Растяжение-сжатие упругих стержней

truss - стержень, тяж
beam - балка

Решение задач теории упругости м. построить 2 методами

1. Интегрирование систем диффер. уравнений
2. Минимизируется суммарная работа (потенц. энергия) напряжений и внешн. сил.

Запишем потенциальную энергию:

$$\Pi = \Lambda - W, \text{ где}$$

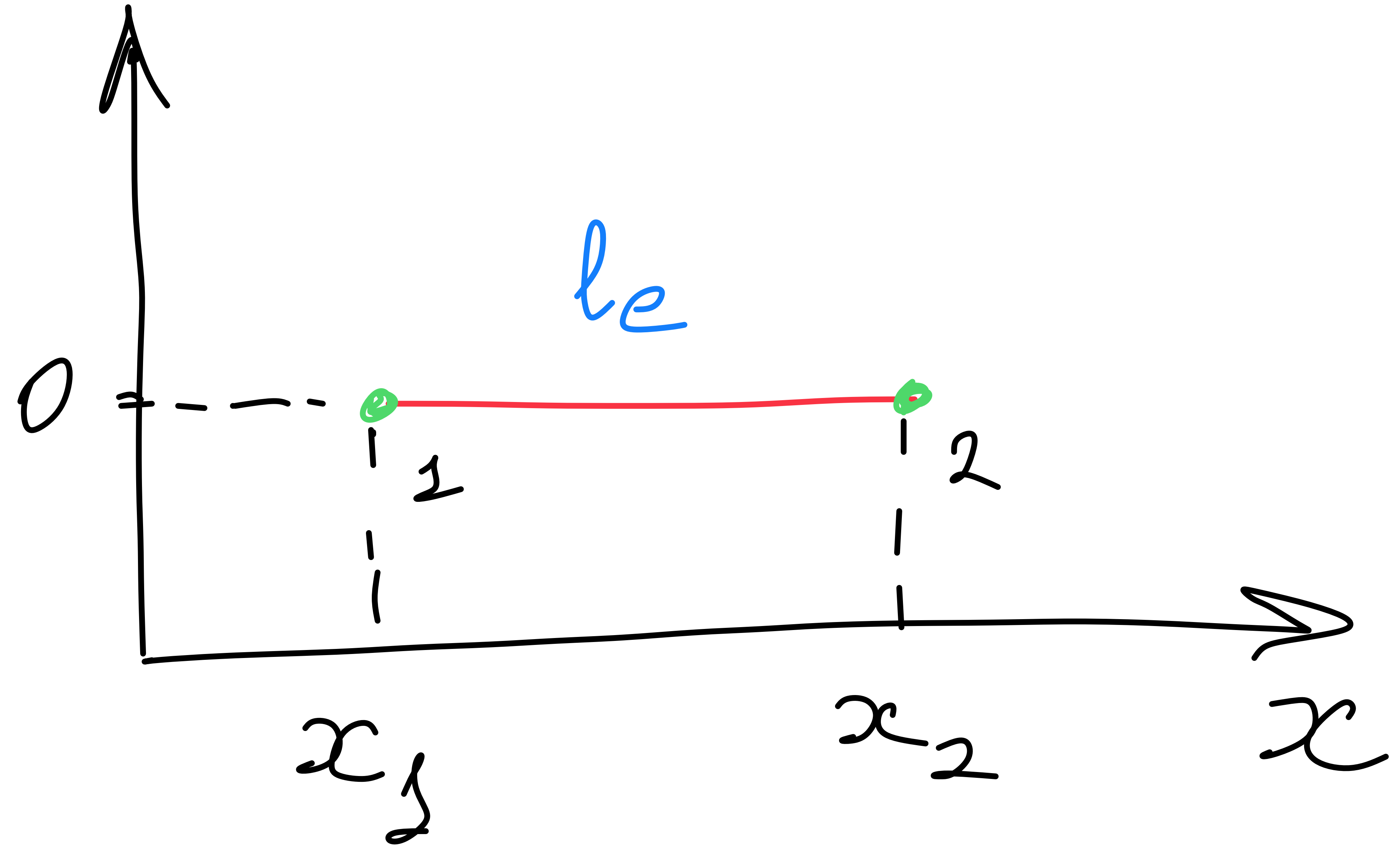
Λ - потенциальная энергия деформаций

W - потенциальная энергия массовых, поверхностных сил.

