Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*

Seminarska naloga

Gravitacija iz teorije strun

Avtor
Andrej Kolar - Požun

7. junij 2019

Abstrakt
Teorija strun je že desetletja najobetavnejša kvantna teorija gravitacije. Začnemo z opisom strune preko principa klasične akcije. V nadaljevanju struno kvantiziramo in preiščemo nizkoenergijski del spektra. Na koncu uvedemo efektivno akcijo in iz nje izpeljemo Einsteinove enačbe.

Kazalo

Uvod

Teorija strun je nastala v 60-ih letih prejšnjega stoletja kot kandidat za teorijo močne interakcije. Kot primerna teorija za opis močne interakcije se je sicer kasneje izkazala kvantna kromodinamika (QCD), kar pa ne pomeni, da je teorija neuporabna. Kmalu je namreč teorija strun doživela preobrat - izkazalo se je, da lahko osnovne delce enačimo z različnimi nihajnimi načini strun. Med njimi opazimo tudi brezmasni delec s spinom 2 - graviton, ki posreduje gravitacijsko interakcijo. Strune torej podajajo močno iskano kvantno teorijo gravitacije. Poleg tega je teorija strun ena izmed kandidatov za tako imenovano teorijo vsega - teorijo, ki bi združila in opisala celotno fiziko.

Tekom seminarja bom razložil osnove teorije strun in grobo nakazal, kako jih lahko povežemo z gravitoni in splošno teorijo relativnosti. V 1. poglavju bom začel z relativistično teorijo delca in jo ustrezno posplošil na relativistično teorijo klasičnih strun, katere dinamiko bom v 2. poglavju natančneje raziskal. Tekom 3. in 4. poglavja bom klasično teorijo strune kvantiziral, da bom lahko v 5. poglavju raziskal spekter strune in ga med drugim povezal z nosilci gravitacijske interakcije gravitoni. V 6. poglavju se bom vrnil k akciji strune in pokazal, kako lahko iz strun dobimo Einsteinovo enačbo gravitacije.

1 Klasična akcija relativistične strune

Namen tega poglavja je opisati lastnosti strune preko primerne akcije. Obliko le-te bomo nastavili kot naravno posplošitev akcije za relativističen, točkast delec.

V posebni teoriji relativnosti smo vajeni delati v 4-dimenzionalnem prostoru Minkowskega. Za začetek obravnave strun bodimo splošnejši in delajmo v D dimenzionalnem prostoru, za neko naravno število D, ki je zaenkrat nedoločeno. Posplošitev Minkowske metrike je očitna:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1), \tag{1}$$

kjer je prva komponenta časovna, ostalih $D-1$ pa prostorskih.

Začnimo z opisom relativističnega prostega delca z maso m. Enačbe gibanja narekuje akcija oblike [1]:

$$S = -m \int \mathrm{d}\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}. \tag{2}$$

$X^\mu(\tau)$ je parametrizacija poti delca (svetovnice) skozi naš D dimenzionalni prostor čas. Od tu naprej označimo z X^μ parametrizacijo poti delca in pozneje strune, z x pa označimo prostorske koordinate prostor-časa.

Pri obravnavi strun nam bodo v veliko pomoč simetrijske lastnosti akcije. Zato se splača na tem bolj znanem primeru pogledati simetrije akcije (2):

- Očitno je, da fizika ne sme biti odvisna od načina parametrizacije svetovnice. Sprememba parametrizacije je transformacija tipa $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$. Invariantnost na parametrizacijo najlažje vidimo, če se spomnimo, da lahko akcijo napišemo tudi v obliki

$$S = -m \int \mathrm{d}s, \tag{3}$$

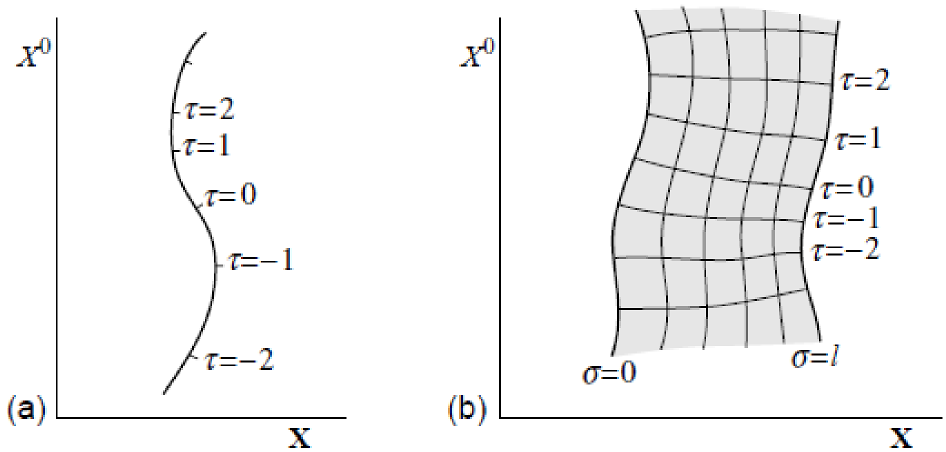
  kjer je ds infinitezimalni element invariantne dolžine. $\int \mathrm{d}s$ torej predstavlja dolžino svetovnice, ki je seveda čisto geometrijska lastnost in je neodvisna od parametrizacije. Invariantnost na reparametrizacijo je torej prva simetrija zgornje akcije.

- Po konstrukciji je akcija invariantna na Lorentzove transformacije in - ker gre za prost delec - tudi na poljubne translacije v prostor-času. Akcija je torej invariantna na simetrije, ki ustrezajo Poincarejevi grupi oziroma eksplicitno, invariantna je na transformacije oblike:

$$X^\mu \to \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu, \tag{4}$$

  kjer je Λ^μ_ν matrika Lorentzove transformacije, a^μ pa konstanten vektor.

Sedaj pomislimo, kakšna naj bo smiselna akcija strune. Na Sliki 1. opazimo, da za razliko od delca, katerega pot opiše krivujo - svetovnico (angleško worldline), opiše struna skozi čas neko 2-dimenzionalno ploskev, ki ji pravimo worldsheet (slovensko svetovni list, vendar bo tekom seminarja uporabljen angleški izraz). Za parametrizacijo dvo dimenzionalnih ploskev potrebujemo 2 parametra $X^\mu = X^\mu(\sigma, \tau)$, kjer rečemo, da ima τ bolj časovno vlogo in predstavlja gibanje celotne strune (torej kot τ pri delcu) σ pa nam grobo rečeno parametrizira eno dimenzionalno struno ob nekem času.



