2. DOMAČA NALOGA IZ DIFERENCIALNE GEOMETRIJE

Maj, 2019

(1) Prostor $\mathbb{R}^3$ opremimo z Lorentzovo metriko

$$g_L((x_1,y_1,t_1),(x_2,y_2,t_2)) = t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2.$$

Za vsak $R>0$ označimo

$$D_R = \left\{(x,y)|x^2+y^2<R^2\right\},$$
$$H_R = \left\{(x,y,t)|t^2-x^2-y^2=R^2, t>0\right\}$$

disk polmera R in zgornji del hiperboloida. Hiperboloid parametriziramo s preslikavo

$$\phi_R\colon D_R \to H_R$$

ki točki (x,y) priredi presek premice skozi točki $(x,y,0)$ in $(0,0,-R)$ s hiperboloidom H_R.

a) Izračunaj ekspliciten predpis preslikave ϕ_R. Na disku D_R definiramo metriko $g_R = -\phi_R^* g_L$. Izračunajte metriko g_R v bazi $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

b) Izračunajte Levi-Civita povezavno 1-formo, Riemannov tenzor ukrivljenosti in Gaussovo ukrivljenost, glede na ogrodje $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

c) Naj bo $\mathbb{H}$ zgornja polravnina v $\mathbb{R}^2$ z metriko

$$g_H = \frac{1}{y^2} g_e,$$

kjer je g_e evklidska metrika. Pokažite, da je preslikava $\tau\colon \mathbb{H} \to D_1$, ki je v kompleksnih koordinatah dana s predpisom

$$\tau(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

Riemannova izometrija.

d) Izračunajte predpisa geodetk $\gamma_x, \gamma_y\colon \mathbb{R} \to D_1$, ki sta določeni s pogoji $\gamma_x(0) = \gamma_y(0) = (0,0)$ in $\dot{\gamma}_x(0) = \frac{\partial}{\partial x}$ $\dot{\gamma}_y(0) = \frac{\partial}{\partial y}$.

(2) Naj bo ∇ Levi-Civita kovariantni odvod na tangentnem svežnju sfere TS^2.

a) Definiramo ∇^* na kotangentnem svežnju sfere T^*S^2 z implicitnim predpisom

$$X(\alpha(Y)) = (\nabla^*_X \alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)$$

za $X, Y \in \Gamma(TS^2)$ in $\alpha \in \Omega^1(S^2)$. Pokažite, da je ∇^* kovariantni odvod.

b) Naj bo $\{e_1, e_2\}$ lokalno ortonormirano ogrodje TS^2 in $\{e_1^*, e_2^*\}$ dualno lokano ogrodje T^*S^2. Definiramo koeficiente A_{ij}^k, B_{ij}^k za $i,j,k \in \{1,2\}$ s pogoji:

$$\nabla_{e_j} e_i = \sum_{k=1}^{2} A_{ij}^k e_k,$$

$$\nabla^*_{e_j} e_i^* = \sum_{k=1}^{2} B_{ij}^k e_k^*.$$

Pokažite, da velja $A_{ij}^k = B_{ij}^k$ za vse i,j,k.

c) Izračunajte ukrivljenost F_{∇^*}.

(3) Označimo z $\mathrm{End}(TS^2)$ sveženj endomorfizmov TS^2. Vlakno svežnja $\mathrm{End}(TS^2)$ v točki $p \in S^2$ je vektorski prostor $\mathrm{End}(TpS^2)$. Evklidska metrika na S^2 porodi metriko na svežnju $\mathrm{End}(TS^2)$ na naslednji način: če je $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza prostora T_pS^2, za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(T_pS^2)$ definiramo skalarni produkt

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$$

kjer sta A in B matriki, ki pripadata endomorfizmoma v bazi $\{e_1, e_2\}$. Naj bo $E \subset \mathrm{End}(TS^2)$ vektorski podsveženj, katerega vlakno v točki p je

$$E_p = \left\{ \mathcal{A} \in \mathrm{End}(TpS^2) |\ \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \mathrm{tr}(\mathcal{A}) = 0 \right\}.$$

Naj bo $E^\perp$ ortogonalni komplement E v $\mathrm{End}(TS^2)$. Konstruirajte izomorfizem vektorskih svežnjev

$$\Psi\colon S^2 \times \mathbb{R}^2 \to E^\perp.$$