UNIVERZITETNI ŠTUDIJ FINANČNE MATEMATIKE

OPTIMIZACIJSKE METODE

Domača naloga: linearno programiranje

Ime Priimek

Rok za oddajo: 7. 4. 2025

---

1. S simpleksno metodo reši linearni problem:

$$\begin{aligned} \max\ 10x + 9y \quad &+4z \\ 19x + 18y - 17z &\leq 13 \\ 11x - 11y \quad -3z &\leq 13 \\ 2x + 7y \quad +9z &\leq 9 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

2. S simpleksno metodo reši linearni problem:

$$\begin{aligned} \max\ -7x + 17y \quad &-7z \\ -17x - 15y - 19z &\leq 5 \\ 6x + 3y \quad -19z &\leq 12 \\ -3x + 9y \quad +5z &\leq -15 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

3. S pomočjo duala reši linearni problem:

$$\begin{aligned} \max\ x + 10y - 19z + 9w& \\ 9x + 12y - 15z + 8w &\leq -12 \\ -14y \quad -6z + 16w &\leq -1 \\ 18x - 20y + 18z - 7w &\leq 5 \\ x, y, z, w &\geq 0 \end{aligned}$$

4. V norveški smučarskoskakalni reprezentanci iščejo novega šivalca dresov, saj prejšnji ni znal dobro skrivati svojega mojstrstva pred širnim svetom. Iz niti, ki je imamo na voljo 2000 m, in osnovnega blaga, ki ga imamo na voljo 500 m^2, je treba pripraviti tri vrste posebnega blaga za drese: za trening, tekmo in sodnike. Posebnega blaga vsake vrste potrebujemo vsaj 50 m^2, dodatno pa mora biti posebnega blaga za trening vsaj dvakrat toliko kot posebnega blaga za tekmo. Spodnja tabela podaja količine niti in osnovnega blaga, ki jih potrebujemo za kvadratni meter posebnega blaga dane vrste:

	trening	tekma	sodniki
nit $[m/m^2]$	4	3	2
osnovno blago $[m^2/m^2]$	1	3	2

(Za kvadratni meter blaga za trening torej potrebujemo 4 m niti in 1 m^2 osnovnega blaga.) Plačilo, ki ga ponuja reprezentanca, je sledeče:

- 5000 € za potne stroške in nastanitev,
- 20 000 € za izdelano posebno blago, katerega skupna površina je največ 200 m^2,
- če izdelamo več kot 200 m^2 metrov blaga, dobimo za vsak dodatni kvadratni meter 100 € stimulacije.

Če torej sešijemo 100 m^2 blaga za trening, 50 m^2 blaga za tekmo in 50,34 m^2 blaga za sodnike, dobimo 5000 + 20 000 + 34 evrov. Naša naloga je seveda maksimizirati prihodek.

(a) Predstavi nalogo kot optimizacijski problem.

(b) Pretvori optimizacijski problem v linearnega in ga reši.

(c) Ali je optimalna rešitev ena sama?

(d) Ali bi z dodatno nitjo lahko izdelali več posebnega blaga? Kaj pa z dodatnim osnovnim blagom?

Opomba: Pri tej nalogi je dovoljeno linearen problem reševati tudi s pomočjo računalnika. V kolikor ga ne boš reševal/a na roke, napiši s katero programsko opremo si prišel/la do rešitve.

(1) MAX $10x_1+9x_2+4x_3$

$19x_1+18x_2-17x_3\le 13$

$11x_1-11x_2-3x_3\le 13$

$2x_1+7x_2+9x_3\le 9$

$x_{1,2,3}\ge 0$

$x_4=13-19x_1-18x_2+17x_3$ $\quad x_1\le\frac{13}{19}$ ← IZSTOPI x_4

$x_5=13-11x_1+11x_2+3x_3$ $\quad x_1\le\frac{13}{11}$

$x_6=9-2x_1-7x_2-9x_3$ $\quad x_1\le\frac{9}{2}$

$z=10x_1+9x_2+4x_3$ ← VSTOPI x_1

$x_1=\frac{13}{19}-\frac{18}{19}x_2+\frac{17}{19}x_3-\frac{x_4}{14}$ $\quad x_3$ NE OMEJUJE

$x_5=\frac{104}{19}+\frac{407}{19}x_2-\frac{130}{19}x_3+\frac{11}{14}x_4$ $\quad x_3\le\frac{104}{130}$

$x_6=\frac{145}{19}-\frac{97}{19}x_2-\frac{205}{19}x_3+\frac{2}{17}x_4$ $\quad x_3\le\frac{145}{205}$ ← IZSTOPI x_6

$z=\frac{130}{19}-\frac{9}{19}x_2+\frac{246}{19}x_3-\frac{10}{17}x_4$ ← VSTOPI x_3