$d\Pi = d\Lambda - dW$ - для объёма dV

Работа внутренних сил

$$d\Lambda = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV \; ; \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\}dV \qquad (1)$$



$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \quad (2)$$

$$u = u_1 \cdot N_1 + u_2 N_2 = [N_1 \; N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= [N] \cdot \{u^e\} \quad (3)$$

$$\{u^e\}^T = \{u_1 \; u_2\}, \quad [N] = [N_1 \; N_2]$$

Подставим (3) в (2):

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial}{\partial x}[N] \cdot \{u^e\} = [B] \cdot \{u^e\} \quad (3^*)$$

$$[B] = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}\right] \text{ — матрица градиентов} \quad (4)$$

Найдём функции N_1 и N_2

Пусть $u = A + Bx$, тогда:

$N_1 = A_1 + B_1 x$

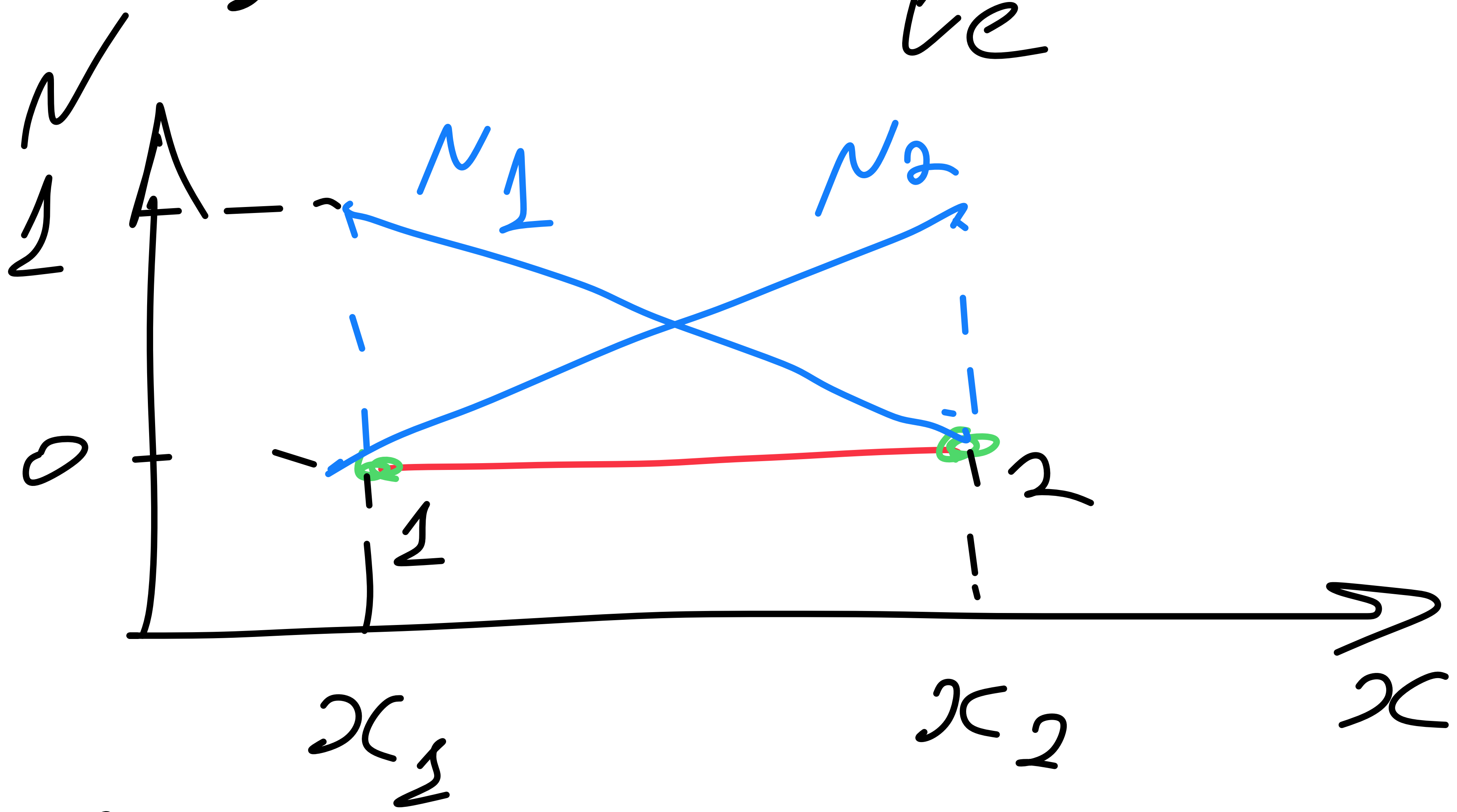
$N_2 = A_2 + B_2 x$

$\begin{cases} A_1 + B_1 \cdot 0 = 1 \\ A_2 + B_2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$ при $x = 0$

$A_1 = 1, \; A_2 = 0$

$\begin{cases} A_1 + B_1 \cdot l_e = 0 \\ A_2 + B_2 \cdot l_e = 1 \end{cases}$ при $x = l_e$; $\Rightarrow B_1 = -\dfrac{1}{l_e}$; $B_2 = \dfrac{1}{l_e}$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_e} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{l_e} \qquad (5)$$



Подставим (5) в (4):

$$[B] = \left[-\frac{1}{l_e} \quad \frac{1}{l_e} \right]$$

$$\{\sigma\} = E \cdot \{\varepsilon\} = E[B] \cdot \{u^e\} \qquad (6)$$

E - модуль Юнга

Подставим (3*) и (6) в (1):

