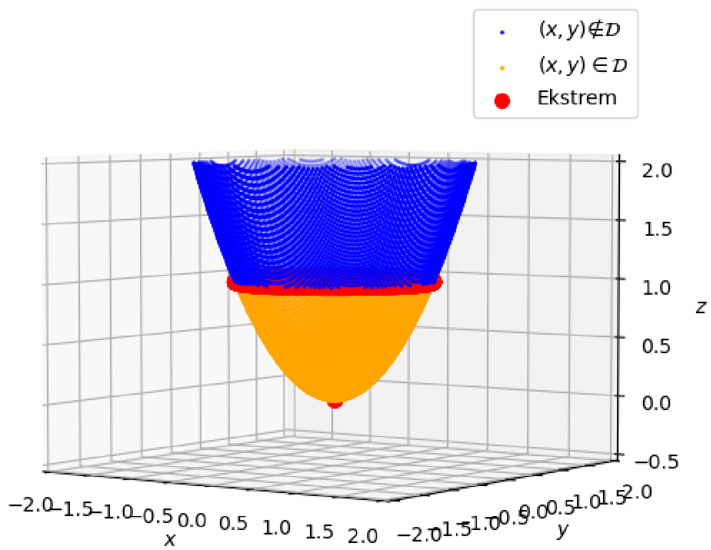
1 Dodatna intuicija ekstremov funkcije na omejenem območju

Za boljšo intuicijo ekstremov funkcije na omejenem območju, si oglejmo zelo enostaven primer:

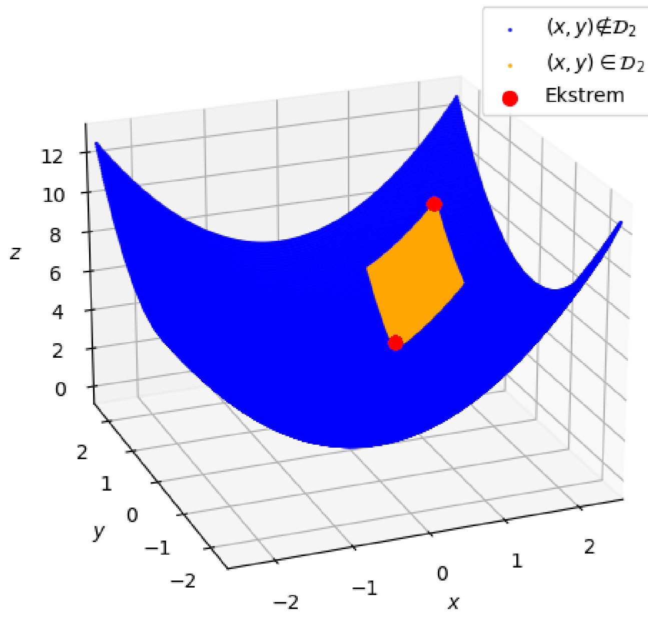
Zanimajo nas ekstremi funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$, na območju $\mathcal{D}$, ki ga podaja $x^2 + y^2 \leq 1$.

Kandidat za ekstrem, ki ga dobimo iz $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ je $T(0, 0)$. S Hessejevo matriko (ali pa s premislekom) bi lahko preverili, da je to lokalni (celo globalni) minimum $f(x, y)$ na $\mathbb{R}^2$. Seveda je potem to tudi lokalni minimum, če se omejimo na $A \subset \mathbb{R}^2$, ki vsebuje $T(0, 0)$ (tu se omejimo na dovolj "lepe"A, ne pa npr. $A = \{T(0, 0)\}$). To da so ostale kandidati na robu območja je lepo razvidno iz spodnje slike. Na robu ima funkcija konstantno vrednost $f(x, y) = 1$. Na območju ima torej $f(x, y)$ minimum v $(x, y) = (0, 0)$ in maskimum na $x^2 + y^2 = 1$.



Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$, kjer ekstreme iščemo na oranžno pobarvanem območju. Ekstremi so označeni z rdečo barvo.

Poglejmo še ekstreme $f(x, y) = x^2 + y^2$ na območju $\mathcal{D}_2$, ki ga podaja $1 \geq x \geq 2, 1 \geq y \geq 2$. Lokalni minimum $(0, 0)$ je tokrat izven območja $\mathcal{D}_2$, torej so edini kandidati za ekstreme na robu $\mathcal{D}_2$. Na robu $x = 1$ velja $f(1, y) = 1 + y^2$, kar ima neničelen odvod na $\mathcal{D}_2$ in so kandidati le $(1, 1)$ in $(1, 2)$. Na robu $x = 2$ podobno velja $f(2, y) = 4 + y^2$ in so kandidati le $(2, 1)$ in $(2, 2)$ Čisto simetrično imamo na robovih $y = 1$, $y = 2$, kar da iste kandidate. Z izračunom se prepričamo, da je minimum le v točki $(1, 1)$ maksimum pa v $(2, 2)$. Situacija je prikazana na spodnji sliki



Funkcija $f(x,y) = x^2 + y^2$, kjer ekstreme iščemo na oranžno pobarvanem območju. Ekstremi so označeni z rdečo barvo.