|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **11. Постановка задачи о решении СЛАУ.**  0    – погрешн – невязка    Способы реш СЛАУ: 1) прямые методы (конечные алгоритмы выч корней сист) 2) итерац методы (корни сист с заданной путем сх итерационных процессов).  *т.е.*  Все нормы эквив с точностью до множителя  (нер-во Коши-Буняковского)  Мультипликативные нормы  Согласованные нормы (наим из соглас норм – подчинённая )  – невязкая норма | **13-16 . Метод Гаусса и его модификации для реш СЛАУ.**  Схема единств деления  Прямой ход: Выберем строчку в матрице (А|b) и элемент в ней. Единственное усл . Переставляя строчки и изменяя места элементов, можно считать, нашли а11. Разделим элементы строки на а11. Занулим теперь 1ый столбец, начиная со 2ой строки, т.е. исключая x1 из ост ур сист кроме первого.  **Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу.**  Пусть сделано к шагов и тогда можно взять в роли ведущего эл-та какой либо другой из к-го столбца i-ой строки где (если не нулевой не найден то сист не иметт единственного реш т.к. )  **Схема Жордана без обратного хода.**  Происходит выбор ведущего элемента по стороке – избирается максимальный или больший какого то числа (для того чтобы в процессе не возникало больших чисел) Далее все элементы данной строки делятся на и с помощью полученной единицы зануляются все вышестоящие и нижестоящие элементы k-того столбца.  Т.е обнуляем и над и под ведущим элементом  где D – матрица перестановок  Поиск обратной матрицы: | **14-15. Реш СЛАУ методами, основ на триангуляции.**  (1) 0 т.е ведущие миноры  1. Сист (1) т.е. - первый метод реш  2. LU метод , где или  Тогда (1)  На практике используется LU разложение, потому что по масштабам вычисления он такой же, как и метод Гаусса.  3. Для Этот метод более экономичный, т.к. учитывает симметричность матрицы.  4. Схема Холецкого (или метод квадратного корня)  Если  Так как матрица симметричная, то    1-ый шаг алгоритма:  **(A.1)**  **(A.2)**  **(A.3)**  Таким образом, нашли 1ые строки и 1ые столбцы мат .  2-ой шаг алгоритма:  неизвестно Для  **(A.5)**  для  выполнили (k-1) шаг, нашли (k-1) 1ых стр и стлб матриц  Рассмотрим теперь k-ый шаг |
| **17.Методы реш СЛАУ, основ-ые на QR-разлож матр**  (1) , где  сист свелась к правой треуг матр. Такие методы часто называют м. ортогонализации.  (1). Если , то все столбцы – линейно независимы. , где - ее столбцы. Столбцы образуют базис в n-мерном пр-ве, т.к. они линейно независимы и их кол-во совпадает с размерностью пр-ва.  Построим ОНБ на основе по алг Грамма-Шмидта.  Ортогональность связана с евк пр-вом, поэтому исп 2ые нормы.  Построим первый вектор ОНБ  , где . , поэтому т.е можем построить ОНБ сист т.е  , где т.е. получив мы сразу можем получить реш сист. НО: на практике метод плохой (только до 10го опрядка) | **19. Метод ортогонализ реш СЛАУ use матр отражения.**  **(1)** , где -стобцы  Р – ортог матр    иначе не разложения. Далее    Применяя метод математической индукции:  **Применение матриц отражения.**  (A | b) – расширенная матрица      ………………………….    (дополнительно: т.е. на каждом шаге можно работать с матр меньшей размерности)  Алгоритм Хаусхолдера | **21. Метод ортогонализ реш СЛАУ use матр вращения**  **(1)** , где -стобцы  Р – ортог матр    иначе не разложения. Далее    Применяя метод математической индукции:  **Применение матриц вращения:**      или как в конспекте смалбо:      ………………………….    Алгоритм Гивенса |
