Zlepki nad triangulacijami, DN 2

Andrej Kolar-Požun

March 13, 2023

1 Prva naloga

Naloga 2 [7. 3. – 14. 3.].
Naj bosta $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ afina prostora s pripadajočima vektorskima prostoroma $\mathbb{V}$ in $\mathbb{U}$. Dokažite, da je vsaka afina preslikava $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ oblike $\varphi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{b} + \psi(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a})$, kjer je $\boldsymbol{a}$ točka iz $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{b}$ točka iz $\mathbb{B}$ in $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ linearna preslikava.

Dano imamo afino preslikavo φ. Za $\mathbf{a}$ vzamemo poljubno točko iz $\mathbb{A}$ (če je ta prazen je trditev trivialno res). Za $\mathbf{b}$ vzamemo $\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a})$

Označimo $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$. Po aksiomih afinih prostorov je to dobro definiran vektor za vsak $\mathbf{p}$. Seveda velja tudi $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{v}$.

Zveza iz naloge se v novih oznakah in definicijah glasi:

$$\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{v}), \tag{1}$$

kjer zaenkrat še ne vemo, ali je $\varphi(\mathbf{v})$ linearna. Vemo pa, da je to dobro definirana funkcija, ki slika iz $\mathbb{V}$ v $\mathbb{U}$:

$$\psi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a}), \tag{2}$$

saj velja $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ in $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a}) \in \mathbb{U}$.

Preverimo, da je $\psi(\mathbf{v})$ linearna:

Najprej moramo pokazati, da je $\psi(c\mathbf{v}) = c\psi(\mathbf{v})$ za vsak skalar c:

$$\psi(c\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{a} + c\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a}) = \tag{3}$$

$$= (1 - c)\varphi(\mathbf{a}) + c\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a}) = c(\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a})) = c\psi(\mathbf{v}), \tag{4}$$

kjer smo pri prehodu v drugo vrstico $\mathbf{a} + c\mathbf{v}$ zapisali kot afino kombinacijo $(1-c)\mathbf{a} + c(\mathbf{a} + \mathbf{v})$ in upoštevali, da afine preslikave ohranjajo afine kombinacije: $\varphi((1 - c)\mathbf{a} + c(\mathbf{a} + \mathbf{v})) = (1 - c)\varphi(\mathbf{a}) + c\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v})$.

Pokazati moramo še, da za $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ velja $\psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})$:

$$\psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{a}) = \tag{5}$$

$$= \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - 2\varphi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}), \tag{6}$$

kjer smo spet v prehodu v drugo vrstico $\mathbf{a}+\mathbf{u}+\mathbf{v}$ zapisali kot afino kombinacijo $(\mathbf{a}+\mathbf{u})+(\mathbf{a}+\mathbf{v})-\mathbf{a}$ in spet uporabili lastnost afine preslikave φ.

S tem smo pokazali, da je $\psi(\mathbf{v})$ linearna preslikava. Če se vrnemo na oznako $\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{v}$ smo pokazali, da velja

$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{p}-\mathbf{a}), \tag{7}$$

kjer je ψ linearna. Ker to velja za vsak $\mathbf{p}$ in vsako afino preslikavo φ je trditev s tem dokazana.