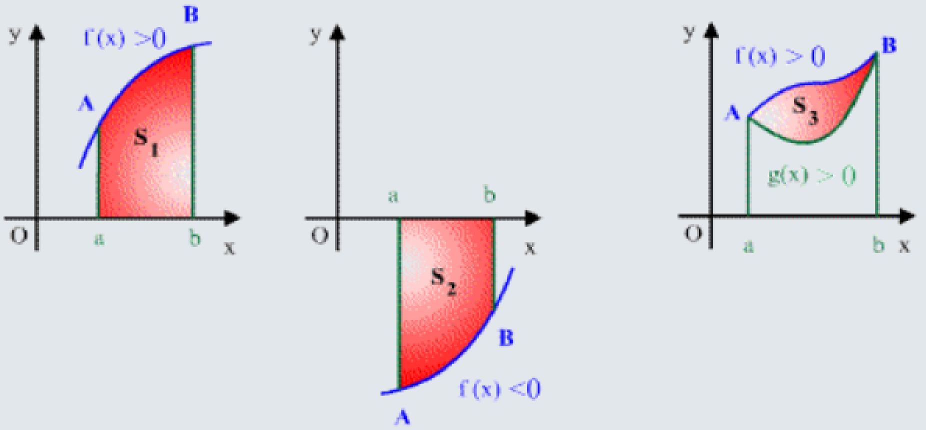
$l = 8a$

Calculs d'aires

La surface comprise entre la courbe représentative de $f(x)$, l'axe des abscisses Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est calculée par :

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

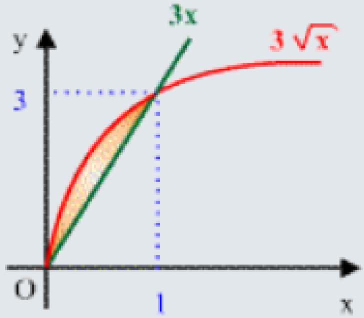
Suivant les valeurs de $f(x)$ sur $[a, b]$, nous calculerons l'aire (grandeur physique positive) par les expressions suivantes :



Aire $S_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ Aire $S_2 = -\int_a^b f(x)\,dx$ Aire $S_3 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Exemple : Aire délimitée par une chaînette et une droite

Déterminer l'aire délimitée par les courbes $y_1^2 = 9x$ **et** $y_2 = 3x$.



Par définition, l'aire colorée est :

$$A = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)]dx$$

$$= \int_0^1 [3\sqrt{x} - 3x]dx = [3\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{3}{2}x^2]_0^1$$

$$= [2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^2]_0^1 = 2 - \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Calculs de volumes

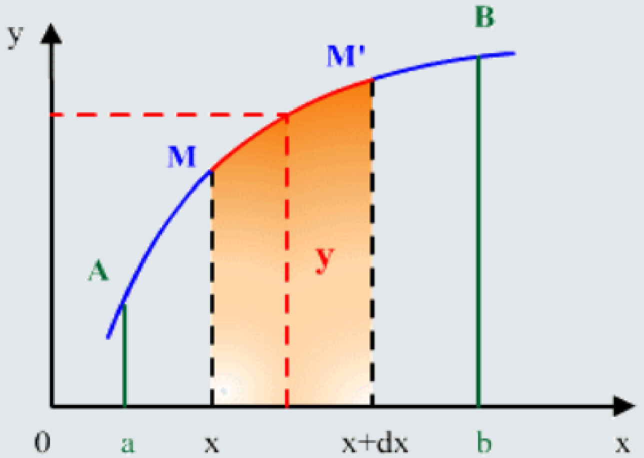
En général le calcul des volumes nécessite l'emploi des intégrales triples, mais des formes à géométrie simple ou de révolution permettent l'utilisation d'une intégrale simple.

