Aula 01 – Vetores I

Uma das ferramentas mais usadas no desenvolvimento de jogos são os vetores. Sua representação pode mudar, dependendo do foco que é dado, sendo assim, vetores também são utilizados na computação, portanto as aulas sobre vetores serão focadas no desenvolvimento de jogos, tendo várias abordagens diferentes. Nessa aula o foco é na parte matemática do vetor.

A aula está dividida em duas seções, sendo a seção 1.1 sobre Introdução a vetores, seção 1.2 Origem e Conceitos dos vetores; e seção 2.1, propriedades vetoriais, e 2.2 operações vetoriais.

1.1 Introdução

Existem dois tipos de grandezas físicas - grandeza escalar e grandeza vetorial. Para representar uma grandeza escalar e é necessário apenas um valor para indicar seu tamanho, e uma unidade de medida. A distância percorrida por um carro - 10km - 10 é o valor escalar, e km é a unidade de medida.

Já uma grandeza vetorial, além de o tamanho e a unidade de medida, também precisa de uma ***direção*** e um ***sentido***:

- **A direção** funciona como uma linha, a qual pertence o vetor, sendo que esta linha possui uma direção - horizontal, vertical ou inclinada;
- **O sentido** pode ser entendido como para onde aponta o vetor: esquerda, norte e etc..

Um exemplo prático é uma força exercida sobre um corpo, como exemplificado na imagem a seguir.

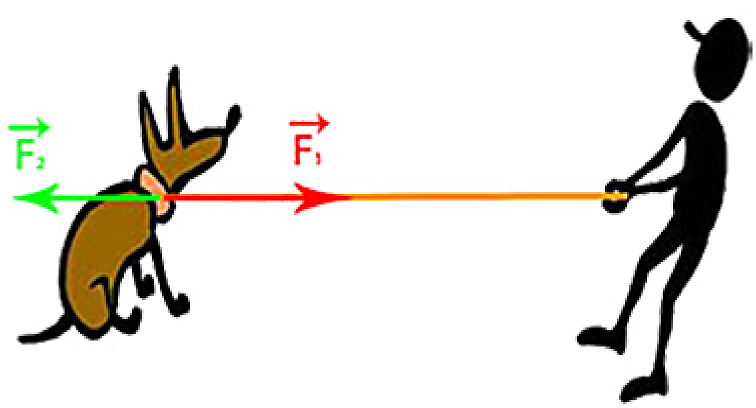

Figura 1 - Exemplo de vetor como força

O dono faz uma força para a esquerda puxando o cachorro, e o cachorro faz uma força contrária a força do dono (sentido oposto), ambas na mesma direção. Vale lembrar que cada força possui sua intensidade.

1.2 Origem e Conceitos dos Vetores

Uma das formas de enxergar um vetor é como um **segmento de reta que possui sentido e direção**. E um segmento de reta se dá por traçar uma reta entre dois pontos.

Dados dois pontos **A** e **B**, temos um segmento **AB** - e dele podemos extrair um vetor ***v***, indo de **A** até **B**, ou seja, o vetor ***v*** é igual ao segmento **AB**; o contrário também funciona, sendo **w** um vetor do segmento **BA**, indo de **B** até **A**.

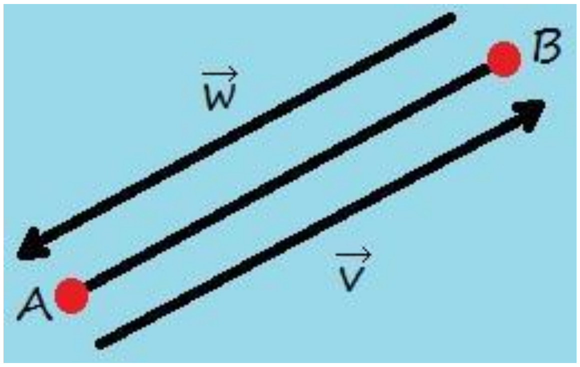

Figura 2 - Segmento de reta e vetor

Partindo dessa definição, uma maneira fácil de visualizar um vetor, é encaixando o vetor no plano cartesiano. Como pode ser visto na figura a seguir, há um plano cartesiano descrevendo três vetores: **V**, **U** e **W**; e os segmentos **CD**, **AB** e **CB**, respectivamente.

