

Metoda robnih elementov

Andrej Kolar-Požun, 28172042

10. maj 2018

1 Elektroda

Tokrat bomo 2 dimenzionalno Laplaceovo enačbo reševali z metodo robnih elementov. Za 2-D Laplacovo enačbo poznamo Greenovo funkcijo in vemo, da lahko robne pogoje upoštevamo s pomočjo Greenove identitete:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= 0 \\ G(x, y; x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ u(r) &= \int_S G(r; r_0) \frac{\partial u(r_0)}{\partial n} dS_0 - \int_S u(r_0) \frac{\partial G(r; r_0)}{\partial n} dS_0\end{aligned}$$

V naši nalogi imamo opravka z nabito elektrodo dolžine l . Izhodišče koordinatnega sistema si bom izbral na robovih elektrode, torej bosta robova elektode pri $x = \pm l/2$.

Pri metodi robnih elementov elektrodo razdelim na N odsekov C_i , pri kateri je koordinata i -tega enaka $(x_i, y_i) = (-\frac{l}{2} + \frac{l}{2N} + \frac{il}{N}, 0)$

S pomočjo Greenove funkcije lahko določimo prispevek k potencialu kjerkoli v prostoru, ki ga povzročajo vsi odseki. Rešitev zapišemo kot konvolucijo Greenove funkcije z ploskovno gostoto naboja (desna stran pravzaprav Poissonove enačbe):

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \sigma \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \log((x - \xi)^2 + y^2) d\xi = \\ &= \frac{\sigma}{2\pi} \left(-l + y \left(\arctan\left(\frac{x_-}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x_+}{y}\right) \right) + \frac{x_-}{2} \log(x_-^2 + y^2) - \frac{x_+}{2} \log(x_+^2 + y^2) \right) \\ x_+ &= x - l/2, \quad x_- = x + l/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} u \\ E_x &= -\frac{\sigma}{4\pi} \log\left(\frac{x_-^2 + y^2}{x_+^2 + y^2}\right) \\ E_y &= -\frac{\sigma}{2\pi} \left(\arctan\left(\frac{x_-}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x_+}{y}\right) \right)\end{aligned}$$

Zgornjo formulo uporabimo na vsakem izmed odsekov in seštejemo prispevke, da dobimo celoten potencial.

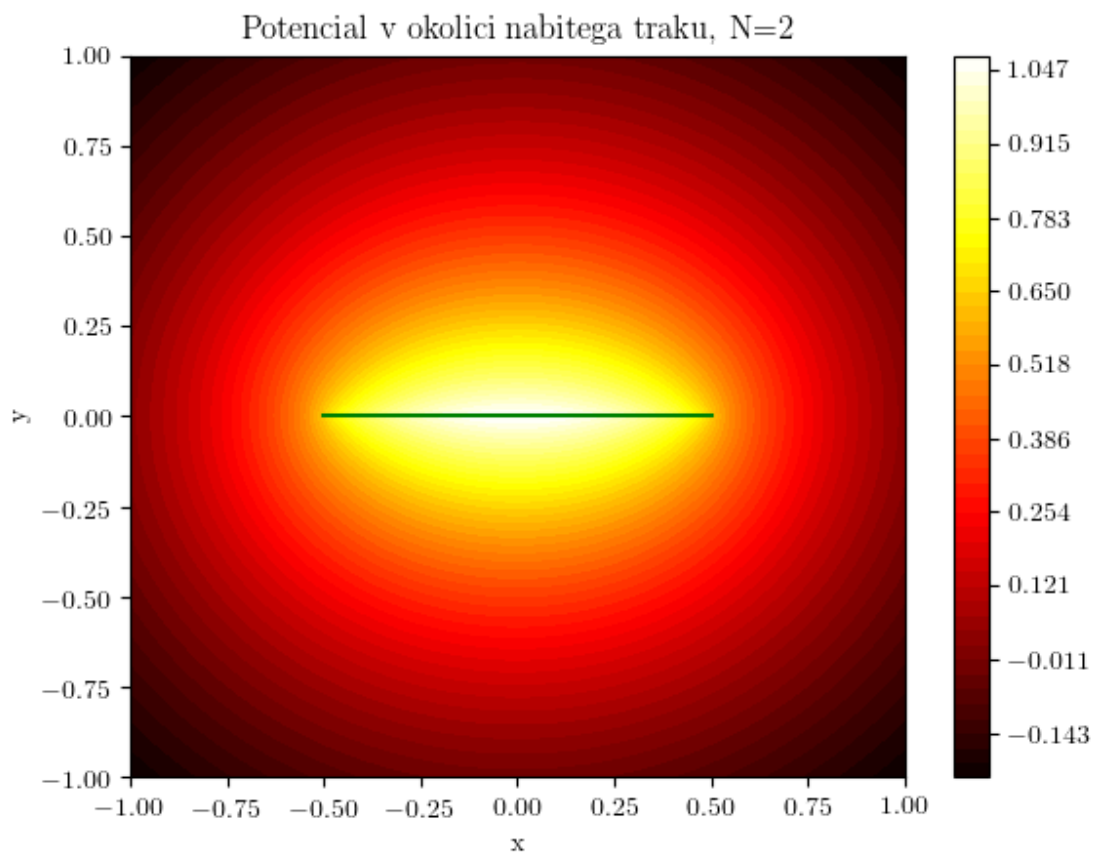
$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i(x, y)$$

