Лаб №1

Формулировка и постановка задачи:

$\exists\ (x_i, y_i),\ i = 0..n;\ x^h = \{x_i\}_{i=0}^{n};\ y^h = \{y_i\}_{i=0}^{n}$ – сетки

1. $x_i < x_{i+1}$ – упорядоченная сетка
2. $x_i = x_0 + ih$ – равномерная сетка

$\exists$ табличная функция задана парой элементов (x^h, y^h).

Требуется построить $f(x)$, которая удовлетворяет критерию близости.

$f(x) \approx (x^h, y^h)$ и $f(x) \in C^{(k)}([a,b])$, где $[a,b]$ отрезок содержащий все x_i.

Решить поставленную задачу, учитывая, что $f(x)$ – $L(x)$ - полином Лагранжа.

Исследовать зависимость числа узлов от ошибки. Выбрать 2 отрезка и выбрать оптимальное количество узлов.

Алгоритм:

1) получить на вход функцию и отрезки, количество узлов.

2) $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг, получить сетку $x_i = a + ih$

3) получить полином Лагранжа: $L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right)$

Анализ задачи:

Дана функция: $e^{(-x^2)}$ – непрерывна.

=> по Теореме Вейерштрасса её можно приблизить полиномом с вещ коэффициентами.

Тестовый пример:

$x^h = \{0, 2, 3, 5\}$, $y^h = \{1, 3, 2, 5\}$.

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}$$

$$L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$

Модульная структура:

1) interpol(a, b, fun, n) – отрезок [a, b], fun – функция, n – число элементарных отрезков
на выход: ошибка как max(abs(L(x) – f(x))); Общая функция программы.
2) grid1(a, b, n) – построение сетки, [a, b] – отрезок, n – число узлов.
3) polyL(fun, grid, n) – fun – функция, grid – сетка, n – число элементарных отрезков
– строит полином Лагранжа, возвращает его.

на выход: ошибка как max(abs(L(x) - f(x))); всей функция программы.

2) grid1 (a, b, n) - построение сетки, [a, b] - отрезок, n - число узлов.

3) polyL (fun, grid, n) - fun - функция, grid - сетка, n - число элементарных отрезков - строит полином Лагранжа, возвращает его.

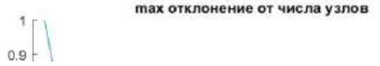
4) graph (fun, a, b, poly, grid) - fun - функция, [a, b] - отрезок, poly - пол. Лагранжа. grid - сетка функции. Строит графики функции + узлы + полином Лагранжа.

Численный анализ решения:

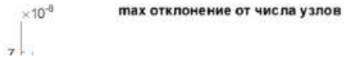
для функции $e^{(-x^2)}$ выбраны отрезки [-3, 3] ; [4, 5]

построены зависимости ошибки интерполяции от числа узлов.

Для [-3, 3],



для [4, 5]

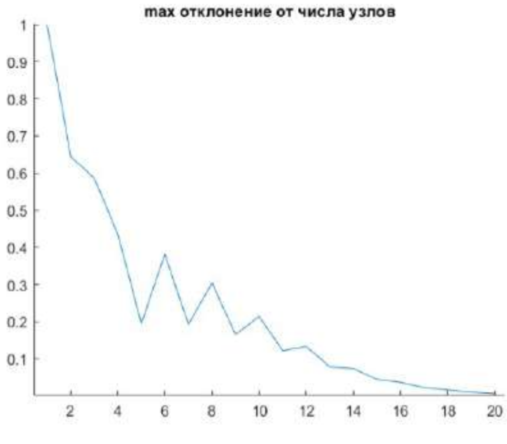


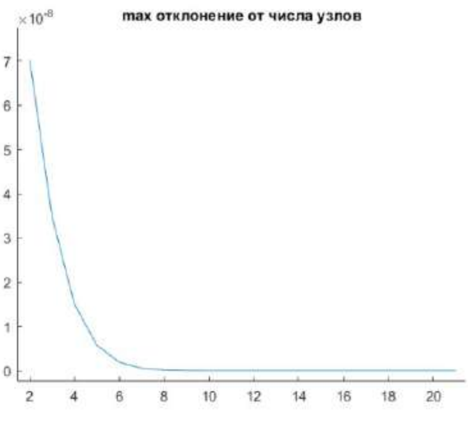
Численный анализ решения:

для функции $e^{(-x^2)}$ выбраны отрезки $[-3, 3]$; $[4, 5]$

построены зависимости ошибки интерполяции от числа узлов.

