UFA - Domača naloga

Andrej Kolar-Požun, 28172042

December 14, 2018

1 Prva

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ in $||x+y|| > 2-\delta$ sledi $||x-y|| < \epsilon$.

Za vektorski prostor s skalarnim produktom velja paralelogramska identiteta. Z njeno uporabo dobimo:

$$\begin{aligned}
&||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) - ||x+y||^2 \\
&||x-y||^2 < 4 - (2-\delta)^2 = 4\delta - \delta^2 = \epsilon^2 \\
&\epsilon^2 = 4\delta - \delta^2 \\
&\delta^2 - 4\delta + \epsilon^2 = 0 \\
&\delta = 1/2(4 \pm \sqrt{16 - 4\epsilon^2}) \\
&\delta = 2 \pm \sqrt{4 - \epsilon^2}
\end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da če $||x+y||^2 > (2-\delta)^2$, potem $-||x+y||^2 < -(2-\delta)^2$ in dejstvo, da če za dve pozitivni števili velja $a < b$, velja tudi $a^2 < b^2$.

Zgornja enačba za δ je v redu (lahko vzamemo negativen ali pozitiven predznak), če je $\epsilon \leq 2$. Če pa je $\epsilon > 2$, lahko vzamemo $\delta = 2$, saj:

$$||x-y||^2 < 4 - (2-\delta)^2 = 4 < \epsilon^2$$

Sledi, da lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo $\delta > 0$, da bo željena neenakost držala.

2 Druga

Naj bo $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ortonormirana baza neskončnorazsežnega Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Naj bo $M = \{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ množica vektorjev v $\mathcal{H}$ za katero velja

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} ||e_\lambda - f_\lambda|| < 1$$

Dokaži, da je $M^\perp = \{0\}$.

Recimo, da je vektor $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$ pravokoten na M, torej $\langle x, f\rangle = 0$ za vsak $f \in M$. Parservalova enakost pravi, da velja

$$||x||^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2$$

Vsota na desni je dobro definirana, saj vemo iz predavanj, da je v vsoti na desni le števno členov neničelnih. Velja tudi

$$||x||^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda - f_\lambda\rangle|^2$$

Saj nismo pravzaprav ničesar spremenili, ker je $\langle x, f_\lambda\rangle$ nič za vsak $\lambda \in \Lambda$. Z uporabo CSB neenakosti dobimo

$$||x||^2 \leq ||x||^2 \sum_{\lambda\in\Lambda} ||e_\lambda - f_\lambda||^2 < ||x||^2$$

Uporabili smo dejstvo, da če velja $\sum_{\lambda\in\Lambda} ||e_\lambda - f_\lambda|| < 1$, velja tudi $\sum_{\lambda\in\Lambda} ||e_\lambda - f_\lambda||^2 < 1$, saj so vsi členi v vsoti pod ena (sicer bi bila vsota večja ali enaka 1). Dobili smo torej $||x||^2 < ||x||^2$, kar ne more biti res in je torej $M^\perp = \{0\}$.

3 Tretja

Naj bo c pozitivno število. Dokaži, da je s predpisom $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{-cn}$ definiran omejen linearen funkcional f na Hilbertovem prostoru l^2 in določi njegovo normo. Ali je f definiran tudi za $c = 0$?.

3.1 Omejenost in linearnost

Funkcional je trivialno linearen iz definicije. Za omejenost in hkrati dobro definiranost opazimo, da se delovanje funkcionala na vektorju x da zapisati kot skalarni produkt $\langle x, b\rangle$, kjer je $b = (e^{-c}, e^{-2c}, e^{-3c}, e^{-4c}, ...)$, ki je tudi v l^2, saj je c pozitiven in je norma vektorja b končna (kot bomo v kratkem pokazali, če ni očitno). Ocenimo:

$$|f(x)| = |\langle x, b\rangle| \leq ||x||||b||$$

Uporabili smo CSB. Funkcional je torej omejen.

