Metoda končnih elementov: lastne rešitve

Andrej Kolar-Požun, 28172042

18. april 2018

1 Polkrožna cev

Z metodo končnih elementov bomo tokrat reševali Helmholtzovo enačbo $\nabla^2 u + k^2 u = 0$. V šibki formulaciji se ta glasi

$$S(u) = \frac{1}{2}\langle \nabla u, \nabla u\rangle - \frac{1}{2}\lambda\langle u, u\rangle$$

Kjer skalarni produkt definiramo na sledeč način

$$\langle g, h\rangle = \int_\Omega dx g(x) h(x)$$

Po metodi Galerkina rešitev naše enačbe zapišemo kot linearno kombinacijo trial funkcij

$$u = \sum_{i=1}^{N} a_i w_i$$

Za funkcije w_i bomo spet vzeli funkcijo, ki je v x_i enaka ena, na sosedih enaka nič, vmes pa linearno narašča.

Če zgornji funkcional variramo dobimo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \left(A_{ij} - \lambda B_{ij}\right) a_j = 0 \\
&A_{ij} = \langle \nabla w_i, \nabla w_j\rangle \\
&B_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle
\end{aligned}$$

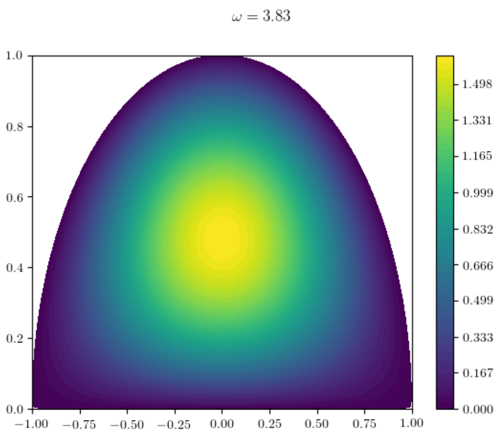
Spet bomo domeno trinagulirali. Matrika A je enaka kot prej, novi so le izvendiagonalni elementi matrike B, ki se glasijo

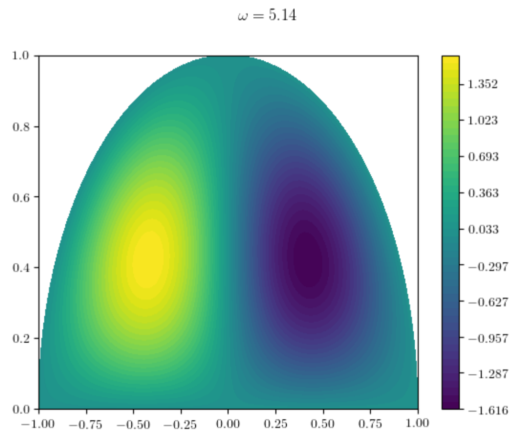
$$B_{ij} = \sum S_r/12$$

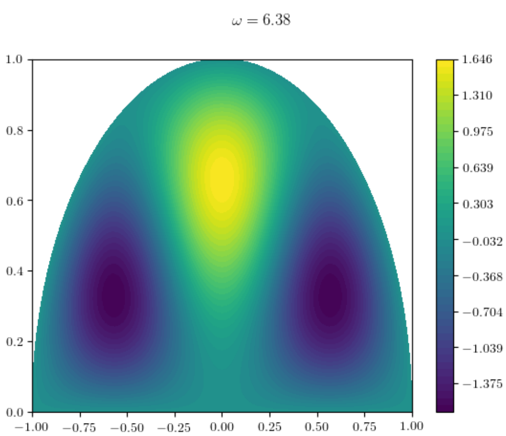
Kjer gre vsota po vseh trikotnikih na zveznici i-j.