| **23. Понятие о числе обусловленности.**  **(1)** - решение  **(2)** - решение  det(A) = 0,0001. Если умножить последнее ур на , то det(A) = 1; решение же не изменится. Дана система уравнений:  (точное решение)  Пусть правая часть получила приращ  Реакцией реш на возмущ:  , т.к.      - отн погр реш, - отн погр b.  - число обусловленности  Матр получ возмущ: - реш возм сист    - точность приближ решения.  **Свойства** :  2)  3) min из - вычисл по 2ой норме (для )        - матрица Гильберта;   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | N | 2 | 3 | 4 | 5 | | cond |  |  |  |  | | **25. Метод простых итераций в реш СЛАУ**  (1) (2) (3)  - произв Если , то  По пр сжим отобр, B - оператором сжатия, если из его области определения  Теор о сх: Если ||C||<1, то (3) сх при и справедлива оценка: (4)  Замечание: Обычно эта оценка завышена и не используется.  ) Оценим норму:  Стандартное условие  (1) (2)    (3)    **I**    **II ,**  Часто (если есть диагональное преобладание). | **44. Приведение матрицы к форме Хессенберга матрицами вращения**  //Вращение в координатах i, j на угол //  //Обозначим //  - отличается от *А* только i, j-ыми столбцами  (\*) . |
| ,  , а вторая  обнуляется за счет эл-ов в матр  (3)  Для ,  здесь , а вторая обнуляется за счет эл-ов матрицы .  **(4****)** Для :  ,  здесь , а вторая обнуляется за счет эл-тов матрицы .  **(5****)** Если все деления возможны, то все коэффициенты матриц вычисляются по формулам (3),(4),(5).  Если , то легко получить, что , то есть . разложения достаточно пользоваться формулами (3) и (4)  4. для симм: по кр Сильвестра все миноры положит поэтому можем брать корень  1-ый шаг алгоритма **(C.1)**  **(C.2)**  выполнили (k-1) шаг  Рассмотрим теперь k-ый шаг    **(8)** Для  ,где | **16. Теор о LU –разложении. Практ использ LU-разлож**  **Теор о LU –разлож:** (1) 0 т.е  База: матрицы . Тогда и  Индукционный переход: Пусть для .  По усл , т.к. унитреу матр = 1.  , где и столбцы из пр-ва . Пусть  , , -неизвестные Тогда  (1) (1): 1ое в силу индукц предполож;  2ое  3е также явл СЛАУ и  4ое )  Если ничего не знаем про det можем попровать разлож и если  то минор=0 пробуем перстановки. Практическое:  𝑨=𝑳𝑼 Тогда для можно записать **(\*)**  1-ый шаг **(B.1)**  **(B.2)**  Пусть выполнили (k-1)шаг, т.е. нашли (k-1) 1ых стр и стлб .  k-ый шаг Для , где , а 0 за счет нулевых элементов матрицы .    Для , где 0 за счет нулевых эл-тов . | **12. Решение простейших СЛАУ.**  **1)** диагональная матрицу, т.е. , где .  т.к  **2)** верхнетреугольная матрица. Тогда  , , где 1kn-1  **3)** ортогональная матрицу, т.е. . Тогда .  **4)** трехдиагональная матрица, А = .  Тогда любое уравнение соответствующей системы имеет вид  , , ,  Решение системы существует и единственно, если:  Будем искать решение системы в виде  , 2kn+1 Тогда:  = +  Сравнивая коэффициенты в уравнениях (4) и (5) получаем:  и , .  Рассмотрим первое уравнение нашей системы:  .  +  Тогда α2 = и β2 = .  Рассмотрим n-ное уравнение  последовательно находя коэффициенты и , и применяя формулу (4), можно вычислить все элементы вектора x - метода левой прогонки |
| **22. Метод ортогонализации общего вида.**  (1)  - вектор решений  Задача: найти у ортогон всем а в пр-ве т.е. можем построить          Условие означает, что т.е. ; иначе все ,  - это решение.  ***Схема ортогонализации с симметричной матрицей***  - положит опред  - скалярное произв в энергетическом пр-ве  - векторы ортогонального базиса  (при этом вероятно, что )  - решение уравнения.        Т.е. строим ортонормир базис, вычисляем коэфиц альфа и вычисляем | **20. Матрицы вращения.**    где  **Св-ва матр**: При умнож матр на вектор меняюся два эл-та вект.  следствие: = [=] меняются 2 строки =[||] меняются 2 столбца  При этом сумма квадратов элементов остается постоянной.  +не меняет евклид норму  Если , то существует посл-ть матриц вращ, кот преобра его в вектор естеств. базиса:  **Док-во**:Выберем так, чтобы      Порядок умножения не имеет значения. | **18. Матрицы отражения.**  -зеркального отражения вектора  нормаль к этой плоскости.  , - матрица отражения.  , где:  Св-ва матриц отражения: 1) т.к   1. 2) т.к. 3) Если , то   В этом случае за нормаль к пл-ти, относ кот. - отражение (и наоборот) берется , здесь - нулевой вектор.  т.е  Следствие: мб преобразован в , где  -первый вектор естеств базиса.  Пусть |