Slika 1: Na levi je prikazana svetovnica točkastega delca. y os ustreza času, x os pa prostorskim koordinatam. Gibanje delca opiše krivuljo, parametrizirano s τ. Na desni je prikazan primer strune, kjer je gibanje celotne strune spet parametrizirano z τ, σ pa nam parametrizira struno ob fiksnem τ. [2]

Pri točkastem delcu, je bila akcija sorazmerna z dolžino svetovnice. Naravna posplošitev je, da bo v primeru dvodimenzionalne ploskve, akcija sorazmerna ploščini worldsheet-a. Takšna akcija je očitno spet invariantna na reparametrizacijo. Metrika Minkowskega inducira na worldsheet-u metriko [3]:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}, \tag{5}$$

kjer smo definirali $\sigma^\mu = (\tau, \sigma)$. Ploščino lahko sedaj izračunamo kot Lorentzovo invariantni integral po worldsheet-u. Akcija je torej:

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det\gamma}, \tag{6}$$

kjer je T sorazmernostna konstanta, analogna masi v primeru točkastega delca. Izkaže se, da T predstavlja maso na enoto dolžine strune [3]. Če tenzor $\gamma_{\alpha\beta}$ eksplicitno razpišemo in s piko označimo odvod po τ, z apostrofom pa po σ naša akcija postane:

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2 + (\dot{X} \cdot X')^2}, \tag{7}$$

kjer smo z $A \cdot B$ označili $A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu}$. Zgornja akcija se imenuje Nambu-Goto akcija in opisuje klasično gibanje relativistične strune. Dejstvo, da se odvodi parametrizacije X^μ v Nambu-Goto akciji pojavijo pod korenom je nadležno in oteži kakršnokoli nadaljno obravnavo strun. Zaradi tega poiščimo akcijo, kjer X^μ ne nastopa pod korenom. Pokazali bomo, da je tako imenovana Polyakova akcija

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{8}$$

ekvivalentna Nambu-Goto akciji. Poleg tega bomo videli, da ima Polyakova akcija še dodatno pomembno simetrijo. V zgornji akciji smo uvedli novo polje $g_{\alpha\beta}$ - dinamično metriko na worldsheet-u in označili $g =$

det(g). Poglejmo, kakšne so enačbe gibanja za dotično polje: Varirajmo metriko $g^{\alpha\beta} \to g^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}$ in zahtevajmo, da je variacija akcije δS enaka nič. Velja $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$. Variacija akcije je torej:

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-g}(\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu)\delta g^{\alpha\beta} \tag{9}$$

Iz enačbe $\delta S = 0$ razberemo $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = 2f(\sigma,\tau)\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X = 2f(\sigma,\tau)\gamma_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$f^{-1} = g^{\rho\sigma}\partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X, \tag{11}$$

Če enačbo za $g_{\alpha\beta}$ vstavimo v Polyakovo akcijo, dobimo:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-4f^2\ \mathrm{det}\gamma}\ \frac{f^{-1}}{\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X}\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \tag{12}$$

$$S = -T\int d^2\sigma \frac{f}{f}\sqrt{-\mathrm{det}\gamma} = -T\int d^2\sigma\sqrt{-\mathrm{det}\gamma} \tag{13}$$

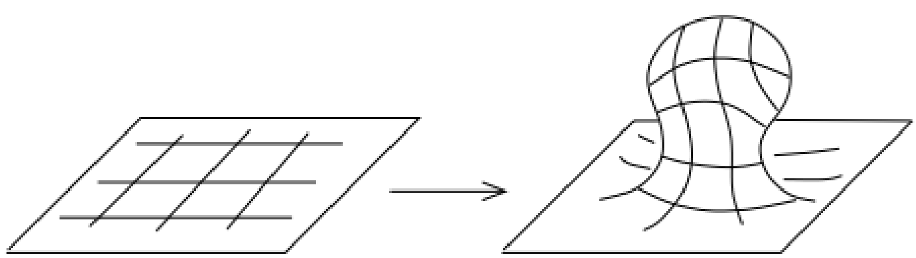
Opazimo, da se f pokrajša in dobimo spet Nambu-Goto akcijo. Polyakova akcija ji je torej ekvivalentna. Posledično je seveda tudi Polyakova akcija invariantna na Lorentzovo transformacijo in na reparametrizacijo worldsheet-a. Vendar pa ima Polyakova akcija še dodatno simetrijo. Poglejmo si transformacijo

$$g_{\alpha\beta}(\sigma,\tau) \to \Omega^2(\sigma,\tau)g_{\alpha\beta}(\sigma,\tau). \tag{14}$$

Očitno je Polyakova akcija invariantna na tako transformacijo metrike $g_{\alpha\beta}$, saj se funkcija (tako imenovani konformni faktor) Ω^2 v akciji pokrajša, podobno kot se je pokrajšala funkcija f. Takšna transformacija se imenuje Weylova transformacija, infinitezimalno pa jo lahko napišemo kot

$$\delta g_{\alpha\beta}(\sigma,\tau) = 2\phi(\sigma,\tau)g_{\alpha\beta}(\sigma,\tau), \tag{15}$$

kjer smo definirali $\Omega^2 = e^{2\phi}$. Transformacija oblike (14) nam lokalno reskalira metriko, kar geometrijsko pomeni, da se lokalno razdalje spremenijo, koti pa ostajajo enaki (lokalno v tem kontekstu pomeni, da je reskalacija odvisna od koordinat na worldsheet-u σ, τ). Teorija, ki je invariantna na Weylovo transformacijo se imenuje konformno invariantna teorija. V teoriji strun je konformna invariantnost ključnega pomena in, kot bomo videli v 6. poglavju, nam bo ravno zahteva po konformni invariantnosti dala Einsteinovo enačbo.



