Parcialne Diferencialne Enačbe: Lastne Rešitve

Andrej Kolar-Požun, 28172042

5. april 2018

1 Kvadratna opna

Rešujemo valovno enačbo za opno brez zunanjega tlaka, ki jo poneostavimo z nastavkom:

$$\nabla^2 u = \frac{\rho(x,y)d}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$u(x,y,t) = u(x,y)e^{-i\omega t}$$
$$\nabla^2 u(x,y) = -\frac{\omega^2\rho(x,y)d}{\gamma}u(x,y) = -k^2(x,y)u(x,y)$$

Kot v prejšnji nalogi, enačbo diskretizirajmo:

$$\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{ij}}{h^2} = -k_{ij}^2 u_{ij}$$

Dobili smo posplošen problem lastnih vrednosti

$$Au = \lambda Bu$$

Kjer matrika A predstavlja diskretiziran Laplacev operator, matrika B pa krajevno odvisnost gostote.

Za začetek si poglejmo primer homogene opne, kjer rešujemo navadni problem lastnih vrednosti $Au = \lambda u$. Analitične rešitve poznamo:

$$u(x,y) = sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right)$$
$$k_{n,m}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)$$

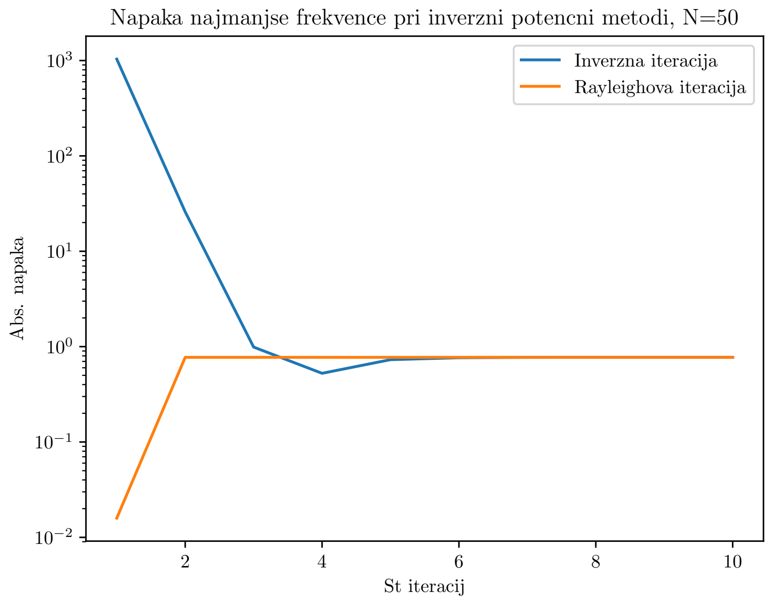
Za začetek bom preizkusil navadno potenčno metodo, kjer delam sledečo iteracijo:

$$b_{k+1} = \frac{(A-\mu I)^{-1}b_k}{||(A-\mu I)^{-1}b_k||}$$

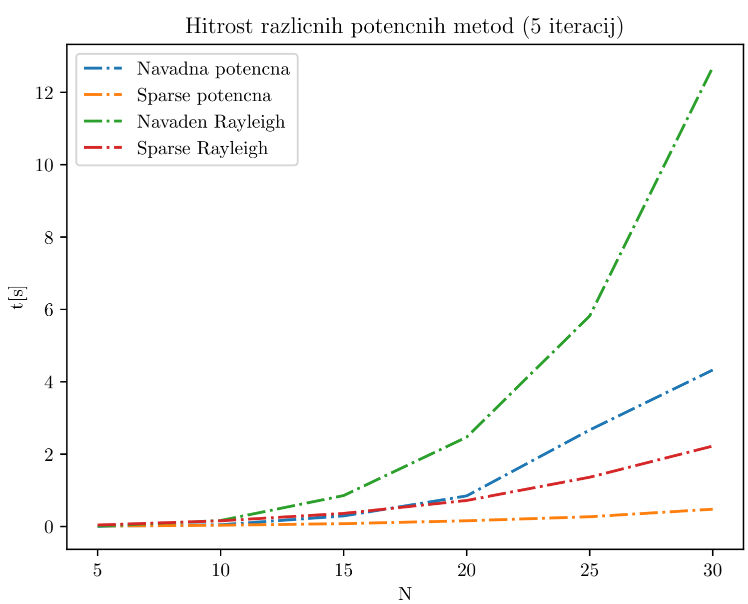
Kjer začnemo z poljubnim približkom za lastni vektor b_0(jaz bom začel z samimi enicami v vektorju). μ je naš začetni približek za lastno vrednost, kar bo v mojih primerih 1. Po konvergenci imamo lastni vektor b, lastno vrednost potem dobimo enostavno iz enacbe $Ab = \lambda b$

