Analiza 4, 1. računski kolokvij **Ime:** ____________________

Datum: 26.11.2024 **Vpisna številka:** ____________________

Čas reševanja: 90 minut

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4. Na razpolago imate 90 minut.

1. (25 točk) Dan imamo sistem diferenčnih enačb:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n + 3z_n + f_n \\ y_{n+1} &= -2y_n + 5z_n + f_n \\ z_{n+1} &= -2z_n \end{aligned}$$

z začetnimi pogoji $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$, kjer je

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{če } n = 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunaj:

a. x_n, y_n, z_n za $n = 1, 2, 3$.

b. x_n, y_n, z_n za poljuben $n > 3$.

2. (25 točk) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x^2y^2 + \frac{2}{x^4}$$

Namig: Ena rešitev ima obliko $y(x) = ax^b$.

3. (25 točk) Kupili smo kepico sladoleda. Tik po nakupu ima kepica temperaturo $T_0 = 0°\text{C}$. Temperatura okolice je konstantna in enaka $T_z = 20°\text{C}$. Kepica je okrogle oblike in se manjša med taljenjem. Predpostavimo, da je radij kepice odvisen od časa kot $R(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1)}}$cm. Spremembo temperature objekta s površino S podaja enačba: $\frac{dT}{dt} = kS(T - T_z)$.

a. Za dan primer razpiši diferencialno enačbo in jo reši. Torej, poišči funkcijo $T(t)$, (kjer zaenkrat k nastopa kot parameter)

b. Po 4 minutah je ta temperatura narasla na 5°C. Kolikšna bo temperatura kepice sladoleda po 10 minutah?

Namig: Nasledjne zveze utegnejo biti koristne:

$$\begin{aligned} 5^{-0{,}18} &\approx 0{,}75 \\ 11^{-0{,}18} &\approx 0{,}65 \end{aligned}$$

Ta naloga ima pomanjkljivo navodilo! Manjka informacija, da se čas t šteje v minutah. Brez tega je naloga nesmiselna (v resnici že enote R(t) niso pravilne)

4. (25 točk) Na banko z mesečno obrestno mero r položimo $S_0 = 5000$ evrov gotovine. Odločimo se, da bomo vsak mesec na banko položili še dodatnih $P = 200$ evrov. S S_n označimo stanje na bančnem računu po n mesecih.

a. Zapiši diferenčno enačbo za S_n in jo reši.

b. Recimo, da imamo po 2 letih na računu 10000 evrov. Pokaži, da je v tem primeru mesečna obrestna mera r enaka približno $\frac{1}{600}$. **Namig:** Za majhne x lahko po binomskem izreku ocenimo $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

c. Zapiši funkcijo S_n, če prvi dve leti mesečno nakazujemo 200 evrov, po tem pa mesečno nakazujemo 400 evrov.

① a) $x_1=-1$ $\quad x_2=1$ $\quad x_3=3$

$y_1=-2$ $\quad y_2=5$ $\quad y_3=-10$

$z_1=0$ $\quad z_2=0$ $\quad z_3=0$

BREZ TE OPAZKE REŠUJEMO 3X3 SISTEM

b) $z_{n+1}=-2z_n,\ z_0=0 \Rightarrow z_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

OSTANE SISTEM $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}f_n\\f_n\end{bmatrix}}_{\vec{f}_n}$

$$A^n=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}^n \overset{\text{JORDAN}}{=} \begin{bmatrix}(-2)^n & n(-2)^{n-1}\\0&(-2)^n\end{bmatrix}$$

1. NAČIN: PO FORMULI $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+\sum_{k=0}^{n-1}A^k\underbrace{f_{n-k-1}}=A^n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+A^{n-2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=$

NI NIČ, KO $n-k-1=1 \Rightarrow k=n-2$ ← TA ČLEN NASTOPA, KO $n\geq 2$, TOREJ TUDI, KO $n>3$

$$=\begin{bmatrix}(-2)^n & n(-2)^{n-1}\\0&(-2)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)^{n-2}&(n-2)(-2)^{n-3}\\0&(-2)^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)^n+n(-2)^{n-1}+(-2)^{n-2}+(n-2)(-2)^{n-3}\\(-2)^n+(-2)^{n-2}\end{bmatrix}$$

2. NAČIN: NEHOM. ČLENA ZA VIŠJE n NI, NPR. $\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}$, $n\geq 3$: $\begin{bmatrix}x_{n+3}\\y_{n+3}\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}3\\-10\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}3(-2)^n-10n(-2)^{n-1}\\-10(-2)^n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(-2)^{n-3}-10(n-3)(-2)^{n-4}\\-10(-2)^{n-3}\end{bmatrix}$$

JE ISTO KOT 1. NAČIN

3. NAČIN: KOT 2., AMPAK BREZ SISTEMA. $n\geq 3$: $y_{n+1}=-2y_n \Rightarrow y_n=C(-2)^n,\ y_3=-10=-8C \Rightarrow C=5/4$

$\Rightarrow y_n=\frac{5}{4}(-2)^n=5(-2)^{n-2}$

$x_{n+1}=-2x_n+y_n=-2x_n+\frac{5}{4}(-2)^n$

H: $x_n^H=A(-2)^n$

P: $x_n^P=C(-2)^n\cdot n$: $C(n+1)(-2)^{n+1}=-2Cn(-2)^n+\frac{5}{4}(-2)^n$

$-2C=\frac{5}{4}\Rightarrow C=-\frac{5}{8}$

$x_n=A(-2)^n-\frac{5}{8}n(-2)^n,\quad 3=x_3=-8A+15\Rightarrow A=\frac{3}{2}$

$x_n=\frac{3}{2}(-2)^n-\frac{5}{8}n(-2)^n=-3(-2)^{n-1}+5n(-2)^{n-3}$

TUDI ISTO KOT PREJ

② $y' = x^2y^2 + 2x^{-4}$, $y^p = ax^b \Rightarrow bax^{b-1} = a^2x^{2b+2} + 2x^{-4}$

