

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
Высшая школа теоретической механики

**Расчетное задание**

**Исследование напряженно-деформированного состояния составной  
упруго-вязкой сферы.**

Выполнил студент гр. 5030103/90301:

Бенюх М. А.

Преподаватель:

Филиппов Р. А.

Санкт-Петербург  
2022

## 1. Постановка задачи

Рассмотреть напряженно-деформированное состояние составной сферы, внутренняя (i - internal) часть которой выполнена из упруго-вязкого материала, а внешняя (e - external) - из упругого. Материал внутренней сферы при объемном деформировании демонстрирует чистую упругость, а в отношении деформации формоизменения соответствует реологической модели Кельвина-Фойгта. Предположить, что внутренняя поверхность сферы подвергается нагружению внезапно возникшим внутренним давлением  $P_0$  по функции Хевисайда, а внешняя поверхность подвергается нагружению внезапно возникшим перемещением  $U_0$  по функции Хевисайда. Построить графики распределения напряжений и перемещений в стенках сферы и их зависимости от времени. Динамическими эффектами при деформации сферы пренебречь.

Внутренняя поверхность нагружается внезапно возникшим перемещением –  $R = a$ ,  
идеальный контакт слоев –  $R = b$ ,  
внешняя поверхность нагружается внезапно возникшим перемещением –  $R = c$ .

Реологическая модель материала – Кельвина-Фойгта.  
Радиусы:  $a = 0.05$  м,  $b = 0.07$  м,  $c = 0.1$  м.

Параметры материалов:

- 1) Упруго-вязкий:  $E = 8 \times 10^{10}$  Па,  $\nu = 0.45$ ,  $\eta = E/2/(1 + \nu)$  м<sup>2</sup>/с
- 2) Упругий:  $E_2 = 2.1 \times 10^{11}$  Па,  $\nu_2 = 0.3$

Коэффициенты Ламе:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad k = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$$
$$\mu_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}, \quad k_2 = \frac{2\mu_2\nu_2}{1 - 2\nu_2}$$

Граничные условия:

- 1)  $P_0 = 25$  МПа,
- 2)  $U_0 = -0.0002$  м,
- 3) Идеальный контакт слоёв:

$$\sigma_{RR}^i|_{R=b} = \sigma_{RR}^e|_{R=b} \quad (1)$$

$$u_R^i|_{R=b} = u_R^e|_{R=b}. \quad (2)$$

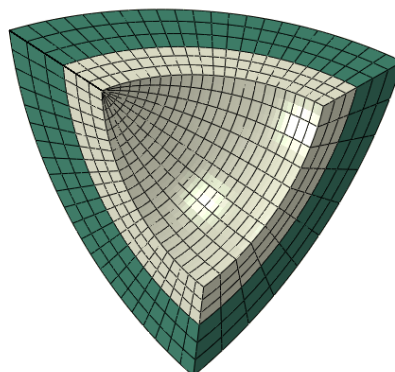


Рис. 1. Постановка задачи. 1/8 полый сферы в разрезе

## 2. Аналитическое решение

Обозначим  $u_1 = u_R^i(R, \theta, \phi)$ ,  $u_2 = u_\theta^i(R, \theta, \phi)$ ,  $u_3 = u_\phi^i(R, \theta, \phi)$

- компоненты составляющие вектора перемещений вязко-упругой части,

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{R,R}^i, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta,\theta}^i, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{\phi,\phi}^i, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{R,\theta}^i, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\theta,\phi}^i, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{R,\phi}^i$$

- компоненты тензора (малых) деформаций вязко-упругой части,

$$\sigma_{11} = \sigma_{R,R}^i, \quad \sigma_{22} = \sigma_{\theta,\theta}^i, \quad \sigma_{33} = \sigma_{\phi,\phi}^i, \quad \tau_{12} = \tau_{R,\theta}^i, \quad \tau_{23} = \tau_{\theta,\phi}^i, \quad \tau_{13} = \tau_{R,\phi}^i$$

- компоненты тензора напряжений вязко-упругой части.

Обозначим  $u2_1 = u_R^e(R, \theta, \phi)$ ,  $u2_2 = u_\theta^e(R, \theta, \phi)$ ,  $u2_3 = u_\phi^e(R, \theta, \phi)$

- компоненты составляющие вектора перемещений упругой части,

$$\varepsilon2_{11} = \varepsilon_{R,R}^e, \quad \varepsilon2_{22} = \varepsilon_{\theta,\theta}^e, \quad \varepsilon2_{33} = \varepsilon_{\phi,\phi}^e, \quad \varepsilon2_{12} = \varepsilon_{R,\theta}^e, \quad \varepsilon2_{23} = \varepsilon_{\theta,\phi}^e, \\ \varepsilon2_{13} = \varepsilon_{R,\phi}^e$$

- компоненты тензора (малых) деформаций упругой части,

$$\sigma2_{11} = \sigma_{R,R}^e, \quad \sigma2_{22} = \sigma_{\theta,\theta}^e, \quad \sigma2_{33} = \sigma_{\phi,\phi}^e, \quad \tau2_{12} = \tau_{R,\theta}^e, \quad \tau2_{23} = \tau_{\theta,\phi}^e, \\ \tau2_{13} = \tau_{R,\phi}^e$$

- компоненты тензора напряжений упругой части.

Удобно применять сферические координаты. В силу очевидной центральной симметрии предполагаемых напряженного и деформированного состояний толстостенной сферы предполагается, что все её точки могут перемещаться только в радиальном направлении. Поэтому очевидно, что ожидаемые деформированное и напряженное состояния не будут зависеть от переменных  $\theta$ ,  $\phi$ . Кроме того, в данной задаче предположим возможную зависимость деформаций и напряжений от времени,  $t$ .

Таким образом окончательный вид вектора перемещений внутренней части сферы:

$$\mathbf{u1} = u_1(R, t)\mathbf{e}_r, \quad (3)$$

внешней части сферы:

$$\mathbf{u2} = u2_1(R, t)\mathbf{e}_r. \quad (4)$$

Тензорная формула малых деформаций:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla). \quad (5)$$

Общие выражения для компонентов тензора деформаций (для упруго-вязкой и упругой частей) с учетом (3), (4), (5) будут следующими:

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} &:= \frac{u_1(R, t)}{R} & \epsilon_{33} &:= \frac{u_1(R, t)}{R} & \epsilon2_{11} &:= \frac{\partial}{\partial R} u2_1(R, t) \\ \epsilon2_{22} &:= \frac{u2_1(R, t)}{R} & \epsilon2_{33} &:= \frac{u2_1(R, t)}{R} & \epsilon_{11} &:= \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) \\ \epsilon_{13} &:= 0 & \epsilon_{12} &:= 0 & \epsilon_{23} &:= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Относительные изменения объема (объемные расширения) имеют выражения:

$$\begin{aligned} Div &:= \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) + \frac{2 u_1(R, t)}{R} \\ Div2 &:= \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) + \frac{2 u_2(R, t)}{R} \end{aligned} \quad (7)$$

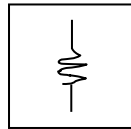
Компоненты девиаторов тензоров деформаций приобретают вид:

$$\begin{aligned} Dev_{22} &:= \frac{u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} & Dev_{211} &:= \frac{2 \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t)}{3} - \frac{2 u_2(R, t)}{3 R} \\ Dev_{33} &:= \frac{u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} & Dev_{222} &:= \frac{u_2(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t)}{3} \\ Dev_{11} &:= \frac{2 \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 u_1(R, t)}{3 R} & Dev_{233} &:= \frac{u_2(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t)}{3} \\ Dev_{23} &:= 0 \quad Dev_{12} := 0 \quad Dev_{13} := 0 & Dev_{223} &:= 0 \quad Dev_{212} := 0 \quad Dev_{213} := 0 \end{aligned} \quad (8)$$

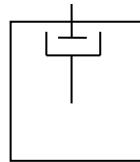
Выражение для напряжений:

- 1) Для упруго-вязкой части используем определяющие уравнения материала Кельвина-Фойгта.

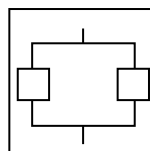
Рассмотрим упругий элемент – реологический элемент Гука. Его определяющее уравнение:  $\mathbf{s} = 2\mu\mathbf{e}$ , где  $\mu$  – модуль сдвига. Тогда напряжение:  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{I_1(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{E} + \mathbf{s} = k\theta\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{e}$



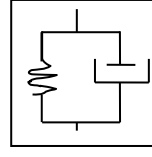
Также рассмотрим вязкий элемент – реологический элемент Ньютона. Его определяющее уравнение:  $\mathbf{S} = 2\eta\dot{\mathbf{e}}$ , где  $\eta$  - вязкость.



Далее рассмотрим параллельный тип соединения элементов. Его аксиомы:  $\begin{cases} \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \end{cases}$ . Таким образом, при параллельном соединении усилия в различных элементах складываются, а деформации равны.



Тогда модель Кельвины-Фойгта примет вид:



$$\begin{cases} \mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{упр}} + \mathbf{s}^{\text{вяз}} \\ \mathbf{e} = \mathbf{e}^{\text{упр}} = \mathbf{e}^{\text{вяз}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{s}^{\text{упр}} = 2\mu\mathbf{e}^{\text{упр}} = 2\mu\mathbf{e}\dot{\mathbf{1}} \\ \mathbf{s}^{\text{вяз}} = 2\eta\dot{\mathbf{e}}^{\text{вяз}} = 2\eta\dot{\mathbf{e}}\dot{\mathbf{1}} \end{cases} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} = k\theta\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{e}\mathbf{1} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}\mathbf{1} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &:= k \left( \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) + \frac{2 u_1(R, t)}{R} \right) + 2\mu \left( \frac{u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} \right) + 2\eta \left( \frac{\frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t)}{3} \right) \\ \sigma_{11} &:= k \left( \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) + \frac{2 u_1(R, t)}{R} \right) + 2\mu \left( \frac{2 \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 u_1(R, t)}{3 R} \right) + 2\eta \left( \frac{2 \frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t) \right)}{3 R} \right) \\ \sigma_{33} &:= k \left( \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) + \frac{2 u_1(R, t)}{R} \right) + 2\mu \left( \frac{u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} \right) + 2\eta \left( \frac{\frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t)}{3} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau_{23} := 0 \quad \tau_{12} := 0 \quad \tau_{13} := 0$$

