3. domača naloga iz Liejevih grup

3. junij 2019

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 30. avgusta 2019.

---

(1) Naj bo $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ algebra kvaternionov. Vsak kvaternion $q \in \mathbb{H}$ lahko predstavimo v obliki

$$q = (t, x, y, z) = (t, \vec{r}),$$

kjer je t skalarni del, $\vec{r} = (x, y, z)$ pa vektorski del kvaterniona. Enotski kvaternioni tvorijo Liejevo grupo, ki jo označimo z

$$S^3 = \{(t, \vec{r}) \mid t^2 + |\vec{r}|^2 = 1\}.$$

Definirajmo translacijsko delovanje grupe $S^3 \times S^3$ na prostoru kvaternionov $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ s predpisom

$$(q_1, q_2) \cdot p = q_1 p q_2^{-1}.$$

Inducirano realno reprezentacijo grupe $S^3 \times S^3$ označimo s $\pi : S^3 \times S^3 \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$.

Naj bo $T \subset S^3$ podgrupa

$$T = \{(\cos\phi, (\sin\phi, 0, 0)) \mid \phi \in [0, 2\pi]\} \cong S^1$$

in $\iota : S^3 \to S^3 \times S^3$ diagonalna vložitev s predpisom $\iota(q) = (q, q)$. Pokaži, da je vsak element $q \in S^3$ konjugiran nekemu elementu T in izračunaj karakter reprezentacije $(\pi \circ \iota)|_T$. Nato zapiši reprezentacijo $\pi \circ \iota : S^3 \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ kot direktno vsoto nerazcepnih reprezentacij grupe S^3.

(2) (a) Klasificiraj vse nerazcepne končnodimenzionalne kompleksne reprezentacije grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ in nato izračunaj njihove karakterje.

(b) Pokaži, da obstajata natanko dve neizomorfni kompleksni reprezentaciji grupe $\mathrm{O}(2)$ na vektorskem prostoru $\mathbb{C}$. Nato konstruiraj nerazcepno kompleksno reprezentacijo grupe $\mathrm{O}(2)$, ki ni enodimenzionalna.

(3) Heisenbergova Liejeva grupa je grupa

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

(a) Pokaži, da je vsaka končnodimenzionalna nerazcepna kompleksna reprezentacija grupe H enodimenzionalna.

(b) Poišči kompleksno reprezentacijo grupe H, ki ni izomorfna direktni vsoti nerazcepnih podreprezentacij.