| **44.Продолжение**  - отличается от B только i, j стpочками.  (\*\*) .      Всегда можно представить: | **26-27. Теор о сх МПИ реш СЛАУ**  (1) (2)  Лемма Если все с. ч. , то .  Док-во: ? Умн на  (3)  (т.к. все с.ч. ) значит ]  Теорема  (2) сх необх и дост чтобы все с. ч. .  Доказательство:  Дост:  (4)  Так как произвольный вектор, то выберем его так, чтобы . Тогда в правой части останется p- й столбец и будет .  Необх:  ] все    **(оценка погрешности в 25)** | **24. Хар-ка итерац методов СЛАУ**  (1)    - решение исходной системы (1).  Вопросы:   1. определение последовательности и ее сходимости 2. точность (терминирование процесса)   Классификационные признаки:   1. один предыдущий член – одношаговый метод, более – многошаговый 2. если Ψ линейная функция относительно -ов, то метод называется линейным, в противном случае – не линейным   Мы будем рассматривать линейные одношаговые методы.  (\*) - канонический вид (КВ.); - канонические параметры, могут зависеть от k.  Линейные одношаговые методы делятся на:   1. , - стационарные методы, если это не так, то нестационарные 2. ( -диагональная) – метод называется явным.     называется предобуславливателем, с его помощью можно уменьшить количество итераций. Обычно |
| **29.Метод Зейделя**  Модификация: Вместо подставляем найденное значение  - вычислительная формула    Теор сх-ти:  Метод Зейделя сходится- теорема о сходимости метода прямой итерации  Док-во:  Раскроем этот определитель на примере:  - метод Зейделя сходится | **31. Док-во теоремы о сх стац. мет реш СЛАУ с симм.**  Есл и то сх в   Док-во:  (1)- вектор ошибки (2) (3)  (4) ;  (5) Последовательность является невозрастающей и ограниченной снизу нулем и, следовательно, имеет предел. Пусть    (7) Поскольку неравенство (7) можно использовать в качестве оценки погрешности | **33. Связь решения СЛАУ и минимизации квадратичной формы**  -квадратичная форма  Если она полож. Опред. То  Teор.  Док-во:  (Д):  ; min при =0 *Условие минимума* |
| **35. Сходимость градиентного метода**  Пусть  . Пусть .  Так как наименьшее значение функции не превосходит произвольного, то , или . Введем вектора ошибок и . . Выразим через .  .  **36. Оценка верхней и нижней границы с ч матрицы.**  *1) k =1*  *=>*  2) k = n | **37. Метод произвольного спуска. Связь метода сопряжённых направлений и метода ортогонализации**  Основная идея градиентного метода заключается в том, чтобы как можно быстрее, отправляясь из , дойти до места минимума функции . Для этого разумно двигаться из точки в направлении, противоположном градиенту в точке .  Рассмотрим движение в произвольном направлении, т.е. .  . Обозначим .  Пусть . Условиями минимума этой функции будут и (тривиально).  (1). | **38-59. Постановка задачи решения алгебраической проблемы собственных значений** 1)Простая задача; Найти и такие, что . 2)Обобщенная проблема;, где - матрицы. .. По основной теореме высшей алгебры матрица имеет собственных чисел. Решить полностью АПСЗ, значит найти все собственные числа вектора. Решить АПСЗ частично, значит найти только некоторые собственные числа и вектора. Методы решения АПСЗ: 1)Методы, основанные на построении характеристического уравнения.2)Методы, основанные на сведении матриц к простейшим видам.Преобразование сохраняет собственные числа. . Обозначив за , получаем .Методы решения АПСЗ:1)прямые;2)итерационные.Простейшие задачи: 1)   Собственными числами являются диагональные элементы, а собственными векторами - вектора естественного базиса. 2) - верхняя (нижняя) треугольная матрица  Собственными числами являются диагональные элементы. Для нахождения собственных векторов используется:1)метод обратных итерации;2)метод Гаусса. |
