

Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по индивидуальной работе №04

тема " Метод конечных элементов "

дисциплина "Вычислительная механика"

Выполнил студент гр. 90301

М. А.Бенюх

Преподаватель:

Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2021

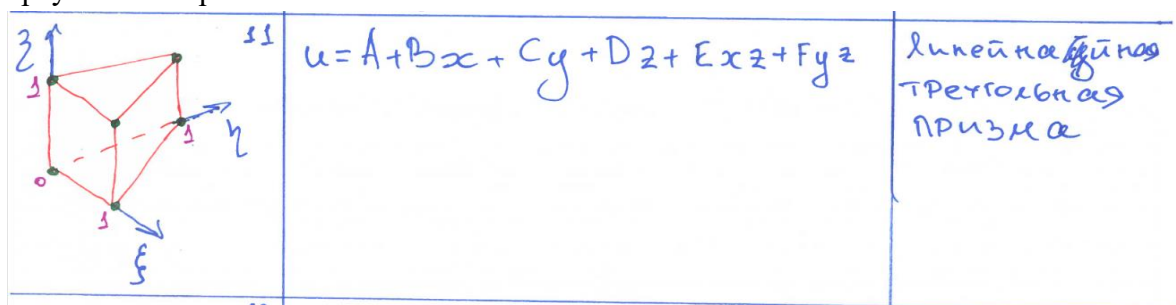
Содержание:

1. Формулировка задачи	3
2. Алгоритм метода	3
3. Результаты.....	4
4. Заключение.....	8
5. Код программы	9

1. Формулировка задачи.

Дан конечный элемент заданной формы и тип интерполяционного полинома, который определен внутри элемента для каждого узла. Получить распределение искомых полиномов для каждого из узлов. Построить полученные распределения.

Используя метод конечных элементов найти функции формы элемента: линейная треугольная призма.



Использовать интерполяцию линейным полиномом

$$P(x, y, z) = A + Bx + Cy + Dz + Exz + Fyz \quad (1)$$

Проверить выполнение свойств функции формы:

$$N_1(x, y, z) + N_2(x, y, z) + N_3(x, y, z) + N_4(x, y, z) + N_5(x, y, z) + N_6(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3)$$

2. Алгоритм метода.

Определим свойства функции форм из основных свойств (2) и (3):

$$\begin{aligned} N_i(x_i, y_i, z_i) &= A_i + B_i x_i + C_i y_i + D_i z_i + E_i x_i z_i + F_i y_i z_i = 1 \\ N_j(x_i, y_i, z_i) &= A_j + B_j x_i + C_j y_i + D_j z_i + E_j x_k z_k + F_j y_k z_k = 0 \\ N_k(x_i, y_i, z_i) &= A_k + B_k x_i + C_k y_i + D_k z_i + E_k x_k z_k + F_k y_k z_k = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где на 6 узлов по 3 координаты на каждый, т. е. 18 уравнений.

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & y_i z_i \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & y_i z_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_i & \dots & F_i \\ \dots & \dots & \dots \\ A_k & \dots & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[X] \cdot [A] = [E] \quad (6)$$

$$[A] = [X]^{-1} \quad (7)$$

Введем интерполяционный полином:

$$\{P\}^T = \{1 \ x \ y \ z \ xz \ yz\} \quad (8)$$

$$[N] = \{P\}^T \cdot [A] \quad (9)$$

$$[N] = [N_i \ \dots \ N_k] \quad (10)$$

3. Результаты.

$$N(x, y, z) =$$

$$[x^*z - y - z - x + y^*z + 1, y - y^*z, x - x^*z, z - x^*z - y^*z, x^*z, y^*z]$$

Проверим выполнение свойства (2):

$$N_1(x, y, z) + N_2(x, y, z) + N_3(x, y, z) + N_4(x, y, z) + N_5(x, y, z) + N_6(x, y, z) = 0$$

Действительно, легко проверить, что $\underbrace{x^*z - y - z - x + y^*z + 1}_{N_1(x,y,z)} + \underbrace{y - y^*z}_{N_2(x,y,z)} + \underbrace{x - x^*z}_{N_3(x,y,z)} + \underbrace{z - x^*z - y^*z}_{N_4(x,y,z)} + \underbrace{x^*z}_{N_5(x,y,z)} + \underbrace{y^*z}_{N_6(x,y,z)} = 1$ независимо от выбранной точки.

Проверим выполнение свойства (3) сделав подстановку в N_6 и убедимся, что оно выполнено.

Построим графики функций форм.