$x_3=\frac{145}{205}-\frac{97}{205}x_2+\frac{19}{205}\cdot\frac{2}{17}x_4-\frac{19}{205}x_6$

⋮

$z=\frac{130}{19}+\frac{246}{19}\left(\frac{145}{205}-\frac{97}{205}x_2+\frac{38}{3485}x_4-\frac{19}{205}x_6\right)-\frac{9}{19}x_2-\frac{10}{17}x_4=$

$=16-(\underset{\ge 0}{\quad})x_2-(\underset{\ge 0}{\quad})x_6-\frac{38}{85}x_4$

* $z^*=16$ $\quad x_2^*=x_6^*=x_4^*=0$

$x_3^*=\frac{145}{205}=\frac{29}{41}$

$x_1^*=\frac{54}{41}$

(2) MAX $-7x_1+17x_2-7x_3$

$-17x_1-15x_2-19x_3\le 5$

$6x_1+3x_2-19x_3\le 12$

$-3x_1+9x_2+5x_3\le -15$

$x_{1,2,3}\ge 0$

1.FAZA:

$x_4=5+x_0+17x_1+15x_2+19x_3$

$x_5=12+x_0-6x_1-3x_2+19x_3$

$x_6=-15+x_0+3x_1-9x_2-5x_3$ ← IZSTOPI

$z=-x_0$ ← VSTOPI

$x_0=15-3x_1+9x_2+5x_3+x_6$, $\quad x_1\le 5$

$x_4=20+14x_1+24x_2+24x_3+x_6$

$x_5=27-9x_1+6x_2+24x_3+x_6$ $\quad x_1\le 3$ ← IZSTOPI x_5

$z=-15+3x_1-9x_2-5x_3-x_6$ ← VSTOPI x_1

$x_1=3+\frac{2}{3}x_2+\frac{8}{3}x_3+\frac{x_6}{9}-\frac{x_5}{9}$

$x_4=62+\frac{100}{3}x_2+\frac{184}{3}x_3+\frac{23}{9}x_6-\frac{14}{9}x_5$

$x_0=6+7x_2-3x_3+\frac{2}{3}x_6+\frac{1}{3}x_5$ $\quad x_3\le 2$ IZSTOPI x_0

$z=-6-7x_2+3x_3-\frac{2}{3}x_6-\frac{x_5}{3}$ ← VSTOPI x_3

$x_3=2+\frac{7}{3}x_2+\frac{2}{9}x_6+\frac{1}{9}x_5-\frac{x_0}{3}$

$x_1=\frac{25}{3}+\frac{62}{9}x_2+\frac{19}{27}x_6+\frac{5}{27}x_5-\frac{8}{9}x_0$

$x_4=\frac{554}{3}+\frac{1588}{9}x_2+\frac{437}{27}x_6+\frac{142}{27}x_5-\frac{184}{9}x_0$

$z=0-x_0$ ← PROBLEM DOPUSTEN

ČE ~~UGANEMO~~ UGANEMO

ČE BI UGANLI DOPUSTNO REŠITEV

$x_1=\frac{25}{3},\ x_2=0,\ x_3=2$ $\quad (x_6=0=x_5)$ (*)

$z^*=-\frac{217}{3}$

$x_2^*=x_5^*=x_6^*=0$

$x_1^*=\frac{25}{3}$ $\quad x_3^*=2$

$x_0=0$ →

$x_3=2+\frac{7}{3}x_2+\frac{2}{9}x_6+\frac{1}{9}x_5$

$x_1=\frac{25}{3}+\frac{62}{9}x_2+\frac{19}{27}x_6+\frac{5}{27}x_5$

$x_4=\frac{554}{3}+\frac{1588}{9}x_2+\frac{437}{27}x_6+\frac{142}{27}x_5$

$z=-7x_1+17x_2-7x_3=-\frac{217}{3}-\frac{428}{9}x_2-\frac{56}{27}x_5-\frac{195}{27}x_6$

(*) ČE BI UGANILI REŠITEV $x_1 = \frac{25}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ $(x_5 = 0 = x_6)$:

$$x_4 = 5 + 17x_1 + 15x_2 + 19x_3$$

1) $x_5 = 12 - 6x_1 - 3x_2 + 19x_3 \Rightarrow$

2) $x_6 = -15 + 3x_1 - 9x_2 - 5x_3 \Rightarrow$

TLE HOČEMO x_3, x_1 IZRAZIT Z x_2, x_5, x_6

ČE NPR. 1) + 2 · 2): $x_5 + 2x_6 = -18 - 21x_2 + 9x_3 \Rightarrow x_3 = 2 + \frac{21}{9}x_2 + \frac{x_5}{9} + \frac{x_6}{1} \cdot \frac{2}{9}$

