Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Coleman - Mandula Teorem

Avtor
Andrej Kolar - Požun

14. Februar, 2019

1 Uvod

Teorem Colemana - Mandule nam za dano fizikalno teorijo pod določenimi pogoji močno omeji obliko simetrijske Liejeve algebre. Začnemo z neko relativistično teorijo, katere simetrijsko Liejevo algebro tvorijo generatorji translacij - vektorji četverci gibalne količine P_μ in generatorji homogenih Lorentzovih transformacij $J_{\mu\nu}$. Ponovimo, da zanje veljajo komutacijske zveze:

$$[P^\nu, J^{\rho\sigma}] = -i\eta^{\nu\rho}P^\sigma + i\eta^{\nu\sigma}P^\rho, \tag{1}$$

kjer smo z $\eta^{\mu\nu}$ označili metrični tenzor. Coleman - Mandula teorem pravi, da če imamo v naši simetrijski algebri še neke dodatne generatorje interne simetrije B_α (npr. okusna simetrija). Mora zanje veljati, da komutirajo s prej omenjenimi generatorji:

$$[B_\alpha, P_\mu] = 0, \tag{2}$$
$$[B_\alpha, J_{\mu\nu}] = 0. \tag{3}$$

Stanje delca predstavimo z vektorjem $|np\rangle$, kjer p označuje gibalno količino delca, n pa označuje ostala kvantna števila delca, povezana z neko interno simetrijo in spin. Teorem pravi, da lahko delovanje simetrijskega generatorja B_α na stanju predstavimo z neko hermitko matriko b_α:

$$B_\alpha|n\ p\rangle = \sum_{n'}(b_\alpha)_{nn'}|n'\ p\rangle, \tag{4}$$

kjer velja, da je matrika b_α neodvisna od gibalne količine in spina. Operator B_α na večdelčnem stanju deluje kot direktna vsota matrik b_α:

$$B_\alpha|n\ p\ m\ q...\rangle = \sum_{n'}(b_\alpha)_{nn'}|n'p, mq...\rangle + \sum_{m'}(b_\alpha)_{mm'}|np, m'q...\rangle + ... \tag{5}$$

Z drugimi besedami: simetrijsko algebro sistema lahko razcepimo na del, ki je odvisen od spina in gibalne količine delca (P_μ, $J_{\mu\nu}$) in neodvisen od ostalih internih kvantnih števil in na del, ki je odvisen le od ostalih internih kvantnih števil (B_α). Ta dela med seboj komutirata.

Opomba: Coleman - Mandula teorem velja le za teorije z energijsko režo, torej teorije brez brezmasnih delcev. Večina te naloge bo posvečena dokazu teorema, ki bo sledil Weinbergovi knjigi[1].

2 Dokaz teorema

Poleg prej omenjenih, ima teorem še tri dodatne predpostavke:

- Pod neko maso M imamo na voljo le končno število različnih delcev.
- Za sipanje delcev z gibalnima količinama p in q je sipalna matrika $S(n\ p; m\ q)$ neničelna za skoraj vsako izbiro p in q.
- Sipalna matrika S je analitična funkcija gibalnih količin p in q.

Za generatorje B_α veljajo naslednje komutacijske relacije (od tu naprej se držimo Einsteinovega sumacijskega pravila)

$$[B_\alpha, B_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}B_\gamma, \tag{6}$$

kjer so $C^\gamma_{\alpha\beta}$ strukturne konstante grupe. Enake strukturne konstante se pojavijo tudi v komutacijskih relacijah za matrike b_α:

$$[b_\alpha, b_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}b_\gamma. \tag{7}$$

Matrike b_α so končne po predpostavki, da imamo pod neko maso M na voljo le končno število različnih delcev, kar hitro vidimo iz enačbe 4. Za Liejeve algebre končnih hermitskih matrik je znano, da so direktna vsota kompaktne semi enostavne algebre in $U(1)$ algeber[2].

