1 Klasifikacija ekstremov funkcij več spremenljivk

Kot vemo, stacionarne točke (kandidate za ekstreme) dobimo kot rešitev

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

Ekstreme potem klasificiramo s pomočjo Hessejeve matrike

$$H(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{a}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

na naslednji način (ker je H simetrična, so lastne vrednosti vse realne)

- $\vec{a}$ je lokalni minimum, če je $H(\vec{a})$ pozitivno definitna (vse lastne vrednosti so > 0).
- $\vec{a}$ je lokalni maksimum, če je $H(\vec{a})$ negativno definitna (vse lastne vrednosti so < 0).
- $\vec{a}$ je sedlo, če je $H(\vec{a})$ nedefinitna in nesingularna (Lastne vrednosti niso nič in obeh predznakov).
- Če je $H(\vec{a})$ singularna (vsaj ena izmed lastnih vrednosti je enaka nič), ne moremo o stacionarni točki s tem testom nič povedati.

Četrti primer je enostavno preverljiv:

- Če je $\det H(\vec{a}) = 0$, je Hessejeva matrika singularna in ne moremo ničesar povedati.

Za preostale potrebujemo informacijo o lastnih vrednostih. Te lahko sicer vedno izračunamo, vendar je v praksi lažje ekstreme klasificirati s pomočjo determinant in minorjev. Ker je matrika H simetrična lahko za obravnavo pozitivne definitnosti (torej, lokalni minimum) uporabimo Sylvestrov kriterij, Ta definitnost matrike H določi s pomočjo njenih glavnih minorjev. i-ti minor je determinanta podmatrike, ki jo sestavlja prvih i vrstic in stolpcev matrike H.

Za 2D primer, ko imamo $f(x, y)$ je Hessejeva matrika:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{3}$$

In minorja sta

$$D_1 = f_{xx} \tag{4}$$

$$D_2 = \det H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \tag{5}$$

Za 3D primer, ko imamo $f(x, y, z)$ je Hessejeva matrika:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & fzy & f_{zz} \end{pmatrix} \tag{6}$$

in minorji so

$$D_1 = f_{xx} \tag{7}$$

$$D_2 = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \tag{8}$$

$$D_3 = \det(H) \tag{9}$$

Sylvester pravi:

- Če so vsi glavni minorji striktno pozitivni, je H pozitivno definitna - imamo lokalni minimum.

S pomočjo Sylvestrovega izreka lahko tudi povemo, kdaj je matrika negativno definitna, saj je H negativno definitna le, če je $-H$ pozitivno definitna. Z upoštevanjem spremembe predznaka determinant (in torej minorjev) ob $H \to -H$ dobimo naslednji kriterij:

- Če so lihi glavni minorji ($D_1, D_3, ..$) striktno negativni, sodi (D_2) pa striktno pozitivni je H negativno definitna - imamo lokalni maksimum.

Če ni zadoščeno nobenim izmed zgornjih pogojev imamo sedlo:

- Če H ni singularna, hkrati pa minorji niso vsi pozitivni in tudi niso alternirajoči po predznaku (začenši z negativnim), imamo sedlo.

V 2D primeru $f(x, y)$ se zgornji primer sedla reducira na enostaven pogoj $\det(H) < 0$.