

Mafija praktikum: Airyjevi funkciji

Andrej Kolar-Požun

October 12, 2016

1 Uvod

V temle dokumentu se bom lotil reševanja prve naloge matematično-fizikalnega praktikuma. Navodila za nalogo in potrebni podatki so v isti mapi pod imenom "mafijaprakt1.pdf". Naloge se bom lotil s Pythonom 3.5 (SciPy knjižnice).

2 Računanje potrebnih vrst

Vidimo, da lahko funkciji $A_i(x)$ ter $B_i(x)$ izračunamo preko raznih podanih vrst. Dobro bi bilo torej začeti s tem, da ustvarimo funkcije, ki bodo lahko seštele poljubno(končno) število členov te vrste.

Poglejmo si najprej tole vrsto:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}$$

Vemo, da bo za natančen rezultat treba sešteti zelo veliko členov te vrste. V vrsti nastopa veliko hitro rastočih funkcij: potenčna, fakulteta in gama funkciji v definiciji Pochhammerjevega simbola. Takim ogromnim številkam se raje izogibamo in poskusimo vrsto izračunati na pametnejši način. Zapišimo nekaj prvih členov vrste:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= a_0 * \frac{3x^3}{3 * 2 * 1} * \frac{1}{3} \\ a_2 &= a_1 * \frac{3x^3}{6 * 5 * 4} * \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Kjer smo uporabili identiteto $\Gamma(z+1) = z * \Gamma(z)$. Sedaj lahko z malo premisleka uganemo rekurzivno formulo za poljuben člen a_k , kjer k ni nič.

$$a_k = a_{k-1} * \frac{3x^3}{3k * (3k-1) * (3k-2)} * \left(k - \frac{2}{3}\right)$$

Na isti način dobimo tudi rekurzivne zveze za člene ostalih vrst, ki jih moramo izračunati.

2.1 Vrsta $g(x)$

$$\begin{aligned} a_0 &= x \\ a_k &= a_{k-1} * \frac{3x^3}{(3k-1)3k(3k+1)} * \left(k - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

2.2 Vrsta L(z)

$$a_0 = 1$$

$$a_k = a_{k-1} * \frac{(3s - \frac{5}{2})(3s - \frac{3}{2})(3s - \frac{1}{2})}{54zs(s - \frac{1}{2})}$$

2.3 Vrsta P(z)

$$a_0 = 1$$

$$a_k = -a_{k-1} * \frac{(6s - \frac{11}{2})(6s - \frac{9}{2})(6s - \frac{7}{2}) \dots (6s - \frac{1}{2})}{54^2 z^2 2s(2s - 1)(2s - \frac{3}{2})(2s - \frac{1}{2})}$$

2.4 Vrsta Q(z)

$$a_0 = \frac{5}{72z}$$

$$a_k = -a_{k-1} * \frac{(6s - \frac{5}{2})(6s - \frac{3}{2}) \dots (6s + \frac{5}{2})}{54^2 z^2 2s(2s + 1)(2s - \frac{1}{2})(2s + \frac{1}{2})}$$

Največje vprašanje je, koliko členov vrste moramo sešteti, da dobimo zadovoljiv približek. Za začetek sem naredil funkcije, ki vrste seštevajo dokler členi niso manjši od določene številke/dokler seštetih členov ni več od določene številke. To bom poskusil ugotoviti z malo probavanja.

3 Aproksimacije za funkcijo Ai

3.1 Vrsta za majhne x

Izbral sem si (kar tako, da vidim kaj se zgodi), da bom nehal seštevati, ko členi postanejo manjši od 10^{-12} in to uporabil, da bi dobil vrednost $\text{Ai}(x)$ v točki $x=5$. Sesteti sem moral le okoli 20 členov iz vsake vrste, da bi se približal pravemu rezultatu na 10^{-13} natančno.

Sedaj hočem bolj podrobno raziskati do kje približno tale vrsta dobro in hitro deluje in kdaj naj končam seštevati.

Preizkušal sem malo različne možnosti in primerjal z pravim rezultatom:

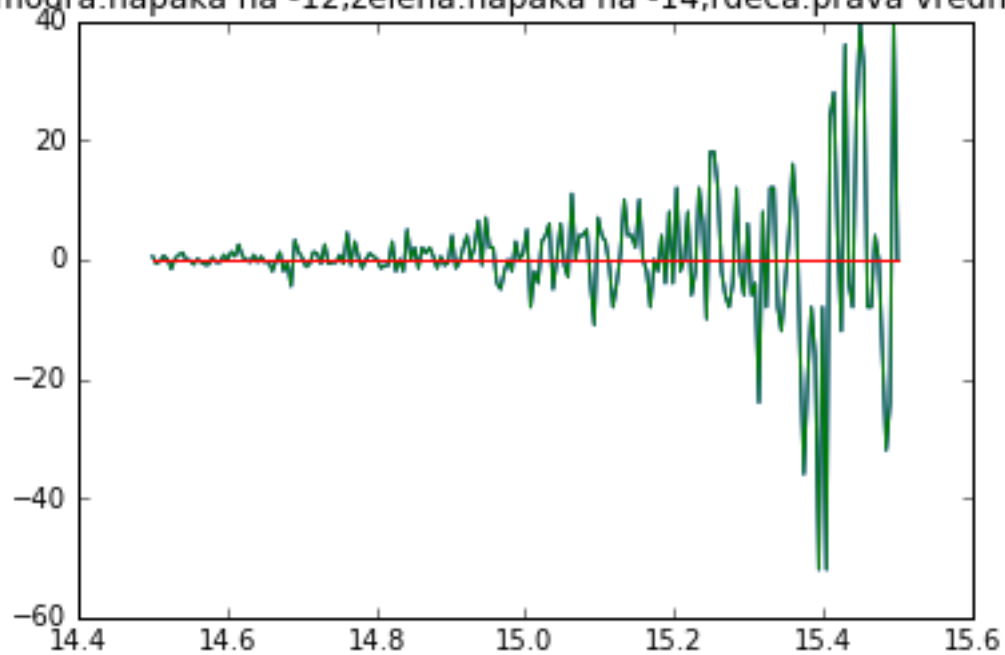


Tukaj sem vedno štel določeno število členov n

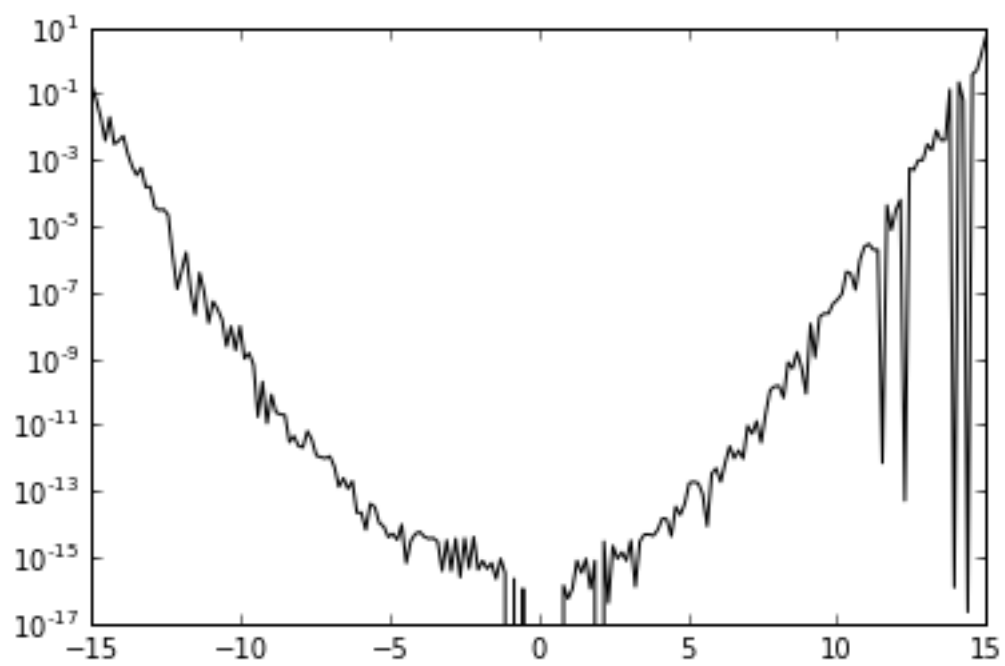


Povečan del grafa, kjer se začne močno odstopanje

modra:napaka na -12,zelena:napaka na -14,rdeča:prava vrednost



Tukaj sem šel številni dokler ni naslednji člen manjši od določene vrednosti

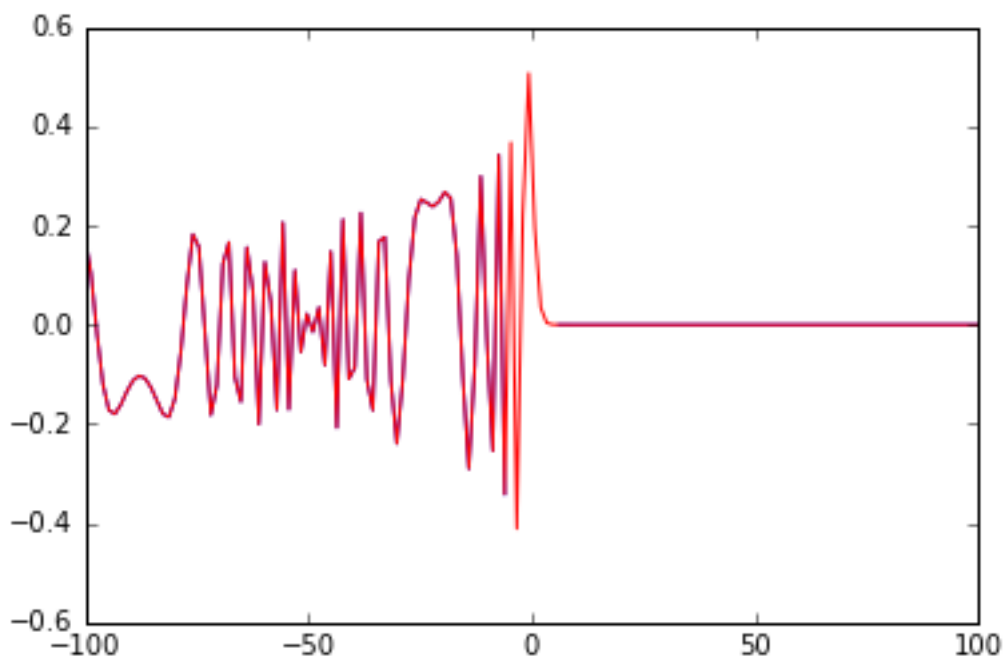


Odstopanje od prave vrednosti v odvisnosti od x

Vidimo torej, da ni neke opazne razlike, če računamo določeno število členov, ali se ustavimo ko so ti členi dovolj majhni. Izgleda, da bom dobil spodobno majhno odstopanje če vrsto za majhne x uporabim le za približno $|x| < 5$. Člene pa bom nehal števati, ko bo velikost člena padla pod 10^{-12} , saj sem opazil, da do tega hitro pride ($n \ll 1000$) in je torej tudi hitrejša.

3.2 Vrsta za velike x

Najprej sem optimistično poskusil vrsto nehati števati po istem kriteriju kot za male x . Hitro se je opazilo, da bo tukaj drugače, saj členi sploh niso nikoli padli pod 10^{-12} . Poskusil sem zmanjšati pogoj na 10^{-10} a ni pomagalo. Sedaj sem se nehal ozirati na velikost členov in seštel kar fiksno število členov, da sploh lahko kaj narišem in vidim, če je vsaj nekje približno prav. Seštevanje fiksne števila je še slabše, vrže zelo velike vrednosti in pogosto NaN(not a number). Še enkrat sem poskusil z končanjem seštevanja ko členi padejo pod določeno vrednost. Tokrat sem bil bolj blag in določil mejo na 10^{-7} :

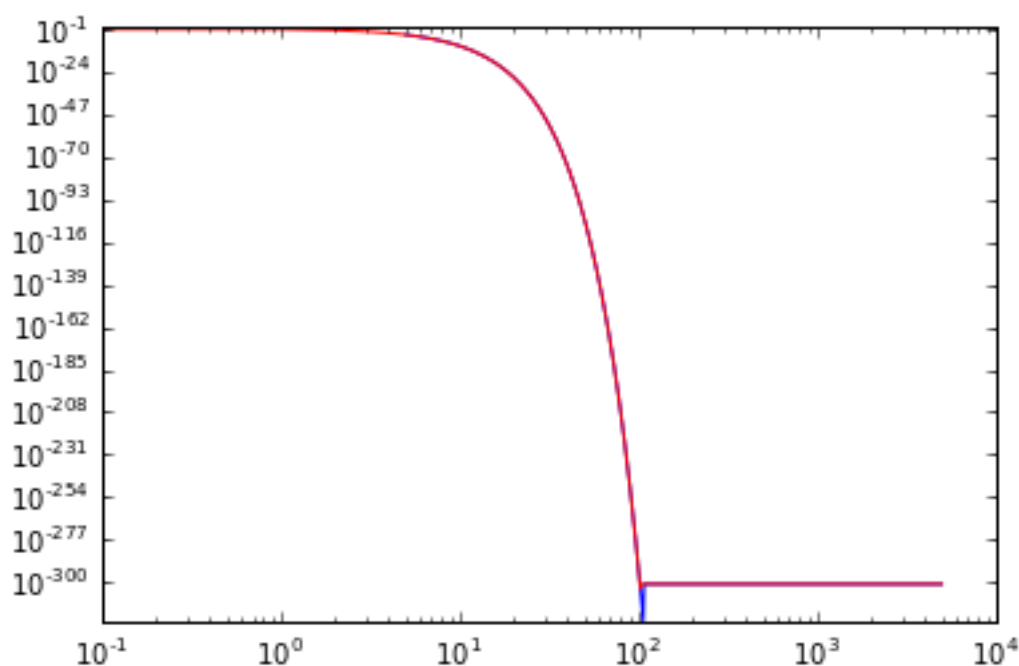


Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

Izgleda torej, da se kar dobro prilega, takoj bom pogledal še koliko točno in preveril obnašanje še na višjih številkah. Opazil sem, da pri asimptotski vrsti sploh ni toliko vprašanje pri katerih parametrih se bolje prilega, ampak pri katerih parametrih sploh kaj vrže ven. Če neham števati pri še manjši

vrednosti se hitro zgodi, da šestejem že milijon členov ali več. Opazil sem tudi, da pri majhnih argumentih (pod približno $|x| < 4$) začne zadeva močno divergirati. Členi pridejo do "inf", končen rezultat pa je "NaN" torej je ta vrsta za tako majhne argumente neuporabna. Pri šestevanju fiksnih členov za večje argumente tudi hitro pridemo do "NaN". To ni tako presenetljivo, saj vemo, da so asimptotične vrste pogosto divergentne. Verjetno smo pri šestevanju že prešli pravo vrednost in so členi začeli divjo naraščati.

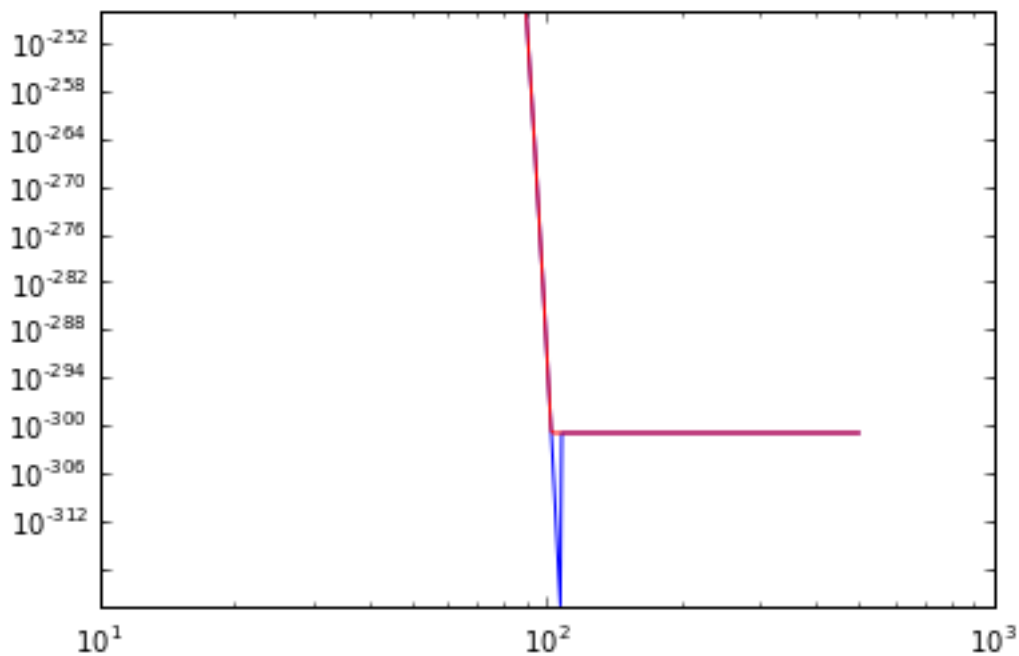
Prejšnjo metodo, ki je izgledala obetavna sem sedaj preizkusil še na širšem območju. Rezultat:



Apromimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

Lepo se vidi, da je pri približno $x = 100$ nekaj narobe. Morda zato, ker so tam vrednosti Airyjeve funkcije veliko manjše od mojega pogoja za končanje seštevanja vrste.