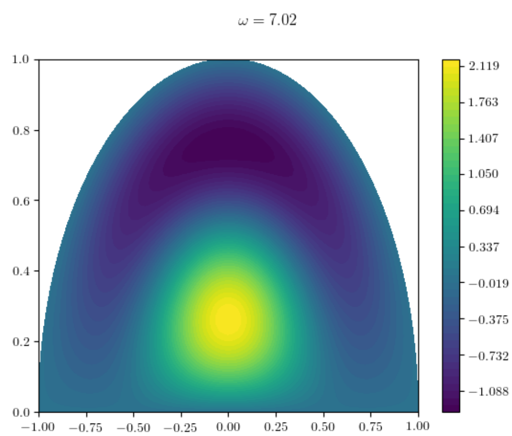
Najprej bom narisal nekaj slik, pri katerih sem povsod risal z 200 točkami, od tega jih je četrtina bila na robu. Triangulacijo sem delal z scipy-jevo metodo Delaunay, matrični sistem pa na koncu rešil z linalg.solve Poiseuillov koeficient sem računal tako, da sem povprečil vrednost pretoka po vseh 3 ogliščih trikotnika, pomnožil s ploščino trikotnika in to seštel po vseh trikotnikih.

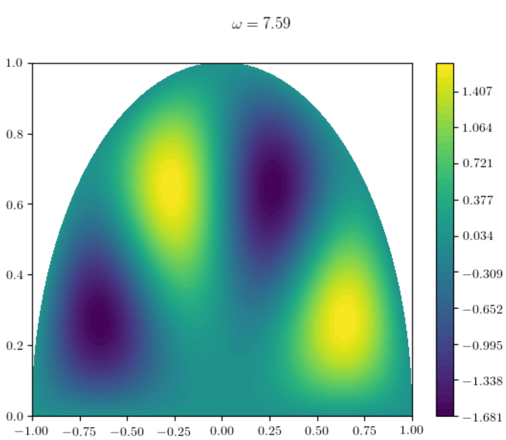
Delal bom z točkami porazdeljenimi enakomerno po polkrogu:

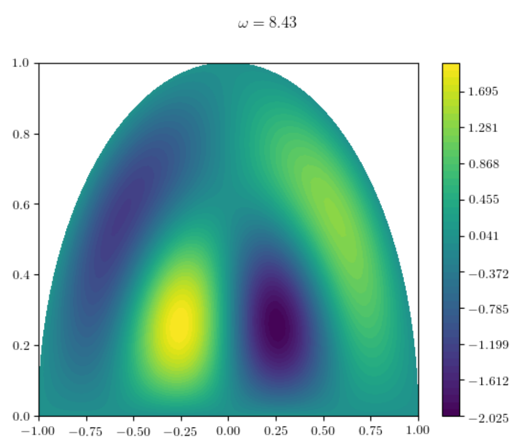

$\omega = 3.83$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
1.498 1.331 1.165 0.999 0.832 0.666 0.499 0.333 0.167 0.000

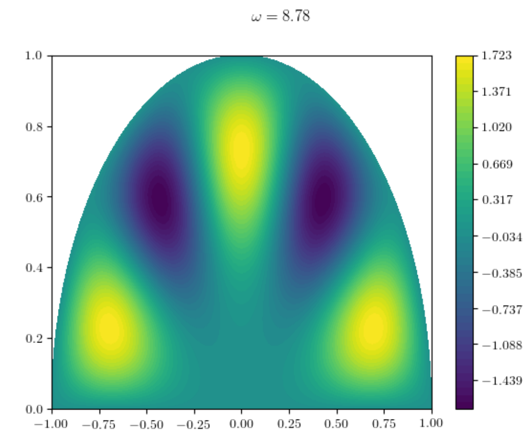

$\omega = 5.14$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
1.352 1.023 0.693 0.363 0.033 −0.297 −0.627 −0.957 −1.287 −1.616

