Optimizacijske metode: 1. kolokvij

9. april 2025

Čas pisanja je 90 minut. Veliko uspeha!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Sedež (2.01)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Poišči rešitve naslednjega linearnega problema:

$$\max\ 18x_1 + 2x_2 - 45x_3$$

$$4x_1 - 10x_2 + x_3 \le 12$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -2$$

$$9x_1 + x_2 - 9x_3 \le 18$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

$b \not\geq 0$:

$X_4 = 12 + X_0 - 4X_1 + 10X_2 - X_3$

$X_5 = -2 + X_0 + 3X_1 + 3X_2 - 6X_3$ ← DOVOLJ, ČE JE X_0 SAMO TU ← IZSTOPI

$X_6 = 18 + X_0 - 9X_1 - X_2 + 9X_3$

$z = -X_0$ ← VSTOPI

$X_0 = 2 - 3X_1 - 3X_2 + 6X_3 + X_5$ $X_1 \le \frac{2}{3}$ ← IZSTOPI

$X_4 = 14 - 7X_1 + 7X_2 + 5X_3 + X_5$ $X_1 \le 2$

$X_6 = 20 - 12X_1 - 4X_2 + 15X_3 + X_5$ $X_1 \le \frac{5}{3}$

$z = -2 + 3X_1 + 3X_2 - 6X_3 - X_5$

VSTOPI

$X_1 = \frac{2}{3} - X_2 + 2X_3 + \frac{1}{3}X_5 - \frac{1}{3}X_0$

$X_4 = \frac{28}{3} + 14X_2 - 9X_3 - \frac{4}{3}X_5 + \frac{7}{3}X_0$

$X_6 = 12 + 8X_2 - 9X_3 - 3X_5 + 4X_0$

$z = -X_0$ ⇒ DOPUSTEN

$X_1 = \frac{2}{3} - X_2 + 2X_3 + \frac{1}{3}X_5$

$X_4 = \frac{28}{3} + 14X_2 - 9X_3 - \frac{4}{3}X_5$ $X_5 \le 7$

$X_6 = 12 + 8X_2 - 9X_3 - 3X_5$ $X_5 \le 4$ ← IZSTOPI

$z = 18X_1 + 2X_2 - 45X_3 = 12 - 16X_2 - 9X_3 + 6X_5$

VSTOPI

2. NAČIN:

UGANEMO: $X_1 = \frac{2}{3}$, $X_2 = X_3 = 0$ JE DOPUSTNA IN $X_5 = 0$

$X_4 = 12 - 4X_1 + 10X_2 - X_3$

$X_5 = -2 + 3X_1 + 3X_2 - 6X_3$

$X_6 = 18 - 9X_1 - X_2 + 9X_3$

$X_1 = \frac{2}{3} - X_2 + 2X_3 + \frac{X_5}{3}$

$X_4 = \frac{28}{3} + 14X_2 - 9X_3 - \frac{4}{3}X_5$

$X_6 = 12 + 8X_2 - 9X_3 - 3X_5$

ISTO

⇒

$X_5 = 4 + \frac{8}{3}X_2 - 3X_3 - \frac{X_6}{3}$

$X_1 = 2 - \frac{1}{9}X_2 + X_3 - \frac{1}{9}X_6$

$X_4 = 4 + \frac{94}{9}X_2 - 5X_3 + \frac{4}{9}X_6$

$z = 36 - 27X_3 - 2X_6$

$\boxed{z^* = 36}$ $X_3^* = X_6^* = 0$ ⇒ $X_1^* = 2 - \frac{1}{9}X_2^*$ $X_2 \ge 0$ $X_1 \ge 0$