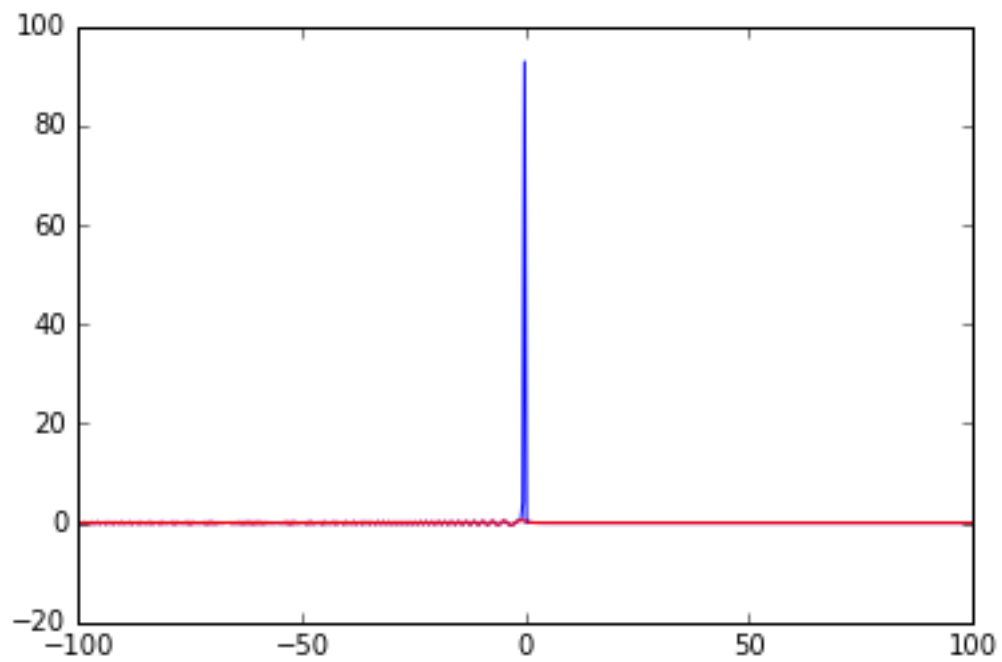
Poskusil bom to rešiti na čisto drugačen način. Asimptosko vrsto bom šesteval dokler je trenutni člen po absolutni vrednosti manjši od prejšnjega. Da vidimo ali bo to delovalo..



Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

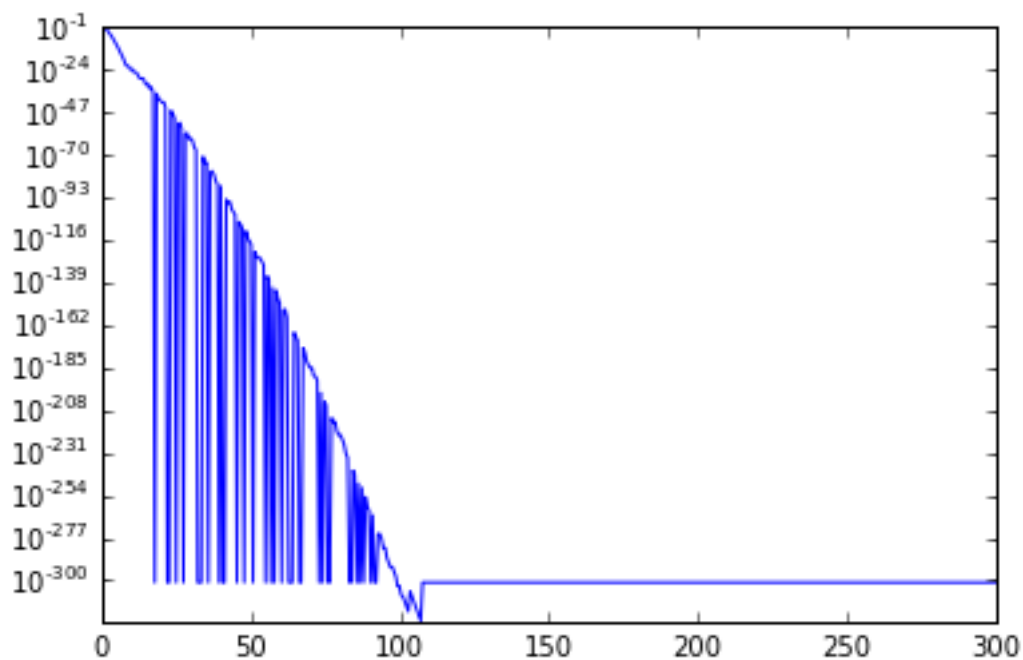
Stvar torej težave ni rešila. Vseeno bom ostal pri tej metodi, saj se je zdela hitra in bolj smiselno se zdi, da šestevanje členov ustavimo, ko začnejo naraščati. Sedaj menim, da te težave mogoče sploh ni treba popraviti. Vrednosti funkcije v tistem območju so izjemno majhne reda 10^{-300} . Sicer je napaka kar velika, vendar dvomim, da bi takšne točne vrednosti sploh kdaj rabili. V praksi se verjetno temu reče kar 0.

Se je pa zgodilo nekaj zanimivega. Zdaj ko šestevanje končam po novem načinu, ne prihaja več do NaN napak. Seveda pa je za majhne x rešitev vseeno zelo narobe:



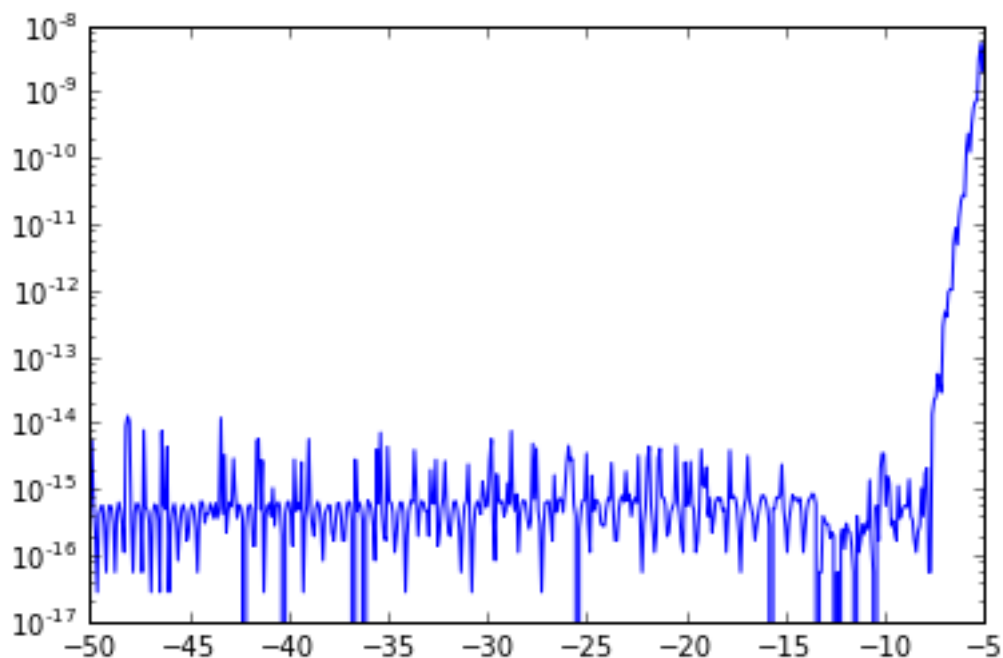
Aproximacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

Pa poglejmo zdaj za koliko se aproximacija razlikuje od prave rešitve:



Razlika med aproksimacijo in pravo vrednostjo

Zanimivo. Pri srednje manjših argumentih torej razlika dokaj divje skače. Vseeno ostaja manjša od nekje 10^{-20} kar se mi zdi zadovoljiva aproksimacija. Že pri $x = 5$ pa je razlika že okoli reda 10^{-12} , torej ta asimptotska vrsta dokaj dobro deluje že za manjše argumente. Mimogrede, res, da je pri večjih argumentih vrednost funkcije zelo majhna, a kolikor sem opazil je vrednost napake pri teh istih vrednostih vseeno kakih 10 velikostnih redov manjša. Poglejmo si kako se razlika obnaša za negativne argumente:

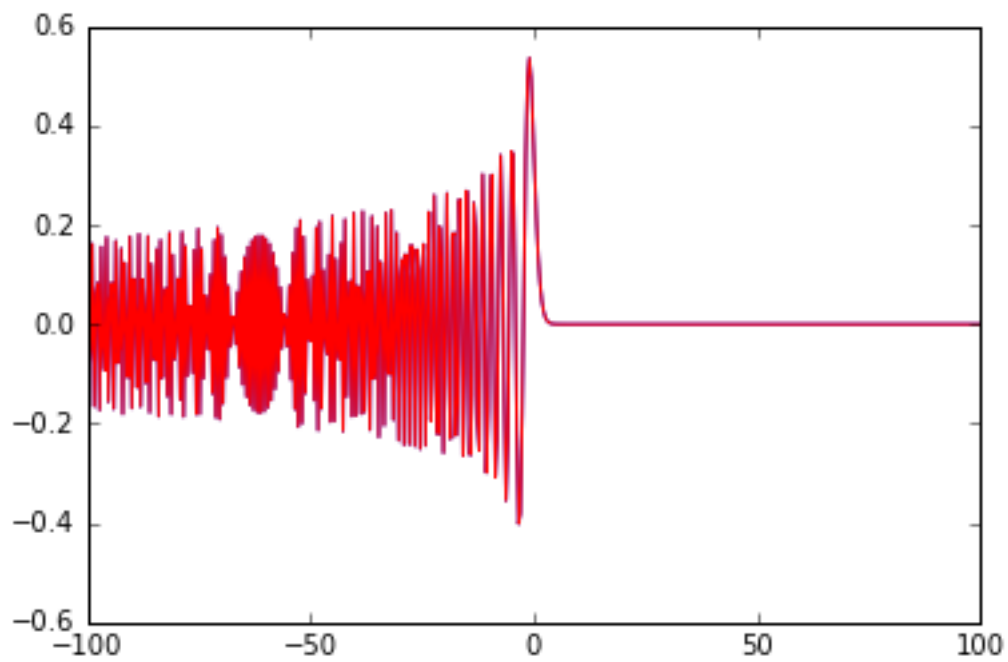


Razlika med aproksimacijo in pravo vrednostjo

Tukaj torej na še večjem območju razlika divja. Sicer pa je tudi funkcija sama v tem območju nemonotona. Se pa zdaj pojavi problem, ker ima funkcija tudi ničle, saj je napaka povsod neničelna torej ne veliko manjša od vrednosti funkcije kot prej. Nimam kakšnih idej za izboljšanje tega, zdi se mi pa, da pri ničlah z metodami aproksimacije tako ali tako sploh ne moremo priti do tega, da bi "absolutne vrednost napake bila nekaj redov manjša od absolutne vrednosti funkcije", napaka pa ostane enako majhna tudi, ko se oddaljimo od ničle, torej se bom s tem kar zadovoljiv.