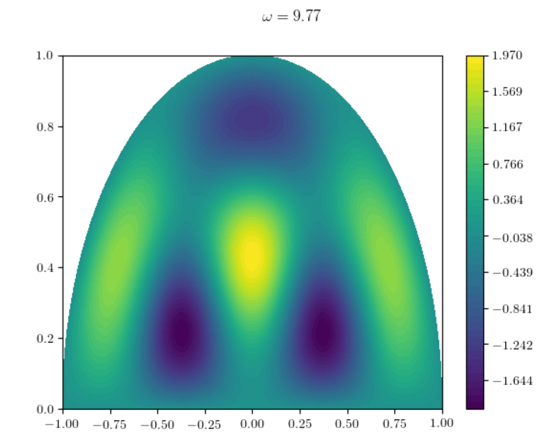

$\omega = 6.38$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
1.646 1.310 0.975 0.639 0.303 −0.032 −0.368 −0.704 −1.039 −1.375

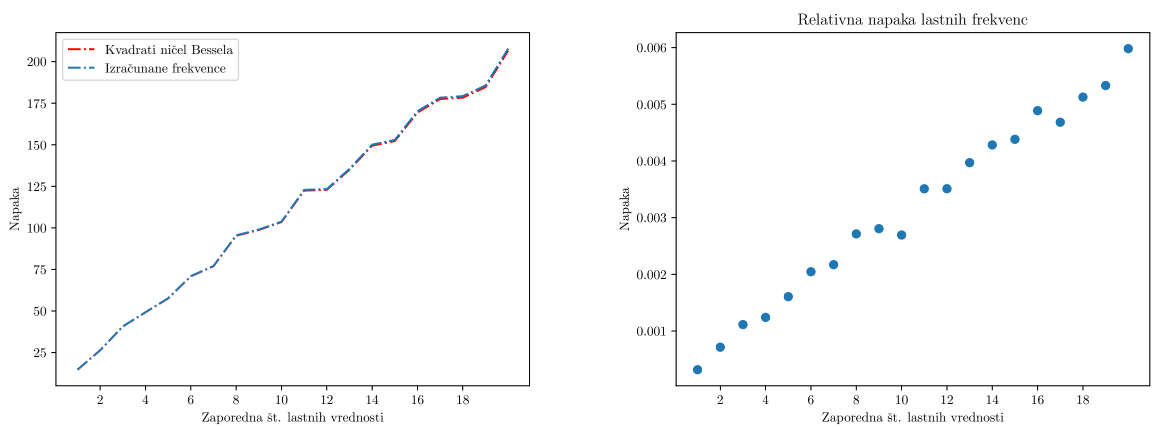

$\omega = 7.02$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
2.119 1.763 1.407 1.050 0.694 0.337 −0.019 −0.375 −0.732 −1.088


$\omega = 7.59$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
1.407 1.064 0.721 0.377 0.034 −0.309 −0.652 −0.995 −1.338 −1.681


$\omega = 8.43$
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
1.695 1.281 0.868 0.455 0.041 −0.372 −0.785 −1.199 −1.612 −2.025







Primerjava izračunanih frekvenc z ničlami Besselovih funkcij(analitična rešitev). Na desni vidimo, da relativna napaka počasi raste, najbrž bi jo lahko zmanjšal z izbiro večje matrike.

2 Metoda Galerkina

Isto nalogo bomo zdaj rešili še samo z metodo Galerkina. Naše poskusne funkcije so:

$$w_{m,k}(r,\varphi) = r^{m+k}(1-r)sin(m\varphi)$$

Kjer sta m in k naravni števili(k je lahko tudi nič). Takšne funkcije vse zadoščajo našim robnim pogojem.

Rešujemo torej spet $\nabla^2 u - k^2 u = 0$ Delali bomo kar na kvadratni mreži, kjer so integrali preprostejši. Analitično lahko dobimo:

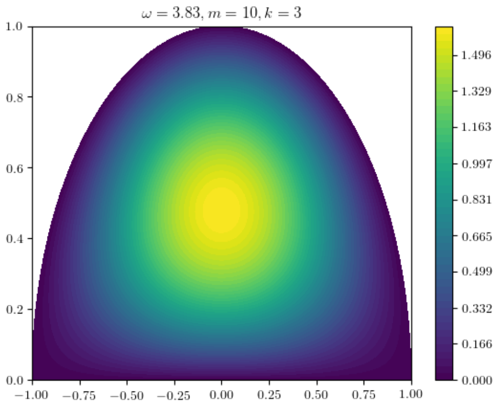
$$A_{(m,k),(n,l)} = \int r dr d\varphi \; \nabla w_{mk} \nabla w_{nl}$$