| **41-48. Методы, исп построение хар-го полинома, раскрытие определителя для матрицы Хессенберга**  1) метод гооврим что границы участка это норма и минус норма, характ многочлен от этих чисел как ур  будем раскрывать раскрываем определитель:  здесь - соответствующий минор, а ,  ,т.е.    Если матр трёхдиаг то останутся только первые два | **43. Итерационный метод Якоби (метод вращений) решения АПСЗ для симметричной матрицы**    . Мы рассматриваем вещ. сим. матрицу., , так как - ортогональная матрица где , а .Предположим, что мы построили последовательность . Тогда .Будем выбирать так, чтобы на каждом шаге уменьшалась., i,j выберем таким образом, чтобы , а -так что . Очевидно, что .  ;(1)  Причём условием выхода будет | **45-47. Приведение матрицы к форме Хессенберга матрицами отражения**  Выберем так, чтобы :  ;; .  С помощью добиваемся ; с помощью - ; …; с помощью - .  Обнулённые элементы не меняются при последовательном умножении на матрицы вращения.  Идейно алгоритм совпадает с алгоритмом приведения матрицы к форме Хессенберга матрицами отражения, а реализуется умножением на матрицы вращения.  При этом элементы первого столбца так и остаются нулевыми: Продолжая аналогичные действия, получаем матрицу в форме Хессенберга. |
| **34. Алгоритм градиентного метода решения СЛАУ**  *Будем строить итер. Послед. след образом.*  *С каждым шагом F уменьшается, но F ограничена снизу, следовательно, решение рано или поздно будет найдено.*  *;- p-ая компонента*  *(3)- градиент функции F*  *- градиент функции F в точке*  *Тогда вычислительная формула метода преобразуется так:*  *(4)*  *Итерационный параметр выберем из следующего условия:*  *(5)* | **32. Формулировка и примеры применения теоремы о сходимости стационарных итерационных методов**  **1. метод релаксаций**       2. **метод итераций**         -неравенство Коши – Буняковского  Замечание: Если найдены границы корней то можно взять На практике сходимость медленнее, чем у Зейделя/релаксации | **Теорема (Достаточное условие сходимости метода Зейделя):**  (метод Зейделя сходится)  Доказательство:          Покажем, что |
| **59. Накопление суммы n-чисел в арифметике с плавающей точкой**  Каждое слагаемое вносит свою, отличную от других, погрешность. Наибольшая погрешность у и , поэтому начинать складывать надо всегда с маленьких чисел. | **37. Продолжение**  Метод Сопряженных направлений    *Для метода ортогонализации: Построить ортонормированный базис, разложить по нему вектор решения, подставить его в ур-ние, умножить на элементы ОНБ -> найдутся все коэффициенты  Используя эту идею:*  *Умножим на*  (Конечное число шагов) Получается, что мы выполняем процедуру метода произвольного спуска по векторам ортогонального базиса. | **35.Продолжение**  Так как имеет базис из собственных векторов. Выберем из него ортонормированный базис . тогда. .  Тогда  .  . Выберем число так, чтобы .Тогда . Докажем, что .  . Следовательно, в качестве можно взять , которое меньше 1.  Тогда .  Таким образом . |
| **47. Алгоритм с нормировкой для степенного метода**  Задача степенного метода состоит в решении частичной алгебраической проблемы собственных значений (АПСЗ), а точнее в нахождении максимального по модулю собственного числа и соответствующего ему собственного вектора для матрицы ..  Считаем, что собственные числа матрицы упорядочены по модулю  .Матрица - нормальная.  Основной алгоритм степенного метода:  - произвольный вектор. Итерационная последовательность строиться так  Алгоритм с нормировкой:  Берем произвольный вектор .  ;  - вектор, нормированный по бесконечной норме, и его максимальная компонента равна 1.  Итерационная последовательность строить по формулам  **(1****)**  где . Здесь .  