3.2 Norma

Ker je funkcional linearen in omejen in smo ga uspeli napisati kot skalarni produkt z vektorjem b, je po Rieszovem izreku njegova norma točno $||b||$.

$$||b||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/e^{2c})^n = \frac{1}{1 - 1/e^{2c}} - 1 = \frac{1/e^{2c}}{1 - 1/e^{2c}} = \frac{1}{e^{2c} - 1}$$
$$||f|| = ||b|| = \frac{1}{\sqrt{e^{2c} - 1}}$$

V prvi vrstici, smo s prištevanjem in odštevanjem enke lahko prepoznali in sešteli geometrijsko vrsto. Geometrijska vrsta konvergira, saj je $1/e^c < 1$, ker $c > 0$.

3.3 c=0

Če je $c = 0$ funkcional ni več dobro definiran. To lahko hitro vidimo, če vzamemo vektor iz l^2 $x = (1, 1/2, 1/3, 1/4, ...)$ in delujemo nanj z našim funkcionalom. Dobimo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Vrednost funkcionala je torej v tem primeru harmonična vrsta, za katero vemo, da je divergentna. Sledi, da funkcional ni dobro definiran.

4 Četrta

Naj bo $T : X \to Y$ omejen linearen operator med normiranima prostoroma. Definiramo:

$$M := sup\{|f(Tx)| : x \in X, f \in Y^*, ||x|| = ||f|| = 1\} < \infty$$

Dokaži $M \leq ||T||$. Če je Y Hilbertov dokaži še, da je

$$M = sup\{|\langle Tx, y\rangle| : x \in X, y \in Y, ||x||, ||y|| \leq 1\}$$

4.1 Prvi del

Po definiciji norme funkcionala obstaja vektor $x \in X$ z $||x|| = 1$, za katerega velja, da pride vrednost $|f(x)|$ poljubno blizu $||f||$. Za splošen $x \in X$ velja $|f(x)| \leq ||f||\ ||x||$. Podobno obstaja tudi (ne nujno isti) vektor $x \in X$ z $||x|| = 1$, da pride vrednost $||Tx||$ poljubno blizu $||T||$. Za splošen $x \in X$ velja $||Tx|| \leq ||T||\ ||x||$.

Če obstaja par $f \in Y^*$ z $||f|| = 1$ in $x \in X$ z $||x|| = 1$, da je $||Tx||$ poljubno blizu $||T||$ in hkrati $|f(Tx)|$ poljubno blizu $||Tx|| = ||T||$, je M enako $||T||$. Če tak par ne obstaja, imamo za nek $x \in X$ tri možnosti:

- Lahko pridemo poljubno blizu supremumu $||Tx||$, ne moremo pa hkrati priti poljubno blizu supremumu $|f(Tx)|$ (sicer bi tak par obstajal), torej $|f(Tx)| < ||f||||Tx|| \leq ||f||\ ||T||\ ||x|| = ||T||$.
- Podobno, če lahko pridemo poljubno blizu supremumu $|f(Tx)|$, ne moremo pa priti poljubno blizu supremumu $||Tx||$ sledi spet $|f(Tx)| \leq ||f||\ ||Tx||\ ||x|| < ||f||\ ||T||\ ||x|| = ||T||$.
- Če ne moremo priti poljubno blizu nobenemu od supremumov, je očitno tudi $|f(Tx)| < ||T||$.

