Matematično-fizikalni praktikum: Resevanje PDE z razvojem po lastnih funkcijah: Poisson

Andrej Kolar-Požun

January 4, 2017

1 Uvod

Sedaj se bomo lotili enačbe:

$$\nabla^2 v = -\frac{p'}{\eta}$$

Vemo, da za pretok velja Poiseuillov zakon:

$$\Phi = \int v dS = C\frac{p' S^2}{8\pi\eta}$$

Želeli bi določiti C za polkrožno cev. Robni pogoji so, da je hitrost 0 na robu cevi. S primerno uvedbo novih spremenljivk se naša PDE in enačba za C poenostavi:

$$\nabla^2 u(x,\phi) = -1$$
$$C = 8\pi \int\int \frac{u(x,\phi) x dx d\phi}{(\pi/2)^2}$$

Z nekaj računanja pridemo do končnega izraza za u:

$$u(x,\phi) = \sum_{ms} \frac{A_{ms} g_{ms}(x,\phi)}{y_{ms}^2}$$

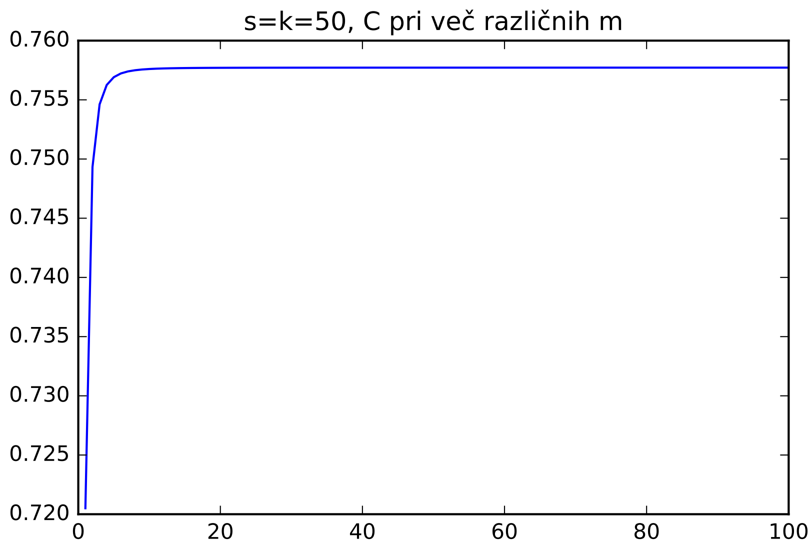
Kjer seštevamo po $m = 0, 1, 2...$ in $s = 1, 2, ...$ y_{ms} je s-ta ničla 2m+1-te besslove funkcije, $g_{ms} = J_{2m+1}(y_{ms}x) sin(2m+1)\phi$ in $A_{ms} = \frac{(1, g_{ms})}{(g_{ms}, g_{ms})}$

Za iskani koeficient dobimo:

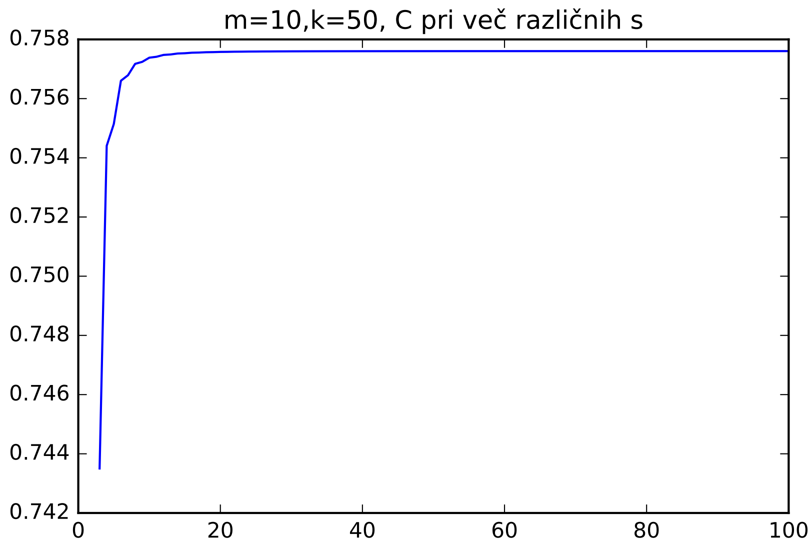
$$C = 8\sum_{ms}\left(\frac{8}{\pi}\frac{I_{ms}}{(2m+1)y_{ms}J_{2m+2}(y_{ms})}\right)^2$$
$$I_{ms} = \frac{4(2m+1)}{y_{ms}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{kJ_{2k}(y_{ms})}{(4k^2-1)}$$