Le volume élémentaire dV engendré par l'aire hachurée lors de la rotation autour de l'axe Ox est donc :

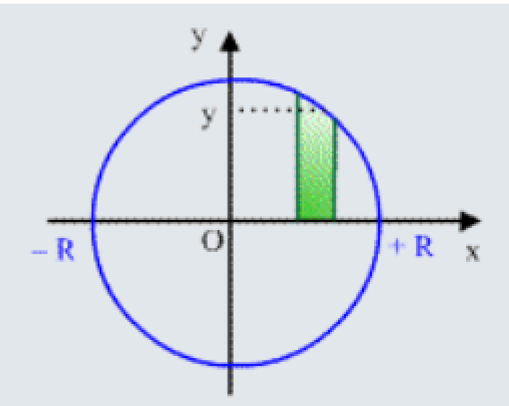
$$dV = \pi y^2 dx$$

d'où le volume engendré par l'aire délimitée par l'arc AB, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ sera :

$$\boxed{V = \int_a^b \pi y^2 dx}$$



Exemple : Volume de la sphère



$$V = \int_{-R}^{+R} \pi y^2 dx = 2 \int_0^{-R} \pi y^2 dx$$

or comme $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, il vient :

$$V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi[R^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^R$$

$$= 2\pi[R^3 - \frac{R^3}{3}]$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

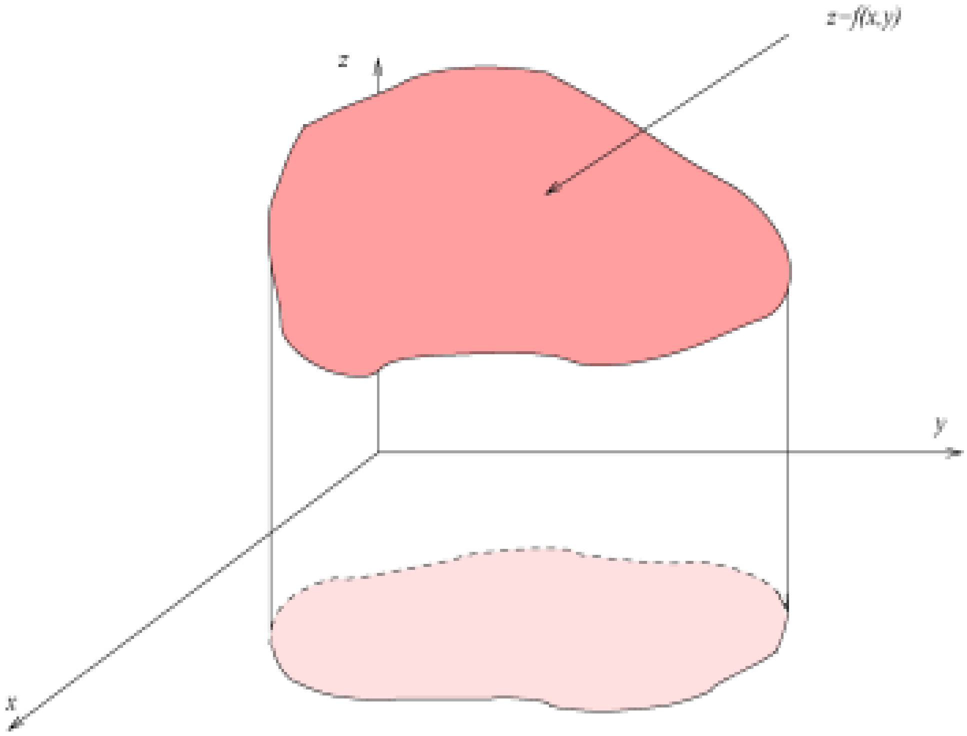
Intégrales doubles

Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire du domaine du plan tOy limité par les droites d'équations $t = a$, $t = b$, $y = 0$ et par la courbe d'équation $y = f(t)$.

