ANDREJ KOLAR-POŽUN
28172042

DODATNA POGLAVJA IZ MATEMATIKE ZA FIZIKE: DOMAČE NALOGE

① G grupa, $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$, $g,h \in G$ KOMUTATORSKA PODGRUPA JE $[G,G] = \langle \{[g,h] \mid g,h \in G\} \rangle$

Pokaži, da za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $[GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})] = SL(n,\mathbb{R})$

Vemo, da grupo $SL(n,\mathbb{R})$ sestavljajo matrike iz $GL(n,\mathbb{R})$ z determinanto 1.
Takoj lahko vidimo:

$$\det(g_1^{-1}h_1^{-1}g_1h_1\, g_2^{-1}h_2^{-1}g_2h_2 \dots g_k^{-1}h_k^{-1}g_kh_k) = 1 \implies \boxed{[GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})] \subset SL(n,\mathbb{R})}$$

take oblike bodo vsi elementi $[G,G]$

uporabimo $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ in $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

torej $\det(g^{-1}h^{-1}gh) = \frac{\det(g)}{\det(g)}\frac{\det(h)}{\det(h)} = 1$

Če pokažemo še $SL(n,\mathbb{R}) \subset [GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})]$ bo torej $SL(n,\mathbb{R}) = [GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})]$

Spomnimo se elementarnih matrik $E_{ij}(\alpha)$, ki imajo 1 na diagonali, α na komponenti (i,j) in nič drugod.
Za te matrike velja $\det(E_{ij}(\alpha)) = 1$ in $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$

Produkt matrik $E_{ij}(\alpha)A$ je ~~matrika A~~ prištevanje $\alpha\cdot$ j-te vrstice A k i-ti vrstici A.
Produkt $A \cdot E_{ij}(\alpha)$ pa je prištevanje $\alpha \cdot$ i-tega stolpca A k j-tem stolpcu A.

Sedaj bom pokazal, da se da vsako $SL(n,\mathbb{R})$ matriko izraziti kot produkt elementarnih matrik.
$A \in SL(n,\mathbb{R})$, recimo, da $A_{11} \neq 0$. Če slučajno $A_{11} = 0$, zagotovo obstaja $A_{i1} \neq 0$ za nek i med 1 in n, ker sicer bi determinanta matrike A bila nič. V tem primeru ~~torej~~ bo sledeč dokaz veljal za $E_{1i}(1)\cdot A$, katere komponenta $(1,1)$ ni nič.

Sedaj tvorimo novo matriko $B_1 \cdot A \cdot C_1$, ki ima v prvem stolpcu in vrstici povsod ničle razen v $(1,1)$ komponenti.

$$B_1 = \prod_{i=2}^{n} \underbrace{E_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)}_{\text{UNIČI KOMPONENTO } i1}$$ ← UNIČI PRVO VRSTICO RAZEN komp. $(1,1)$

$$C_1 = \prod_{j=2}^{n} E_{1j}\left(-\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)$$ ← podobno za prvi stolpec

Podobno lahko definiramo $B_2 = \prod_{i=3}^{n} E_{i2}\left(-\frac{a_{i2}}{a_{22}}\right)$ ki uniči drugo vrstico razen $(2,2)$ komponento.

Če to ponavljamo, dobimo $B_{n-1}B_{n-2}\dots B_2B_1 A C_1C_2\dots C_{n-1} = D$ ← DIAGONALNA MATRIKA $\det(D) = 1$

Če pomnožimo enačbo z ustreznimi inverzi elementarnih matrik dobimo.

$$A = E'DE'' \quad E', E'' \text{ neki produkti elementarnih matrik}$$

Če smo namesto A pisali $E_{1i}(1)A$ lahko to sedaj z leve množimo z $E_{1i}(-1)$ in dobimo izraz iste oblike.

Zdaj moramo samo še pokazati, da se da $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ izraziti kot produkt elementarnih matrik.

