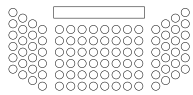
1	
2	
3	
4	
Σ	

Optimizacijske metode: 2. kolokvij

21. maj 2025

Čas pisanja je 90 minut. Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

Ime in priimek

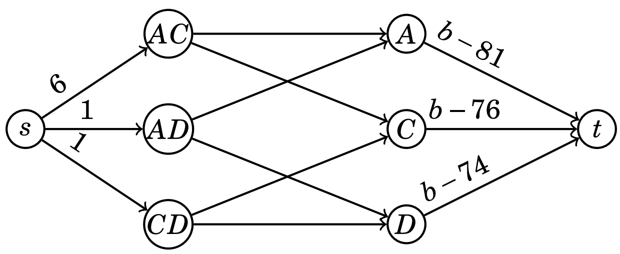
Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Ana, Brina, Cene in Darko igrajo turnir v igri "Človek ne jezi se". Ker je pri tej igri precej odvisno tudi od sreče, udeleženci večkrat igrajo med sabo. Trenutno stanje turnirja je podano spodaj:

igralec	dosedanje zmage	preostale tekme z				
		A	B	C	D	skupaj
A	81	-	1	6	1	8
B	77	1	-	0	3	4
C	76	6	0	-	1	7
D	74	1	3	1	-	5

Zmagovalec turnirja je tisti, ki bo na koncu imel največ zmag. Brina, na primer, bo v najboljšem primeru končala turnir z $b = 77 + 4 = 81$ zmagami. Zanima nas, ali je lahko tudi zmagovalka turnirja, zato stanju priredimo spodnji graf.



Kapaciteta na povezavah $s \to par$ je preostalo število tekem za dani par (npr. 6 za par Ana - Cene). Povezave $par \to igralec$ imajo neomejeno kapaciteto.

a) (10 točk) Najdi maksimalen pretok F na zgornjem grafu.

b) (15 točk) Razloži graf (pomen vozlišč, povezav in kapacitet; zakaj ni vozlišč, ki pripadajo B) in dokaži, da je Brina lahko (so)zmagovalka turnirja natanko tedaj, ko je F enak vsoti kapacitet na povezavah iz s.

2. naloga (25 točk)

a) (15 točk) V dvodelnem grafu, ki mu pripada matrika uteži

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 10 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 7 & 10 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 & 10 & 10 & 8 \\ 0 & 10 & 10 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

najdi najdražje popolno prirejanje.

b) (10 točk) Za katera mesta (i, j) v matriki A velja, da se bo cena najdražjega prirejanja povečala, če a_{ij} povečamo za 1? Utemelji!

3. naloga (25 točk)

Točki $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ priredimo polinom $p_a(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_k t^{k-1}$.

a) (20 točk) Dokaži, da je množica $A = \{a \in \mathbb{R}^k \mid \forall t \in [0,1].\ |p_a(t)| \leq 1\}$ konveksna. Namig: kateri polinom pripada točki $a + b$?

b) (5 točk) Najdi neko nekonveksno podmnožico množice A.

4. naloga (25 točk)

Dan je sledeč optimizacijski problem:

$$
\begin{aligned}
&\min x^2 + y^2 \\
&\text{p.p.} \\
&\quad x + y \geq 1 \\
&\quad y \leq 2 \\
&\quad y^2 \leq x
\end{aligned}
$$

a) (5 točk) Nariši območje dopustnih rešitev.

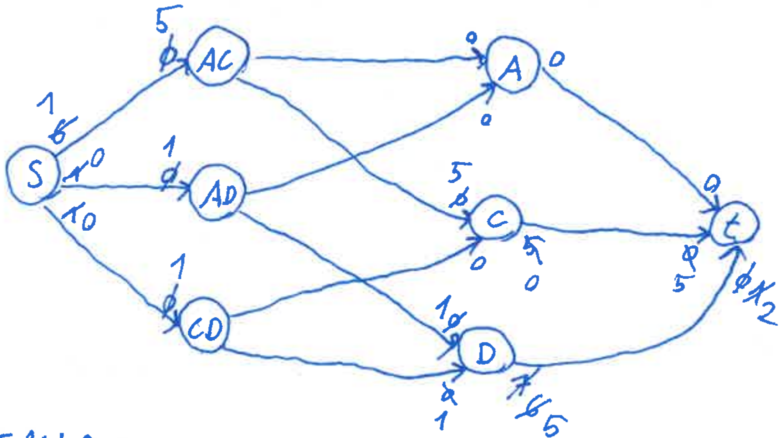
b) (15 točk) Reši optimizacijski problem. Če si rešitev uganil/a, s pomočjo KKT pogojev dokaži njeno optimalnost.

c) (5 točk) Kaj je rešitev, če namesto minimuma iščemo maksimum?

5. naloga (dodatnih 5 točk)

Najdi konveksno množico z natanko 2025 robnimi točkami ali pa dokaži, da ne obstaja.