Для $[-3, 3]$, для $[4, 5]$





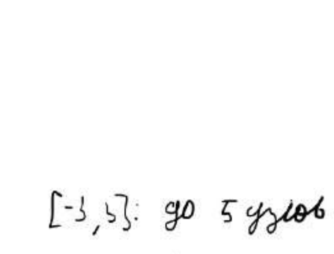
[-3,3]: до 5 узлов происходит уменьшение отклонения на 80%, после чего с шагом в 2 узла продолжается тенденция на снижения отклонения. (симетричная функция)

=> чем больше узлов тем „лучше" интерполяция.

[4,5]: аналогичная зависимость и для отрезка [4,5], хоть и первые отклонение уже на уровне 10^{-8}, т.к вблизи особенности выбора отрезка функции сами значения функции не более порядка 10^{-7}

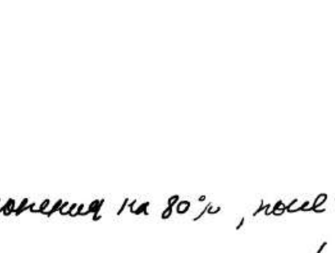
Приведем примеры ключевых моментов: Для [-3, 3]

2 узла



4 узла

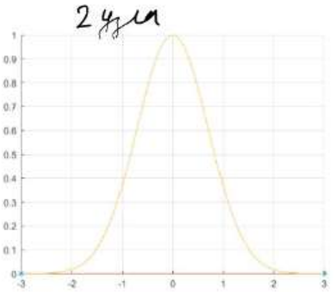
6 узлов



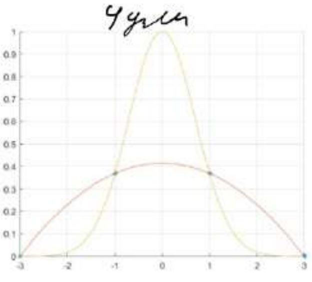
20 узлов

Приведем примеры ключевых моментов: Для [-3, 3]

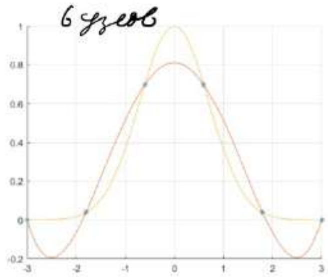
2 узла



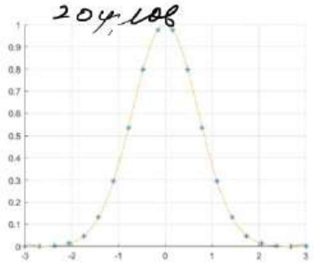
4 узла



6 узлов

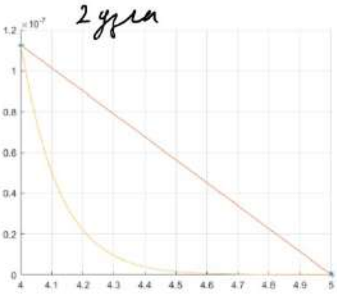


20 узлов

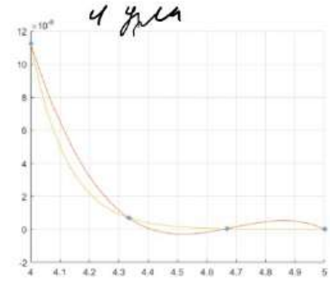


Для [4, 5]

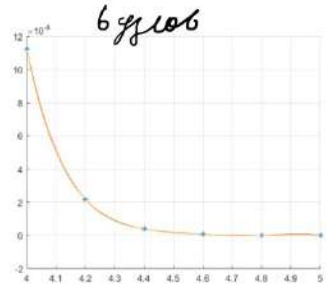
2 узла



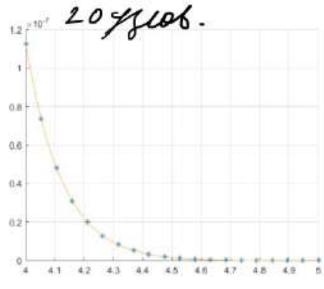
4 узла



6 узлов



20 узлов.



Краткие выводы:

Была поставлена задача - построить интерполяционный полином в форме Лагранжа, исследовать зависимость отклонения от числа узлов. Результаты: для более менее корректного полинома Лагранжа необходимо не менее 5ти узлов, т.к происходит 30% уменьшение ошибки.

Для симметричных функций на отрезке необходимо большее количество узлов, чем для несимметричных. Из опыта: на сим. функц. отрезке [-3, 3] потребовалось 20 узлов для "хорошего" совпадения с функцией, а для не сим. функц. отр [4, 5] достаточно 6 узлов.

Следовательно интерполяцию полиномом Лагранжа лучше применять к несимметричным отрезкам.