Slika 2: Primer Weylove transformacije metrike. Sprememenjena metrika lahko izgleda precej drugače, vendar ostanejo lokalno koti enaki. Na desni sliki so tako koti med črtami po transformacji še vedno $\pi/2$ [3]

2 Enačbe gibanja klasične strune

Od tu naprej se bomo zaradi enostavnosti omejili na zaprto struno, kar pomeni, da bo veljalo

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi,\tau). \tag{16}$$

To storimo, da se izognemo potrebi po obravnavi robnih pogojev strune. Obravnavo odprtih strun lahko bralec najde v literaturi [2, 3].

Sedaj opazimo naslednje: Dinamična metrika $g_{\alpha\beta}$ ima tri neodvisne komponente, saj je simetrična. Po reparametrizaciji, se metrika spremeni na naslednji način:

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\tilde{\sigma}^\alpha}\frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\tilde{\sigma}^\beta}g_{\gamma\delta}(\sigma), \tag{17}$$

kar pomeni, da lahko dve od treh komponent dinamične metrike s primerno parametrizacijo postavimo na poljubno vrednost. Metriko lahko zato napišemo kot

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Če upoštevamo, da imamo še konformno simetrijo, lahko postavimo $\phi = 0$ in dinamična metrika postane Minkowska $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Polyakova akcija se s tem močno poenostavi:

$$S = -\frac{T}{2}\int \mathrm{d}^2\sigma\ \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X. \tag{19}$$

S pomočjo simetrij smo torej dobili preprosto akcijo - akcijo D prostih, brezmasniih skalarnih polj (Kjer X^μ predstavlja skalarno polje za vsako vrednost μ). Enačba gibanja je torej valovna enačba:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu = 0. \tag{20}$$

Vendar morajo X^μ zadostiti tudi enačbo gibanja metrike $g_{\alpha\beta}$. V tem primeru je uporabnejša oblika, ki jo razberemo direkt iz variacije (9) in upoštevamo, da je $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$:

$$\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\ \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X = 0 \tag{21}$$

Sledijo enačbi:

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \tag{22}$$

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \tag{23}$$

kjer prvo enačbo dobimo, če v (21) vstavimo $\alpha = 0, \beta = 1$, drugo pa, če vstavimo $\alpha = \beta$. Zadnji enačbi predstavljata vezi, katerima mora zadoščati struna, ki je rešitev valovne enačbe. Fizikalni pomen vezi je lahko videti v tako imenovani statični umeritvi [3]:

$$X^0 = t = R\tau, \tag{24}$$

kjer je R neka konstanta. Statično umeritev lahko uporabimo, ker se izkaže [3], da nam tudi po fiksiranju dinamične metrike na $\eta_{\alpha\beta}$ za to ostane dovolj svobode. Če pišemo $X^\mu = (t, \vec{x})$, opazimo, da za prostorski del $\vec{x}$ tudi velja valovna enačba:

$$\ddot{\vec{x}} - \vec{x}'' = 0 \tag{25}$$

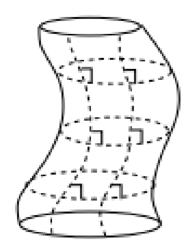
vezi pa se prepišejo v:

$$\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' = 0 \tag{26}$$

$$\dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 = R^2 \tag{27}$$

$\dot{\vec{x}}$ predstavlja hitrost dela strune, medtem ko si lahko $\vec{x}'$ predstavljamo, kot vektor, ki je ob fiksnem času tangenten na struno. Prva vez nam torej pove, da se struna giblje v smeri, ki je pravokotno nanjo. Z drugimi besedami, nihajni načini strune so transverzalna nihanja. Ekvivalentna izjava je, da so v tem primeru krivulje na worldsheet-u s konstantnim σ pravokotne na te s konstantnim τ, kot lahko vidimo, na Sliki 3 [3].

Druga vez pravi, da je ob času, ko velja $\dot{\vec{x}} = 0$ dolžina struna povezana z R, saj vemo, da je dolžina krivulje sorazmerna integralu $\vec{x}'$. V primerih $\dot{\vec{x}} \neq 0$ vez pove, kako se dolžina strune spreminja.



Slika 3

Naš naslednji cilj je rešitev valovne enačbe z danimi vezmi. Za začetek na worldsheet-u uvedemo nove koordinate, tako imenovane koordinate svetlobnega stožca:

$$\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma. \tag{28}$$

Koordinate svetlobnega stožca se bodo izkazale za zelo pripravne, zato povejmo o njih še nekaj več. Metrika na worldsheet-u se po taki transformaciji izraža kot:

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^- \tag{29}$$

Naslednja transformacija

$$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+(\sigma^+), \tag{30}$$
$$\sigma^- \to \tilde{\sigma}^-(\sigma^-) \tag{31}$$

našo metriko samo pomnoži z nekim faktorjem in jo lahko spet damo v obliko (29) z Weylovo transformacijo. Valovna enačba se v koordinatah svetlobnega stožca glasi:

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \tag{32}$$

Očitno lahko rešitev take enačbe napišemo v obliki

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-). \tag{33}$$

Oznaki L in R fizikalno pomenita levo oziroma desno potujoče valove, vsakega izmed teh lahko razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+}, \tag{34}$$

$$X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}. \tag{35}$$

Za interpretacijo posameznih členov razpišimo celotni X^μ:

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu (\sigma^+ + \sigma^-) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \right). \tag{36}$$

Tu x^μ predstavlja težišče strune. Ostali členi tako predstavljajo odmik strune od težišča. p^μ predstavlja gibalno količino težišča, za katero iz teorije prostih skalarnih polj vemo, da je ohranjena [4]. Izbira faktorja pred p^μ postane jasna pozneje [3], vendar ga lahko na grobo vseeno upravičimo: $0.5(\sigma^+ + \sigma^-)$ je smiselen, saj je to ravno čas τ. α' pa se z napetostjo strune T izraža kot $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$ [3] in nam med drugim zagotovi prave enote. $i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu$ in analogno za $\tilde{\alpha}_n^\mu$ pa so koeficienti Fourierovega razvoja, kjer smo jih na takšen način zapisali spet zaradi razlogov, ki bodo takoj postali jasni.

