**Введение**

Целый ряд инженерных задач сводится к рассмотрению систем уравнений, имеющих единственное решение лишь в том случае, если известно значение некоторого входящего в них параметра. Этот особый параметр называется характеристическим, или собственным, значением системы. С задачами на собственные значения инженер сталкивается в различных ситуациях. Так, для тензоров напряжений собственные значения определяют главные нормальные напряжения, а собственными векторами задаются направления, связанные с этими значениями. При динамическом анализе механических систем собственные значения соответствуют собственным частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют моды этих колебаний. При расчете конструкций собственные значения позволяют определять критические нагрузки, превышение которых приводит к потере устойчивости.

Выбор наиболее эффективного метода определения собственных значений или собственных векторов для данной инженерной задачи зависит от ряда факторов, таких как: тип уравнения, число искомых собственных значений и их характер. Интегральные методы очень удобны и хорошо приспособлены для определения наименьшего и наибольшего собственных значений. Методы преобразований несколько сложней, зато позволяют определить все собственные значения и собственные векторы.

Цель исследования: изучить теорию итерационных методов отыскания собственных значений и собственных векторов и закрепить ее на практике.

Задачи исследования:

1. Изучить теоритический материал по данной теме.
2. Рассмотреть методы отыскания собственных значений и векторов.
3. Закрепить полученные знания на практике.

1. **Основные понятия и определения.**

Собственным вектором квадратной матрицы называется вектор , который удовлетворяет соотношению, где  — собственное значение, соответствующее данному собственному вектору. Одному собственному значению  может соответствовать несколько собственных векторов, в таком случае говорят о собственном подпространстве для данного собственного значения. Собственными векторами линейного преобразования называются собственные вектора матрицы , определяющей это преобразование [11].

Можно выделить следующие свойства собственных значений и собственных векторов [11]:

1. Линейная комбинация собственных векторов матрицы , соответствующих одному и тому же собственному значению , также является собственным вектором  с собственным значением .

2. Количество различных собственных значений не может превышать размер матрицы.

3. Сумма размерностей собственных подпространств, соответствующих всем собственным значениям равна размерности матрицы (в случае рассмотрения комплексных чисел).

1. Собственные векторы , самосопряженного операторасоответствующие различным собственным значениям  ортогональны, т. е. если и , то .

Собственные значения и собственные векторы могут быть найдены с помощью метода прямой итерации [11].

Самым простым способом численного нахождения собственных значений и собственных векторов является метод прямых итераций. Он заключается в построении последовательности векторов , , ,  и т. д., то есть в многократном домножении случайного ненулевого начального вектора  на матрицу . Можно доказать, что если вектор имеет ненулевые проекции на все собственные вектора(случайное взятие координат гарантирует это с почти единичной вероятностью), то такой итеративный процесс сойдётся к собственному вектору , соответствующему максимальному собственному значению . Вычисление остальных собственных значений возможно с помощью вычитания проекции очередного вектора итераций на подпространство из уже полученных векторов.

1. **Метод вращения (метод Якоби)**

# Идеи методы вращения

Несмотря на свою быстроту, описанные выше прямые методы не вполне удовлетворительны. Так, их алгоритм состоит из разнородных частей: преобразования исходной матрицы, вычисления корней многочлена, нахождения собственных векторов обратными итерациями. Кроме того, их формулы не упрощаются для некоторых употребительных специальных форм матриц (например, ленточных); тем самым они невыгодны для таких матриц. Поэтому разработан и используется ряд итерационных методов, в общем случае более медленных, но обладающих какими-то частными преимуществами.

Метод Якоби для собственных значений — итерационный алгоритм для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы. Назван в честь Карла Густава Якоба Якоби, предложившего этот метод в 1846 году, хотя использоваться метод начал только в 1950-х годах с появлением компьютеров [1].Метод основан на подборе такой бесконечной последовательности элементарных вращений, которая в пределе преобразует эрмитову матрицу в диагональную. При этом используются преобразования вращения с матрицами такого же типа, как и для прямого метода вращений, но последовательность поворотов и их углы подбираются совершенно иным способом.

