Potentiel de gravitation, Energie potentielle de pesanteur
Travail des forces de pesanteur

Definition : Au point M sous l'influence d'un potentiel de pesanteur $U(M)$ un ~~masse~~ corps de masse m a une energie potentielle $E_p = m\,U(M)$

Dans le cadre de la gravitation terrestre : $U(M) = -\frac{G M_T}{r}$ (r distance au centre de masse de la Terre)

donc $E_p(m) = -\frac{m G M_T}{r}$

Lien avec le travail des forces de pesanteur

Deplacement d'un corps de masse m d'un point A à un point B :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{M} = \int_A^B m\vec{g}\, d\vec{M}$$ — $d\vec{M}$ déplacement élémentaire

or $\vec{g}$ derive d'un potentiel U : $\vec{g} = -\vec{\text{grad}}\, U$

$$W_{AB} = \int_A^B -m\,\vec{\text{grad}}\,U \cdot d\vec{M} = \int_A^B -m\, dU$$ → differentielle totale de U

$$= m\,U(A) - m\,U(B) = m\,U(h_A) - m\,U(h_B) = -\Delta E_p.$$

car U ne depend que de r, donc de l'altitude h.

Le travail des forces de pesanteur ne dépend que de l'altitude des états initial et final (A et B). Les forces de gravitation, par le fait de dériver d'un potentiel sont dites conservatives.

Rque : Le travail qui fait monter la charge de h_A à h_B est l'opposé de celui des forces de pesanteur donc $W_{op} = \Delta E_p$. On retrouve que si l'on monte une charge de Δh on produit un travail > 0 [alors que les forces gravitationnelles produisent le même travail en negatif qui s'oppose au mouvement] qui se traduit par l'augmentation de l'energie potentielle de pesanteur

On voit souvent qu'en gravitation on écrit le travail (ou la variation d'énergie potentielle de l'altitude 0 ($r = R_T$) à l'altitude h ($r = R_T + h$) comme étant égal à $-mg_0h$ (signe moins si travail des forces de pesanteur, signe + si opérateur)

→ Cette écriture n'est valable que sous certaines conditions. Car en effet quand on écrit $W = \int_0^h m\vec{g}\,d\vec{h} = \int_0^h -mg\,dh$ il est souvent tentant de sortir g de l'intégrale en le considérant comme constant et égal à sa valeur à la surface de la Terre $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$

$$\rightarrow W = -mg_0\int_0^h dh' = -mg_0h \quad \left(= -m\frac{GM_T}{R_T^2}h \right)$$

→ La vraie formule : $W = -\int_0^h mg(h)\,dh = -\int_0^h m\frac{GM_T}{(R_T+h')^2}dh' = -mGM_T\int_0^h \frac{dh'}{(R_T+h')^2}$

on voit ici la dépendance en h de g

$$= -mGM_T\left[-\frac{1}{R_T+h'}\right]_0^h = -mGM_T\left[\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T}\right]$$

Tout dépend de la précision que l'on s'impose.. Si l'on tolère une erreur de 1% alors on peut utiliser la formule mg_0h jusqu'à une altitude h_{max} qui vérifie $-\frac{mGM_T}{R_T^2}h_{max} = 1{,}01 \times \left(-mGM_T\left(\frac{1}{R_T+h_{max}} - \frac{1}{R_T}\right)\right)$ (formule potentiellement fausse $= 1{,}01 \times$ formule vraie car la formule fausse donne une valeur plus forte par le fait de ne pas considérer la décroissance de g avec l'altitude) $\Rightarrow \frac{h_{max}}{R_T^2} = 1{,}01\left[\frac{R_T - R_T - h_{max}}{R_T(R_T+h_{max})}\right] \Rightarrow R_T + h_{max} = 1{,}01\,R_T$

$\rightarrow h_{max} = 0{,}01\,R_T \simeq 64$ km.

Formule du potentiel de pesanteur terrestre :

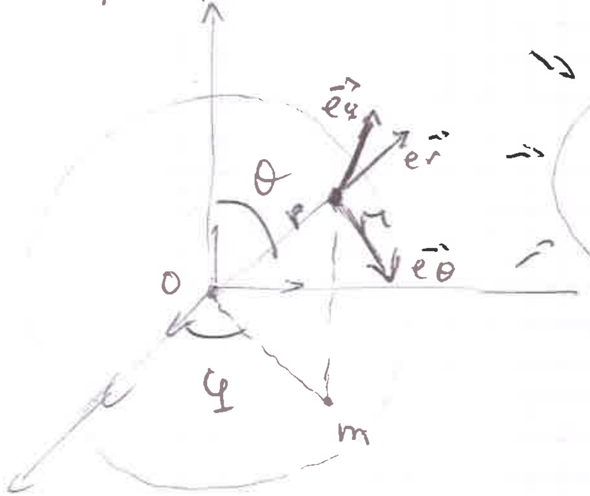
$\vec{g}$ dérive d'un potentiel scalaire U, par définition : $\vec{g} = -\vec{\text{grad}}\, U$ ①

