Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по индивидуальной работе №**02**

**тема "Метод конечных разностей. Уравнение колебаний струны"**

**дисциплина "Вычислительная механика"**

Выполнил студент гр. 90301 **М. А.Бенюх**

Преподаватель: Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

**2021**

Оглавление.

Формулировка задания:……………..................................................................1.   
Постановки задачи ........................................................................................2.  
Метод решения .............................................................................................3.  
Явная схема интегрирования........................................................................4.  
Неявная схема интегрирования....................................................................5. Численный анализ решения задач................................................................6. Заключение……....……………………......................................................................7.  
Код…………………....……………………......................................................................8.

1. **Формулировка задания:**Методом конечных разностей, используя явную и неявной схему интегрирования, решить уравнение колебаний струны.
2. **Постановка задачи:**

Объект моделирования: Cреда с однородными граничными условиями.

при заданных начальных условиях . Решение выполнить при для .

**Метод решения:**Разложим в окрестности точки в ряд:

Разложим в окрестности точки в ряд:

Введем сетки для времени и для пространства . Тогда:

Конечно-разностное уравнение примет вид:

Явная схема метода:

Для преобразования начальных условий воспользуемся формулой 2-го порядка точности:

где

Для вывода неявной схемы интегрирования введем значение для аппроксимации частных производных:

Далее воспользуемся формулами:

Решение можно получить неявно, используя метод прогонки:   
Прямой ход:

Обратный ход:

Отдельно отметим, что шаг по времени необходимо выбирать из условия Куранта о сходимости явной схемы интегрирования:

1. **Явная схема интегрирования**

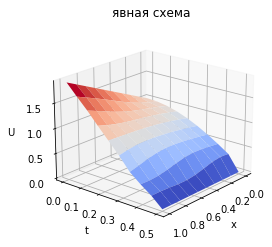


Рис. 1  
Визуализация матрицы решений (явной схемы интегрирования)

Таблица значений матрицы решений (явной схемы интегрирования)

t

U1 =

x

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,00 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,45 |
| 0.987688 | 1.03707 | 1.0598 | 1.07295 | 1.08948 | 1.11623 | 1.1547 | 1.20297 | 1.25784 | 1.31615 |
| 0.951057 | 0.998609 | 1.03633 | 1.06211 | 1.07755 | 1.08734 | 1.09711 | 1.11137 | 1.13238 | 1.16009 |
| 0.891007 | 0.935557 | 0.973517 | 1.0035 | 1.02431 | 1.03582 | 1.03942 | 1.03774 | 1.03394 | 1.03081 |
| 0.809017 | 0.849468 | 0.884348 | 0.913004 | 0.934361 | 0.947088 | 0.950076 | 0.943036 | 0.926963 | 0.904252 |
| 0.707107 | 0.742462 | 0.772893 | 0.797612 | 0.815211 | 0.82384 | 0.821781 | 0.808218 | 0.78386 | 0.751141 |
| 0.587785 | 0.617175 | 0.641741 | 0.65937 | 0.667583 | 0.664711 | 0.650734 | 0.627384 | 0.597578 | 0.564582 |
| 0.45399 | 0.47669 | 0.491299 | 0.493375 | 0.482294 | 0.46124 | 0.435269 | 0.409058 | 0.385468 | 0.365264 |
| 0.309017 | 0.324468 | 0.308496 | 0.277245 | 0.244378 | 0.217881 | 0.200134 | 0.189768 | 0.183846 | 0.179493 |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

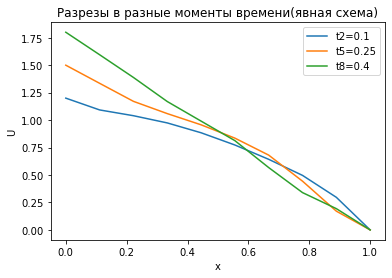


Рис. 2  
Разрезы в разные моменты времени (явной схемы интегрирования)

1. **Неявная схема интегрирования**

Метод матричной прогонки:  
Прямой ход:   
Обратный ход:

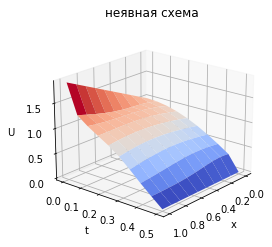


Рис. 3  
Визуализация матрицы решений (неявной схемы интегрирования)

Таблица значений матрицы решений (явной схемы интегрирования)

t

U2 =

x

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,00 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,45 |
| 0.987688 | 1.01238 | 1.03475 | 1.05624 | 1.07817 | 1.10159 | 1.12721 | 1.15544 | 1.18635 | 1.21978 |
| 0.951057 | 0.974833 | 0.997034 | 1.01764 | 1.03674 | 1.05461 | 1.07163 | 1.08833 | 1.1053 | 1.12312 |
| 0.891007 | 0.913282 | 0.934117 | 0.953479 | 0.971343 | 0.987707 | 1.00261 | 1.01615 | 1.0285 | 1.03991 |
| 0.809017 | 0.829242 | 0.848162 | 0.865749 | 0.881974 | 0.896808 | 0.910223 | 0.922185 | 0.932661 | 0.941623 |
| 0.707107 | 0.724784 | 0.74132 | 0.756681 | 0.770821 | 0.783668 | 0.795108 | 0.804977 | 0.813058 | 0.819094 |
| 0.587785 | 0.60248 | 0.616198 | 0.628823 | 0.640142 | 0.649831 | 0.65748 | 0.662632 | 0.664859 | 0.663829 |
| 0.45399 | 0.46534 | 0.475448 | 0.483485 | 0.488557 | 0.489928 | 0.487191 | 0.480354 | 0.469847 | 0.456457 |
| 0.309017 | 0.316742 | 0.31483 | 0.305009 | 0.289531 | 0.270821 | 0.251165 | 0.232472 | 0.216129 | 0.202946 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

