Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Anomalija Abelskega Trikotnika

Avtor
Andrej Kolar - Požun

11. September, 2019

1 Uvod

V teoriji polja igra ključno vlogo nam dobro znani Feynmannov popotni integral, ki ima naslednjo obliko[1]:

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \; e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}.$$

Za Lagrangian teorije $\mathcal{L}$ bomo vzeli kar Diracov Lagrangian z umeritvenimi polji A. $\eta, \bar{\eta}$ predstavljajo izvore in ju ne bomo obravnavali, napisana sta zgolj zaradi kompletnosti. Objekti tipa $\mathcal{D}\psi$ so tako imenovana funkcionalna (v tem primeru tudi fermionska) mera in predstavljajo integracijo po vseh funkcijah ψ. Videli bomo, da bodo pri anomalijah imeli bistveno vlogo.

Transformaciji polj oblike $\psi' = U\psi$, $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\overline{U}$ (in morda še transformacija polj A, ki nas tu ne bo zanimala) rečemo, da je simetrijska transformacija, če pusti Lagrangian $\mathcal{L}$ invarianten. Pri tem ponavadi privzamemo, da se fermionska mera ne spremeni torej $\mathcal{D}\psi' = \mathcal{D}\psi$. Takšna simetrijska transformacija vodi po Wardovih identitetah do nekega ohranjenega toka.

Anomalija se pojavi, če fermionska mera ni invariantna na simetrijsko transformacijo Lagrangiana $\mathcal{L}$. Torej $\mathcal{D}\psi' \neq \mathcal{D}\psi$. V tem primeru zgoraj omenjeni tok ni več ohranjen.

2 Transformacija fermionske mere in anomalija

V tem razdelku si bomo pogledali, kakšne transformacije spremenijo fermionsko mero $\mathcal{D}\psi$. Poglejmo si torej umeritveno transformacijo

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\to \psi'(x) = U(x)\psi(x), \\
\bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\overline{U}(x), \\
\overline{U}(x) &= i\gamma^0 U^\dagger(x) i\gamma^0,
\end{aligned}$$

kjer zadnja vrstica sledi iz definicije $\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0$ (uporabljamo konvencijo iz vira [2]). V principu bi morali tu še primerno transformirati umeritvena polja A, vendar se lahko vedno odločimo, da naredimo popotni integral najprej po fermionskih poljih in šele potem po umeritvenih. Tedaj se izkaže[2], da če se anomalije pojavijo, se pojavijo v prvem delu, ko integriramo po fermionskih poljih. Zato se lahko omejimo zgolj na obravnavo transformacijskih lastnosti fermionskih mer. Vemo[1], da se pri spremembi Grassmanovih spremenljivk (s katerimi imamo tu opravka, saj gledamo fermionska polja) funkcionalna mera pomnoži z inverzno determinanto pripadajočega operatorja torej:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi &= \mathcal{D}\psi' = (\det \mathcal{U})^{-1} \; \mathcal{D}\psi \\
\mathcal{D}\bar{\psi} &= \mathcal{D}\bar{\psi}' = (\det \overline{\mathcal{U}})^{-1} \; \mathcal{D}\bar{\psi} \\
\langle x|\mathcal{U}|y\rangle &= U(x) \; \delta^{(4)}(x-y) \\
\langle x|\overline{\mathcal{U}}|y\rangle &= \overline{U}(x) \; \delta^{(4)}(x-y)
\end{aligned}$$

Za začetek si poglejmo, kaj se zgodi pri transformaciji oblike

$$U(x) = e^{i\epsilon^\alpha(x) t_\alpha},$$

kjer so generatorji t_α hermitski (transformacija je torej unitarna) in komutirajo z Diracovimi gama matrikami. V tem primeru izračunamo

$$\overline{U}(x) = i\gamma^0 e^{-i\epsilon^\alpha(x) t_\alpha} i\gamma^0 = e^{-i\epsilon^\alpha(x) t_\alpha} (i\gamma^0)^2 = e^{-i\epsilon^\alpha(x) t_\alpha} = U^{-1}(x),$$

kjer smo matriko γ^0 prekomutirali preko $U^\dagger(x)$ in upoštevali, da je po naši konvenciji $(i\gamma^0)^2 = I$. Iz osnovnih lastnosti determinante potem sledi

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \det \mathcal{U} \det \mathcal{U}^{-1} \; \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}.$$

Fermionska mera je torej invariantna na tako transformacijo in ne dobimo anomalije.