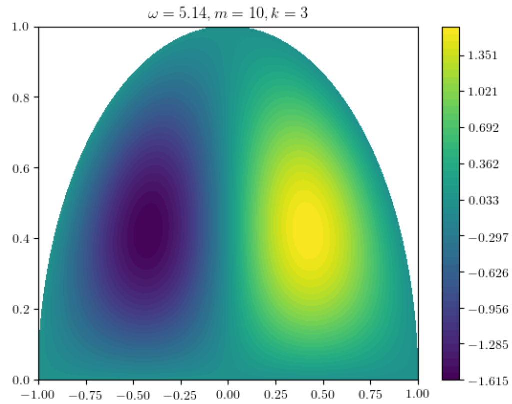
$$A_{(m,k),(n,l)} = \delta_{mn} \frac{\pi}{2} \frac{(1+2m)(l+2m)+k(1+2l+2m)}{(k+l+2m)(1+k+l+2m)(2+k+l+2m)}$$

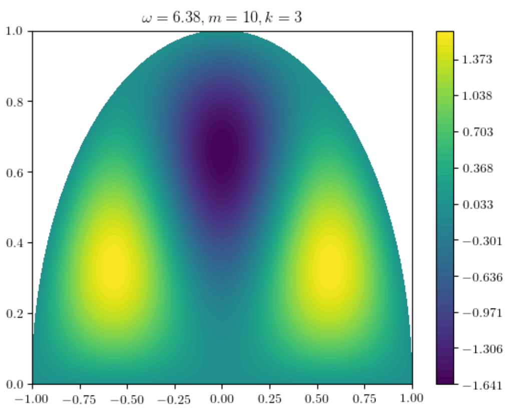
$$B_{(m,k),(n,l)} = \int r dr d\varphi \; w_{mk} w_{nl}$$

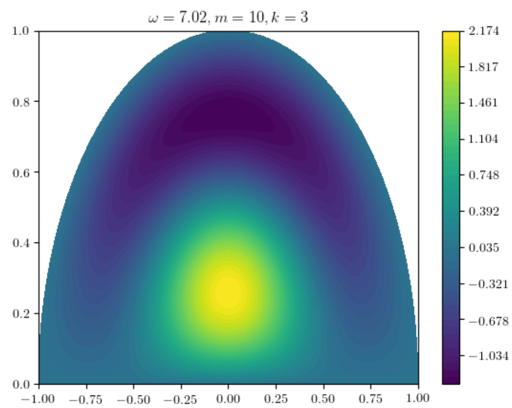
$$B_{(m,k),(n,l)} = \delta_{mn} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2m+k+l+2} - \frac{2}{2m+k+l+3} + \frac{1}{2m+k+l+4} \right)$$

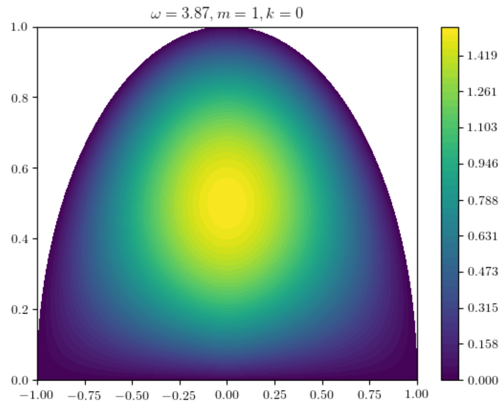
Sedaj pa še nekaj slik, kjer sem narisal 10000 točk. Številke m in k v naslovih povejo do kje sem vzel bazne funkcije.