VSTAVIMO NAZAJ V 2): $x_6 = -15 + 3x_1 - 9x_2 - 10 - \frac{5 \cdot 21}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_5 - \frac{10}{9}x_6$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\left(25 + \frac{62}{3}x_2 + \frac{5}{9}x_5 + \frac{19}{9}x_6\right)$$

TOREJ:

$$x_3 = 2 + \frac{21}{9}x_2 + \frac{x_5}{9} + \frac{2}{9}x_6$$

$$x_1 = \frac{25}{3} + \frac{62}{9}x_2 + \frac{5}{27}x_5 + \frac{19}{27}x_6$$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 5 + 17x_1 + 15x_2 + 19x_3 \\ z &= -7x_1 + 17x_2 - 7x_3 \end{aligned}\right\}$$ TU JE TREBA ŠE VSTAVIT x_1, x_3 NA DESNI

JE ZAČETNI SLOVAR

VSTOPI y_3, IZSTOPI y_2:

$$y_3 = \frac{7}{19} - \frac{2}{19}y_5 + \frac{3}{19}y_7 - \frac{46}{19}y_2$$

$$y_1 = \frac{55}{38} - \frac{7}{76}y_5 + \frac{5}{19}y_7 - \frac{11}{2}y_2$$

$$y_6 = \frac{149}{38} - \frac{39}{76}y_5 - \frac{21}{19}y_7 + \frac{9}{2}y_2 \quad \leftarrow \text{IZSTOPI}$$

$$\Rightarrow y_7 = \frac{149}{42} - \frac{13}{28}y_5 + \frac{57}{14}y_2 - \frac{19}{21}y_6$$

$$y_4 = \frac{709}{38} - \frac{207}{76}y_5 + \frac{99}{19}y_7 - \frac{243}{2}y_2$$

$$z = \frac{295}{19} - \frac{11}{19}y_5 + \frac{45}{19}y_7 - 45y_2$$

VSTOPI (y_7)

$$z = \frac{335}{14} - (\underset{0}{\vee})y_5 - (\underset{0}{\vee})y_6 - (\underset{0}{\vee})y_2$$

$$\Rightarrow z^* = \frac{335}{14}, \quad y_2^* = 0 \quad y_5^* = y_6^* = 0$$

$$\Rightarrow y_7^* = \frac{149}{42} \Rightarrow y_3^* = \frac{13}{14}, \quad y_1^* = \frac{50}{21}$$

ORIG. PROBLEM: $z^* = -\frac{335}{14}$

– SMO DOBILI PRI STANDARIZACIJI DUALA

$$9y_1^* + 18y_3^* > 1 \Rightarrow \boxed{x_1^* = 0}$$

$$12y_1^* - 14y_2^* - 20y_3^* = 10$$

$$-15y_1^* - 6y_2^* + 18y_3^* = -13$$

$$8y_1^* + 16y_2^* - 7y_3^* > 3 \Rightarrow \boxed{x_4^* = 0}$$

$$y_{1,3}^* \neq 0 \Rightarrow \quad 12x_2 - 15x_3 = -12$$
$$-20x_2 + 18x_3 = 5$$
$$\Rightarrow x_2^* = \frac{47}{28}, \quad x_3^* = \frac{15}{7}$$

(4) a) OPT. = MAX, $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}_+^3;\ x_1 \geq 50,\ x_2 \geq 50,\ x_3 \geq 50,\ x_1 \geq 2 \cdot x_2,\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2000,\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 500\}$

$$f(x_1,x_2,x_3) = 20000 + (x_1+x_2+x_3-200)\cdot 100$$

STVAR DEFINICIJE, ČE 20000, 25000 ALI 0

$x_1+x_2+x_3 < 200$ SE NA Ω NE MORE ZGODIT.

b) MAX $x_1+x_2+x_3$

$x_1 \geq 50$

$x_2 \geq 50$

$x_3 \geq 50$

$x_1 \geq 2x_2$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2000$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 500$

ČE REŠUJEM NA ROKE, SE SPLAČA UVEST $x_1' = x_1 - 50$, $x_2' = x_2 - 50$, $x_3' = x_3 - 50$

REŠITEV: $z^* = 350$, $x_1^* = 250$, $x_2^* = x_3^* = 50$

→ PROFIT JE $20000 + 150 \cdot 100 = 35000$

c) JE ENOLIČNA:

VIDIMO IZ SLOVARJA, ALI PA OPAZIMO, DA SE NAM x_1 NAJBOLJ SPLAČA DELAT. KAKRŠENKOLI $x_2, x_3 > 50$ NI OPTIMALEN.

d) VEČ NITI SE NAM NE SPLAČA, KER NAM JE ITAK V OPTIMALNI REŠITVI NIT ŠE OSTANE, DODATNO BLAGO PA BI POVEČALO x_1^* IN S TEM PROFIT.