1 Računanje limit funkcij dveh spremenljivk s pomočjo polarnih koordinat

Recimo, da želimo pokazati, da za funkcijo dveh spremenljivk $f(x, y)$ velja:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

Pogosto si lahko pri takih primerih pomagamo s polarnimi koordinatami:

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$

Na predavanjih ste (verjetno) povedali, da lahko obstoj limite (in njeno enakost 0) pokažemo, če pokažemo, da (v neki okolici točke $(0, 0)$) velja:

$$|f(r\cos\phi, r\sin\phi)| \leq g(r),$$
$$\lim_{r\to 0} g(r) = 0,$$

oziroma, po domače povedano, če lahko našo funkcijo, zapisano v polarnih koordinatah, navzgor omejimo z funkcijo $g(r)$, ki gre proti nič, ko gre r proti nič.

Na vajah smo zapisali nekoliko drugačen pogoj.$f(x, y)$ smo poskušali zapisati v obliki:

$$f(x, y) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) = g(r)h(r, \phi),$$

kjer velja $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ in je $h(r, \phi)$ omejena funkcija (v neki okolici točke $(0, 0)$).

Poleg tega na vajah (in tudi v zapiskih vaj) pogosto zlorabljamo notacijo in pišemo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\phi, r\sin\phi),$$

kjer potem preverimo ali je $f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ res zgornje oblike - "nekaj kar gre proti nič krat nekaj omejenega".

Podobno lahko postopamo, če je limita enaka $L \neq 0$ ali če $(x, y) \to (a, b) \neq (0, 0)$, le da moramo pri tem koordinate/funkcijo ustrezno translirati (npr $x = a + r\cos\phi$) - glej primere iz vaj.

2 Idejni dokaz, da sta pristopa s predavanj in vaj ekvivalentna

Iz definicije s predavanj sledi definicija iz vaj, saj:

Če velja $|f(r\cos\phi, r\sin\phi)| \leq g(r)$, lahko za vsak (r, ϕ) napišemo $f(r, \cos\phi, r\sin\phi) = c(r, \phi)g(r)$, kjer je (zaradi $|f(x, y)| \leq g(r)$) $c(r, \phi)$ omejena funkcija.

Podobno iz definicije iz vaj sledi tudi definicija iz predavanj, saj:

Če velja $f(x,y) = g(r)h(r,\phi)$, kjer je $h(r,\phi)$ omejena, lahko definiramo $\tilde{g}(r) = |g(r)| * \max|h(r,\phi)|$. $\tilde{g}(r)$ je potem funkcija, ki gre proti nič s katero lahko omejimo $|f(x,y)|$.

3 Primer, kjer polarne koordinate ne delujejo

Na vajah smo imeli primer $f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y)^2}$ in želeli izračunati:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Izkaže se, da ta limita ne obstaja, kar smo na vajah dokazali tako, da smo videli, da dobimo različen rezultat, če izračunamo $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, ali pa če se točki $(0,0)$ približujemo po $y = x^2$.

Mogoče se je kdo vprašal zakaj tega nismo računali s polarnimi koordinatami. To ne bi delovalo, saj bi dobili:

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{r^3\cos^2\phi\sin\phi}{r^2(r\cos^2\phi + \sin\phi)^2} = r\frac{\cos^2\phi\sin\phi}{(r\cos^2\phi + \sin\phi)^2}.$$

Prvi faktor $g(r)$ sicer res gre proti nič, vendar preostanek ni omejen (zares bi morali to neomejenost še dokazati, vendar se lahko o tem lahko prepričate že z kalkulatorjem, če za ϕ, r vstavite notri zelo majhne cifre). Neomejenost bi sicer lahko tudi dokazali, če bi npr. nastavili $\phi = \arccos(r)$, in opazili, da je ta funkcija neomejena, ko $r \to 0$.