Torej $D = \mathrm{diag}(a_1 \dots a_n)$, ~~delo~~ množimo D z nekaj elementarnimi matrikami:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1} & \\ & & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{z leve}]{\text{množimo z } E_{n-1,n}\left(\frac{1}{a_n}\right)} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1} & 1 \\ & 0 & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{z leve z } E_{n,n-1}(-a_n)} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1} & 1 \\ & -a_n a_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{z leve z } E_{n,n-1}(1)}$$

$$\to \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1} & 1 \\ & a_{n-1}(1-a_n) & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{z leve z } E_{n-1,n}(-1)} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1}a_n & 0 \\ & a_{n-1}(1-a_n) & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{z leve z } E_{n,n-1}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{n-1}a_n & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}(a_1 \dots, a_{n-1}a_n, 1)$$

Če to ponovljamo še za ~~manjše~~ nižje indekse komponent dobimo: $\underset{\text{produkt el. matrik}}{E'''} D = \mathrm{diag}(\overbrace{a_1 a_2 \cdots a_n}^{1}, 1, 1, \dots, 1) = \mathbb{1}$

oziroma $\boxed{D = E'''^{-1}}$

Torej se vsako matriko iz $SL(n,\mathbb{R})$ res da zapisati kot produkt elementarnih matrik.

Pokažimo še, da so elementarne matrike elementi komutatorske podgrupe:

Pišimo $E_{ij}(\alpha) = \mathbb{1} + e_{ij}\alpha$, e_{ij} ima ničle povsod razen v (i,j) ima enko. Velja $e_{ij}^2 = 0$

$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$

$e_{ij} e_{kj} = 0$

$e_{ij} e_{ki} = 0$

poglejmo $[E_{ir}(-\alpha), E_{rj}(-1)] = E_{ir}(\alpha) E_{rj}(1) E_{ir}(-\alpha) E_{rj}(-1) =$

$= (\mathbb{1} + \alpha e_{ir})(\mathbb{1} + e_{rj})(\mathbb{1} - \alpha e_{ir})(\mathbb{1} - e_{rj}) =$

$= (\mathbb{1} + e_{rj} + \alpha e_{ir} + \alpha e_{ij})(\mathbb{1} - e_{rj} - \alpha e_{ir} + \alpha e_{ij}) =$

$= \mathbb{1} + \cancel{\alpha e_{ij}} - \cancel{e_{rj}} - \cancel{\alpha e_{ir}} + \cancel{\alpha e_{ij}} + \cancel{e_{rj}} + \cancel{\alpha e_{ir}} - \cancel{\alpha e_{ij}} + \alpha e_{ij} = \mathbb{1} + \alpha e_{ij} = E_{ij}(\alpha)$

$\Rightarrow \quad E_{ij}(\alpha) = [E_{ir}(-\alpha), E_{rj}(-1)] \quad \leftarrow$ velja le za $n \geq 3$ (rabimo 3 različne i, r, j)

Ker se vsako SL matriko da zapisati kot produkt elementarnih je torej $SL(n,\mathbb{R}) \subset [GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})]$

$\Rightarrow \quad SL(n,\mathbb{R}) = [GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R})]$ za $n \geq 3$.

$n = 1$: ~~ok~~ $SL(1,\mathbb{R}) = 1 = [GL(1,\mathbb{R}), GL(1,\mathbb{R})]$ očitno velja

Za $n=2$ pa: Hočemo pokazati, da $SL(2,\mathbb{R}) \subset [GL(2,\mathbb{R}), GL(2,\mathbb{R})]$

Najprej poglejmo, da so v $[GL(2,\mathbb{R}), GL(2,\mathbb{R})]$ vse matrike oblike $\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac1b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac1b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&b\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&\frac1b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&b\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2+\frac1b\\0&\frac1b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&\frac1b-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$$

$b\neq 0$

$c=\frac1b-1 \Rightarrow b=\frac{1}{1+c}$ ← s tako izbiro b-ja lahko dobimo matrike oblike $\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$