1 a)



ISKAN PRETOK DA FORD-FULKERSON ALGORITEM:

- 1. POT $S \to AC \to C \to t$ $p=5$
- 2. POT $S \to AD \to D \to t$ $p=1$
- 3. POT $S \to CD \to D \to t$ $p=1$
- NI VEČ POTI $\Rightarrow \boxed{F=7}$

b) GRAF PREDSTAVLJA DOVOLJENE PORAZDELITVE ZMAG MED IGRALCE A, C, D, DA BO BRINA ŠE VEDNO ZMAGALA TURNIR. POVEZAVE S - par PREDSTAVLJAJO IGRE, KI JIH MORA ODIGRATI PAR par. ŠTEVILO ~~ZMAG~~ ZMAG NE SME PRESEGATI ŠTEVILA PREOSTALIH TEKEM, KI JIH BO ODIGRAL PAR par - OD TU PRIDE KAPACITETA POVEZAV. IZ VSAKEGA PARA SE POTEM ZMAGE PORAZDELIJO MED OBA IGRALCA V PARU - TO PREDSTAVLJAJO „SREDINSKE" POVEZAVE. V PRINCIPU BI TUDI TU BILA KAPACITETA ŠT. PREOSTALIH TEKEM, A JE ZARADI ENOSTAVNOSTI KAR NEOMEJENA, SAJ SMO OMEJENOST ŠTEVILA TEKEM ŽE UPOŠTEVALI PRI PRVIH POVEZAVAH. POVEZAVE igralec-t PREDSTAVLJAJO ŠT. ZMAG DANEGA IGRALCA. ČE HOČEMO, DA BRINA ZMAGA, TO NE SME PRESEGATI b - ŠT. ZMAG DO ZDAJ. OD TU KAPACITETA.

BRINA LAHKO ZMAGA NATANKO TEDAJ, KO OBSTAJA NEKA KONFIGURACIJA REZULTATOV TEKEM MED A, C, D, TAKIH, DA VSAK ODIGRA VSE SVOJE PREOSTALE TEKME IN NOBEN NIMA VEČ ZMAG KOT BRINA. TAKA KONFIGURACIJA PA RAVNO USTREZA PRETOKU, KI ZASIČI POVEZAVE IZ S.

TOREJ, KONFIGURACIJA JE TAKA, DA NOBEN NE ZMAGA VEČKRAT KOT BRINA.

TO POMENI, DA SE VSE PREOSTALE TEKME IZVEDEJO.

② UPORABIMO MADŽARSKO METODO Z UTEŽMI, KER IŠČEMO NAJDRAŽJE PRIREJANJE, GLEJMO $-A$:

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -6 & -7 & -5 & -8 \\ -2 & -8 & -5 & -3 & -8 & -9 \\ -6 & -5 & -10 & -2 & -7 & -3 \\ -1 & -7 & -10 & -2 & -3 & -5 \\ -6 & -8 & -10 & -10 & -10 & -8 \\ 0 & -10 & -10 & -7 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 8 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & 0 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = 1 \quad \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0^* \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 0^* & 0 \\ 0^* & 5 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 0^* & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0^* & 0 & 3 \\ 6 & 0^* & 0 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

NAJDRAŽJO PRIREJANJE DAJO NPR. MESTA, OZNAČENA Z *,

KAR DA VREDNOST $6+10+10+10+8+8=\boxed{52}$

b) OČITNO BO TO RES ZA MESTA (i,j), KI SO ŽE V NAJDRAŽJEM PRIREJANJU. POLEG PRIREJANJA IZ a) IMAMO ŠE MOŽNOST:

$$\begin{bmatrix} - & - & - & * & - & - \\ - & - & - & - & - & * \\ * & - & - & - & - & - \\ - & - & * & - & - & - \\ - & - & - & - & * & - \\ - & * & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

ZA OSTALE (i,j), KI NISO ŽE DEL NAJVEČJEGA PRIREJANJA VELJA, DA JE VREDNOST VSAKEGA PRIREJANJA, KI VSEBUJE (i,j) STRIKTNO MANJŠA OD 52. ČE A_{ij} POVEČAMO ZA 1 DOBIMO KVEČJEMU 52.

