

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЧАТОГО РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ И ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ

Выполнили студенты гр. 5030103/90301

Бенюх М.А.
Блащук О.Д.

Задача:

Исследуя колебания пластины, помещенной в вязкую жидкость, определить плотность и вязкость жидкости.

Проблема:

Пластина, помещенная в вязкую жидкость – пластинчатый резонатор – является системой с распределенными параметрами, точное решение которой вызывает затруднение.

Предположения:

При перенесении резонатора из вакуума в жидкость форма его колебаний не меняется.

Рассмотреть влияние жидкости на колебания как действие массы, добавляемой к массе самого резонатора.

Этапы исследования:

1. Стационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора
2. Нестационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора
3. Упрощение нестационарной модели

1. Стационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

Рассмотрим стационарные колебания плоской круглой мембраны:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \text{оператор Лапласа в полярных координатах} \quad (1.1)$$

$U(r, \varphi) = U(r) \cos(m\varphi)$ – разделение переменных

m – число волн по окружности

$m = 0$ – осесимметричные колебания

Граничные условия:

$U(R) = 0$, $U(0)$ – огр.

$$\triangleright \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{m^2}{r^2} U + \alpha^2 U = 0, \quad \alpha = \frac{SE}{F} \quad (1.2)$$

$$\triangleright r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} + (\alpha^2 r^2 - m^2) U = 0 - \text{уравнение Бесселя} \quad (1.3)$$

1. Стационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

Замена переменных: $x = \alpha r$

$$x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x \frac{\partial U}{\partial x} + (x^2 - m^2)U = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{Ищем решение в виде: } U(x) = CJ_m(x) + DY_m(x) \quad (1.5)$$

Граничные условия:

$$x = 0: \quad Y_m(0) \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad D = 0 \quad \rightarrow \quad U(r) = CJ_m(\alpha r)$$

$$U(R) = 0: \quad J_m(\alpha R) = 0$$

$$U(r, \varphi) = J_m(\alpha r) \cos(m\varphi) \quad (1.7)$$

В таб. 1 приведены первые n корней J_m

Т а б л и ц а 1

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 1$	2.405	3.832	5.136	6.380
$n = 2$	5.520	7.016	8.417	9.761
$n = 3$	8.654	10.173	11.620	13.015

1. Стационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

Таким образом, формы колебаний имеют вид:

$$U(r, \varphi) = J_m(\alpha r)(C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)) \quad (1.8)$$

Частоты будут кратными для всех форм колебаний, кроме осесимметричных ($m = 0$) – корни функции Бесселя

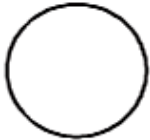








	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$n = 1$			
$n = 2$			
$n = 3$			

Рис. 23. Узловые линии на круглой мембране

Явная конечно-разностная схема:

$$\frac{1}{ih} \left(\frac{U_{i+1}^k - U_i^k}{h} \right) + \left(\frac{U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - 2U_i^k}{h^2} \right) = \frac{\rho}{E} \left(\frac{U_i^{k+1} + U_i^{k-1} - 2U_i^k}{\Delta t^2} \right) + (k_1 + k_2 \eta) \left(\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} \right) \quad (1.9)$$

1. Стационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

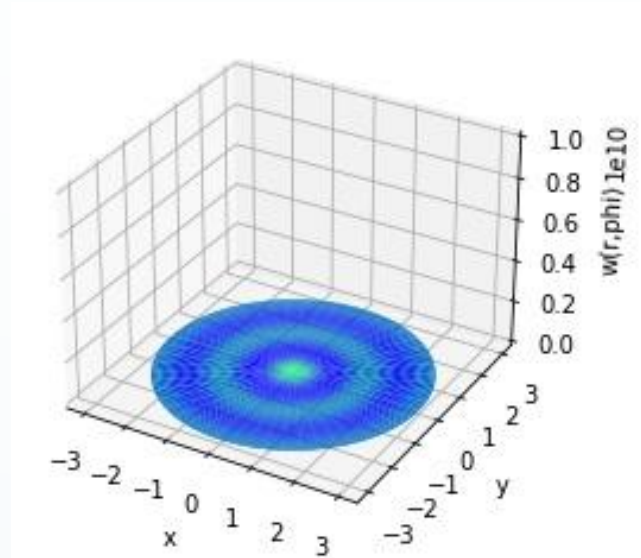


Рис.1. узловые линии при $m=0$, $n=3$

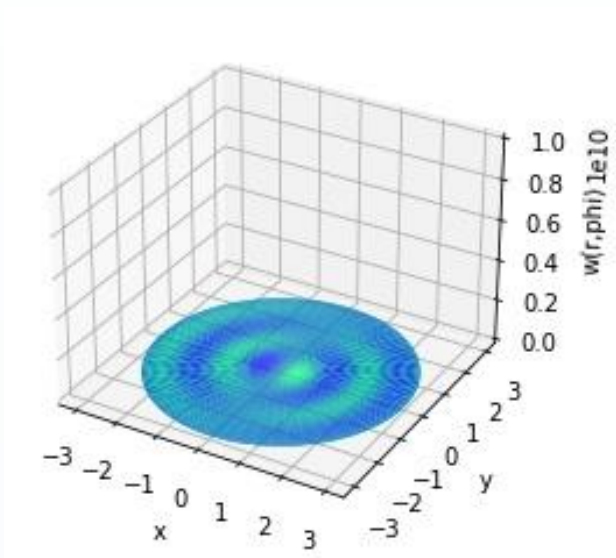


Рис.2. Узловые линии при $m=1$, $n=3$

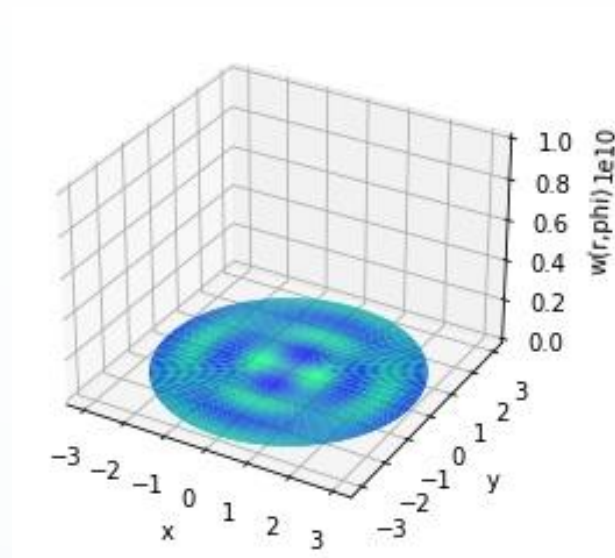


Рис.3. Узловые линии при $m=2$, $n=3$

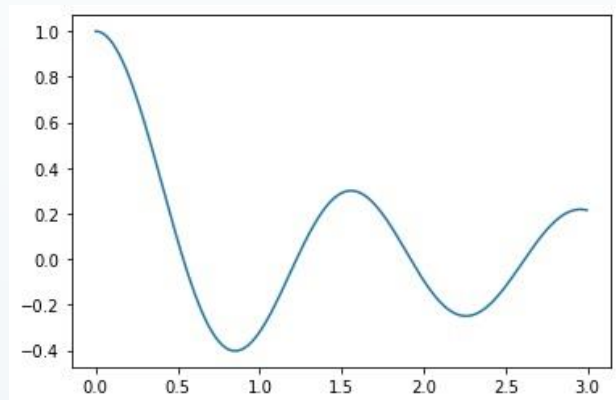


Рис.4. Разрез $w(r)$ при $m=0$, $n=3$

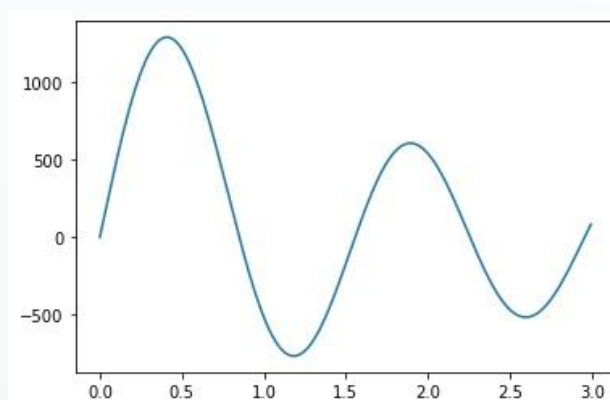


Рис.5. Разрез $w(r)$ при $m=1$, $n=3$

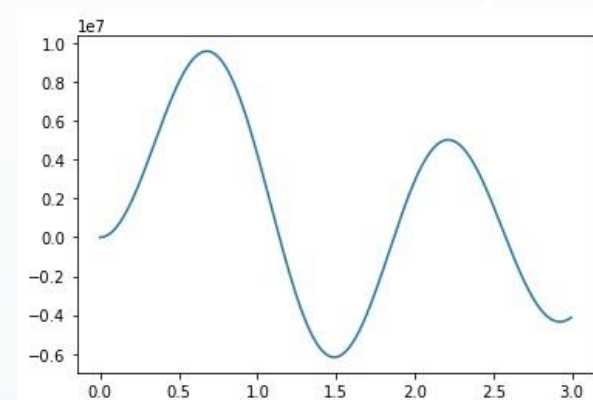


Рис.6. Разрез $w(r)$ при $m=2$, $n=3$

2. Нестационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

$$ES \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (m + M) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \text{нестационарное уравнение колебаний струны под действием силы } F \quad (2.1)$$

Зададим влияние вязкой силы на смещение:

$$ES \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (m + M) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (k_1 + k_2 \eta) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.2)$$

k_1 - коэффициент собственного трения
 $k_2 \eta$ - коэффициент вязкого трения в среде

Явная конечно-разностная схема:

$$ES \left(\frac{U_{i+1}^k + U_{i-1}^k - 2U_i^k}{h^2} \right) = (m + M) \left(\frac{U_i^{k+1} + U_i^{k-1} - 2U_i^k}{\Delta t^2} \right) + (k_1 + k_2 \eta) \left(\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} \right) \quad (2.3)$$

2. Нестационарное уравнение колебаний пластинчатого резонатора

Симметрично отразим результаты, выполненные для колебаний струны для $\varphi \in [0, 2\pi]$

