1 Naloga

Za dan predpis

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & (x,y \in \mathbb{Q}) \text{ ali } (x,y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \\ |x-y|+1, & (x \in \mathbb{Q} \text{ in } y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \text{ ali } (x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ in } y \in \mathbb{Q}) \end{cases} \tag{1}$$

dokažite, da določa metriko na $\mathbb{R}$.
Preveriti moramo, da $d(x,y)$ zadošča vsem 4 aksiomom metrike.

1.1 Aksiom 1

Preveriti moramo, da je $d(x,y) \geq 0$ za vsak $x,y \in \mathbb{R}$.
Če je $x,y \in \mathbb{Q}$ ali pa $x,y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, potem velja $d(x,y) = |x-y| \geq 0$.
Če je $x \in \mathbb{Q}$ in $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ali obratno potem velja $d(x,y) = |x-y|+1 > 0$.

Za vsak $x,y \in \mathbb{R}$ torej velja $d(x,y) \geq 0$ (saj je poljuben element iz $\mathbb{R}$ lahko iz $\mathbb{Q}$ ali $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in smo vse možne primere obravnavali)

1.2 Aksiom 2

Preveriti moramo, da za vsak $x,y \in \mathbb{R}$ velja $d(x,y) = d(y,x)$.
Če je $x,y \in \mathbb{Q}$ ali pa $x,y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, potem velja $d(x,y) = |x-y| = d(y,x)$.
Če je $x \in \mathbb{Q}$ in $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ali obratno potem velja $d(x,y) = |x-y|+1 = d(y,x)$.

Za vsak $x,y \in \mathbb{R}$ torej velja $d(x,y) = d(y,x)$.

1.3 Aksiom 3, prvi del

Preveriti moramo, da če za neka $x,y \in \mathbb{R}$ velja $d(x,y) = 0$, potem sledi $x = y$.

Recimo, da za neka $x,y \in \mathbb{R}$ velja $d(x,y) = 0$. Najprej opazimo, da ne more veljati $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ali obratno, saj bi v tem primeru imeli $d(x,y) = |x-y|+1 \geq 1$, v protislovju z našo predpostavko $d(x,y) = 0$.

Ostane možnost, da velja $x,y \in \mathbb{Q}$ ali $x,y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. V tem primeru velja $d(x,y) = |x-y|$, kar je res enako nič le če $x = y$.

1.4 Aksiom 3. drugi del

Recimo, da velja $x = y$, pokazati moramo, da sledi $d(x,y) = 0$. Ekvivalentno, pokazati moramo, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $d(x,x) = 0$.
Če je $x \in \mathbb{Q}$ ali $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, potem velja $d(x,x) = |x-x| = 0$.
Za vsak $x \in \mathbb{R}$ torej velja $d(x,x) = 0$ (saj je poljuben element iz $\mathbb{R}$ lahko ali iz $\mathbb{Q}$ ali iz $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$)

1.5 Aksiom 4

Pokazati moramo, da za vsak $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Recimo, da velja $x, y \in \mathbb{Q}$ ali $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. V tem primeru velja $d(x, y) = |x-y| \leq |x - z| + |y - z| \leq d(x, z) + d(y, z)$ V zadnji neenakosti smo upoštevali dejstvo da je $|x - z| \leq d(x, z)$, kar velja ker je $d(x, z)$ enak $|x - z|$ ali $|x - z| + 1$ (odvisno od z-ja).
Recimo, da velja $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ali obratno. Potem velja $d(x, y) = |x-y|+1 \leq |x - z| + |y - z| + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.
Zadnja enakost sledi iz dejstva, da je z lahko iz $\mathbb{Q}$ ali $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in je torej $d(x, z) = |x - z|, d(y, z) = |y - z| + 1$ ali pa $d(x, z) = |x - z| + 1, d(y, z) = |y - z|$.

S tem smo obravnavali vse možne primere za $x, y, z \in \mathbb{R}$ in je aksiomu 4 zadoščeno.

Ker zadošča vsem aksiomom je $d(x, y)$ metrika na $\mathbb{R}$.