Preizkusil bom še Rayleighovo iteracijo, kjer sproti popravljamo še lastno vrednost in tako hkrati dobimo še to:

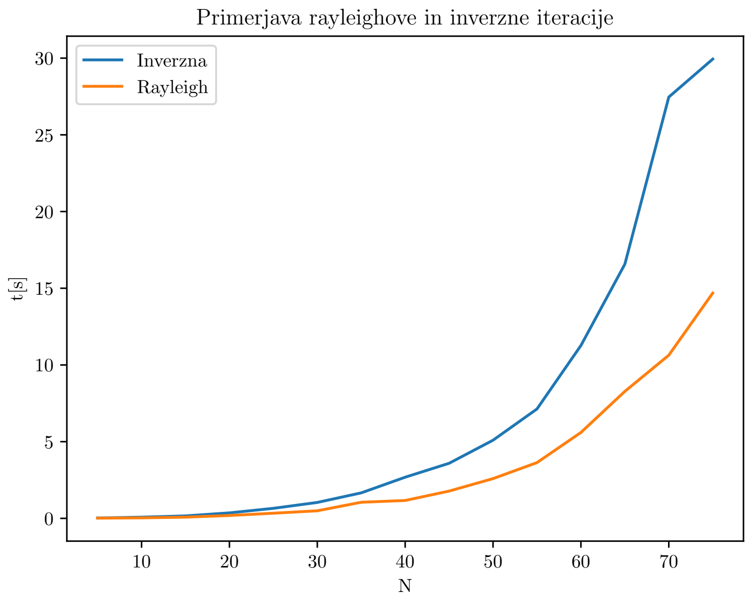
$$b_{k+1} = \frac{(A-\mu_i I)^{-1}b_k}{||(A-\mu_i I)^{-1}b_k||}$$
$$\mu_i = \frac{b_i^T A b_i}{b_i^T b_i}$$



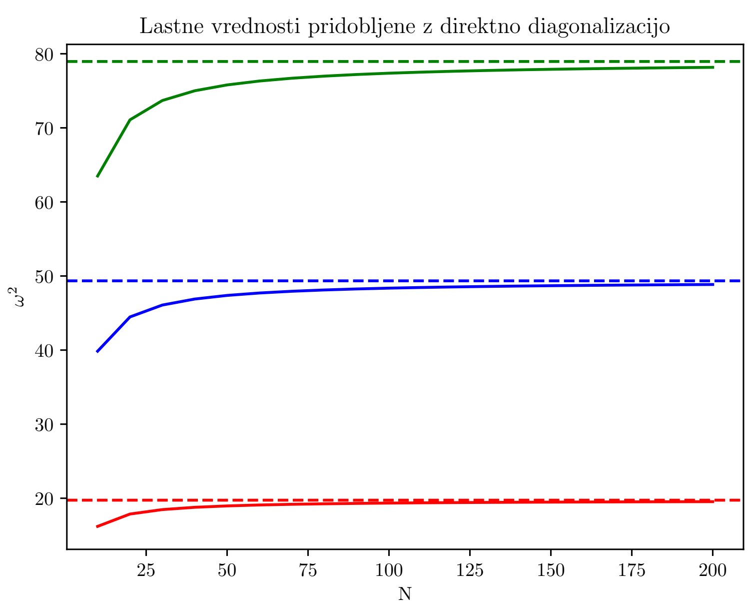
Najprej sem preveril kako hitro konvergirata potencni metodi. Navadna je inverzna iteracija, Rayleigh pa je iteracija z Rayleighovim kvocientom kot opisano zgoraj. Rayleigh konvergira že po 2 iteracijah, metdem ko jih potencna potrebuje priblizno dva krat več. Večjo natančnost bi lahko pridobil z gostejšo diskretizacijo(večjim N)