$\boxed{X^* = (2 - \frac{1}{9}t,\ t,\ 0) \quad t \in [0, 18]}$

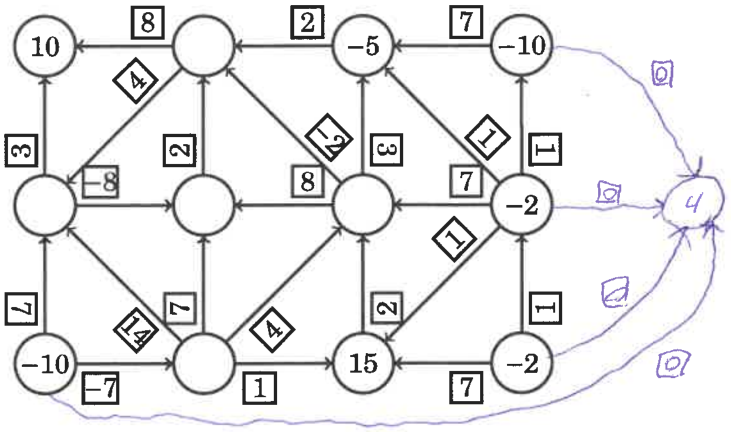
2. naloga (25 točk)

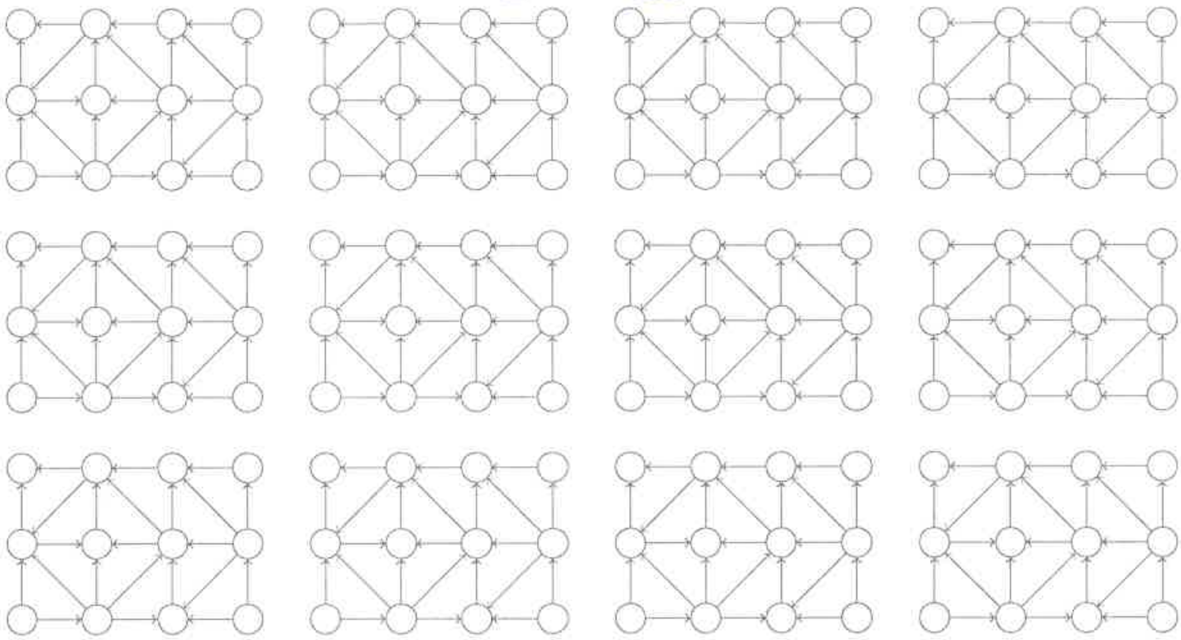
Najdi optimalen razvoz in zapiši njegovo ceno ali pa dokaži, da je problem nedopusten.