Poglejmo si, kako na rešitev vplivajo vezi (22), ki se v koordinatah svetlobnega stožca glasijo

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0 \tag{37}$$

Brez težav lahko izračunamo

$$\partial_- X^\mu = \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-}, \tag{38}$$

kjer smo definirali $\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$. Vez se tako glasi

$$(\partial_- X)^2 = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_m \cdot \alpha_p e^{-i(m+p)\sigma^-} = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_m \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^-} = \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-} = 0, \tag{39}$$

kjer smo definirali $L_n = \frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m$. Zadnja vsota v zgornji enačbi nam pove, da bo vezi zadoščeno le, če velja $L_n = 0$ za vsak n, saj mora vsak člen v vsoti biti nič ($e^{-in\sigma^-}$ so linearno neodvisni za različne n). Podoben pogoj dobimo iz enačbe $(\partial_+ X)^2 = 0$, le da L_n nadomestimo z $\tilde{L}_n = \frac{1}{2}\sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m$, kjer je $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$. Tako se obe vezi preprosto glasita:

$$L_n = \tilde{L}_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

Vredno si je pobliže pogledati enačbi $L_0 = \tilde{L}_0 = 0$. Ti enačbi namreč vsebujeta kvadrat gibalne količine, mi pa vemo, da za delce velja

$$p_\mu p^\mu = -M^2 \tag{41}$$

Upoštevajoč to zvezo lahko enačbi preoblikujemo v

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'}\sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n} \tag{42}$$

Z zgornjo enačbo lahko nekemu nihajnemu načinu strune priredimo maso. Videli bomo, da velja podobna formula tudi po kvantizaciji strune in ta nam bo pomagala klasificirati spekter strune.

3 Priprava na kvantizacijo strune

Do zdaj smo obravnavali klasični opis strune. Naš naslednji korak je struno kvantizirati in pogledati, kakšna so stanja, ki jih tako pridobimo. Pri tem nam bo pomagala pridobljena intuicija o klasičnih rešitvah iz prejšnjega poglavja, saj bomo naša polja X^μ najprej nastavili tako, da bodo zadoščala vezem (37) in jih šele potem zares kvantizirali.

Za začetek, kot v prejšnjem poglavju gremo v koordinate svetlobnega stožca:

$$X^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}}(X^0 \pm X^{D-1}), \tag{43}$$

kjer X^0 časovna komponenta igra podobno vlogo kot τ v prejšnjem poglavju, prostorsko komponento σ pa smo nadomestili z X^{D-1}, kar je pač naša izbira. Za razliko od prejšnjega poglavja, kjer smo imeli opravka z le dvema koordinatama na worldsheet-u nam zdaj ostane še $D-2$ ostalih polj X^μ. Metriko za koordinate svetlobnega stozca smo ze napisali, za ostala polja pa imamo čisto navadno, evklidsko metriko:

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{i=1}^{D-2} dX^i dX^i, \tag{44}$$

kjer ima prvi člen faktor 2, ker imamo v definiciji koordinat svetlobnega štozca polovico pod korenom. Enačba gibanja za vsak X^μ - torej tudi za X^0 in X^{D-1} - je valovna enačba (20). Iz prejšnjega poglavja pa vemo, da v tem primeru lahko v koordinatah svetlobnega stožca rešitev zapišemo kot.

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_r^+(\sigma^-) \tag{45}$$

Z izbiro primernih koordinat lahko ti polji zapišemo na posebej enostaven način (to je tako imenovana umeritev svetlobnega stožca [3]):

$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+ \tag{46}$$

$$X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^- \tag{47}$$

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau \tag{48}$$

S tem smo izkoristili vso svobodo reparametrizacij koordinat, kar pomeni, da bomo morali ostala polja res izračunati. Naredimo to za polje X^-. Kot za X^+ vemo, da lahko splošno rešitev napišemo kot

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-). \tag{49}$$

Poglejmo si vez $(\partial_+ X)^2 = 0$:

$$2\partial_+ X^- \partial_+ X^+ = \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \tag{50}$$

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \tag{51}$$

kjer smo uporabili dejstvo, da velja $\partial_+ X^+ = 0.5\ \alpha' p^+$. Podobno iz vezi $(\partial_- X)^2 = 0$ dobimo

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i. \tag{52}$$

Sledi, da lahko odvode X^- izrazimo iz ostalih polj X^i. Kar pomeni, da je X^- do konstante natančno določen z ostalimi polji. Če polja X^- (in analogno X^i) podobno kot v prejšnjem poglavju napišemo kot

$$X_L^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \tag{53}$$

$$X_R^-(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} i\alpha_n^- e^{-in\sigma^-} \tag{54}$$

Lahko Fourierove koeficiente X^- izrazimo s Fourierovimi koeficienti X^i. Vezi v pravkar izpeljani obliki takoj dajo:

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} \frac{1}{p^+} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \tag{55}$$

Primer $\alpha_0^- = \sqrt{\alpha'/2}p^-$, ki pride iz drugega člena v X_R^- je poseben in se izraža kot:

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right). \tag{56}$$

Podobno dobimo za $\tilde{\alpha}_0^-$ iz pogoja za X_L^-:

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{1}{2}\alpha' p^i p^i + \sum_{n\neq 0} \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{-n}^i \right). \tag{57}$$

Če zadnji enačbi seštejemo dobimo

$$M^2 = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i \tag{58}$$

S pomočjo te enačbe bomo lahko stanjem strune pripisali neko maso in jih razumeli kot različne delce. Podobno zvezo smo klasično dobili že v prejšnjem poglavju s to razliko, da zdaj imamo vsote po več Fourierovih načinih (tako imenovanih transverzalnih načinih) α_n^i, $\tilde{\alpha}_n^i$, saj gre i od 1 do $D-2$.

4 Kvantizacija strune

V prejšnjem poglavju smo izkoristili simetrije Polyakove akcije, poenostavili X^+ in pri zapisu X^- upoštevali dane vezi (37). Zdaj bomo teorijo kvantizirali.

