Naloga za splošno teorijo relativnosti - zvezda s konstantno gostoto energije

Andrej Kolar-Požun, 28172042

20. september 2018

1 Naloga

Napiši sistem enačb Tolmana-Oppenheimera-Volkova v primeru enačbe stanja konstantne gostote energije:

$$\epsilon = \rho c^2 = \rho_0 c^2$$

Integriraj enačbe TOV v tem primeru. Začni z enačbo za $m(r)$, potem enačbo za ravnotežje in končno enačbo za $\nu(r)$. Za slednjo uporabi spremembe neznank

$$\begin{aligned} x &= p_1 - R_s r^2/R^3 \\ N &= e^{\nu} \end{aligned}$$

Napiši tlak v središču zvezde $p(0)$ kot funkcijo ρ_0 in kompaktnosti zvezde $\Xi = GM/(c^2R)$. Kakšna je maksimalna kompaktnost za tako zvezdo?

2 TOV enačbe

Zaradi sferične simetrijo si izberimo naslednjo metriko:

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Zunaj sferično simetričnega telesa je to Schwarzschildova metrika. Če pa se osredotočimo na notranjost telesa(zvezde) in jo obravnavmo kot idealni plin se napetostni tenzor glasi(Od tu naprej privzamemo še naravne enote $c = 1$):

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

Če to vstavimo v Einsteinovo enačbo dobimo TOV enačbe:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \epsilon \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{(\epsilon + p)(Gm + 4\pi G r^3 p)}{r(r - 2Gm)} \\ \frac{d\nu}{dr} &= -\frac{1}{\epsilon + p}\frac{dp}{dr} \end{aligned}$$

3 Reševanje

Prva enačba je za konstantno gostoto trivialna:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon$$
$$\int_0^{m(r)} dm = 4\pi \int_0^r r^2 \rho_0 dr$$
$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$$

Kompaktnost zvezde se torej zapiše kot:

$$\Xi = \frac{GM}{R}$$
$$\Xi = \frac{4\pi G \rho_0 R^2}{3}$$

Kjer je R radij zvezde, M pa masa celotne zvezde $M = m(R)$ Druga enačba je malce bolj zoprna:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\epsilon + p)(Gm + 4\pi G r^3 p)}{r(r - 2Gm)}$$
$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho_0 + p)(G4\pi r^3 \rho_0/3 + 4\pi G r^3 p)}{r(r - 8G\pi r^3 \rho_0/3)}$$
$$\frac{dp}{(\rho_0 + p)(\rho_0/3 + p)} = -\frac{4\pi G r}{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3} dr$$
$$\int_{p(0)}^{p(r)} \frac{dp}{(\rho_0 + p)(\rho_0/3 + p)} = -\int_0^r \frac{4\pi G r}{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3} dr$$
$$u = 8G\pi\rho_0 r^2/3, \; du = 16G\pi\rho_0 r/3 dr$$
$$-\frac{3}{2\rho_0}\int_{p(0)}^{p(r)} \left(\frac{1}{\rho_0 + p} - \frac{1}{\rho_0/3 + p}\right) dp = -\frac{4\pi G * 3}{2 * 8G\pi\rho_0}\int_0^{u(r)} \frac{1}{1-u} du$$
$$-\frac{3}{2\rho_0}\ln\left(\frac{(\rho_0 + p(r))(\rho_0/3 + p(0))}{(\rho_0 + p(0))(\rho_0/3 + p(r))}\right) = +\frac{3}{4\rho_0}\ln\left(1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3\right)$$
$$\ln\left(\frac{(\rho_0 + p(0))(\rho_0/3 + p(r))}{(\rho_0 + p(r))(\rho_0/3 + p(0))}\right) = \ln\left(\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3}\right)$$
$$(\rho_0 + p(0))(\rho_0/3 + p(r)) = (\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3})((\rho_0 + p(r))(\rho_0/3 + p(0)))$$
$$p(r) = \frac{\rho_0(\rho_0/3 + p(0))\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3} - \rho_0/3(\rho_0 + p(0))}{\rho_0 + p(0) - (\rho_0/3 + p(0))\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 r^2/3}}$$

Za izračun tlaka v središču zvezde, upoštevamo, da je okoli zvezde vakuum in torej velja robni pogoj $p(r = R) = 0$:

$$0 = \rho_0(\rho_0/3 + p(0))\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 R^2/3} - \rho_0/3(\rho_0 + p(0))$$
$$p(0) = \frac{\rho_0^2/3(\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 R^2/3} - 1)}{\rho_0/3 - \rho_0\sqrt{1 - 8G\pi\rho_0 R^2/3}}$$
$$p(0) = \frac{\rho_0/3(\sqrt{1 - 2\Xi} - 1)}{1/3 - \sqrt{1 - 2\Xi}}$$

Če na formulo tlaka v središči zvezde gledamo kot funkcijo kompaktnosti, vidimo, da ima ta pol pri $\Xi = 4/9$. Neskončen tlak ni fizikalen, torej je ta vrednost zgornja meja za kompaktnost.