Kjer je u_i podoben kot zgoraj definiran u , le, da namesto σ vstavimo σ_i in namesto x vstavimo $x - (-\frac{l}{2} + \frac{l}{2N} + \frac{il}{N})$

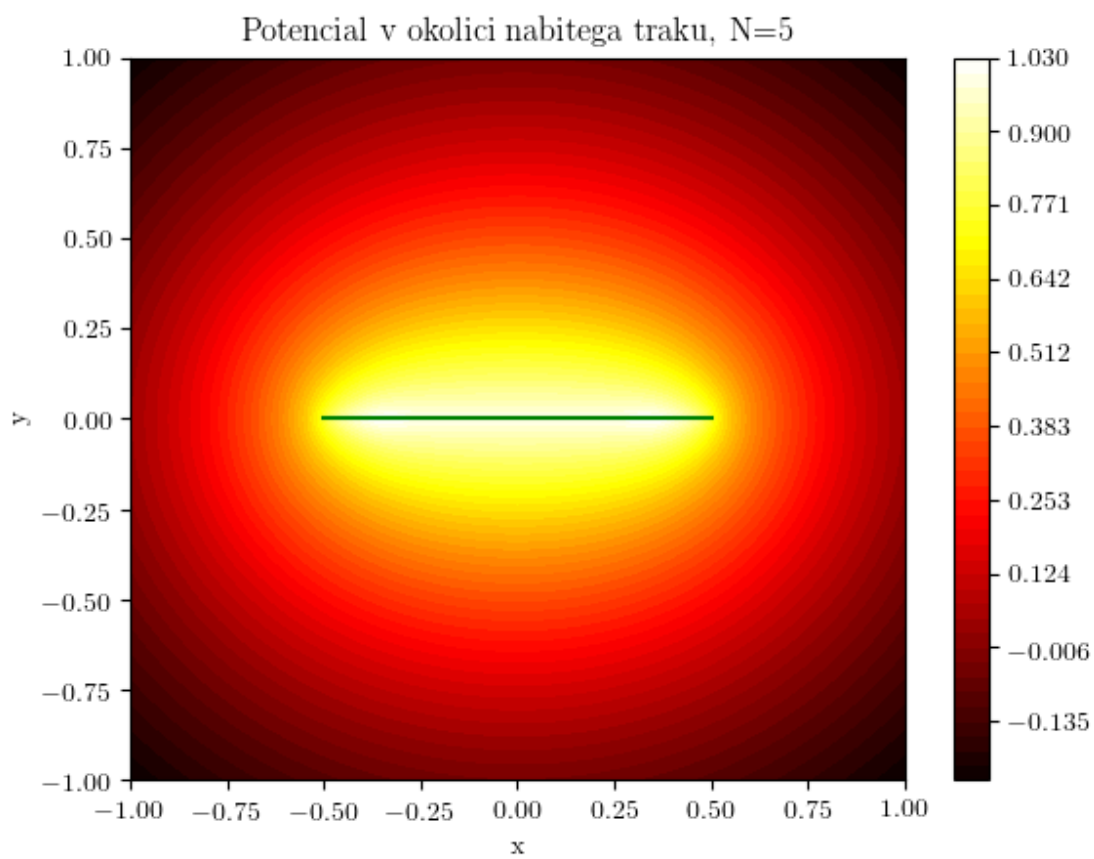
Ploskovne gostote naboja so zaenkrat neznane. Dobimo jih lahko tako, da zahtevamo, da je potencial na celotnem traku konstanten, recimo kar ena:

$$u_i = a_{ij}\sigma_j$$

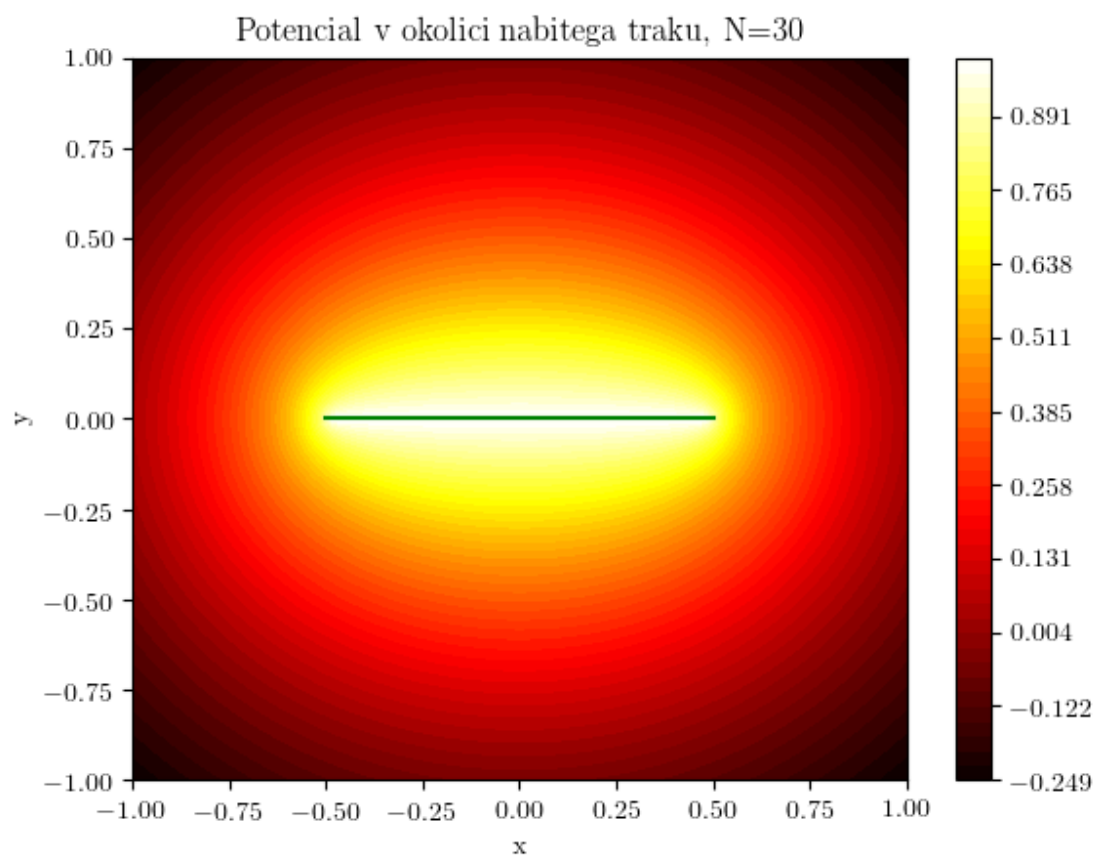
Kjer je a_{ij} ravno zgornji izraz, izračunan v sredini i-tega odseka.



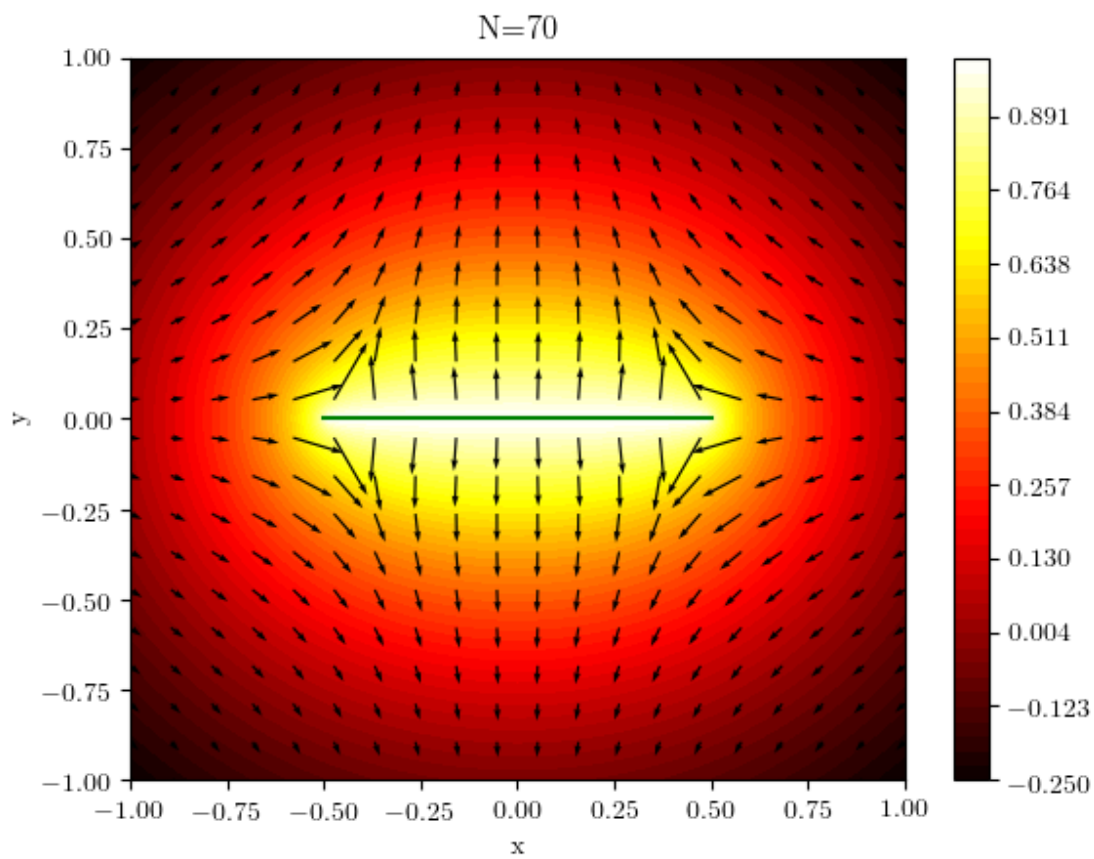
Potencial, če elektrodo razdelimo na le dva robna elementa. Ne izgleda preveč slabo, a vseeno vidimo, da gre potencial ponekod čez 1 in, da imamo pravzaprav opravka z le dvema točkastima nabojoma.