Začnimo tako, da polja X^μ in pripadajoče momente Π_μ [4] promoviramo v operatorje in privzamemo naslednje komutacijske relacije:

$$[X^\mu(\sigma,\tau),\Pi_\nu(\sigma',\tau)] = i\delta(\sigma-\sigma')\delta^\mu_\nu, \tag{59}$$
$$[X^\mu(\sigma,\tau),X^\nu(\sigma',\tau)] = 0, \tag{60}$$
$$[\Pi_\mu(\sigma,\tau),\Pi_\nu(\sigma',\tau)] = 0. \tag{61}$$

Tukaj smo se za trenutek vrnili k opisu worldsheet-a s polji $X^\mu, \mu = 0, 1, \dots D-1$. K umeritvi svetlobnega stožca se bomo vrnili v kratkem. S pomočjo Fourierovega razvoja polj X^μ (36) iz zgornjih komutacijskih pravil dobimo:

$$[x^\mu, p_\nu] = i\delta^\mu_\nu \tag{62}$$
$$[\alpha^\mu_n, \alpha^\nu_m] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \tag{63}$$
$$[\tilde{\alpha}^\mu_n, \tilde{\alpha}^\nu_m] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \tag{64}$$

Če se sedaj vrnemo v umeritev svetlobnega stožca, lahko iz zgornjih komutacijskih pravil izpeljemo [3]

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \tag{65}$$
$$[x^-, p^+] = -i, \tag{66}$$
$$[x^+, p^-] = -i, \tag{67}$$
$$[\alpha^i_n, \alpha^j_m] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \tag{68}$$
$$[\tilde{\alpha}^i_n, \tilde{\alpha}^j_m] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \tag{69}$$

kjer v zadnjih komutatorjih indeksa i in j seveda gresta le od 1 do $D-2$. Zadnja komutatorja lahko damo v bolj domačo obliko z definicijami:

$$a^i_n = \frac{\alpha^i_n}{\sqrt{n}}, \tag{70}$$

$$a^{i\dagger}_n = \frac{\alpha^i_{-n}}{\sqrt{n}}, \tag{71}$$

kjer smo se omejili na $n > 0$. Kot že oznaka pove, za na novo definirane a_n, $a^\dagger_n$ veljajo kanonične komutacijske relacije za bozonske operatorje:

$$[a^i_n, a^{i\dagger}_m] = \delta_{mn}. \tag{72}$$

Analogno iz operatorjev $\tilde{\alpha}^i_n$ dobimo $\tilde{a}^i_n$ in $\tilde{a}^{i\dagger}_n$, ki ubogajo iste komutacijske relacije. Na tej točki je primerno dati kratek komentar: kot vidimo, strune opišemo z bozonskimi operatorji. Takim strunam pravimo bozonske strune in same po sebi niso popoln opis realnosti, saj njihov spekter ne da nobenih fermionov. V tem seminarju obravnavamo le bozonske strune in, čeprav to ni kompleten model, bomo vseeno videli, da dobimo nekaj realnih in zanimivih rezultatov. Kot ponavadi pri opravku z bozonskimi operatorji definiramo vakuum kot stanje, ki ga anihilirajo vsi anihilacijski operatorji, torej:

$$a^i_n|0\rangle = \tilde{a}^i_n|0\rangle = 0, \tag{73}$$
$$\alpha^i_n|0\rangle = \tilde{\alpha}^i_n|0\rangle = 0, n > 0 \tag{74}$$

Vakuumsko stanje je stanje, kjer nimamo vzbujenih transverzalnih nihajnih načinov. S pomočjo kreacijskih operatorjev lahko tako vzbujamo poljubne načine nihanja strune, ki bodo (kot bomo videli) ustrezali različnim osnovnim delcem. Vendar za karakterizacijo našega stanja ni dovolj le povedati, kateri nihajni načini so vzbujeni - med operatorji, ki na struno delujejo je tudi operator gibalne količine p^μ. Lastna stanja le tega ponavadi označimo na naslednji način:

$$\hat{p}^\mu|p\rangle = p^\mu|p\rangle, \tag{75}$$

kjer $|p\rangle$ predstavlja stanje z dobro definirano gibalno količino, $\hat{p}^\mu$ na levi predstavlja operator gibalne količine, na desni pa njegovo lastno vrednost. Stanje strune torej karakteriziramo z njeno gibalno količino in število posameznih vzbujenih nihanj. Zaradi tega Fockov vakuum, ki ga anihilirajo vsi anihilacijski operatorji ni nujno pravi vakuum, saj imamo stanja oblike $|p, 0\rangle$, ki predstavljajo struno, ki se z neko gibalno količino giblje, a ne niha. Pravi vakuum seveda ustreza mirujoči struni $|0, 0\rangle$. Označevanje stanj na ta način ima fizikalno interpretacijo - če zasedbeno število posameznih bozonov, ki pripadajo različnim nihajnim načinom ustreza različnim tipom delcev, potem gibalna količina strune seveda ustreza gibalni količini dotičnih delcev. Kot smo že večkrat omenili, nam bo pri karakterizaciji stanj pomagala enačba (58), ki smo jo v prejšnjem poglavju izpeljali s pomočjo umeritve svetlobnega stožca. Po kvantizaciji se ta enačba glasi:

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i - a\right) = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i - a\right). \tag{76}$$

V zgornji enačbi seveda α_n^i razumemo kot operatorje z zgornjimi komutacijskimi relacijami. V enačbi za M^2 smo morali prišteti konstanto $-\frac{4a}{\alpha'}$. Razlog za to je sledeč: Po kvantizaciji α_n^i in α_{-n}^i ne komutirata, in je njun vrstni red v členih zgornje vsote pomemben. V naprej ne vemo, kakšen je pravilen vrstni red in smo si pač izbrali, da bodo kreacijski operatorji na levi anihilacijski pa na desni. Če je ta izbira napačna, se napaka izraža kot aditivna konstanta, ki pride iz komutatorjev napačno postavljenih operatorjev. Informacijo o tej napaki pospravimo v zaenkrat še neznano konstanto a.