В пределе при имеем  **(2)** | **43.Продолжение**  Алгоритм с выбором оптимального элемента: . (2) такой, что  Элемент называется оптимальным элементом. (3)  , то есть  Рассмотренный алгоритм решает полную проблему собственных значений: собственные числа в результате будут находиться на диагонали получившейся матрицы, а собственные вектора будут столбцами матрицы . | **48. Использование сдвигов в степенном методе.**  Преобразуем матрицу так ; называют сдвигом, так как при таком преобразовании матрицы происходит сдвиг спектра матрицы на . Действительно, пусть - собственное число матрицы , а соответствующий собственный вектор. Тогда  ,  то есть , . Таким образом, собственные вектора матрицы остаются такими же, как и у матрицы .  Сдвиг для нахождения минимального собственного числа:    Возьмем .Тогда у матрицы собственными числами будут . Из них максимальным по модулю будет . И, чтобы его найти, можно применить степенной метод к матрице .  Поэтому в качестве можно просто брать любую согласованную норму матрицы.  Сдвиги еще можно использовать для улучшения сходимости:  Величина определяет скорость сходимости. Чем она меньше, тем сходится быстрее. - является оптимальным сдвигом.  В этом случае у матрицы получается два одинаковых по модулю вторых собственных числа, а первое, то есть максимальное по модулю, .Пусть теперь - максимальное по модулю собственное число матрицы , а - второе по модулю. Покажем, что - оптимальный сдвиг. Пусть , и соответственно , тогда с увеличением отношение растет.  Если теперь , и соответственно , то с увеличением отношение опять растет. |
| **46. Основной алгоритм для степенного метода нахождения макс по мод с. ч. и соотв с. в.**  (1) , ; - произвольный вектор из .  (2) //используется на практике  (3)  //используется для анализа.  Оказывается на основе можно вычислить максимальное по модулю собственное число и собственный вектор. *А* – нормальная; - базис из собственных векторов.  (4) , ; - имеет собственные числа и собственные вектора ,- любой;// Обозначим // - нормированный собственный вектор// | 49-53 Модификации метода итераций решения АПСЗ для определения 2-ого по величине с. ч. и с. в. Кратные с. ч.  Пусть макс по модулю с ч и соответствующий с в уже найдены. Для определенности будем считать, что собственные вектора нормированы по второй норме.  Возьмем произвольный вектор , разложим его по ортонормированному базису из собственных векторов  А за вектор выберем, где выбрана из условия ортогональности векторов и  Таким образом, используя равенство (1), выражение для можно переписать  Можно применять степенной метод  В теории все хорошо, а на практике: - вычисляется неточно, и, вообще, все вычисления производятся с погрешностью. Поэтому этот коэффициент надо уменьшать - производить ортогонализацию.  Если ортогонализация на каждом шаге, то итерационная последовательность строится по формуламЕсли у матрицы есть кратные собственные числа и , то этот алгоритм помогает найти второй собственный вектор соответствующий собственному числу . | **51 Алгоритмы исчерпывания, не использующие преобразования подобия решения АПСЗ**  Пусть матрица A действительна и обладает различными собственными значениями , которым соответствуют различные собственные векторы , причем  Пусть известны λ1 и w1. **п.1 A- симметричная матрица.** Пусть B = A – λ1w1w1T  , (w1,w1) = w1T w1, ||w1|| = 1  **п.2 A – несимметричная матрица.** Рассмотрим вектор x:  например, x = , ,  Пусть (4) B = A – w1xT  Проверим, что все первый собственный вектор матрицы A является собственным вектором матрицы B, а остальные собственные вектора B- линейная комбинация собственных векторов A, причем соответствующие собственные значения сохраняются, за исключением λ1, вместо которого появляется нулевое значение.  , т.е., действительно λ1 = 0, а вектор w1 остался прежним.  Рассмотрим (5) , j  Возьмем в качеств |