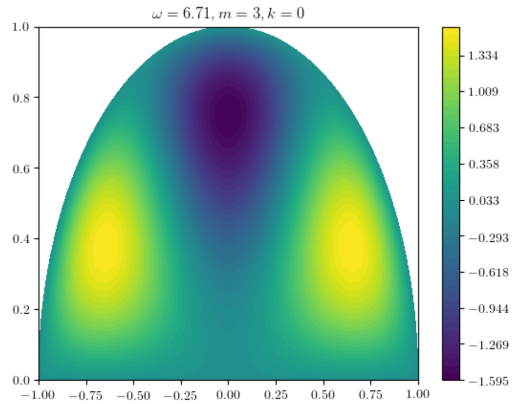




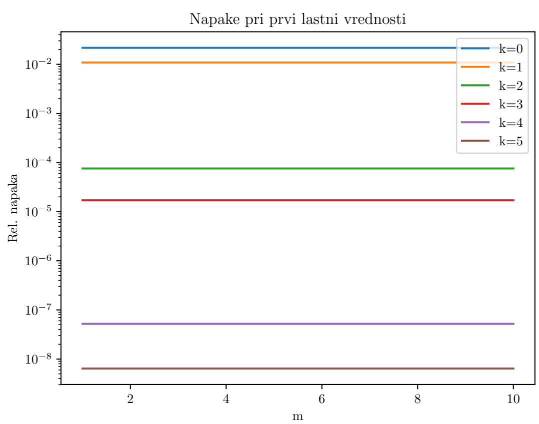


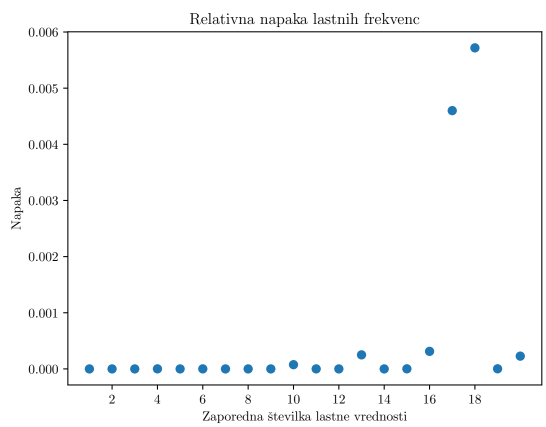






Izgleda, da metoda deluje dobro, tudi pri nižjih m in k. Poskusil bom to preveriti še malo bolj sistematično:



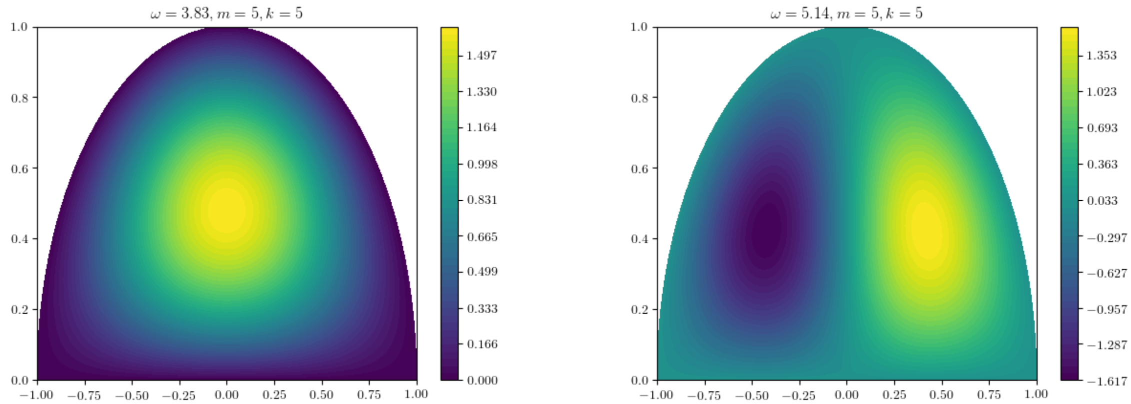


Na levi vidimo, da lastna vrednost sploh ni odvisna od števila m, če je to le več kot 0. Na desni pa vidimo, da so relativne napake spet zelo majhne a ne naraščajo kot prej, ampak imajo bolj nepravilno odvisnost.