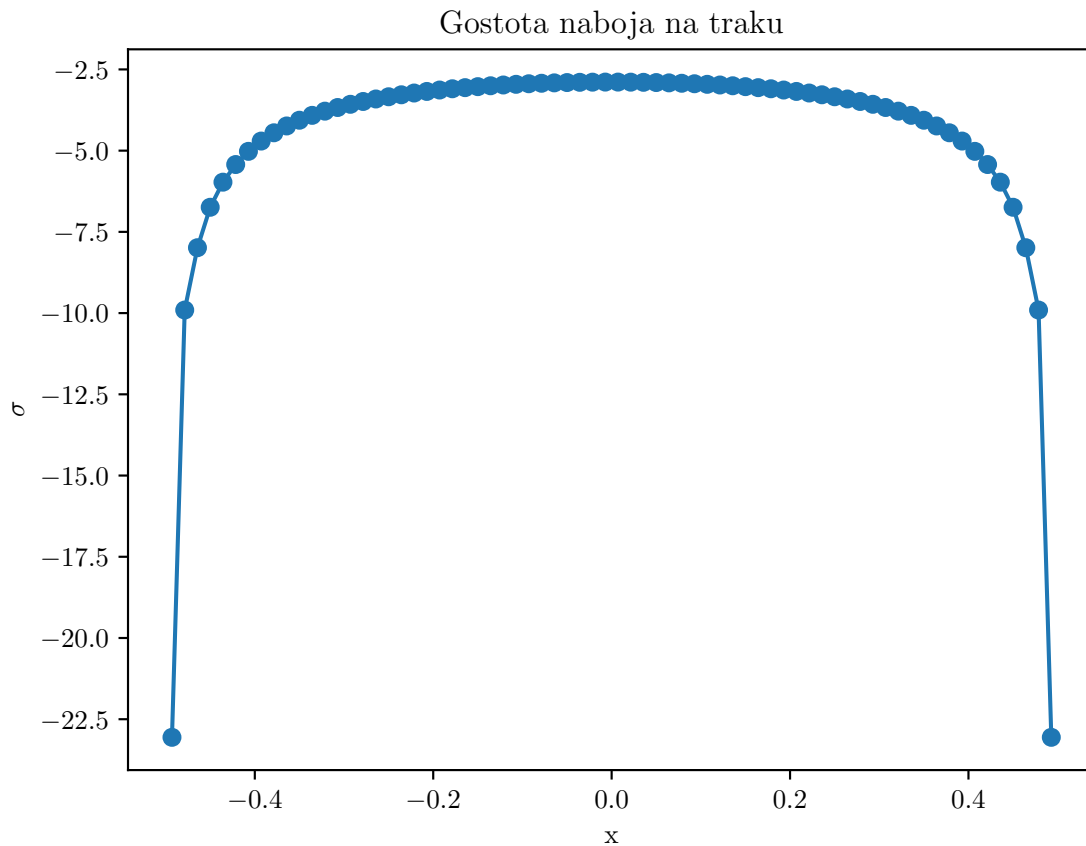
Pri $N=5$ je malo boljše. Tisti del z visokim potencialom se malo bolj razleze in prilega palici



Ta profil pa zgleda pravilen.



Poleg potenciala so tukaj narisane še smeri električnega polja. Na koncema palice izgleda malo čudno, ker se tam stvari najbolj spreminjajo