Pokazali bomo, da se pa anomalija pojavi pri kiralni transformaciji:

$$U(x) = e^{i\epsilon^\alpha(x)t_\alpha\gamma_5},$$

kjer so generatorji t_α spet hermitstki in komutirajo z gama matrikami. Prisotnost γ_5 matrike pa povzorči:

$$\overline{U}(x) = i\gamma^0 e^{-i\epsilon^\alpha(x)t_\alpha\gamma_5} i\gamma^0 = e^{i\epsilon^\alpha(x)t_\alpha\gamma_5}(i\gamma^0)^2 = e^{i\epsilon^\alpha(x)t_\alpha\gamma_5} = U(x),$$

kjer smo upoštevali, da γ_5 antikomutira z vsemi ostalimi gama matrikami. Po taki transformaciji imamo torej

$$\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}' = \det\mathcal{U}^{-2}\ \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}.$$

Anomalijo bomo imeli, če bo veljalo $\det\mathcal{U}^{-2} \neq 1$. Pa izračunajmo ali je to res. Najprej opazimo, da velja

$$\langle x|\mathcal{U}^2|y\rangle = \int \mathrm{d}^4z\ \langle x|\mathcal{U}|z\rangle\langle z|\mathcal{U}|y\rangle = \int \mathrm{d}^4z\ U(x)\delta^{(4)}(x-z)U(z)\delta^{(4)}(z-y) = U^2(x)\delta^{(4)}(x-y),$$

kjer smo vrinili identiteto v obliki $\int \mathrm{d}^4z\ |z\rangle\langle z|$. Podoben rezultat velja za vse potence $\mathcal{U}$ in torej tudi za poljubno analitično funkcijo $\langle x|f(\mathcal{U})|y\rangle = f(U(x))\langle x|y\rangle$. Poglejmo sedaj

$$\mathrm{Tr}\log\mathcal{U} = \int \mathrm{d}^4x\ \langle x|\mathrm{tr}\log(\mathcal{U})|x\rangle = \int \mathrm{d}^4x\ \delta^{(4)}(x-x)\mathrm{tr}\log(U(x)) = \int \mathrm{d}^4x\ \delta^{(4)}(0)i\epsilon^\alpha(x)\mathrm{tr}\ t_\alpha\gamma_5,$$

kjer smo s Tr označili funkcionalno sled, s tr pa sled po matrikah. Iz izračunanega sledi

$$(\det\mathcal{U})^{-2} = e^{-2\mathrm{Tr}\log\mathcal{U}} = e^{i\int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)a_\alpha(x)},$$

kjer smo z $a_\alpha(x)$ označili funkcijo $a_\alpha(x) = -2\delta^{(4)}(0)\ \mathrm{tr}(t_\alpha\gamma_5)$, ki ji tudi rečemo anomalija. Vrednost funkcije $a_\alpha(x)$ je slabo definirana, saj vsebuje produkt neskočno velike $\delta^{(4)}(0)$ in ničelne $\mathrm{tr}(t_\alpha\gamma_5)$. Da dobimo smiselen rezultat jo bo treba regularizirati. Napišimo

$$\delta^{(4)}(0) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}|_{x=y}$$

in opazimo, da je integral na desni slabo definiran za velike p in imamo torej opravka z UV divergenco. Najenostavneje regulariziramo tako, da postavimo nek cut-off Λ in večjih momentov v integraciji ne upoštevamo. Na koncu bomo vzeli limito $\Lambda \to \infty$. To naredimo na naslednji način

$$\int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)a_\alpha(x) = -2\lim_{\Lambda\to\infty}\mathrm{Tr}\ \mathcal{T}_\Lambda,$$
$$\mathcal{T}_\Lambda = \epsilon^\alpha(x)\gamma_5 t_\alpha\ f\left((i\not{D}/\Lambda)^2\right).$$