$\sum b_v = -4$

NEV

⇒ DODAMO SKLADIŠČE





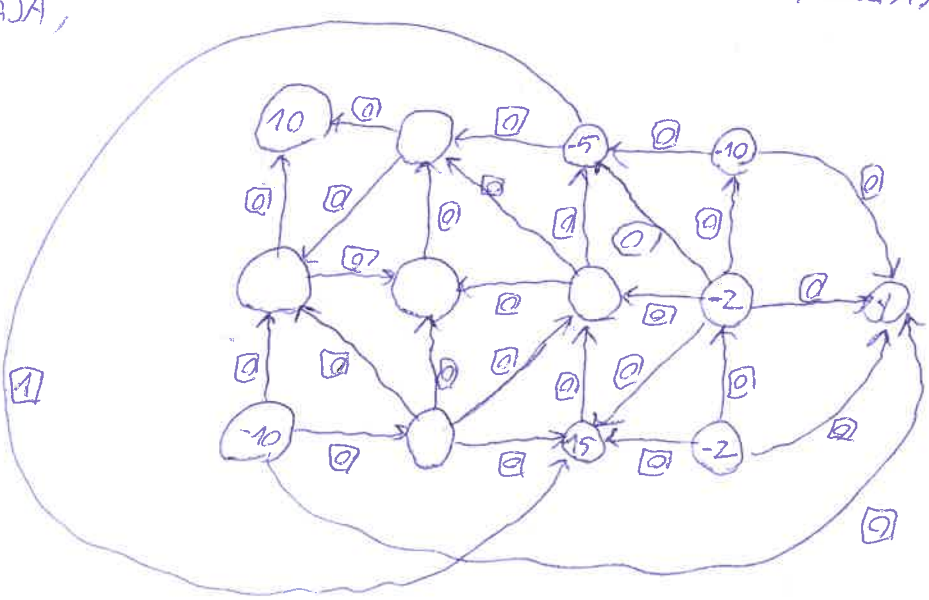
Cena najcenejšega razvoza: ______________________

HITER NAČIN:

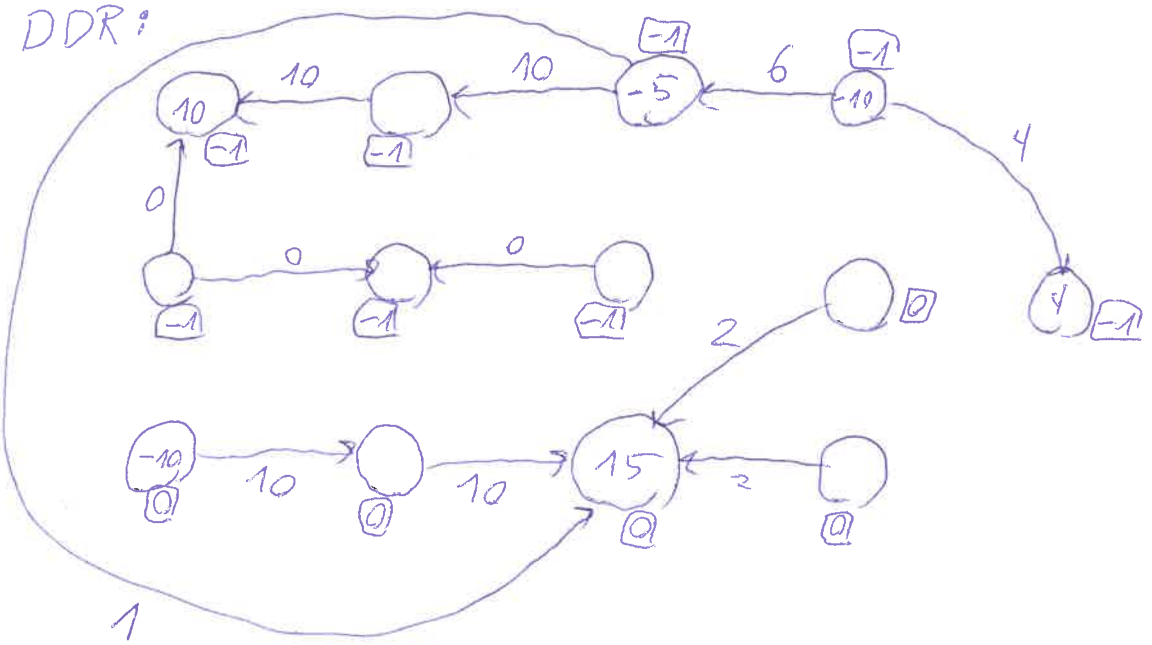
PROBLEM JE NEDOPUSTEN: POT IZ (−10) IN (−5) V ZGORNJEM DESNEM KOTU DO (15) NE OBSTAJA, S PREOSTALIH VOZLIŠČ PA LAHKO RAZVOZIMO LE 14 ENOT.