Si maintenant f est une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, si D est un domaine du plan xOy. Que représente

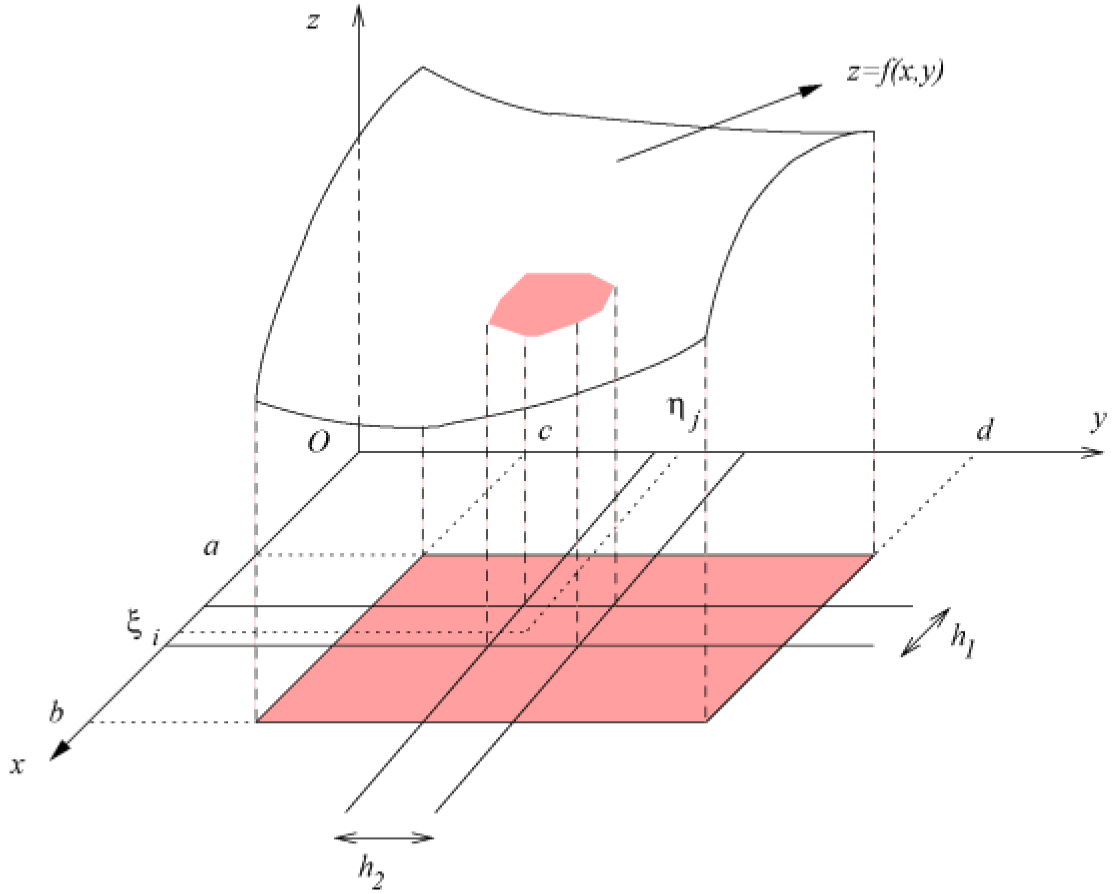
$$I = \iint_D f(x,y)dx\,dy ?$$

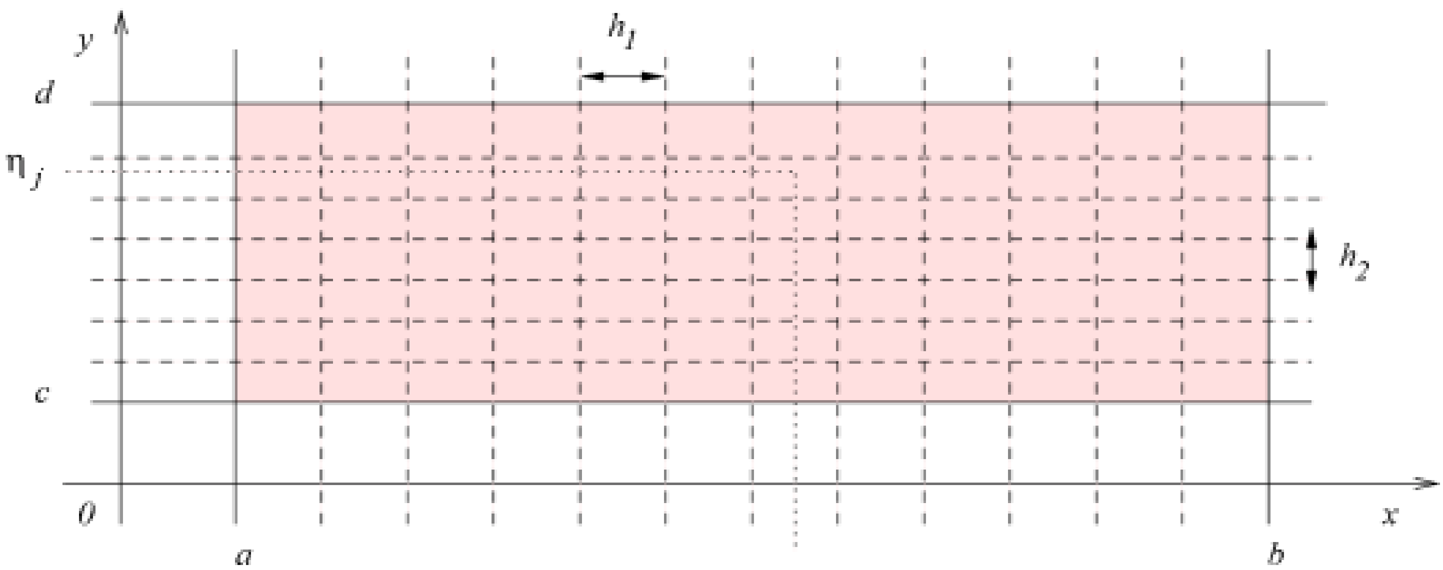
I est la mesure du volume limité par le plan xOy, par le cylindre engendré par une droite parallèle à Oz s'appuyant sur le contour de D et par la surface $z = f(x,y)$, comme le montre la figure



Lorsque, en particulier, $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in D$, cette mesure de volume $\left(\iint_D dx\,dy\right)$ correspond à l'aire de D multiplié par 1, ce qui permet de calculer l'aire d'un domaine quelconque du plan par

$$\text{aire } D = \iint_D dx\,dy.$$





On définit alors

$$I_h = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} h_1 h_2 f(\xi_i, \eta_j), \quad (\xi_i, \eta_j) \in \omega_{ij}.$$

On appelle intégrale double de f sur D et on note

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad I = \lim_{h \to 0} I_h.$$