* 1. **Алгоритм нахождения методом Якоби**

Вычисление всех собственных значений и собственных векторов вещественной симметрической матрицы  можно свести к отысканию такой ортогональной матрицы , для которой произведение представляет диагональную матрицу, причем

столбцы матрицыбудут являться соответствующими собственными

векторами матрицы. Матрица  находится как предел бесконечного

произведения элементарных матриц вращений, каждая из которых

имеет вид:



Если необходимо обратить в нуль элемент aik матрицы А, то

cosφ и sinφ нужно выбрать по формулам



 

Чтобы выполнялось условие знак у корня в формуле для выдирают тот же, что и у выражения

.

Метод вращения обладает высокой скоростью сходимости.

# QR-алгоритм

# Понятие о QR-алгоритме

Это наиболее употребительный в настоящее время итерационный метод отыскания характеристических чисел действительных и комплексных матриц. QR- алгоритм состоит в следующем.

Для данной матрицы строят QR-разложение . В полученном разложении меняют местами множители. Это приводит к матрице с которой поступают аналогично, и т.д. В результате получают последовательность матриц  Эти матрицы подобны, так как  и т.д.

При довольно общих предположениях построенная последовательность матриц сходится к треугольной матрице.

* 1. **QR – разложение**

QR – разложением квадратной матрицы А называют ее представление в виде произведения с ортогональной матрицей Q и верхней треугольной матрицей R. QR – разложение матрицы можно построить с помощью ортогонализации и ортонормирования ее столбцов, а также с помощью ортогональных преобразований.

Пусть в матрице столбцы  линейно независимые. Ортогонализируем эту систему векторов, проводя процесс ортогонализации. Затем нормируем каждый вектор полученной ортогональной системы векторов. В результате придем к ортонормированной системе векторов



В матричной записи это дает равенство где  - ортогональная матрица,



- верхняя треугольная матрица.

Отсюда получается разложение с ортогональной матрицей  и верхней треугольной матрицей 

# Степенной метод

При отыскании наибольшего по абсолютной величине собственного значения матрицы А и соответствующего ему собственного вектора можно пользоваться следующим итерационным методом, называемым степенным [1].

В качестве нулевого приближения к искомому векторуберут произвольный вектори последовательно строят следующие приближения:

  

Для соответствующих координат векторов данной последовательности будут выполняться выражение



Итерационный процесс останавливают, если в стабилизируется достаточное число десятичных знаков после запятой.

# Метод скалярных произведений

# Итерационный процесс основанный на скалярных произведениях

Для отыскания первого собственного значения действительной матрицы можно указать несколько иной итерационный процесс, являющийся иногда более выгодным. Метод основан на образовании скалярных произведений [1]

 и 

, где - матрица, транспонированная с матрицей , и - выбранный каким-либо образом начальный вектор.

# Алгоритм метода скалярных произведений

Пусть - действительная матрица и - ее собственные значения, которые предполагаются различными, причем



Возьмем некоторый ненулевой вектор и с помощью матрицы А построим последовательность итерации



Для вектора  образуем также с помощью транспонированной матрицы А’ вторую последовательность итерации



где 

В пространстве выберем два собственных базиса  и  соответственно для матриц А и А’, удовлетворяющих условиям биортонормировки: .

Базисе - через , т. е.

 и 

Отсюда



И



Составим скалярное произведение

.

Таким образом,



**Примеры нахождение собственных значений и собственных векторов с помощью итерационных методов**

1. **Метод вращения (метод Якоби)**

Пример. Методом Якоби найти собственные значения и собственные векторы эрмитовой матрицы

****

Решение: Положими построим матрицы и Для этого замечанием, что Поэтому принимаем Поскольку



то  Далее находим 

Следовательно, и Можно записать матрицу



Далее вычисляем матрицу



По найденным матрицам А и Т запишем собственные значения матрицы А и собственные векторы

  

1. **QR-алгоритм**

Пример: С помощью QR-алгоритма найти характеристические числа матрицы

.