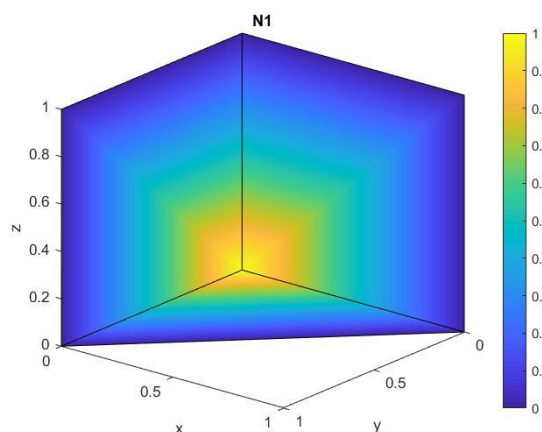


Рис. 1. Проекция значений формы на поверхность в точке (0,0,0)

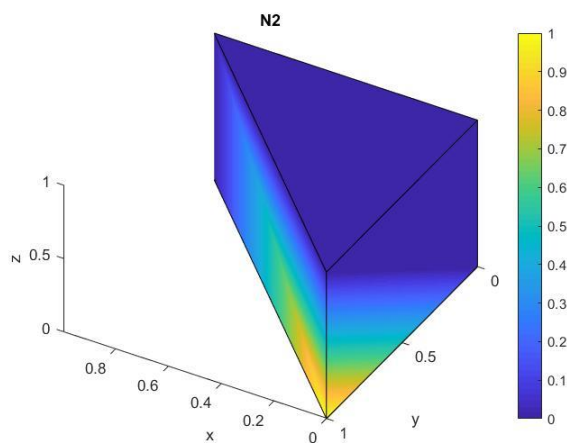


Рис. 2. Проекция значений формы на поверхность в точке (0,1,0)

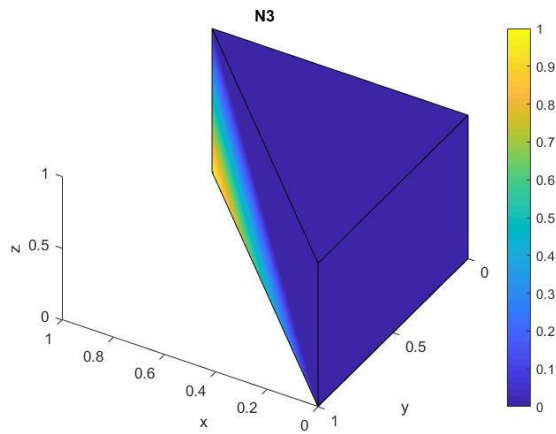


Рис. 3. Проекция значений формы на поверхность в точке $(0,0,1)$

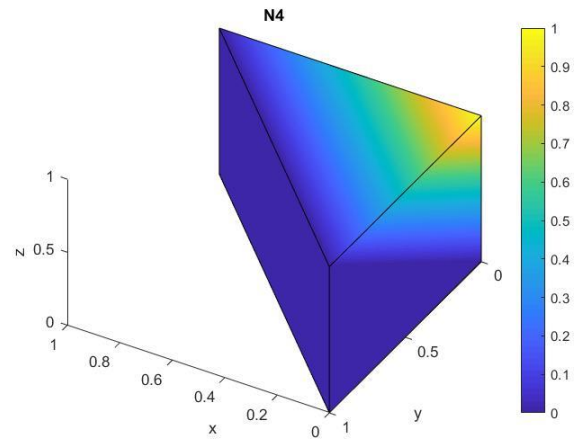


Рис. 4. Проекция значений формы на поверхность в точке $(0,0,1)$

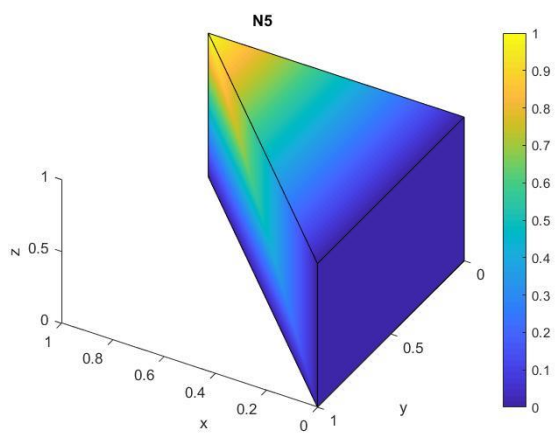


Рис. 5. Проекция значений формы на поверхность в точке $(1,0,1)$

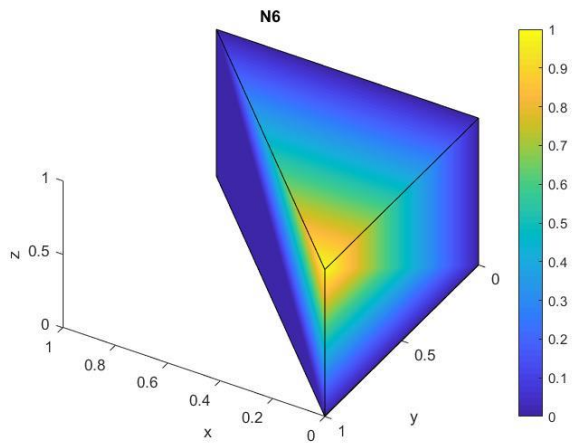


Рис. 6. Проекция значений формы на поверхность в точке $(0,1,0)$

4. Заключение

В ходе работы были составлены интерполяционные уравнения форм для каждого из узлов конечного элемента. По результатам работы можем сделать вывод что вычисление функции формы для каждого из узлов – достаточно трудоемкий процесс. Также отмечу что процедура поиска узла в разных системах координат – кажется не оптимальным способом решения задачи. Далее рекомендуется расширить форму для найденного элемента на остальные элементы, чтобы не пересчитывать формы для каждого нового элемента - систему координат, используя якобиан.

