Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Индивидуальное задание № 2

тема "Метод конечных элементов. Расчет динамического прогиба балки Бернулли-Эйлера"

дисциплина "Вычислительная механика"  
Вариант 2

Выполнила студент гр. 5030103/90301 Бенюх М.А.

Преподаватель: Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2022

Содержание:

[1. Формулировка задачи 3](#_Toc43323906)

[2. Алгоритм метода 3](#_Toc43323908)

[3. Результаты 4](#_Toc43323909)  
[4. Заключение 6](#_Toc43323909)

[5. Код программы 7](#_Toc43323909)

1. Формулировка задачи.

Произвести расчет статического прогиба балки Бернулли-Эйлера.  Нагрузку следует прикладывать. Закрепить крайне левый и правый конец балки шарнирными опорами. Требуется определить перемещения в балке фермы и усилия в стержнях.  В качестве сечения использовать швеллер с высотой 140 мм, толщиной стенки 4.9 мм и шириной полки 58 мм.

Таблица 1. Параметры задачи

|  |  |
| --- | --- |
| Параметр | Значение |
| Коэффициент Пуассона | 0.35 |
| Модуль Юнга **E** (Па) | 2 1011 |
| Момент **М** (Н/м) | 10 103 |

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

1. Алгоритм метода.

Рассмотрим выражение , где – полная энергия, – кинетическая энергия, П – потенциальная энергия (1)

С его помощью получим уравнение Лагранжа 2-го рода:

Подставим в уравнение Лагранжа выражение (1).

Перепишем

Выражение для кинетической энергии:

Подставим (5) в (4):

Введем матрицы масс:

Подставим и получим уравнение динамики системы поперечных элементов:

Для решения матричного уравнения воспользуемся явной схемой интегрирования – методом центральных разностей.

3.0 Результаты работы в Python

|  |
| --- |
|  |
| Рис.8. График перемещений по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

|  |
| --- |
|  |
| Рис 10. График скоростей по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
|  |

|  |
| --- |
|  |
| Рис 12. График ускорений по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
|  |

3.1 Результаты работы в Abaqus

|  |
| --- |
|  |
| Рис.8. График перемещений по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
|  |

|  |
| --- |
|  |
| Рис 10. График скоростей по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
| Рис 11. График скоростей по оси ОУ, с 0.5 по 1.0 с |