Kaj pa če hočemo $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$? Jo dobimo iz $\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac12\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ ✓

Prav tako so v $[GL(2,\mathbb{R}), GL(2,\mathbb{R})]$ vse matrike oblike $\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}$ (transponiramo prejšnji dokaz)

in matrike oblike $\begin{pmatrix}a&0\\0&\frac1a\end{pmatrix}$, kajti

$$\begin{pmatrix}\frac1a&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&+1\\+1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac1a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&+1\\+1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&+\frac1a\\+1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+1&0\\0&+\frac1a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+a&0\\0&+\frac1a\end{pmatrix} ✓$$

$a\neq 0$

Zdaj vzamimo $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$

če $a\neq 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\c/a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&ab\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&\frac1a\end{pmatrix}}_{\text{vse te so iz } [GL(2,\mathbb{R}),GL(2,\mathbb{R})]} = \begin{pmatrix}1&0\\c/a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&\frac1a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&\frac{bc+1}{a}\end{pmatrix} \underset{ad-cb=1}{=} \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

če $b\neq 0$:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac db\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ab&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac1b&0\\0&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&\frac db\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac1b&0\\a&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\\frac{ad-1}{b}&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

če $a=b=0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=0$, ni v $SL(2,\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ je v $[GL(2,\mathbb{R}),GL(2,\mathbb{R})]$:

$$\begin{pmatrix}4&2\\0&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&0\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&2\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\2&4\end{pmatrix} = -\frac18\begin{pmatrix}-2&-2\\0&4\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac18\right)\begin{pmatrix}4&0\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&8\\-4&-8\end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix}-2&-2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-16&32\\16&0\end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix}0&-64\\64&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

↓ inverz od $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ✓

Torej $SL(2,\mathbb{R}) \subset [GL(2,\mathbb{R}),GL(2,\mathbb{R})]$

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{R}) = [GL(2,\mathbb{R}),GL(2,\mathbb{R})]$

$$\Rightarrow \boxed{SL(n,\mathbb{R}) = [GL(n,\mathbb{R}),GL(n,\mathbb{R})],\ n\in\mathbb{N}}$$

□

② $U(n) = \{ Q \in GL(n, \mathbb{C}) \mid Q^H Q = 1 \}$

$SU(n) = \{ Q \in U(n) \mid \det(Q) = 1 \}$ POKAŽI $U(n) \cong SU(n) \rtimes U(1)$

~~Po definiciji poldirektnega produkta SU(n)~~

Po definiciji semidirektnega produkta $U(n) = N \rtimes K$, $N \triangleleft U(n)$, $K < U(n)$

ekvivalentno lahko pokažemo, da $\exists$ homomorfizem $\Psi : U(n) \to K$ in velja $\ker(\Psi) = N$, $\Psi|_K = id_K$

Za Ψ si izberemo determinanto, ki je homomorfizem grup.

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, ~~k~~ Slika determinante za unitarnih matrik so kompleksna števila norme 1. To je grupa $U(1)$. Ker mora veljati $K < U(n)$, bomo za homomorfizem izbrali

$$\Psi(A) := \begin{bmatrix} \det(A) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \Psi(AB) = \begin{bmatrix} \det(AB) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \det B & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

JE RES HOMOMORFIZEM

K je torej grupa matrik oblike $\begin{bmatrix} U(1) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$; $\underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} U(1) & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\right)}$ $= U(1)$

Poglejmo ~~$\Psi|_K = \det(\ldots)$~~

$\Psi|_K = \Psi(k) = \begin{bmatrix} \det(k) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = k \Rightarrow \Psi|_K = id_K$

$k \in K$

$\Rightarrow U(n) = SU(n) \rtimes K$

$\exists$ izomorfizem $\varphi : U(1) \to K$ $\quad \varphi(z) = \begin{bmatrix} z & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$, očitno je izomorfizem.