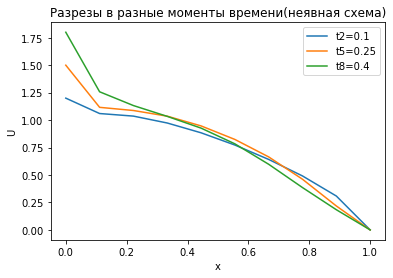


Рис. 4  
Разрезы в разные моменты времени (неявной схемы интегрирования)

1. **Численный анализ решения задач**

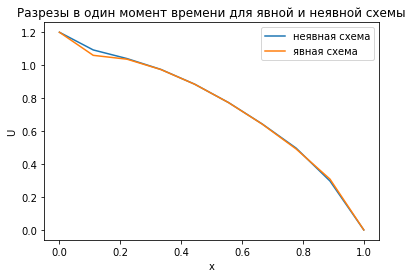
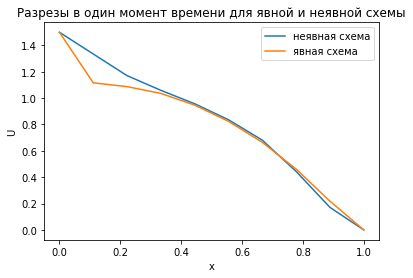


Рис. 5,6  
Разрезы явной и неявной схемы   
в момент времени 2 =0.1(рис. 5),  
в момент времени 5 =0.25(рис. 6),

1. **Заключение**

Было получено решение задачи о вертикальных колебаниях струны при помощи метода конечных разностей с применением явной и неявной схемы интегрирования. Явная схема показала себя более гладкой по сравнению с явной.

1. **Код**

*x,h,t,dt=1,0.1,0.25,0.05*

*func\_x\_0 = lambda x: [math.cos((math.pi\*i)/2) for i in x]*

*func2\_x\_0 = lambda x: math.cos((math.pi\*x)/2)*

*d\_func\_x\_0= lambda x: x\*\*2*

*func\_0\_t = lambda t: 1+2\*t*

*func\_1\_t = lambda t: 0*

*Test=Struna(x, t, h, dt, func\_x\_0, d\_func\_x\_0 ,func2\_x\_0 , func\_0\_t , func\_1\_t)*

*res1=Test.explicit\_schema()*

*res2=Test.implicit\_schema()*

def \_\_init\_\_(self, x, t, h, dt, func\_x\_0, func2\_x\_0 , d\_func\_x\_0 , func\_0\_t , func\_1\_t):

self.x= x

self.x\_0=0

self.t=t

self.t\_0=0

self.h=h

self.func\_x\_0=func\_x\_0

self.func2\_x\_0=func2\_x\_0

self.d\_func\_x\_0=d\_func\_x\_0

self.func\_0\_t=func\_0\_t

self.func\_1\_t=func\_1\_t

self.X=np.arange(self.x\_0,self.x, self.h)

self.dt=self.t/(len(self.X))

self.Time=np.arange(self.t\_0,self.t, self.dt)

self.len\_X=len(self.X)

self.len\_T=len(self.Time)

print("init")

def StartFillMatrix(self):

T=np.zeros((self.len\_X, self.len\_T))

T[:,0]=self.func\_x\_0(self.X)

T[0,:]=self.func\_0\_t(self.Time)

T[-1,:]=self.func\_1\_t(self.Time)

#T[:,1]

for i in range(1,self.len\_X-1):

print(i)

print(self.X[i])

T[i,1]=T[i,0]+self.d\_func\_x\_0(self.X[i])\*self.dt+((self.dt\*\*2)/(2\*(self.h\*\*2)))\*(T[i,0]-2\*T[i,0]+T[i,0])

return T

def explicit\_schema(self):

T=self.StartFillMatrix()

c=1

for k in range(1,self.len\_T-1):

for i in range(1,self.len\_X-1):

T[i,k+1]=(((c\*\*2)\*(self.dt\*\*2))/(self.h\*\*2))\*(T[i+1,k]-2\*T[i,k]+T[i-1,k])+2\*T[i,k]-T[i,k-1]

return T

def implicit\_schema(self):

T=self.StartFillMatrix()

A=1/(self.h\*\*2)

C=1/(self.h\*\*2)

B=(2\*(self.dt\*\*2)+(self.h\*\*2))/((self.h\*\*2)\*(self.dt\*\*2))

F=np.zeros((self.len\_X))

P=np.zeros((self.len\_X))

Q=np.zeros((self.len\_X))

for k in range(1,self.len\_T-1):

for i in range(0, self.len\_X):

F[i]=((2\*T[i,k])/(self.dt\*\*2))-(T[i,k-1]/(self.dt\*\*2))

P[0]=C/B

Q[0]=F[0]/B

for i in range(1,self.len\_X):

P[i]=C/(B-A\*P[i-1])

Q[i]=(F[i]+A\*Q[i-1])/(B-A\*P[i-1])

for i in range(self.len\_X-2,0,-1):

T[i,k+1]=P[i]\*T[i+1,k+1]+Q[i]

return T