Še porazdelitev naboja po traku. Simetrična, kot bi pričakovali

2 Obtekanje vode

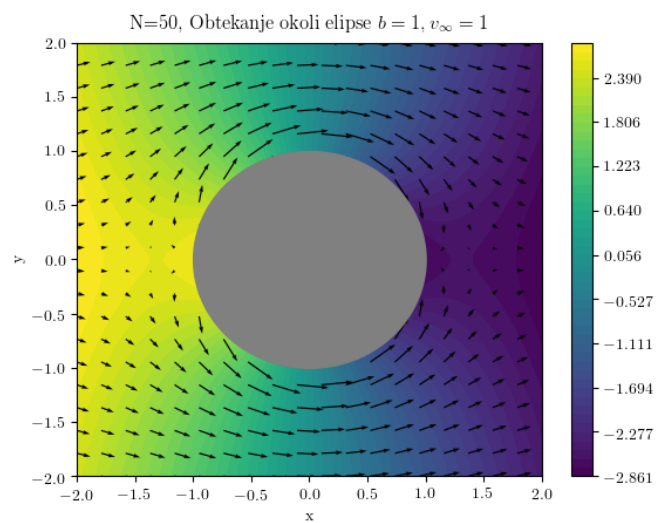
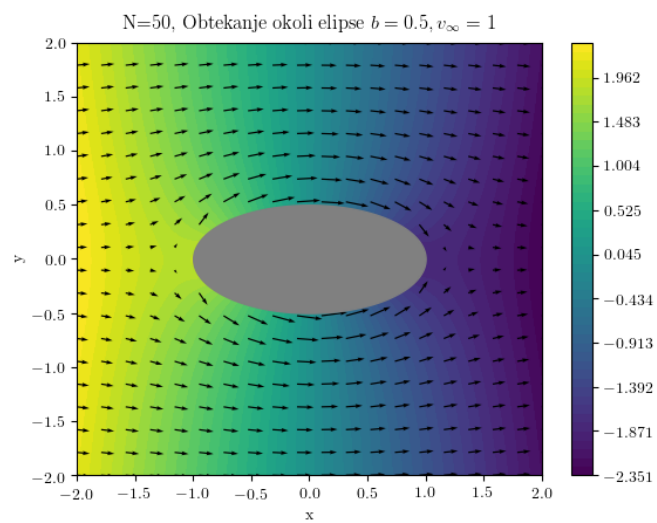
Sedaj bom obravnaval še problem obtekanja vode okoli neke ovire. Za hitrostni potencial rešujemo spet isto enačbo, razlika bo v določanju gostote "naboja" na oviri. Tokrat nočemo, da je ta konstanta po oviri. Fizikalen robni pogoj je, da ob oviri hitrost tekočine nima normalne komponente, saj ta ne more teči v kovino. Fiksirano imamo hitrost tekočine nekje daleč od ovire, ki bo z določeno velikostjo kazala v x smeri.

Po analogiji iz prejšnje naloge rešujemo sistem $u_i = a_{ij}\sigma_j$, kjer je u_i sedaj negativna projekcija hitrosti daleč od ovire na i -to plaketo, a_{ij} predstavlja vpliv "vodnjaka" na j -ti plaketi na normalno komponento hitrosti na i -ti plaketi, σ_j pa je "moč vodnjaka" na j -ti plaketi.

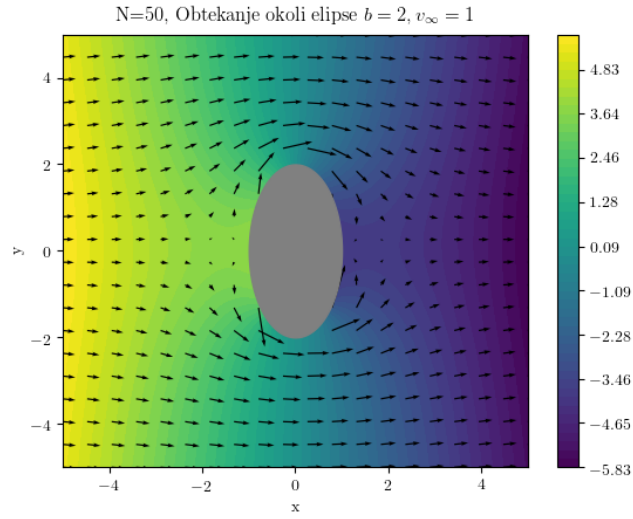
Za začetek naj bo ovira v obliki elipse, torej parametrizirana z kotom:

$$x = \cos \varphi$$

$$y = b \sin \varphi$$



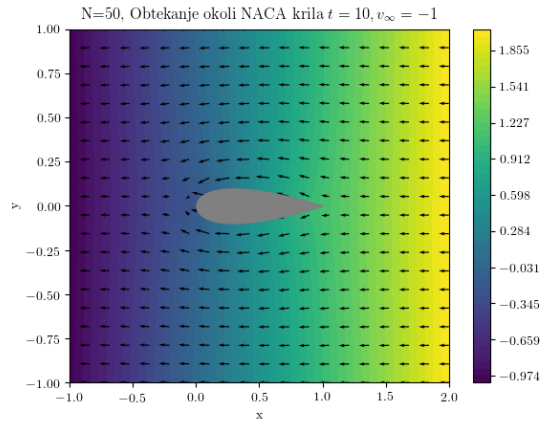
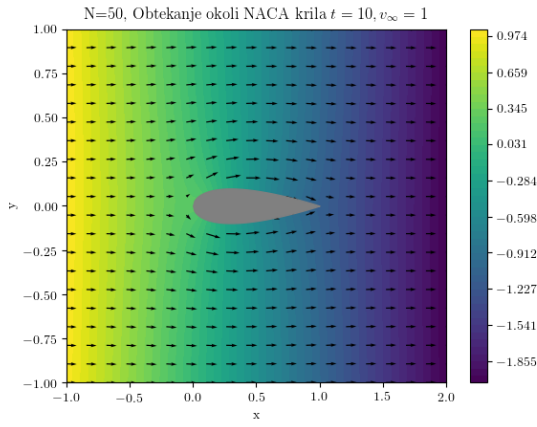
$b=1$ seveda ustreza okrogli oviri.

