Domača naloga iz UFA

Skrajni rok za oddajo rešitev je 14. 12. 2018. Rešitve oddajte v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor s skalarnim produktom. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ in $\|x+y\| > 2-\delta$ sledi $\|x-y\| < \epsilon$.

2. Naj bo $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ortonormirana baza neskončnorazsežnega Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Naj bo $M = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ množica vektorjev v $\mathcal{H}$, za katero velja
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \|e_\lambda - f_\lambda\| < 1.$$
Dokaži, da je $M^\perp = \{0\}$.

3. Naj bo c pozitivno število.
   (a) Dokaži, da je s predpisom
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, e^{-cn}\ ,\quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$$
   definiran omejen linearen funkcional f na Hilbertovem prostoru l^2.
   (b) Določi njegovo normo!
   (c) Ali je f definiran tudi za $c = 0$?

4. Za omejen linearen operator $T\colon X \to Y$ med normiranima prostoroma definiramo
$$M := \sup\{|f(Tx)| :\ x\in X,\ f\in Y^*,\ \|x\| = \|f\| = 1\}.$$
   (a) Dokaži, da je $M \leq \|T\|$.
   (b) Če je Y Hilbertov, dokaži, da velja
   $$M = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| :\ x\in X,\ y\in Y,\ \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

5. Na standardni bazi $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ Hilbertovega prostora l^2 je s predpisi
$$e_{2n-1} \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right) e_{2n-1} - \frac{1}{n}\, e_{2n}$$
$$e_{2n} \mapsto -\frac{1}{n}\, e_{2n-1} + \left(1+\frac{1}{n}\right) e_{2n}$$
definirana preslikava f.
   (a) Dokaži, da lahko preslikavo f na en sam način razširimo do omejenega linearnega operatorja A na l^2. Pri tem izračunaj $\|A\|$.
   (b) Ali je operator A sebiadjungiran?
   (c) Ali je operator A kompakten?

6. Naj bo A kompakten operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Naj obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in \mathcal{H}$ velja
$$\|Ax\| \geq c\|x\|.$$
Dokaži, da je $\mathcal{H}$ končno razsežen prostor.