Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Andrej Kolar-Požun

October 10, 2017

1 Naloga

Iščemo optimalen način varčne vožnje za prevoz semaforja, ki je oddaljen za l_0, če se zelena luč prižge ob času t_0. Štartamo ob času $t = 0$ z začetno hitrostjo v_0.

Varčno vožnjo matematično zapišemo z minimizacijo funkcionala $\int_0^{t_0} \dot{v}^2 dt = min$ z vezjo $\int_0^{t_0} v dt = l_0$

Formulacijo polepšamo če jo spremenimo v brezdimenzijsko obliko. Uvedemo nove spremenljivke $\tilde{t} = t/t_0, \tilde{v} = v/v_0, c = \frac{t_0 v_0}{l_0}$. Recimo še, da je $\dot{\tilde{v}} = \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}}$:

$$\int_0^1 \dot{\tilde{v}}^2 d\tilde{t} = min$$
$$c \int_0^1 \tilde{v} d\tilde{t} = 1$$
$$\tilde{v}(\tilde{t} = 0) = 1$$

Od tu naprej bom tilde nad spremenljivkami zaradi preprostosti spet spuščal: Zapomnili si bomo, da so to zgoraj definirane brezdimenzijske spremenljivke. Izhodišče koordinatnega sistema si bom izbral, da bo veljalo $x(0) = 0$.

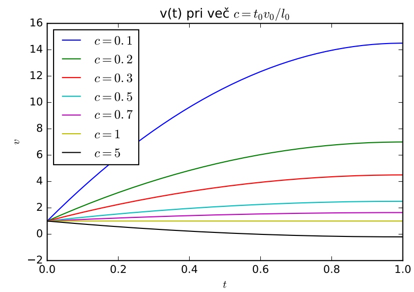
2 Reševanje

2.1 Poljubna končna hitrost

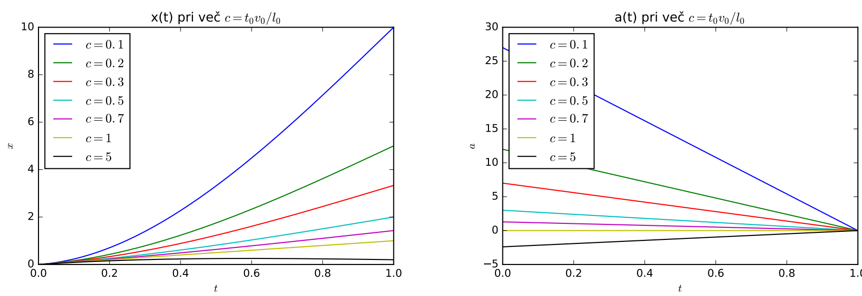
Optimalni vožnji pri pobljuni hitrosti $v(1)$ ustreza robni pogoj $\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}(t = 1) = 0$, kjer je $L = \dot{v}^2 - c\lambda v$. Funkcijo $v(t)$ dobimo, če pri danih pogojih rešimo E-L enačbo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$
$$2\ddot{v} + c\lambda = 0$$
$$v(t) = -\frac{c\lambda}{4}t^2 + At + b$$
$$v(t) = \frac{3(c-1)}{2c}t^2 - \frac{3(c-1)}{c}t + 1$$
$$a(t) = \frac{3(c-1)}{c}t - \frac{3(c-1)}{c}$$
$$x(t) = \frac{(c-1)}{2c}t^3 - \frac{3(c-1)}{2c}t^2 + t$$

Opazka: Prosti robni pogoj pri $t = 1$ ustreza pogoju $\dot{v} = 0$. Dobimo torej rešitev, kjer je končna hitrost ekstremalna.



Nekaj primerov optimalne porazdelitve hitrosti.



Za iste parametre še funkciji x(t) in a(t).

Parameter c nam primerja $v_0 t_0$ z l_0. Po pričakovanju je pri vrednosti $c = 1$ rešitev vožnja s konstantno hitrostjo. Pri $c > 3$ imamo prisotno negativno hitrost, torej smo prevozili semafor(čez rdečo) in se vzvratno vrnili k njemu. Saj naša vez zahteva le, da se po času $t = 1$ nahajamo pri l_0, nimamo pa pogoja, ki bi zahteval nenegativno hitrost.