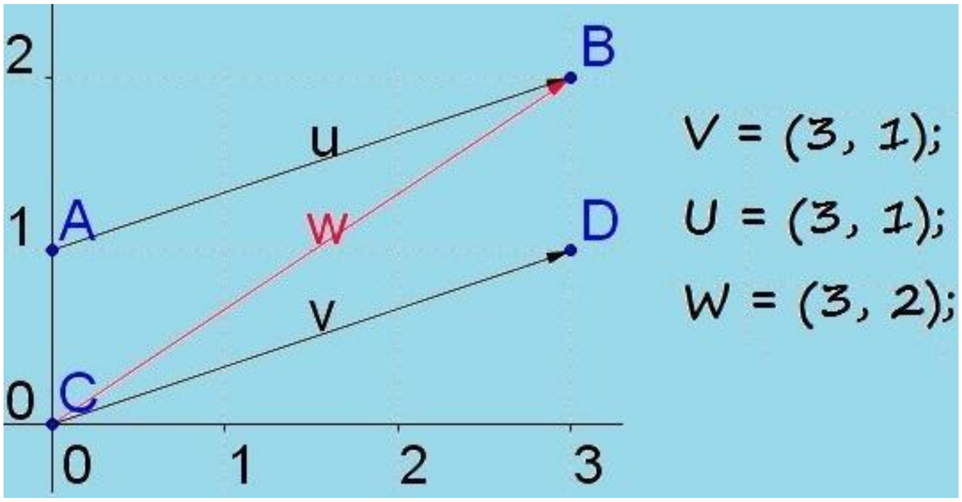

Figura 3 - Vterores no plano cartesiano

Observando o segmento **CB**, para obter o sentido dele basta verificar o ponto de origem e o ponto de término do segmento - o segmento **CB**, parte do ponto **C** e vai em sentido a **B.** Há então um segmento que possui uma direção e sentido, que foi chamado aqui de vetor ***w***.

Obtemos as coordenadas de ***w*** subtraindo o ponto de término pelo ponto de origem, neste caso: ***w***(x, y) = **B**(3, 2) - **C**(0, 0) →***w***(3, 2). O mesmo acontece com os vetores **U** e **V**.

Reparando nos vetores **U** e **V**, ao calcular suas coordenadas, da para ver que eles possuem os mesmos valores para *x* e *y*, são paralelos - mesma direção -, e possuem o mesmo sentido, o que significa que **U** e **V** são iguais.

Por fim, é necessário mencionar que vetores respeitam os eixos existentes no seu sistema de coordenadas -, plano cartesiano (2 dimensões) usa-se ***v***(x, y), no espaço (3 dimensões) usa-se ***v***(x, y, z), e caso vá aumentando o número de dimensões ou eixos, aumentasse as coordenadas do vetor, ficando por exemplo ***v***(x, y, z, w) para um sistema de 4 dimensões, e assim sucessivamente.

Outra forma de enxergar um vetor, é vê-los em fenômenos físicos. É muito comum utilizar vetores para descrever uma força. Na figura a seguir **Fr**, é o vetor Força resultante, **Fx**, o vetor Força no eixo *x*, e o **Fy**, vetor força no eixo *y*.

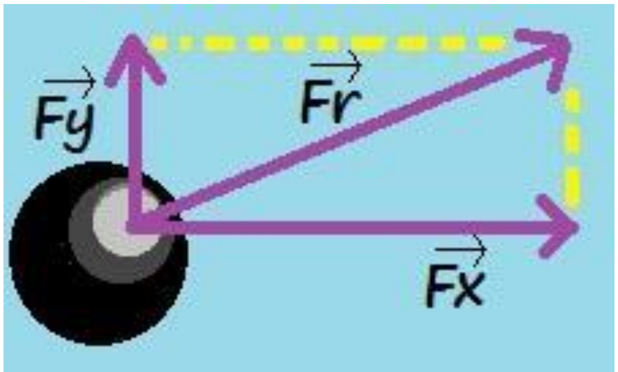

Figura 4 - Decomposição vetorial de uma força

O objeto da imagem viaja seguindo o sentido do vetor **Fr.** Se um plano cartesiano for colado em cima da imagem com a origem no centro do objeto, poderá ser visto que o vetor **Fr** descreve um deslocamento no eixo *X*, e outro no eixo *Y*.