Rešimo še zadnjo enačbo:

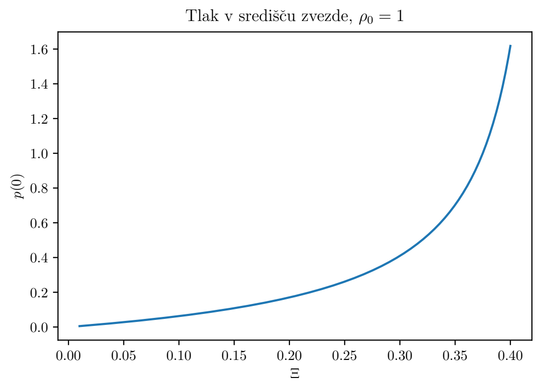
$$
\begin{aligned}
&\frac{d\nu}{dr} = \frac{Gm + 4\pi G r^3 p}{r(r-2Gm)} \\
&\frac{d\nu}{dr} = \frac{4G\pi r^3\rho_0/3 + 4\pi G r^3 p}{r(r-8G\pi r^3\rho_0/3)} \\
&\int d\nu = 4\pi G \int \left(\frac{r^3\rho_0/3}{r(r-8G\pi r^3\rho_0/3} + \frac{r^3 p}{r(r-8G\pi r^3\rho_0/3)} \right) dr + C \\
&\nu = 4\pi G(I_1 + I_2) + C \\
&I_1 = \int \rho_0/3 \frac{r}{1-8G\pi r^2\rho_0/3} dr \\
&I_1 = -\frac{1}{16G\pi} \ln\big(1-8G\pi r^2\rho_0/3\big) \\
&I_2 = \int \frac{r}{1-8G\pi r^2\rho_0/3} \frac{\rho_0(\rho_0/3+p(0))\sqrt{1-8G\pi\rho_0 r^2/3} - \rho_0/3(\rho_0+p(0))}{\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))\sqrt{1-8G\pi\rho_0 r^2/3}} dr \\
&u = \sqrt{1-8G\pi\rho_0 r^2/3} \\
&du = \frac{-8G\pi\rho_0 r/3}{u} dr \\
&I_2 = -\frac{3}{8G\pi\rho_0} \int \frac{1}{u} \frac{\rho_0(\rho_0/3+p(0))u - \rho_0/3(\rho_0+p(0))}{\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))u} du \\
&I_2 = -\frac{3}{8G\pi\rho_0} \int \left(\frac{-\rho_0}{3u} + \frac{2\rho_0/3(\rho_0/3+p(0))}{\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))u} \right) du \\
&I_2 = -\frac{3}{8G\pi\rho_0} \left(-\rho_0/3\ln(u) - \frac{2\rho_0/3(\rho_0/3+p(0))}{\rho_0/3+p(0)} \ln(\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))u) \right) \\
&I_2 = \frac{1}{8G\pi} \left(\ln(u) + \frac{2(\rho_0/3+p(0))}{\rho_0/3+p(0)} \ln(\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))u) \right) \\
&\nu(r) = \ln\Big(\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))\sqrt{1-8G\pi\rho_0 r^2/3}\Big) + C
\end{aligned}
$$

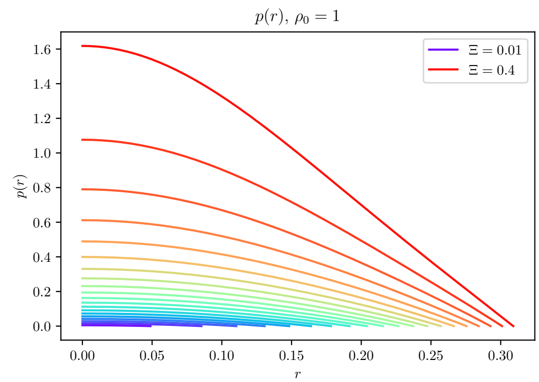
Za konstanto C bomo uporabili naslednji robni pogoj: Vemo, da zunaj zvezde velja Schwarzschildova metrika. Zahtevamo zveznost naše in Schwarzschildove metrike na robu zvezde torej:

$$
\begin{aligned}
&e^{2\nu(r=R)} = (1-\frac{2GM}{R}) = (1-2\Xi) \\
&\nu(r=R) = \ln\Big(\sqrt{1-2\Xi}\Big) \\
&C = \ln\Big(\sqrt{1-2\Xi}\Big) - \ln\Big(\rho_0+p(0)-(\rho_0/3+p(0))\sqrt{1-2\Xi}\Big)
\end{aligned}
$$