(za $\forall n \in \mathbb{N}$)

Torej: $U(n) = SU(n) \rtimes K \cong SU(n) \rtimes U(1)$ $\square$

③ $A_4 < S_4$, ~~kosoda A_4~~ le sode permutacije iz grupe S_4. Poišči ~~vse~~ vse ireducibilne karakterje grupe A_4.

Najprej poiščimo elemente A_4.

Elementi S_4:

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1243 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix} = (234)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix} = (243)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1432 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} = (12)(34)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix} = (123)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2413 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} = (124)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix} = (132)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix} = (134)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} = (13)(24)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3421 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix} = (142)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix} = (143)$

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4231 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4312 \end{pmatrix}$ LIHA

$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} = (14)(23)$

$|A_4| = 12$

V S_4 imamo naslednje konjugiranostne razrede: enota, transpozicije, par transpozicij, tricikli, štiricikli.

V A_4 od teh ostane le še enota, par transpozicij in tricikli. Ker pa imamo v grupi A_4 manj elementov kot v S_4 lahko kateri izmed teh razredov razpade. Poglejmo:

enota očitno ostane svoj razred.

V grupi ~~...~~ A_4 imamo 3 elemente, ki so pari transpozicij. Če bi ta razred razpadel, bi dobili vsaj en razred z le enim elementom, kar bi pomenilo, da bi ta element komutiral z vsemi drugimi elementi A_4. Tak element (razen enote) ne obstaja torej ta razred ne razpade.

Preostanejo tricikli.

Poglejmo eksplicitno: Število elementov v konj. razredu (123) je $[A_4 : C_{A_4}((123))]$

$C_{A_4}((123)) = \{ g \in A_4 \mid g(123) = (123)g \}$

$g(123) = (123)g \iff g(123)g^{-1} = (123)$ to bo res ko $(123) = (g(1)\, g(2)\, g(3))$

$(123) = (231) = (312)$ ← 3 možnosti

$\Rightarrow [A_4 : C_{A_4}((123))] = \frac{12}{3} = 4$ elementi.

Poiščimo jih:

$(234)(123)(432) = (134)$

$(234)(134)(432) = (142)$

$(123)(142)(321) = (243)$

$[A_4 : C_{A_4}(231)] \underset{\uparrow}{=} 4$ ← preostali tricikli.

isti trik kot prej

Naši konj. razredi so torej: (enota), $((12)(34), (13)(24), (14)(23))$, $((123), (134), (142), (243))$, $((132), (234), (124), (143))$

4 konj. razredi $\Rightarrow$ 4 neekvivalentne ireducibilne reprezentacije.

Velja $\sum_{i=1}^{4} d_i^2 = |A_4| = 12$ ← to je možno le, če so 3 reprezentacije enodimenzionalne, ena pa tridimenzionalna.

Trivialno reprezentacijo vedno imamo: $\chi(g) = 1$

Za ostali dve 1-D repr. poglejmo: $(123)(123)(123) = (123)(132) = e$ $\quad \rho((123)) = z \quad z^3 = 1$

$\rho(e) = 1$ $\quad z = e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3})}$

$z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}, \; z_2 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}, \; z_3 = 1$

$(123)(123) = (132) \Rightarrow \rho((132)) = z^2$

$(132)(12)(34) = (1)(234)$

$\rho(132) = z^2$

$\rho(234) = z^2$ (ISTI RAZRED)

$\Rightarrow \rho((12)(34)) = 1$

Začnimo kar pisat tabelo iredu. karakterjev

	e (1)	$()()$ (3)	$(123)..$ (4)	$(132)...$ (4)
Γ_1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	$e^{2\pi i/3}$	$e^{4\pi i/3}$
Γ_3	1	1	$e^{4\pi i/3}$	$e^{2\pi i/3}$
Γ_4	3	-1	0	0

~~tako~~ Torej za Γ_4: $\chi(e)=3$ (dimenzija)

$1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+\chi((\cdot\cdot))\cdot 3=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \chi((\cdot\cdot))=-1$

$1\cdot1+1\cdot e^{2\pi i/3}+1\cdot e^{4\pi i/3}+\chi((123))\cdot3=0\Rightarrow$
$\Rightarrow \chi((123))=0$

Zadnji karakter dobimo iz vsote $\sum_{i=1}^{4} d_i\,\chi_i(g)=0,\ g\neq e$

To so res ireducibilni karakterji saj $\langle \chi\chi\rangle=\frac{1}{|A_4|}\sum_{g\in A_4}\chi(g)\overline{\chi}(g)=1$ za vsakega ired. reprezentacij Γ_i.

