Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Индивидуальное задание № 3

тема "Метод конечных разностей. Решение уравнения Лапласа "

дисциплина "Вычислительная механика"  
Вариант 3

Выполнила студентка гр. 5030103/90301 О. Д. Блащук

Преподаватель: Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2021

Содержание:

[1. Формулировка задачи 3](#_Toc43323906)

[2. Алгоритм метода 3](#_Toc43323908)

[3. Результаты 4](#_Toc43323909)  
[4. Заключение 7](#_Toc43323909)

[5. Код программы 8](#_Toc43323909)

1. Формулировка задачи.

Используя метод конечных разностей составить приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1)

При решении задачи использовать итерационный метод. Решение выполнить при и с заданной точностью до .

Задача Дирихле:

В рамках текущей задачи будем рассматривать уравнение Лапласа в двумерной Декартовой системе координат.

1. Алгоритм метода.

Разложим в окрестности точки в ряд:

(2)

(3)

(4)

(5)

Разложим в окрестности точки в ряд:

(6)

(7)

(8)

(9)

Введем сетки для времени и для пространства . Тогда:

(10)

(11)

Конечно-разностное уравнение примет вид:

(12)

Вспомогательное уравнение:

(13)

Шаг по методу:

(14)

Критерий останова:­

(15)

1. Результаты.  
     
   3.1. Нахождение оптимальной константы метода

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 |
|  | 10 | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 |

Таблица 1. Зависимость числа итераций от значения константы метода

|  |
| --- |
|  |
| Рис.1. График зависимости числа итераций от значения константы метода |

Исходя из этого сделаем вывод, что для данной задачи оптимальной константой метода будут являться и . Учитывая тенденцию зависимости к уменьшению числа итераций с увеличением , далее будем рассматривать .

3.2. Исследование решения при и .

|  |
| --- |
|  |
| Таблица 2. Матрица U (x, y) при и шаге h |

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 2. Поверхность решения U (x, y) при и шаге h |

Для проверки сходимости схемы уменьшим шаг до *h :*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Рис.3. Поверхность решения U (x, y) =0 | Рис.4. Поверхность решения U (x, y) |
| Поверхность решения U (x, y) при и шаге h | |

Видим, что решение получается довольно гладкое.

Построим разрезы решения при фиксированных значениях координат.

|  |
| --- |
|  |
| |  | | --- | | Рис.5. Разрезы при фиксированной координате x при и шаге h | |

|  |
| --- |
|  |
| Рис.5. Разрезы при фиксированной координате y при и шаге h |

1. Заключение

Произведено решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной Декартовой системе координат с использованием итерационного метода.

Можно Рис.1. сделать вывод о том, что оптимальной константой в текущем примере будет являться Такие образом, для подробного исследования были взяты результаты, полученные методом последовательной верхней релаксации.

1. Код программы

x\_0=0;

x\_end=1;

y\_0=0;

y\_end=1;

h=0.2;

% Вызов сеток и создание матрицы

[X,h]= GridRavn(x\_0,x\_end,h);

[Y,h]= GridRavn(y\_0,y\_end,h);

U=zeros(length(Y),length(X));

U2=zeros(length(Y),length(X));

% Заполнение граничными и начальными условиями

%ГУ левый столбец U(0,y)

for k=1:length(Y)

U(length(Y)-k+1,1)=50\*Y(k)\*(1-Y(k)^2);

end

%ГУ верхняя строка U(x,l)

for k=1:length(X)

U(1,k)=0;

end

%ГУ правый столбец U(l,y)

for j=1:length(Y)

U(length(Y)-j+1,length(X))=0;

end

%ГУ нижняя строка U(x,0)

for j=1:length(X)

U(length(Y),j)=50\*sin(pi\*X(j));

end

V=U;

omega=[];

iter=[];

for w=0.1:0.1:1.9

i=0;

L=1;

U=V;

while L>0.01

delta=[];

for k=1:length(Y)-2

for j=2:length(X)-1

U(length(Y)-k,j) = 1/4\*(U(length(Y)-k+1,j) + U(length(Y)-k-1,j) + U(length(Y)-k,j-1)+ U(length(Y)-k,j+1));

end

end

U1=U;

for k=1:length(Y)-2

for j=2:length(X)-1

U1(length(Y)-k,j) = 1/4\*(U1(length(Y)-k+1,j) + U1(length(Y)-k-1,j) + U1(length(Y)-k,j-1)+ U1(length(Y)-k,j+1));

end

end

for k=0:length(Y)-1

for j=1:length(X)

U2(length(Y)-k,j) = U(length(Y)-k,j)+w\*(U1(length(Y)-k,j)-U(length(Y)-k,j));

end

end

for k=1:length(Y)

for j=1:length(X)

d = abs(U2(k,j)-U(k,j));

delta=[delta,d];

end

end

i=i+1;

L=max(delta);

U=U2;

end

omega=[omega,w];

iter=[iter,i];

end

U

figure

hold on

grid on

ylabel('Координата y')

xlabel('Координата x')

zlabel('Распеределение U(x,y)')

title('График поверхности U(x,y)')

surface(X,Y,U)

colorbar

figure

hold on

grid on

plot(omega,iter,'r','Linewidth',1.2)

ylabel('Число итераций')

xlabel('Значие \omega')

title('График зависимости числа итераций от \omega')

K=[omega;iter];

figure

hold on

grid on

plot(U(:, 2),'-b','Linewidth',1)

plot(U(:, 3),'-r','Linewidth',1)

plot(U(:, 4),'-g','Linewidth',1)

plot(U(:, 5),'-y','Linewidth',1)

legend('x=0.2','x=0.4','x=0.6','x=0.8')

title('Разрезы при фиксированной координате x')

ylabel('U')

xlabel('y')

figure

hold on

grid on

plot(U(2,:),'-b','Linewidth',1)

plot(U(3,:),'-r','Linewidth',1)

plot(U(4,:),'-g','Linewidth',1)

plot(U(5,:),'-y','Linewidth',1)

legend('y=0.2','y=0.4','y=0.6','y=0.8')

title('Разрезы при фиксированной координате y')

ylabel('U')

xlabel('x')

% Используемые функции

function [XGrid,h]= GridRavn(x\_0,x\_end,h);

XGrid=[];

n=abs(x\_end-x\_0)/h;

for i=0:n

XGrid=[XGrid,x\_0+h\*i];

end

end