2.1 Preslikava $B_\alpha \to b_\alpha$ je izomorfizem

Najprej bomo pokazali, da je preslikava $B_\alpha \to b_\alpha$ izomorfizem. Če je to res, sledi, da je tudi algebra generatorjev B_α direktna vsota kompaktne semi enostavne algebre in $U(1)$ algeber. Da bo preslikava $B_\alpha \to b_\alpha$ izomorfizem, mora veljati, da iz $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p) = 0$ za neke koeficiente c^α in gibalno količino p sledi $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(k) = 0$ za vse gibalne količine k (injektivnost) oziroma $\sum_\alpha c^\alpha B_\alpha = 0$. Namesto preslikave $B_\alpha \to b_\alpha$, ki slika v matrike, ki delujejo na enodelčnem stanju $|n, p\rangle$, si poglejmo raje matrike, ki delujejo na dvodelčnem stanju, kot smo definirali že v enačbi 5:

$$(b_\alpha(p,q))_{m'n',mn} = (b_\alpha(p))_{m'm}\delta_{nn'} + (b_\alpha(q))_{n'n}\delta_{m'm} \tag{8}$$

Po definiciji invariance sipalne matrike S na simetrijske generatorje dobimo:

$$b_\alpha(p',q')S(p',q';p,q) = S(p',q';p,q)b_\alpha(p,q), \tag{9}$$

kjer je S matrika iste dimenzije kot matrike b_α, ker smo definirali:

$$S(pm, qn \to p'm', q'n') = \delta^4(p' + q' - p - q)\,(S(p',q';p,q))_{m'n',mn} \tag{10}$$

Po drugi izmed začetnih predpostavk je S neničelna za skoraj vsako izbiro gibalnih količin p in q. Iz optičnega teorema vemo, da je neničelna tudi v smeri sipanja direktno naprej. Zaradi predpostavke o analitičnosti S matrike, je ta nesingularna za skoraj vsako izbiro p', q', ki so na isti masni lupini kot p in q (Torej $p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu$) in velja $p' + q' = p + q$. Za take gibalne količine je enačba 9 podobnostna transformacija. Potem iz $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p,q) = 0$ sledi $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p',q') = 0$. To še ne pomeni, da tudi za enodelčne matrike velja $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p') = \sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(q') = 0$, ampak le, da so te sorazmerne identiteti z nasprotno predznačemi koeficienti. Te težave se znebimo, če namesto matrik b_α gledamo njihov brezsledni del $b^\#_\alpha$. Zaradi podobnosti matrik velja

$$Trb_\alpha(p',q') = Trb_\alpha(p,q). \tag{11}$$

Če upoštevamo definicijo matrik b_α za dvodelčna stanja in lastnosti sledi dobimo:

$$N(\sqrt{-q^2})Trb_\alpha(p') + N(\sqrt{-p^2})Trb_\alpha(q') = N(\sqrt{-q^2})Trb_\alpha(p) + N(\sqrt{-p^2})Trb_\alpha(q). \tag{12}$$

Upoštevali smo, da je sled identitete enaka kratnosti tipa delcov z maso m $N(m)$, kjer smo maso izrazili z kvadratom četverca gibalne količine $-p^2 = m^2$. Zgornja enačba mora veljati za vse gibalne količine na masni lupini za katere velja $p' + q' = p + q$, kar pomeni, da mora veljati

$$\frac{Trb_\alpha(p)}{N(\sqrt{-p^2})} = a^\mu_\alpha p_\mu, \tag{13}$$

kjer so a^μ_α konstante. Če sedaj definiramo

$$B^\#_\alpha = B_\alpha - a^\mu_\alpha P_\mu, \tag{14}$$

bodo pripadajoče matrike $b^\#_\alpha$ brezsledne. Ker smo v definiciji $B^\#_\alpha$ odšteli produkt konstante in gibalne količine, kar komutira z B_α, ostanejo komutacijske relacije enake:

$$[B^\#_\alpha, B^\#_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}B_\gamma = iC^\gamma_{\alpha\beta}(B^\#_\gamma + a^\mu_\gamma P_\mu) \tag{15}$$

$$[b^\#_\alpha(p), b^\#_\beta(p)] = iC^\gamma_{\alpha\beta}b_\gamma(p) = iC^\gamma_{\alpha\beta}(b^\#_\gamma(p) + a^\mu_\gamma p_\mu) \tag{16}$$

V enačbi 16 imamo na levi strani komutator, ki je brezsleden. Torej mora biti tudi desna stran enačbe brezsledna. Sledi, da mora veljati $C^\gamma_{\alpha\beta}a^\mu_\gamma = 0$ in:

$$[B^\#_\alpha, B^\#_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta}B^\#_\gamma \tag{17}$$

$$[b^\#_\alpha(p), b^\#_\beta(p)] = iC^\gamma_{\alpha\beta}b^\#_\gamma(p) \tag{18}$$