$$\Lambda = \frac{1}{2}\int_V \{u^e\}^T \cdot [B]^T \cdot E\,[B]\,\{u^e\}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot l_e \cdot A\,\{u^e\}^T \cdot [B]^T \cdot [B] \cdot \{u^e\} =$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot l_e A\,\{u^e\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \cdot \{u^e\} =$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot l_e \cdot A\,\{u^e\}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e^2} & -\frac{1}{l_e^2} \\ -\frac{1}{l_e^2} & \frac{1}{l_e^2} \end{bmatrix} \{u^e\} = \frac{1}{2}\,\frac{EA}{l_e}\,\{u^e\}^T \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u^e\}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\{u^e\}^T \cdot \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u^e\}$$

Работа внешних сил:

$$W = W_c + W_e + W_v$$

$$W_c = \{u^e\}^T \cdot \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$ – сосредоточенные силы

$$W_e = \int_l \{u^e\}^T \cdot [N]^T \cdot \{P_l\} dx$$ – поверхностные силы

$$W_v = \int_v \{u^e\}^T [N]^T \{P_v\} dV$$ – объёмные, массовые силы

Запишем функционал потенциальной энергии

$$\Pi = \underline{\frac{1}{2}\{u^e\}^T} \cdot \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u^e\} -$$

$$-\left(\{u^e\}^T \cdot \{P_c\} + \int_l [u^e]^T \cdot \{N\}^T \{P_e\}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_V [u^e]^T \cdot \{N\}^T \cdot \{P_V\}\, dV \right)$$

Вариационный принцип:
искомые перемещения отвечают минимуму функционала потенциальной энергии. Минимум функционала потенциальной энергии достигается, когда первая вариация этого функционала равна нулю

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{u^e\}} = 0$$ ~ первая вариация ф-ла потенц. энергии

$$\frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u^e\} - \left(\{P_c\} + \int_V [N]^T \cdot \{P_V\} dV + \int_l [N]^T \cdot \{P_e\} dx \right) = 0 \quad (7)$$

