

Gibanje neraztegljive vrvice

Andrej Kolar-Požun, 28172042

24. maj 2018

1 Uvod

V tej nalogi bomo podrobneje obravnavali gibanje neraztegljive vrvice. Spomnimo katere enačbe jo opisujejo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial y}{\partial s} \right) + 1 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Pripadajoči robni pogoji so, da v pritrdišču $s = 0$ velja $x = y = s = 0$ ter, da na koncu $s = 1$ velja $F = 0$. O koordinatah konca vrvice nimamo podatka, izberemo si lahko, da je npr ukrivljenost enaka nič.

Kot v tretji nalogi se tretje enačbe takoj rešimo, če uvedemo kot naklona vrvice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \sin \varphi\end{aligned}$$

Po nekaj manipulacijah dobimo enačbi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 2 \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 &= 0\end{aligned}$$

Robna pogoja pri $s=0$ se v spremenljivki φ glasita

$$\begin{aligned}F \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \cos \varphi &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s} + \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

Robni pogoji pri $s=1$ pa

$$\begin{aligned}F &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= 0\end{aligned}$$

Zdaj bom robne pogoje in enačbe napisal še v diferenčni shemi. Subskript predstavlja krajevni indeks, superskript pa časovni.

$$F_{i+1}^n - F_i^n \left(2 + \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2} \right)^2 \right) + F_{i-1}^n = - \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)^2 (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})^2$$

$$F_0^n = F_1^n + \Delta s \sin \varphi_0$$

$$F_N^n = 0$$

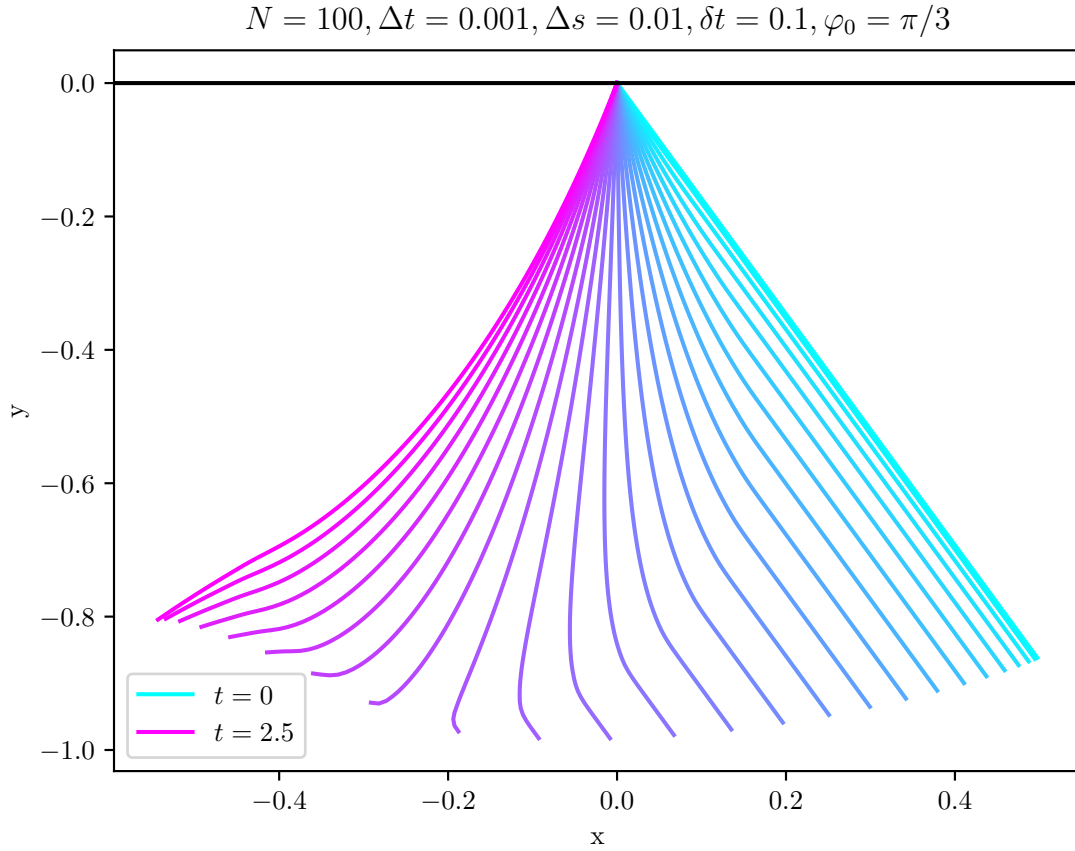
Za odvod po kraju sem vzel simetriziran odvod, da enačba za robni pogoj ni transcendentna.

