1. domača naloga iz Liejevih grup

5. april 2019

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 30. avgusta 2019.

---

(1) Liejeva algebra grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sestoji iz vseh realnih matrik velikosti 2×2 z ničelno sledjo

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Za bazo prostora $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ vzemimo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Označimo z E^L, F^L in H^L levo invariantna vektorska polja na $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, za katere je $(E^L)_{\mathrm{I}} = E$, $(F^L)_{\mathrm{I}} = F$ in $(H^L)_{\mathrm{I}} = H$.

Izračunaj eksplicitne predpise polj E^L, F^L in H^L, njihove tokove in komutatorje.

(2) Unitarna in specialna unitarna grupa sta za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirani na naslednji način:

$$\mathrm{U}(n) = \{Q \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid Q^H Q = \mathrm{I}\},$$
$$\mathrm{SU}(n) = \{Q \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid Q^H Q = \mathrm{I},\, \det(Q) = 1\}.$$

Pokaži, da sta Liejevi grupi $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(n)$ in $\mathrm{U}(n)$ difeomorfni. Nato pokaži, da grupa $\mathrm{U}(n)$ ni izomorfna direktnemu produktu grup $\mathrm{U}(1)$ in $\mathrm{SU}(n)$, je pa izomorfna semi direktnemu produktu $\mathrm{U}(1)$ in $\mathrm{SU}(n)$.

(3) Označimo z $\mathrm{SE}(3)$ grupo vseh izometrij evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ohranjajo orientacijo. Vsako tako izometrijo $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lahko zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = R\vec{x} + \vec{a}$$

za enolično določena $R \in \mathrm{SO}(3)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Grupna operacija je komponiranje izometrij, gladko strukturo pa na $\mathrm{SE}(3)$ uvedemo preko bijekcije $\Phi : \mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3 \to \mathrm{SE}(3)$ s predpisom $\Phi(R,\vec{a})(\vec{x}) = R\vec{x} + \vec{a}$. Tako postane $\mathrm{SE}(3)$ povezana 6-dimenzionalna Liejeva grupa.

Poišči neko bazo Liejeve algebre $\mathfrak{se}(3)$ Liejeve grupe $\mathrm{SE}(3)$ in izračunaj razvoj komutatorjev baznih elementov po tej bazi. Nato pokaži, da velja $[\mathfrak{se}(3), \mathfrak{se}(3)] = \mathfrak{se}(3)$. Ali je Liejeva algebra $\mathfrak{se}(3)$ enostavna?