$$[k^e] = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

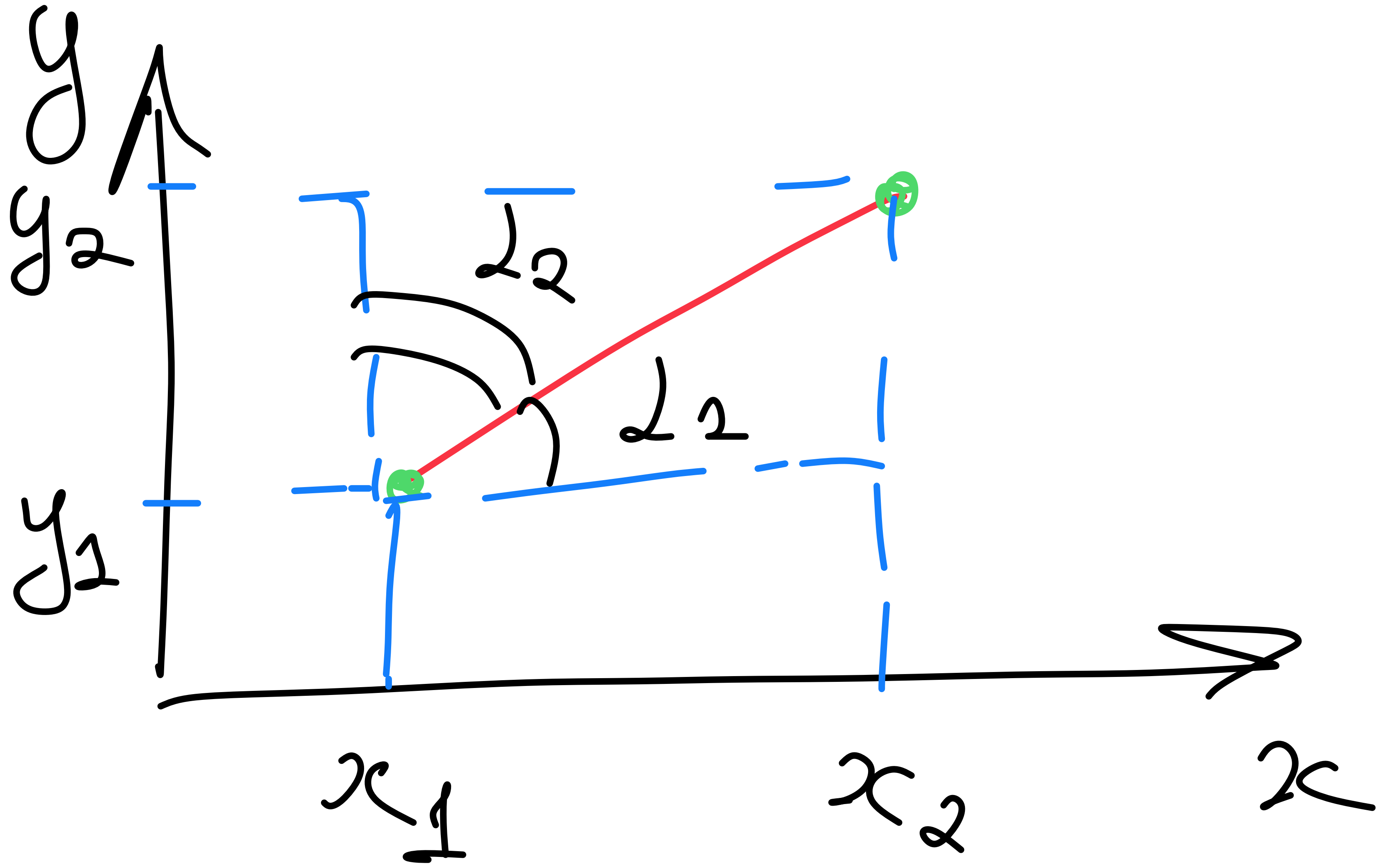
$$\{f^e\} = \{P_c\} + \int_V [N]^T \cdot \{P_V\} dV + \int_l [N]^T \{P_e\} dx \quad (9)$$

Запишем (7) с учётом (8) и (9):

$$[k^e]\cdot\{u^e\} = \{F^e\} \qquad (10)$$

(10) – основное уравнение МКЭ для одного КЭ.

$[k^e]$ – матрица жёсткости КЭ



$\{u^e\} = [T]\cdot\{u^e_{gl}\}$, где

$\{u^e_{gl}\}$ – перемещения в глобальной СК

$[T]$ – матрица трансформации

$$\{u^e_{gl}\}^T = \{u_1^x \quad u_1^y \quad u_2^x \quad u_2^y\}$$

$$u_1 = u_1^x \cdot \cos\alpha_1 + u_1^y \cdot \cos\alpha_2 = u_1^x \frac{x_2 - x_1}{l_e} + u_1^y \frac{y_2 - y_1}{l_e}$$

$$u_2 = u_2^x \cdot \cos\alpha_1 + u_2^y \cdot \cos\alpha_2 = u_2^x \frac{x_2 - x_1}{l_e} + u_2^y \frac{y_2 - y_1}{l_e}$$

$$l_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_e}; \quad m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{l_e}$$