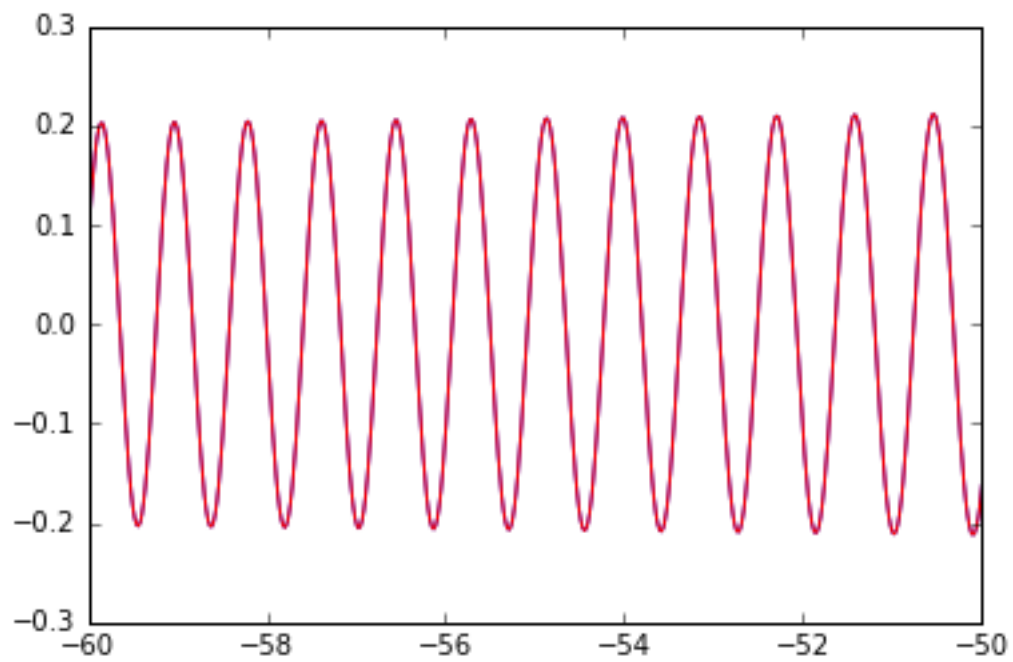
3.3 Funkcija $\text{Ai}(x)$ za poljuben x

Zdaj imam torej metodi, ki delujeta za velike in male ikse. Poskusil ju bom združiti, s tem, da bo moj mejnik katero naj uporabim $|x| = 7$, saj izgleda da je tam neke mejnik kdaj postane ena metoda bolj natančna od druge.



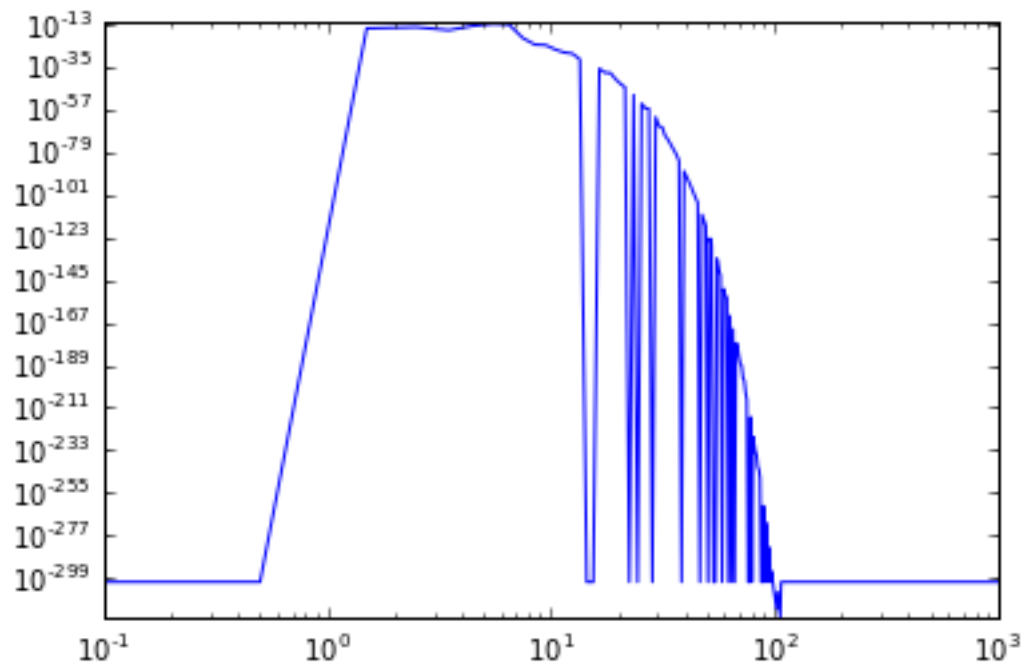
Aproximacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

Za negativne ikse zadeva tako hitro oscilira, da se težko vidi ali se aproksimacija res pokriva z pravo vrednostjo ali ne. Tukaj je torej del negativne osi malce pobližje:



Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

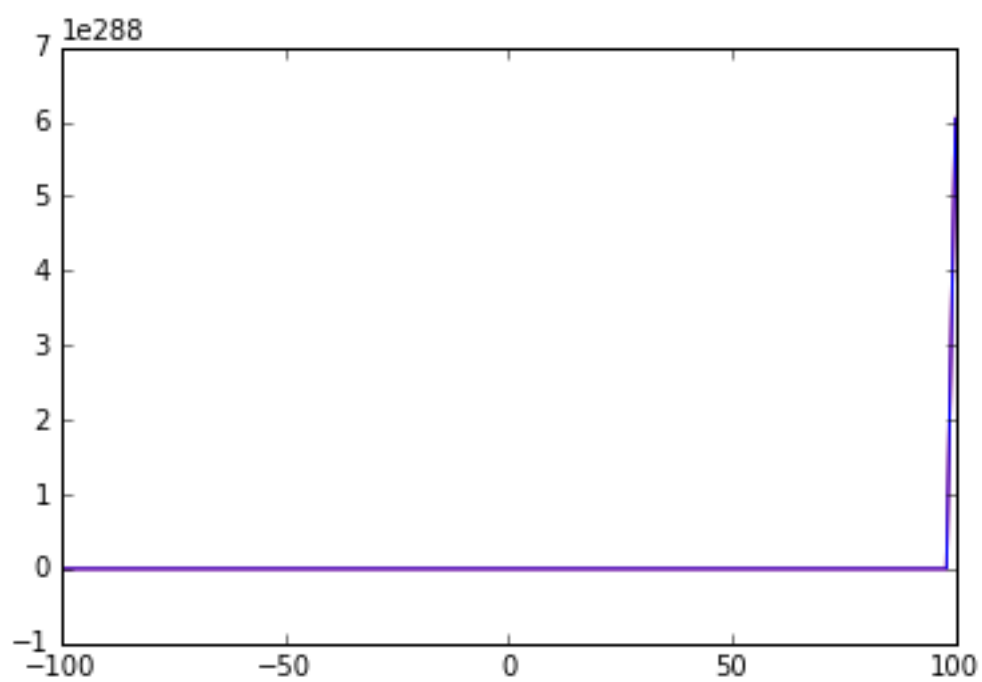
Kaj pa odstopanje na celi osi?