Решение: Сначала эту матрицу вращениями приведем к треугольному виду. Начнем с обнуления элемента . Для этого составим матрицу вращения

и найдем cos и sin исходя из равенства нулю элемента матрицы в третьей строке втором столбце, т.е из равенства 



Отсюда получаем: tg= -1. Поэтому ; 

Следовательно,

И



И этого равенства получается QR-разложение



В заключении цикла строим матрицу



Следующий цикл проведем со сдвигом . Поэтому будем строить QR-разложение матрицы



Сначала эту матрицу вращениями приведем к треугольному виду. Здесь следует обнулить лишь элемент . Для этого составим матрицу вращения



И найдем cosи sin из равенства нулю элемента матрицы в третьей строке втором столбце, т.е из равенства



Отсюда получаем: tg=-1/3 и cos, 

Следовательно, 

Из равенства 

Получаем QR-разложение 

В заключении цикла строим матрицу



Эта матрица уже треугольная с характеристическими числами Эти же числа являются характеристическими числами матрица A.

1. **Степенной метод**

Пример: Для матрицы 

Степенным методом найти наибольшее по абсолютной величине собственное значение и соответствующий ему собственный вектор .

Решение: За нулевое приближение векторы  примем вектор Далее найдем векторы . Результаты в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 11 | 24 | 85 | 238 | 735 | 2180 | 6569 | 19674 | 59059 |
| 1 | 5 | 21 | 49 | 169 | 477 | 1469 | 4361 | 13137 | 39349 | 118117 |
| 1 | 6 | 19 | 52 | 165 | 482 | 1463 | 4368 | 13139 | 39358 | 118107 |

Теперь вычислим  при к=9,10 и i=3





1. **Метод скалярных произведений**

Методом скалярных произведений найти наибольшее собственное значение и вектор матрицы



Решение: примем за начальный вектор Соответствующая последовательность векторов уже вычислена в предыдущем примере. Вычислим векторы Результаты приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 11 | 57 | 115 | 433 |
| 1 | -17 | -47 | -129 | -415 |
| 1 | 19 | 41 | 139 | 401 |

Вычислим  при к=4:



по формуле при к=4:



# 

# Заключение

При выполнении данной работы были рассмотрены теоретически и практически основные характеристики итерационных методов отыскания собственных значений и собственных векторов, а именно: метод итерации, метод вращения (метод Якоби), QR-алгоритм, степенной метод, метод скалярных произведений. Методы схожи по своему алгоритму вычислений собственных значений и собственных векторов.

# Список использованных источников

1. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 576 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840с.
3. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие. – 3-е изд., испр. – СПб: Лань, 2004. – 248с.
4. Кетков Ю.Л. MATLAB 6: программирование численных методов. – СПб.: БВХ-Петербург, 2004. – 672с.
5. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320с.
6. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие.-М.: Высш. шк., 1994. – 544с.
7. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с.
8. Шафаревич И. Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Физматлит, 2009. — 512 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966 г., 664 стр.
10. Глухов М. M., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра:Учебник В 2-х т.Т.II.— М.:Гелиос АРВ,2003.—416с.
11. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 2010. — 607 с.

Интернет ресурсы:

* <https://ru.wiki2.org/wiki/Метод_Якоби_для_собственных_значений>
* https://ru.wiki2.org/wiki/Метод\_QR-алгоритм\_для\_собственных\_значений
* https://ru.wiki2.org/wiki/Степенной\_метод\_для\_собственных\_значений
* <https://ru.wiki2.org/wiki/Метод_скалярных> \_произведений \_для\_собственных\_значений