$B_\alpha^\#$ je linearna kombinacija simetrijskih generatorjev in je zato tudi simetrijski generator. Zato tudi za matrike $b_\alpha^\#$ velja

$$b_\alpha^\#(p', q')S(p', q'; p, q) = S(p', q'; p, q)b_\alpha^\#(p, q), \tag{19}$$

kjer smo dvodelčne matrike definirali analogno kot v enačbi 8. Kot prej lahko opazimo, da je zgornja enačba podobnostna transformacija in iz $c^\alpha b_\alpha^\#(p, q) = 0$ sledi $c^\alpha b_\alpha^\#(p', q') = 0$, če so le p' in q' na isti masni lupini kot p in q in velja $p + q = p' + q'$. Ker imamo zdaj opravka z brezslednimi matrikami, lahko privzamemo, da iz $c^\alpha b_\alpha^\#(p, q) = 0$ sledi $c^\alpha b_\alpha^\#(p) = c^\alpha b_\alpha^\#(q) = 0$. Zaenkrat torej vemo, da iz $c^\alpha b_\alpha^\#(p) = 0$ sledi $c^\alpha b_\alpha^\#(p') = 0$, če le velja $q' = p + q - p'$ in če sta p in p' na isti masni lupini. Spomnimo se, da hočemo pokazati, da sledi $c^\alpha b_\alpha^\#(k) = 0$ za vsak k, kjer je edina predpostavka, da je k na isti masni lupini kot p. Recimo, da velja $c^\alpha b_\alpha^\#(p, q) = 0$. Potem velja tudi $c^\alpha b_\alpha^\#(p', q') = 0$ torej tudi $c^\alpha b_\alpha^\#(q') = 0$ in $c^\alpha b_\alpha^\#(p) = 0$. Sledi, da velja $c^\alpha b_\alpha^\#(p, q') = 0$. Če sedaj napravimo podobnostno transformacijo s pomočjo sipalne matrike (predstavljamo si, da sipljemo iz p, q' v $k, p + q' - k$), vidimo, da velja tudi

$$c^\alpha b_\alpha^\#(k, p + q' - k) = 0, \tag{20}$$

$$c^\alpha b_\alpha^\#(k) = 0, \tag{21}$$

za vse momente k na isti masni lupini, za katere velja, da je $p + q' - k$ tudi na masni lupini. Zadnji pogoj lahko vedno izpolnimo, saj si lahko vedno izberemo q', ki je na masni lupini, da bo tudi $p + q' - k$ na masni lupini. Sledi, da je res $c^\alpha b_\alpha^\#(k) = 0$ za vsak k, ki je na isti masni lupini kot p. Torej je preslikava $B_\alpha \to b_\alpha^\#$ izomorfizem. Tudi za algebro končnih matrik $b_\alpha^\#$ velja, da je direktna vsota kompaktne semi enostavne algebre in $U(1)$ algeber. Sledi, da je tudi algebra generatorjev B_α direktna vsota kompaktne semi enostavne algebre in $U(1)$ algeber.

2.2 Primer, ko $[B_\alpha, P_\mu] = 0$

Omejimo se na poseben primer, ko velja $[B_\alpha, P_\mu] = 0$. Pokazati moramo samo še, da interni simetrijski generatorji B_α komutirajo tudi z generatorji Lorentzovih transformacij in da so pripadajoče matrike b_α neodvisne od spina in gibalne količine.

Pokazali smo že, da je algebra direktna vsota kompaktne semi enostavne algebre in $U(1)$ algeber. Poglejmo si najprej del algebre, ki je direktna vsota $U(1)$ algeber. Gledamo dvodelčno stanje $|pm, qn\rangle$. Opazimo, da lahko za poljubno izbiro fizikalnih p in q, najdemo generator Lorentzove transformacije, ki je diagonalen:

$$J|pm, qn\rangle = \sigma(m, n)|pm, qn\rangle \tag{22}$$

Če sta vektorja p in q svetlobnega tipa in vzporedna, J generira rotacije v smeri $\vec{p}$ oz. ekvivalentno $\vec{q}$, saj sta vzporedna. Če to ni res, je $p + q$ časovnega tipa. V tem primeru gremo lahko v težiščni sistem, kjer velja $\vec{p} = -\vec{q}$. J potem spet generira rotacije v smeri $\vec{p}$ oz. v smeri $\vec{q}$.