2) Для упругой части

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{2} = k_2 * \theta * \mathbf{E}\mathbf{2} + 2 * \mu_2 * \mathbf{e}\mathbf{2} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^2 &:= \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) + \frac{2 u_2(R, t)}{R} \right) k_2 + \frac{2 \mu_2 u_2(R, t)}{R} \\ \sigma_{11}^2 &:= \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) + \frac{2 u_2(R, t)}{R} \right) k_2 + 2 \mu_2 \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) \right) \\ \sigma_{33}^2 &:= \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) + \frac{2 u_2(R, t)}{R} \right) k_2 + \frac{2 \mu_2 u_2(R, t)}{R} \\ \tau_{23}^2 &:= 0 \quad \tau_{12}^2 := 0 \quad \tau_{13}^2 := 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференциальное уравнение равновесия, не учитывая массовые силы, после упрощения:

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

Запишем уравнения равновесия в компонентах вектора перемещений:

1. Для упруго-вязкой части

$$\begin{aligned} deq1 := & k \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} u_1(R, t) + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) \right)}{R} - \frac{2 u_1(R, t)}{R^2} \right) + 2 \mu \left( \frac{2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t) \right)}{3 R} + \frac{2 u_1(R, t)}{3 R^2} \right) + 2 \eta \left( \frac{2 \frac{\partial^3}{\partial R^2 \partial t} u_1(R, t)}{3} \right. \\ & - \frac{2 \left( \frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t) \right)}{3 R} + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t) \right)}{3 R^2} \left. \right) + \frac{1}{R} \left( 4 \mu \left( \frac{2 \frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 u_1(R, t)}{3 R} \right) + 4 \eta \left( \frac{2 \frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t)}{3} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t) \right)}{3 R} \right) \right) \\ & - 4 \mu \left( \frac{u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial}{\partial R} u_1(R, t)}{3} \right) - 4 \eta \left( \frac{\frac{\partial}{\partial t} u_1(R, t)}{3 R} - \frac{\frac{\partial^2}{\partial R \partial t} u_1(R, t)}{3} \right) = 0 \\ & deq2 := 0 = 0 \quad deq3 := 0 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

2. Для упругой части

$$\begin{aligned} deq12 := & \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} u_2(R, t) + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) \right)}{R} - \frac{2 u_2(R, t)}{R^2} \right) k + 2 \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} u_2(R, t) \right) + \frac{4 \mu \left( \frac{\partial}{\partial R} u_2(R, t) \right)}{R} - \frac{4 \mu u_2(R, t)}{R} = 0 \\ & deq22 := 0 = 0 \quad deq32 := 0 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановка компонентов напряжений в дифференциальные уравнения равновесия применим преобразование Лапласа по t с параметром p и нулевыми начальными условиями.

$$\begin{aligned} deq1 := & \frac{1}{3 R^2} \left( 4 \eta p \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} uL(R, p) \right) R^2 + 3 k \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} uL(R, p) \right) R^2 + 4 \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} uL(R, p) \right) R^2 + 8 \eta p \left( \frac{\partial}{\partial R} uL(R, p) \right) R - 4 \eta D_{1,1}(uL)(R, 0) R^2 \right. \\ & + \frac{4 \mu \frac{d}{dR} laplace(u_2(R, t), t, p)}{R} - \frac{4 \mu 2 laplace(u_2(R, t), t, p)}{R^2} \left. \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} deq122 := & k 2 \frac{d^2}{dR^2} laplace(u_2(R, t), t, p) + \frac{2 k 2 \frac{d}{dR} laplace(u_2(R, t), t, p)}{R} - \frac{2 k 2 laplace(u_2(R, t), t, p)}{R^2} + 2 \mu 2 \frac{d^2}{dR^2} laplace(u_2(R, t), t, p) \\ & - 8 \eta p uL(R, p) + 6 k \left( \frac{\partial}{\partial R} uL(R, p) \right) R + 8 \mu \left( \frac{\partial}{\partial R} uL(R, p) \right) R - 8 \eta D_1(uL)(R, 0) R - 6 k uL(R, p) - 8 \mu uL(R, p) + 8 \eta uL(R, 0) \\ & uL(R, p) \left. \right) R + 8 \mu \left( \frac{\partial}{\partial R} uL(R, p) \right) R - 6 k uL(R, p) - 8 \mu uL(R, p) \end{aligned} \quad (17)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения относительно изображения Лапласа

$$\begin{aligned} uL(R, p) := & \frac{F1(p)}{R^2} + \frac{F2(p)}{R} \\ uL22(R, p) := & \frac{R^3 C2(p) + C1(p)}{R^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Использование граничных условий в напряжениях, полученных из ранее записанных выражений (11), (12), (18) (предварительно подвергнутых преобразованию Лапласа),

доставляет систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных  $\_F1(p)$  и  $\_F2(p)$ ,  $\_C1(p)$  и  $\_C2(p)$ . Граничные условия также подвержены преобразованию Лапласа по  $t$  с  $p$  и нулевыми начальными условиями.

$$\begin{aligned}
 algeq1 &:= \frac{(-4 \eta p - 4 \mu) \_F1(p) + 3 \_F2(p) a^3 k}{a^3} = \text{laplace}(P_a(t), t, p) \\
 algeq3 &:= \frac{(-4 \eta p - 4 \mu) \_F1(p) + 3 \_F2(p) b^3 k}{b^3} = \frac{3 \left( k^2 + \frac{2 \mu^2}{3} \right) b^3 \_C2(p) - 4 \_C1(p) \mu^2}{b^3} \\
 algeq4 &:= \frac{\_F1(p)}{b^2} + \_F2(p) b = \frac{b^3 \_C2(p) + \_C1(p)}{b^2} \\
 algeq2 &:= \frac{c^3 \_C2(p) + \_C1(p)}{c^2} = \text{laplace}(U_c(t), t, p)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Решая систему, получаем решение для преобразованных по Лапласу перемещений и напряжений

$$\begin{aligned}
 uL(R, p) &:= \left( 2 \left( \left( -\mu^2 + \frac{3k}{2} - \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( -2\mu^2 - \frac{3k}{2} \right) c^3 + R^3 \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) b^3 + 2R^3 c^3 (-\eta p - \mu + \mu^2) a^3 P_{La}(p) \right. \\
 &+ 24 \left( \frac{3a^3 k}{4} + R^3 (\eta p + \mu) \right) c^2 b^3 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_{Lc}(p) \Bigg/ \left( 6 \left( \frac{4(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( k \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) a^3 \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{8(\eta p + \mu) \left( \mu^2 + \frac{3k}{4} \right) c^3}{3} \right) b^3 + 2a^3 c^3 k (-\eta p - \mu + \mu^2) \right) R^2 \Bigg) \\
 uL22(R, p) &:= \left( 12c^2 \left( \frac{2(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( \eta p + \frac{\mu^2}{2} + \frac{3k^2}{4} + \mu \right) a^3 + R^3 (\eta p + \mu) \right) k + \frac{4R^3 \mu^2 (\eta p + \mu)}{3} \right) b^3 \right. \\
 &+ \left. R^3 a^3 k (-\eta p - \mu + \mu^2) \right) U_{Lc}(p) + 3P_{La}(p) a^3 \left( \frac{4\eta p}{3} + k + \frac{4\mu}{3} \right) (R - c) b^3 (R^2 + R c + c^2) \Bigg/ \\
 &\left( 6 \left( \frac{4(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( k \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) a^3 + \frac{8(\eta p + \mu) \left( \mu^2 + \frac{3k}{4} \right) c^3}{3} \right) b^3 + 2a^3 c^3 k (-\eta p - \mu \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \mu^2) \right) R^2 \right) \\
 \sigma_{L11} &:= \left( 6a^3 \left( \frac{4(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( 2\eta p + 2\mu \right) c^3 + R^3 \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) k + \frac{8\mu^2 c^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) b^3 \right. \\
 &+ \left. 2R^3 c^3 k (-\eta p - \mu + \mu^2) \right) P_{La}(p) + 72c^2 (R^2 + R a + a^2) (R - a) (\eta p + \mu) \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) b^3 U_{Lc}(p) k \Bigg/ \\
 &\left( 6 \left( \frac{4(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) a^3 + 2(\eta p + \mu) c^3 \right) k + \frac{8\mu^2 c^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) b^3 + 2a^3 c^3 k (-\eta p - \mu \right. \\
 &+ \left. \mu^2) \right) R^3 \Bigg) \\
 \sigma_{L22} &:= \left( 6 \left( -\frac{2(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( -\eta p - \mu \right) c^3 + R^3 \left( 2\eta p + \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) k - \frac{4\mu^2 c^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) b^3 + 2R^3 c^3 k \right. \\
 &- \left. \eta p - \mu + \mu^2 \right) a^3 P_{La}(p) + 72 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) c^2 (\eta p + \mu) b^3 \left( R^3 + \frac{a^3}{2} \right) U_{Lc}(p) k \Bigg/ \left( 6 \left( \frac{4(\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( 2\eta p \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) a^3 + 2(\eta p + \mu) c^3 \right) k + \frac{8\mu^2 c^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) b^3 + 2a^3 c^3 k (-\eta p - \mu + \mu^2) \right) R^3 \Bigg) \\
 \sigma_{n11} &:= \left( 24c^2 \left( -\frac{4\mu^2 (\eta p + \mu) \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( -a^3 k + \frac{4R^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) \mu^2 + \left( \left( -2\eta p - \frac{3k^2}{2} - 2\mu \right) a^3 + R^3 (\eta p + \mu) \right) k \right. \right. \right. \right.
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 R^3 k_2 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 + \frac{3 R^3 k k_2 (\eta p + \mu)}{2} \right) b^3 + a^3 \left( \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} \right) (-\eta p - \mu + \mu_2) R^3 k \left( U_{Lc}(p) + 6 P_{La}(p) a^3 \left( \frac{4 \eta p}{3} + k + \frac{4 \mu}{3} \right) b^3 \left( 2 \mu_2 c^3 + R^3 \left( \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} \right) \right) \right) \Bigg/ \left( 6 \left( \frac{4 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 - \frac{3 k}{2} + \frac{3 k_2}{2} \right) b^6}{3} + \left( k \left( 2 \eta p + \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} + 2 \mu \right) a^3 + \frac{8 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 + \frac{3 k}{4} \right) c^3}{3} \right) b^3 + 2 a^3 c^3 k (-\eta p - \mu + \mu_2) \right) R^3 \right) \\
\sigma_{n22}^2 & := \left( 24 c^2 \left( \frac{2 \mu_2 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 - \frac{3 k}{2} + \frac{3 k_2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( \frac{a^3 k}{2} + \frac{4 R^3 (\eta p + \mu)}{3} \right) \mu_2^2 + \left( \left( \eta p + \frac{3 k_2}{4} + \mu \right) a^3 + R^3 (\eta p + \mu) \right) k + 2 R^3 k_2 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 + \frac{3 R^3 k k_2 (\eta p + \mu)}{2} \right) b^3 + a^3 \left( \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} \right) (-\eta p - \mu + \mu_2) R^3 k \right) U_{Lc}(p) + 6 P_{La}(p) a^3 \left( \frac{4 \eta p}{3} + k + \frac{4 \mu}{3} \right) \left( -\mu_2 c^3 + R^3 \left( \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} \right) \right) b^3 \right) \Bigg/ \left( 6 \left( \frac{4 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 - \frac{3 k}{2} + \frac{3 k_2}{2} \right) b^6}{3} + \left( k \left( 2 \eta p + \mu_2 + \frac{3 k_2}{2} + 2 \mu \right) a^3 + \frac{8 (\eta p + \mu) \left( \mu_2 + \frac{3 k}{4} \right) c^3}{3} \right) b^3 + 2 a^3 c^3 k (-\eta p - \mu + \mu_2) \right) R^3 \right) \right)
\end{aligned}$$