A diferença entre a quantidade de deslocamento no eixo *X* e no eixo *Y*, irá ditar qual o sentido em que o objeto se deslocará, ou seja, quanto mais alinhado ao eixo *Y* estiver o vetor **Fr**, mais altitude ele alcançará, e consequentemente, irá se deslocar menos no eixo *X*. Na imagem acontece o oposto, a quantidade de deslocamento em X (o tamanho do Fx) é maior que em Y (Fy).

Esta "separação" do vetor **Fr** chama-se **Decomposição de Vetores** ou **Decomposição Vetorial** - decompõe-se um vetor resultante, no caso o **Fr**, em dois ou mais vetores que indicam sua intensidade nos eixos do sistema de coordenadas, que como dito pode ser o plano ou o espaço.

Esta análise é muito importante para entender como funciona um movimento - seja por força, seja por velocidade -, necessariamente há sempre um vetor resultante que dita a direção e o sentido que o objeto se move.

2.1 Propriedades vetoriais

1 - Igualdade de vetores: Dois vetores são iguais quando seus tamanhos, sentidos e direções são iguais.

2 - Vetor Oposto: Dois vetores são opostos quando possuem mesmo tamanho e direção, mas sentidos contrários, logo EF é oposto a AB, mas FE é igual a AB (vide imagem).

3 - Vetores paralelos: Dois vetores são paralelos quando ambas as direções são iguais.

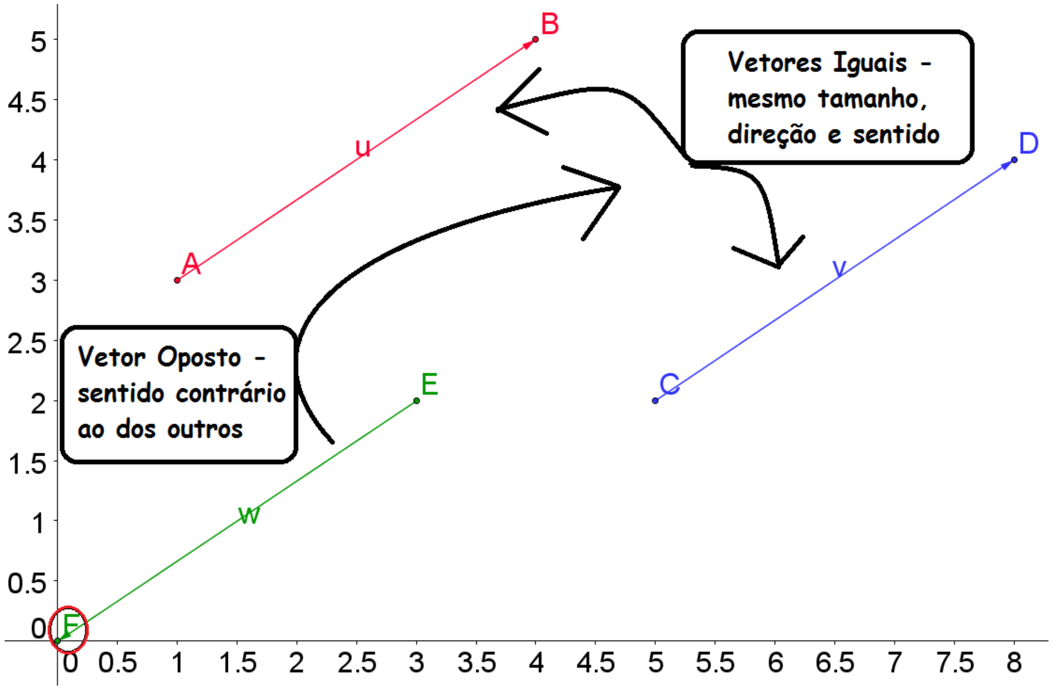

Figura 5

Nesta imagem, são mostrados três vetores paralelos, sendo dois iguais, e o terceiro oposto aos outros.