HITRA DVOFAZNA SIMPLEX:

DODAMO ENO UMETNO POVEZAVO, DA DOBIMO DDR PRIREJENEGA PROBLEMA:

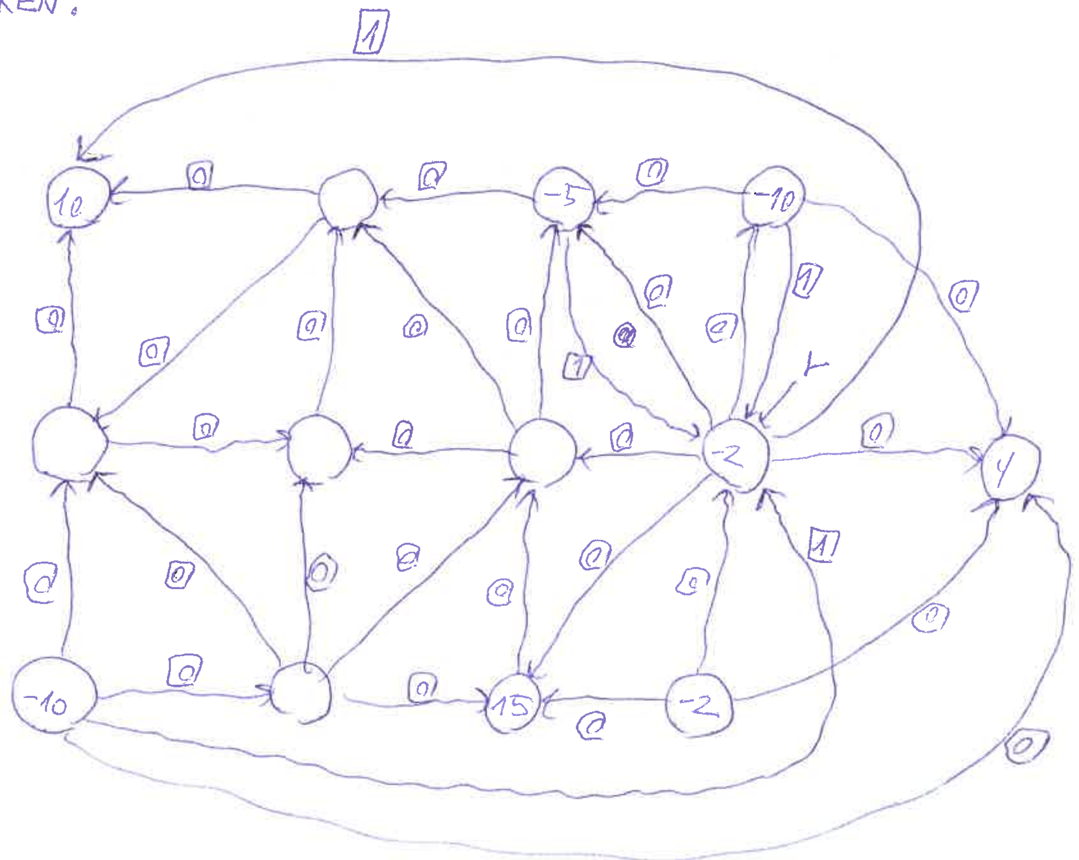


DDR:



NOBENA NE VSTOPI, TO JE OPT. REŠITEV Z RAZVOZOM 1 ⇒ M DOPUSTEN.