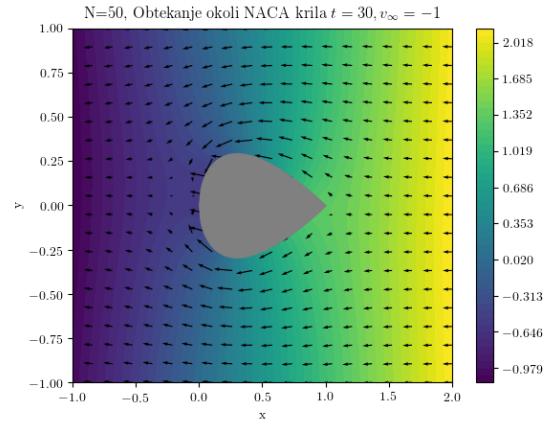
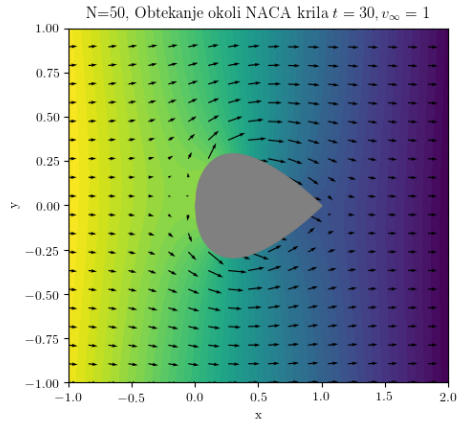
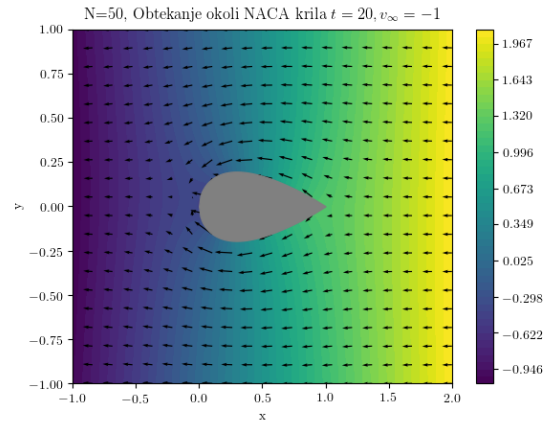
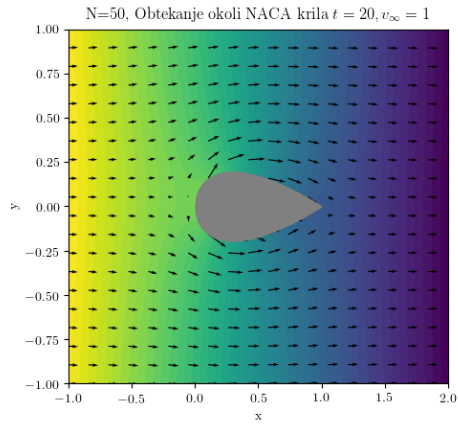


Bolj realistično NACA krilo dobimo z naslednjo formulo:

$$y(x) = \frac{t}{50} (1.457122\sqrt{x} - 0.624424x - 1.72016x^2 + 1.384087x^3 - 0.489769x^4)$$

Na naslednjih slikah so določene jakosti polj zelo blizu ovire očitno napačne. Razlog je v tem, da so to deli puščic močnih polj v oviri in nas zato ne zanimajo.