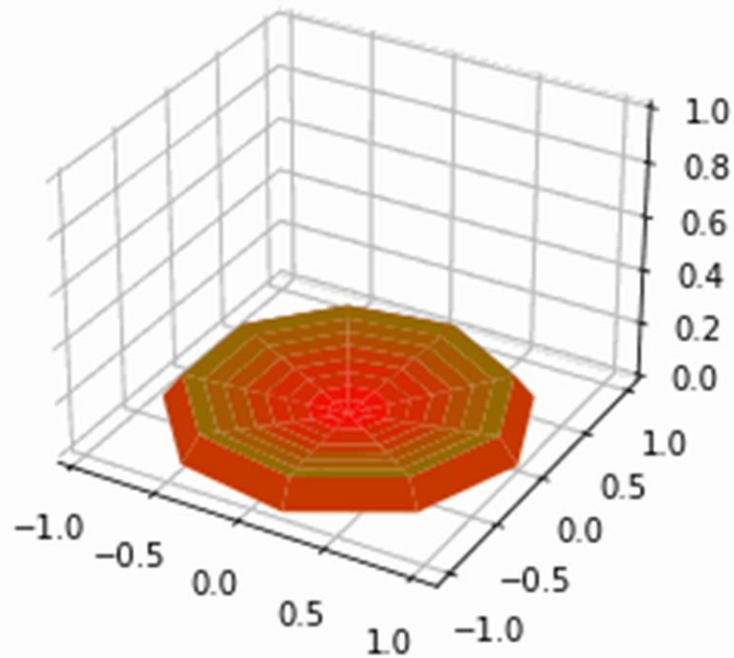


Рис.7. Узловые линии при $m=0$, $n=3$

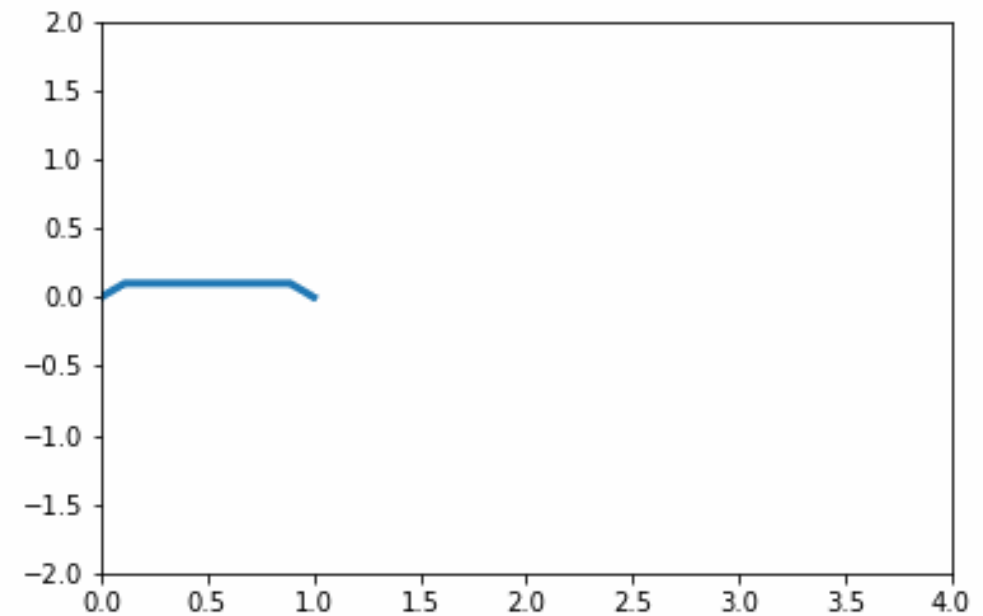


Рис.8. Колебание струны при $x \in [0, L/2]$

В полученной модели нельзя явно оценить влияние параметров жидкости на колебания пластины в виду неточности в вычислении массы системы и действующих сил .

3. Упрощение нестационарной модели

Колебания пластинного резонатора являются гармоническими.

Рассмотрим колебания пластины как системы с сосредоточенными параметрами.

$$F_{\text{ин}} + F_{\text{упр}} + R = 0 - \text{уравнение динамики, где} \quad (3.1)$$

Формулы для сил:

$$F_{\text{ин}} = (M + m)\ddot{x}$$

$$F_{\text{ин}} - \text{Сила инерции} \quad (3.2)$$

$$F_{\text{упр}} = kx$$

$$F_{\text{упр}} - \text{Сила упругости} \quad (3.3)$$

$$R = (k_1 + k_2\eta)\dot{x}, \text{ где}$$

$$R - \text{Сила вязкого трения} \quad (3.4)$$

k - модуль упругости пластины

k_1 - коэффициент собственного трения

$k_2\eta$ - коэффициент вязкого трения в среде

k_1 и k_2 - параметры прибора

3. Упрощение нестационарной модели

$$m = \rho S d - \text{масса присоединенной жидкости, где} \quad (3.5)$$

ρ - ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТИ

S - ПЛОЩАДЬ ПЛАСТИНЫ

d - ТОЛЩИНА СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Сравним уравнения:

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2 \eta}{M + \rho S d} \dot{x} + \frac{k}{M + \rho S d} x = 0 - \text{уравнение затухающих колебаний пластины} \quad (3.6)$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 - \text{уравнение свободных затухающих колебаний} \quad (3.7)$$

3. Упрощение нестационарной модели

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{M + \rho S d} - \left(\frac{k_1 + k_2 \eta}{2(M + \rho S d)}\right)^2} - \text{собственная циклическая частота колебаний с учетом трения} \quad (3.8)$$

$$\omega_0 = \frac{k}{M + \rho S d} - \text{собственная циклическая частота колебаний в отсутствии трения} \quad (3.9)$$

$$\beta = \frac{k_1 + k_2 \eta}{2(M + \rho S d)} - \text{коэффициент затухания} \quad (3.10)$$

$$\text{При } \beta < \omega_0 \text{ решение: } x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t}) = A e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha) \quad (3.11)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}\right)^2} - \text{начальная амплитуда} \quad (3.12)$$

$$\alpha = -\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\omega x_0} + \frac{\beta}{\omega}\right) - \text{начальная фаза} \quad (3.13)$$

3. Упрощение нестационарной модели

Решение: $x(t) = Ae^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha\right)$, где

Для исследования взяты разные величины ρ, η :