NAIVNA DVOFAZNA SIMPLEX - DODAMO VSE UMETNE POVEZAVE IN SPELJEMO RAZVOZ ČEZ KOREN:



Optimizacijske metode: 1. izpit

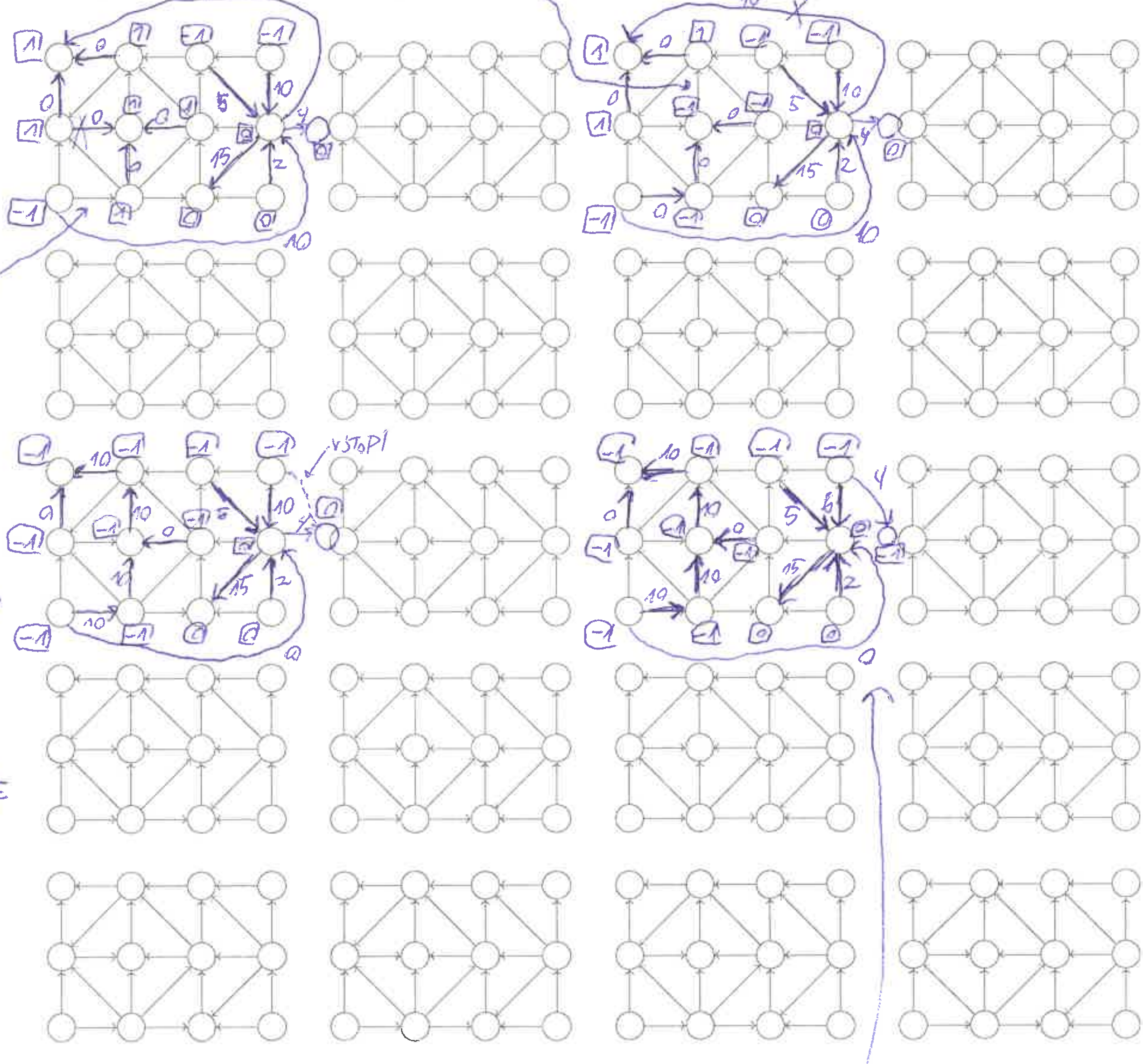
11. junij 2020

Dodatni list vloži v izpitno polo.