Soit une plaque mince dont l'épaisseur est négligeable, on peut la représenter par un domaine D du plan xOy .

Supposons que la masse surfacique est égale à $\mu(x,y)$, alors la masse m de la plaque vaut :

$$m = \iint_D \mu(x,y)dx\,dy.$$

Calcul des coordonnées du centre de gravité d'une plaque.

Les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine précédent sont données par

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\mu(x,y)dx\,dy,\ y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\mu(x,y)dx\,dy$$

Domaine rectangulaire (bornes fixes pour x et y)

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

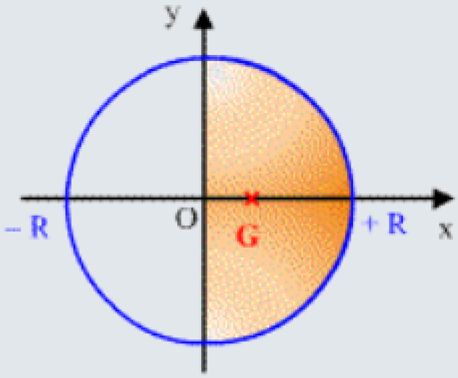
$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Cas particulier :

$$\iint_D f_1(x)f_2(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)dy\right).$$

Exemple : Centre de gravité de l'aire d'un demi-cercle :

Déterminer le centre de gravité de l'aire d'un demi-cercle.