$$\varphi_i^{n+1} = 2\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} \right)^2 \left(2 \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2} + F_i^n (\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n) \right)$$

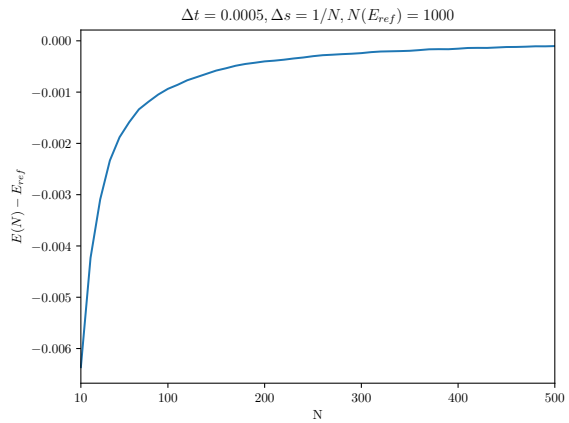
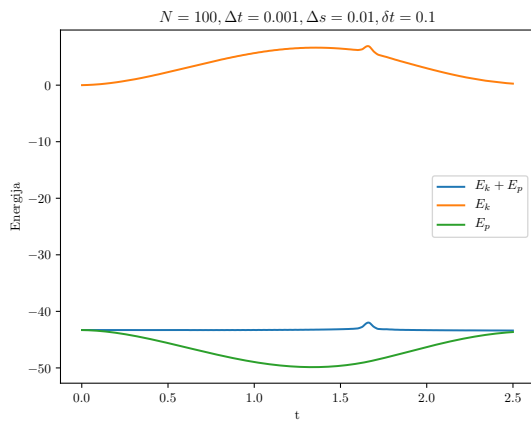
$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_2^{n+1} + \frac{2\Delta s}{F_1^{n+1}} \cos(\varphi_1^{n+1})$$