Воспользуемся предельными теоремами:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(R, t) = - \left( R \left( a^3 b^3 P_0 - a^3 c^3 P_0 + 3 b^3 c^2 k_2 U_0 + 6 b^3 c^2 \mu_2 U_0 \right) \right) / \left( 3 a^3 b^3 k - 3 a^3 c^3 k - 3 b^6 k + 3 b^6 k_2 + 2 \mu_2 b^6 + 3 b^3 c^3 k + 4 b^3 c^3 \mu_2 \right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} u_2(R, t) & = - \left( R^3 a^3 b^3 P_0 - 3 R^3 a^3 c^2 k U_0 + 3 R^3 b^3 c^2 k U_0 + 4 R^3 b^3 c^2 \mu_2 U_0 - a^3 b^3 c^3 P_0 + 3 a^3 b^3 c^2 k U_0 - 3 b^6 c^2 k U_0 + 3 b^6 c^2 k_2 U_0 + 2 b^6 c^2 \mu_2 U_0 \right) / \left( (3 a^3 b^3 k - 3 a^3 c^3 k - 3 b^6 k + 3 b^6 k_2 + 2 \mu_2 b^6 + 3 b^3 c^3 k + 4 b^3 c^3 \mu_2) R^2 \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

По прошествии длительного времени поле перемещений в упруго-вязком шаре становится таким же, как и в чисто упругом шаре:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} u(R, t) & = - \left( 3 R^3 a^3 b^3 k_2 P_0 + 4 R^3 a^3 b^3 \mu P_0 + 2 R^3 a^3 b^3 \mu_2 P_0 - 4 R^3 a^3 c^3 \mu P_0 + 4 R^3 a^3 c^3 \mu_2 P_0 + 12 R^3 b^3 c^2 k_2 \mu U_0 + 24 R^3 b^3 c^2 \mu \mu_2 U_0 + 3 a^3 b^6 k P_0 - 3 a^3 b^6 k_2 P_0 - 2 a^3 b^6 \mu_2 P_0 - 3 a^3 b^3 c^3 k P_0 - 4 a^3 b^3 c^3 \mu_2 P_0 + 9 a^3 b^3 c^2 k k_2 U_0 + 18 a^3 b^3 c^2 k \mu_2 U_0 \right) / \left( (9 a^3 b^3 k k_2 + 12 a^3 b^3 k \mu + 6 a^3 b^3 k \mu_2 - 12 a^3 c^3 k \mu + 12 a^3 c^3 k \mu_2 - 12 b^6 k \mu + 12 b^6 k_2 \mu + 8 b^6 \mu \mu_2 + 12 b^3 c^3 k \mu + 16 b^3 c^3 \mu \mu_2) R^2 \right) \\
\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(R, t) & = - \left( 3 R^3 a^3 b^3 k P_0 + 4 R^3 a^3 b^3 \mu P_0 - 12 R^3 a^3 c^2 k \mu U_0 + 12 R^3 a^3 c^2 k \mu_2 U_0 + 12 R^3 b^3 c^2 k \mu U_0 + 16 R^3 b^3 c^2 \mu \mu_2 U_0 - 3 a^3 b^3 c^3 k P_0 - 4 a^3 b^3 c^3 \mu P_0 + 9 a^3 b^3 c^2 k k_2 U_0 + 12 a^3 b^3 c^2 k \mu U_0 + 6 a^3 b^3 c^2 k \mu_2 U_0 - 12 b^6 c^2 k \mu U_0 + 12 b^6 c^2 k \mu_2 U_0 + 8 b^6 c^2 \mu \mu_2 U_0 \right) / \left( (9 a^3 b^3 k k_2 + 12 a^3 b^3 k \mu + 6 a^3 b^3 k \mu_2 - 12 a^3 c^3 k \mu + 12 a^3 c^3 k \mu_2 - 12 b^6 k \mu + 12 b^6 k_2 \mu + 8 b^6 \mu \mu_2 + 12 b^3 c^3 k \mu + 16 b^3 c^3 \mu \mu_2) R^2 \right) \quad (22)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} u(R, t) = & \left[ 4 \left( \left( -\mu^2 + \frac{3k}{2} - \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( -\frac{3a^3k}{2} - \frac{3c^3k}{2} - 2\mu^2 c^3 + R^3 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} \right) \right) b^3 + 2c^3 \left( R^3 \mu^2 + \frac{3a^3k}{4} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{3k^2}{2} \right) b^3 + 2c^2 \left( \left( \frac{3P_0c}{4} - \frac{9 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0}{2} \right) k + \mu^2 P_0c \right) \right] \\ & - \frac{3 \left( -\frac{4(k-k^2-\frac{2\mu^2}{3})\mu b^6}{3} + \left( \left( \left( \frac{4a^3}{3} + \frac{4c^3}{3} \right) \mu + a^3 \left( k^2 + \frac{2\mu^2}{3} \right) \right) k + \frac{16c^3\mu\mu^2}{9} \right) b^3 - \frac{4a^3c^3k(\mu-\mu^2)}{3} \right)}{4\eta \left( (-k+k^2+\frac{2\mu^2}{3})b^6 + ((a^3+c^3)k+\frac{4\mu^2c^3}{3})b^3 - a^3c^3k \right)} \\ & - \frac{4 \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \frac{3a^3k}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2c^3 \left( \mu^2 + \frac{3k}{4} \right) \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) \left( -P_0a^3 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( 9c^2 \left( -\frac{P_0c}{6} + \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0 \right) k + P_0 \left( -2\mu^2 c^3 + R^3 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2\mu \right) \right) \right) a^3 + 12c^2\mu \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0 R^3 \right) b^3 + 2R^3P_0a^3c^3(\mu^2-\mu) \right)}{12 \left( \frac{4\mu \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( k \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) a^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8c^3 \left( \mu^2 + \frac{3k}{4} \right) \mu}{3} \right) b^3 + 2a^3c^3k(\mu^2-\mu) \right) \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \frac{3a^3k}{2} + 2c^3 \left( \mu^2 + \frac{3k}{4} \right) \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) R^2} \\ \mu^2(R, t) = & \left[ -6 \left( P_0 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^3 + 2c^2 \left( \left( \frac{3P_0c}{4} - \frac{9 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0}{2} \right) k + \mu^2 P_0c \right) \right) a^3 (R-c) b^3 (a-b) (a^2 + ab + b^2) (R^2 + Rc \right. \\ & \left. + c^2) k c \right. \\ & \left. - \frac{3 \left( -\frac{4(k-k^2-\frac{2\mu^2}{3})\mu b^6}{3} + \left( \left( \left( \frac{4a^3}{3} + \frac{4c^3}{3} \right) \mu + a^3 \left( k^2 + \frac{2\mu^2}{3} \right) \right) k + \frac{16c^3\mu\mu^2}{9} \right) b^3 - \frac{4a^3c^3k(\mu-\mu^2)}{3} \right)}{4\eta \left( (-k+k^2+\frac{2\mu^2}{3})b^6 + ((a^3+c^3)k+\frac{4\mu^2c^3}{3})b^3 - a^3c^3k \right)} \right. \\ & \left. - 24 \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2\mu^2 c^3 \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) \left( \frac{2c^2\mu \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) U_0 b^6}{3} + \left( \left( -\frac{P_0a^3c^3}{4} + U_0 \left( \left( \frac{\mu^2}{2} + \frac{3k^2}{4} + \mu \right) a^3 + R^3\mu \right) c^2 + \frac{R^3P_0a^3}{4} \right) k \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4\mu \left( R^3\mu^2 U_0 c^2 + \frac{1}{4} R^3 P_0 a^3 - \frac{1}{4} P_0 a^3 c^3 \right) \right) b^3 + R^3 U_0 a^3 c^2 k (\mu^2 - \mu) \right) \right] \\ & \left( 12 \left( \frac{4\mu \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6}{3} + \left( \left( 2c^3\mu + a^3 \left( \mu^2 \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) k + \frac{8c^3\mu\mu^2}{3} \right) b^3 + 2a^3c^3k(\mu^2-\mu) \right) \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2\mu^2 c^3 \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) R^2 \right) \\ \sigma_{11}(R, t) = & \left[ 12 \left( P_0 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^3 + 2 \left( \left( \frac{3P_0c}{4} - \frac{9 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0}{2} \right) k + \mu^2 P_0c \right) c^2 \right) b^3 k (R-a) (R^2 + Ra + a^2) a^3 \left( \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \left( 2P_0c^3\mu - 12 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0\mu c^2 + R^3P_0 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) a^3 + 12 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) R^3c^2 U_0\mu \right) k + \frac{8\mu^2 P_0 a^3 c^3 \mu}{3} \right) b^3 + 2R^3P_0a^3c^3k \right. \\ & \left. - \frac{3 \left( -\frac{4\mu(k-k^2-\frac{2\mu^2}{3})b^6}{3} + \left( \left( \left( \frac{4a^3}{3} + \frac{4c^3}{3} \right) \mu + a^3 \left( k^2 + \frac{2\mu^2}{3} \right) \right) k + \frac{16c^3\mu\mu^2}{9} \right) b^3 - \frac{4a^3c^3k(\mu-\mu^2)}{3} \right)}{4 \left( (-k+k^2+\frac{2\mu^2}{3})b^6 + ((a^3+c^3)k+\frac{4\mu^2c^3}{3})b^3 - a^3c^3k \right) \eta} \right. \\ & \left. - 12 \left( \frac{4 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) a^3 P_0 \mu b^6}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu \right) \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2\mu^2 c^3 \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) \right] \\ & \left( 12 R^3 \left( \frac{4 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) \mu b^6}{3} + \left( \left( 2c^3\mu \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + a^3 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) k + \frac{8c^3\mu\mu^2}{3} \right) b^3 + 2a^3c^3k(\mu^2-\mu) \right) \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2\mu^2 c^3 \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) \right) \\ \sigma_{22}(R, t) = & \left[ 24 \left( P_0 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^3 + 2 \left( \left( \frac{3P_0c}{4} - \frac{9 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0}{2} \right) k + \mu^2 P_0c \right) c^2 \right) b^3 \left( R^3 + \frac{a^3}{2} \right) k a^3 \left( \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} \right) b^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3 \left( -\frac{4\mu(k-k^2-\frac{2\mu^2}{3})b^6}{3} + \left( \left( \left( \frac{4a^3}{3} + \frac{4c^3}{3} \right) \mu + a^3 \left( k^2 + \frac{2\mu^2}{3} \right) \right) k + \frac{16c^3\mu\mu^2}{9} \right) b^3 - \frac{4a^3c^3k(\mu-\mu^2)}{3} \right)}{4 \left( (-k+k^2+\frac{2\mu^2}{3})b^6 + ((a^3+c^3)k+\frac{4\mu^2c^3}{3})b^3 - a^3c^3k \right) \eta} \right. \\ & \left. - 24 \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2\mu^2 c^3 \right) b^3 - \frac{3a^3c^3k}{2} \right) \left( -\frac{2 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) a^3 P_0 \mu b^6}{3} + \left( \left( -P_0c^3\mu + 6 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) U_0\mu c^2 + R^3P_0 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned} & + 2\mu) \left( a^3 + 12 \left( \mu^2 + \frac{k^2}{2} \right) R^3 c^2 U_0 \mu \right) k - \frac{4\mu^2 P_0 a^3 c^3 \mu}{3} \left( b^3 + 2 R^3 P_0 a^3 c^3 k (\mu^2 - \mu) \right) \Bigg) \Bigg/ \left( 24 R^3 \left( \frac{4 \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) \mu b^6}{3} \right. \right. \\ & + \left. \left( 2 c^3 \mu + a^3 \left( \mu^2 + \frac{3k^2}{2} + 2\mu \right) \right) k + \frac{8 c^3 \mu \mu^2}{3} \right) b^3 + 2 a^3 c^3 k (\mu^2 - \mu) \Bigg) \left( \left( \mu^2 - \frac{3k}{2} + \frac{3k^2}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{3a^3}{2} + \frac{3c^3}{2} \right) k + 2 \mu^2 c^3 \right) b^3 \right. \\ & \left. \left. - \frac{3 a^3 c^3 k}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Результаты в Maple:

Для иллюстрации результатов и построения графиков подставим в формулы (23) численные решения и значения упругих констант и геометрические значения размеров.

$$\begin{aligned} u(R, t) &= \frac{3.63 \cdot 10^{-23} \left( -1.37 \cdot 10^{11} \left( -153000. + 2.80 \cdot 10^8 R^3 \right) e^{-2.65t} - 2.07 \cdot 10^{16} - 2.38 \cdot 10^{19} R^3 \right)}{R^2} \\ u_2(R, t) &= \frac{3.63 \cdot 10^{-23} \left( -1.19 \cdot 10^{19} (R - 0.1) \left( R^2 + 0.1 R + 0.01 \right) e^{-2.65t} - 1.56 \cdot 10^{16} - 3.94 \cdot 10^{19} R^3 \right)}{R^2} \\ \sigma_{11}(R, t) &= \frac{3.63 \cdot 10^{-23} \left( -3.04 \cdot 10^{31} \left( R^2 + 0.05 R + 0.0025 \right) (R - 0.05) e^{-2.65t} + 2.32 \cdot 10^{27} - 1.91 \cdot 10^{31} R^3 \right)}{R^3} \\ \sigma_{22}(R, t) &= \frac{1.82 \cdot 10^{-23} \left( -6.10 \cdot 10^{31} \left( R^3 + 0.0000625 \right) e^{-2.65t} - 2.29 \cdot 10^{27} - 3.82 \cdot 10^{31} R^3 \right)}{R^3} \\ \sigma_{11}^2(R, t) &= \frac{3.63 \cdot 10^{-23} \left( -2.37 \cdot 10^{19} \left( 1.62 \cdot 10^8 + 3.43 \cdot 10^{11} R^3 \right) e^{-2.65t} + 5.04 \cdot 10^{27} - 2.70 \cdot 10^{31} R^3 \right)}{R^3} \\ \sigma_{22}^2(R, t) &= \frac{3.63 \cdot 10^{-23} \left( -2.37 \cdot 10^{19} \left( -8.08 \cdot 10^7 + 3.43 \cdot 10^{11} R^3 \right) e^{-2.65t} - 2.52 \cdot 10^{27} - 2.70 \cdot 10^{31} R^3 \right)}{R^3} \end{aligned} \quad (24)$$

Построим следующие 2D-графики в Maple:

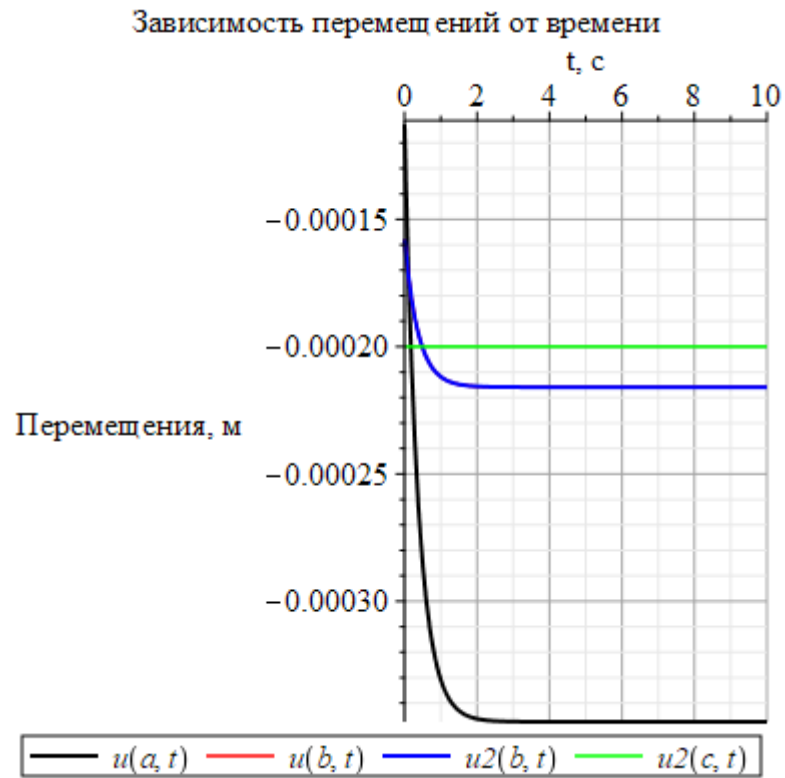


Рис.2. График зависимости перемещений от времени.

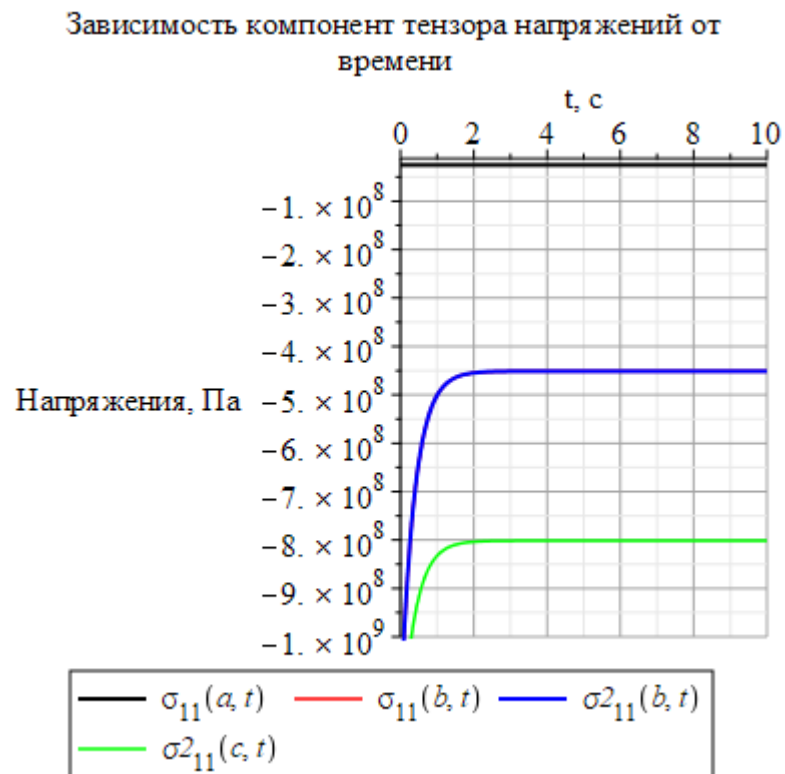


Рис.3. График зависимости компонент тензоров напряжения от времени.

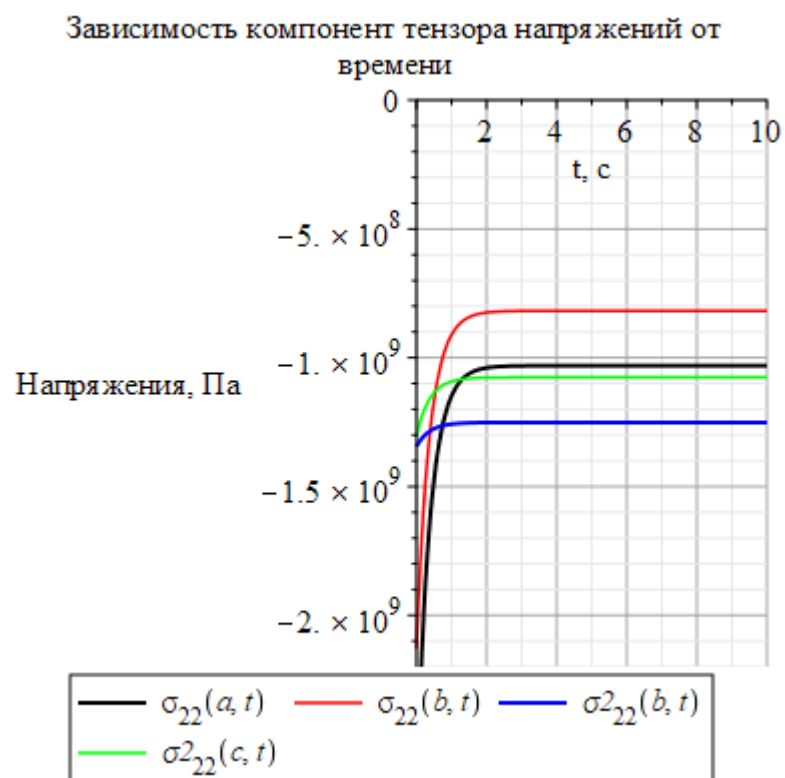


Рис.4. График зависимости компонент тензоров напряжения от времени.