Par raison de symétrie, G se trouve sur l'axe Ox. Calculons donc $x_G = OG$.

Par définition

$$x_G = \frac{\int_0^R x2ydx}{\int_0^R 2ydx} = \frac{\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx}{\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx}$$

car $y = \sqrt{R^2-x^2}$

Posons $x = R\sin\theta \Leftrightarrow dx = R\cos\theta d\theta$ et les bornes deviennent

$$\theta = \arcsin(x/R) \quad \begin{array}{ll} x_1 = 0 & \theta_1 = 0 \\ x_2 = R & \theta_2 = \pi/2 \end{array}$$

$$x_G = \frac{R^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta} = \frac{R^3[-\frac{\cos^3\theta}{3}]_0^{\pi/2}}{\frac{R^2}{2}[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}]_0^{\pi/2}}$$

$$x_G = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2\pi}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Exemple B.1.1 Un exemple simple d'intégrale double

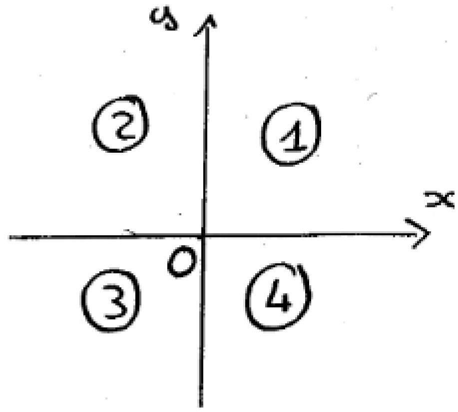
Soient deux réels $a, b > 0$ et soit le domaine :

$$\mathscr{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{et} \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$$

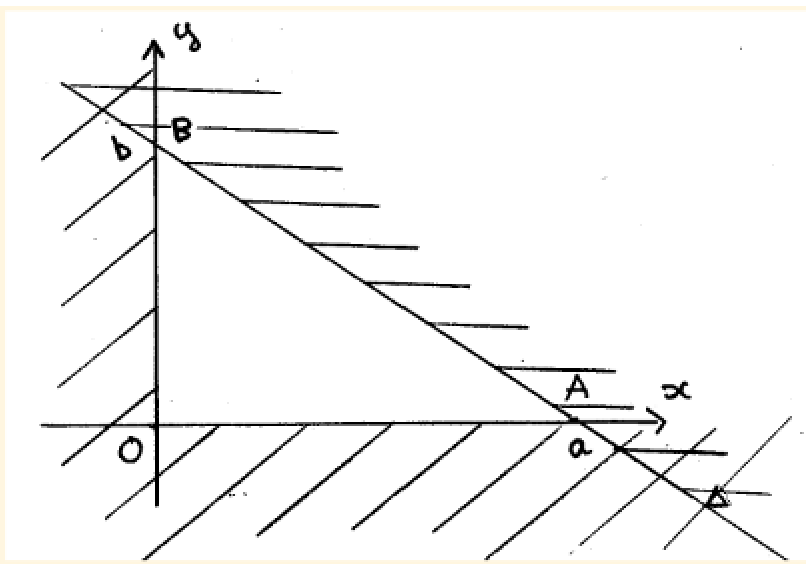
On suppose que la masse surfacique est égale à 1.

1. Représenter $\mathscr{T}$.
2. Calculer l'aire de $\mathscr{T}$ à l'aide d'une intégrale double.
3. Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité G de T à l'aide d'une intégrale double.

