Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Индивидуальное задание № 2

тема "Метод конечных разностей. Уравнение колебаний струны "

дисциплина "Вычислительная механика"  
Вариант 3

Выполнила студентка гр. 5030103/90301 О. Д. Блащук

Преподаватель: Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2021

Содержание:

[1. Формулировка задачи 3](#_Toc43323906)

[2. Алгоритм метода 3](#_Toc43323908)

[3. Результаты 5](#_Toc43323909)  
[4. Заключение 9](#_Toc43323909)

[5. Код программы 10](#_Toc43323909)

1. Формулировка задачи.

Используя метод конечных разностей составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа (уравнения колебания струны) при заданных начальных условиях. Решение выполнить при для .

Начальные условия:

Граничные условия:

Уравнение колебаний струны – частный случай волнового уравнения.

В общем виде волновое уравнение:

(1)

1. Алгоритм метода.

Разложим в окрестности точки в ряд:

(2)

(3)

(4)

(5)

Разложим в окрестности точки в ряд:

(6)

(7)

(8)

(9)

Введем сетки для времени и для пространства . Тогда:

(10)

(11)

Конечно-разностное уравнение примет вид:

(12)

Явная схема метода:

(13)

Для преобразования начальных условий воспользуемся формулой 2-го порядка точности:

*,* (14)

где

Для вывода неявной схемы интегрирования введем значение для аппроксимации частных производных:

(15)

(16)

Далее воспользуемся формулами:

(17)

(18)

(19)(20)

(21)

Решение можно получить неявно, используя метод прогонки:   
Прямой ход:

(22) (23)

(24) (25)

Обратный ход:

(26)

Отдельно отметим, что шаг по времени необходимо выбирать из условия Куранта о сходимости явной схемы интегрирования: (27)

1. Результаты.  
   1. Для явной схемы:

|  |
| --- |
|  |
| Таблица 1. Значения поперечного перемещения струны в зависимости от координаты *x* и времени *t* |

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 1. Модель поперечного перемещения колебаний струны (явная схема)  при |

|  |
| --- |
|  |
| Рис.2. Поперечное перемещение в различные моменты времени |

* 1. Для неявной схемы:

|  |
| --- |
|  |
| Таблица 2. Значения поперечного перемещения струны в зависимости от координаты *x* и времени *t* |

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 3. Модель поперечного перемещения колебаний струны (неявная схема)  при |

|  |
| --- |
|  |
| Рис.4. Поперечное перемещение в различные моменты времени |

* 1. Разрез явной и неявной схемы интегрирования в фиксированный момент времени

|  |
| --- |
|  |
| Рис.5. Разрезы в момент времени t = 0.25 для неявной и явной схем при |

* 1. Сравнения результатов явной и неявной схемы интегрирования при уменьшении шага по времени

Используемый в предыдущий исследованиях шаг был уменьшен до

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Результат явной схемы при | Результат неявной схемы при |
| Рис.6. Сравнение моделей поперечного перемещения колебаний струны при уменьшении шага по времени | |

|  |
| --- |
|  |
| Рис.7. Разрезы в момент времени t = 0.25 для неявной и явной схемы при |

1. Заключение

Произведено решение задачи теплопроводности при помощи метода конечных разностей с применением неявной и явной схемы интегрирования. По графику сравнения разрезов (Рис.5) можно сделать вывод, что неявная схема дает более гладкое решение, нежели явная.

Согласно условию Куранта, при взятии шага по времени много меньшего, чем шаг по координате , явная схема должна показать лучшую сходимость. Это заметно при сравнении моделей, полученных явной (Рис.1) и неявной (Рис.3) схемами интегрирования с моделями, полученными после уменьшения шага (Рис.6). Также это можно увидеть на при сравнении разрезов в первом (Рис.5) и во втором (Рис.7) случае.

1. Код программы
   1. Для явной схемы

x\_0=0;

x\_end=1;

t\_0=0;

t\_end=0.5;

h=0.1;

delta\_t=0.05; %шаг по времени

% Вызов сеток и создание матрицы

[X,h]= GridRavn1(x\_0,x\_end,h);

[T,delta\_t]= GridRavn(t\_0,t\_end,delta\_t);

U=zeros(length(T),length(X));

% Заполнение граничными и начальными условиями

%ГУ левый столбец U(0,t)

for j=1:length(T)

U(length(T)-j+1,1)=1+2\*T(j);

end

%ГУ правый столбец U(l,t)

for j=1:length(T)

U(length(T)-j+1,length(X))=0;

end

%НУ нижняя строка U(x,0)

for k=1:length(X)