Ime in priimek

Vpisna številka

DDR:



NOBENA NE VSTOPI

Cena najcenejšega razvoza: ____________

DDR

NOBENA VEČ NE VSTOPI IN RAZVOZ > 0

⇒ NEDOPUSTEN

3. naloga (25 točk)

Podjetje VegaRega, ki izdeluje veganski nadomestek žabjih krakov, želi prodreti tudi na trg nadomestkov za gosenice in polže. Vsak liter nadomestka za žabje krake jim prinese 5 evrov dobička, ker pa proizvodnje nadomestkov za gosenice in polže še niso zoptimizirali, jim ta nadomestka prinašata izgubo: gosenice en evro na liter, polži pa dva. Podjetje ima na zalogi 1200ℓ skrivne snovi A in 1000ℓ skrivne snovi B. Porabo snovi podaja spodnja tabela.

	žabji kraki X_1	gosenice X_2	polži X_3
snov A	3	2	1
snov B	1	2	3

Za liter nadomestka za polže torej potrebujejo 3ℓ skrivne snovi B. Da bi lahko prišlo podjetje na vse tri trge, so strategi v podjetju dodatno zahtevali, da mora biti (prostorninski) delež vsake vrste nadomestka vsaj 20% celotne proizvodnje.

a) (10 točk) Koliko nadomestka posamezne vrste naj izdelajo, če želijo v podjetju čim večji dobiček? Zapiši kot linearni program in ga pretvori v standardno obliko (programa ni treba rešiti).

MAX $5X_1 - X_2 - 2X_3$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 \le 1200$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 1000$

$X_2 + X_3 - 4X_1 \le 0$ $\leftarrow$ $\left(X_1 \ge \frac{1}{5}(X_1+X_2+X_3) \Rightarrow 5X_1 \ge X_1+X_2+X_3\right)$

$X_1 + X_2 - 4X_3 \le 0$

$X_1 + X_3 - 4X_2 \le 0$ $\qquad X_{1,2,3} \ge 0$

b) (15 točk) Ugani rešitev in s pomočjo dualnega dopolnjevanja dokaži, da je prava.

X_2, X_3 DELATA IZGUBO $\Rightarrow$ NAREDIMO JU ČIM MANJ $\Rightarrow$ $X_2 = X_3 = \frac{1}{5}(X_1+X_2+X_3) \Rightarrow 5X_2 = X_1 + 2X_2 \Rightarrow X_1 = 3X_2$

$\Rightarrow X_2 = X_3 = \frac{X_1}{3}$

$3X_1 + \frac{2X_1}{3} + \frac{X_1}{3} \le 1200 \Rightarrow X_1 \le 300 \Rightarrow X_1 = 300$ (ČIM VEČ KOT JE ŠE DOPUSTNO)

$X_1 + \frac{2X_1}{3} + X_1 \le 1000 \Rightarrow X_1 \le \cancel{3000}\ \frac{3000}{8}$

TOREJ: $X^* = (300, 100, 100)$ DOPUSTNA ✓ OPT.? DUAL: MIN $1200Y_1 + 1000Y_2$

$3Y_1 + Y_2 - 4Y_3 + Y_4 + Y_5 \ge 5$

$2Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + Y_4 - 4Y_5 \ge -1$

$Y_1 + 3Y_2 + Y_3 - 4Y_4 + Y_5 \ge -2$

$Y_{1,2,3} \ge 0$

c) (5 bonus točk) Zapiši linearni program, s pomočjo katerega ugotovimo, za koliko lahko znižajo zalogo skrivne snovi A, da bo imel ob nespremenjenih preostalih pogojih problem še vedno vsaj eno rešitev (programa ni treba rešiti).