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^x l_{12} + u_1^y m_{12} \\ u_2^x l_{12} + u_2^y \cdot m_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{12} & m_{12} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_2^x \\ u_2^y \end{Bmatrix} = [T] \cdot \{u^e_{gl}\}; \quad (11) \quad [T] = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{12} & m_{12} \end{bmatrix}$$

подставим (11) в (10):

$$[k^e][T]\cdot\{u^e_{ge}\} = \{F^e\}; \quad \{F^e\} = [T]\{F^e_{ge}\}$$

$$[k^e]\cdot[T]\cdot\{u^e_{ge}\} = [T]\{F^e_{ge}\} \quad (12)$$

домножим (12) слева на $[T]^T$

$$[T]^T[k^e]\cdot[T]\cdot\{u^e_{ge}\} = \{F^e_{ge}\}; \quad [T]^T\cdot[T] = [E]$$

$$[k^e_{ge}] = [T]^T\cdot[k^e]\cdot[T]; \quad (*)$$

тогда (10) запишем в глобальной СК:

$$[k^e_{ge}]\cdot\{u^e_{ge}\} = \{F^e_{ge}\}$$ – основное уравнение МКЭ в глобальной СК

Если количество элементо $e > 1$:

$$[K] = \sum_e [k^e_{ge}]$$ – матрица жесткости системы

$$\{F\} = \sum_e \{Э^e_{ge}\}$$ –

Тогда основное уравнение МКЭ:

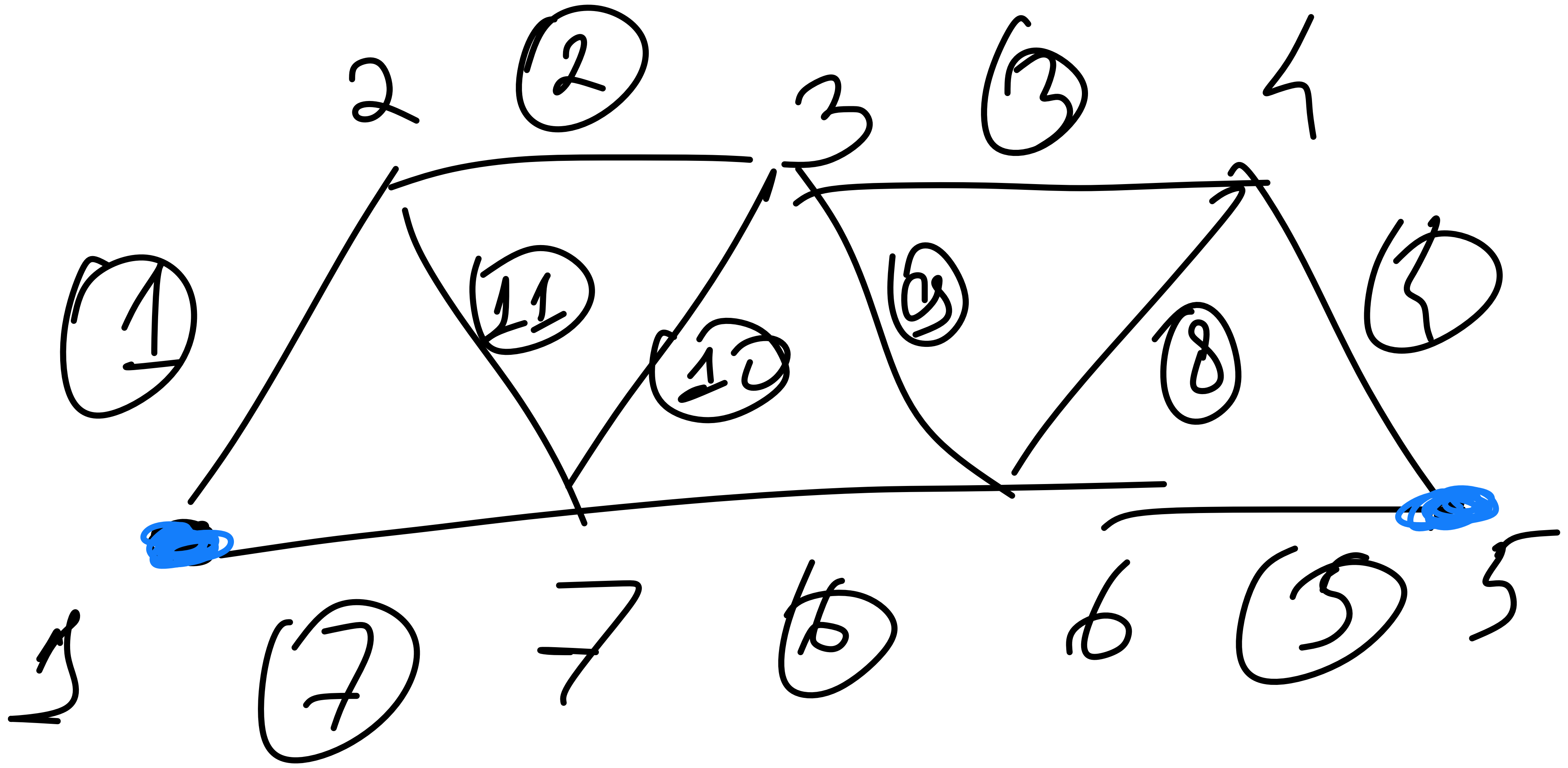
$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (13)$$