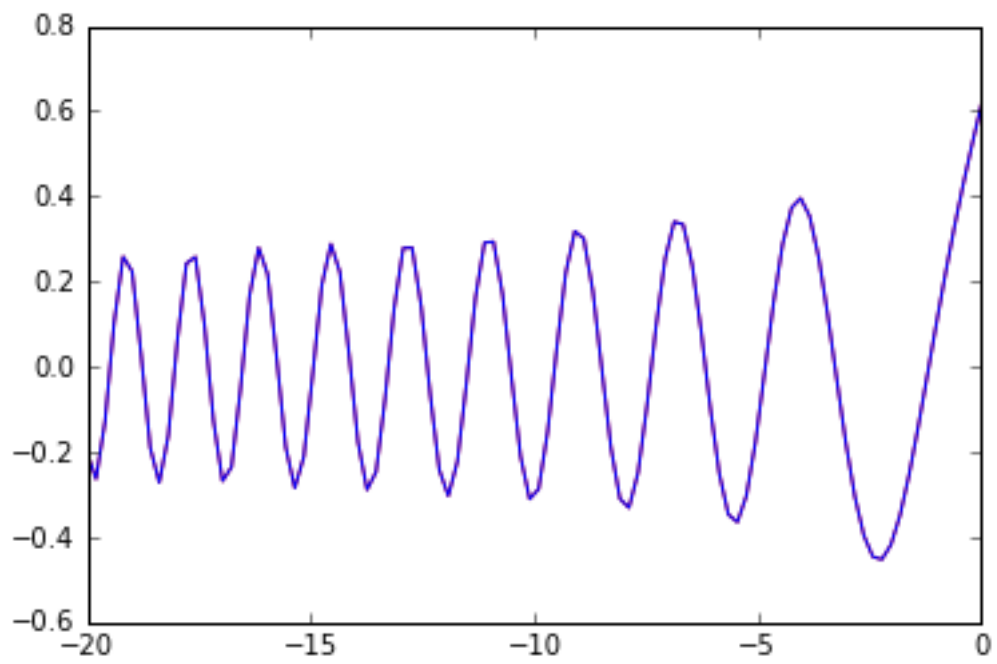
Razlika med aproksimacijo in pravo vrednostjo

4 Funkcija $\text{Bi}(x)$

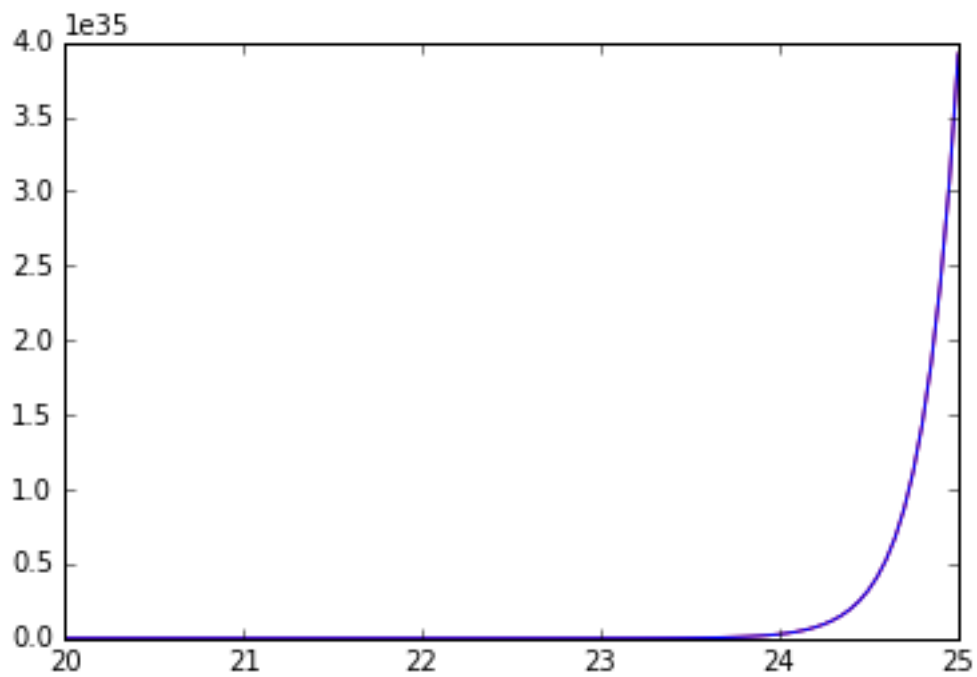
Ker se vse aproksimacije funkcije $\text{Bi}(x)$ izražajo z istimi vrstami kot so se $\text{Ai}(x)$ sem imel idejo, da bodo mogoče isti pogoji za nehanje števovanja vrst delovali tudi tukaj. In sem poskusil:



Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

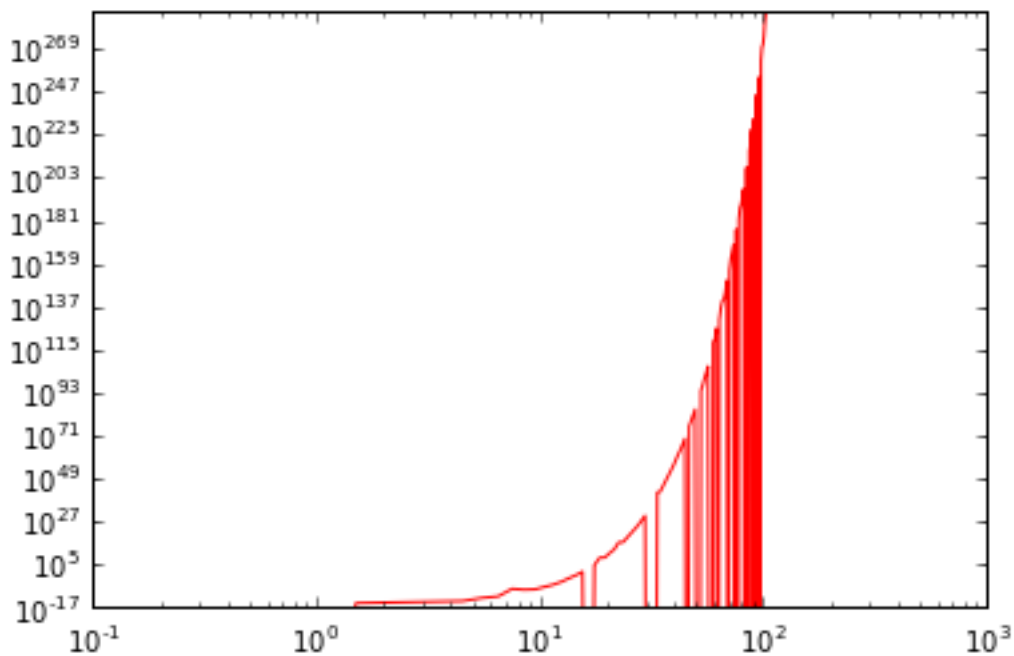


Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo



Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

Zgledalo je torej zelo obetavno, a potem sem pogledal kolikšna je napaka aproksimacije:

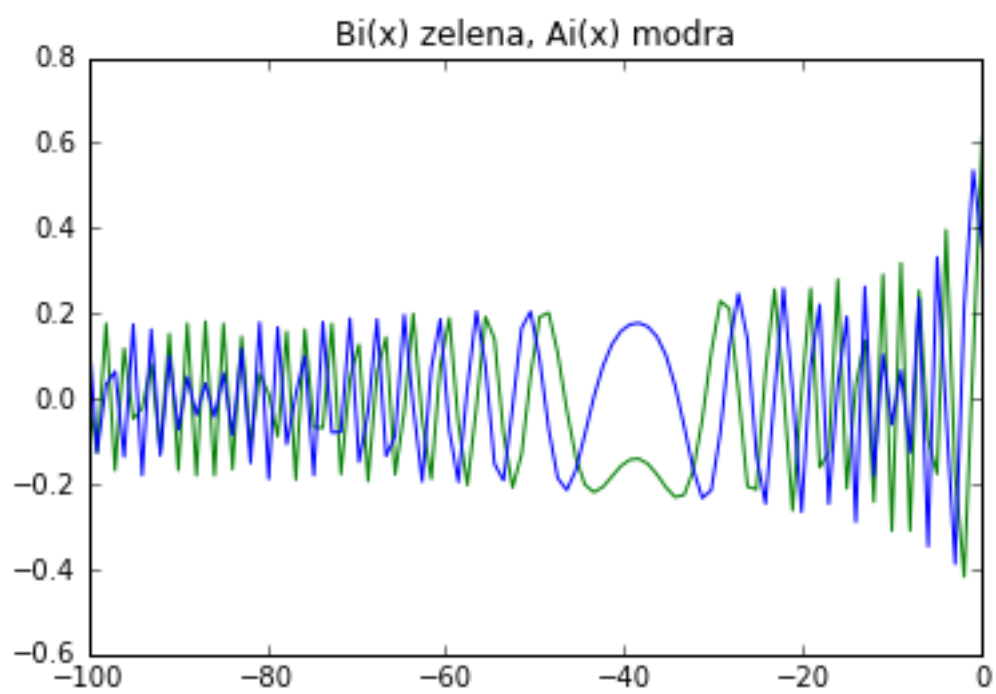


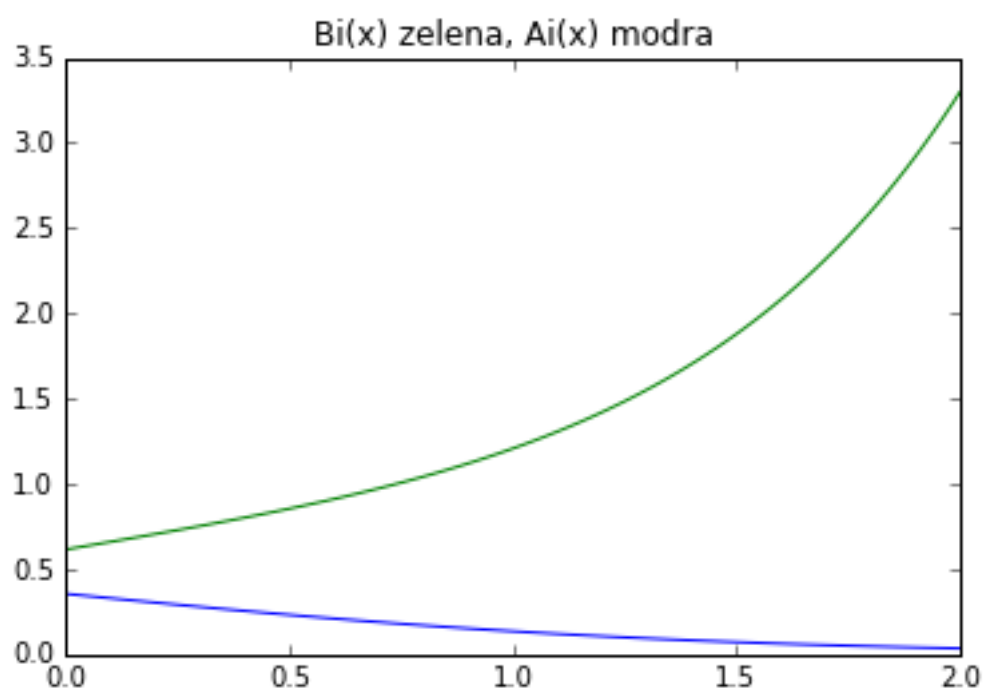
Aproksimacija z modro barvo, prava vrednost z rdečo