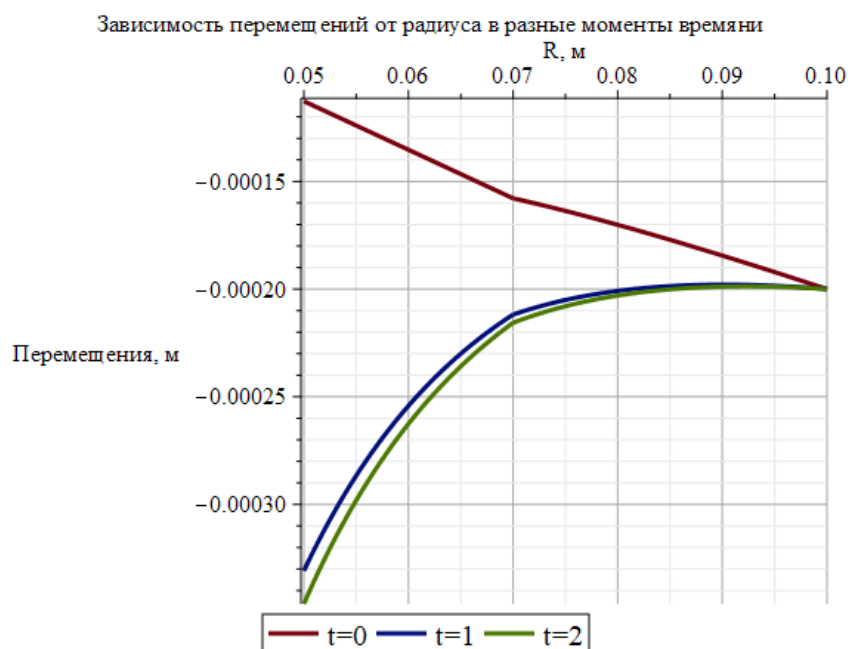


Рис.5. График зависимости перемещений от радиуса в разные моменты времени.

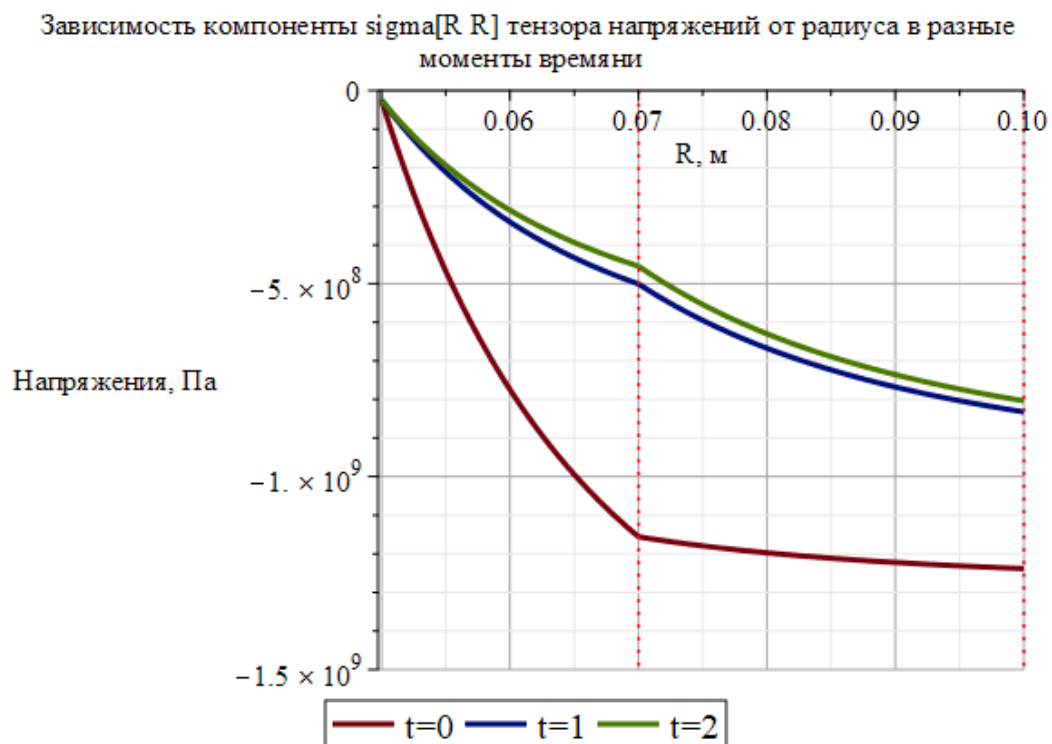


Рис.6. График зависимости  $\sigma_{11} = \sigma_{R,R}^i$ ,  $\sigma_{211} = \sigma_{R,R}^e$  от радиуса в разные моменты времени.

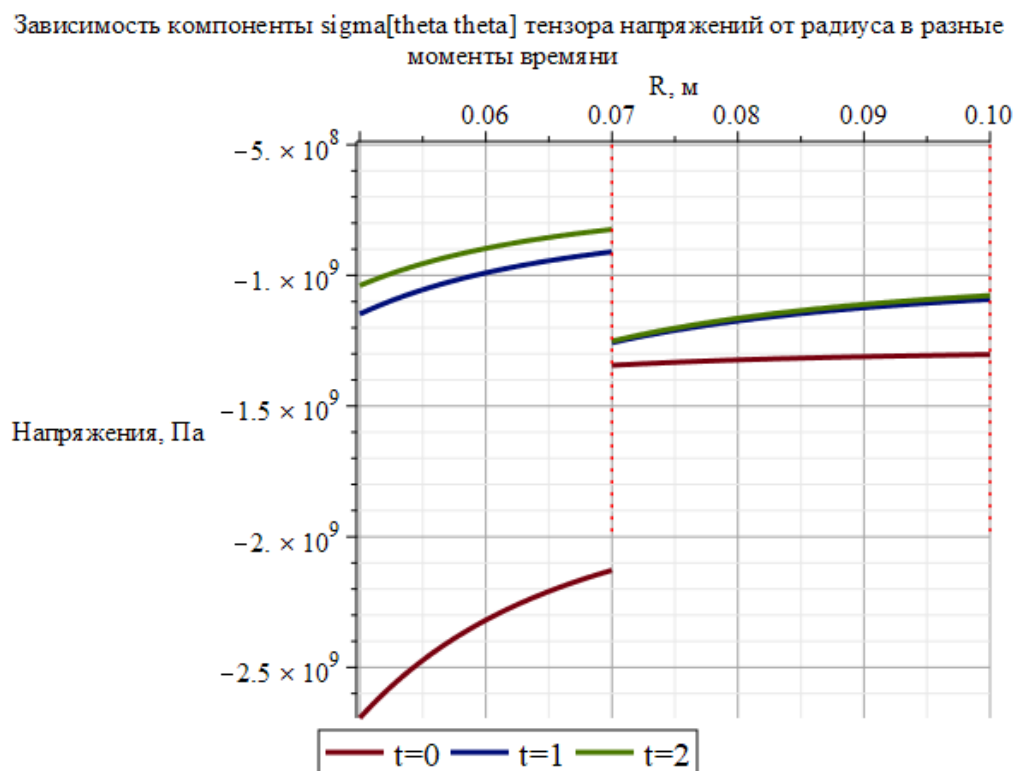


Рис.7. График зависимости  $\sigma_{22} = \sigma_{\theta,\theta}^i$ ,  $\sigma_{222} = \sigma_{\theta,\theta}^e$  от радиуса в разные моменты времени.

### Анализ напряжений на прочность:

Применим 1-ю теорию прочности. За критерий прочности принимается наибольшее нормальное напряжение в момент времени  $t=0$ .

Рассмотрим вязко-упругую часть сферы:

$$|\sigma_{11}(b, 0)| = 1.15 \cdot 10^9 \text{ Па} \geq \sigma_{\text{допустимое}} = 0.6 \cdot 10^8 \text{ Па},$$
$$|\sigma_{22}(a, 0)| = 2.70 \cdot 10^9 \text{ Па} \geq \sigma_{\text{допустимое}} = 0.6 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

Условие прочности не выполнено.

Рассмотрим упругую часть сферы:

$$|\sigma_{211}(c, 0)| = 1.24 \cdot 10^9 \text{ Па} \geq \sigma_{\text{допустимое}} = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Па},$$
$$|\sigma_{222}(b, 0)| = 1.34 \cdot 10^9 \text{ Па} \geq \sigma_{\text{допустимое}} = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

Условие прочности не выполнено.

### Дополнительное исследование напряжений при переменном параметре $U_0$ :

1. Радиальные напряжения вязко-упругой части в момент времени  $t=0$  при  $R=0.07$ . Тогда:

$$\sigma_{11}(0.07, 0, U_0) = -5.6 \cdot 10^6 - 5.73 \cdot 10^{12} U_0$$

$$\leq \sigma_{\text{допустимое}} = 0.6 \cdot 10^8 \text{ Па при}$$
$$-0.0000114485 \text{ Па} \leq U_0 \leq 9.49389 \times 10^{-6} \text{ Па}$$

2. Радиальные напряжения упругой части в момент времени  $t=0$  при  $R=0.1$ :

$$\sigma_{211}(0.1, 0, U_0) = -3.55 \cdot 10^6 - 6.13 \cdot 10^{12} U_0$$

$$\leq \sigma_{\text{допустимое}} = 0.6 \cdot 10^8 \text{ Па при}$$
$$-0.000010367 \text{ Па} \leq U_0 \leq 9.20881 \times 10^{-6} \text{ Па}$$

3. Тангенциальные напряжения вязко-упругой части в момент времени  $t=0$  при  $R=0.05$ :

$$\sigma_{22}(0.05, 0, U_0) = 2.07 \cdot 10^7 - 1.36 \cdot 10^{13} U_0$$

$$\leq \sigma_{\text{допустимое}} = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Па при}$$
$$-0.000012466 \text{ Па} \leq U_0 \leq 0.0000160777 \text{ Па}$$

4. Тангенциальные напряжения упругой части в момент времени  $t=0$  при  $R=0.07$ :

$$\sigma_{222}(0.07, 0, U_0) = -750000. - 6.72 \cdot 10^{12} U_0$$

$$\leq \sigma_{\text{допустимое}} = 1.47 \cdot 10^8 \text{ Па при}$$
$$-0.0000219866 \text{ Па} \leq U_0 \leq 0.0000217634 \text{ Па}$$

Тогда при  $-0.000010367 \text{ Па} \leq U_0 \leq 9.20881 \times 10^{-6} \text{ Па}$  напряжения не будут превышать допустимые напряжения.