Рис.9. Зависимость $x(t)$ для ацетона при $x_0=1, \dot{x}_0=0$

$$\rho = \frac{800 \text{ кг}}{\text{м}^3}, \quad \eta = 0.0003$$

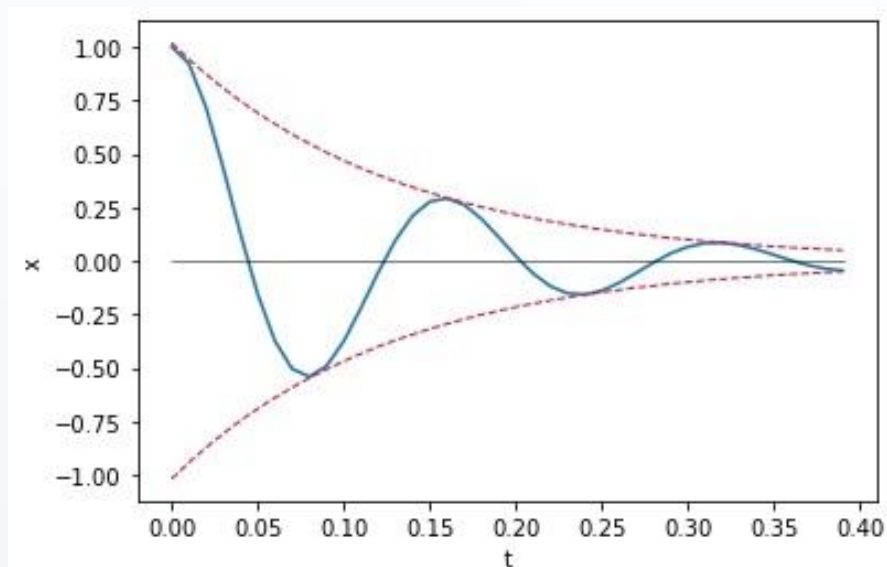
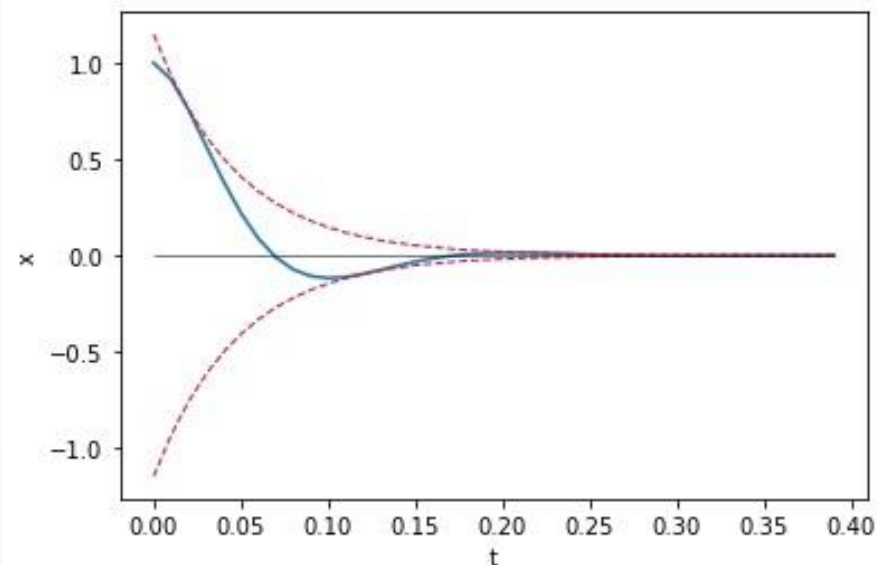


Рис.10. Зависимость $x(t)$ для воды при $x_0=1, \dot{x}_0=0$

$$\rho = \frac{1000 \text{ кг}}{\text{м}^3}, \quad \eta = 0.001$$



3. Упрощение нестационарной модели

Принцип нахождения вязкости и плотности присоединенной жидкости:

- 1) Определить и задать параметры k_1 и k_2 прибора
- 2) Посчитать массу присоединенной жидкостью ρ и найти ω_0
- 3) С помощью частотомера измерить частоту колебаний ω для системы с присоединенной жидкостью и найти η

Спасибо за внимание!