2 Reševanje

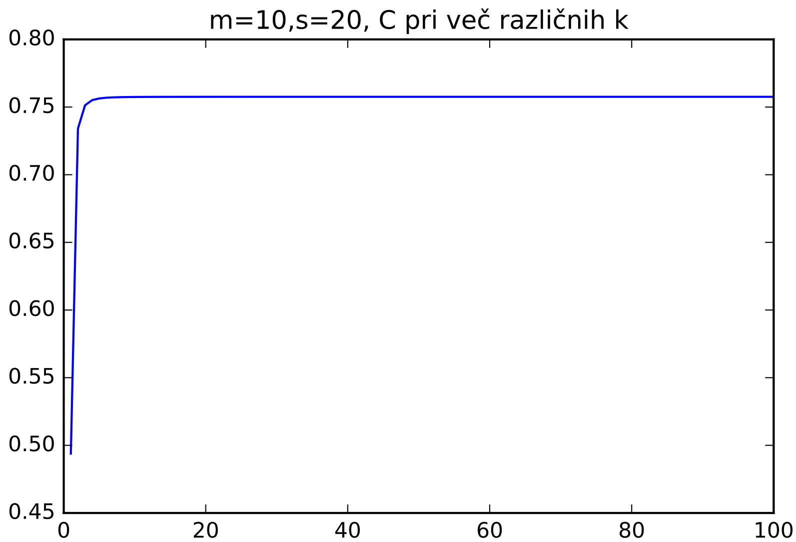
Najprej preverimo, kako se rešitev spreminja, če spreminjam koliko členov bom seštel po m-ju(Kar bom označeval kar kot m). Število seštetih členov po s in k bom zaenkrat dal na recimo 50, pozneje pa spreminjal še tole.



Vidimo, da vrednost vsote konvergira proti neki vrednosti in to kar hitro, sešteti je treba le okoli 10 členov po m.



V tem primeru je konvergenca podobno hitra, tokrat je bilo treba sešteti le okoli 20 členov.

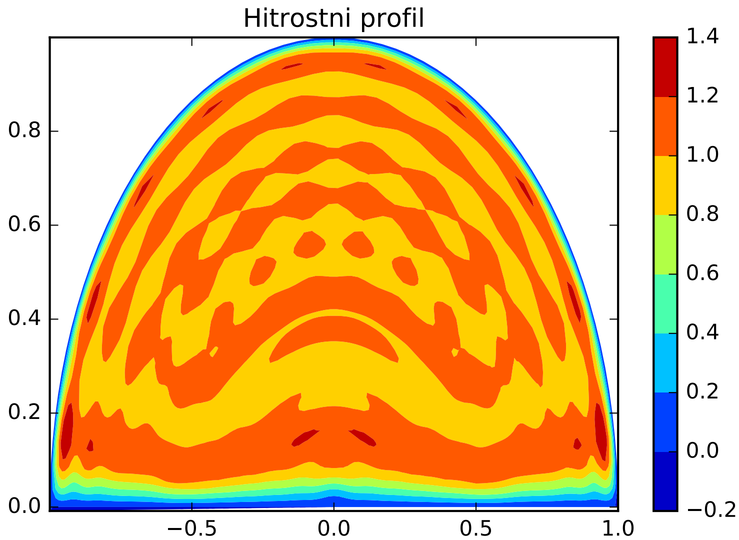


Tudi v k-ju je treba sešteti podobno malo členov. Velikosti členov v tej vsoti so zelo odvisne od m, a je konvergenca tako hitra, da se s tem sploh ne rabimo posebej mučiti.