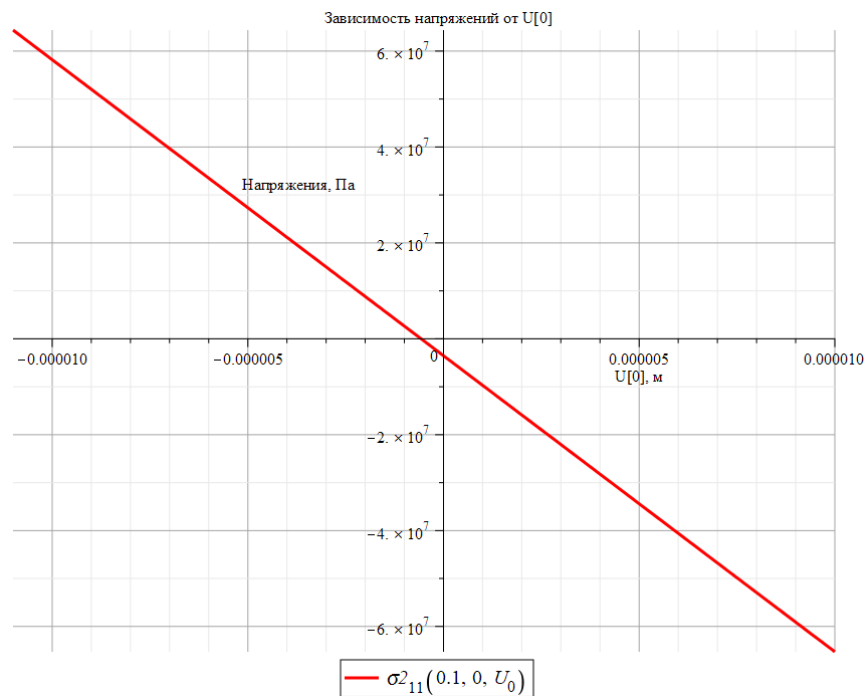


Рис.8. Зависимость напряжений от  $U_c$  в момент времени  $t=0$  при  $R=0.07$ .

### Анализ результатов аналитического решения

Из результатов видно, для перемещений и радиальных напряжений условие идеального контакта выполняется на Рис.2-3, Рис.5-6. Начальные и граничные условия также выполняются на Рис.2-7.

Проведен анализ радиальных и тангенциальных напряжений на прочность. Исходя из него можно сделать вывод, что при данной постановке задачи условие прочности будет нарушено. Также было проведено дополнительное исследование напряжений при переменном параметре  $U_0$ .

### Численное решение в программном пакете ABAQUS:

В КЭМ-пакете рассматривается одна восьмая составной полый сферы (Рис.1). На внутренний слой задаётся упруго-вязкий материал с параметрами модуль Юнга  $E=8e10$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu=0.45$ . Соответствие модели Кельвина-Фойгта достигается заданием коэффициентов серии Прони

| $g_i$ Прони | $k_i$ Прони | $\tau_i$ Прони |
|-------------|-------------|----------------|
| 0.2         | 0           | 0.1            |
| 0.7         | 0           | 0.01           |

Таб.1. коэффициентов серии Прони.

Внешний материал упругий, с характеристиками  $E=2.1e11$ ,  $\nu=0.3$ . Для того, чтобы сфера испытывала перемещения только по радиусу, зададим нулевое перемещение на трёх гранях по соответствующим направлениям. Зададим также перемещение на внешнюю поверхность, равное  $-0.0002$  м, и на внутреннюю поверхность давление в  $2.5e7$  Па.

В программе AutoCAD Civil 3D создадим трёхмерную модель 1/8 части сферы и экспортируем в формате .sat.

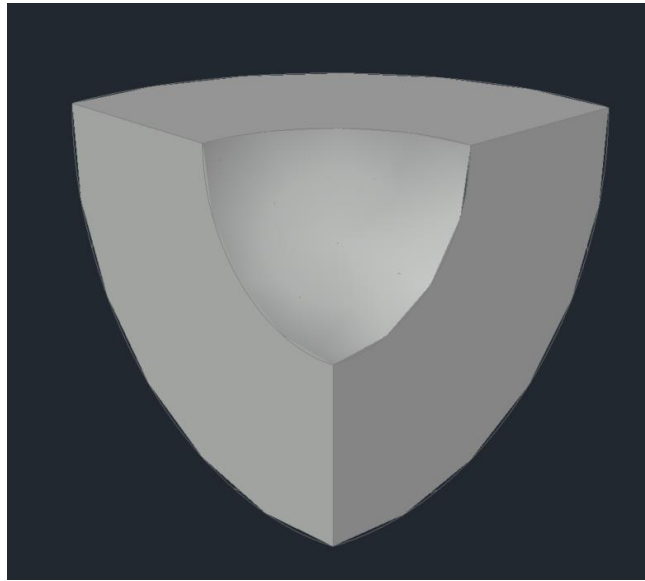


Рис.9. Модель 1/8 части сферы в AutoCAD Civil 3D.

Далее импортируем ее в модуль Part программы Abaqus. При помощи инструментов Partition Face и Partition Cell разделим сферу на внешнюю и внутреннюю часть.

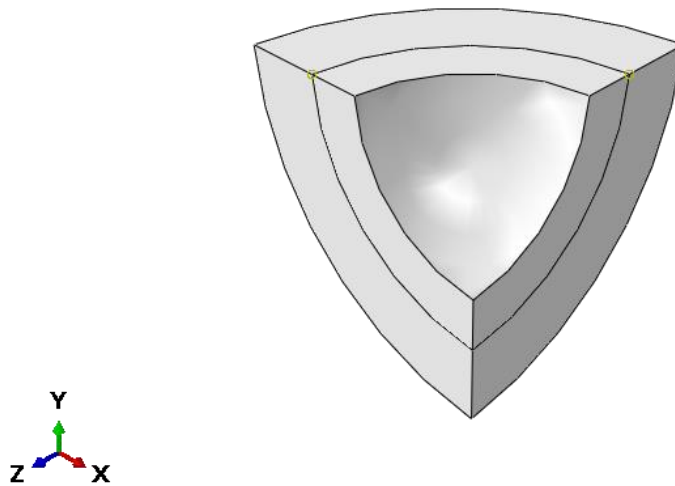


Рис.10. Модель 1/8 части сферы, разделенная на внешнюю и внутреннюю часть.

В модуле Property зададим материал упругой оболочки (Mechanical: Elasticity/Elastic). Создадим основной материал сферы. Сначала укажем параметры мгновенной реакции материала (Mechanical: Elasticity/Elastic), затем в свойствах материала добавим, что задается мгновенный модуль упругости (Instantaneous). Далее используем ряды Прони, чтобы задать модель, приближенную к модели Кельвина-Фойгта, т. к. в Abaqus явно нет возможности задать модель К-Ф. Зададим параметры линейного вязкоупругого отклика материала (Mechanical: Elasticity/Viscoelastic), в качестве переменной выбираем время (Domain: Time), в качестве способа аппроксимации выбираем ряды Прони: (Time: Prony). Задаем  $g_i$  и  $\tau_i$  (в нашем случае  $i = 1, 2$ ),  $k_i = 0$  (Таб.1.).



Далее создадим две секции: Section (Category: Solid, Type: Homogenous) с созданными материалами и присвоим данные Section соответствующим частям геометрии.

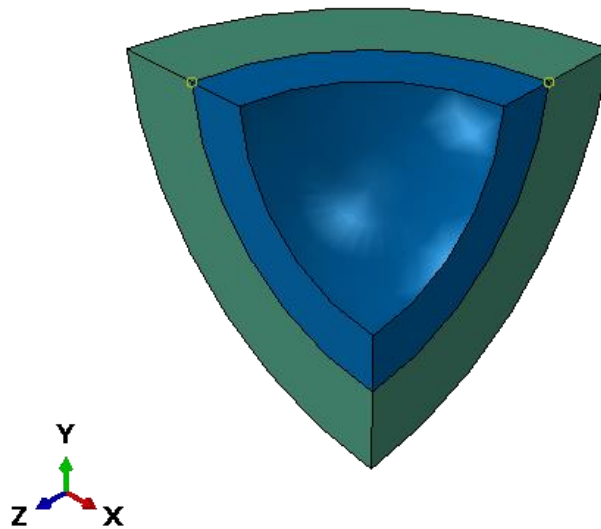


Рис.11. Модель 1/8 части сферы с заданными материалами.

Для удобства представления и обработки результатов расчета будем выводить компоненты перемещений и тензоров напряжений в сферической системе координат. Для этого в модуле Property создадим пользовательскую (сферическую) систему координат: Create Datum CSYS: 3 Points. При задании начала координат пользовательской системы укажем координаты центра сечения конструкции в глобальной системе координат, точку на оси R и точку на плоскости R-  $\Theta$ . Направление других осей (R и T ( $\Theta$ )) изображается условно. Нумерация осей сферической системы координат, следующая: ось R – 1, ось  $\Theta$  – 2, ось  $\Phi$  – 3.



Рис.12. Новая сферическая система координат, наложенная на предыдущую прямоугольную.

Отправим модель на сборку в модуле Assembly. В модуле Step зададим тип расчета Visco. В параметрах расчета укажем время расчета (Time period) 10 с, Incrementation Type: Fixed, Increment Size: 1с.

В модуле Load зададим давление на внутреннюю поверхность конструкции  $2.5e7$  Па. В модуле Boundary Condition зададим смещение на внешнюю поверхность конструкции  $-0.0002$  м.

Вместо амплитуды Instantenious (мгновенная), заданной по умолчанию, зададим свою амплитуду – линейное изменение давления от 0 до максимума в промежутке с 0 с до 1 с, а от 1 с до 10 с – неизменное значение давления и смещения, соответствующее граничным условиям.

Зададим граничные условия симметрии по границе отсечения, чтобы учесть отброшенную часть конструкции. Для этого в окне Edit Boundary Condition поменяем заданную по умолчанию прямоугольную глобальную систему координат на созданную нами

сферическую систему координат. В нашей системе зададим на двух границах отсечения условия симметрии относительно плоскости, перпендикулярной касательной, т. е. перпендикулярно «оси»  $\Theta$  или 2 – YSYMM, а на оставшейся третьей зададим условие симметрии перпендикулярно «оси»  $\Phi$  или 3 – ZSYMM.