$$\{u\}^T = \{u_1^x \;\; u_1^y \;\; u_2^x \;\; u_2^y \;\; u_3^x \;\; u_3^y \; \ldots\}$$

$$\{F\}^T = \{F_1^x \;\; F_1^y \;\; \ldots \}$$

$$[K] = [A]^T [k^e_{ge}] [A]$$

$[A]$ ...

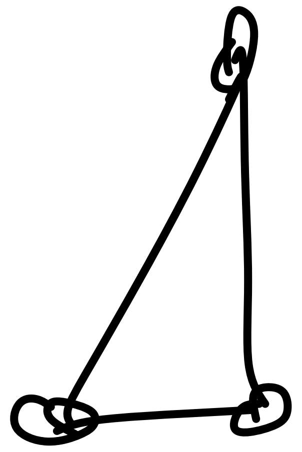


E_1 1, 2

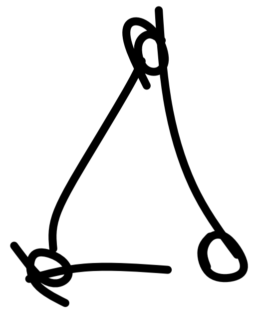
E_2 2, 3

...

E_7 7, 1



6 ст. св



18 ст. св.

Графики u_x, u_y; усилия

Таблица u_x, u_y

Глобальн. матрица жёсткости $[K]$:

1) вырожденная
2) ленточная
3) разряженная

Задание ГУ:

$u_1^x = 0$

$u_1^y = 0$

$u_5^x = 0$

$u_5^y = 0$

$$\cancel{k_{11} \cdot u_1^x + k_{12} \cdot u_1^y + \dots = F_1^x}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & u_1^x \\
0 & k_{22} & k_{23} & \dots & u_1^y \\
\dots & \dots & \dots & \dots & u_2^x \\
 & & & & u_2^y
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ \vdots \\ u_{NN}^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ \vdots \\ f_N^y \end{Bmatrix}$$

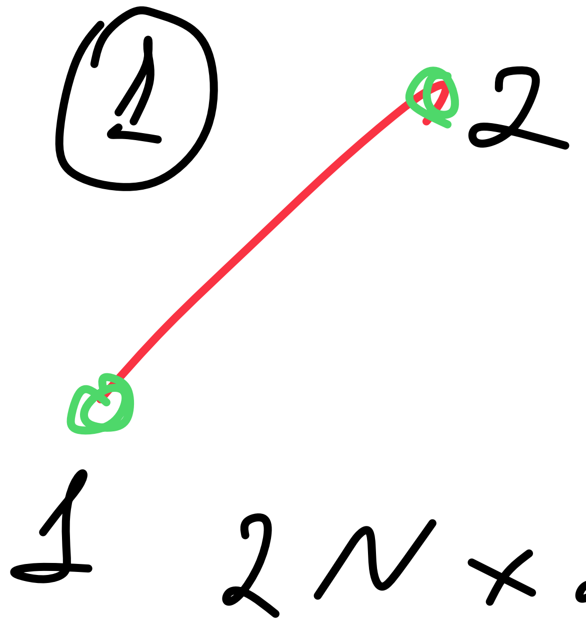
Сложение матриц жёсткости:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{1}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{2}} & & \overline{N} \\
1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \ldots & k_{1N} \\
 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \ldots & k_{2N} \\
 & & & & & \ldots & \vdots \\
N & k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & k_{N4} & \ldots & k_{NN}
\end{array}
$$