Po predpostavki P_μ komutira z B_α. Vemo tudi, da je $[J, P_\mu]$ linearna kombinacija komponent P_μ. Torej B_α komutira tudi z $[J, P_\mu]$. Zapišemo Jacobijevo identiteto:

$$[B_\alpha, [J, P_\mu]] + [P_\mu, [B_\alpha, J]] + [J, [P_\mu, B_\alpha]] = 0. \tag{23}$$

Ravnokar smo ugotovili, da je prvi člen v zgornji enačbi nič. Po predpostavki je tudi zadnji člen enak nič iz česar sledi, da je tudi drugi člen enak nič $[P_\mu, [B_\alpha, J]] = 0$. $[B_\alpha, J]$ torej komutira z gibalno količino, po predpostavki pa so simetrijski operatorji, ki komutirajo z gibalno količino (razen gibalne količine same) ravno B_α. Sledi, da je $[B_\alpha, J]$ linearna kombinacija generatorjev B_β. Ker gre za generatorje direktne vsote $U(1)$ algeber, ti komutirajo med sabo. Velja torej

$$[B_\alpha, [J, B_\alpha]] = 0 \tag{24}$$

Izračunajmo pričakovano vrednost leve in desne strani zgornje enačbe v bazi v kateri je J diagonalna in predstavimo operator B_α z matriko b_α in dobimo, da za vsak par m, n velja:

$$\sum_{m'n'} \left(\sigma(m', n') - \sigma(m, n)\right) |b_\alpha(p, q)_{m'n', mn}|^2 = 0. \tag{25}$$

V zgornji enačbi, sta m in n fiksna, od koder sledi, da mora biti vsak člen v vsoti enak nič. Sledi, da je $b_\alpha(p,q)_{m'n',mn}$ neničelen le, ko velja $\sigma(m',n') = \sigma(m,n)$. Če je to res, pa generatorja B_α in J komutirata. Izbira vektorjev p in q je bila poljubna in s primerno izbiro lahko isti dokaz naredimo, za vsakega izmed generatorjev Lorenzovih transformacij J. Sledi, da vsak B_α komutira z generatorji Lorenzovih transformacij $J_{\mu\nu}$. Ker komutira z rotacijami, morajo matrike b_α biti neodvisne od spina, ker komutira s potiski, pa morajo biti te matrike neodvisne tudi od gibalne količine. Colemana Mandula teorem je za ta poseben primer tako dokazan.

Poglejmo si še primer, ko še vedno velja $[B_\alpha, P_\mu] = 0$, a so B_α generatorji komapktne semi enostavne Liejeve algebre: Lorentzovo transformacijo predstavimo z unitarno matriko $U(\Lambda)$. Generatorji B_α se transformijo pod upodobitvijo Lorentzove grupe $D(\Lambda)$:

$$U(\Lambda) B_\alpha U^{-1}(\Lambda) = D_\alpha^\beta(\Lambda) B_\beta. \tag{26}$$

Komutacijske relacije med generatorji se pri taki transformaciji ohranjajo iz česar sledi:

$$[B_\alpha, B_\beta] = iC^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma \rightarrow D_\alpha^{\alpha'}(\Lambda) D_\beta^{\beta'}(\Lambda)[B_{\alpha'}, B_{\beta'}] = iC^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} D^\gamma_{\gamma'}(\Lambda) B_\gamma \tag{27}$$

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha',\beta',\gamma'} D_\alpha^{\alpha'}(\Lambda) D_\beta^{\beta'}(\Lambda) D^\gamma_{\gamma'}(\Lambda^{-1}) C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} \tag{28}$$