Bolj za idejo sledi ne ravno najbolj korektna izpeljava parametra a. Korektnejšo izpeljavo lahko bralec najde v [3]. Recimo, da začnemo kar s klasičnim rezultatom $L_0 = 0$:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n\neq 0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \tag{77}$$

$$= \frac{2}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\left(\sum_{n<0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i\right) \tag{78}$$

Recimo, da se kar tu odločimo, da promoviramo α_n^i v opertaorje z bozonsko algebro in jih uredimo na isti način kot zgoraj - tako, da so kreacijski na levi. Dobimo:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\sum_{i=1}^{D-2}\left(\sum_{n<0}(\alpha_n^i\alpha_{-n}^i + 1) + \sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i\right) \tag{79}$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}2\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + (D-2)\sum_{n>0}1\right) \tag{80}$$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \frac{D-2}{2}\sum_{n>0}1\right) \tag{81}$$

Iz zadnje vrstice lahko tako razberemo

$$a = -\frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}1 = \frac{D-2}{24}, \tag{82}$$

kjer smo uporabili tako imenovano regularizacijo s pomočjo Riemannove zeta funkcije $\sum_{n=1}^{\infty}1 = -\frac{1}{12}$ [3]. Sedaj lahko a vstavimo v enačbo za M^2 in dobimo

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i - \frac{D-2}{24}\right) = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i - \frac{D-2}{24}\right) \tag{83}$$

Iz zgornje enačbe lahko razberemo še, da mora veljati

$$\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \sum_{i=1}^{D-2}\sum_{n>0}\tilde{\alpha}_{-n}^i\tilde{\alpha}_n^i, \tag{84}$$

oziroma, da mora število vzbujenih načinov α_n^i N biti enako številu vzbujenih načinov $\tilde{\alpha}_n^i$ $\tilde{N}$.

5 Spekter strune

V tem poglavju bomo z kreacijskimi operatorji delovali na Fockov vakuum $|p, 0\rangle$ in si ogledali delce, ki jih s tem dobimo in njihove pripadajoče mase. Stanje $|p, 0\rangle$ ustreza tako imenovanem tahionu, ki ima nenavadne lastnosti in predstavlja enega izmed problemov teorije strun. V obravnavanje tahionov se ne bomo spuščali, več lahko bralec najde v npr. [2, 3]. Poglejmo si, kakšna stanja dobimo, če na Fockov vakuum delujemo z enim kreacijskim operatorjem α^i_{-1}. Iz argumenta na koncu prejšnjega poglavja sledi, da moramo v tem primeru delovati tudi z enim izmed kreacijskih operatorjev $\tilde{\alpha}^j_{-1}$. Torej imamo stanja

$$\tilde{\alpha}^i_{-1}\alpha^j_{-1}|p, 0\rangle \tag{85}$$

za poljubne $i, j = 1, 2, \ldots, D-2$ iz česar sledi, da je takih stanj $(D-2)^2$. Poljubnemu stanju po formuli (83) ustreza masa

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(1 - \frac{D-2}{24}\right). \tag{86}$$

Izkaže se, da lahko iz zgornje enačbe razberemo ustrezno dimenzijo prostor-časa v katerem živijo strune D. Pri tem bo pomembno naslednje dejstvo, ki ga do sedaj nismo poudarjali: Opis strune smo začeli s Polyakovo akcijo, ki je bila Lorentzovo (celo Poincarejevo) invariantna. V splošnem ni nujno, da se lastnost Lorentzove invariantnosti po kvantizaciji teorije ohranja - to je treba posebej preveriti. Jasno, da od smiselne fizikalne teorije pričakujemo Lorentzovo invariantnost.

Operatorji α^j_{-1} in $\tilde{\alpha}^i_{-1}$ se transformirajo kot vektorji pod reprezentacijo $SO(D-2)$ grupe, ki je podgrupa Lorentzove grupe $SO(1, D-1)$. Zaradi zahteve po Lorentzovi invariantnosti želimo, to razširiti na reprezentacijo celotne grupe $SO(1, D-1)$. V nadaljevanju se spomnimo nekaj dejstev iz reprezentacij Poincarejeve grupe (Več o tem si lahko bralec prebere v [5]): Če imamo opravka z masivnimi delci, gremo lahko vedno v sistem kjer delec miruje, torej $p^\mu = (p, 0, \ldots, 0)$, kjer reprezentacije določa mala grupa $SO(D-1)$. Iz tega sledi, da morajo naši masivni delci tvoriti reprezentacijo $SO(D-1)$. Vendar pa imamo mi opravka z $(D-2)^2$ delci in toliko delcev je nemogoče spraviti v reprezentacijo $SO(D-1)$ grupe [3]. Reši nas teorija reprezentacij brezmasnih delcev Poincarejeve grupe. Mala grupa v tem primeru je namreč $SO(D-2)$, katere reprezentacijo lahko tvori $(D-2)^2$ delcev. Torej, če zahtevamo, da ima naša teorijo Poincarejevo (in torej tudi Lorentzovo) simetrijo, morajo biti stanja, ki jih pridobimo z delovanjem z parom kreacijskih operatorjev $\alpha^j_{-1}, \tilde{\alpha}^i_{-1}$ brezmasna. Iz formule za maso teh stanj potem razberemo dimenzijo prostor časa $D = 26$.

Še vedno pa velja, da se operatorji α^j_{-1} transformirajo kot vektorji pod $SO(24)$. Torej stanja, ki jih dobimo z delovanjem dveh takšnih operatorjev tvorijo $24 \otimes 24$ reprezentacijo $SO(24)$. Izkaže se, da je ta razcepna [3] in razpade na 3 nerazcepne reprezentacije:

- Prva je antisimetrična reprezentacija in ji ustrezajo brezmasna polja, ki jih ponavadi označimo z $B_{\mu\nu}$. To so tako imenovana Kalb-Ramondova polja in jih ne bomo podrobneje obravnavali.
- Druga je singlet (zgolj sled razcepne matrike), ki ji pripada skalarno polje Φ in se imenuje dilaton.
- Tretja pa je brezsledna simetrična reprezentacija, ki jo označimo z $G_{\mu\nu}$. To je brezmasni delec s spinom 2 - graviton.