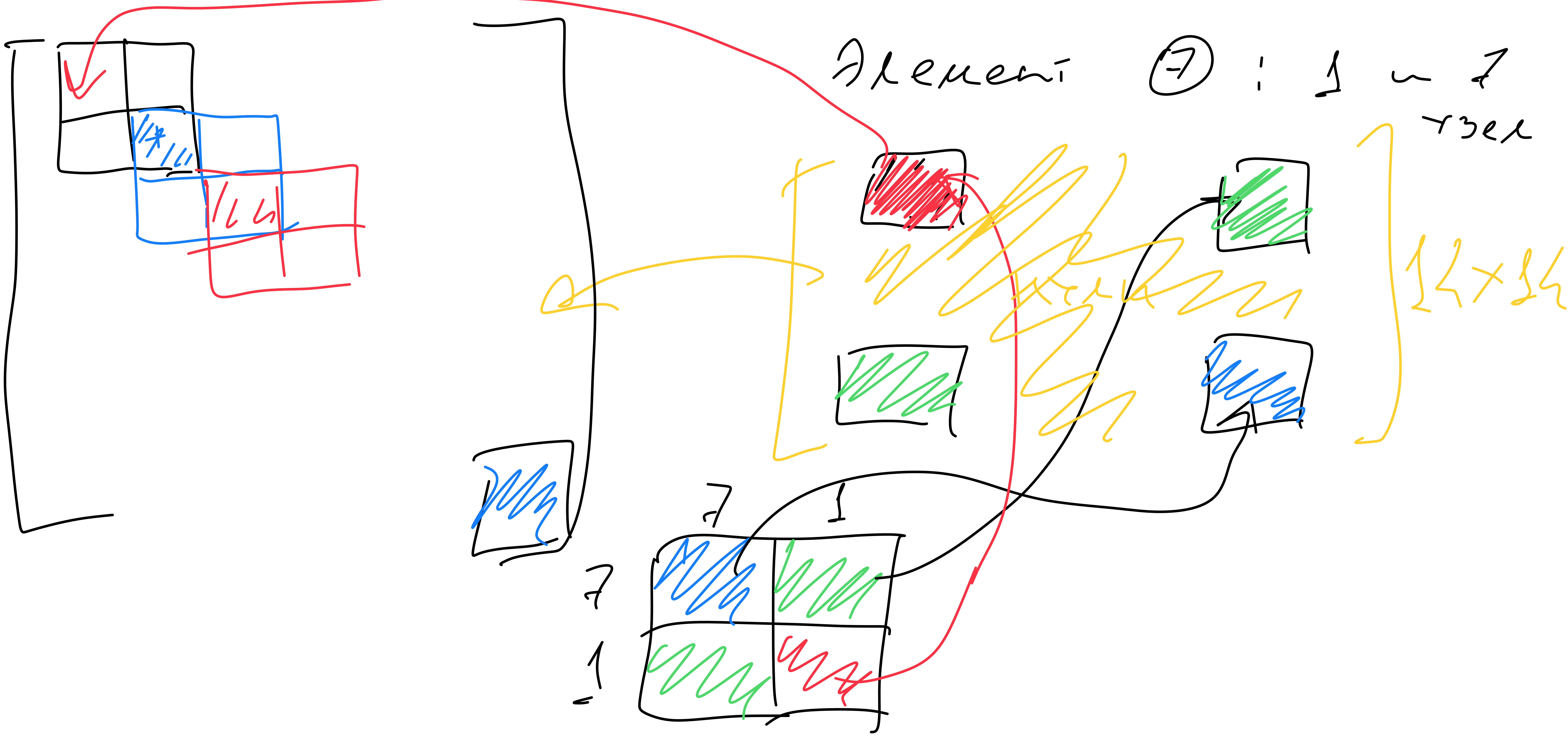
$$
\left[\begin{array}{cc|cc}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\
\hline
k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}
\end{array}\right] = [k^e_{gl}]
$$