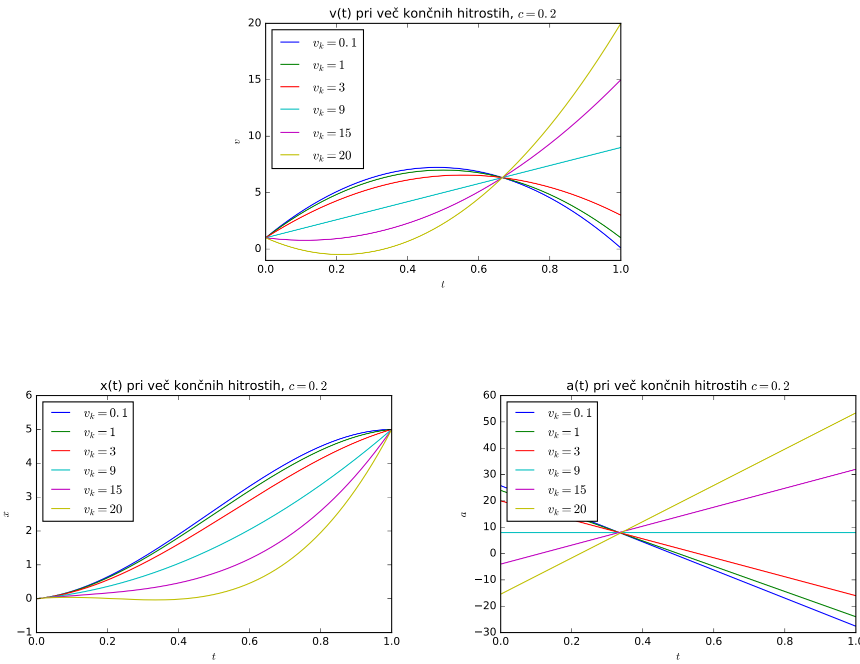
2.2 Izbrana končna hitrost

Recimo, da želimo zdaj semafor prevoziti pri določeni hitrosti. Robni pogoj v našem problemu se zdaj glasi $v(1) = v_k$ za neko končno hitrost v_k. Rešitev pri tem pogoju je:

$$v(t) = \frac{3(c(v_k + 1) - 2)}{c} t^2 + (6/c - 2(v_k + 2))t + 1$$

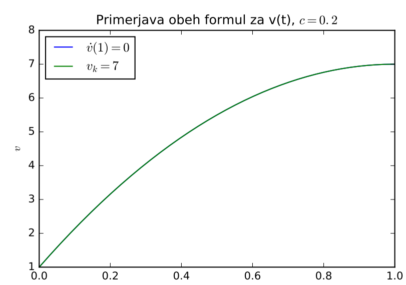
$$a(t) = \frac{6(c(v_k + 1) - 2)}{c} t + 6/c - 2(v_k + 2)$$

$$x(t) = \frac{(c(v_k + 1) - 2)}{c} t^3 + (3/c - (v_k + 2))t^2 + t$$



Optimalni načini vožnje pri fiksnem c za več končnih hitrosti.

Zanimivo je, da imajo vsi zgornji primeri ob nekem času enako hitrost. To je lastnost naše funkcije $v(t)$. Vidimo, da če vstavimo $t = 2/3$ se členi z v_k izničijo in dobimo hitrost neodvisno od tega parametra. Podobno se zgodi pri pospešku. Pri previsoki začetni hitrosti za fiksen c imamo spet prisotno negativno hitrost.



Primerjava funkcije, ki jo da pogoj ekstremne hitrosti pri $x = l_0$ in funkcije pri kateri ročno nastavimo končno hitrost na maksimalno vrednost.

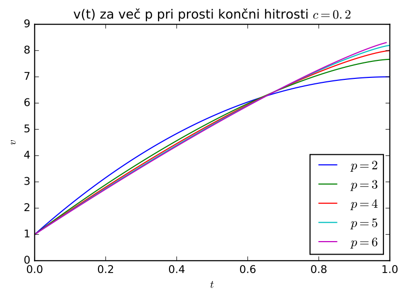
Če bi nam formuli dali različni krivulji, bi vsaj ena izmed njiju bila napačna.