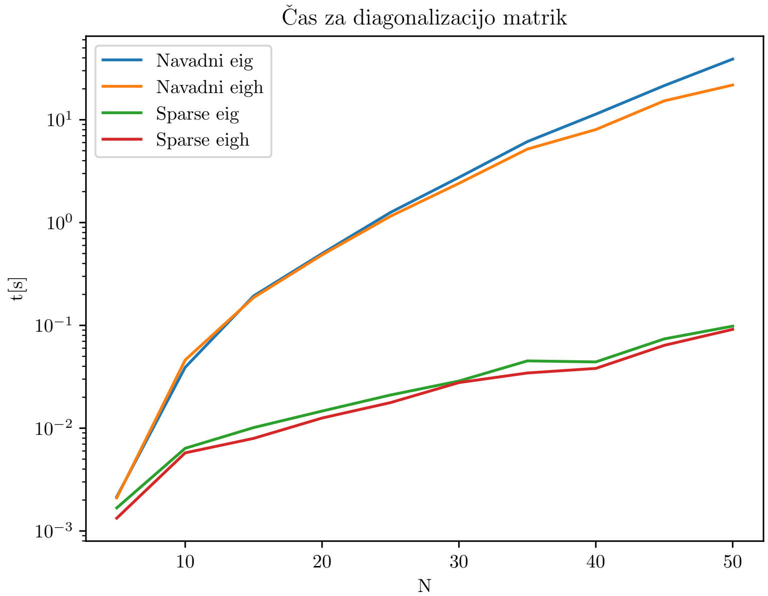
Sedaj sem pogledal še hitrost metod. Primerjal sem hitrost delanja z sparse in dense matrikami. Gotovo lahko vidimo, da se zelo splača delati s Sparse matrikami.



Prej smo videli, da Rayleigh rabi manj iteracij, da pride do rešitve, vendar rabi več časa na iteracijo. Zato sem tukaj primerjal rayleigha z navadno inverzno iteracijo, oba pri Sparse matrikah. Tukaj sem bolj naivno predpostavljal, da rayleigh pri vseh N konvergira v 2, navadna pa v 6 iteracijah. Za večjo natančnost bi moral nehati z iteracijo, ko bi prišel do določene želene natančnosti

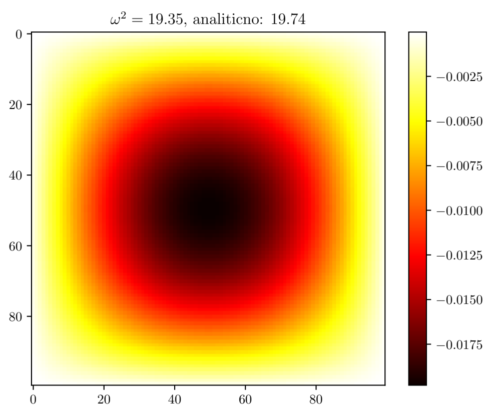


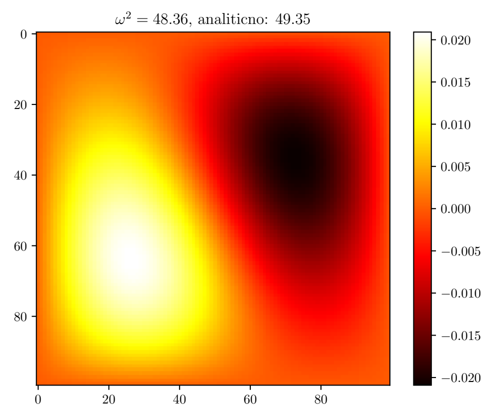
Tukaj sem preveril še direktno diagonalizacijo matrike. Vidimo, da je diskretizacija na nekaj 10 točk dovolj, da kar točno zadanemo 3 najnižje(brez upoštevanja degenerirane) frekvence. Ravne horizontalne črte predstavljajo točno rešitev