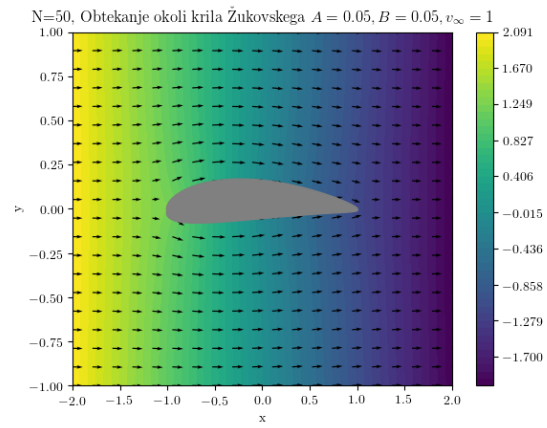
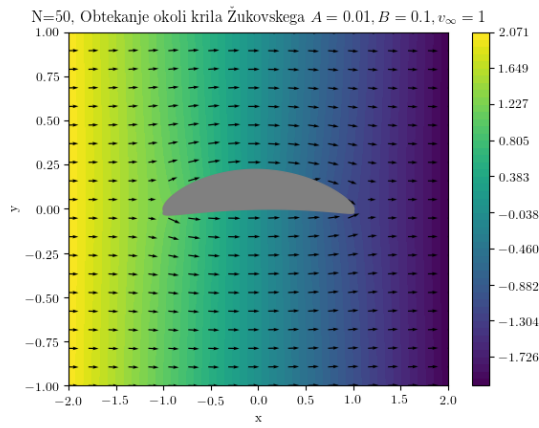
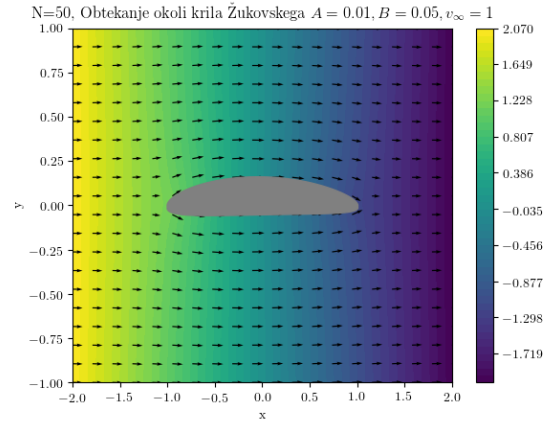
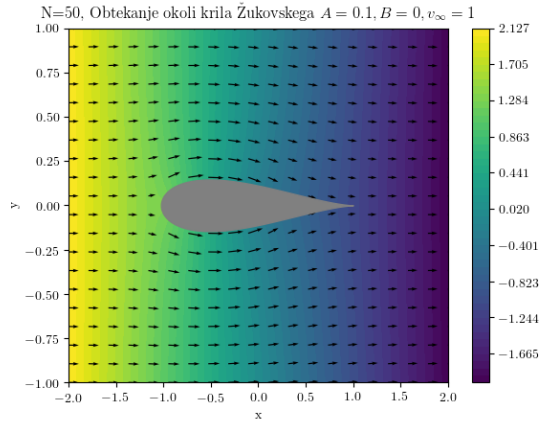
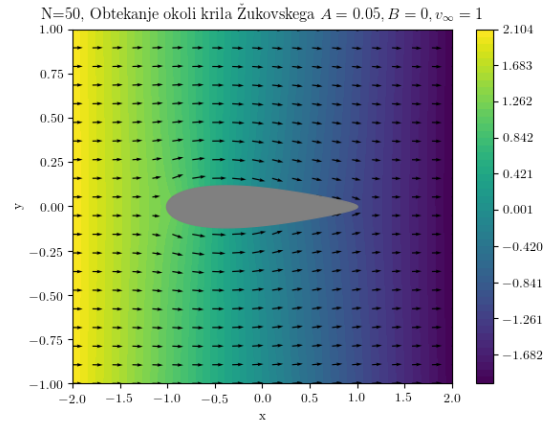
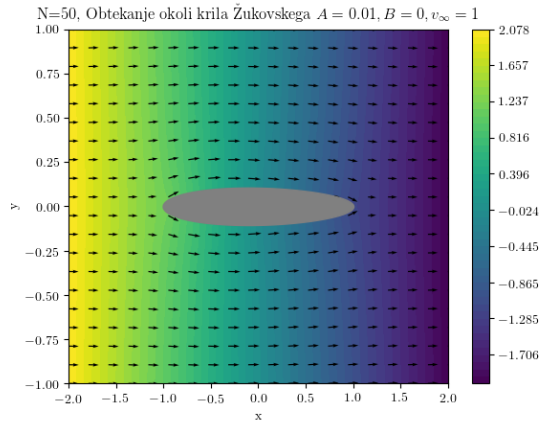