RICCATI

ENAKOST EKSPONENTOV: $b-1 = 2b+2 = -4 \Rightarrow b = -3$

ENAKOST KOEFICIENTOV $-3a = a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0$

$(a+2)(a+1) = 0$

1. NAČIN $b = -3,\ a = -1$ $y^p(x) = -\frac{1}{x^3}$

$y = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{z}$, $y' = \frac{3}{x^4} - \frac{z'}{z^2}$

$\cancel{\frac{3}{x^4}} - \frac{z'}{z^2} = x^2\left(\cancel{\frac{1}{x^6}} - \frac{2}{x^3z} + \frac{1}{z^2}\right) + \cancel{\frac{2}{x^4}}$

$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{2}{xz} + \frac{x^2}{z^2}$

$+z' = 2\frac{z}{x} - x^2$

H: $z' = 2\frac{z}{x}$

$\int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x}$

$\ln z = \ln x^2 + \ln C$

$z^H = Cx^2$

P: $z^p = C(x)\cdot x^2$

$C'(x)x^2 = -x^2$

$C'(x) = -1$

$C(x) = -x$

$z^p(x) = -x^3$

$z(x) = Cx^2 - x^3$

$y(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{Cx^2 - x^3}$

2. NAČIN $b = -3,\ a = -2$ $y^p(x) = -\frac{2}{x^3}$

$y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{z}$, $y' = \frac{6}{x^4} - \frac{z'}{z^2}$

$\cancel{\frac{6}{x^4}} - \frac{z'}{z^2} = x^2\left(\cancel{\frac{4}{x^6}} - \frac{4}{x^3z} + \frac{1}{z^2}\right) + \cancel{\frac{2}{x^4}}$

$z' = 4\frac{z}{x} - x^2$

H: $z' = 4\frac{z}{x}$

$\int\frac{dz}{z} = 4\int\frac{dx}{x}$

$z = Cx^4$

P: $z = C(x)x^4$

$C'(x)x^4 = -x^2$

$C'(x) = -x^{-2}$

$C(x) = \frac{1}{x}$

$z^p(x) = x^3$

$z(x) = Cx^4 + x^3$

$y(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{Cx^4 + x^3}$

ISTO (AMPAK DRUGE KONSTANTE

③ $S = 4\pi R^2 = \frac{1}{t+1}\ cm^2$ ← PIŠIMO BREZ ENOT, DA BO HITREJE

a) $\frac{dT}{dt} = k \cdot \frac{1}{t+1}(T-20) \Rightarrow \frac{dT}{T-20} = \frac{k\,dt}{t+1} \Rightarrow \ln(T-20) = k\ln(t+1) + \ln C$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = 20 + C(t+1)^k}$

b) $T(0) = 0 \Rightarrow 0 = 20 + C \Rightarrow C = -20 \Rightarrow T(t) = 20\left(1-(t+1)^k\right)$

$T(4) = 5 = 20(1-5^k) \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - 5^k \Rightarrow 5^k = \frac{3}{4} \underset{\text{NAMIG}}{\Rightarrow} k \doteq -0.18$

$T(10) = 20(1 - 11^{-0.18}) \doteq 20(1-0.65) \doteq 20 \cdot 0.35 \doteq 7\ °C$

④ a) KOT PRI MODELIRANJU DOLGA:

$$S_n = S_{n-1}(1+r) + P$$

H: $\lambda - (1+r) = 0 \Rightarrow \lambda = 1+r \Rightarrow S_n^H = C(1+r)^n$

P: $S_n = A \Rightarrow A = A(1+r) + P \Rightarrow -Ar = P \Rightarrow A = -\frac{P}{r}$

SPLOŠNO: $S_n = C(1+r)^n - \frac{P}{r}$. $\quad S_0 = C - \frac{P}{r} \Rightarrow C = S_0 + \frac{P}{r}$

$\Rightarrow S_n = \left(S_0 + \frac{P}{r}\right)(1+r)^n - \frac{P}{r} = S_0(1+r)^n + \frac{P}{r}\left((1+r)^n - 1\right) \cancel{= 5000(1+r)}$

b) $S_{24} = 10000$.

$10000 = 5000(1+r)^{24} + \frac{200}{r}\left((1+r)^{24} - 1\right) \overset{\text{NAMIG}}{\doteq} 5000(1+24r) + \underbrace{200 \cdot 24}_{4800}$

$\Rightarrow 5000(1 + \cancel{24r}\,24r) = 5200 \Rightarrow 24 \cdot 5000 \cdot r = 200 \Rightarrow r = \frac{200}{24 \cdot 5000} = \frac{2}{24 \cdot 50} = \frac{1}{12 \cdot 50} = \frac{1}{600}$ ✓

c)

$$S_n = \begin{cases} 5000\left(1+\frac{1}{600}\right)^n + 200 \cdot 600\left(\left(1+\frac{1}{600}\right)^n - 1\right); & n \leq 24 \\ 10000\left(1+\frac{1}{600}\right)^{n-24} + 400 \cdot 600\left(\left(1+\frac{1}{600}\right)^{n-24} - 1\right); & n > 24 \end{cases}$$

← TO ŽE IMAMO

← REŠITEV ISTEGA PROBLEMA Z $S_0 = 10000$, $P = 400$ IN ZAMAKNJENIM ČASOM

S_{24}