Matematično-fizikalni praktikum: Spektralne metode za zacetne probleme PDE

Andrej Kolar-Požun

December 14, 2016

1 Uvod

Tokrat bom reševal parcialno diferencialno enačbo in sicer difuzijsko enačbo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

kjer je $0 \leq x \leq L$ Funkcijo razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{T}_k(t) e^{-2\pi i f_k x}$$

$f_k = k/N$ Dobimo ODE:

$$\frac{d\widetilde{T}_k(t)}{dt} = D(-4\pi^2 f_k^2)\widetilde{T}_k(t)$$

Kar rešimo z Eulerjevo metodo in potem naredimo inverzno Fourierovo transformacijo.

2 Reševanje

Za začetni pogoj imamo:

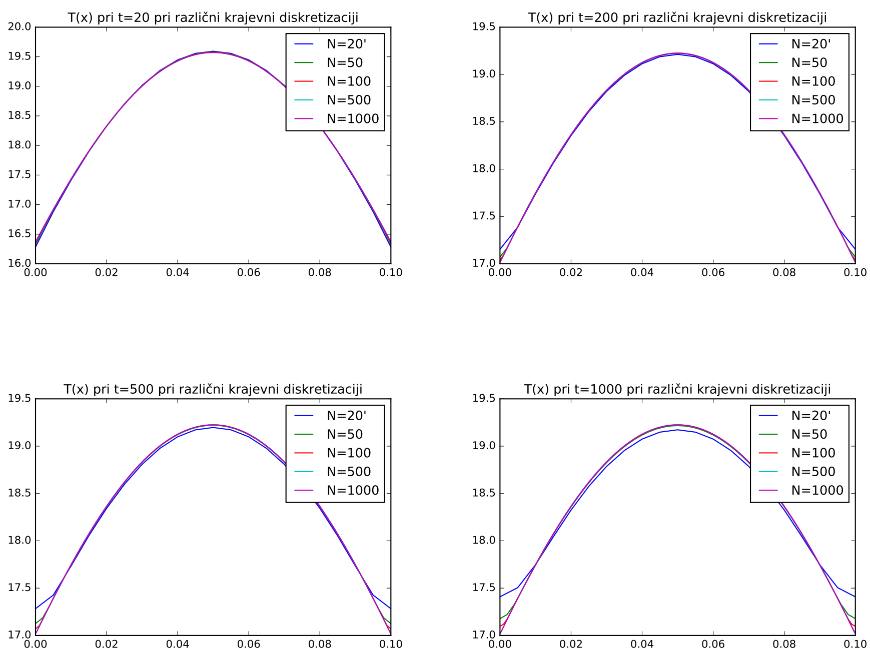
$$T(x,0) = 20e^{-(x-L/2)^2/\sigma^2}$$

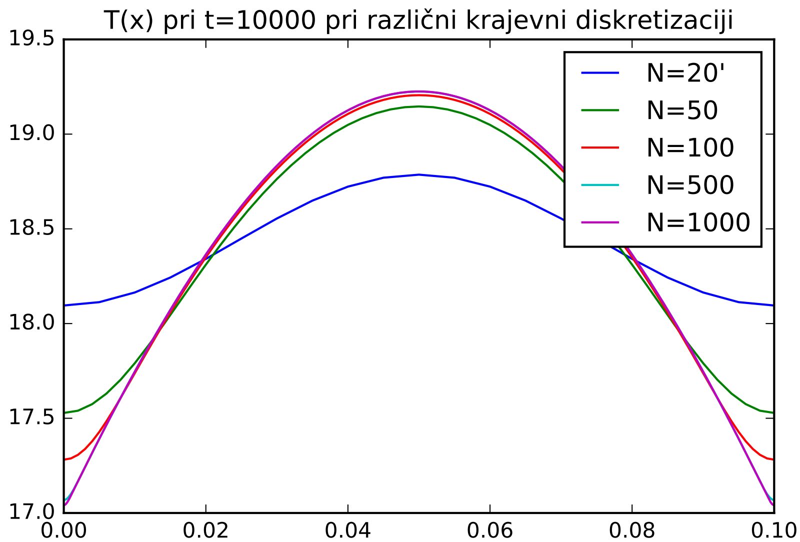
Za L bom izbral 0.1, za σ pa 0.01, za D pa 10^{-3}

