Domače naloge iz predmeta
Dodatna poglavja iz matematike za fizike

19. januar 2018

Naloge je treba reševati samostojno.
Rok za oddajo: 5 dni pred ustnim izpitom in najkasneje do 3. septembra 2018.

Naloga 1. [15 točk]
Naj bo G grupa. Komutator $[g, h] \in G$ poljubnih dveh elementov $g, h \in G$ je podan s predpisom $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Komutatorska podgrupa $[G, G]$ grupe G je podgrupa grupe G, generirana z vsemi komutatorji elementov iz grupe G, torej

$$[G, G] = \big\langle \{[g, h] \mid g, h \in G\} \big\rangle < G.$$

Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$[\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})] = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}),$$

kjer je $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ specialna linearna grupa reda n, ki jo sestavljajo vse matrike iz splošne linearne grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ z determinanto 1.

Naloga 2. [15 točk]
Za vsako naravno število n sta unitarna grupa $\mathrm{U}(n)$ in specialna unitarna grupa $\mathrm{SU}(n)$ podgrupi splošne linearne grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, podani s predpisoma

$$\mathrm{U}(n) = \{Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid Q^h Q = \mathrm{I}\},$$
$$\mathrm{SU}(n) = \{Q \in \mathrm{U}(n) \mid \det(Q) = 1\}.$$

Pokaži, da je grupa $\mathrm{U}(n)$ izomorfna semi-direktnemu produktu grup $\mathrm{U}(1)$ in $\mathrm{SU}(n)$.

Naloga 3. [15 točk]
Naj bo A_4 podgrupa simetrične grupe $\mathrm{Sym}(4)$, sestavljena iz vseh sodih permutacij $\sigma \in \mathrm{Sym}(4)$. Poišči vse ireducibilne karakterje grupe A_4.

Naloga 4. [20 točk]
Naj bosta G in H končni grupi. Za poljubno reprezentacijo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ grupe G in poljubno reprezentacijo $\tau : H \to \mathrm{GL}(W)$ grupe H definiramo reprezentacijo $\rho \boxtimes \tau : G \times H \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ grupe $G \times H$ s predpisom

$$(\rho \boxtimes \tau)(g, h)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \tau(h)(w).$$

(i) Poišči zvezo med karakterji reprezentacij ρ, τ in $\rho \boxtimes \tau$.
(ii) Pokaži, da je reprezentacija $\rho \boxtimes \tau$ ireducibilna, če sta reprezentaciji ρ in τ ireducibilni.
(iii) Pokaži, da je vsaka ireducibilna reprezentacija grupe $G \times H$ ekvivalentna reprezentaciji $\rho \boxtimes \tau$, za primerno izbrano ireducibilno reprezentacijo ρ grupe G in primerno izbrano ireducibilno reprezentacijo τ grupe H.

Naloga 5. [20 točk]
Naj bo G poljubna končna abelova grupa. Množico vseh ireducibilnih karakterjev $\chi : G \to \mathbb{C}$ grupe G označimo z $\widehat{G}$.

(i) Pokaži, da je za poljubna ireducibilna karakterja $\chi, \chi' \in \widehat{G}$ njun produkt $\chi\chi' : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \chi(g)\chi'(g)$, prav tako ireducibilen karakter grupe G. Pokaži tudi, da je množica $\widehat{G}$ s to operacijo končna abelova grupa, ki ima enako število elementov kot grupa G. Grupo $\widehat{G}$ imenujemo dualna grupa grupe G.

(ii) Naj bo $\widehat{\widehat{G}}$ dualna grupa grupe $\widehat{G}$. Za vsak $g \in G$ naj bo preslikava $\phi(g) : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ dana s predpisom $\phi(g)(\chi) = \chi(g)$. Pokaži, da je $\phi(g)$ ireducibilen karakter grupe $\widehat{G}$ in da je tako definirana preslikava
$$\phi : G \to \widehat{\widehat{G}}$$
izomorfizem grup.

Naloga 6. [15 točk]
Tok vektorskega polja X na gladki mnogoterosti M je takšna gladka preslikava $\Phi^X : D^X \to M$, definirana na odprti podmnožici D^X mnogoterosti $\mathbb{R} \times M$, da za vsako točko $p \in M$ velja:

(a) množica $J_p^X = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in D^X\}$ je odprt interval ki vsebuje 0, in

(b) preslikava $J_p^X \to M$, $t \mapsto \Phi^X(p, t)$, je maksimalna integralna krivulja vektorskega polja X ki preslika 0 v točko p.

Za vsak $t \in \mathbb{R}$ imamo odprto podmnožico $D_t^X = \{p \in M \mid t \in J_p^X\}$ mnogoterosti M in difeomorfizem $\Phi_t^X : D_t^X \to D_{-t}^X$, $p \mapsto \Phi^X(t, p)$, ob tem pa velja enakost
$$\Phi_s^X(\Phi_t^X(p)) = \Phi_{s+t}^X(p)$$
za vse $s, t \in \mathbb{R}$ in za vse tiste točke $p \in M$, za katere je kompozicija $\Phi_s^X(\Phi_t^X(p))$ definirana. Vektorsko polje X je kompletno, če je $D^X = \mathbb{R} \times M$. Pokaži:

(i) Vsako vektorsko polje X na mnogoterosti M je Φ_t^X-invariantno, za vsak $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Za poljuben difeomorfizem $f : N \to M$ med gladkima mnogoterostima, za vsako vektorsko polje $Y \in \mathfrak{X}(N)$ in za vsak $t \in \mathbb{R}$ je $f(D_t^Y) = D_t^{f_*Y}$ in
$$f \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^{f_*Y} \circ f|_{D_t^Y}.$$

(iii) Naj bo M gladka mnogoterost in $f : M \to M$ difeomorfizem. Kompletno vektorsko polje $X \in \mathfrak{X}(M)$ je f-invariantno če, in samo če, za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja
$$f \circ \Phi_t^X = \Phi_t^X \circ f.$$