Ker je polje $G_{\mu\nu}$ povezano z gravitacijo, ga lahko identificiramo z metriko prostor časa. Preden nadaljujemo pa si poglejmo preprost argument za to, da polje $G_{\mu\nu}$ res ustreza gravitaciji. Pozabimo na trenutek na kakršnekoli strune in si oglejmo klasičen opis splošne relativnosti. Recimo, da našo metriko $G_{\mu\nu}$ razvijemo okoli ravne, Minkowski metrike:

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{87}$$

Če zgornji izraz za metriko vstavimo v Einstein-Hilbertovo akcijo [6] $S_{EH} \propto \int d^4x\sqrt{-G}R$ dobimo v kvadratnem redu:

$$S_{EH} \propto \int d^4x \left(\partial_\mu h^\rho_\rho \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^\rho h^{\mu\nu}\partial_\mu h_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho h^{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\nu_\nu \partial^\mu h^\rho_\rho + \mathcal{O}(h^3)\right). \tag{88}$$

V teoriji polja predstavlja akcija zgornje oblike brezmasno polje s spinom 2. Poleg tega je zgornja akcija invariantna na difeomorfizem $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$, za neko funkcijo ξ. Takšna simetrija je po kvantizaciji nujna za odstranitev nefizikalnih stanj z negativno normo [3]. Zgornji postopek lahko naredimo tudi v drugo stran - recimo, da začnemo z brezmasnih poljem s spinom 2. Teorija s takšnim delcem mora - da se ne pojavljajo stanja z negativno normo - biti v linearnem redu invariantna na neko umeritveno transformacijo [3]. Ta simetrija mora obstati tudi, ko v teorijo vpeljemo interakcije - nelinearne člene. Izkaže se, da je to možno le, če je teorija invariantna na difeomorfizme iz česar sledi, da teorija ustreza Einsteinovi gravitaciji [3]. Od tod sledi, da vsaka kvantna teorija brezmasnih delcev s spinom 2 ustreza gravitaciji, torej tudi $G_{\mu\nu}$.

Za konec si poglejmo kako je z naslednjimi vzbujenimi stanji strune. Ker mora veljati $N = \tilde{N}$ so možna stanja enaka

$$(\alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1} \oplus \alpha^i_{-2}) \otimes (\tilde{\alpha}^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1} \oplus \tilde{\alpha}^i_{-2})|p, 0\rangle, \tag{89}$$

ki imajo maso $M^2 = 4/\alpha'$. Masa teh delcev (in tudi kakih še višjih vzbujenih stanj strune) je zelo velika, kar pomeni, da jih zelo težko zaznamo v kakršnihkoli eksperimentih. Za nas najpomembnejši delci torej izhajajo iz prej opisanih prvih vzbujenih stanj.

6 Efektivna akcija

V tem poglavju bomo na grobo obdelalli efektivno akcijo, ki strune opiše pri nizkih energijah. Videli bomo, da bo iz take akcije sledil znan rezultat. Najprej posplošimo Polyakovo akcijo, ki smo jo videli v prvem poglavju:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X). \tag{90}$$

Namesto z napetostjo strune T smo akcijo tukaj napisali s parametrom α' in ubrali drugačno konvencijo glede predznakov. Najpomembnejša razlika je prisotnost faktorja $G_{\mu\nu}$ v akciji, ki predstavlja neko splošno metriko prostora v kateri se struna nahaja. Spomnimo, da smo prej v akciji imeli Minkowski metriko $\eta_{\mu\nu}$. Podobno kot v prejšnjih poglavjih lahko Polyakovo akcijo s pomočjo konformne simetrije močno poenostavimo [3]:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu. \tag{91}$$

V 2. poglavju smo lahko s pomočjo danih simetrij akcijo spravili v obliko akcije D skalarnih polj. Enačba gibanja za polja je potem bila preprosto valovna enačba (sicer z vezmi). V tem primeru imamo v akciji še faktor $G_{\mu\nu}$, ki akcijo zakomplicira in enačb gibanja ne moremo preprosto rešiti. Zateči se moramo k približkom in sicer rečemo, da naše polje X^μ le malo fluktuira od nekega težišča $\tilde{x}^\mu$:

$$X^\mu(\sigma) = \tilde{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\sigma). \tag{92}$$

Faktor $\sqrt{\alpha'}$ je tu zaradi enot, za dinamične fluktuacije Y^μ pa privzamemo, da so majhne. Lagrangian lahko potem razvijemo po Taylorju okoli $\tilde{x}$:

$$G_{\mu\nu}(X)\partial X^\mu \partial X^\nu = \alpha' \left(G_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \sqrt{\alpha'} \partial_\omega G_{\mu\nu}(\tilde{x}) Y^\omega + \frac{\alpha'}{2} \partial_\omega \partial_\rho G_{\mu\nu}(\tilde{x}) Y^\omega Y^\rho + \dots \right) \partial Y^\mu \partial Y^\nu \tag{93}$$

Opazimo, da po zgornjem razvoju dobimo Lagrangian za polja Y^μ, kjer vsak člen v razvoju (razen prvega, ki je kinetični člen) predstavlja samointerakcjo polja Y^μ. Ker bi razvoj lahko nadaljevali, vidimo, da ima teorija neskončno število sklopitvenih konstant za te interakcije, vendar lahko vsako povežemo z nekim odvodom metrike $G_{\mu\nu}(X)$.

Sedaj se spomnimo, da je Polyakova akcija konformno invariantna (torej invariantna na Weylove transformacije). Podobno kot pri Lorentzovi invariantnosti , se tudi konformna invariantnost lahko med kvantizacijo izgubi. Tukaj bomo zahtevali, da teorija tudi po kvantizaciji ostane konformno invariantna, saj je to, kot smo do zdaj že večkrat opazili, ena izmed najpomembnejših lastnosti teorije strun.

Iz teorije polja [4] vemo, da moramo kvantno teorijo pogosto renormalizirati, da se znebimo divergirajočih opazljivk. Po renormalizaciji se pogosto zgodi (Npr QED ali QCD), da sklopitvene konstante niso več konstante, ampak so odvisne od skale na kateri teorijo gledamo. Odvisnost od skale μ nam narekuje beta funkcija [4]:

$$\beta_{\mu\nu}(G) \sim \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}(X;\mu)}{\partial \mu}. \tag{94}$$

Ker konformna invariantnost, ki jo želimo ohraniti pomeni invariantnost na skalo, na kateri teoriji gledamo, zahtevamo, da je tudi naša metrika $G_{\mu\nu}$ neodvisna od skale, oziroma, da velja

$$\beta_{\mu\nu}(G) = 0. \tag{95}$$

V teoriji polja je beta funkcija povezana z kontra členi, ki jih moramo Lagrangianu dodati med renormalizacijo [4]. Naš naslednji korak je torej izračunati prispevek ene zanke v zgornji teoriji in pripadajoč kontra člen, ki ga lahko povežemo z beta funkcijo.