1. Les axes Ox, d'équation $y = 0$, et Oy, d'équation $x = 0$, divisent le plan en quatre parties nommées " quadrants " numérotés de 1 à 4 dans le sens trigonométrique comme dans la figure B.1.1.

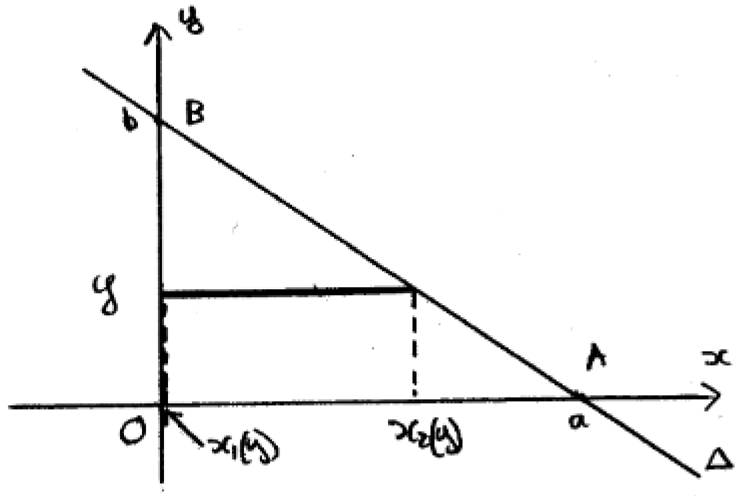


L'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ est celle d'une droite Δ passant par les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$.
La droite Δ divise le plan en deux demi-plans, dans l'un $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1$ et dans l'autre $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} > 1$.
Pour déterminer quel est le coté correspondant à $\mathscr{T}$, on considère un point quelconque du plan ne se trouvant pas sur Δ. Les coordonnées de l'origine vérifient : $\frac{0}{a} + \frac{0}{b} = 0 < 1$, donc O et $\mathscr{T}$ sont dans le même demi-plan



On choisit, par exemple, de calculer l'intégrale double avec x variable interne. On trace à "y fixé" le segment d'intégration qui est alors horizontal, voir la figure B.1.3.

Le segment horizontal balaye donc le domaine $\mathcal{T}$, quand la variable y va de $y=0$ à $y=b$. Pour chaque valeur de y, x varie de $x_1(y)$ à $x_2(y)$.
Le point $(x_1(y), y)$ se trouve sur l'axe Oy, donc $x_1(y)=0$.
Le point $(x_2(y), y)$ se trouve sur la droite Δ, donc $\dfrac{x_2(y)}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, soit $x_2(y)=a(1-\dfrac{y}{b})$



$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{\mathcal{T}} 1\,dx\,dy = \int_0^b \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} 1\,dx\right) dy = \int_0^b x_2(y)-x_1(y)\,dy \\
&= \int_0^b a(1-\frac{y}{b})\,dy = a\left[\frac{-b}{2}\left(1-\frac{y}{b}\right)^2\right]_0^b = \frac{ab}{2}.
\end{aligned}
$$

On retrouve bien l'aire du triangle rectangle OAB.

3. La masse surfacique vaut 1, on a donc $m=A$, on a :

$$
\begin{aligned}
m x_G &= \iint_{\mathcal{T}} x\,dx\,dy = \int_0^b \left(\int_0^{x_2(y)} x\,dx\right) dy = \int_0^b \frac{[x_2(y)]^2}{2}\,dy = \frac{a^2}{2}\int_0^b \left(1-\frac{y}{b}\right)^2 dy \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{-b}{3}\left(1-\frac{y}{b}\right)^3\right]_0^b = \frac{a^2 b}{6}.
\end{aligned}
$$

D'où $x_G = \dfrac{a^2 b}{6}\times\dfrac{2}{ab}=\dfrac{a}{3}$.
x et y jouent des rôles similaires, on obtient donc sans calcul $y_G=\frac{b}{3}$.