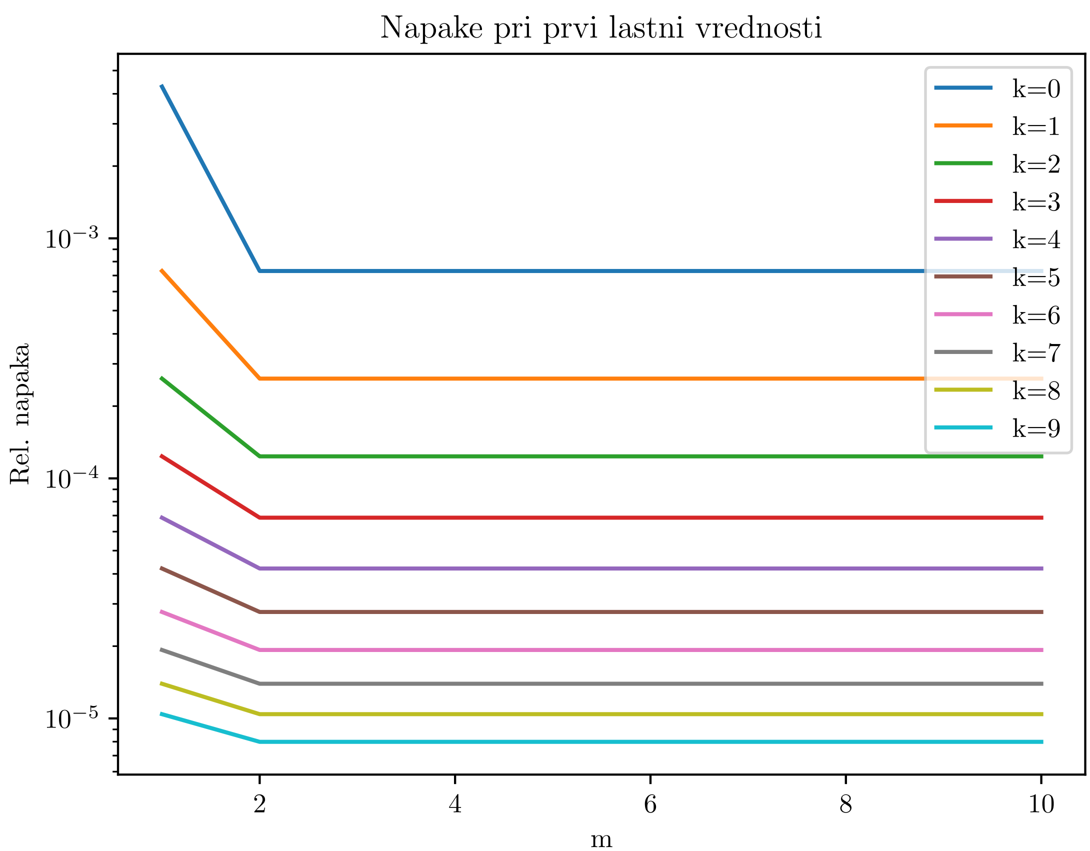
Poglejmo kako se obnese slabša izbira trial funkcij:

$$w_{m,k}(r,\varphi) = sin(k\pi r/R)sin(m\varphi)$$
$$\nabla w_{m,k} = \frac{\pi k}{R}cos(k\pi r/R)sin(m\varphi) + \frac{sin(k\pi r/R)}{r}mcos(m\varphi)$$