$$\varphi_N^{n+1} = 2\varphi_{N-1}^{n+1} - \varphi_{N-2}^{n+1}$$

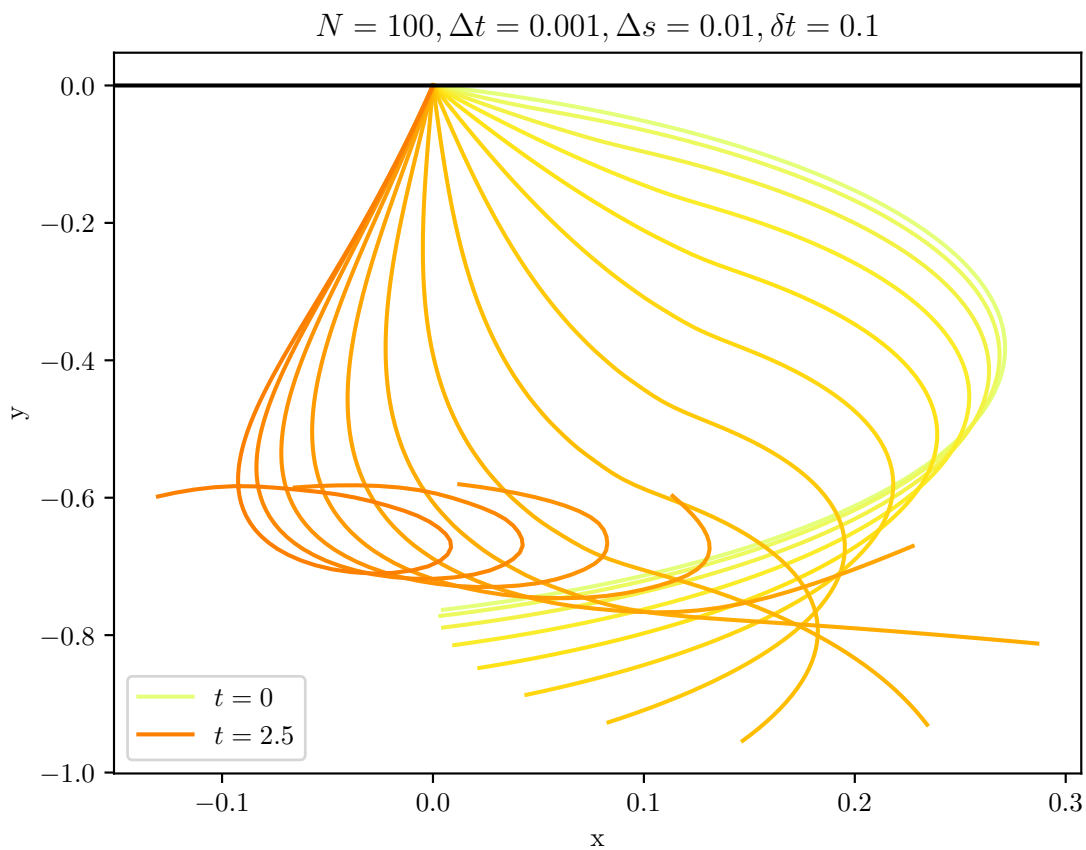
2 Rezultati



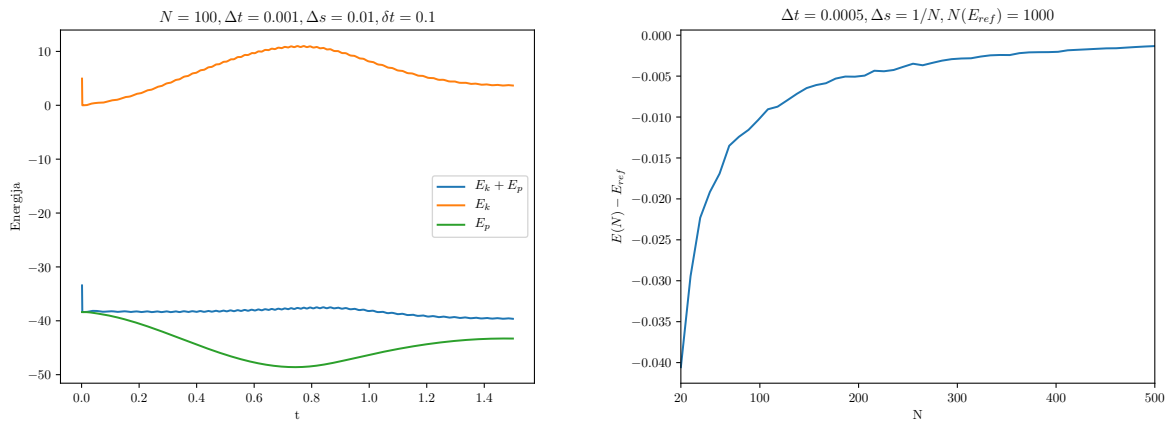
Test metode pri začetnem pogoju, ravne vrvice pri kotu $\pi/3$. Veliki delta predstavlja pri kakšni diskretizaciji sem računal, mali pa pri kakšni sem rezultat prikazal. Nihanje te vrvice je prikazano v animaciji nihanje.mp4