Preverimo za Γ_4: $\frac{1}{12}(3\cdot3+(-1)(-1)\cdot3)=1$ ✓ Γ_3: $\frac{1}{12}\left[1\cdot1+3\cdot1\cdot1+4\cdot|e^{4\pi i/3}|^2+4|e^{2\pi i/3}|^2\right]=1$
in podobno za Γ_2.

(4) G,H končni. $\rho: G\to GL(V)$, $\tau: H\to GL(W)$ reprezentaciji. $\rho\boxtimes\tau: G\times H\to GL(V\otimes W)$

$(\rho\boxtimes\tau)(g,h)(v\otimes w)=\rho(g)(v)\otimes\tau(h)(w)$

a) $\chi_1(g)=Tr(\rho(g))$

$\chi_2(h)=Tr(\tau(h))$

$\chi_3((g,h))=Tr(\rho(g)\otimes\tau(h)) \overset{\text{velja } Tr(A\otimes B)=TrA\cdot TrB}{=} Tr(\rho(g))\,Tr(\tau(h))=\chi_1(g)\,\chi_2(h)$

b) Ker sta ρ,τ ireducibilni velja ortogonalnostna relacija $\langle\chi_1\chi_1\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi_1(g)|^2=1$

$\langle\chi_2\chi_2\rangle=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\chi_2(h)|^2=1$

Poglejmo za χ_3: $\langle\chi_3\chi_3\rangle=\frac{1}{|G\times H|}\sum_{\substack{g\in G\\h\in H}}|\chi_3((g,h))|^2=$

$\underset{\text{po a) NALOGI}}{=}\frac{1}{|G||H|}\sum_{\substack{g\in G\\h\in H}}|\chi_1(g)|^2|\chi_2(h)|^2=\frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G}|\chi_1(g)|^2\underbrace{\sum_{h\in H}|\chi_2(h)|^2}_{|H|}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi_1(g)|^2=1$

$\Rightarrow$ tudi $\rho\boxtimes\tau$ ireducibilna. □

c) ~~Vse iredu. reprezentacije G velja~~

Za množico vseh neekviv. ired. reprezentacij G velja $\sum_{i=1}^{l}d_i^2=|G|$ (recimo, da jih je l), za grupo H pa $\sum_{i=1}^{m}d_i^2=|H|$ (recimo, da jih je m)

po nalogi b) je za $\forall$ ired. repr. ρ in τ tudi $\rho\boxtimes\tau$ ireducibilna. Poglejmo ~~tako~~ torej

$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}d^2_{\rho_i\otimes\tau_j}\underset{\text{(velja) } \dim(A\otimes B)=\dim A\cdot\dim B}{=}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}d^2_{\rho_i}\,d^2_{\tau_j}=\sum_{i=1}^{l}d^2_{\rho_i}\cdot\sum_{j=1}^{m}d^2_{\tau_j}=|G||H|=|G\times H|$

$\Rightarrow$ to so tudi že vse neekvivalentne ireducibilne reprezentacije $G\times H$. □

(5) G končna Abelova grupa. Množico ireduc. karakterjev $\chi: G \to \mathbb{C}$ označimo z $\hat{G}$

a) Pokaži, da za poljubna $\chi, \chi' \in \hat{G}$ njun produkt $\chi\chi': G \to \mathbb{C}$, $g \to \chi(g)\chi'(g)$ tudi element $\hat{G}$ in da je $\hat{G}$ s to operacijo končna Abelova grupa z enakim številom elementov kot G.
($\hat{G}$ dualna grupa G)

$\rho_1(g): G \to \mathbb{C}$ in $\rho_2(g): G \to \mathbb{C}$ ireducibilni reprezentaciji G.