4×4 → $2N \times 2N$

14×14

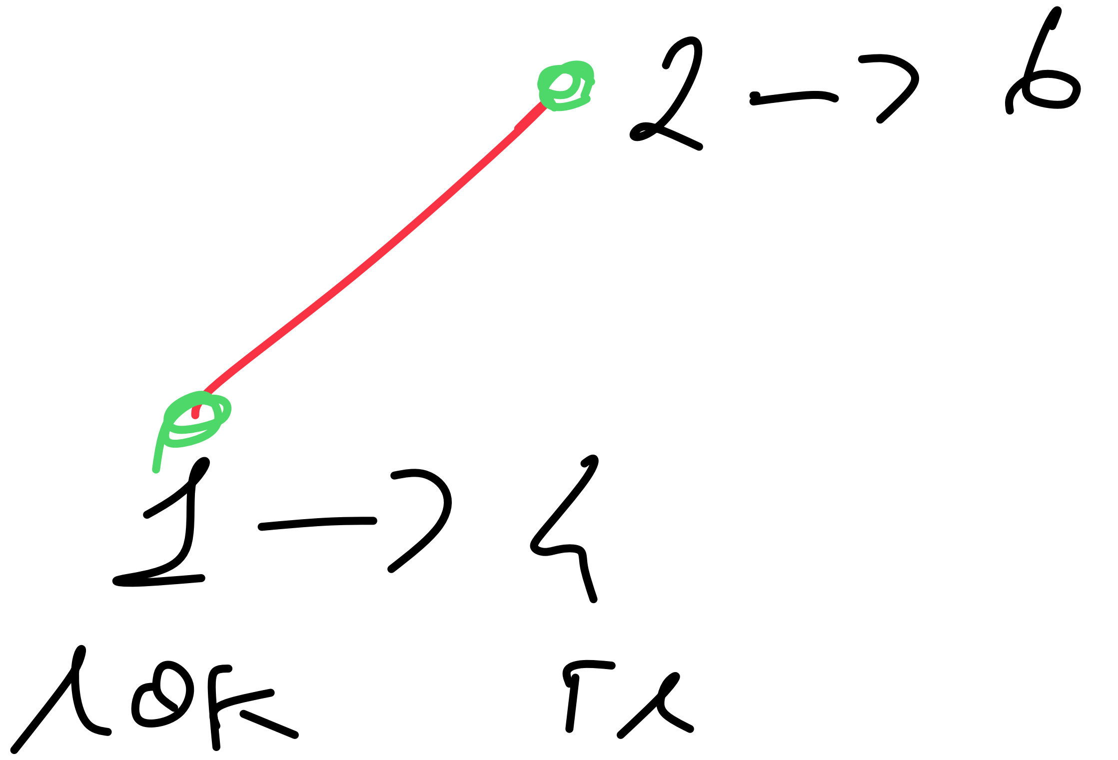


Элемент 7 : 1 и 7 узел



Элемент 7

8 : 4 и 6 узел



$k_{11} \to k_{2\cdot 4-1 \;\; 2\cdot 4-1}$

$k_{22} \to k_{2\cdot 4 \;\; 2\cdot 4}$

$k_{33} \to k_{2\cdot 6-1 \;\; 2\cdot 6-1}$

$k_{44} \to k_{2\cdot 6 \;\; 2\cdot 6}$

$k_{21} \to k_{2\cdot 4 \;\; 2\cdot 4-1}$

i = Node_label1 = 4

j = Node_label2 = 6

K[2·i−1; 2i−1] += k_local[1;1]

k[2·i; 2i] += k_local[2;2]

k[2·j−1; 2j−1] += k_local[3;3]

k[2j; 2j] += k_local[4;4]

1. Поле u_x

2. Поле u_y

3. Таблица - сравнение u_x и u_y

4. Поле усилий F_x

5. Таблица - сравнение F_x

Field_u_x
0,01 0,02

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma_x \cdot A$$

*Node
1 0,5 0,5
2 0,5 1,5

*Elemets
2 1 2

Paraview ; -> *.vtk -> пример.