U(length(T),k)=cos(pi/2\*X(k));

end

%НУ вторая снизу строка U\_t(x,0)

%2-й порядок точности

V=zeros(1,length(X));

for k=1:length(X)

V(1,k)=X(k)^2;

end

for k=2:length(X)-1

U(length(T)-1,k)=U(length(T),k) + V(1,k)\*delta\_t + delta\_t^2/(2\*h^2)\*(U(length(T),k+1)-2\*U(length(T),k)+U(length(T),k-1));

end

% Заполнение матрицы явной схемой

for k=2:length(T)-1

for j=2:length(X)-1

U(length(T)-k,j)=(delta\_t^2/h^2)\*(U(length(T)-k+1,j-1)- 2\*U(length(T)-k+1,j)+ U(length(T)-k+1,j+1)) + 2\*U(length(T)-k+1,j) - U(length(T)-k+2,j);

end

end

U=flip(U',2)

U

figure

hold on

grid on

ylabel('Координата x')

xlabel('Момент времени t')

zlabel('Поперечное перемещение U')

title('График поперечного перемещения струны от координаты и времени')

surf(U)

colorbar

% Используемые функции

function [T,delta\_t]= GridRavn(t\_0,t\_end,delta\_t);

T=[];

n=abs(t\_end-t\_0)/delta\_t;

for i=0:n

T=[T,t\_0+delta\_t\*i];

end

end

function [XGrid,h]= GridRavn1(x\_0,x\_end,h);

XGrid=[];

n=abs(x\_end-x\_0)/h;

for i=0:n

XGrid=[XGrid,x\_0+h\*i];

end

end

* 1. Для неявной схемы

x\_0=0;

x\_end=1;

t\_0=0;

t\_end=0.5;

h=0.1;

delta\_t=0.05; % шаг по времени

% Вызов сеток и создание матрицы

[X,h]= GridRavn1(x\_0,x\_end,h);

[T,delta\_t]= GridRavn(t\_0,t\_end,delta\_t);

U=zeros(length(X),length(T));

% Заполнение граничными и начальными условиями

%ГУ левый столбец U(0,t)

for j=1:length(T)

U(1,j)=1+2\*T(j);

end

%ГУ правый столбец U(l,t)

for j=1:length(T)

U(length(X),j)=0;

end

%НУ нижняя строка U(x,0)

for k=1:length(X)

U(k,1)=cos(pi/2\*X(k));

end

%НУ вторая снизу строка U\_t(x,0)

%2-й порядок точности

V=[];

for k=1:length(X)

V(k)=X(k)^2;

end

for k=2:length(X)-1

U(k,2)=U(k,1) + V(k)\*delta\_t + delta\_t^2/(2\*h^2)\*(U(k+1,1)-2\*U(k,1)+U(k-1,1));

end

% Начало метода прогонки

A=1/h^2;

B=(h^2+2\*delta\_t^2)/(delta\_t^2\*h^2);

C=1/h^2;

for k=2:length(T)-1

for j=1:length(X)

F(j)=2\*U(j,k)/delta\_t^2 - U(j,k-1)/delta\_t^2;

end

% Прямой ход

P(1)=C/B;

Q(1)=F(1)/B;

for j=2:length(X)

P(j)=C/(B-A\*P(j-1));

Q(j)=(F(j)+A\*Q(j-1))/(B-A\*P(j-1));

end

% Обратный ход

for j=length(X)-1:-1:2

U(j,k+1)=P(j)\*U(j+1,k+1)+Q(j);

end

end

U

figure

hold on

grid on

ylabel('Координата x')

xlabel('Момент времени t')

zlabel('Поперечное перемещение U')

title('График поперечного перемещения струны от координаты и времени')

surf(U)

colorbar

figure

hold on

grid on

K = U(:, 3);

K1 = U(:, 6);

K2 = U(:, 9);

plot(K,'-b','Linewidth',1)

plot(K1,'-r','Linewidth',1)

plot(K2,'-g','Linewidth',1)

legend('t=0.01','t=0.025','t=0.04')

title('Разрезы в различные моменты времени (неявная схема)')

ylabel('U')

xlabel('x')

% Используемые функции

function [T,delta\_t]= GridRavn(t\_0,t\_end,delta\_t);

T=[];

n=abs(t\_end-t\_0)/delta\_t;

for i=0:n

T=[T,t\_0+delta\_t\*i];

end

end

function [XGrid,h]= GridRavn1(x\_0,x\_end,h);

XGrid=[];

n=abs(x\_end-x\_0)/h;

for i=0:n

XGrid=[XGrid,x\_0+h\*i];

end

end