Izbira $f(s) = 1$ seveda ustreza primeru brez kakršnegakoli cut-offa. Mi bomo za funkcijo $f(s)$ zahtevali, da je gladka ter,da $f(0) = 1, f(\infty) = 0$ ter, da $sf'(s) = 0$ za $s = 0$ in $s = \infty$. Takšne funkcije ni težko najti, saj ima takšne lastnosti že na primer $f(s) = e^{-s}$. V argument cut-offa smo vstavili kovariantni odvod $\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu^R(x))$, kjer je A_μ^R umeritveno polje in živi v R reprezentaciji algebre. Morda se zdi smiselneje, da bi v funkciji nastopal navadni odvod $\not{\partial}$, ki je analognejši gibalni količini, vendar se izkaže[2], da bi taka izbira argumenta kršila umeritveno invarianco. Sledi malce daljši izračun:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\Lambda &= \int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}\ \langle x|\epsilon^\alpha(x)\gamma_5 t_\alpha\ f\left((i\not{D}/\Lambda)^2\right)|x\rangle = \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)\ \int \mathrm{d}^4p\ \langle x|p\rangle\ \mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha\ \langle p|f\left((i\not{D}/\Lambda)^2\right)|x\rangle = \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)\ \int \mathrm{d}^4p\ e^{ipx}\ \mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha\ f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[\gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu^R(x))]^2\right)\ e^{-ipx} = \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)\ \int \mathrm{d}^4p\ e^{ipx}\ \mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha\ e^{-ipx}\ f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[\gamma^\mu(\partial_\mu - ip_\mu - iA_\mu^R(x))]^2\right) = \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)\ \int \mathrm{d}^4p\ \mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha\ f\left(-\frac{1}{\Lambda^2}[-i\not{p} + \not{D}]^2\right) = \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \epsilon^\alpha(x)\Lambda^4\ \int \mathrm{d}^4q\ \mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha\ f\left(-[-i\not{q} + \not{D}/\Lambda]^2\right)
\end{aligned}$$

Pri prehodu iz prve v drugo vrstico smo vrnili identiteto $\int \mathrm{d}^4 p\ |p\rangle\langle p$. Pri prehodu iz druge v tretjo smo razpisali kovariantni odvod in upoštevali $\langle x|p\rangle = e^{ipx}$. Pri prehodu iz tretje v četrto smo prekomutirali e^{-ipx} na levo stran, v zadnji vrstici pa smo uvedli novo spremenljivko $q = p/\Lambda$.

Naslednji korak je Taylorjev razvoj funkcije $f(-(-i\not{q} + \not{D}/\Lambda)^2) = f(q^2 + 2iq^\mu D_\mu/\Lambda - \not{D}^2/\Lambda^2)$ okoli q^2. V razvoju bo preživel le en člen, saj neničelna sled z matriko γ_5 zahteva vsaj 4 γ matrike, medtem ko neničelna limita $\Lambda \to \infty$ zahteva največ 4 kratno potenco Λ v imenovalcu. S tema pogojema opazimo, da preživi le člen $\frac{1}{2} f''(q^2)(-\not{D}^2/\Lambda^2)^2$. Torej dobimo

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mathrm{Tr}\mathcal{T}_\Lambda = \int \mathrm{d}^4 x\ \epsilon^\alpha(x) \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} f''(q^2)\ \mathrm{tr}\ \gamma_5 t_\alpha (-\not{D}^2)^2,$$

kjer smo limito $\Lambda \to \infty$ seveda lahko naredili, ker v integrandu Λ ne nastopa več. Integral po q brez težav naredimo v sferičnih koordinatah po Wickovi rotaciji:

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} f''(q^2) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \mathrm{vol}(S^3) \int_0^\infty \mathrm{d}q q^3 f''(q^2) = \frac{i}{2(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}\xi\ \xi f''(\xi) =$$
$$= \frac{i}{32\pi^2} \left(\xi f'(\xi)|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}\xi\ f'(\xi) \right) = \frac{i}{32\pi^2},$$

kjer smo proti koncu integrirali per partes in upošteval izbrane vrednosti funkcije $f(s)$ v mejah integracije. Za izračun sledi v integrandu uporabimo naslednji trik:

$$\not{D}^2 = \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu = D^\mu D_\mu - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu},$$

kjer smo najprej $\not{D}^2$ zapisali kot vsoto komutatorja in antikomutatorja. Nato smo v prvem členu uporabili znan izraz za antikomutator γ matrik v drugem pa smo s pomočjo antisimetirčnosti komutatorja namesto $D_\mu D_\nu$ zapisali njun komutator, ki je sorazmeren $F_{\mu\nu}$. Sedaj lahko s pomočjo formul za sled γ matrik preprosto izračunamo:

$$\mathrm{tr}\gamma_5 t_\alpha (-\not{D}^2)^2 = \left(\frac{i}{4}\right)^2 \mathrm{tr}_D \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \mathrm{tr}_R t_\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}_R t_\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma},$$

kjer smo z tr_D označili sled po Diracovih γ matrikah z tr_R pa sled po naših matrikah v reprezentaciji algebre R.

Iz izračunanega lahko končno izrazimo:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \mathrm{Tr}\mathcal{T}_\Lambda = \frac{1}{32\pi^2} \int \mathrm{d}^4 x\ \epsilon^\alpha(x) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}_R t_\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.$$

Za anomalijo tako dobimo

$$a_\alpha(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}_R t_\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma},$$

Na tej točki lahko razložimo, zakaj v naslovu govorimo o anomaliji trikotnika. Znano je[1], da funkcionalna determinanta ustreza Feynmannovim diagramom z eno zanko. Spomnimo se, da uporabljamo konvencijo iz članka [2], kjer je sklopitev z umeritvenim poljem g vsebovana v generatorju t_α. Ker seveda prav tako velja $F_{\mu\nu} = F^\alpha_{\mu\nu} t^\alpha$, vidimo, da je zgornji rezultat za anomalijo $a_\alpha(x)$ tretjega reda v sklopitveni konstanti g. Torej imamo opravko z zanko s tremi vozlišči, kar je ravno trikotni Feynmannov diagram.

3 Poseben primer - abelska anomalija

V tem poglavju bomo anomalijo izračunali za poseben primer, ko imamo opravka z abelsko simetrijsko podgrupo. V tem primeru ima Liejeva podalgebra le en generator, ki ga označimo z t. Ta je seveda hermitski in komutira z γ matrikami in ostalimi generatorji celotne grupe $[t, t_\alpha] = 0$. Imamo torej transformacijo

$$U(x) = e^{i\epsilon(x) t \gamma_5}.$$

Anomalija ima podobno obliko kot prej, le da imamo samo en generator

$$a_\alpha(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_R t F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma},$$

Poglejmo kaj se zgodi klasično, torej, ko obravnavamo zgolj le akcijo. Zelo preprosto je videti, da pri globalni transformaciji, torej taki s konstantnem $\epsilon(x) = \epsilon$ $U(x) = U$ predstavlja simetrijsko transformacijo Lagrangiana:

$$\bar{\psi}\not{D}\psi \to \bar{\psi}\overline{U}\not{D}U\psi = \bar{\psi}U\not{D}U\psi = \bar{\psi}UU^{-1}\not{D}\psi = \bar{\psi}\not{D}\psi,$$

kjer smo uporabili $\gamma^\mu U = U^{-1}\gamma^\mu$, zanimal pa nas je seveda le del Lagrangiana v katerem nastopajo fermionska polja, katere transformiramo. Zaradi invariance na kiralno transformacijo morajo biti ta brezmasna. Če imamo opravka z lokalno transformacijo $\epsilon^\alpha(x)$, imamo nek ohranjen tok $J^\mu_a(x)$, saj