Upoštevali smo, da je reprezentacija grupe homomorfizem in zanjo velja $D(\Lambda^{-1})) = D(\Lambda)^{-1}$. V drugi vrstici smo zaradi jasnosti vseeno zapisali vsoto. Dobili smo transformacijske lastnosti strukturnih konstant. Zadnjo enačbo sedaj pomnožimo in kontrahiramo z $C^\alpha_{\gamma\delta}$:

$$\sum_{\alpha\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} C^\alpha_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha',\beta',\gamma'\alpha\gamma} D_\alpha^{\alpha'}(\Lambda) D_\beta^{\beta'}(\Lambda) D^\gamma_{\gamma'}(\Lambda^{-1}) C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} C^\alpha_{\gamma\delta} \tag{29}$$

$$g_{\beta\delta} = \sum_{\alpha',\beta',\gamma',\alpha,\gamma,\gamma'',\alpha'',\delta'} D_\alpha^{\alpha'}(\Lambda) D_\beta^{\beta'}(\Lambda) D^\gamma_{\gamma'}(\Lambda^{-1}) C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} D^{\gamma''}_\gamma(\Lambda) D^{\delta'}_\delta(\Lambda) D^\alpha_{\alpha''}(\Lambda^{-1}) C^{\alpha''}_{\gamma''\delta'} \tag{30}$$

$$g_{\beta\delta} = \sum_{\beta',\delta'} D_\beta^{\beta'}(\Lambda) D_\delta^{\delta'}(\Lambda) g_{\beta'\delta'} \tag{31}$$

V drugi vrstici smo prepoznali indeks notacijo množenja matrik. Vpeljali smo metriko[1] Liejeve algebre: $g_{\beta\delta} = \sum_{\alpha\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} C^\alpha_{\gamma\delta}$. Ker so B_α generatorji semi enostavne kompaktne algebre, je metrika $g_{\alpha\beta}$ pozitivno definitna in lahko definiramo koren matrike $g^{1/2}$. Opazimo:

$$g_{\beta\delta} = D_\beta^{\beta'} D_\delta^{\delta'} g_{\beta'\delta'} \tag{32}$$

$$1 = g^{-1}_{\beta\delta} D_\beta^{\beta'} D_\delta^{\delta'} g_{\beta'\delta'} \tag{33}$$

$$1 = g^{1/2}_{\delta'\beta'} D_\beta^{\beta'} g^{-1/2}_{\beta\delta} g^{1/2}_{\beta'\delta'} D_\delta^{\delta'} g^{-1/2}_{\delta\beta} \tag{34}$$

Iz zadnje enačbe vidimo, da je $g^{1/2} D g^{-1/2}$ ortogonalna matrika torej unitarna. Da se pokazati, da je tudi $g^{1/2} D g^{-1/2}$ reprezenacija Lorentzove grupe. Ta je torej končna in unitarna. Vendar vemo, da Lorentzova grupa ni kompaktna, torej je edina končna unitarna reprezentacija trivialna reprezentacija $D(\Lambda) = 1$. Z trivialno reprezentacijo pa očitno generatorji B_α komutirajo za vse Lorentzove transformacije Λ. Neodvisnost matrik b_α od gibalne količine in spina kot prej sledi iz komutacije generatorjev B_α z rotacijami in potiski.

2.3 Primer, ko $[B_\alpha, P_\mu] \neq 0$

Poglejmo še primer, ko $[P_\mu, B_\alpha] \neq 0$. V tem primeru lahko formuliramo delovanje splošnega simetrijskega generatorja A_α na stanje kot:

$$A_\alpha |p,n\rangle = \sum_{n'} \int d^4p' (\mathcal{A}_\alpha(p',p))_{n'n} |p',n'\rangle \tag{35}$$

Zaradi ohranitve energije, mora seveda veljati $\mathcal{A}_\alpha(p', p) = 0$, če p' in p nista na isti masni lupini. Pokazali bomo, da velja še strožji pogoj in sicer $\mathcal{A}_\alpha(p', p) = 0$ za vsak $p' \neq p$. Po definiciji algebre je za poljubno funkcijo f simetrijski generator tudi:

$$A_\alpha^f = \sum_{n'} \int d^4x e^{iPx} A_\alpha e^{-iPx} f(x). \tag{36}$$

Pri delovanju s tem operatorjem na stanje dobimo:

$$A_\alpha^f |p, n\rangle = \sum_{n'} \int d^4p' \tilde{f}(p' - p)(\mathcal{A}_\alpha(p', p))_{n',n})|p', n'\rangle \tag{37}$$