|  |
| --- |
|  |
| Рис 12. График ускорений по оси ОУ, с 0 по 0.5 с |

|  |
| --- |
|  |
|  |

* 1. Сравнение результатов

Для сравнения полученных результатов вычтем из каждого элемента столбца, соответствующего нагрузкам или перемещениям в Abaqus, соответствующую нагрузку или перемещение, полученные в Python.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0 | 0 |
| 0.3 | 0 | 0 |
| 0.4 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0 | 0 |
| 0.6 | 0 | 0 |
| 0.7 | 0 | 0 |
| 0.8 | 0 | 0 |
| 0.9 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.1 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 1.43021E-05 | 1.40877977e-05 |
| 0.2 | 5.72082E-05 | 5.64105705e-05 |
| 0.3 | 0.000128719 | 1.27054079e-04 |
| 0.4 | 0.000228833 | 2.26098137e-04 |
| 0.5 | 0.000357552 | 3.53612065e-04 |
| 0.6 | 0.000514874 | 5.09652006e-04 |
| 0.7 | 0.000700801 | 6.94262448e-04 |
| 0.8 | 0.000915332 | 9.07478255e-04 |
| 0.9 | 0.00115847 | 1.14932517e-03 |
| 1 | 0.00143021 | 1.41981944e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.2 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 2.86041E-05 | 2.87338869e-05 |
| 0.2 | 0.000114416 | 1.14923084e-04 |
| 0.3 | 0.000257437 | 2.58549703e-04 |
| 0.4 | 0.000457666 | 4.59594830e-04 |
| 0.5 | 0.000715103 | 7.18037357e-04 |
| 0.6 | 0.00102975 | 1.03385530e-03 |
| 0.7 | 0.0014016 | 1.40702637e-03 |
| 0.8 | 0.00183066 | 1.83753194e-03 |
| 0.9 | 0.00231693 | 2.32535857e-03 |
| 1 | 0.00286041 | 2.87049692e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.3 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 4.30551500e-05 | 4.31840511e-05 |
| 0.2 | 0.000172684 | 1.72684865e-04 |
| 0.3 | 0.000389598 | 3.88427360e-04 |
| 0.4 | 0.000693345 | 6.90342912e-04 |
| 0.5 | 0.001045873 | 1.07837321e-03 |
| 0.6 | 0.001517368 | 1.55246896e-03 |
| 0.7 | 0.002169191 | 2.11259118e-03 |
| 0.8 | 0.002734645 | 2.75871240e-03 |
| 0.9 | 0.003498235 | 3.49081347e-03 |
| 1 | 0.004302968 | 4.30888103e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.4 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 5.72082E-05 | 5.71591587e-05 |
| 0.2 | 0.000228833 | 2.28657612e-04 |
| 0.3 | 0.000514874 | 5.14528351e-04 |
| 0.4 | 0.000915332 | 9.14807142e-04 |
| 0.5 | 0.00143021 | 1.42953288e-03 |
| 0.6 | 0.0020595 | 2.05874520e-03 |
| 0.7 | 0.0028032 | 2.80248308e-03 |
| 0.8 | 0.00366133 | 3.66078203e-03 |
| 0.9 | 0.00463387 | 4.63367140e-03 |
| 1 | 0.00572082 | 5.72116906e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.5 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 7.15103E-05 | 7.14939709e-05 |
| 0.2 | 0.000286041 | 2.86012987e-04 |
| 0.3 | 0.000643593 | 6.43610940e-04 |
| 0.4 | 0.00114416 | 1.14433651e-03 |
| 0.5 | 0.00178776 | 1.78823157e-03 |
| 0.6 | 0.00257437 | 2.57532879e-03 |
| 0.7 | 0.003504 | 3.50565172e-03 |
| 0.8 | 0.00457666 | 4.57921928e-03 |
| 0.9 | 0.00579233 | 5.79604528e-03 |
| 1 | 0.00715103 | 7.15613646e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.6 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -1.11537E-16 | -3.69408814e-05 |
| 0.2 | -4.20996E-16 | -1.12311333e-04 |
| 0.3 | -8.89263E-16 | -2.00015526e-04 |
| 0.4 | -1.47625E-15 | -3.20479074e-04 |
| 0.5 | -2.14585E-15 | -4.45177188e-04 |
| 0.6 | -2.86446E-15 | -5.82103233e-04 |
| 0.7 | -3.60042E-15 | -7.72288955e-04 |
| 0.8 | -4.33074E-15 | -9.33431440e-04 |
| 0.9 | -5.03937E-15 | -1.02442170e-03 |
| 1 | -5.73673E-15 | -1.06125494e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.7 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 2.68638E-16 | -8.22779520e-05 |
| 0.2 | 1.0134E-15 | -3.10122908e-04 |
| 0.3 | 2.13956E-15 | -6.13370682e-04 |
| 0.4 | 3.55011E-15 | -1.03306690e-03 |
| 0.5 | 5.15993E-15 | 1.59101705e-03 |
| 0.6 | 6.88642E-15 | -2.31890348e-03 |
| 0.7 | 8.6502E-15 | -3.24317079e-03 |
| 0.8 | 1.04005E-14 | -4.30929997e-03 |
| 0.9 | 1.20997E-14 | -5.40631768e-03 |
| 1 | 1.37685E-14 | -6.48465137e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.8 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -3.42852E-16 | 4.45436566e-05 |
| 0.2 | -1.294E-15 | 2.18592954e-04 |
| 0.3 | -2.73284E-15 | 5.30638863e-04 |
| 0.4 | -4.5363E-15 | 9.25257704e-04 |
| 0.5 | -6.59282E-15 | 1.37489819e-03 |
| 0.6 | -8.79895E-15 | 1.79394038e-03 |
| 0.7 | -1.10597E-14 | 2.18171358e-03 |
| 0.8 | -1.32958E-14 | 2.54312561e-03 |
| 0.9 | -1.54755E-14 | 2.91070782e-03 |
| 1 | -1.76161E-14 | 3.32002030e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=0.9 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 3.409E-16 | 2.87616706e-05 |
| 0.2 | 1.28662E-15 | 1.53241373e-04 |
| 0.3 | 2.71679E-15 | 4.09061636e-04 |
| 0.4 | 4.50855E-15 | 7.60546723e-04 |
| 0.5 | 6.55118E-15 | 1.20295502e-03 |
| 0.6 | 8.7391E-15 | 1.76467816e-03 |
| 0.7 | 1.09817E-14 | 2.43301273e-03 |
| 0.8 | 1.31969E-14 | 3.24846664e-03 |
| 0.9 | 1.5354E-14 | 4.17044337e-03 |
| 1 | 1.74739E-14 | 5.13215132e-03 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Перемещения вдоль оси OY, м,(U2) в момент t=1.0 с | | |
| Координата X, м | Abaqus, координата Y | Python, координата Y |
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -3.33094E-16 | -0.00011363 |
| 0.2 | -1.25713E-15 | -0.00041835 |
| 0.3 | -2.65478E-15 | -0.00083933 |
| 0.4 | -4.40533E-15 | -0.00136116 |
| 0.5 | -6.40373E-15 | -0.00200099 |
| 0.6 | -8.54395E-15 | -0.00267626 |
| 0.7 | -1.07336E-14 | -0.00331047 |
| 0.8 | -1.29003E-14 | -0.00386988 |
| 0.9 | -1.50106E-14 | -0.00437546 |
| 1 | -1.70888E-14 | -0.00483031 |

Заключение

В рамках данной задачи был использован метод конечных элементов. С его помощью были получены перемещения, скорости и ускорения, возникающие при расчете динамического прогиба балки Бернулли-Эйлера.

И получили совпадения с точностью до 2го значащего знака.

Код программы