Najprej moram seveda pretransformirati začetni pogoj v Fourierov prostor z inverzno transformacijo:

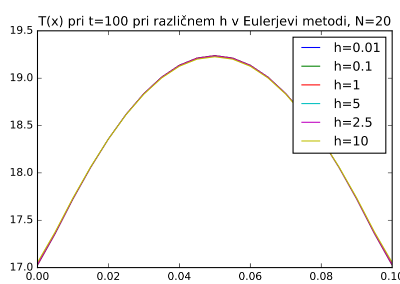
$$\widetilde{T}_k(t) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} T(x,t)e^{2\pi i f_k x_l}$$

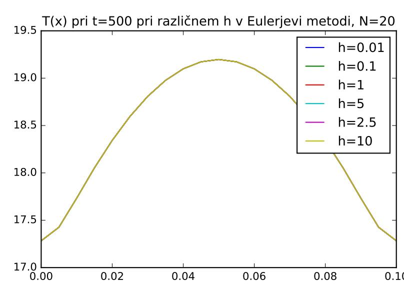
Kjer šeštevamo po diskretiziranih x-ih.





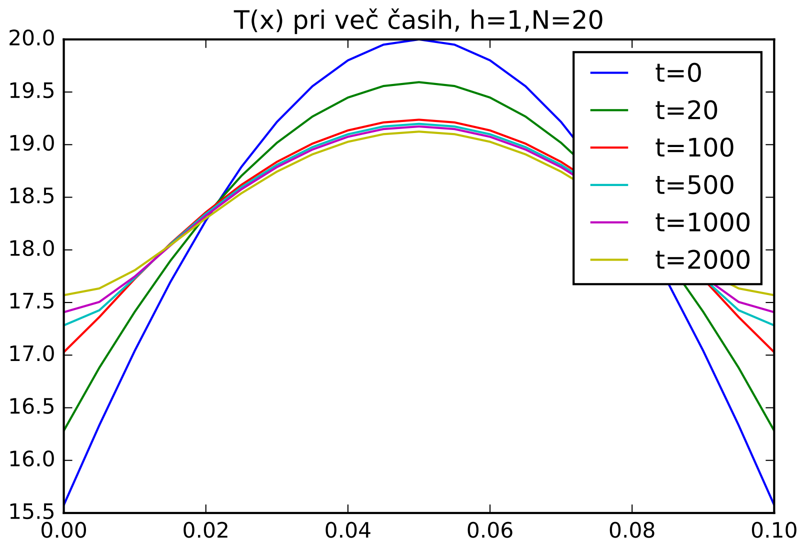
Pri vseh teh slikah opazimo, da se najprej vse aproksimacije lepo pokrivajo, potem pa se začnejo tiste z najmnajšimi N-ji počasi odmikati. Glede na to, da bi fizikalno pričakovali, da se bodo tudi robovi greli(Predpostavili smo le, da so robni pogoji periodični), lahko ocenimo rešitve kjer je N velik kot napačne, saj se tam še po dolgem času robovi komaj premaknejo.