2.3 Drugačna potenca v funkcionalu

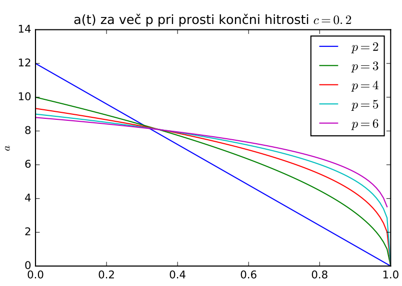
Poglejmo kakšni so naši načini vožnje če minimiziramo naslednji funkcional: Za začetek se omejimo na sode potence, pri katerih je reševanje preprostejše.

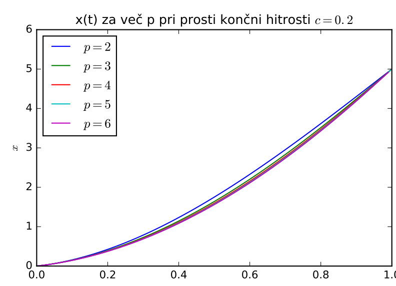
$$\int_0^1 \dot{v}^{2p} dt = min$$
$$2p(2p-1)\dot{v}^{2p-2}\ddot{v} + c\lambda = 0$$
$$v(t) = -\alpha(-\beta t + \gamma)^{2p/(2p-1)} + \delta$$

Kjer sem z grškimi črkami označil količine, ki niso odvisne od časa.



Ko p povečujemo, postaja funkcija vedno bolj podobna premici.





Formulo sem uporabil tudi za lihe p in vidim, da je $\dot{v}$ vedno pozitiven, torej je to, da nisem upošteval, da bi morala biti v funkcionalu še absolutna vrednost v redu.

2.4 Dodaten člen v funkcionalu

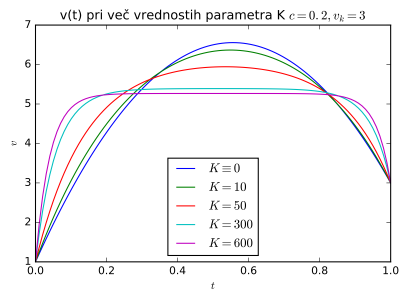
Kaj pa če hočemo poleg pospeška minimizirati tudi hitrost? Temu bi ustrezal takšen funkcional:

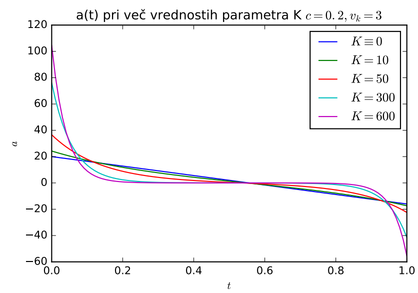
$$\int_0^1 \dot{v}^2 + Kv^2 dt = min$$

V funkcional sem dodal še en prosti parameter K, ki nam določa kako pomembno nam je minimiziranje hitrosti napram minimiziranju pospeška. Rečemo še, da ima K takšne enote, da problem ostane brezdimenzijski. Rešimo:

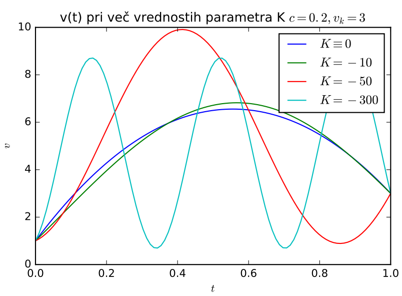
$$2\ddot{v} + c\lambda - 2Kv = 0$$

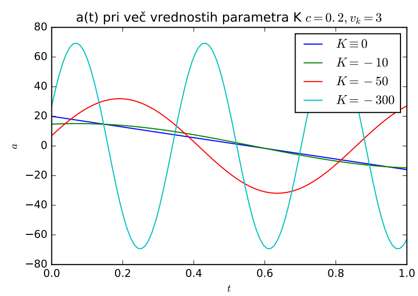
$$v(t) = \frac{c\lambda}{2K} + Aexp(\sqrt{K}t) + Bexp(-\sqrt{K}t)$$