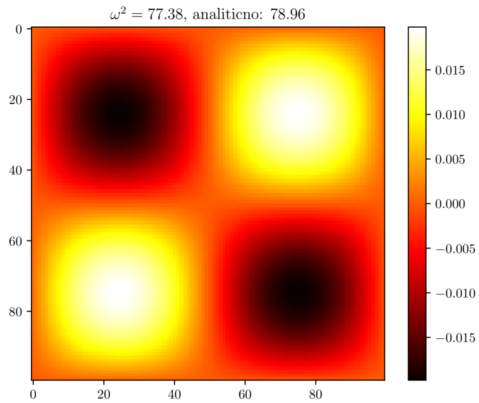


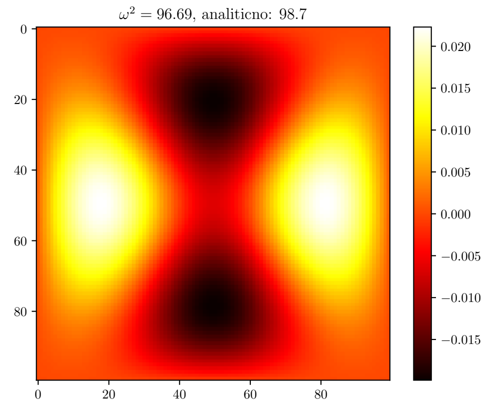
Tukaj vidim, da s sparse matrikami spet delamo veliko hitreje. Malo me je pa presenetilo, da časovno ne pridobimo veliko, če delamo z metodama, ki sta specializirani za simetrične matrike(eigh,eigsh)

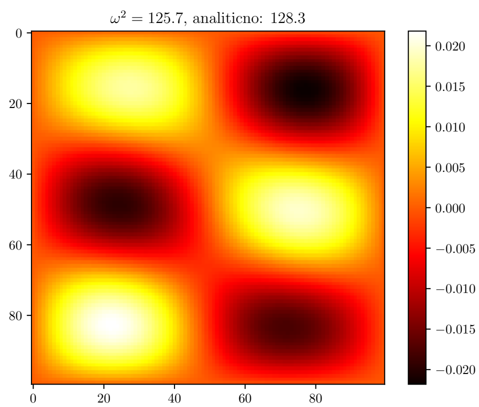
Poglejmo si zdaj nekaj rešitev:

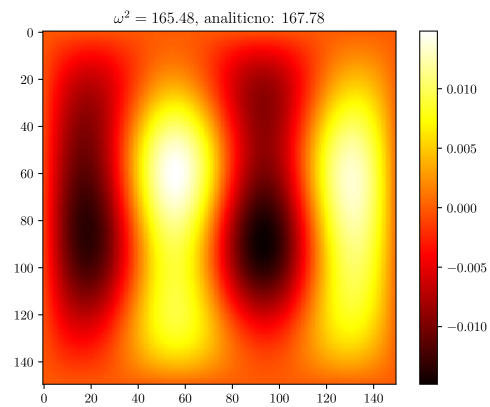


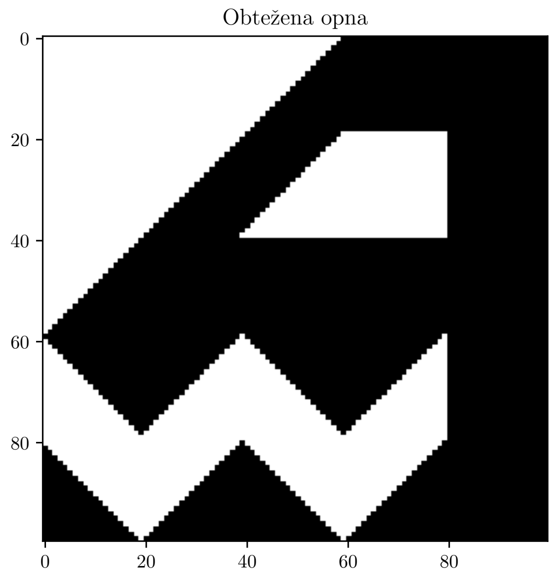



$\omega^2 = 77.38$, analiticno: 78.96


$\omega^2 = 96.69$, analiticno: 98.7

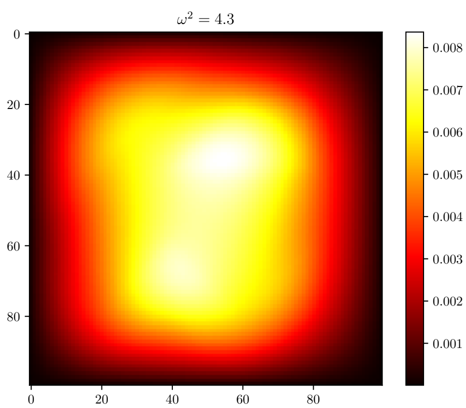

$\omega^2 = 125.7$, analiticno: 128.3

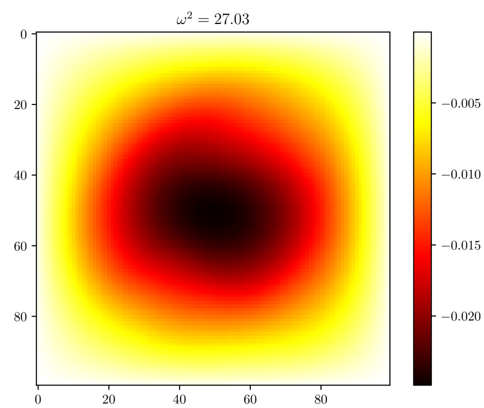

$\omega^2 = 165.48$, analiticno: 167.78

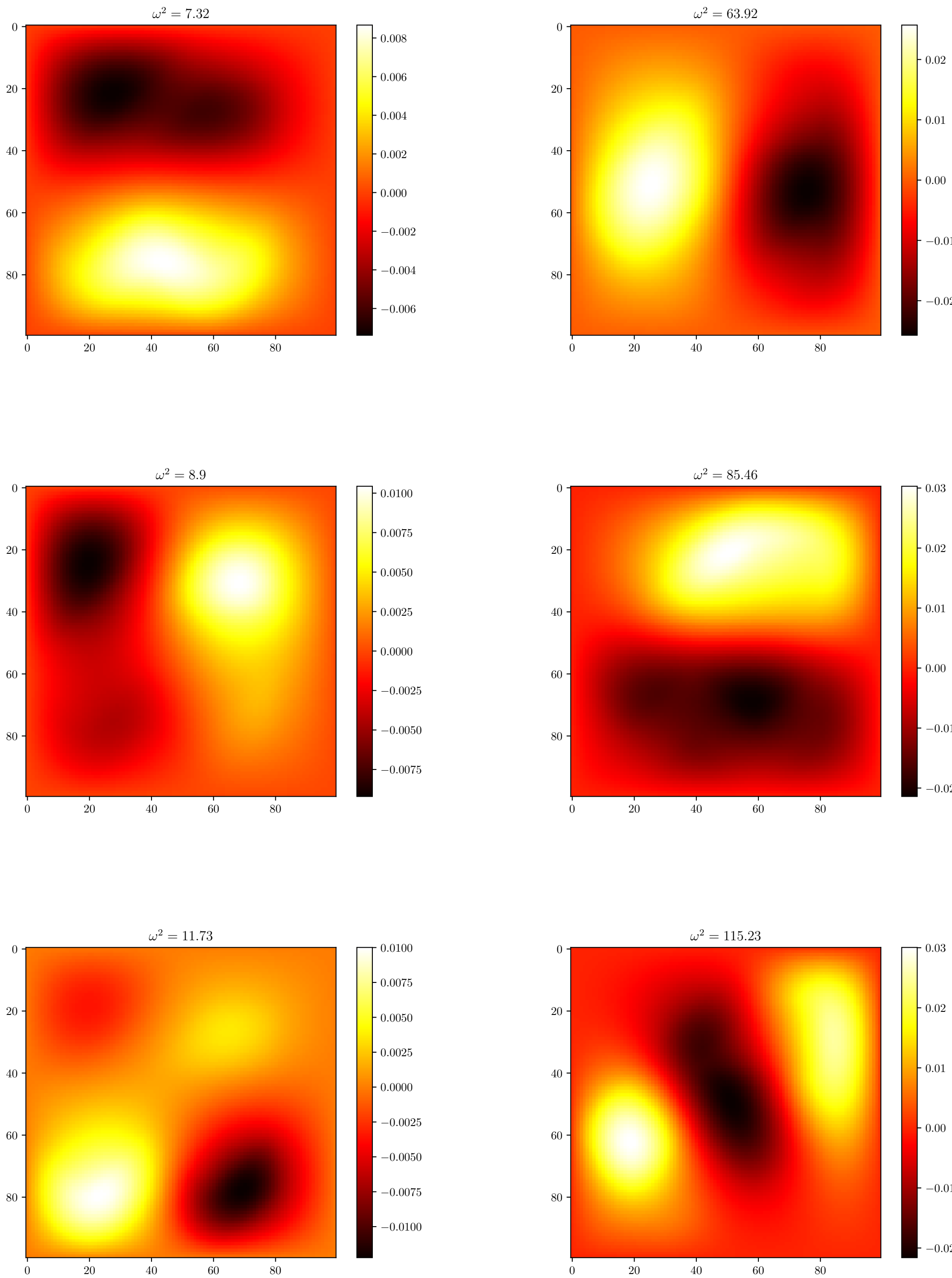


Naslednja naloga zahteva, da poiščemo lastna nihanja na takile opni, kjer sta različno obarvana dela različno težka. Gostoto črnega dela bom držal na 1, belega pa bom spreminjal