| **52.Метод обратных итераций решения АПСЗ. Обоснование метода со сдвигом и нормировкой.**  Возьмем произвольный вектор .  (2)  А итерационная последовательность (2) – есть последовательность для степенного метода, то есть нахождение максимального по модулю собственного числа матрицы . Но , поэтому максимальное по модулю собственное число матрицы - есть единица на минимальное по модулю собственное число матрицы - .Метод обратных итераций позволяет найти минимальное по модулю собственное число и соответствующий собственный вектор. На практике используется алгоритм с нормировкой  - произвольный вектор. А - тот же вектор, но нормированный по бесконечной норме.где коэффициенты выбираются так же, как и в степенном алгоритме с нормировкой. В пределе при имеем ;  Метод обратных итераций со сдвигом применяется для нахождения собственного вектора, если собственное число уже | **50.** **Алгоритмы исчерпывания, основанные на преобразовании подобия для решения АПСЗ**  Пусть матрица A действительна и обладает различными собственными значениями , которым соответствуют различные собственные векторы , причем  Т.к. w1 0. то можно построить матрицу G такую, что , где α- некоторая константа, e1 - первый вектор естественного базиса().  Запишем (1) относительно w1  и λ1, умножив слева на G.  , пусть B = GAG-1  Bαe1 = λ1αe1 ;Be1 = λ1e1  Запишем равенство (2) в матричном виде: \* = ,  , B = .  Тогда характеристический многочлен матрицы B  Таким образом:1)Собственные числа матрицы B будут совпадать с собственными числами матрицы A;2)Все собственные числа матрицы C – собственные числа B. | **54. Обоснование LR-алгоритма решения АПСЗ в простейшем случае.**  ;;**Лемма**  То и  Рассмотрим наше разложение  (1) (2)  (3) (4)  т.е. , где - верхнетреугольная матрица, а -нижнетреугольная матрица.Тем самым мы смогли найти LU-разложение .Пусть Y состоит из собственных векторов, , -собственные числа.  Т.к. Y и X неособенные, будем предполагать, что Тогда  (5)  Рассмотрим |
| **19. Метод релаксаций**  -параметр релаксации  -метод Зейделя  -метод релаксаций   1. -каноническая форма метода релаксаций   Если то  - вектор невязки  Выберем j так чтобы невязка была максимальной, а затем выберем чтобы невязка обнулилась. | **56** **Представление чисел с плавающей точкой. Множество компьютерных чисел и их свойства.**  Наиболее распространённая запись числа в ЭВМ - это запись числа с плавающей точкой.  - запись действительного числа в системе с основанием β. В привычной для человека системе счисления β=10 и цифры, которыми мы оперируем, это 0,1,2,…,9. Для машины β=2 (двоичная система) и цифры соответственно 0 и1. μ – мантисса числа, которая не превосходит 1, p – порядок числа.  В машине существует несколько типов действительных чисел, в зависимости от точности представления. Для типа *single* в памяти отводится 4 байта, то есть 32 бита. Число в этих битах записывается так: первые 7 бит – порядок числа, 8 бит – знак порядка, 23 (9-31) бита – мантисса, 32 бит – знак мантиссы. Но так как для двоичной системы первая цифра мантиссы – 1, её не хранят, а просто учитывают при всех машинных операциях с числами.  Множество компьютерных чисел float представляет собой дискретное множество, расположенное неравномерно на оси, но имеющее участки равномерности. Числа, которые не попадают в это множество могут быть записаны либо с усечением, либо с округлением.  Нуль представляется не одним числом, а некоторым диапазоном, который больше, чем минимальное расстояние между числами во множестве числе Float. Так же на этом множестве можно выполнять арифметические операции. | **58. Накопление произведения n-чисел в арифметике с плавающей точкой**  **4.1 Накопление произведений n чисел**  - компьютерная операция.      (1).      (2)  Формула (2) неудобна, хотелось бы иметь .  **Лемма1**  **Доказательство:**    **Следствие**  **Лемма2** |