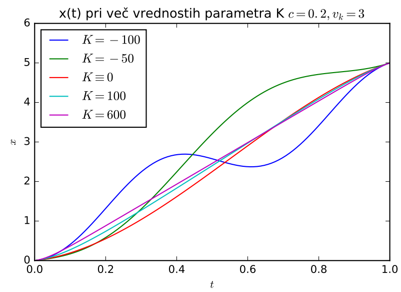


Za višje K postaja v(t) podoben škatlasti funkciji. $K \equiv 0$ prikazuje funkcional brez drugega člena





Kot zanimivost pogledam še negativne K. Tukaj bi za minimizacijo funkcionala bila bolj ugodna višja hitrost.

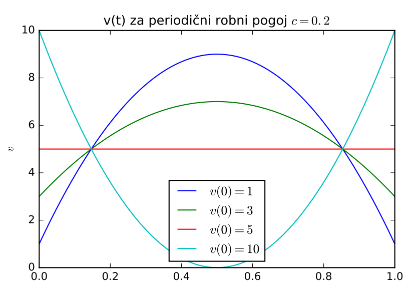


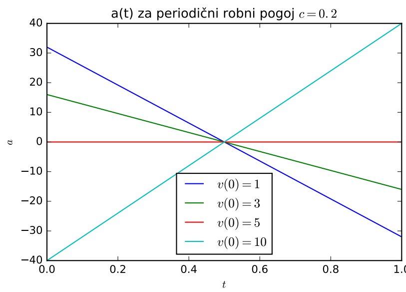
Trajektorije za pozitivne K so si veliko bolj podobne kot za negativne.

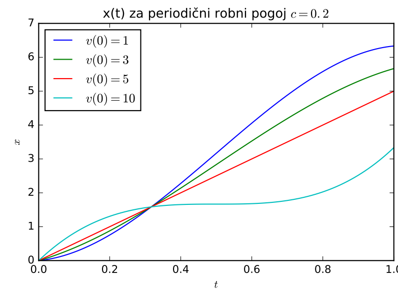
2.5 Periodični robni pogoj

Spomnimo se rešitve za izbrano končno hitrost iz prve naloge in uporabimo periodični robni pogoj:

$$v(t) = -\frac{c\lambda}{4}t^2 + At + b$$
$$v(0) = v(1) = 1$$
$$v(t) = -8(1/c - v(0))t^2 + 8(1/c - v(0))t + v(0)$$







Mimogrede opazimo še, da je pospešek zvezen, ko je 0, kar seveda ustreza enakomernemu gibanju.

To lahko vidimo tudi iz enačb, če nastavimo robna pogoja(poleg vezi) $v(0) = v(1)$ in $\dot{v}(0) = \dot{v}(1)$.

Poskusimo rešiti še primer, ko imamo dva semaforja. Prvi se na razdalji $x = l_0$ prižge ob $t = 1$, drugi pa na $x = 3l_0$ ob $t = 2$. Kakšna je zdaj optimalna vožnja?

$$\int_0^2 \dot{v}^2(t)dt = min$$
$$\int_0^1 v(t)dt = 1/c = \int_0^2 v(t)(1 - \Theta(t-1))dt$$
$$\int_1^2 v(t)dt = 2/c = \int_0^2 v(t)\Theta(t-1)dt$$

S Θ sem označil step funkcijo, ki mi omogoča prevedbo vezi na integral od 0 do 2.

$$L = \dot{v}^2 - \lambda v(t)(1 - \Theta(t-1)) - \mu v(t)\Theta(t-1)$$
$$2\ddot{v} + \lambda(1 - \Theta(t-1)) + \mu\Theta(t-1) = 0$$

Enačbo rešim tako, da posebej obravnavam dela pred in po $t = 1$ in zahtevam, da sta $v(t)$ in $\dot{v}(t)$ zvezna pri $t = 1$.