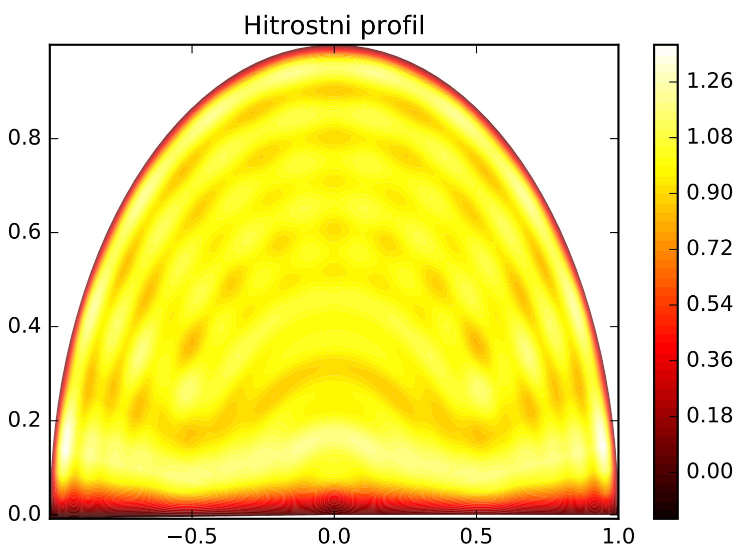
Ugotovili smo, da je C za polkrožno cev enak približno 0.758.

Poglejmo sedaj kako izgleda hitrostni profil. Računal bom kar $u(x,\phi)$ kar je samo skaliranje dejanske hitrosti. Vemo naslednje:

$$u(x,\phi) = \sum_{ms} \frac{A_{ms} g_{ms}(x,\phi)}{y_{ms}^2}$$
$$A_{ms} = \frac{(1, g_{ms})}{(g_{ms}, g_{ms})}$$
$$(1, g_{ms}) = \frac{2I_{ms}}{2m+1}$$
$$(g_{ms}, g_{ms}) = \frac{\pi}{4} J_{2m+2}^2(y_{ms})$$



Število seštetih členov je isto kot pri računanju koeficienta. Spreminjanje tega števila profila ni veliko spremenilo.



Ista silka z več barvami.

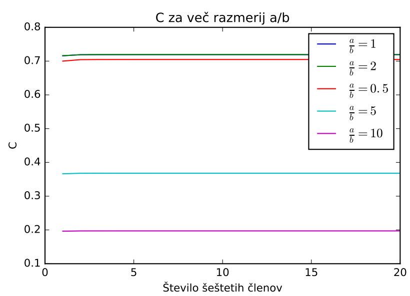
3 Dodatna naloga

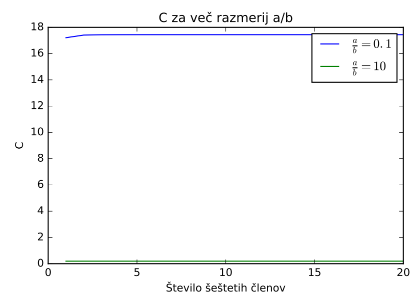
Naša naloga je ponoviti vajo za cev s pravokotnim presekom s stranicami a in b. Rešujemo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{p'}{\eta}$$