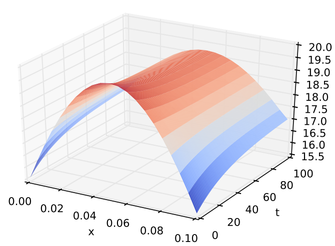


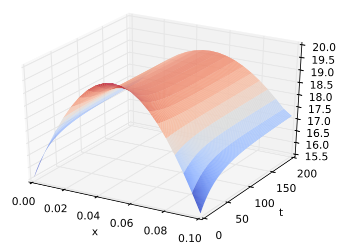


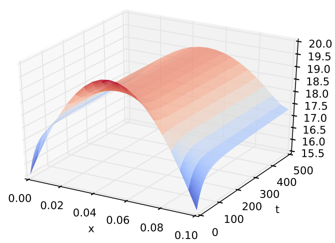
Vidimo, da je izbira h-jev kar se natančnosti tiče tukaj še kar enakovredna. Za vse te h zadostimo pogoju za stabilnost Eulerjeve metode, ki je napisan v navodilih. V podrobnosti se ne bom spuščal, saj smo to metodo že obdelali pri eni izmed prejšnjih vaj

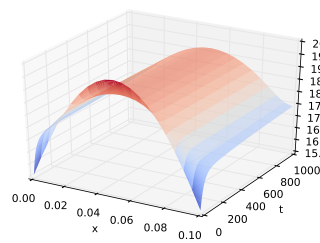
Kaj več sploh ni za povedati zato zdaj sledi kar prikaz spreminjanja temperature:


T(x) pri več časih, h=1,N=20
t=0
t=20
t=100
t=500
t=1000
t=2000
20.0
19.5
19.0
18.5
18.0
17.5
17.0
16.5
16.0
15.5
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10


x
t


x
t





Pričakujemo seveda da se bo na začetku najbolj spreminjalo, ko je razlika v temperaturah še največja in to se tudi nekako zgodi, a nisem povsem prepričan, ali so tej grafi pravilni. Zdi se mi, da pozneje temperatura mogoče vseeno prepočasi pada glede na to kako hitro je na začetku.

3 Kubični B-zlepki

Temperaturo(ali karkoli že imamo) lahko po času razvijemo še v vrsto kakšnih drugih funkcij npr. s kubičnimi B-zlepki:

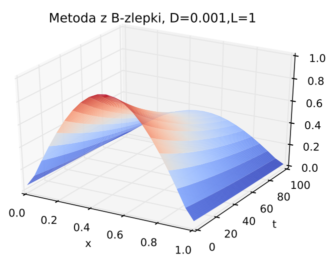
$$T(x,t) = \sum_{k=-1}^{N+1} a_k(t) B_k(x)$$

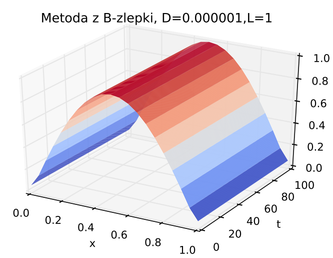
Seznam kubičnih zlepkov imamo v priloženih navodilih te naloge. Kot prej vrsto vstavimo v našo diferencialno enačbo in dobimo sistem enačb za koeficiente a_j:

$a'_{j-1}(t) + 4a'_j(t) + a'_{j+1}(t) = \frac{6D}{\Delta x^2}(a_{j-1}(t) - 2a_j(t) + a_{j+1}(t))$ Kjer smo že upoštevali robne pogoje, kateri so nam dali, da je $a_0 = 0, a_{-1} = -a_1, a_N = 0 ina_{N+1} = -a_{N-1}$

V matrični obliki še nas sistem glasi $Aa' = Ba$, kjer sta matriki A in B spet podani v nalogi in jih ne bom prepisoval. PDE bom rešil z začetnim pogojem $T(x,0) = g(x) = sin(\pi x/L)$,tokrat bom za L izbral 1.

Sistem pa bom rešil z implicitno Eulerjevo metodo: $\Big(A - \frac{\Delta t}{2}B\Big)a^{n+1} = \Big(A + \frac{\Delta t}{2}B\Big)a^n$





Izgleda pravilno. Na desni sem preizkusil še nekaj redov manjšo difuzijsko konstanto, saj tudi take najdemo v praksi. Seveda temperatura potem pada veliko počasneje(in se sploh ne opazi)