Zlepki nad triangulacijami, DN 1

Andrej Kolar-Požun

March 6, 2023

Tekom nalog uporabljamo definicijo Bernsteinovih polinomov iz predavanj

$$B_{\mathbf{d}}(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \frac{d!}{d_0! \ldots d_m!} \tau_0^{d_0} \tau_1^{d_1} \ldots \tau_m^{d_m}, \tag{1}$$

kjer je $\tau_0 = 1 - \sum_{l=1}^{m} \tau_l$. Zaradi berljivosti bomo v dokazih izpuščali argumente polinomov. Vedno se ve, da so ti $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$

1 Prva naloga

1. Naj bo $d \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{N}$. Dokažite, da Bernsteinovi bazni polinomi $B_{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_d^m$, zadoščajo rekurzivni zvezi

$$B_{\boldsymbol{d}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{l=0}^{m} \tau_l \, B_{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}_l}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$$

za vsak $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$. Pri tem se $B_{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}_l}$ obravanava kot 0, če $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{e}_l \notin \mathbb{D}_{d-1}^m$.

Uporabili bomo lemo iz predavanj, ki pravi da za $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-1}^m$ in $0 \leq l \leq m$ velja

$$\frac{d_l + 1}{d} B_{\mathbf{d}+e_l} = \tau_l B_{\mathbf{d}} \tag{2}$$

Zapišimo to lemo malo drugače. Uvedemo $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + e_l$

$$\frac{d_l + 1}{d} B_{\mathbf{d}'} = \tau_l B_{\mathbf{d}'-e_l}. \tag{3}$$

To ima smisel le, če $\mathbf{d}' - e_l \in \mathbb{D}_{d-1}^m$. Iz $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + e_l$ sledi še $d_l' = d_l + 1$. Formula iz leme tako postane

$$\frac{d_l'}{d} B_{\mathbf{d}'} = \tau_l B_{\mathbf{d}'-e_l} \tag{4}$$

Ta formula velja za vsak $\mathbf{d}' \in \mathbb{D}_d^m$ za katerega je $\mathbf{d}' - e_l \in \mathbb{D}_{d-1}^m$. Zaradi lepše berljivosti se znebimo oznak z apostrofom, ki smo jih vpeljali samo, da smo lažje obrnili lemo:

$$\frac{d_l}{d} B_{\mathbf{d}} = \tau_l B_{\mathbf{d}-e_l} \tag{5}$$

Lemo v tej obliki lahko direktno uporabimo za rešitev naloge. Desna stran enačbe v nalogi se glasi:

$$\sum_{l=0}^{m} \tau_l B_{\mathbf{d}-e_l} = \sum_{l=0}^{m} \frac{d_l}{d} B_{\mathbf{d}} = \frac{\sum_{l=0}^{m} d_l}{d} B_{\mathbf{d}} = B_{\mathbf{d}}. \tag{6}$$

V prvem enačaju morda zgleda, kot da smo lemo uporabili, ne da bi preverili ali $\mathbf{d} - e_l \in \mathbb{D}_{d-1}^m$, vendar je v tem primeru itak $d_l = 0$ in so ti členi v vsakem primeru nerelevantni. Pri zadnjem enačaju smo upoštevali še, da je $\sum_{l=0}^{m} d_l = d$.

2 Druga naloga

2. Z uporabo rekurzivne zveze dokažite, da za polinom

$$P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_d^m} b_{\boldsymbol{d}} B_{\boldsymbol{d}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m),$$

določen s koeficienti $b_{\boldsymbol{d}} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_d^m$, velja

$$P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} b_{\boldsymbol{d}}^{(r)} B_{\boldsymbol{d}}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$$

za vsak $r \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Vrednosti $b_{\boldsymbol{d}}^{(r)}$ so definirane rekurzivno z $b_{\boldsymbol{d}}^{(0)} = b_{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_d^m$, in

$$b_{\boldsymbol{d}}^{(r)} = \sum_{l=0}^{m} \tau_l b_{\boldsymbol{d}+e_l}^{(r-1)}, \quad \boldsymbol{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m, \qquad r = 1, 2, \ldots, d.$$

Problema se lotimo z indukcijo. Za $r = 0$ to očitno velja, saj je to le definicija polinoma P.

Predpostavimo da zveza velja za nek $r < d$ in pokažimo, da velja tudi za $r + 1 \leq d$

Po indukcijski predpostavki torej velja

$$P = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} b_{\mathbf{d}}^{(r)} B_{\mathbf{d}} \tag{7}$$

Uporabimo rekurzivno zvezo iz prve naloge in lahko nadaljujemo:

$$P = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} b_{\mathbf{d}}^{(r)} B_{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} b_{\mathbf{d}}^{(r)} \sum_{l=0}^{m} \tau_l B_{\mathbf{d}-e_l} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} \sum_{l=0}^{m} b_{\mathbf{d}}^{(r)} \tau_l B_{\mathbf{d}-e_l} \tag{8}$$

Ni nam treba skrbeti za primere ko $\mathbf{d} - e_l \notin \mathbb{D}_{d-r-1}$ saj nam prva naloga pove, da se take člene obravnava kot 0. Prav tako je $\mathbb{D}_{d-r-1}$ dobro definiran objekt, saj $r + 1 \leq d$. Torej lahko zadnjo vsoto prevedmo iz vsote po $\mathbb{D}_{d-r}^m$ v vsoto po $\mathbb{D}_{d-r-1}^m$:

$$P = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r}^m} \sum_{l=0}^{m} b_{\mathbf{d}}^{(r)} \tau_l B_{\mathbf{d}-e_l} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r-1}^m} \sum_{l=0}^{m} b_{\mathbf{d}+e_l}^{(r)} \tau_l B_{\mathbf{d}}. \tag{9}$$

Definiramo kot v navodilih $b_{\mathbf{d}}^{(r+1)} = \sum_{l=0}^{m} \tau_l b_{\mathbf{d}+e_l}^{(r)}$ in dobimo

$$P = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r-1}^m} \left(\sum_{l=0}^{m} b_{\mathbf{d}+e_l}^{(r)} \tau_l \right) B_{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{D}_{d-r-1}^m} b_{\mathbf{d}}^{(r+1)} B_{\mathbf{d}}. \tag{10}$$

S čimer je po indukciji za vsak $r \in \{0, 1, \ldots, d\}$ zveza dokazana.