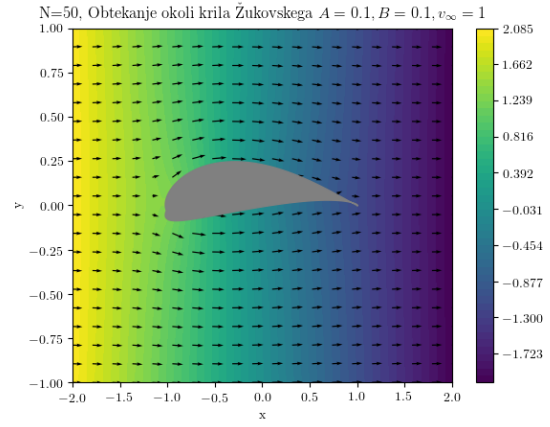
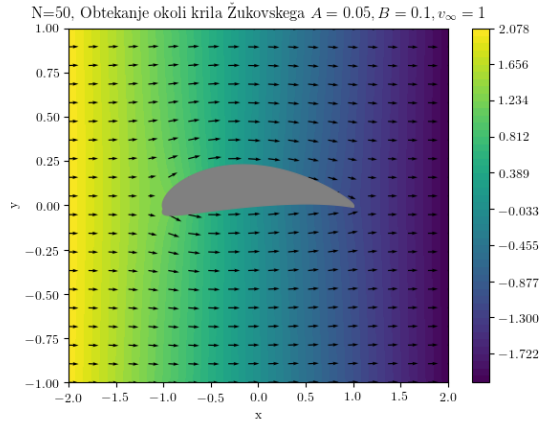
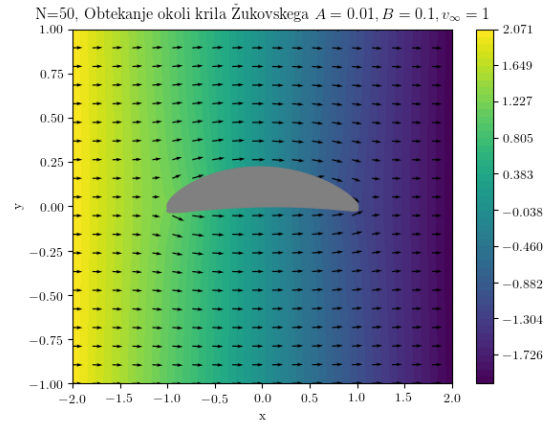
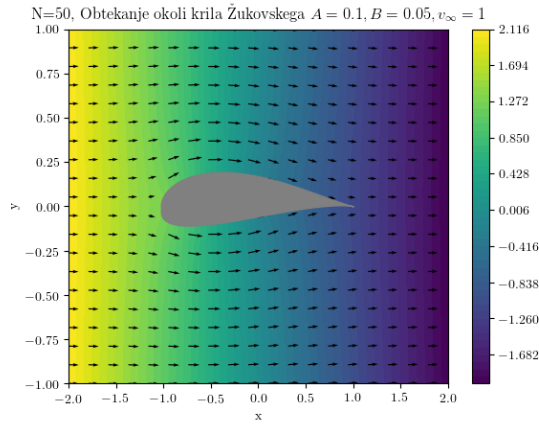
Še zadnji primer o tako imenovano krilo Žukovskega, ki ga dobimo na naslednji način

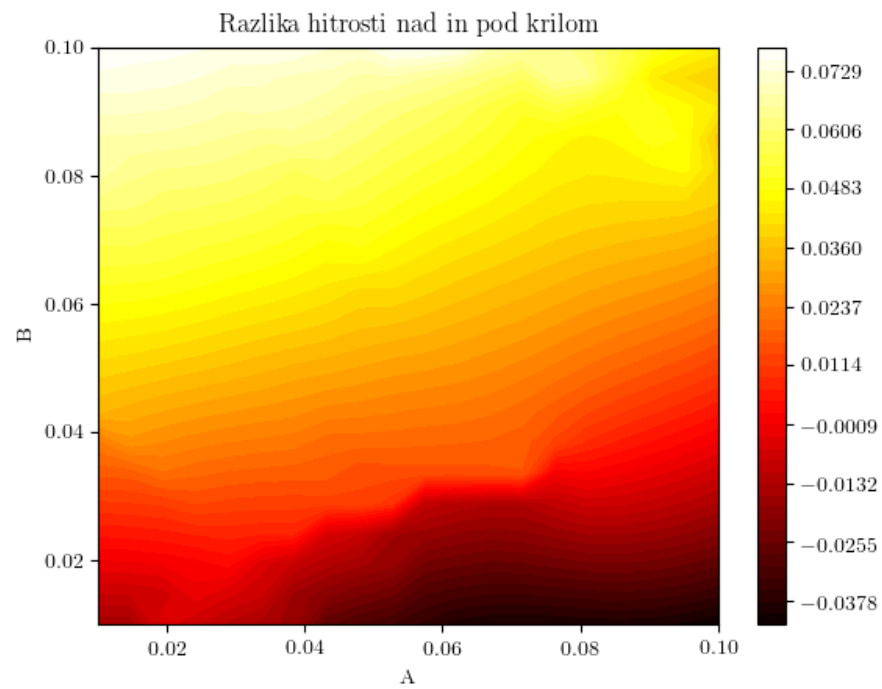
$$(x, y) = (Re(z), Im(z))$$

$$z = f(A + iB + re^{i\varphi})$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$







Tukaj sem prikazal razliko x komponente hitrosti zgornjega in spodnjega dela krila. Večja razlika se zdi, da bi pripomorla k večji sili in boljšem krilu. X komponenta hitrosti je vedno izračunana v globalnem lokalnem sistemu, kar ni vedno podobno tangencialni hitrosti blizu krila, zato je ocena lahko napačna