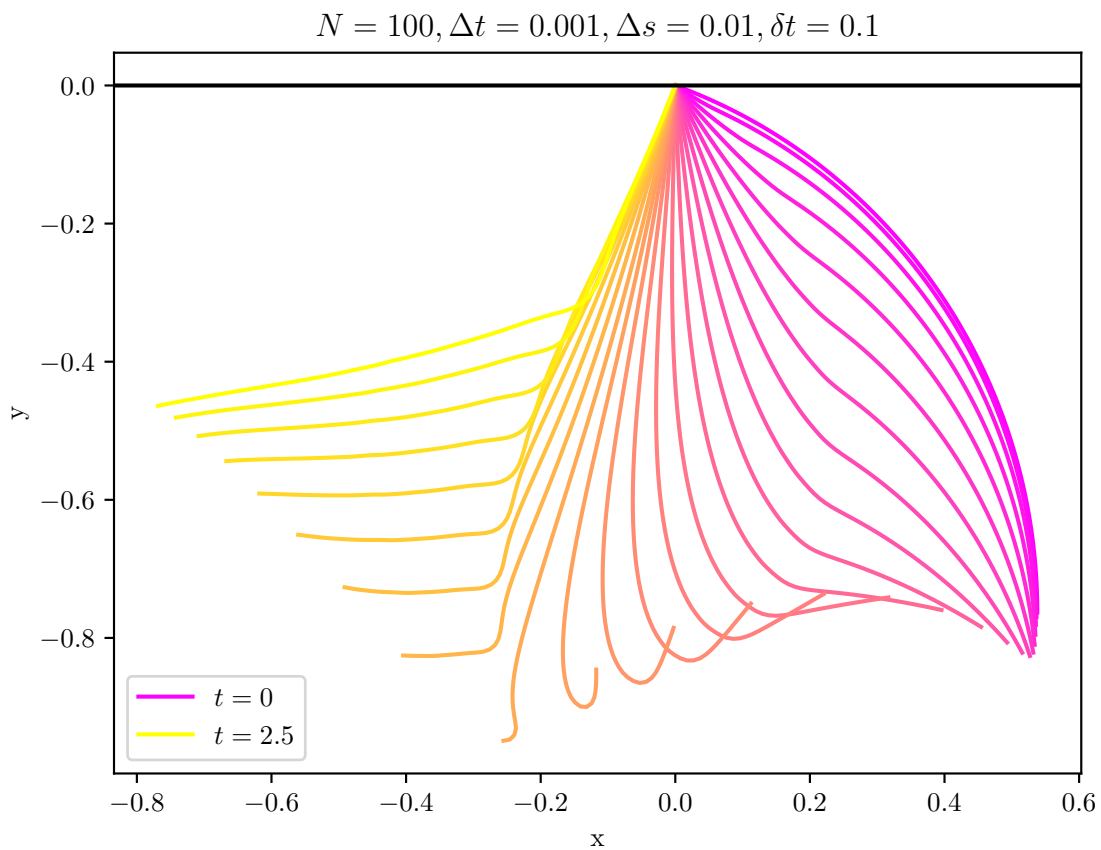
Ta grafa ustrežata zgornjemu primeru. Energija se praviloma ohranja (kaj je tisti hribček bo mogoče vidno na animaciji) in lepo monotono konvergira z N .



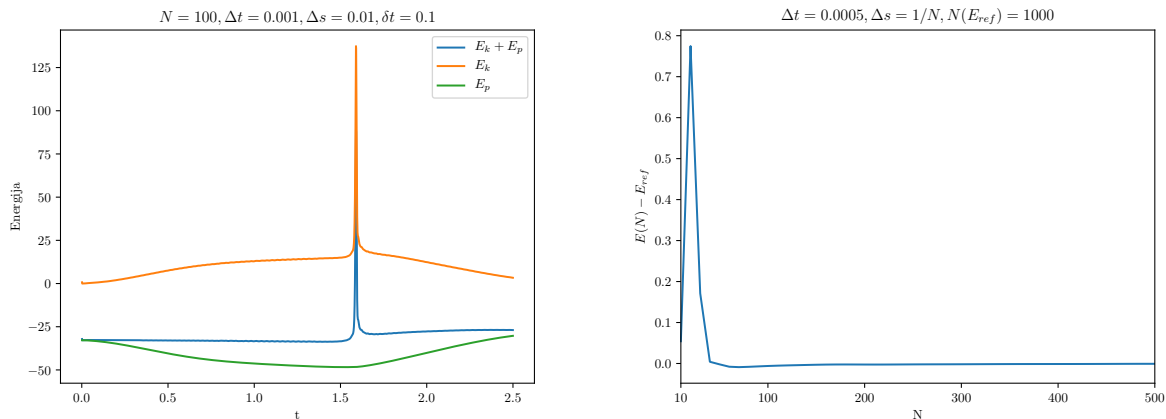
Še malo drugačen začetni pogoj. Tokrat med nihanjem konec vrvice še malo zavihti.