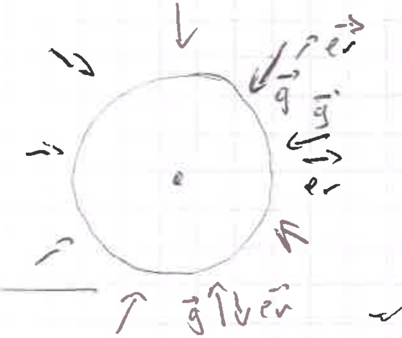
Si système cartésien :

$$\vec{g} \begin{vmatrix} g_x & \vec{i} \\ g_y & \vec{j} \\ g_z & \vec{k} \end{vmatrix} = -\text{grad}\, U \begin{vmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x}\, \vec{i} \\ -\frac{\partial U}{\partial y}\, \vec{i} \\ -\frac{\partial U}{\partial z}\, \vec{k} \end{vmatrix}$$

→ peu approprié à la Terre dans son ensemble

→ Si l'on considère $\vec{g}$ comme purement sphérique (en faisant abstraction de la rotation terrestre, des anomalies gravimétriques etc...) → alors $\vec{g}$ ne dépend que de r dans le système sphérique





partout $\vec{g} = -\|\vec{g}(r)\|\, \vec{e_r}$
norme de $\vec{g}(r)$

$\vec{g} \uparrow\downarrow \vec{e_r}$

$$\vec{g} \begin{vmatrix} -\|\vec{g}\| & (\vec{e_r}) \\ 0 & (\vec{e_\theta}) \\ 0 & (\vec{e_\varphi}) \end{vmatrix} = -\text{grad}\, U = \begin{vmatrix} \text{grad}_r & (\vec{e_r}) \\ \text{grad}_\theta & (\vec{e_\theta}) \\ \text{grad}_\varphi & (\vec{e_\varphi}) \end{vmatrix}$$

gradient ici exprimé dans le système (r, θ, φ) sphérique

D'autre part d'après la définition de la différentielle totale : ②

$dU = \vec{\text{grad}}\, U \cdot d\vec{\Pi}$ → déplacement élémentaire $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ en cartésien

$d\vec{\Pi}$ en sphérique ?

- Composante du déplacement élémentaire selon le vecteur $\vec{e_r}$ (variation de la variable r)

On est à θ et φ constant et on subit dr (comme si on était à un point donné à la surface de la Terre et que l'on s'élevait de dr)

déplacement → $dr\, \vec{e_\theta}$

- Composante suivant $\vec{e_\theta}$: cette fois $r = cte$ (on reste à la surface de la sphère de rayon r) et $\varphi = cte$ → on se déplace suivant un méridien → déplacement $r\, d\theta\, \vec{e_\theta}$

- Composante suivant $\vec{e_\varphi}$: cette fois on se déplace suivant un parallèle

→ déplacement $r \sin\theta\, d\varphi\, \vec{e_\varphi}$

$$\Rightarrow d\vec{\Pi}_{\text{sphérique}} \begin{vmatrix} dr\, \vec{e_r} \\ r\, d\theta\, \vec{e_\theta} \\ r \sin\theta\, d\varphi\, \vec{e_\varphi} \end{vmatrix} \qquad dU = \vec{\text{grad}}\, U \cdot d\vec{\Pi}$$

produit scalaire

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi = \begin{vmatrix} \text{grad}_r \\ \text{grad}_\theta \\ \text{grad}_\varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dr \\ r\, d\theta \\ r \sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \text{grad}_r\, dr + \text{grad}_\theta\, r\, d\theta + \text{grad}_\varphi\, r \sin\theta\, d\varphi$$

par identification, on obtient :

$$grad_r = \frac{\partial u}{\partial r} \;,\; grad_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \;,\; grad_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Revenons à $\vec{g}(r)$ (ne dépend que de r)

$$g(r) = \begin{vmatrix} -\|\vec{g}(r)\| & \vec{e_r} \\ 0 & \vec{e_\theta} \\ 0 & \vec{e_\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial u}{\partial r} \, \vec{e_r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \, \vec{e_\theta} \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \, \vec{e_\varphi} \end{vmatrix}$$

$\|\vec{g}\|$ = norme de $\vec{g}$ (≥ 0)

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = \|\vec{g}\| = \frac{GM_T}{r^2} \quad \text{on intègre en } r$$

$$U(r) = -\frac{GM_T}{r} + K \quad \leftarrow \text{constante}$$

U(r) représente le potentiel gravitationnel exercé par la masse Terrestre (M_T) à la distance r de son centre. On peut comprendre que cette influence devienne nulle pour r infini (plus d'effets aux confins de l'univers)

donc $\quad U(r=\infty) = K = 0 \Rightarrow K = 0$

$$U(r) = \frac{-GM_T}{r}$$