4 - Ortogonalidade de vetores: Dois vetores são ortogonais, ou perpendiculares, quando o **ângulo entre eles é igual a 90º**, ou quando o **produto escalar entre eles é igual a zero** (U·V = 0).

5 - Posição Geométrica: Vetores não necessitam de estar relacionado a uma posição geométrica fixa, podendo ter sua origem modificada, sem comprometer suas características.

6 - Vetor Nulo: É um vetor que possui tamanho zero, logo não tem direção nem sentido.

7 - Vetor Unitário ou **Vetor Normalizado:** Vetor unitário é um vetor que possui tamanho igual a 1. Para cada vetor.

2.2 Operações Vetoriais

1 - Soma e Subtração: A ideia de soma e subtração com vetores são relacionáveis, pois ambas dependem do sentido e da direção dos vetores.

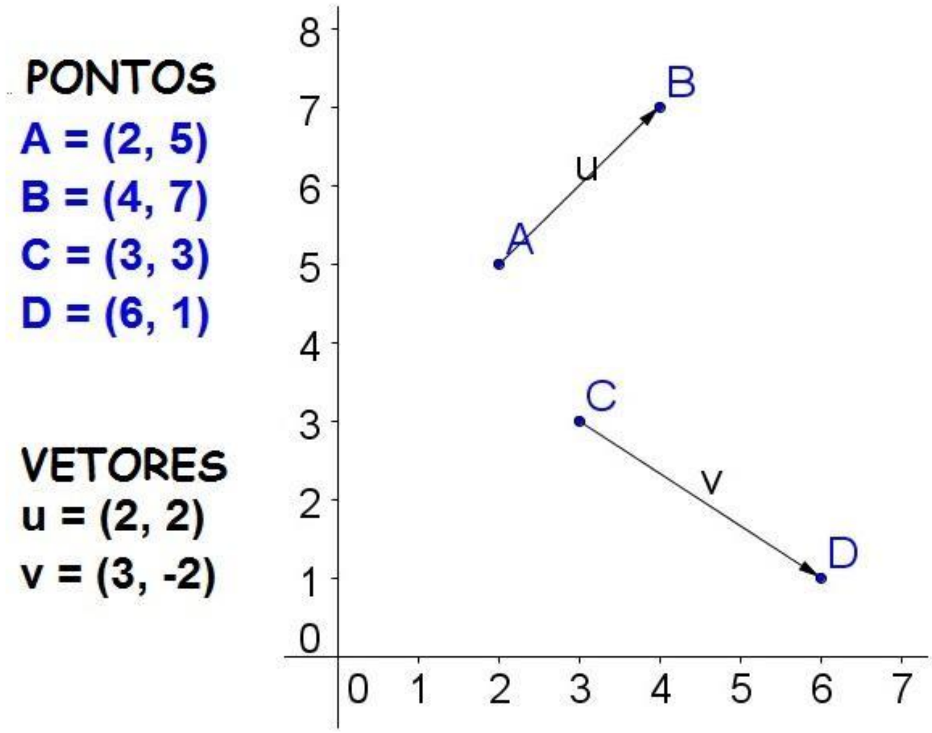

Figura 6

Nesta imagem, há dois vetores, ***v*** e ***u***, que serão somados. Para isso a soma ou subtração de dois vetores se dá pela operação em cada conjunto de suas coordenadas, no caso $(v + u)$ = $(Xv + Xu)$,$(Yv + Yu)$, portanto $(2 + 3), \big(2 + (-2)\big)$, isto dá um novo vetor ***w*** = $(5, 0)$.