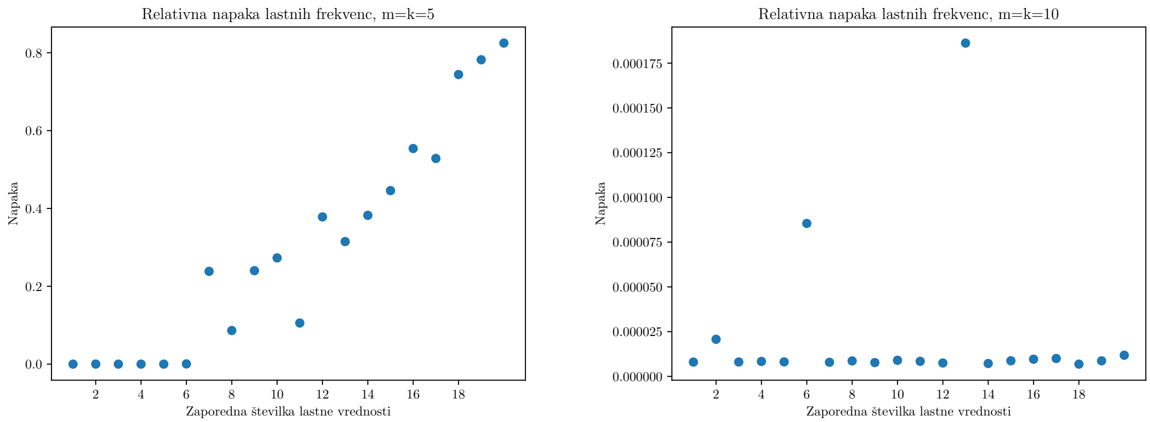
Skalarne produkte sem pri teh funkcijah računal kar numerično z Gaussovo kvadraturo(Čeprav verjetno obstaja tudi analitična formula).



Tudi taka izbira baznih funkcij kar v redu deluje!