5. Код программы

```
6. syms P(x,y,z)
7. P(x,y,z)=[1,x,y,z,x*z,y*z]
8. prisma=ones(6,3)
9. t1=[0,0,0];
```

```

10.     t2=[0,1,0];
11.     t3=[1,0,0];
12.     t4=[0,0,1];
13.     t5=[1,0,1];
14.     t6=[0,1,1];
15.     prisma(1,:)=t1;
16.     prisma(2,:)=t2;
17.     prisma(3,:)=t3;
18.     prisma(4,:)=t4;
19.     prisma(5,:)=t5;
20.     prisma(6,:)=t6
21.     X=ones(6,6);
22.     k=1
23.     for i =[1:6]
24.         X(k,1)=1;
25.         X(k,2)=prisma(i,1);
26.         X(k,3)=prisma(i,3);
27.         X(k,4)=prisma(i,2);
28.         X(k,5)=prisma(i,1)*prisma(i,2);
29.         X(k,6)=prisma(i,2)*prisma(i,3);
30.
31.         k=k+1;
32.     end
33.     X
34.     A=inv(X)
35.     N=P*A'
36.     L=formula(N);
37.     for i=[1:5]
38.         N1=subs(L(1,i))
39.         figure
40.
41.         hold on
42.         C1 = [double(subs(N1,[x,y,z],[t1(1),t1(2),t1(3)])) 0 ;
43.             double(subs(N1,[x,y,z],[t2(1),t2(2),t2(3)])) 0;
44.             double(subs(N1,[x,y,z],[t6(1),t6(2),t6(3)])) 0;
45.             double(subs(N1,[x,y,z],[t4(1),t4(2),t4(3)])) 0];
46.         C2 = [double(subs(N1,[x,y,z],[t1(1),t1(2),t1(3)])) 0 ;
47.             double(subs(N1,[x,y,z],[t3(1),t3(2),t3(3)])) 0;
48.             double(subs(N1,[x,y,z],[t5(1),t5(2),t5(3)])) 0;
49.             double(subs(N1,[x,y,z],[t4(1),t4(2),t4(3)])) 0];
50.         C3 = [double(subs(N1,[x,y,z],[t2(1),t2(2),t2(3)])) 0 ;
51.             double(subs(N1,[x,y,z],[t6(1),t6(2),t6(3)]))
52.             double(subs(N1,[x,y,z],[t5(1),t5(2),t5(3)])) 0;
53.             double(subs(N1,[x,y,z],[t3(1),t3(2),t3(3)]))
54.         C4 = [double(subs(N1,[x,y,z],[t1(1),t1(2),t1(3)])) 0 ;
55.             double(subs(N1,[x,y,z],[t3(1),t3(2),t3(3)])) 0;
56.             double(subs(N1,[x,y,z],[t2(1),t2(2),t2(3)])) 0;];
57.         C5 = [double(subs(N1,[x,y,z],[t4(1),t4(2),t4(3)])) 0 ;
58.             double(subs(N1,[x,y,z],[t5(1),t5(2),t5(3)])) 0;
59.             double(subs(N1,[x,y,z],[t6(1),t6(2),t6(3)])) 0;];

```

```

60.      fill13([t1(1), 1;
      t2(1),1;t6(1),1;t4(1),1],[t1(2),1;t2(2),1;t6(2),1;t4(2),1],
      [t1(3),1;t2(3),1;t6(3),1;t4(3),1;],C1)
61.      fill13([t1(1),1;t3(1),1; t1
      (1),1;t4(1),1],[t1(2),1;t3(2),1;t5(2),1;t4(2),1],
      [t2(3),1;t3(3),1;t5(3),1;t6(3),1], C2)
62.      fill13([t2(1),1;t3(1),1;t5(1),1;t6(1),1],[t2(2),1;t3(2),
      1;t5(2),1;t6(2),1], [t1(3),1;t3(3),1;t5(3),1;t4(3),1], C3)
63.      fill13([t5(1),1;t3(1),1;t2(1),1],[t1(2),1;t3(2),1;t2(2),
      1],[t1(3),1;t3(3),1;t2(3),1],C4)
64.      fill13([t4(1),1;t5(1),1;t6(1),1],[t4(2),1;t5(2),1;t6(2),
      1],[t4(3),1;t5(3),1;t6(3),1],C5)
65.
66.      end

```