MIN $\tilde{X}$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 \le \tilde{X}$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 1000$

$X_2 + X_3 - 4X_1 \le 0$

$X_1 + X_2 - 4X_3 \le 0$

$X_1 + X_3 - 4X_2 \le 0$

$X_{1,2,3} \ge 0, \tilde{X} \ge 0$

DUALNO DOPOLNJEVANJE:

STRIKTNA NEENAKOST V 2.,3. POGOJU $\Rightarrow Y_2 = Y_3 = 0$

$X_{1,2,3} \ne 0 \Rightarrow$ ENAKOSTI V DUALU:

$3Y_1 + Y_4 + Y_5 = 5$

$2Y_1 + Y_4 - 4Y_5 = -1$

$Y_1 - 4Y_4 + Y_5 = -2 \Rightarrow Y_1 = -2 + 4Y_4 - Y_5$

$9Y_4 - 6Y_5 = 3$

$13Y_4 - 2Y_5 = 11 \Rightarrow -30Y_4 = -30 \Rightarrow Y_4 = 1$

$\Rightarrow Y_5 = 1 \Rightarrow Y_1 = 1 \Rightarrow Y^*$ DOPUSTNA $\Rightarrow$ NAŠ UGIB JE RES OPTIMALEN

4. naloga (25 točk)

Dan je naslednji linearni problem

$$\max\ 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 4x_4 - x_5$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 \geq 2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \in \mathbb{R}$$

a) (15 točk) S pomočjo duala poišči optimalno vrednost zgornjega problema.

STAND. OBLIKA $X_5 = X_5^+ - X_5^-$:

$$\text{MAX } 10X_1 + 6X_2 + 12X_3 - 4X_4 - X_5^+ + X_5^-$$
$$5X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 3$$
$$-X_1 - X_2 - 4X_3 - X_4 - X_5^+ + X_5^- \leq -2$$
$$X_{1,\dots,4} \geq 0 \quad X_5^{+,-} \geq 0$$

LAHKO BI TUDI BREZ STAND. OBLIKO S FORMULO ZA DUAL SPLOŠNEGA LP.

DUAL:

$$\text{MIN } 3Y_1 - 2Y_2$$
$$5Y_1 - Y_2 \geq 10 \Rightarrow 5Y_1 \geq 11$$
$$Y_1 - Y_2 \geq 6 \qquad Y_1 \geq 7$$
$$Y_1 - 4Y_2 \geq 12 \qquad Y_1 \geq 16$$
$$Y_1 - Y_2 \geq -4 \qquad Y_1 \geq -3$$
$$-Y_2 \geq -1 \Rightarrow Y_2 \leq 1 \rightarrow \boxed{Y_2^* = 1}$$
$$Y_2 \geq 1$$

$Y_1 = 16$ JE NAJMANJŠI, KI JE DOPUSTEN (IN IMAMO $\text{MIN}(3Y_1 - 2)$)

$\Rightarrow Y_1^* = 16$

$$\boxed{Z^* = 3 \cdot 16 - 2 = 46}$$

b) (10 točk) Poišči še vrednosti $x_1, \dots x_5$, pri katerih je optimalna vrednost dosežena.

DUALNO DOPOLNJEVANJE:

STRIKTNA NEENAKOST V 1., 2., 4. POGOJU $\Rightarrow X_1 = X_2 = X_4 = 0$

$Y_1, Y_2 \neq 0 \Rightarrow$
$$X_3 = 3$$
$$-4X_3 - X_5^+ + X_5^- = -2 \Rightarrow X_5^+ - X_5^- = -10 \Rightarrow X_5 = -10$$

$$\Rightarrow \boxed{X^* = (0, 0, 3, 0, -10)}$$

c) (5 bonus točk) Za koliko se spremeni optimalna vrednost, če prvi pogoj nadomestimo z:

$$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 + \epsilon$$

za nek dovolj majhen $\epsilon > 0$?

EKONOMSKI POMEN DUALNIH SPREMENLJIVK: $\Delta Z = \varepsilon \cdot Y_1^* = 16 \cdot \varepsilon$