Para a subtração, é o mesmo processo, mas pode ser calculado como a soma de um vetor oposto. Por exemplo $(v - u)$ = $(Xv - Xu)$,$(Yv - Yu)$, tem-se $(2 - 3), \big(2 - (-2)\big)$, sendo o resultado ***z*** = $(-1, 4)$; ou como soma por um vetor oposto, $\big(v + (-u)\big)$ = $\big(Xv + (-Xu)\big)$,$\big(Yv + (-Yu)\big)$, tem-se $\big(2 + (-3)\big), \big(2 + (2)\big)$.

2 - Produto de um vetor por um escalar: É possível multiplicar um vetor ***V*** por um valor **k** da seguinte maneira $kV = (k \cdot x, k \cdot y)$. Esta operação resulta em um vetor paralelo, com magnitude igual ao módulo do vetor ***V*** multiplicado por **k**. Por exemplo, $V = (2,3)\ e\ k = 5\ \rightarrow kV = (5 \cdot 2, 5 \cdot 3) = kV(10,15)$.

Se **k** > 0, o sentido do vetor se conserva, se **k** < 0 o sentido é invertido; e para **k** = 0, o vetor vira nulo. É possível também utilizar a divisão, contudo não há sentido físico em dividir um vetor por um escalar, mas o resultado acaba por ser o mesmo - sendo **k** = 0.5, multiplica-lo por ***V***, seria equivalente a dividir V por **k** = 2, ficando $V/2 = \ (x/2, y/2)$.

3 - Módulo de um vetor: Módulo, comprimento, tamanho, ou magnitude de um vetor é uma grandeza escalar. Seu cálculo é: $|V| \ = \sqrt{Xv^2 \ + \ Yv^2}$.

4 - Produto escalar: O produto escalar de dois vetores resulta em uma grandeza escalar, e esta operação é dada por $(V \cdot U) \ = \ (Xv \cdot Xu) \ + \ (Yv \cdot Yu)$. Este valor indica o **quanto um vetor NÃO é ortogonal ou perpendicular a outro**, se o resultado for igual a zero, o angulo entre eles é igual a 90º (são perpendiculares).
Outras propriedades relacionadas são:

- V·U = U·V;
- V·V = |V|·|V| = |V|^2;
- |U·V| ≠|U|·|V|;
- |U + V| ≠|U| + |V|;

5 - Vetor Unitário: Vetor unitário indica um vetor, que possui módulo igual a 1, calculado dividindo o vetor pelo seu módulo, ou seja, ${}^{V}\!/_{|V|}$, sendo este de mesma direção e sentido.

6 - Angulo entre dois vetores: Dados dois vetores não paralelos, o angulo entre é calculado através da formula $\theta \ = \ arcos(U \cdot V / \ |U| \cdot |V|)$. Arco cosseno é a operação inversa do cosseno, escrito também como cos^{-1} .

7 - Vetor a partir de dois pontos: Dados dois pontos distintos, é possível extrair um vetor traçando uma reta entre esses pontos. Dados 2 pontos, A(Xa, Ya) e B(Xb, Yb), conseguimos um vetor subtraindo as coordenadas de um ponto pelo outro, sendo que o primeiro elemento da subtração indica o sentido do vetor.

O segmento **AB** é representado por B-A = (Xb-Xa, Yb-Ya), e para o segmento **BA**, A-B = (Xa-Xb, Ya-Yb). A imagem a seguir mostra visualmente as considerações.

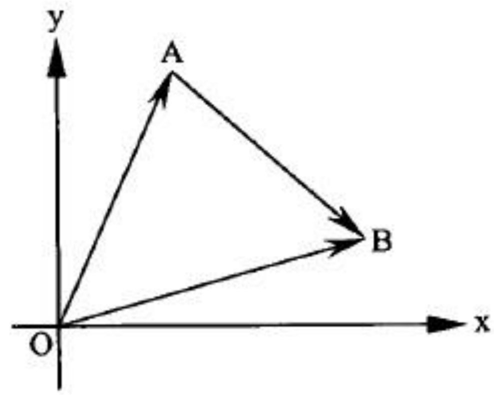

Figura 7