Univerzitetni študij finančne matematike

OPTIMIZACIJSKE METODE

Domača naloga: konveksnost

Ime Priimek

Rok za oddajo: 23. 5. 2025

---

1. Naj bosta $I \subset \mathbb{R}^2$ množica tistih točk v ravnini, ki imajo obe koordinati iracionalni (npr. $(\pi, e) \in I$, ampak $(\pi, 0) \notin I$), ter $Q \subset \mathbb{R}^2$ množica tistih točk v ravnini, ki imajo obe koordinati racionalni (npr. $(1,0) \in Q$, ampak $(\pi, 0) \notin Q$).

   Naj bosta A in B konveksni ogrinjači množic $([2,9] \times [1,7]) \cap I$ in $([\sqrt{38}, \sqrt{137}] \times [\sqrt{21}, \sqrt{109}]) \cap Q$. Poenostavljeno zapiši A in B. Ali sta $A \cap B$ in $A \cup B$ konveksni?

2. S pomočjo Farkaseve leme dokaži, da je sledeč problem nedopusten:

$$
\begin{aligned}
\max\ 2x + 3y \quad & -4z + 5w \\
-4x + 15y \ & +3z - 15w \leq 2 \\
8x + 9y \ & +14z + 16w \leq -14 \\
4x - 2y \quad & -4z - 6w \ \leq -11
\end{aligned}
$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Na katerem območju je konveksna funkcija

$$f(x) = e^x(x - 11) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \sqrt[2025]{177}x + \pi^2 \ ?$$

   Namig: ustrezen izraz zapiši kot produkt dveh členov.

4. Dokaži, da za poljubni množici A in B velja: $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}(B)$. Najdi par množic A in B, za kateri velja $A \neq B$ in hkrati $\operatorname{conv}(A) = \operatorname{conv}(B)$.

5. S pomočjo Karush-Kuhn-Tucker pogojev poišči minimum funkcije:

$$f(x, y) = 7x^2 + 2xy + 7y^2 - 4x - 7y + 4$$

   na območju:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 13x + 2y \leq 2, -14x + 15y \leq -19, -10x + 8y \leq -20\}$$

(1) OPAZIMO: $\left([2,9]\times[1,7]\right)\cap I = \left((2,9)\times(1,7)\right)\cap I$

SUMIMO: $A = (2,9)\times(1,7)$

$A \subseteq (2,9)\times(1,7)$ OČITNO, SAJ JE $(2,9)\times(1,7)$ KONVEKSNA IN VSEBUJE ✓

(KONV. OGRINJAČA JE NAJMANJŠA KONV. MNOŽICA, KI VSEBUJE DANO MNOŽICO)

$(2,9)\times(1,7) \subseteq A$

VZAMEMO $(x,y)\in(2,9)\times(1,7)$

ZARADI GOSTOSTI $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ V $\mathbb{R}$ OBSTAJA $(x_1,y_1)\in I$, DA $(2,1)<(x_1,y_1)<(x,y)$

POTEGNEMO PREMICO SKOZI (x_1,y_1) IN (x,y). ZARADI GOSTOSTI OBSTAJA (x_2,y_2) NA TEJ PREMICI, DA $(x,y)<(x_2,y_2)<(9,7) \Rightarrow (x,y)$ JE KONV. KOMB. ELEMENTOV IZ $\left((2,9)\times(1,7)\right)\cap I$ ✓

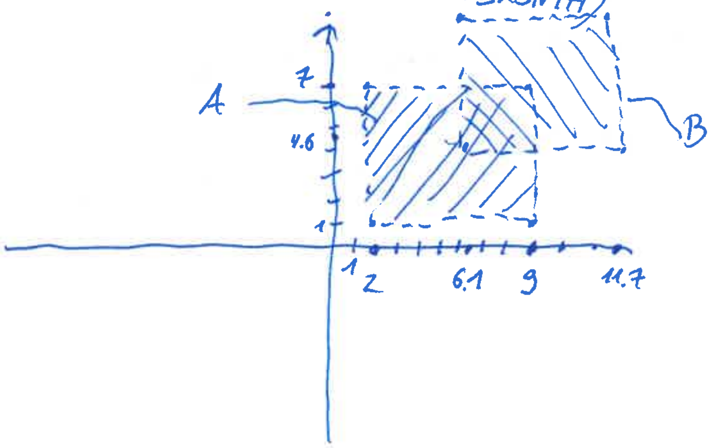
(KONV. OGRINJAČA JE TUDI MNOŽICA VSEH KONV. KOMBINACIJ)

TOREJ: $A = (2,9)\times(1,7)$

PODOBNO: $B = (\sqrt{38},\sqrt{137})\times(\sqrt{21},\sqrt{109})$

$B \approx (6.1, 11.7)\times(4.6, 10.4)$

$A\cap B$ JE KONVEKSNA (PRESEK KONVEKSNIH)



OČITNO $A\cup B$ NI KONV.