Sledi, da je v splošnem $M \leq ||T||$

4.2 Drugi del

Če je Y Hilbertov, lahko omejen linearni funkcional po Rieszovem izreku izrazimo s skalarnim produktom. Po Rieszovem izreku je potem norma funkcionala $||f||$ enaka normi vektorja s katerim skalarno množimo $||y||$. Na supremum ne vplivamo, če namesto $||x|| = ||y|| = 1$ gledamo $||x||, ||y|| \leq 1$: Poglejmo vrednost $|\langle Tx, y\rangle|$. Recimo, da vzamemo vektor $x \in X, ||x|| < 1$. Potem lahko vidimo: $|\langle Tx, y\rangle| = ||x||/||x||\ |\langle Tx, y\rangle| = ||x||\ |\langle T(x/||x||), y\rangle|$, kjer smo uporabili linearnost operatorja T, linearnost skalarnega produkta v prvem argumentu ter lastnost norme $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$. Potem imamo $|\langle T(x/||x||), y\rangle| = |\langle Tx, y\rangle|/||x||$ in ker je $||x|| < 1$ $|\langle T(x/||x||), y\rangle| > |\langle Tx, y\rangle|$, torej bo supremum dosežen pri nekem enotskem vektorju $x/||x||$. Podobno lahko vidimo, da če $||y|| < 1$, $|\langle Tx, y/||y||\rangle| > |\langle Tx, y\rangle|$, kjer lahko preposavimo linearnost skalarnega produkta tudi v drugem argumentu, saj je $||y||$ realen. Če pa bi vektorja x ali y imela normo enako 0, pa je vrednost $|\langle Tx, y\rangle|$ itak enako nič.

5 Peta

Na standardni bazi $\{e_k\}$ prostora l^2 je s predpisi

$$
\begin{aligned}
e_{2n-1} &\to (1 + 1/n)e_{2n-1} - 1/n\ e_{2n} \\
e_{2n} &\to -1/n\ e_{2n-1} + (1 + 1/n)e_{2n}
\end{aligned}
$$

definirana preslikava f. Dokaži, da jo lahko na en sam način razširimo do omejenega linearnega operatorja A na l^2. Pri tem izračunaj normo tega operatorja. Ali je sebiadjungiran? Kaj pa kompakten?

Za lažjo predstavo, delujmo s preslikavo f na prvih nekaj baznih vektorjev:

$$
\begin{aligned}
f(1, 0, 0, 0, ...) &= (2, -1, 0, 0, ...) \\
f(0, 1, 0, 0, ...) &= (-1, 2, 0, 0, ...) \\
f(0, 0, 1, 0, 0, ...) &= (0, 0, 3/2, -1/2, 0, ...) \\
f(0, 0, 0, 1, 0, ...) &= (0, 0, -1/2, 3/2, 0, ...)
\end{aligned}
$$

Poljuben vektor iz l^2 razvijmo po standardni bazi:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Naravno razširitev do linearnega operatorja dobimo, če preslikamo le bazne vektorje:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(e_n)$$

Dobljen operator je očitno linearen, saj je f linearna preslikava. Dobra definiranost sledi iz dejstva, da preslikava A zgolj sešteva/odšteva konvergentne vrste, ter jih pri tem množi z omejenimi konstantami, torej je rezultat spet konvergentna vrsta. Poglejmo še enolilčnost. Recimo, da obstaja še en linearen operator B, ki je razširitev omenjene preslikave. Ker sta A in B oba razširitvi iste preslikave mora veljati $A(e_n) = B(e_n)$, torej za vsak n delujeta na baznih vektorjih na enak način. Delujmo z B na poljubnem vektorju $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Ker je B linearen velja:

$$Bx = B\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B(e_k)$$

Ker pa vemo, da na baznih vektorjih B in A delujeta enako, vidimo, da je to pravzaprav isti operator kot A in je torej to res enolična razširitev te preslikave.

Za omejenost ter normo ocenimo $||Ax||$. Najprej opazimo, da lahko A ekvivalentno definiramo kot

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_n g(\alpha_n) e_n \\ g(\alpha_{2k-1}) &= (1 + 1/k)\alpha_{2k-1} - 1/k\ \alpha_{2k} \\ g(\alpha_{2k}) &= -1/k\ \alpha_{2k-1} + (1 + 1/k)\ \alpha_{2k} \end{aligned}$$

Da to velja se hitro prepričamo, če napišemo x v obliki $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$.