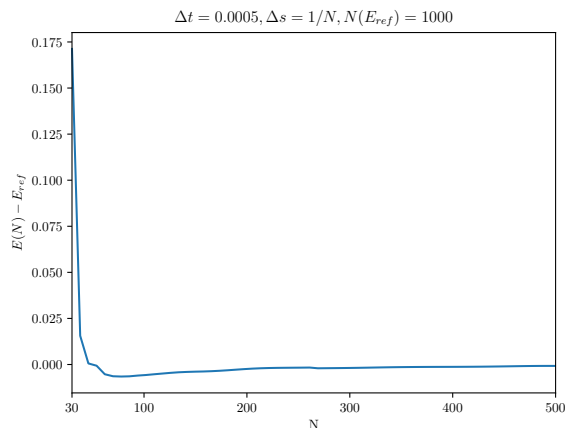
Energija se vmes spet malo spremeni, konvergenca pa je spet monotona, ampak je začetna napaka večja kot pri prejšnjem primeru. Začeti sem moral pri $N=20$, saj je pri $N=10$ prihajalo do nekih napak z neskončnostmi



Še ena oblika začetne niti.



Velik vrh kinetiċne energije pri neki toċki. Upam da bomo to spet videli na animaciji. Napaka okoli $N=20$ sunkovito naraste, kar bom tudi poskusil razloŹiti z animacijo.



Konvergenca, ĉe zaĉnemo pri $N=30$ in se izognemo tistemu skoku. Tokrat ni ĉisto monotona ampak gre malce ĉez pravo vrednost in nazaj.

2.1 Animacije

- V animaciji nihanje2.mp4 vidimo nihanje zadnjih dveh primerov vrvic ter nihanje ravne vrvice pri zelo majhnem zaĉetnem kotu ($\pi/10$). V teh primerih se ob doloĉenem ĉasu vrvica zvije v zanko, kar povzroĉi, da koti zaĉnejo moĉno naraŹati dokler ne postanejo "nan" in se vse skupaj poruŹi (Toĉnega razloga nisem naŹel, se je pa to zgodilo pri vsakem zruŹenju). Tega nisem znal popraviti, poskusil sem z veĉ tridiagonalnimi solverji (SOR, Thomas, Sparse) in z raznimi modulo 2π v metodi pa ni pomagalo.
- Animacija napake.mp4 je bila narejena za iskanje vzroka tistega velikega skoka energije pri $N=20$ v drugem primeru. V animaciji zaĉne tudi $N=30$ divergirati, ko se enkrat spet zazanka (tega na grafu napake energije ni bilo vidno, ker je bila eneregija izraĉunana Źe pri $t=1.5$). Uporaben rezultat iz animacije pa je, da je manjŹe Źtevilo N lahko boljŹe. Sicer je vrvica seveda manj natanĉno opisana, a je metoda bolj stabilna, teŹje se namreĉ naredijo zanke.
- V animaciji ravnistar.mp4 so prikazana razna gibanja vrvic z zaĉetnim pogojem ravne vrvice pri razliĉnih kotih. Za boljŹo stabilnost je bil izbran $N=20$.

- V animaciji ukrivljenstart.mp4 je prikazana podobna stvar le da začnemo z različno nagnjenimi ukrivljenimi vrvicami. Tukaj vidim, da so nekatere vrvice obstale še nekaj časa po tvorbi zankic, tako da nisem več prepričan, če je to razlog za nestabilnost. Spet sem izbral $N=20$, vidimo, da lepo obstanejo samo tiste, ki so začele z velikim kotom (merjen od horizontale)
- V animaciji vecinfo.mp4 je čisto prvi primer prikazan v počasnejšem posnetku, s tem da je zraven za vsak čas prikazana se porazdelitev sil in hitrosti po dolžini vrvice.