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\ (-J^\mu_a(x))\partial_\mu\epsilon^a(x) = \int \mathrm{d}^4x\ (\partial_\mu J^\mu_a(x))\epsilon^a(x),$$

kjer smo integrirali per partes. Vemo, da bo variacije akcije take oblike, ker vemo, da velja $\delta S = 0$, če je ϵ^a konstanten oziroma $\partial_\mu\epsilon^a = 0$. Vendar prav tako vemo, da če polja zadoščajo enačbam gibanja bo veljalo $\delta S = 0$ za kakršnokoli variacijo teh polj - torej vključno z variacijo inducirano s transformacijo $U(x)$. Velja torej

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) = 0.$$

Za Lagrangian oblike $\bar{\psi}\not{D}\psi$, dobimo, da je J^μ_a enak dobro znanemu aksialnem toku

$$J^\mu_5 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 t\psi,$$

ki je, kot smo videli, ohranjen. Poglejmo kaj se zgodi, če gremo v kvantno sliko. V tem primeru spet gledamo Feynmannov popotni integral in zahtevamo invarianco pod transformacijo $U(x)$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{iS(\psi,\bar{\psi})} = \int \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}'e^{iS(\psi',\bar{\psi}')} = \\
&= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{i\int \mathrm{d}^4x\ \ \epsilon(x)a(x)}\ e^{iS(\psi,\bar{\psi})}\ e^{i\int \mathrm{d}^4x\ \ \epsilon(x)\partial_\mu J^\mu_5(x)} = \\
&= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{iS(\psi,\bar{\psi})}\Big(1 + i\int \mathrm{d}^4x\ \epsilon(x)(a(x) + \partial_\mu J^\mu_5(x)) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Big).
\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili prej izpeljane formule za transformacijo fermionske mere ter transformacijo akcije ob lokalni transformaciji. V tretji vrstici smo ekspontenta, ki vsebujeta parameter $\epsilon(x)$ razvili do prvega reda. Prvi člen na desni se pokrajša z integralom na levi in dobimo:

$$\partial_\mu\langle J^\mu_5(x)\rangle = -a(x) = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_R t F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(x).$$

Opazimo torej, da se v kvantni teoriji tok ne ohranja več ter, da je njegov odvod enak minus anomaliji.

4 Povezava abelske anomalije s trikotnim Feynmannovim diagramom

V enačbi za anomalijo razpišimo tenzorje $F_{\mu\nu}$ po bazi algebre. Dobimo

$$a(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_R t t_\alpha F_{\mu\nu\alpha}(x) t_\beta F_{\rho\sigma\beta}(x)$$

Sedaj se omejimo se na primer, ko je celotna simetrijska grupa enaka $U(1)$. Takrat so vsi generatorji t_α enaki enemu samemu generatorju, katerega lastne vrednosti so naboji polj q_j. Tedaj torej velja $\mathrm{tr}_R t t_\alpha t_\beta = \mathrm{tr}_R t^3 = \sum_j q_j^3$. Torej imamo

$$a(x) = -\frac{1}{16\pi^2}(\sum_j q_j^3)\epsilon^{\mu\lambda\sigma\kappa}(2\partial_\mu A_\lambda(x))(2\partial_\sigma A_\kappa(x)),$$

kjer smo uporabili antisimetričnost Levi-Civita simbola in namesto tenzorjev in pisali $F_{\mu\nu} \to 2\partial_\mu A_\nu$ hkrati pa še preimenovali nekatere indekse zaradi razloga, ki bo postal jasen v trenutku: Celotno enačbo funkcionalno dvakrat odvajajmo po polju A_μ. Dobimo:

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta}{\delta A_\rho(z)}a(x) = -\frac{1}{16\pi^2}(\sum_j q_j^3)\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta}{\delta A_\rho(z)}\epsilon^{\mu\lambda\sigma\kappa}(2\partial_\mu A_\lambda(x))(2\partial_\sigma A_\kappa(x))$$

Ob upoštevanju osnovnih lastnosti funkcionalnega odvoda dobimo, da je desna stran zgornje enačbe enaka:

$$-\frac{1}{2\pi^2}(\sum_j q_j^3)\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(y-x)\right)\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\delta^{(4)}(z-x) = \quad = \frac{1}{2\pi^2}(\sum_j q_j^3)\epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\delta^{(4)}(y-x)\right)\frac{\partial}{\partial z^\sigma}\delta^{(4)}(z-x),$$

kjer smo pri prehodu na drugo vrstico upoštevali, da velja $\partial_x\delta(x-y) = -\partial_y\delta(x-y)$ ter v Levi-Civita simbolu permutirali indekse.

Poglejmo si še levi stran enačbe. Spomnimo se, da velja $a(x) = -\partial_\mu\langle J_5^\mu(x)\rangle$ Leva stran je tako enaka:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta}{\delta A_\rho(z)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle J_5^\mu(x)\rangle = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta}{\delta A_\rho(z)}\langle J_5^\mu(x)\rangle = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle T(J_5^\mu(x)J^\nu(y)J^\rho(z))\rangle_C,
\end{aligned}$$

kjer smo v prehodu v drugo vrstico zamenjali vrstni red odvajanja, pri prehodu v tretjo pa upoštevali, da s delovanjem s funkcionalnimi odvodi na popotni integral (kar povprečna vrednost $\langle J_5^\mu(x)\rangle$ pravzaprav je) dobimo povprečje časovno urejenega produkta več operatorjev. V Lagrangianu lahko opazimo, da z odvajanjem po $A_\mu(x)$ dobimo tok $J_\alpha^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu t\psi$ (podobno kot prej, le brez matrike γ_5). Subskript C na koncu pričakovane vrednosti nas zgolj spominja na znano dejstvo, da moramo pri izračunu povprečja upoštevati le povezane Feynmannove diagrame, predznak pa smo spremenili, ker nam funkcionalni odvod, da povprečje do predfaktorja natančno (ta predfaktor je $i^2 = -1$).

Označimo:

$$\langle T(J_5^\mu(x)J^\nu(y)J^\rho(z))\rangle_C = -\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(x,y,z),$$

kjer $i\Gamma_5^{\mu\nu\rho}$ lahko s pomočjo perturbacijske teorije izračunamo iz trikotnega diagrama, kjer je eno vozlišče $i\times(i\gamma^\mu\gamma_5 q_j)$ ostala dva pa $i\times(i\gamma^\nu q_j)$ in $i\times(i\gamma^\rho q_j$, kot bomo videli pozneje.

Če še enkrat zapišemo levo in desno stran originalne enačbe imamo torej:

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi^2}(\sum_j q_j^3)\epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\delta^{(4)}(y-x)\right)\frac{\partial}{\partial z^\sigma}\delta^{(4)}(z-x)$$

