2. domača naloga iz Liejevih grup

17. maj 2019

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 30. avgusta 2019.

---

(1) Paulijeve matrike so matrike v $\mathbb{C}^{2\times 2}$, ki so definirane s predpisi

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za poljuben $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ naj bo $\sigma(\vec{s}) = s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3$. Pokaži, da potem za vsak $t \in \mathbb{R}$ in vsak $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ki zadošča pogoju $|\vec{s}| = 1$, velja

$$e^{it\sigma(\vec{s})} = \cos t\ \mathrm{I} + i \sin t\, \sigma(\vec{s}).$$

Nato pokaži, da velja $e^{it\sigma(\vec{s})} \in \mathrm{SU}(2)$.

(2) Klasificiraj vse povezane Liejeve podgrupe Heisenbergove Liejeve grupe

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Eksplicitno opiši tudi, katere izmed njih so normalne podgrupe.

(3) Definiraj grupno operacijo na mnogoterosti $\mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n)$ in homomorfizem Liejevih grup $\omega : \mathbb{R} \times \mathrm{SU}(n) \to \mathrm{U}(n)$, ki je krovni homomorfizem. Dobljena Liejeva grupa je poldirektni produkt enostavno povezanih Liejevih grup $\mathbb{R}$ in $\mathrm{SU}(n)$ in je univerzalni krov grupe $\mathrm{U}(n)$.

(4) Liejeva grupa G je definirana kot mnogoterost $G = \mathbb{R}^3$ z grupno operacijo

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^z x', y + e^{-z} y', z + z')$$

za $(x, y, z), (x', y', z') \in G$. Adjungirano delovanje grupe G na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ je dano s predpisom

$$g \cdot X = \mathrm{Ad}_g(X)$$

za $g \in G$ in $X \in \mathfrak{g}$, koadjungirano delovanje G na dualu $\mathfrak{g}^*$ pa s predpisom

$$(g \cdot f)(X) = f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))$$

za $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ in $f \in \mathfrak{g}^*$. Orbita delovanja grupe G na mnogoterosti M skozi točko $p \in M$ je množica

$$\mathcal{O}_p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

Opiši adjungirane in koadjungirane orbite grupe G.