| **51. Продолжение** е  Т.е. наше предположение оказалось верным в обоих случаях.  Таким образом, для матрицы B наибольшим собственным числом оказалось λ2. Предположим, что собственный вектор матрицы B, соответствующий λ2, u2 найден.  Тогда из (5):    На практике обычно применяют другое соотношение: | **53.** **LR-алгоритм и QR-алгоритм решения АПСЗ.**  LR- и QR- алгоритмы – итерационные алгоритмы, позволяющие подобными преобразованиями привести матрицу A к треугольному виду.  **LR – алгоритм.**   1. ; Рассмотрим преобразование   Докажем, что это тождественное преобразование  т.е. , значит преобразование тождественно.  Чуть позже докажем, что  .  **QR – алгоритм со сдвигом.**   1. Рассмотрим преобразование   Докажем, что это тождественное преобразование  т.е. , значит преобразование тождественно.  Чуть позже докажем, что  .За счет выбора можно ускорить процесс сходимости. | **46.Продолжение** Значит - ограничено  (5)  , то есть с точностью до множителя определили собственный вектор.    Получилось, что |
| **55. Апостериорная оценка погрешности при ращении АПСЗ с симметричной матрицей**  Ax = ; - приближенное собственное значение, - приближенный собственный вектор.**Теорема**.  (1) -фактически вектор невязки.  A –нормальная матрица. Если вектор невязки мал, то собственное число найдено достаточно точно.**Доказательство**.  1) , тогда (1) выполняется.  2) , тогда , следовательно, Тогда  А), используемая норма – вторая.  ;  Б)используемая норма – другая (общий случай) Т.к. A – нормальная, то - диаг. матрица  , -спектральное число обусловленности матрицы A, для нормальной матрицы равное 1.  ;  ч.т.д. | **50. Продолжение** Тогда задачу поиска собственных чисел матрицы A можно рассматривать как задачу поиска собственных чисел матрицы C.  Предположим, что λ2 и u2(собственное число и собственный вектор матрицы С) найдены.  Будем искать собственный вектор матрицы B в виде v2 =  подставим v2 в (3):  \*  = λ2;;  Теперь с помощью найденного v2 находим искомый собственный вектор матрицы A w2.  Bv2 = λ2v2  GAG-1v2 = λ2v2  AG-1v2 = λ2G-1v2  (7) w2 = G-1v2  Проделав аналогичные рассуждения для собственных чисел λ3,… , и собственных векторов w3, …, , можно легко найти w3, …, . Если встречаются несколько одинаковых собственных чисел, то в качестве можно взять 0. | 52 Продолжение найдено. - приближенное значение (с некоторой точностью) одного из собственных чисел матрицы . Применяем для матрицы метод обратных итераций.  Подробнее, используя алгоритм с нормировкой  - собственные вектора матрицы , они составляют базис, так как - нормальная матрица.  Разложим вектора и по базису из собственных векторов  Подставим (5) и (6) в первую формулу (4)    Тогда получаем,Но с другой стороны из второй формулы (4)  То есть |
| **Доказательство:**  Если , то .  ()  Воспользовавшись леммой 1 и леммой 2, получим:    Разные исследователи выбирают разные μ.  (3)  - относительная ошибка произведения n чисел.  (4)  - для двоичной системы, тогда | 57 Выполнение основных арифметических операций на компьютере  п.3.1.    Алгоритм сложения следующий:   * выравнивается порядок, то есть * складываются поразрядно мантиссы x и y: * число нормализуется: первая значащая цифра – единица * выявление ситуации overflow и underflow   Рассмотрим следующую ситуацию:  - потеряли q разрядов  п.3.2.  Алгоритм умножения следующий:   * перемножаются мантиссы x и y * складываются порядки * число нормализуется: первая значащая цифра – единица * выявление ситуации overflow и underflow | 52. Продолжение 2 (7)  Используя (7)  (8)  где Выберем  .Тогда ( 9) Из (8) и (9) имеем  (10)  Учитывая (10) имеем  Откуда |