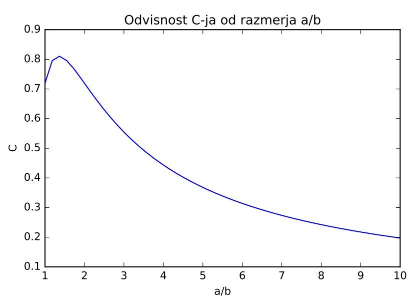
V navodilih je koeficient ze izražen kot:

$$C = 2\pi \frac{b}{a}\Big(\frac{1}{3} - \frac{b}{a}\frac{64}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tanh(\frac{a}{b}\frac{(2n-1)\pi}{2})}{(2n-1)^2}\Big)$$





Čudni rezultati. Razmerje 2 ima isti koeficient kot 1? Ni pa to isto kot 1/2? Za majhna razmerja pa je koeficient že čez ena. Konvergira pa seveda hitro, saj v vsoti delimo z indeksom na peto potenco, nad ulomkom pa je omejena funkcija.



Koeficienti za več razmerij, kar bom primerjal še z drugo metodo. Plottal sem le od 1 naprej, za recipročne vrednosti razmerja pa po simetriji enačbe vemo, da bi moralo priti enako

Sedaj bom to rešil tudi na način iz prve vaje. Naše lastne funkcije so tokrat:

$$g_{mn}(x, y) = sin\frac{n\pi x}{a} sin\frac{m\pi y}{b}$$

Ki avtomatično že zadostijo robnim pogojem, da je hitrost 0 na robu cevi. Najprej bom s susbstitucijo $u = v\frac{\eta}{p'}$ enačbo prevedel na obliko:

$$\nabla^2 u = -1$$

Kot prej imamo:

$$1 = \sum_{mn} A_{mn} sin\frac{n\pi x}{a} sin\frac{m\pi y}{b}$$

$$A_{mn} = \frac{(1, g_{mn})}{(g_{mn}, g_{mn})}$$

$$(1, g_{mn}) = \frac{a}{n\pi}(1-(-1)^n)\frac{b}{m\pi}(1-(-1)^m)$$

$$(g_{mn}, g_{mn}) = \frac{ab}{4}$$

Iz zgornjih enačb sledi, da bodo neničelni le tisti členi, kjer bodo n in m lihi. Takrat bo $A_{mn} = \frac{16}{nm\pi^2}$

Z nastavkom za u oblike $u(x,y) = \sum B_{mn} g_{mn}$, vstaljanjem v enačbo in enačenjem členov dobimo:

$$u(x,y) = \sum_{n,mlihi} \frac{16}{nm\pi^2} \frac{1}{(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2} g_{mn}$$

Sedaj uporabimo še enačbo:

$$C = \frac{8\pi\eta}{p'S^2} \int u\frac{p'}{\eta} dxdy$$

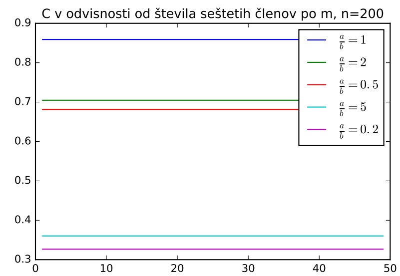
Poenostavimo:

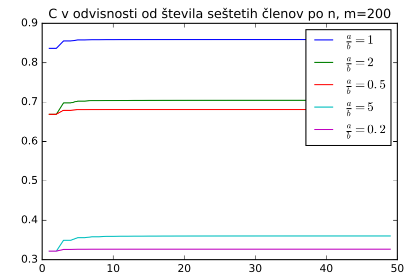
$$C = \frac{32 * 16}{\pi^3 ab} \sum_{lihi} \frac{1}{(nm)^2((n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2)}$$

Malo še preoblikujmo, da dobimo v formuli razmerje a/b:

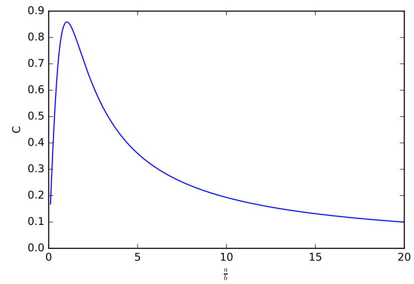
$$C = \frac{32 * 16}{\pi^3} \sum_{lihi} \frac{1}{(nm)^2(b/a(n\pi)^2 + a/b(m\pi)^2)}$$

Kot prej bom najprej preveril koliko členov je treba šešteti. Pod ulomkom sta n/m spet na peto potenco in se pričakuje, da torej zelo malo.