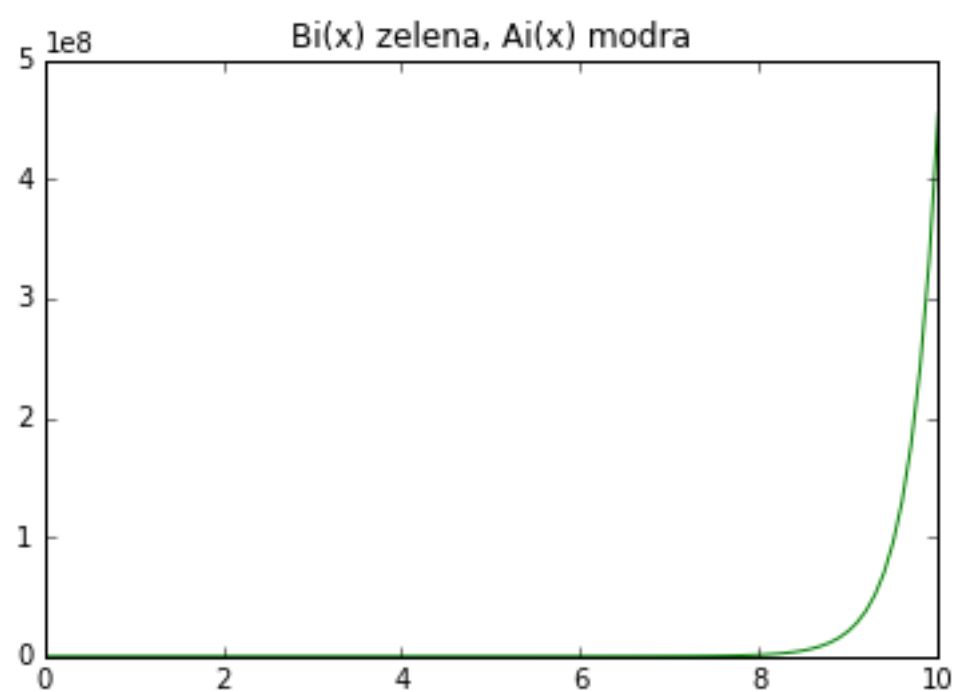
Absolutna napaka torej grozljivo naraste. Na hitro sem poskusil povecati stevilo sestetih členov, a napaka je ostajala. Potem sem opazil, da nad približno $x=200$, zadevo že tako divergira, da v bistvu daja rezultate NaN oz. inf, vseeno so bile razlike ogromne tudi na območju 100-150 kjer je naprimer funkcija že veliko narastla a ni še "inf/NaN". Še malo sem gledal vrednosti in končno ugotovil, kje je "težava". Res je da so napake ogromne, vendar je tudi vrednost funkcije na tem območju ogromna. Pravzaprav je vrednost funkcije vseeno kakih 10 velikostnih redov večja od napake, torej to pravzaprav sploh ni tako velika napaka.

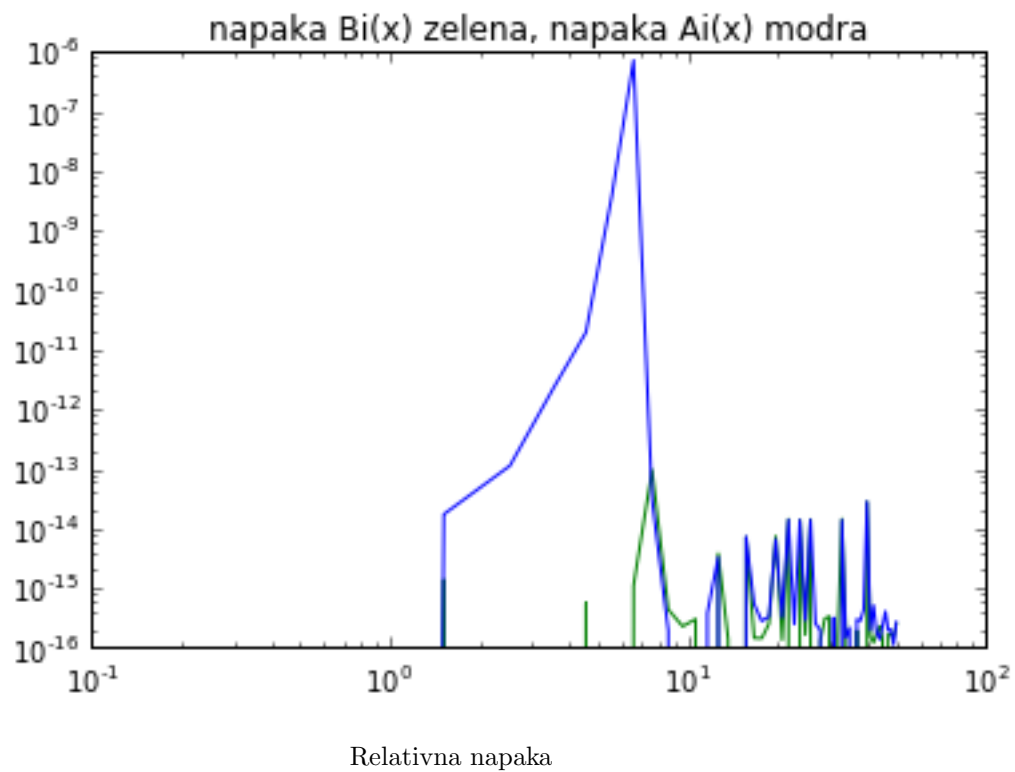
5 Končen pogled

Narišimo zdaj za konec še obe moji Airyjevi funkciji na isti graf pa še relativno napako:









Napaka aproksimacije $Bi(x)$ je torej zelo zadovoljiva, aproksimacije $Ai(x)$ pa sicer malce manj na tistem območju kjer je nekje meja med aproksimacijo za male in velike argumente.

6 Dodatna naloga

Sedaj nas zanima prvih 100 ničel Airyjevih funkcij. Prva metoda, ki mi pade na pamet je Newtonova metoda (Ker vgrajena $Ai(x)$ funkcija v Pythonu vrača tudi odvode). Problem je pri izbiri začetnega približka ničle. Najprej si bom malo pobližje ogledal graf Airyjevih funkcij, da vidim koliko narazen so sploh ničle (Čeprav ni nujno, da je ta interval konstanten za vse ničle).

Videl sem, da so prve ničle razmaknjene za 1-2, pozneje se malo škrči in so razmaknjene za 0.5, mislim, da bom kar poskusil z Newtonovo metodo iskati ničle s tem da bom začel pri prvi ničli (ki jo bom dobil s začetnim približkom 0) in potem šel negativno recimo po intervalih 0.1 Da vidimo kaj se bo zgodilo..

Poskusil sem torej z Newtonovo metodo, ki pa je zelo pocasi konvergirala (metalo je ven tak error) oziroma je nekako konvergirala proti necemu pozitivnemu (kar ni res saj vemo, da so ničle le na negativni realni osi).

Zdaj sem to (na zelo slab način) popravil. Iskal sem po isti newtonovi metodi, le da sem sproti metal stran ničle ki so večje od nič (ki v resnici sploh niso ničle le močno približevanje ničli pri prvi Airyjevi funkciji) in sproti gledal po celem do sedaj polnem seznamu obstojecih ničel, da ne dobim ponesreci še ene ničle, ki je od prejšnje le 0.001 stran (kar bi v bistvu bila samo ena ničla). Rezultati so sledeči:

6.1 Ničle Ai(x)

formula:-2.337163322273885, Newton-2.336141997554901
formula:-4.087948607972578, Newton-4.090582746735273
formula:-5.520559812349988, Newton-5.51331712331758
formula:-6.786708089109229, Newton-6.786800985401768
formula:-7.944133587009499, Newton-7.9469220453911005
formula:-9.022650853321732, Newton-9.018933435863268
formula:-10.0401743415537, Newton-10.03328479509225
formula:-11.008524303732038, Newton-11.008377877088847
formula:-11.93601556323586, Newton-11.936273600081728
formula:-12.828776752865613, Newton-12.828772795156679
formula:-13.691489035210658, Newton-13.68982077844435
formula:-14.527829951775306, Newton-14.534897225683839
formula:-15.340755135977986, Newton-15.340688637892825
formula:-16.13268515694576, Newton-16.12621919878334
formula:-16.905633997429938, Newton-16.900342202961234
formula:-17.661300105697052, Newton-17.66168024256383
formula:-18.401132599207113, Newton-18.402288059813305
formula:-19.126380474246947, Newton-19.124309619395888
formula:-19.8381298917215, Newton-19.83071160172986
formula:-20.537332907677563, Newton-20.534546527850225
formula:-21.224829943642096, Newton-21.22705561201599
formula:-21.901367595585125, Newton-21.908856499433707
formula:-22.567612917496497, Newton-22.56760700344918
formula:-23.224165001121676, Newton-23.218746701854528
formula:-23.871564455535914, Newton-23.871392441350583
formula:-24.51030123658968, Newton-24.507369057398147
formula:-25.14082116614896, Newton-25.14127025758591
formula:-25.76353140098275, Newton-25.75955415254264
formula:-26.378805052137228, Newton-26.378328811115445
formula:-26.986985111606362, Newton-26.986940238564124
formula:-27.588387809882438, Newton-27.591757221650262
formula:-28.183305502632635, Newton-28.183300120565658
formula:-28.77200916523743, Newton-28.772475317672534
formula:-29.354750558766284, Newton-29.351788640015258
formula:-29.93176411908655, Newton-29.933821844011714
formula:-30.503268611418495, Newton-30.4968739163465
formula:-31.06946858518375, Newton-31.068937692269795
formula:-31.630555658012657, Newton-31.633527702044873
formula:-32.18670965295205, Newton-32.18866177225079
formula:-32.73809960900026, Newton-32.7380527437487
formula:-33.28488468190139, Newton-33.28522331227882
formula:-33.82721494950864, Newton-33.82695726684468
formula:-34.36523213386365, Newton-34.364603847719586
formula:-34.899070250345304, Newton-34.899373652053406

formula:-35.42885619274788, Newton-35.428636506500006
 formula:-35.954710261898626, Newton-35.953332699248485
 formula:-36.476746644374806, Newton-36.47686217351186
 formula:-36.995073846994494, Newton-36.9950916868033
 formula:-37.50979509200501, Newton-37.51143450378521
 formula:-38.02100867725524, Newton-38.01974168184952
 formula:-38.52880830509423, Newton-38.52876855954928
 formula:-39.03328338327251, Newton-39.03321723892222
 formula:-39.53451930072302, Newton-39.530271974818724
 formula:-40.03259768075417, Newton-40.03265816598592
 formula:-40.527596613889706, Newton-40.528105061782995
 formula:-41.01959087233248, Newton-41.01865444304092
 formula:-41.50865210780525, Newton-41.50864542427973
 formula:-41.99484903432642, Newton-41.99515156726319
 formula:-42.47824759730838, Newton-42.47204007750903
 formula:-42.95891113021655, Newton-42.95812445534179
 formula:-43.43690049989686, Newton-43.43674425749356
 formula:-43.91227424156369, Newton-43.91176054168081
 formula:-44.38508868433938, Newton-44.385147718498615
 formula:-44.855398068145824, Newton-44.85662541940641
 formula:-45.32325465267042, Newton-45.323208175649995
 formula:-45.7887088190573, Newton-45.787584044329265
 formula:-46.25180916491253, Newton-46.25181628582517
 formula:-46.712602593156504, Newton-46.711876985175785
 formula:-47.171134395206316, Newton-47.16497142215651
 formula:-47.627448328927386, Newton-47.626430464531204
 formula:-48.081586691753245, Newton-48.0841816076667
 formula:-48.533590389336794, Newton-48.53339953718939
 formula:-48.98349900006457, Newton-48.98387720863135
 formula:-49.431350835736765, Newton-49.43367671978526
 formula:-49.8771829986894, Newton-49.87730305502384
 formula:-50.321031435612205, Newton-50.325927881950896
 formula:-50.762930988294286, Newton-50.76211512557342
 formula:-51.20291544151055, Newton-51.20290157226746
 formula:-51.64101756824489, Newton-51.6404646361387
 formula:-52.07726917242964, Newton-52.07748127667501
 formula:-52.51170112936764, Newton-52.51167718473279
 formula:-52.944343423989295, Newton-52.944302302445685
 formula:-53.37522518708567, Newton-53.37476947951387
 formula:-53.804374729647854, Newton-53.80442030323592
 formula:-54.23181957543306, Newton-54.233359293810786
 formula:-54.6575864918687, Newton-54.653590300965604
 formula:-55.08170151939747, Newton-55.087360086668184
 formula:-55.50418999935961, Newton-55.5043153050389
 formula:-55.92507660050054, Newton-55.92337070110866
 formula:-56.34438534418669, Newton-56.34315297622848

formula:-56.76213962840595, Newton-56.762006095065956
 formula:-57.17836225062417, Newton-57.182732356547355
 formula:-57.59307542956406, Newton-57.59837493900652
 formula:-58.0063008259683, Newton-58.00628189567436
 formula:-58.418059562404494, Newton-58.41838599281544
 formula:-58.82837224216611, Newton-59.23894915189822
 formula:-59.23725896731926, Newton-59.65003046677569
 formula:-59.644739355942576, Newton-61.26094070101069
 formula:-60.05083255860417, Newton-62.061111211465146
 formula:-60.45555727411667, Newton-95.72251838797646

6.2 Ničle Bi(x)

formula:3.155519766331502, Newton-1.17371
 formula:-3.2710787090748767, Newton-3.2712713561503115
 formula:-4.830737748256738, Newton-4.831450021813814
 formula:-6.169852124795421, Newton-6.169843786538271
 formula:-7.376762079059813, Newton-7.376616165235318
 formula:-8.491948846464942, Newton-8.49561668382789
 formula:-9.538194379337316, Newton-9.545572198204308
 formula:-10.529913506703094, Newton-10.529381998952783
 formula:-11.476953551278095, Newton-11.478095059488933
 formula:-12.3864171385825, Newton-12.384585929379117
 formula:-13.263639522941714, Newton-13.263880804209784
 formula:-14.11275680906862, Newton-14.112905890694384
 formula:-14.937057412154147, Newton-14.937887400322495
 formula:-15.739210351190474, Newton-15.734273300470338
 formula:-16.52141955063437, Newton-16.521446412145387
 formula:-17.28553162458124, Newton-17.285535660594405
 formula:-18.033113287224996, Newton-18.02451712105774
 formula:-18.765508284480074, Newton-18.764086737243684
 formula:-19.48388013298923, Newton-19.478621616246272
 formula:-20.1892447853962, Newton-20.186528384177446
 formula:-20.88249599419317, Newton-20.875173269557386
 formula:-21.56442528471297, Newton-21.561597666960026
 formula:-22.23573788180338, Newton-22.23587773597104
 formula:-22.897065554219793, Newton-22.905005896423408
 formula:-23.548977079642437, Newton-23.547298619748908
 formula:-24.191986850648995, Newton-24.19555893485858
 formula:-24.826562012152888, Newton-24.826566266161016
 formula:-25.453128427085126, Newton-25.449708505670852
 formula:-26.07207569846679, Newton-26.072058818653325
 formula:-26.683761425120984, Newton-26.684576308194718
 formula:-27.2885148300763, Newton-27.294391906970688
 formula:-27.886639871735955, Newton-27.886686622801964
 formula:-28.47841792567866, Newton-28.478428133964595

formula:-29.064110107777644, Newton-29.064162296231512
 formula:-29.643959295918396, Newton-29.644407721917197
 formula:-30.218191897047273, Newton-30.217509425015898
 formula:-30.78701939792176, Newton-30.78703050127969
 formula:-31.35063973125558, Newton-31.3491594435392
 formula:-31.909238483584566, Newton-31.908795587667797
 formula:-32.46298996683685, Newton-32.468096595325264
 formula:-33.01205817205683, Newton-33.01100565053907
 formula:-33.55659762084005, Newton-33.55444518855837
 formula:-34.09675412765602, Newton-34.09653776699074
 formula:-34.63266548426774, Newton-34.63150882272717
 formula:-35.16446207582101, Newton-35.16445239627691
 formula:-35.6922674368108, Newton-35.69208554336992
 formula:-36.21619875398748, Newton-36.21559956918772
 formula:-36.7363673223012, Newton-36.73637557541924
 formula:-37.25287895916828, Newton-37.25286523983991
 formula:-37.765834381651786, Newton-37.767156266787396
 formula:-38.275329550560045, Newton-38.2771735321796
 formula:-38.78145598496326, Newton-38.78135679952282
 formula:-39.28430105019801, Newton-39.27974724418718
 formula:-39.78394822205711, Newton-39.78671992967341
 formula:-40.280477329543686, Newton-40.28737484648495
 formula:-40.77396477829067, Newton-40.773821889662685
 formula:-41.26448375650675, Newton-41.266385900312386
 formula:-41.75210442510105, Newton-41.75107737908031
 formula:-42.23689409345656, Newton-42.237103464721486
 formula:-42.71891738216253, Newton-42.714036076114844
 formula:-43.19823637387693, Newton-43.197430819505755
 formula:-43.674910753366724, Newton-43.67482027943288
 formula:-44.14899793766616, Newton-44.1533014731412
 formula:-44.62055319719727, Newton-44.620509257877735
 formula:-45.089629768613115, Newton-45.08918045541097
 formula:-45.55627896004906, Newton-45.55626486764024
 formula:-46.02055024940101, Newton-46.020733795796055
 formula:-46.48249137619077, Newton-46.482230175206986
 formula:-46.942148427526014, Newton-46.94069837256733
 formula:-47.39956591861494, Newton-47.39965397762286
 formula:-47.854786868254514, Newton-47.84967431241946
 formula:-48.307852869672466, Newton-48.30420082245228
 formula:-48.75880415707066, Newton-48.75618369547595
 formula:-49.207679668186024, Newton-49.2030570276277
 formula:-49.6545171031586, Newton-49.65450039990594
 formula:-50.099352979971236, Newton-50.0944234263575
 formula:-50.54222268670363, Newton-50.548202875823904
 formula:-50.98316053082284, Newton-50.9832409630268
 formula:-51.422199785714675, Newton-51.42243472802071