Na levi so rezultati, kjer je črni del 10 krat lažji na desni pa 10 krat težji od belega:



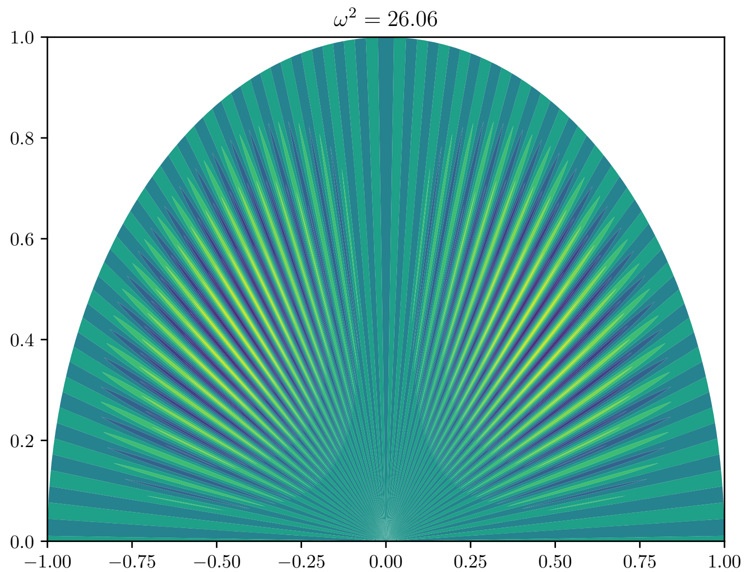



$\omega^2 = 7.32$
$\omega^2 = 63.92$
$\omega^2 = 8.9$
$\omega^2 = 85.46$
$\omega^2 = 11.73$
$\omega^2 = 115.23$

2 Polkrožna opna

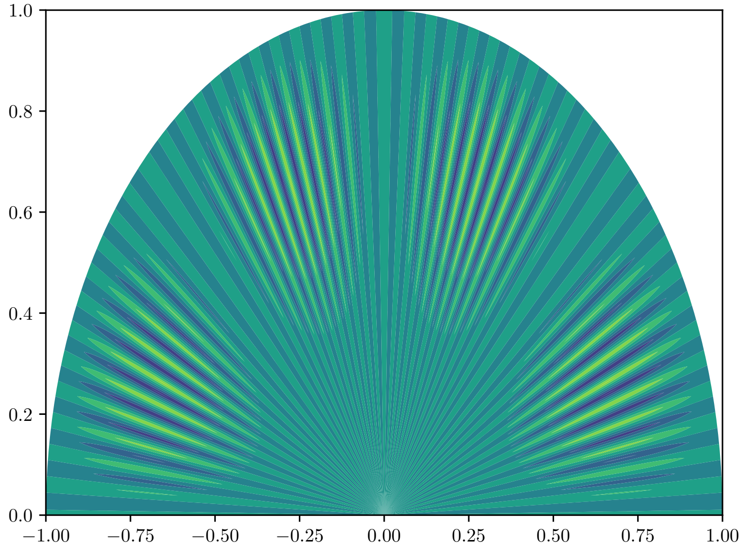
Sedaj bom nalogo ponovil na polkrožni opni z Dirichletovimi robnimi pogoji. Diskretizirajmo Laplacian v polarnih koordinatah:

$$\nabla^2 u_{ij} = \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2ih_r^2}\right) u_{i+1,j} + \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2ih_r^2}\right) u_{i-1,j} - 2\left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{h_\varphi^2 h_r^2 i^2}\right) u_{i,j} + \frac{1}{h_\varphi^2 h_r^2 i^2}\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$



Direktna diagonalizacija tukaj zaradi nekega razloga ni našla lastnih vektorjev, zato sem se lotil iskanja rešitve z potenčno metodo. Nisem prepričan, če je ta konvergirala k najnižji frekvenci oziroma če je narisano sploh pravilno. Na sliki dobim čudne črte, ki bi lahko bile posledica tega, da sem tokrat za risanje uporabil contourf namesto imshow.

$\omega^2 = 54.88$



$\omega^2 = 70.22$