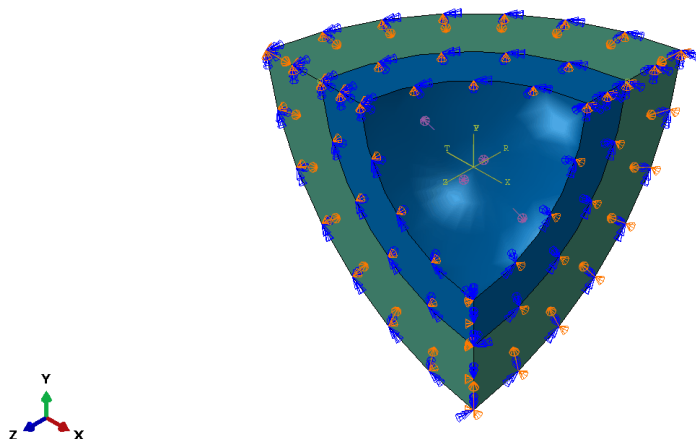


Рис.13. Модель 1/8 части сферы с наложенными условиями симметрии и приложенными нагрузками.

В модуле Mesh зададим тип элемента для нашей геометрии (Assign Mesh Type). Выберем семейство элементов 3D Stress. В настройках элемента уберем галочку в опции Reduced Integration и поставим галочку Hybrid Formulation — использование элементов с Hybrid Formulation позволяет устранить численные ошибки, связанные с несжимаемостью вязкоупругого материала. Задав в Seed Part характерный размер конечного элемента 0.008 см (Approximate Global Size 0.008), а в Assign Mesh Controls тип элемента Tet, создадим треугольную конечно-элементную сетку на геометрии (Mesh Part).

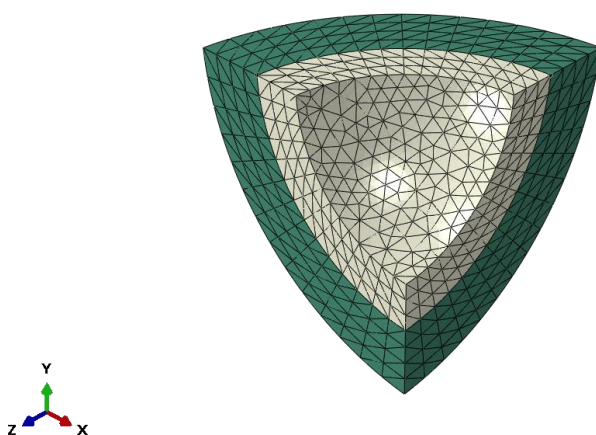


Рис.14. Модель 1/8 части сферы с треугольной конечно-элементной сеткой (20900 элементов).

Запустив задачу на расчет, получаем следующие результаты:

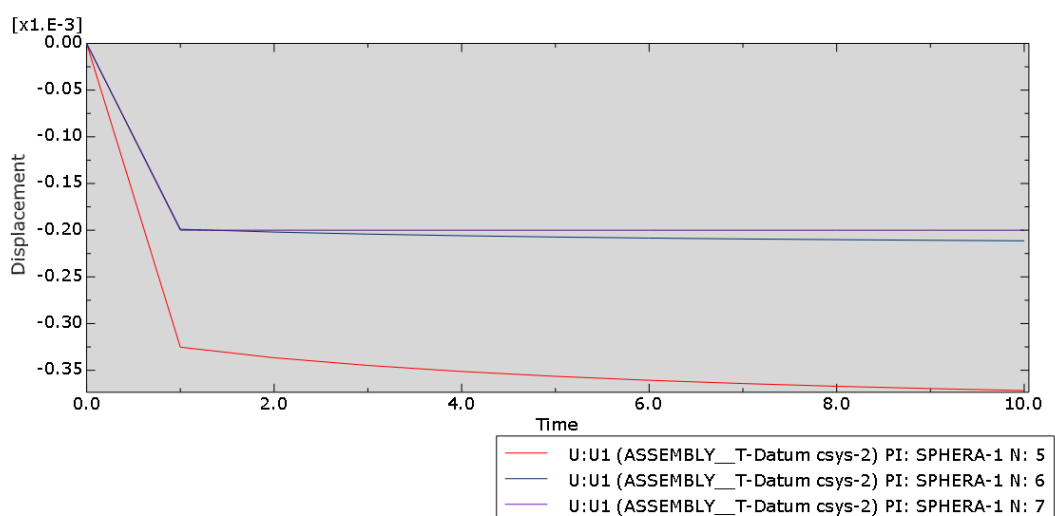


Рис.15. Зависимость перемещений от времени в точках N: 5, N: 6, N:7, соответствующих точкам радиуса  $R=0.05$  м,  $R=0.07$  м,  $R=0.1$  м.

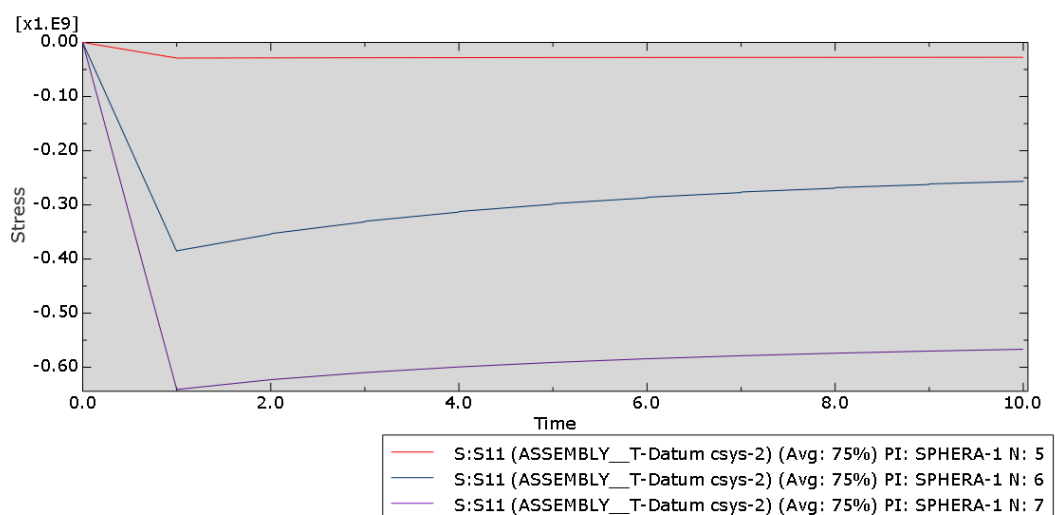


Рис.16. Зависимость радиальных напряжений от времени в точках N: 5, N: 6, N:7, соответствующих точкам радиуса  $R=0.05$  м,  $R=0.07$  м,  $R=0.1$  м.

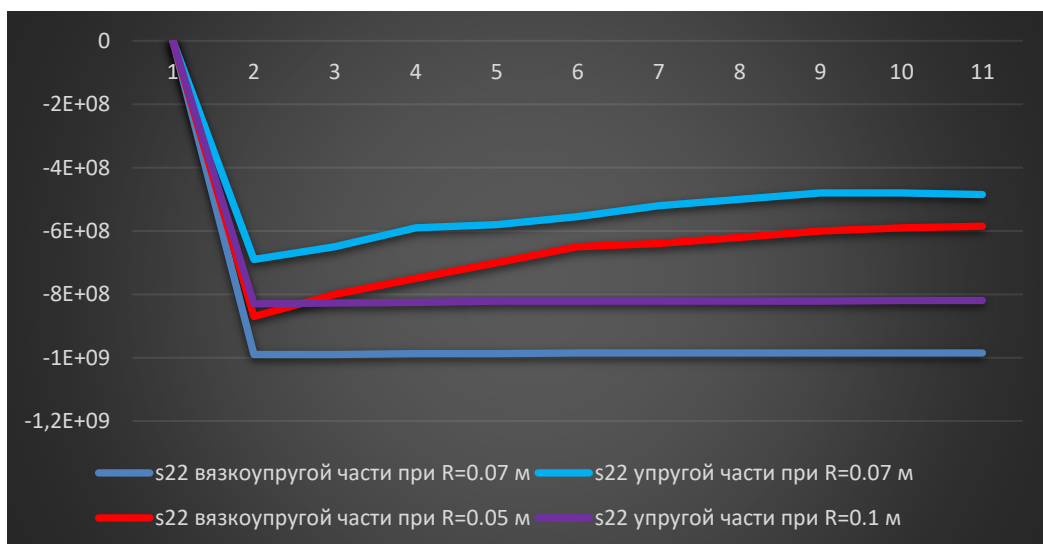


Рис.17. Зависимость тангенциальных напряжений от времени в точках N: 5, N: 6, N:7, соответствующих точкам радиуса  $R=0.05$  м,  $R=0.07$  м,  $R=0.1$  м.

Замечание к Рис.17: Значение на радиусе  $R=0.07$  м качественно соответствует поведению аналитического решения при данном радиусе, наблюдается два значения в один временной момент. Меньшие значения соответствуют материалу и поведению внешней части, большие — материалу и поведению внутренней части сферы.

Далее рассмотрим значения от радиуса в разные моменты времени

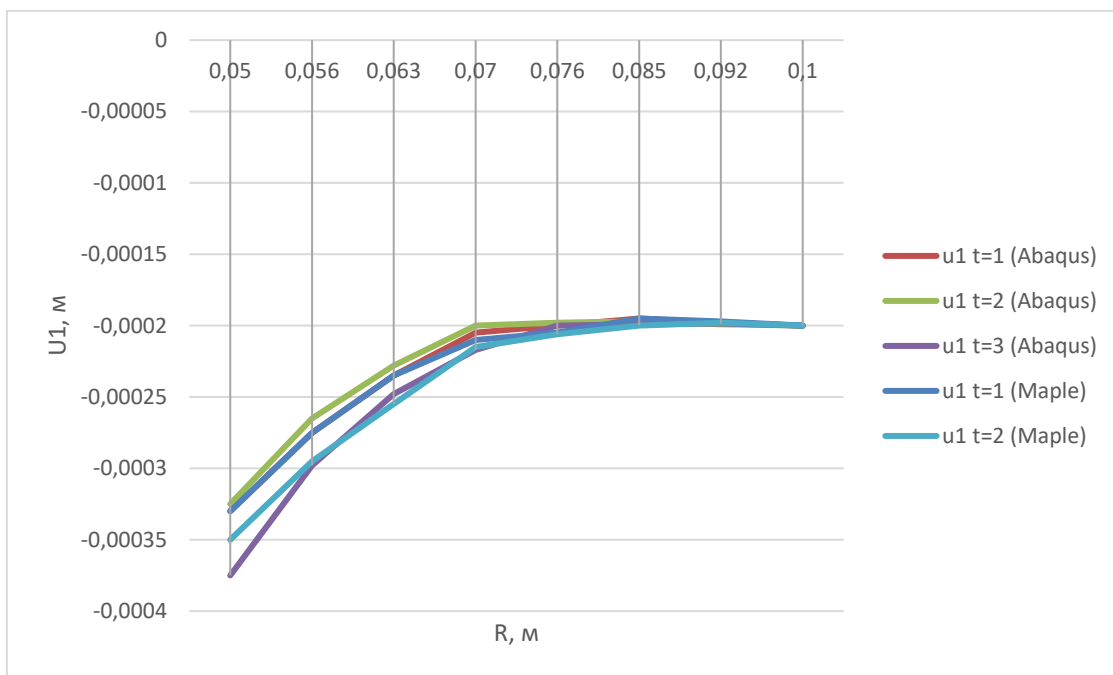


Рис.18. Зависимость перемещений от радиуса в разные моменты времени.  
 $t_1 = 1$  с,  $t_2 = 2$  с,  $t_3 = 3$  с