Tudi $\rho_1 \otimes \rho_2$ je ireducibilna, ker $\dim(\rho_1 \otimes \rho_2) = \dim(\rho_1)\dim(\rho_2) = 1$

$Tr(\rho_1 \otimes \rho_2) = Tr(\rho_1)\,Tr(\rho_2) = \chi_1 \chi_2$ tudi ireducibilen karakter G.

Ali je $\hat{G}$ grupa?

- Zaprto za množenje je
- asociativnost: $(\chi_1\chi_2)\chi_3(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)\chi_3(g) = \chi_1(\chi_2\chi_3)(g)$
- ∃ enota: Trivialna reprezentacija $\chi_e(g) = 1$
- ∃ inverz $\chi_1(g)\chi_1^{-1}(g) = 1 = Tr(\rho_1(g))\,Tr(\rho_1^{-1}(g))$

obstaja, ker $\rho^{-1}(g) = \rho(g^{-1})$

- Abelova $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = (\chi_2\chi_1)(g)$

Velja: $\sum_{i=1}^{\text{št. ired.}} d_i^2 = |G|$, vse reprezentacije Abelove grupe so enodimenzionalne, $\Rightarrow |\hat{G}| = |G|$

b) $\hat{\hat{G}}$ dualna grupa $\hat{G}$. Za $\forall g \in G$ $\phi: \hat{G} \to \mathbb{C}$, $\phi(g)(\chi) = \chi(g)$. Pokaži, da je $\phi(g)$ ireducibilen karakter $\hat{G}$ in da je $\phi: G \to \hat{\hat{G}}$ izomorfizem.

$$\langle \phi(g)\phi(g) \rangle = \frac{1}{|\hat{G}|}\sum_{\chi \in \hat{G}} \phi(g)(\chi)\overline{\phi(g)(\chi)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi \in \hat{G}} |\chi(g)|^2 = \frac{|C_G(g)|}{|G|} \underset{G \text{ ABELOVA}}{=} \frac{|G|}{|G|} = 1$$ ireducibilen karakter

$$\sum_{\chi_i} \chi_i(g)\overline{\chi_i}(h) = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{če sta } g \text{ in } h \text{ konjugirani} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$\phi(gk)(\chi) = \chi(gk) = \chi(g)\chi(k) = \phi(g)(\chi)\,\phi(k)(\chi) = \phi(g)\phi(k)(\chi)$ HOMOMORFIZEM

$|G| = |\hat{\hat{G}}|$ po a) nalogi, ali je ϕ injektivna?

$\forall \chi$ $\chi(g) = 1$, $g \in \ker(\phi)$. ϕ izomorfizem, če $\ker(\phi) = \{e_G\}$

Recimo, da $\exists\, g \neq e_G$, $g \in \ker(\phi)$. Ker so χ_i ireducibilne: $\sum_i d_i \chi_i(g) = 0$ ker $g \neq e_G$ Ampak $\chi_i(g) = 1\ \forall \chi_i$, $d_i > 0\ \forall i \Rightarrow$ PROTISLOVJE.

$\Rightarrow \phi$ izomorfizem.

⑥ Tok vektorskega polja X na gladki mnogoterosti M je gladka preslikava $\phi^X : D^X \to M$, $D^X \overset{ODP}{\subset} \mathbb{R}\times M$, da za $\forall p \in M$ velja:

- $J_p^X = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,p) \in D^X\}$ odprt, $0 \in J_p^X$
- $J_p^X \to M$
  $t \to \phi^X(p,t)$ JE MAKSIMALNA INTEGRALNA KRIVULJA X, KI PRESLIKA 0 V p.