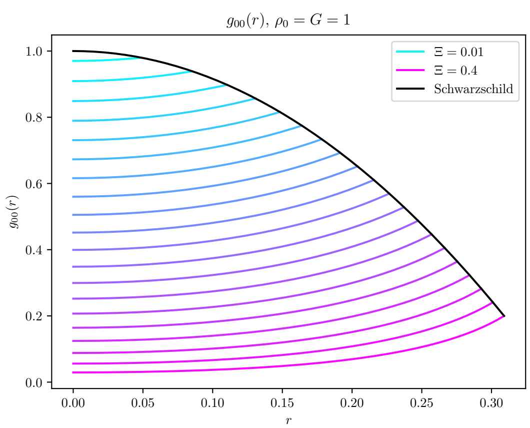
4 Grafična predstava rezultatov

Najprej si poglejmo kvalitativno obnašanje naših rezultatov, za katere bom privzel $\rho_0 = G = 1$.





Tlak v središču zvezde s kompaktnostjo narašča, pri maksimalni divergira. Tlačni profil, pa s kompaktnostjo postaja vedno strmejši.



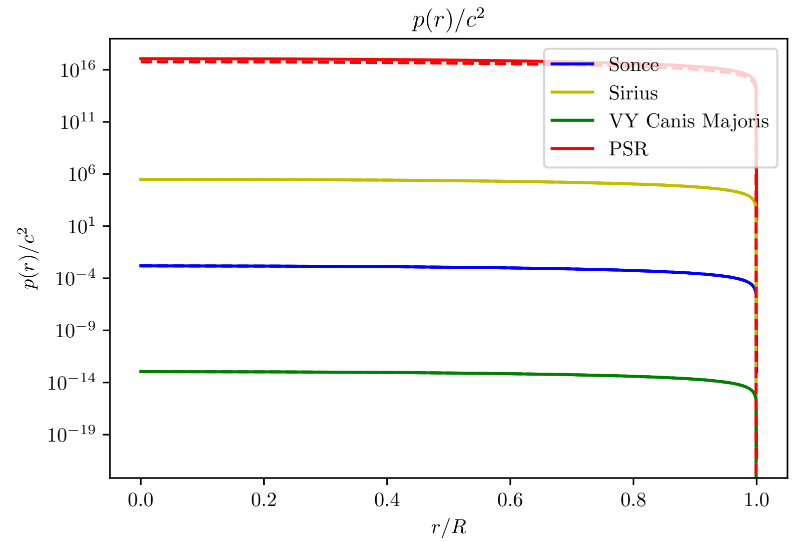
00 komponenta metričnega tenzorja je blizu središča zvezde konstantna, proti robu pa malce naraste. S črno je označena 00 komponenta metričnega tenzorja Schwarzschildove metrike(Ki sicer velja le zunaj zvezde). Iz grafa je očitno, da bi čisto zgrešili, če bi npr. privzeli, da tudi v zvezdi velja Schwarzschildova metrika.

Kot nekakšno aplikacijo našega modela, bom enačbe sedaj rešil še za konkretne primere. Med samo bom primerjal naslednje znane zvezde za katere bom privzel konstantno gostoto. Mase in radije sem poiskal na spletu, ostalo pa izračunal:

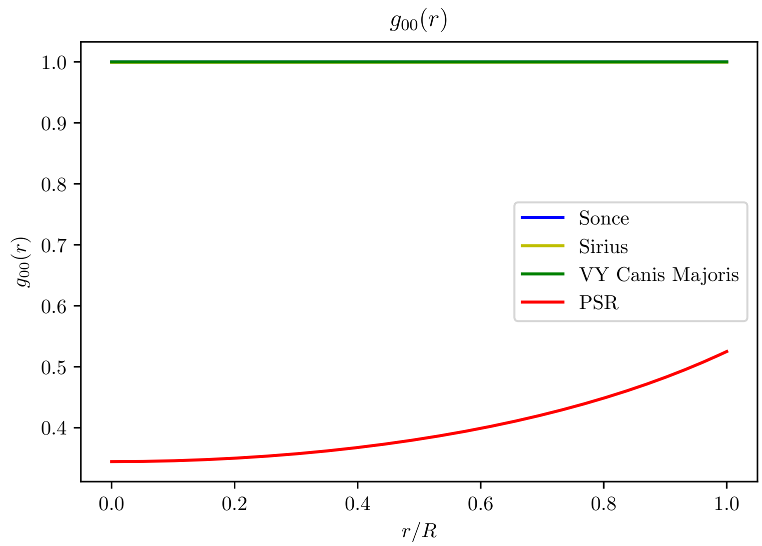
	M[masa sonca]	R[Radij sonca]	$\rho[kg/m^3]$	Ξ	$p(0)/c^2[Pa/m^2s^2]$
Sonce	1	1	1446	$2 * 10^{-6}$	0.0015
Sirius B	1	0.0084	$2.4 * 10^9$	0.0002	310000
VY Canis Majoris	17	1420	$8.5 * 10^{-6}$	$2.5 * 10^{-8}$	10^{-13}
PSR J0348+0432	2	$1.8 * 10^{-5}$	$5 * 10^{17}$	0.23	10^{17}

Za primerjavo na hitro izračunajmo tlačni profil še v nerelativistični fiziki, kjer enostavno zahtevamo, da Newtnova sila gravitacije izenači tlačno.

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{m(r)\rho}{r^2}$$
$$p(r) - p(0) = -G2\pi/3\rho_0^2 r^2$$
$$p(0) = 2G\pi/3R^2\rho_0^2$$
$$p(r) = 2\pi G\rho_0^2/3(R^2 - r^2)$$
$$p(r)/c^2 = \frac{\Xi\rho_0}{2}(1 - (r/R)^2)$$



Na x osi sem za vsako zvezdo r koordinato normaliziral, y os pa je v log skali. Oblike profila zgledajo podobne le očitno več velikostnih redov narazen. Z črtkano črto je narisan nerelativističen profil. Vidi se, da ta od relativističnega vidno odstopa le pri nevtronski zvezdi PSR.

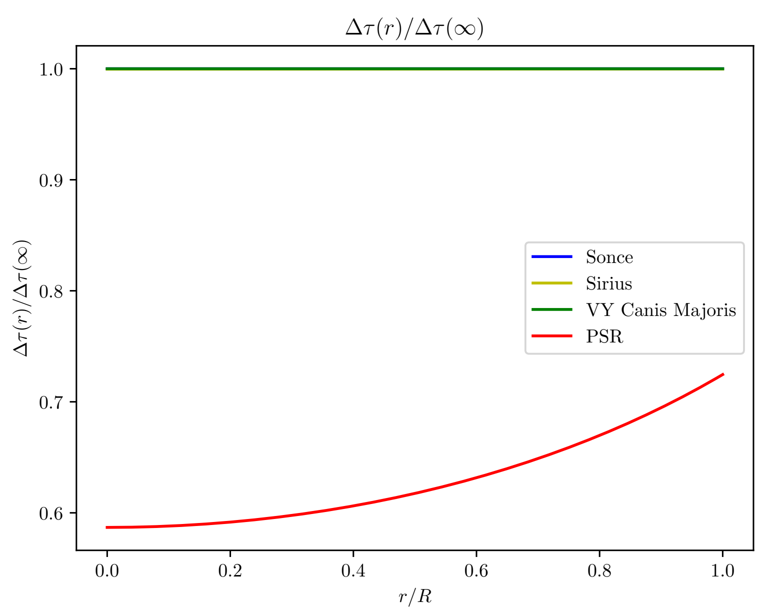


Spet vidimo, da je le pri zvezdi PSR res treba delati relativistično. Ostale imajo praktično raven prostor-čas

Bolj predstavljiva količina je morda kvocient lastnega časa, ki ga zmeri opazovalec v notranjosti zvezde in časa, ki ga izmeri opazovalec daleč od zvezde, ko preteče isti koordinatni čas(recimo 1). Seveda v praksi to, da bi v zvezdo postavili neko uro in jo tam opazovali ni izvedljivo. Lastni čas izračunamo kot:

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{00}}dt$$

V našem primeru je količina pod integralom od časa neodvisna in je račun trivialen.



Rezultat je nekako kar smo pričakovali (saj je to le kvadratni koren prejšnjega grafa). Čas za opazovalca v PSR teče približno 30-40% počasneje.