Ocenimo:

$$\begin{aligned} ||Ax||^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |g(\alpha_n)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|g(\alpha_{2k-1})|^2 + |g(\alpha_{2k})|^2) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (|(1 + 1/k)\alpha_{2k-1} - 1/k\alpha_{2k}|^2 + |-1/k\alpha_{2k-1} + (1 + 1/k)\alpha_{2k}|^2) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (((1 + 1/k)|\alpha_{2k-1}| + 1/k|\alpha_{2k}|)^2 + (1/k|\alpha_{2k-1}| + (1 + 1/k)|\alpha_{2k}|)^2) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ((|\alpha_{2k-1}|^2 + |\alpha_{2k}|^2)((1 + 1/k)^2 + 1/k^2) + 4/k(1 + 1/k)|\alpha_{2k-1}|\ |\alpha_{2k}|) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} ((|\alpha_{2k-1}|^2 + |\alpha_{2k}|^2)((1 + 1/k)^2 + 1/k^2 + 2/k(1 + 1/k)) \leq \\ &\leq 9 \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_{2k-1}|^2 + |\alpha_{2k}|^2) = 9||x||^2 \end{aligned}$$

Na prehodu iz druge v tretjo vrstico smo upoštevali trikotniško neenakost, na prehodu iz četrte v peto AG neenakost, na prehodu iz pete v šesto pa smo predfaktor $(1 + 1/k)^2 + 1/k^2 + 2/k(1 + 1/k)$ v vsakem členu z njegovo vrednostjo v $k = 1$, (in tako višje člene kvečejmu povečali) in ga izpostavili.

Vidimo, da je operator omejen in je njegova norma največ 3. Poiščimo primer pri katerem bo norma res 3. Spomnimo se na definicijo norme operatorja $||A|| = sup\{||Tx||; x \in l^2, ||x|| = 1\}$

Vzamimo vektor iz l^2: $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...)$, katerega norma je ena. Vidimo

$$Ax = \Big((2 + 1)\frac{1}{\sqrt{2}}, (-1 - 2)\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\Big) = \Big(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...\Big)$$

Velja $||Ax|| = 3$, torej je res $||A|| = 3$

5.1 Sebi - adjungiranost

Za poljubna $x, y \in l^2$ glejmo $\langle Ax, y\rangle$:

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(((1+1/k)x_{2k-1} - 1/kx_{2k})\bar{y}_{2k-1} + (-1/kx_{2k-1} + (1+1/k)x_{2k})\bar{y}_{2k}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(x_{2k-1}((1+1/k)\bar{y}_{2k-1} - 1/k\bar{y}_{2k}) + x_{2k}(-1/k\bar{y}_{2k-1} + (1+1/k)\bar{y}_{2k})\Big) = \langle x, A^*y\rangle$$

Hitro lahko razberemo da, če zapišemo $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ lahko definiramo

$$\begin{aligned}
&A^*y = \sum_{k=1}^{\infty} h(y_k)e_k \\
&h(y_{2k-1}) = (1+1/k)y_{2k-1} - (1/k)y_{2k} \\
&h(y_{2k}) = (-1/k)y_{2k-1} + (1+1/k)y_{2k}
\end{aligned}$$

kar je isti predpis kot za A torej je A sebi adjungiran operator.

5.2 Kompaktnost

Vzamimo zaporedje baznih vektorjev v l^2 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vzamimo podzaporedje tega zaporedja: $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Definiramo zaporedje $\{Ae_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Poglejmo sedaj tri primere: Vzamemo dva različna bazna vektorja z lihima indeksoma e_{2k-1} in e_{2l-1}. Potem:

$$\begin{aligned}
&||Ae_{2k-1} - Ae_{2l-1}||^2 = ||Ae_{2k-1}||^2 + ||Ae_{2l-1}||^2 - 2Re(\langle Ae_{2k-1}, Ae_{2l-1}\rangle) = \\
&= ||(1+1/k)e_{2k-1} - 1/k\ e_{2k}||^2 + ||(1+1/l)e_{2l-1} - 1/l\ e_{2l}||^2 - \\
&- 2Re(\langle(1+1/k)e_{2k-1} - 1/k\ e_{2k}, (1+1/l)e_{2l-1} - 1/l\ e_{2l}\rangle) = \\
&= (1+1/k)^2||e_{2k-1}||^2 + 1/k^2||e_{2k}||^2 + (1+1/l)^2||e_{2l-1}||^2 + 1/l^2||e_{2l}||^2 = \\
&= (1+1/k)^2 + 1/k^2 + (1+1/l)^2 + 1/l^2 \geq 2
\end{aligned}$$