Vrnimo se k metriki $G_{\mu\nu}$ in jo s pomočjo polj Y^μ zapisimo na nekoliko drugačen način. Vemo namreč, da lahko v bližini neke točke $\tilde{x}$ vedno izberemo Riemannove normalne koordinate [3], tako da se pri $X^\mu = \tilde{x}^\mu + \sqrt{\alpha'}Y^\mu$ metrika glasi:

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3}R_{\mu\lambda\nu\kappa}(\tilde{x})Y^\lambda Y^\kappa + \mathcal{O}(Y^3), \tag{96}$$

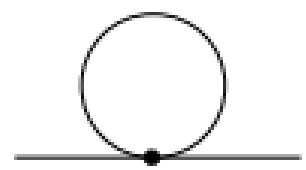
kjer je $R_{\mu\lambda\nu\kappa}$ Riemannov krivinski tenzor [6]. Polyakova akcija je potem:

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \partial Y^\mu \partial Y^\nu \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3}R_{\mu\lambda\nu\kappa}Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu \tag{97}$$

Prvi člen je kinetični člen za polje Y, drugi pa je interakcijski člen med štirimi polji. Na sliki 4 je shematično prikazano vozlišče, ki ga dobimo kot posledico interakcij. Pripadajoče Feynmannovo pravilo je $R_{\mu\lambda\nu\kappa}(k^\mu \cdot k^\nu)$, kjer je k 2-d moment na worldsheet-u in pride iz interakcij, ki vsebujejo odvode polj Y.

Sedaj, ko imamo opravka z preprostejšo znano teorijo polja z interakcijami lahko izračunamo prispevek ene zanke. Na sliki 5 je shematičen prikaz diagrama, ki ga bomo računali [3].

Slika 4



Slika 5

Spomnimo, da je propagator za skalarni delec enak:

$$\langle Y^\lambda(\sigma)Y^\kappa(\sigma')\rangle = -\frac{1}{2}\delta^{\lambda\kappa}\log|\sigma-\sigma'|^2. \tag{98}$$

V primeru zanke sta začetni in končni σ enaka in dobimo lograitemsko divergenco. Divergenco bomo regularizirali s pomočjo dimenzijske regularizacije [4]. Propagator izrazimo v momenti sliki, kjer integral izvrednotimo v dimenziji $d = 2 + \epsilon$:

$$\langle Y^\lambda(\sigma)Y^\kappa(\sigma')\rangle = 2\pi\delta^{\lambda\kappa}\int \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\frac{e^{ik(\sigma-\sigma')}}{k^2}. \tag{99}$$

Zgornji integral postane enak $\frac{\delta^{\lambda\kappa}}{\epsilon}$, ko velja $\sigma \to \sigma'$. Da iz tega pridobimo potreben kontra člen v akciji nadomestimo $Y^\lambda Y^\kappa$ z $\langle Y^\lambda Y^\kappa\rangle$. Da se znebimo člena $1/\epsilon$ moramo dodati kontra člen:

$$R_{\mu\lambda\nu\kappa}Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu \to R_{\mu\lambda\nu\kappa}Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu - \frac{1}{\epsilon}R_{\mu\nu}\partial Y^\mu \partial Y^\nu, \tag{100}$$

kjer je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor [6]. Zgornji kontra člen lahko absorbiramo v renormalizacijo polja in sklopitvene konstante oz. metrike [3]:

$$Y^\mu \to Y^\mu + \frac{\alpha'}{6\epsilon}R^\mu_\nu Y^\nu \tag{101}$$

$$G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\epsilon}R_{\mu\nu} \tag{102}$$

Iz zadnje enačbe lahko razberemo beta funkcijo in zahteva, da je ta enaka nič se prepiše v:

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' R_{\mu\nu} = 0. \tag{103}$$

Torej mora bit Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ enak nič, kar je ravno Einsteinova enačba v vakuumu [6]. Zgolj iz Polyakove akcije v ukrivljenem prostem času in zahteve po konformni invariantnosti smo tako izpeljali Einsteinovo enačbo.

7 Zaključek

Seminar smo začeli s preprosto in dobro znano relativistično teorijo točkastih, 0-dimenzionalnih delcev. Teorijo smo abstraktno posplošili na 1-dimenzioalne strune in dodobra obdelali njene simetrijske lastnosti. Po obdelavi enačb gibanja smo opazili, da gibanje strun opiše valovna enačba in, da te nihajo transverzalno. Prav te načine nihanja smo lahko preko znane relativistične enačbe $M^2 = -p_\mu p^\mu$ povezali z nekakšno maso. V nadaljevanju smo klasično struno kvantizirali in opazili, da različni nihajni načini ustrezajo različnemu delovanju bozonskih kreacijskih operatorjev na neko vakuumsko stanje. Opazili smo, da lahko s pomočjo pravkar omenjene povezave nihajnih načinov z maso te načine identificiramo z delci. Eden izmed teh je bil tudi brezmasni delec spina 2 - graviton. Do te točke nismo nikjer omenili ali uporabili karkoli iz splošne teorije relativnosti. Graviton se je naravno pojavil kot posledica kvantizacije te abstraktne strune. Šli smo še korak dlje in s pomočjo efektivnega opisa strune pri nizkih energijah izpeljali, da se struna mora gibati v prostoručasu, ki zadošča Einsteinovi enačbi.

Začeli smo zgolj z nekim relativističnim 1-dimenzionalnim objektom in (sicer po veliko kompliciranih, a upravičenih korakih) prišli do nekaj tako kompleksnega kot je Einsteinova enačba. Težko je verjeti, da bi to bilo zgolj naključje in to je samo eden izmed rezultatov, ki kažejo v prid (kljub nekaterim zaenkrat še nerešenim problemom) teorije strun kot teorije, ki pravilno opiše realnost.

8 Literatura

[1] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory.* Cambridge University Press, 2004.

[2] Joseph Polchinski. *String theory*, volume Volume 1 of *Cambridge monographs on mathematical physics.* Cambridge University Press, 1 edition, 1998.

[3] David Tong. String theory lecture notes, May 2019.

[4] Michael E. Peskin and Dan V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory.*

[5] H. F. Jones. *Groups, Representations, and Physics.*

[6] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.*