Velja še za $\forall t \in \mathbb{R}$ imamo $D_t^X \overset{ODP}{=} \{p \in M \mid t \in J_p^X\} \subset M$ in difeomorfizem $\phi_t^X : D_t^X \to D_{-t}^X$, $p \to \phi^X(t,p)$

in velja $\forall s,t \in \mathbb{R}$ $\phi_s^X(\phi_t^X(p)) = \phi_{s+t}^X(p)$. X je kompleten, če $D^X = \mathbb{R}\times M$

Dokaži:

a) Vsako vektorsko polje je ϕ_t^X-invariantno za $\forall t \in \mathbb{R}$

Dokazati moramo $\phi_{t*}^X(X) = X$

$$\phi_{t*}^X(X)_p(f) = d\phi_t^X(X_{\phi_t^{X-1}(p)})(f) = d\phi_t^X(X_{\phi_{-t}^X(p)})(f) = X_{\phi_{-t}^X(p)}(f\circ\phi_t^X) = \frac{d}{dt'}\Big|_{t'=0}(f\circ\phi_t^X)(\gamma_{\phi_{-t}^X(p)}(t')) =$$

$$= \frac{d}{dt'}\Big|_{t'=0}(f\circ\phi_t^X)\,\phi_{t'}^X(\phi_{-t}^X)(p) = \frac{d}{dt'}\Big|_{t'=0}(f\circ\phi_{t'}^X)(p) = X_p(f) \Rightarrow \phi_{t*}^X X_p = X_p \quad \square$$

$\forall f \in TM$

b) $f : N \to M$ difeomorfizem za $\forall Y \in \mathfrak{X}(N)$ in za $\forall t \in \mathbb{R}$ je $f(D_t^Y) = D_t^{f_*Y}$ in $f\circ\phi_t^Y = \phi_t^{f_*Y}\circ f|_{D_t^Y}$

$p \in M$

$$(f_*Y)_p(g) = df\, Y_{f^{-1}(p)}(g) = Y_{f^{-1}(p)}(g\circ f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\circ f\circ\phi_t^Y(f^{-1}(p))$$

$$\| $$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\circ\phi_t^{f_*Y}(p)$$

f DIFEOMORFIZEM, $x \in N$

$$\Rightarrow (f\circ\phi_t^Y\circ f^{-1})(p) = \phi_t^{f_*Y}(p), \quad p = f(x) \quad \Rightarrow (f\circ\phi_t^Y)(x) = (\phi_t^{f_*Y}\circ f)(x)$$

$\downarrow$ $p \in D_t^{f_*Y}$ (če ne ni dobro definirano) $\quad\downarrow$ $x \in D_t^Y$

$p \in D_t^{f_*Y}$, $x \in D_t^Y$, $p = f(x)$ (DIFEOMORFIZEM) $\Rightarrow D_t^{f_*Y} = f(D_t^Y)$

Ker to smiselno le za $x \in D_t^Y \subset N$, moramo f rožiti: $f\circ\phi_t^Y = \phi_t^{f_*Y}\circ f|_{D_t^Y}$ $\square$

c) $f : M \to N$ difeomorfizem. Kompleten $X \in \mathfrak{X}(M)$ je f-invarianten če $\forall t \in \mathbb{R}$ $f\circ\phi_t^X = \phi_t^X\circ f$

($\Rightarrow$) f difeomorfizem, X f invarianten $f_*X = X$. Po b) velja $f\circ\phi_t^X = \phi_t^{f_*X}\circ f|_{D_t^X}$

$f|_{D_t^X} = f$, ker X kompleten $\Rightarrow f\circ\phi_t^X = \phi_t^X\circ f$

($\Leftarrow$) Preverimo, če X f-inv.: $(f_*X)_p(g) = X_{f^{-1}(p)}(g\circ f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g\circ f)\,\phi_t^X(f^{-1}(p)) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g\circ\phi_t^X)(f(f^{-1}(p))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g\circ\phi_t^X(p)) = X_p(g) \quad \square$$