Kjer smo upoštevali $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re(\langle x, y\rangle)$. Ker je baza ortogonalna, so skalarni produki v zgornji formuli enaki nič in jih pri ponovnem upoerabu te identitete v v četrti vrstici sploh nisem več pisal. Hkrati smo upoštevali še normiranost baznih vektorjev.

Poglejmo si še dva različna bazna vektorja s sodima indeksoma e_{2k} in e_{2l} Na podoben način dobimo:

$$\begin{aligned}
&||Ae_{2k} - Ae_{2l}||^2 = \\
&= ||(-1/k)e_{2k-1} + (1+1/k)e_{2k}||^2 + ||(-1/l)e_{2l-1} + (1+1/l)e_{2l}||^2 = \\
&= 1/k^2 + (1+1/k)^2 + 1/l^2 + (1+1/l)^2 \geq 2
\end{aligned}$$

Poglejmo si še dva različna bazna vektorje kjer ima en sodi indeks drugi pa lih: e_{2k-1} in e_{2l}. Spet na podoben način dobimo:

$$\begin{aligned}
&||Ae_{2k-1} - Ae_{2l})||^2 = \\
&= ||(1+1/k)e_{2k-1} - (1/k)e_{2k}||^2 + ||(-1/l)e_{2l-1} + (1+1/l)e_{2l}||^2 = \\
&= (1+1/k)^2 + 1/k^2 + 1/l^2 + (1+1/l)^2 \geq 2
\end{aligned}$$

Sledi torej, da je norma razlike poljubnih elementov zaporedja $\{Ae_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ večja od $\sqrt{2}$. Zaporedje torej ni Cauchyjevo in torej tudi ni konvergentno. Sledi, da A ni kompakten operator.

6 Šesta

Naj bo A kompakten operator na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Naj obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in \mathcal{H}$ velja

$$||Ax|| \geq c||x||$$

Dokaži, da je $\mathcal{H}$ končno razsežen prostor.

Trditev bomo dokazali s protislovjem: Recimo, da je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, torej ima množica (ortonormiranih) baznih vektorjev Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ neskončno elementov. V tem primeru lahko najdemo števno neskončno podmnožico te podmnožice:

$$B = \{e_n, n = 1, 2, 3, 4...\} \subseteq \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

Potem lahko definiramo zaporedje v B (ki je potem tudi zaporedje v $\mathcal{H}$, saj $B \subseteq H$) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki je omejeno, saj so bazni vektorji normirani.

Ker je A kompakten, sledi, da obstaja podzaporedje $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, da je $\{Ae_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentno zaporedje. Če je konvergentno, je Cauchyjevo, torej sta za dovolj velik k elementa zaporedja z indkesom večjim od k poljubno blizu. Vendar za poljubna elementa tega zaporedja po predpostavki velja: $||Ae_{n_k} - Ae_{n_l}|| = ||A(e_{n_k} - e_{n_l})|| \geq c||e_{n_k} - e_{n_l}|| = c\sqrt{2}$. Razdalja med poljubnima elementoma zaporedij torej ne more biti poljubno majhna kar pomeni, da zaporedje ni Cauchyjevo. Prišli smo do protislovja in sledi, da je prostor $\mathcal{H}$ končno dimenzionalen.

Dodatek k dokazu: Upoštevali smo, da za poljubna različna bazna vektorja ortonormirane baze velja:

$$||e_n - e_k||^2 = ||e_n||^2 + ||e_k||^2 - 2Re(\langle e_n, e_k\rangle) = 1 + 1 - 0 = 2$$