formula:-51.85937273464332, Newton-51.859336326103396
formula:-52.29471071231238, Newton-52.29600489852289
formula:-52.72824414418604, Newton-52.728514795255236
formula:-53.16000258371715, Newton-53.15995867199868
formula:-53.590014747617914, Newton-53.589955419564255
formula:-54.01830854929814, Newton-54.01851716653977
formula:-54.44491113058688, Newton-54.444903894681254
formula:-54.8698488918446, Newton-54.86994827605265
formula:-55.29314752056544, Newton-55.29303225577967
formula:-55.714832018561395, Newton-55.71486541721097
formula:-56.134926727814054, Newton-56.13493531207754
formula:-56.55345535507366, Newton-56.55342910486751
formula:-56.97044099527886, Newton-56.967325056215614
formula:-57.38590615386648, Newton-57.384822440795034
formula:-57.79987276803498, Newton-57.795026617054454
formula:-58.21236222702162, Newton-58.2123702614951
formula:-58.623395391448845, Newton-58.62319972623049
formula:-59.032992611792075, Newton-59.03746010556881
formula:-59.441173746017405, Newton-59.441167462466325
formula:-59.84795817643466, Newton-59.84297210005587
formula:-60.253364825808355, Newton-446.5174841712581

6.3 Komentar

Izgleda torej, da sem ničle z Newtonovo metodo zadel, le na koncu se zgodi nekaj čudnega. Verjetno so moji parametri pri Newtonovi metodi neprimerni in je zaznal, kakšno približanje ničli kot samo ničlo. Tista zadnja "ničla" -95 pa je najbrž konvergirane k neki čudni vrednosti (Opazil sem, da pogosto nekatere začetne točke konvergirajo kar nekam drugam, npr. kakšna zelo negativna točka konvergira na pozitivno os).

Pri $Bi(x)$ so ničle večinoma bolj uspele (Le zadnja po Newtonovi je spet izjemno čudna). Zanimiv rezultat pa je prva ničla po formuli za ničle pri $Bi(x)$, prva je namreč pozitivna, kar vemo da ni.

za $Bi(x)$ mi pač za nek x okoli -60 newtnova metoda očitno konvergira k neki zelo oddaljeni ničli. Tega sem se rešil tako, da sem raje poiskal prvih 101 ničel, in potem odrezal najmanjšo (v tem primeru -446). Zdaj je rezultat tole:

formula:3.155519766331502, Newton-1.17371
formula:-3.2710787090748767, Newton-3.2712713561503115
formula:-4.830737748256738, Newton-4.831450021813814
formula:-6.169852124795421, Newton-6.169843786538271
formula:-7.376762079059813, Newton-7.376616165235318
formula:-8.491948846464942, Newton-8.49561668382789
formula:-9.538194379337316, Newton-9.545572198204308
formula:-10.529913506703094, Newton-10.529381998952783
formula:-11.476953551278095, Newton-11.478095059488933
formula:-12.3864171385825, Newton-12.384585929379117

formula:-13.263639522941714, Newton-13.263880804209784
 formula:-14.11275680906862, Newton-14.112905890694384
 formula:-14.937057412154147, Newton-14.937887400322495
 formula:-15.739210351190474, Newton-15.734273300470338
 formula:-16.52141955063437, Newton-16.521446412145387
 formula:-17.28553162458124, Newton-17.285535660594405
 formula:-18.033113287224996, Newton-18.02451712105774
 formula:-18.765508284480074, Newton-18.764086737243684
 formula:-19.48388013298923, Newton-19.478621616246272
 formula:-20.1892447853962, Newton-20.186528384177446
 formula:-20.88249599419317, Newton-20.875173269557386
 formula:-21.56442528471297, Newton-21.561597666960026
 formula:-22.23573788180338, Newton-22.23587773597104
 formula:-22.897065554219793, Newton-22.905005896423408
 formula:-23.548977079642437, Newton-23.547298619748908
 formula:-24.191986850648995, Newton-24.19555893485858
 formula:-24.826562012152888, Newton-24.826566266161016
 formula:-25.453128427085126, Newton-25.449708505670852
 formula:-26.07207569846679, Newton-26.072058818653325
 formula:-26.683761425120984, Newton-26.684576308194718
 formula:-27.2885148300763, Newton-27.294391906970688
 formula:-27.886639871735955, Newton-27.886686622801964
 formula:-28.47841792567866, Newton-28.478428133964595
 formula:-29.06411010777644, Newton-29.064162296231512
 formula:-29.643959295918396, Newton-29.644407721917197
 formula:-30.218191897047273, Newton-30.217509425015898
 formula:-30.78701939792176, Newton-30.78703050127969
 formula:-31.35063973125558, Newton-31.3491594435392
 formula:-31.909238483584566, Newton-31.908795587667797
 formula:-32.46298996683685, Newton-32.468096595325264
 formula:-33.01205817205683, Newton-33.01100565053907
 formula:-33.55659762084005, Newton-33.55444518855837
 formula:-34.09675412765602, Newton-34.09653776699074
 formula:-34.63266548426774, Newton-34.63150882272717
 formula:-35.16446207582101, Newton-35.16445239627691
 formula:-35.6922674368108, Newton-35.69208554336992
 formula:-36.21619875398748, Newton-36.21559956918772
 formula:-36.7363673223012, Newton-36.73637557541924
 formula:-37.25287895916828, Newton-37.25286523983991
 formula:-37.765834381651786, Newton-37.767156266787396
 formula:-38.275329550560045, Newton-38.2771735321796
 formula:-38.78145598496326, Newton-38.78135679952282
 formula:-39.28430105019801, Newton-39.27974724418718
 formula:-39.78394822205711, Newton-39.78671992967341
 formula:-40.280477329543686, Newton-40.28737484648495
 formula:-40.77396477829067, Newton-40.773821889662685

formula:-41.26448375650675, Newton-41.266385900312386
 formula:-41.75210442510105, Newton-41.75107737908031
 formula:-42.23689409345656, Newton-42.237103464721486
 formula:-42.71891738216253, Newton-42.714036076114844
 formula:-43.19823637387693, Newton-43.197430819505755
 formula:-43.674910753366724, Newton-43.67482027943288
 formula:-44.14899793766616, Newton-44.1533014731412
 formula:-44.62055319719727, Newton-44.620509257877735
 formula:-45.089629768613115, Newton-45.08918045541097
 formula:-45.55627896004906, Newton-45.55626486764024
 formula:-46.02055024940101, Newton-46.020733795796055
 formula:-46.48249137619077, Newton-46.482230175206986
 formula:-46.942148427526014, Newton-46.94069837256733
 formula:-47.39956591861494, Newton-47.39965397762286
 formula:-47.854786868254514, Newton-47.84967431241946
 formula:-48.307852869672466, Newton-48.30420082245228
 formula:-48.75880415707066, Newton-48.75618369547595
 formula:-49.207679668186024, Newton-49.2030570276277
 formula:-49.6545171031586, Newton-49.65450039990594
 formula:-50.099352979971236, Newton-50.0944234263575
 formula:-50.54222268670363, Newton-50.548202875823904
 formula:-50.98316053082284, Newton-50.9832409630268
 formula:-51.422199785714675, Newton-51.42243472802071
 formula:-51.85937273464332, Newton-51.859336326103396
 formula:-52.29471071231238, Newton-52.29600489852289
 formula:-52.72824414418604, Newton-52.728514795255236
 formula:-53.16000258371715, Newton-53.15995867199868
 formula:-53.590014747617914, Newton-53.589955419564255
 formula:-54.01830854929814, Newton-54.01851716653977
 formula:-54.44491113058688, Newton-54.444903894681254
 formula:-54.8698488918446, Newton-54.86994827605265
 formula:-55.29314752056544, Newton-55.29303225577967
 formula:-55.714832018561395, Newton-55.71486541721097
 formula:-56.134926727814054, Newton-56.13493531207754
 formula:-56.55345535507366, Newton-56.55342910486751
 formula:-56.97044099527886, Newton-56.967325056215614
 formula:-57.38590615386648, Newton-57.384822440795034
 formula:-57.79987276803498, Newton-57.795026617054454
 formula:-58.21236222702162, Newton-58.2123702614951
 formula:-58.623395391448845, Newton-58.62319972623049
 formula:-59.032992611792075, Newton-59.03746010556881
 formula:-59.441173746017405, Newton-59.441167462466325
 formula:-59.84795817643466, Newton-59.84297210005587
 formula:-60.253364825808355, Newton-60.2534012885078
 Kar izgleda veliko bolj v redu.