$$\tilde{f}(p' - p) = \int d^4x e^{ix(p'-p)} f(x) \tag{38}$$

Recimo, da obstaja par gibalnih količin p in $p + \Delta, \Delta \neq 0$, ki sta na masni lupini in $\mathcal{A}(p + \Delta, p) \neq 0$. Recimo, da so q, p' in q' tudi gibalne količine na masni lupini in $p' + q' = p + q$. Potem $q + \Delta$, $p' + \Delta$ in $q' + \Delta$ niso na masni lupini. Ker je bila funkcija f poljubna, si lahko izberemo, da je $\tilde{f}(p' - p)$ enaka nič povsod razen na majhnem območju okoli Δ. V tem primeru simetrijski generator A_α^f anihilira stanja z gibalnimi količinami p', q', q, ne anihilira pa stanje z gibalno količino p. Simetrija torej prepoveduje sipanje dveh delcev pri katerim se jima gibalna količinama iz p in q spremeni na p' in q'. To je v protislovju z našo drugo začetno predpostavko, da je sipalna matrika neničelna za skoraj vsako izbiro gibalnih količin na lupini. Sledi, da mora biti $\mathcal{A}(p', p) = 0$, če $p \neq p'$. To še ne pomeni, da vsak simetrijski generator A_α komutira z gibalno količino. $\mathcal{A}(p', p)$ namreč lahko vsebuje člene z Diracovimi delta funkcijami $\delta^4(p' - p)$ ali odvodi le-teh. Predpostavimo, da vsebuje $\mathcal{A}(p', p)$ največ končno število D_α odvodov Diracove delta funkcije. Po integraciji per partes vidimo, da to pomeni, da generator A_α deluje na enodelčnih stanjih kot polinom reda D_α v odvodih $\partial/\partial p_\mu$. Poglejmo si količino, podano z D_α kratnim komutatorjem:

$$B_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} = [P^{\mu_1}, [P^{\mu_2}, \dots [P^{\mu_{D_\alpha}}, A_\alpha]] \dots] \tag{39}$$

Komutatorji pravkar definiranega $B_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}$ z P^μ so sorazmerni zmnožku $D_\alpha + 1$ faktorjev gibalne količine $p' - p$ in D_α odvodov $\delta^4(p' - p)$. Po D_α per partes integracijah opazimo, da velja $[B_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}, P^\mu] = 0$. Tekom dokaza smo že opazili, da imajo pripadajoče matrike $b_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}(p)$ naslednjo obliko:

$$b_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}(p) = b_\alpha^{\#\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} p_\mu, \tag{40}$$

kjer so $b_\alpha^{\#\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}(p)$ hermitske, brezsledne matrike, neodvisne od gibalne količine p. Sedaj opazimo, da A_α komutira z $-P_\mu P^\mu = m^2$, saj kot simetrijski generator ohranja masno lupino. Skupaj s podobnim argumentom kot pri dokazu za komutacijo $B_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}$ z P^μ velja za $D_\alpha \geq 1$:

$$0 = [P^{\mu_1} P_{\mu_1}, [P^{\mu_2}, \dots [P^{\mu_{D_\alpha}}, A_\alpha]] \dots] = 2P_{\mu_1} B_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}, \tag{41}$$

$$0 = p_{\mu_1} b_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}(p). \tag{42}$$

Zadnja enačba velja za kakršenkoli p časovnega tipa, torej za $D_\alpha \geq 1$ velja

$$b_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} = 0 \tag{43}$$

$$a_\alpha^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu_1\mu \dots \mu_{D_\alpha}} \tag{44}$$

Poglejmo najprej primer $D_\alpha \geq 2$. Po definiciji je $a_\alpha^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}$ simetričen na zamenjavo indeksov $\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}$, kar skupaj z zgornjim implicira $a_\alpha^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} = 0$. Ostane nam primer $D_\alpha = 0$, ko velja $[A_\alpha, P_\mu] = 0$ in smo ga že obdelali v prvem delu dokaza in primer, ko velja $D_\alpha = 1$. V tem primeru velja:

$$[P^\nu, A_\alpha] = a_\alpha^{\mu\nu} P_\mu \tag{45}$$

Iz enačbe 1 sledi, da mora biti A_α oblike

$$A_\alpha = -\frac{1}{2} i a_\alpha^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + B_\alpha, \tag{46}$$

kar izčrpa vse možne primere in je dokaz končan.

3 Literatura

[1] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Supersymmetry*, volume Volume 3. Cambridge University Press, 2000.

[2] Steven Weinberg. *Quantum theory of fields. Modern applications*, volume Volume 2. Cambridge University Press, 1 edition, 1996.