TOREJ, MOŽNI (i,j) SO: (3,1), (6,2), (4,3), (5,4), (2,5), (1,6), (1,4), (5,5), (2,6)

3 a) $A = \{ a \in \mathbb{R}^k \mid \forall t \in [0,1]: |p_a(t)| \leq 1\}$

$$p_a(t) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_k t^{k-1}$$
$$p_b(t) = b_1 + b_2 t + \ldots + b_k t^{k-1}$$
$$\Rightarrow \boxed{p_{a+b}(t)} = (a_1+b_1) + (a_2+b_2)t + \ldots + (a_k+b_k)t^{k-1} = \boxed{p_a(t) + p_b(t)}$$

VELJA TUDI: $\boxed{p_{\lambda a}(t)} = \lambda a_1 + \lambda a_2 t + \ldots + \lambda a_k t^{k-1} = \boxed{\lambda p_a(t)}$

$a_1, a_2 \in A, \ \lambda \in [0,1]$

$\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \in A \iff \forall t \in [0,1] \ |p_{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2}(t)| \leq 1$

$t \in [0,1]: \quad |p_{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2}(t)| = |\lambda p_{a_1}(t) + (1-\lambda) p_{a_2}(t)| \overset{\Delta\text{-NEENAKOST}}{\leq} |\underset{\lambda \geq 0}{\lambda} p_{a_1}(t)| + |\underset{1-\lambda \geq 0}{(1-\lambda)} p_{a_2}(t)| =$

$= \lambda \underbrace{|p_{a_1}(t)|}_{\leq 1} + (1-\lambda) \underbrace{|p_{a_2}(t)|}_{\leq 1} \leq \lambda + 1 - \lambda = 1 \ \square$

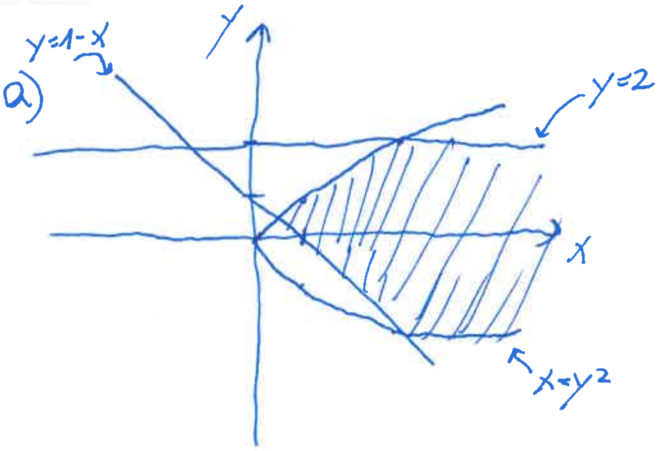
b) $(0,0,\ldots,0) \in A \ (p_{(0,\ldots,0)}(t) = 0)$

$(1,0,\ldots,0) \in A \ (p_{(1,0,\ldots,0)}(t) = 1)$

$\Rightarrow \{(0,0,\ldots,0), (1,0,\ldots,0)\}$ JE NEKONV. PODMN. A

(NPR. NE VSEBUJE $(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$, KAR JE $\frac{1}{2}(0,0,\ldots,0) + \frac{1}{2}(1,0,0,\ldots,0)$)

4 a)



b) MIN $x^2+y^2 \leftarrow H=\begin{bmatrix}2&\\&2\end{bmatrix} \Rightarrow$ KONV. ✓

$\left.\begin{array}{l}1-x-y\le 0\\ y-2\le 0\end{array}\right\}$ AFINI FUNKCIJI $\Rightarrow$ KONV. ✓

$y^2-x\le 0 \quad 3 \quad H=\begin{bmatrix}0&\\&2\end{bmatrix} \Rightarrow$ KONV.

PROBLEM JE KONVEKSEN $\Rightarrow$ GREMO S KKT POGOJI:

- $2x-\lambda_1-\lambda_3=0$
- $2y-\lambda_1+\lambda_2+2y\lambda_3=0$
- $\lambda_1(1-x-y)=0$
- $\lambda_2(y-2)=0$
- $\lambda_3(y^2-x)=0$
- DOPUSTNOST (x,y)
- $\lambda_{1,2,3}\ge 0$

x^2+y^2 JE KVADRAT RAZDALJE OD IZHODIŠČA.

IZ SKICE BO MINIMUM PRI $y<2$ $(\lambda_2=0)$ IN $y=1-x$

KKT:
$$2x-\lambda_1-\lambda_3=0$$
$$2-2x-\lambda_1+2y\lambda_3=0$$
$$\lambda_3(y^2-x)=0$$

$\lambda_3=0$: $\lambda_1=2x$

$2-4x=0 \Rightarrow \underbrace{x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}}_{\text{DOPUSTNO}}$

$\lambda_1=1\ge 0$ ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ JE OPT.}}$ $\boxed{\text{VREDNOST: } \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}$

c) ČE MAX. JE PROBLEM NEOMEJEN:

NPR. $(x,2)$ JE DOPUSTEN ZA POLJUBNE DOVOLJ VELIKE x.

5 TAKA MNOŽICA JE NPR. ODPRT DISK + 2025 TOČK NA KROŽNICI,

KONKRETNO: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\} \cup$

$\cup \left\{\left(\cos\left(2\pi\frac{k}{2025}\right), \sin\left(2\pi\frac{k}{2025}\right)\right) \;\middle|\; k\in\{0,1,2,\dots,2024\}\right\}$