(2) DOKAZUJEMO: NE $\exists x \geq 0$, DA $x\in\mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} -4 & 15 & 3 & -15 \\ 8 & 9 & 14 & 16 \\ 4 & -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \\ -11 \end{bmatrix} \overset{\text{FARKAS}}{\Longleftrightarrow} \exists y \geq 0,\ y\in\mathbb{R}^3, \text{ DA:}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ 15 & 9 & -2 \\ 3 & 14 & -4 \\ -15 & 16 & -6 \end{bmatrix}}_{A^T} y \geq 0 \text{ IN } \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -14 & -11 \end{bmatrix}}_{b^T} y < 0$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$A^T y = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} \geq 0,\quad b^T y = -14 < 0 \quad \square$$

③ $f(x) = e^x(x-11) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \sqrt[2025]{177}\,x + \pi^2$

$f'(x) = e^x(x-11) + e^x - \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 9x + \sqrt[2025]{177}$

$f''(x) = e^x(x-11) + 2e^x - x^2 + 8x + 9 = e^x(x-9) - (x-9)(x+1) = (x-9)(e^x - (x+1))$

KONV. KJER $f''(x) \geq 0 \iff (x-9)(e^x-(x+1)) \geq 0$

KJE JE $e^x - (x+1) \geq 0$? $\iff e^x \geq x+1$: V $x=0$ VELJA $e^x = x+1$

$(e^x)' = e^x$, $(x+1)' = 1$

$\Rightarrow x>0 \Rightarrow e^x$ HITREJE NARAŠČA KOT $x+1$

$\Rightarrow x<0 \Rightarrow e^x$ POČASNEJE PADA KOT $x+1$

$\Rightarrow e^x \geq x+1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

TOREJ JE $\boxed{\text{KONV.}}$ KO $x-9 \geq 0$ OZIROMA $\boxed{\text{NA } [9,\infty)}$

④ $A \subseteq B \Rightarrow \text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(B)$

conv(A) = NAJMANJŠA KONV. MN., KI VSEBUJE A
conv(B) = — // — B

VSAKA KONV. MN. KI VSEBUJE B, VSEBUJE TUDI A ($A \subseteq B$), TOREJ MED DRUGIM, conv(B) JE KONV. IN VSEBUJE A. KER JE conv(A) NAJMANJŠA TAKA MN. SLEDI $\text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(B)$ □

b) $A = \{0,1\}$
$B = [0,1]$ $\quad A \neq B$, $\text{conv}(A) = \text{conv}(B) = B$

⑤ MIN $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 4x - 7y + 4 \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$, $\det H > 0 \Rightarrow$ KONV. ✓

$$\left.\begin{array}{l} 13x + 2y - 2 \leq 0 \\ -14x + 15y + 19 \leq 0 \\ -10x + 8y + 20 \leq 0 \end{array}\right\} \text{AFINE} \Rightarrow \text{KONV.}$$

KKT:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 14x + 2y - 4 + 13\lambda_1 - 14\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0 \\ \cdot\ 14y + 2x - 7 + 2\lambda_1 + 15\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ \cdot\ \lambda_1(13x + 2y - 2) = 0 \\ \cdot\ \lambda_2(-14x + 15y + 19) = 0 \\ \cdot\ \lambda_3(-10x + 8y + 20) = 0 \end{array}\right\} \text{WOLFRAM} \Rightarrow$$

- (x,y) DOPUSTNA
- $\lambda_{1,2,3} \geq 0$

REŠITVE Z $\lambda_{1,2,3} \geq 0$:

- $x = \frac{7}{32}, y = \frac{15}{32}$ NI DOP. //
- $x = \frac{164}{109}, y = -\frac{135}{218}$ NI DOP. //
- $x = \frac{5}{61}, y = \frac{57}{122}$ NI DOP. //
- $x = \frac{476}{481}, y = -\frac{165}{481}$ NI DOP. //
- $x = \frac{68}{223}, y = -\frac{219}{223}$ NI DOP. //
- $x = \frac{14}{21}, y = -\frac{60}{21}$ DOPUSTNA

$f(x^*, y^*) \approx 41.6$