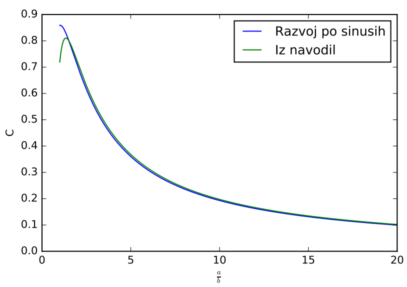


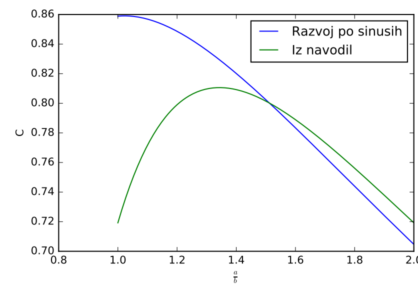


Oboje hitro konvergira kot smo pričakovali. Spet pa vidimo, da a/b in b/a nimata istega koeficienta, kar je čudno.



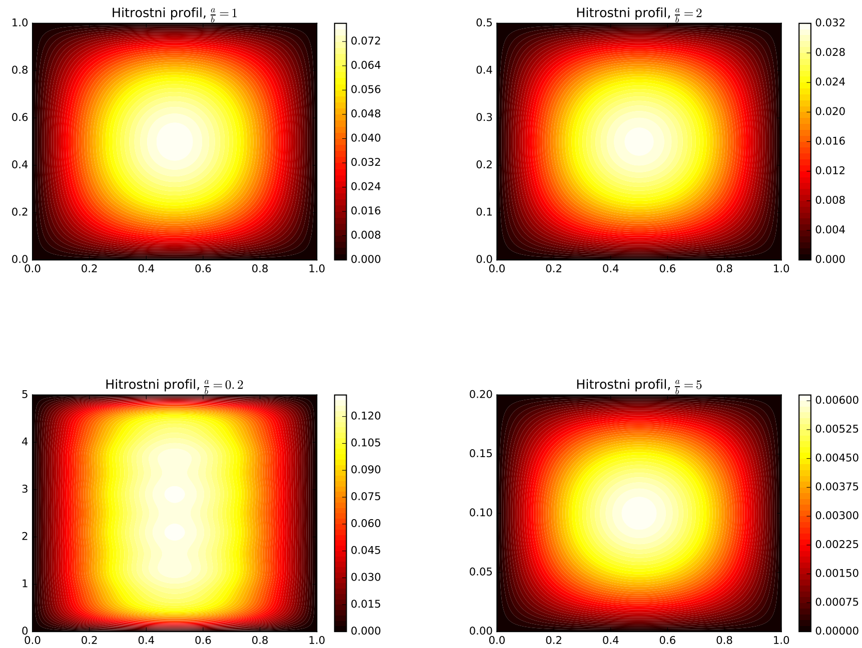
Podobna oblika krivulje kot pri drugem načinu





Vidimo, da se po približno 1.5 krivulji zbližata in dajata potem podobne rešitve. Pod 1 so razlike velike, formula v navodilih zelo naraste.

Za konec si poglejmo še nekaj profilov hitrosti. Za a bom izbral 1, b pa bom spreminjal.


Hitrostni profil, $\frac{a}{b}=1$
Hitrostni profil, $\frac{a}{b}=2$
Hitrostni profil, $\frac{a}{b}=0.2$
Hitrostni profil, $\frac{a}{b}=5$