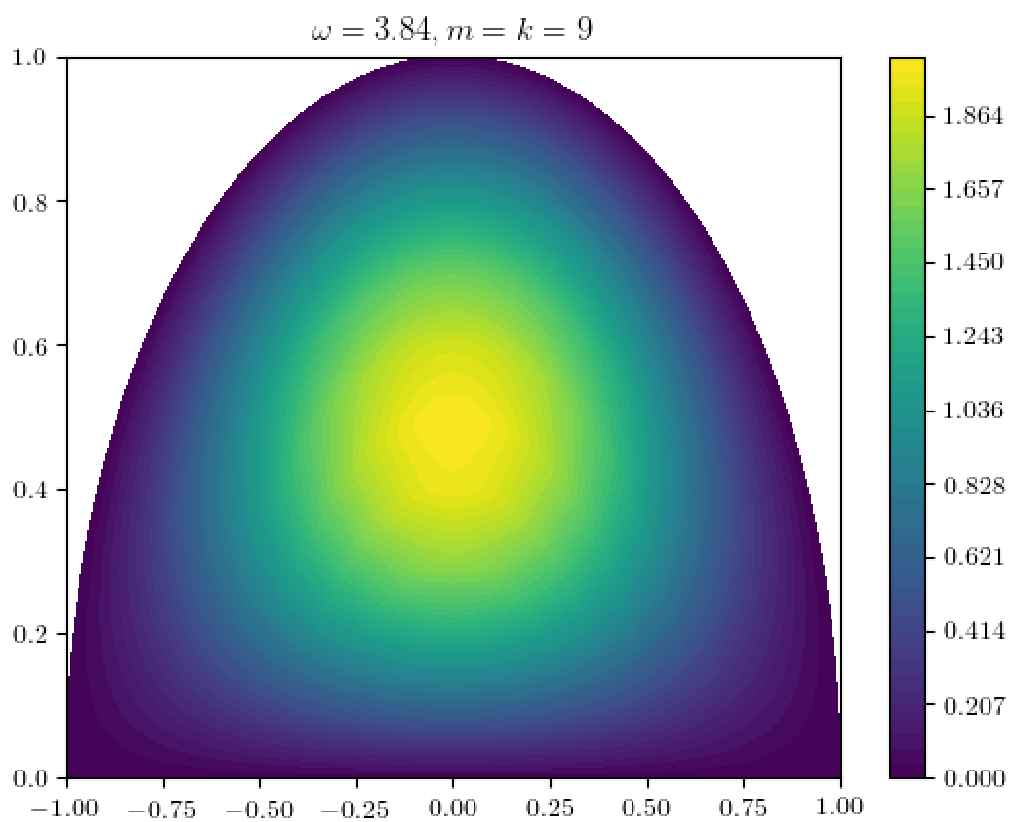


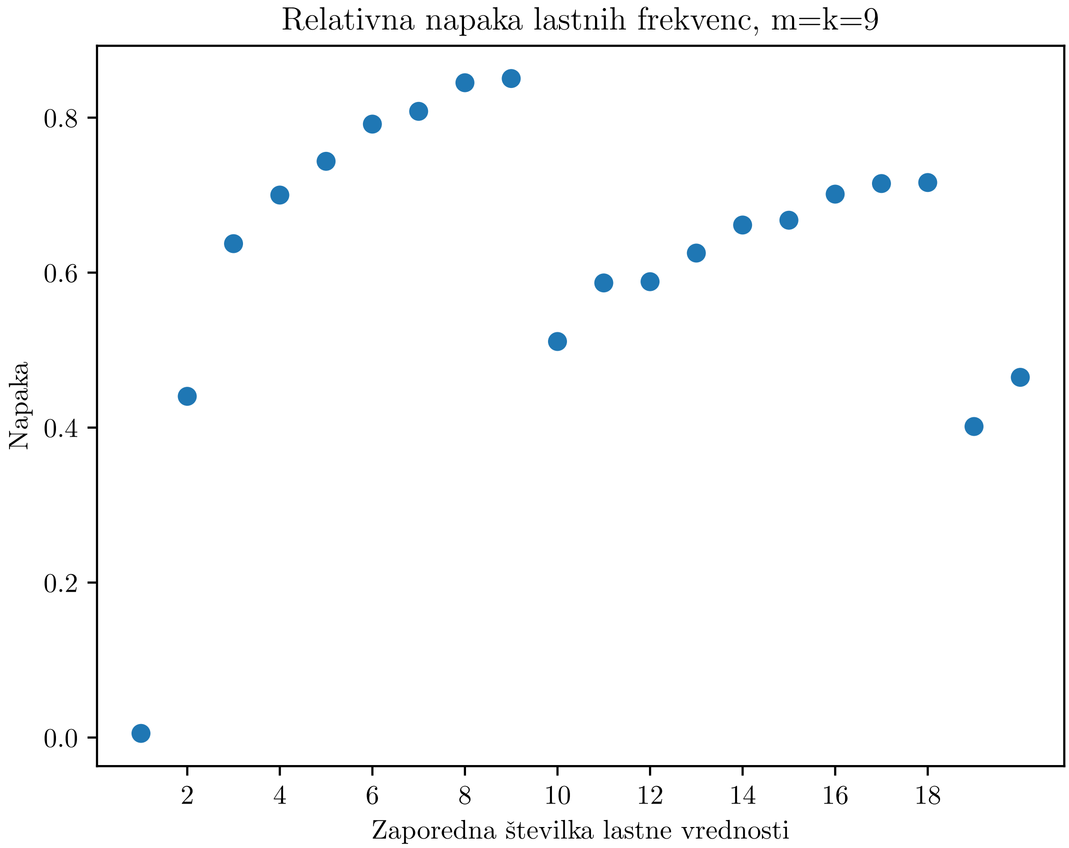
Slika je malce drugačna kot prej. Napak se ustali šele pri m=2, z k-jem pa se seveda manjša, vendar ostane večja kot pri prejšnjih funkcijah.



Pri m=k=5 je napaka kar velika in se veča. Pri m=k=10 pa zgleda stvar bolj v redu, vidimo tudi, da imajo outlierji manjšo napako kot prej.

Za na konec sem preizkusil še trial funkcije v radialni smeri izbrati kot piramidalne funkcije, ki so 0 na robu, 1 na k/10 ter linearne vmes. Integrale sem spet izračunal numerično v kotni odvisnosti pa sem obdržal sinus.





Izgleda, da se le za prvo lastno vrednost dobro izide.