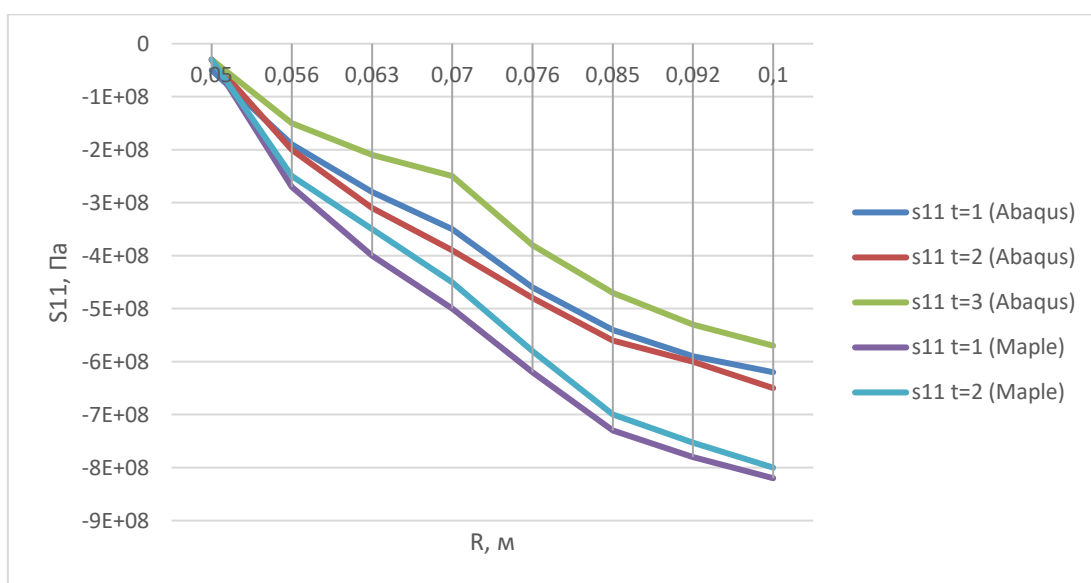


Рис.19. Зависимость радиальных напряжений от радиуса в разные моменты времени.  
 $t_1 = 1$  с,  $t_2 = 2$  с,  $t_3 = 3$  с

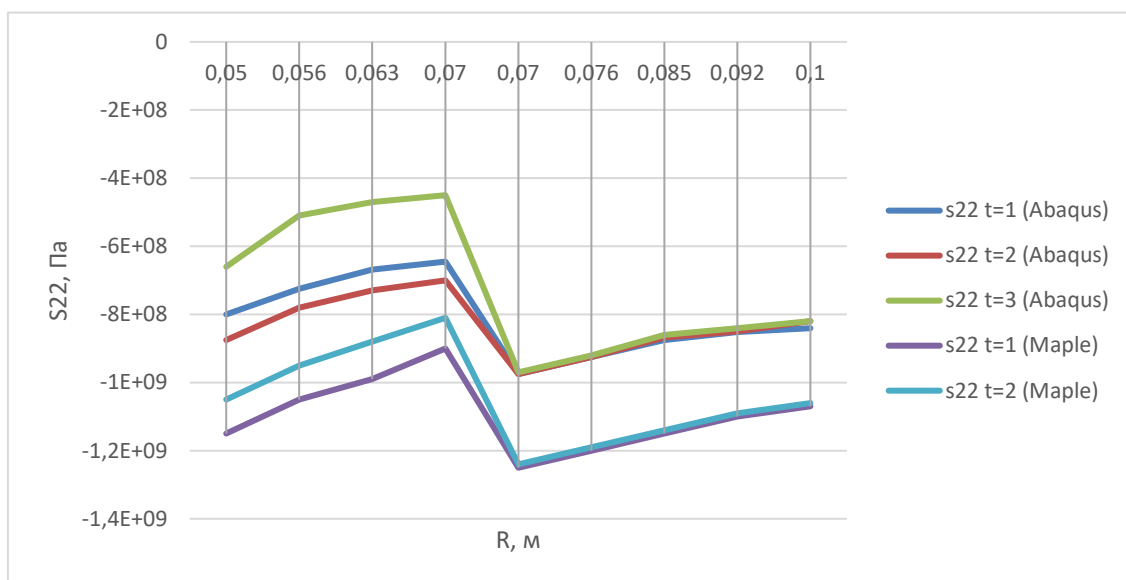


Рис.20. Зависимость тангенциальных напряжений от радиуса в разные моменты времени.  
 $t_1 = 1 \text{ с}$ ,  $t_2 = 2 \text{ с}$ ,  $t_3 = 3 \text{ с}$

### Анализ результатов численного решения

Полученные результаты численного решения качественно совпадают с полученным ранее аналитическим решением.

Действительно, обратим внимание на график перемещений (Рис.18.) и радиальных напряжений (Рис.19.). На отметке по оси X, соответствующей 0.02 м, т. е. радиусу от центра  $R=0.07 \text{ м}$  (граница материалов), выполняется условие идеального контакта слоев. А при той же отметке 0.02 м, т. е. радиусе  $R=0.07 \text{ м}$  на Рис.20. наблюдается скачок напряжений на границе материалов, также данный скачок иллюстрирует Рис.17.

Для подсчета погрешности воспользуемся формулой:  $\delta = \frac{|A_{abaqus} - A_{maple}|}{|A_{maple}|} * 100\%$

Где  $A_{abaqus}$  – результаты численного решения в программном пакете Abaqus,  
 $A_{maple}$  – результаты аналитического решения в программном пакете Maple.



Рис.21. Зависимость ошибки перемещений, компонент тензоров напряжений от радиуса в момент времени  $t=3 \text{ с}$ .

Подсчитав относительную ошибку (Рис.21), перейдем к более точной оценке полученных результатов. По перемещениям ошибка не превышает 10% из чего можно сделать вывод о соответствии значений перемещений в численном и аналитическом решениях. Однако отклонение значений для радиальных и тангенциальных напряжений достигает отметки в 45%, что свидетельствует о низкой точности численного решения.

Приступая к проверке граничных условий, заметим ненулевую относительную ошибку по радиальным напряжениям на внутреннем радиусе — это связано с тем, что на поверхность  $R=a$  по условию требуется задать давление, которое в Abaqus не является граничным условием. Давление назначается не через модуль с граничными условиями (Boundary Conditions), а через модуль с нагрузками (Loads). Таким образом, задача с такой же постановкой, но без давления на внутреннем радиусе, посчитается несмотря на отсутствующее граничное условие. Причем на внутреннем радиусе будут наблюдаться изменения радиальных напряжений, являющихся следствием других Г.У. Тогда можно сделать предположение о том, что при заданном давлении радиальные напряжения на внутреннем радиусе не будут точно соответствовать заданному значению, следствием чего будет растущая со временем относительная ошибка радиальных напряжений на внутреннем радиусе  $R=a$ . В подтверждение данного предположения можно рассмотреть нулевую относительную ошибку по перемещениям на внешнем радиусе  $R=c$ , ведь условия на перемещения задаются в модуле с граничными условиями (Boundary Conditions).

Рассматривая Рис.15-17. Наблюдаем скачек из 0 с в 1 с — это связано с особенностью Abaqus.

Расскажем немного подробнее об особенности:

За порядок применения начальных и граничных условий в модели отвечает модуль Step, где по умолчанию существует шаг Initial. Все привязанные к этому шагу условия применяются в нулевой момент времени. Граничные условия на перемещение и давление стоит привязать к этому шагу, но программа не предусматривает это действие. (Рис.22). Поэтому создается второй шаг в модуле Step, который называю Step-1. Данный шаг будет применять привязанные к нему условия в момент времени  $t=1$ .

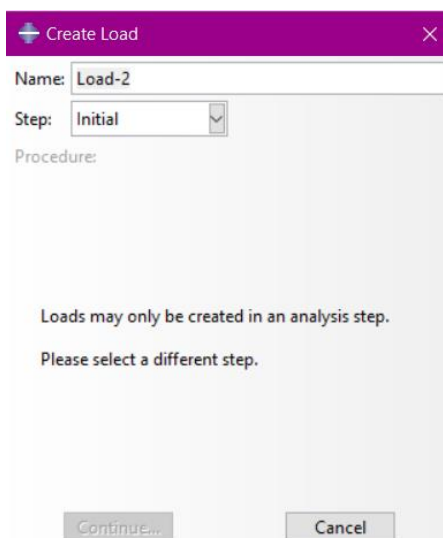


Рис.22. Окно программы Abaqus для создания нагрузки.

## Вывод

В программном пакете Maple получено аналитическое решение для задачи о напряженно-

деформированном состоянии составной толстостенной сферой, внутренняя часть которой выполнена из упруго-вязкого материала, а внешняя — из упругого. Были построены графики напряжений и перемещений при разном времени. Из результатов видно, что условие идеального контакта выполняется и для перемещений, и радиальных напряжений. Начальные и граничные условия также выполняются, что в совокупности может говорить о том, что задача решена верно.

Был проведен анализ радиальных и тангенциальных напряжений на прочность. Исходя из него можно сделать вывод, что при данной постановке задачи условие прочности будет нарушено. Также было проведено дополнительное исследование напряжений при переменном перемещении на внешнем радиусе.

Также было получено численное решение в программном пакете Abaqus. Результаты численного решения качественно совпадают с полученным ранее аналитическим решением. Представлены и проанализированы графики перемещений, радиальных и тангенциальных напряжений. Однако анализ относительной ошибки показал, что данное решение обладает низкой точностью. Предположительно, для повышения точности решения следует использовать иной способ реализации численного решения.