1. DOMAČA NALOGA IZ DIFERENCIALNE GEOMETRIJE

April, 2019

(1) Naloga: Ugotovite, katera vektorska polja so kompletna.
a) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ na $\mathbb{R}^3$.
b) $X = xy\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$, na $\mathbb{R}^2$.
c) $X(x,p) = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{mMG}{x^2}\frac{\partial}{\partial p}$, za neke pozitivne konstante m, M, G in za $(x,p) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

(2) Naloga: Dokažite, da je grupa $O(3) = \left\{Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} | Q^T Q = I\right\}$ gladka podmnogoterost grupe matrik $\mathbb{R}^{3\times 3}$, izračunajte njeno dimenzijo in opišite tangentni prostor $T_Q O(3)$ za poljubno matriko $Q \in O(3)$.

(3) Naloga: Hopfova preslikava $p : S^3 \to S^2$, je dana s predpisom

$$p(x,y,z,w) = (2xz + 2yw, 2yz - 2xw, x^2 + y^2 - z^2 - w^2).$$

Pokažite, da je p submerzija.
Opomba: S^3 si lahko predstavljamo kot pare kompleksnih števil (z,w), za katere je $|z|^2 + |w|^2 = 1$, S^2 pa kot par kompleksnega in realnega števila (ζ, x), kjer je $|\zeta|^2 + x^2 = 1$. Potem lahko Hopfovo preslikavo zapišemo tudi v obliki

$$p(z,w) = (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2).$$

(4) Naloga: Naj bo X vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$.
a) Pokažite, da je Liejevo odvajanje form $\mathcal{L}_X$ derivacija na $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$, kar pomeni, da zadošča

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta).$$

b) Pokažite, da je $d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ odvajanje.
c) Dokažite, da za vsako diferencialno formo $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ velja

$$\mathcal{L}_X \alpha = d\iota_X \alpha + \iota_X d\alpha.$$

Nasvet: najprej pokažite, da formula velja za 0-forme in elementarne 1-forme ($dx_1, \ldots, dx_n$), potem pa sklepajte, da velja enakost za vse forme.
d) Naj bo tudi Y vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$. Dokažite, da velja

$$\mathcal{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X = \iota_{[X,Y]}.$$

Nasvet: postopajte podobno kot zgoraj.
e) S pomočjo točk c) in d) pokažite, da za 1-formo ω na $\mathbb{R}^n$ velja

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

(5) Naloga:
a) Dana je diferencialna forma na $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ s predpisom

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

i) Pokažite, da je $d\omega = 0$ in izračunajte $\int_{S^1} \omega$.

ii) Ali obstaja takšna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to \mathbb{R}$, da velja $\omega = df$? Če ja, poiščite f, če ne pokažite zakaj.

b) Dokažite, da za vsako diferencialno 1-formo ω na $\mathbb{R}^n$, ki zadošča $d\omega = 0$, velja $\omega = df$ za neko funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.