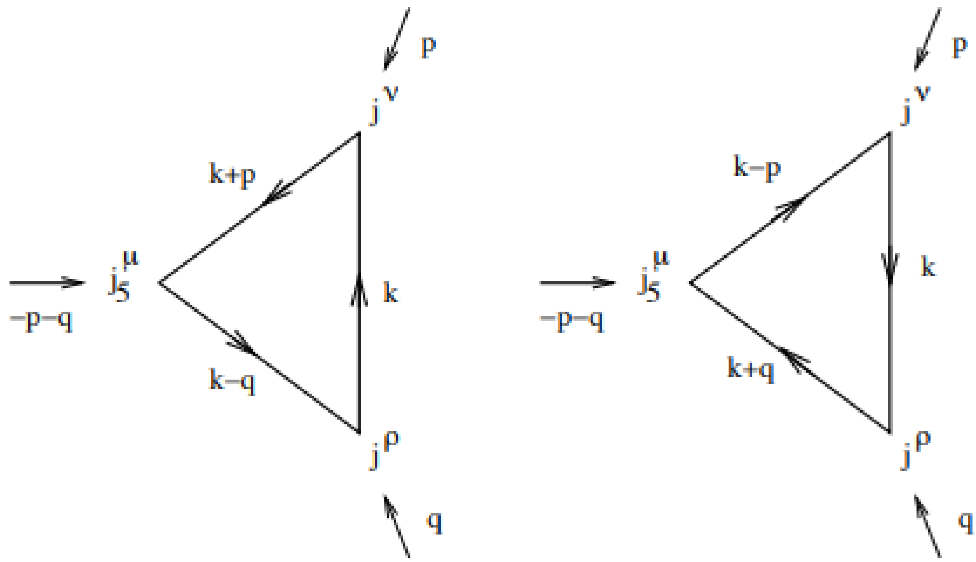
Odvod tri-točkovne funkcije $\Gamma_5^{\mu\nu\rho}$ torej lahko povežemo z anomalijo, ki smo jo zgoraj zapisali v malce drugačni obliki, da je pravilnost rezultata pozneje lažje preverili. Za še lažje preverjanje rezultata pojdimo v Fourierovo sliko:

$$\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{d}^4y\ \mathrm{d}^4z\ e^{ikx+ipy+iqz}\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(x,y,z) = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p+g)\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(-p-q,p,q)$$

V Fourierovi sliki se zgornja enačba glasi:

$$-i(p+q)_\mu\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(-p-q,p,q) = -\frac{1}{2\pi^2}(\sum_j q_j^3)\epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma}p_\lambda q_\sigma$$

Enačbo bi sedaj preverili z eksplicitnim izračunom pripadajočega trikotnega diagrama. Celoten izračun je precej dolg, zato bomo pokazali zgolj začetno idejo, celoten postopek pa si lahko bralec prebere v [2]. K izračunu $\Gamma_5^{\mu\nu\rho}$ prispevata diagrama na spodnji sliki.



Slika 1: Na sliki sta prikazana Feynmannova diagrama, ki prispevata k izračunu $\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(-p-q,p,q)$. Diagrama imata eno vozlisce z aksialnim tokom ter dva z vektorskim. [2]

S pomočjo Feynmannovih pravil za spinorje lahko potem zapišemo

$$i\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(-p-q,p,q) =$$
$$= -\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}_D\left((-\gamma^\mu\gamma_5)(-i)\frac{-(\not{k}+\not{p})}{(k+p)^2-i\epsilon}(-\gamma^\nu)(-i)\frac{-i\not{k}}{k^2-i\epsilon}(-\gamma^r ho)(-i)\frac{-i(\not{k}-\not{q}}{(k-q)^2-i\epsilon}\sum_j(q_j^3)\right) + (p\leftrightarrow q)$$

Zgornji integral je divergenten in ga je treba regularizirati. Dimenzijska regularizacija je v pristonosti γ_5 težka[2], zato se zatečemo k Pauli-Villarsovi regularizaciji pri kateri integrandu odštejemo podoben člen le, da imajo vsi fermionski propagatorji neko maso M, ki jo na koncu pošljemo proti neskončno. Tukaj je možno videti eno izmed bolj fizikalnih razlag za pojav anomalije - Lagrangian, ki bi vključeval fermione z neničelno maso M na kiralno transformacijo ne bi bil invarianten. Po daljšem izračunu dobimo

$$-i(p+q)_\mu\Gamma_5^{\mu\nu\rho}(-p-q,p,q) = -\frac{1}{2\pi^2}\epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma}p_\lambda q_\sigma\sum_j q_j^3,$$

kar je enako prej izračunanemu.

5 Literatura

[1] Mark Srednicki. *Quantum field theory.* Cambridge University Press, 1 edition, 2007.

[2] Adel Bilal. Lectures on anomalies, 2008.