

System mieszany M/M/m/FIFO/m+N

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest zamodelowanie systemu wieloprocessorowego złożonego z kilku modułów CPU oraz GPU jako systemu kolejkowego.

1.1 Założenia

Projektowany system składa się z m_1 modułów CPU oraz m_2 modułów GPU obsługujących przychodzące zgłoszenia z różną szybkością. Zakładamy, że planista ma ograniczoną ilość miejsc N , oraz pracuje z dyscypliną FIFO. Takie założenia pozwalają nam przybliżyć układ jako system mieszany **M/M/m/FIFO/m+N** z indywidualną obsługą i równomiernym rozptywem zgłoszeń.

Zakładamy, że proces przybywania wiadomości jest procesem Poissona, natomiast czasy obsługi zgłoszeń są procesem wykładniczym.

2. Przypadek testowy

Implementacja systemu jako model kolejkowy: **M/M/m/FIFO/m+N**

$$\lambda = 150$$
$$t_s = \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100}, \frac{1}{80}, \frac{1}{80} \right]$$

$$\mu = 1/t_s = [100, 100, 100, 80, 80]$$

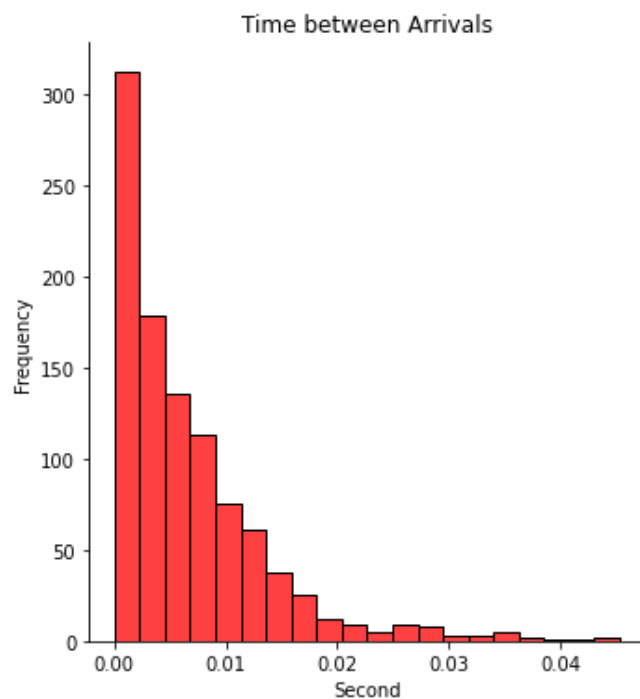
$$N = 4, \quad m = m_1 + m_2 = (3 + 2) = 5$$

Warunek ergodyczności dla zadanych parametrów:

$$\frac{SK_m^m}{SK_{m-1}^m} = 0.326$$

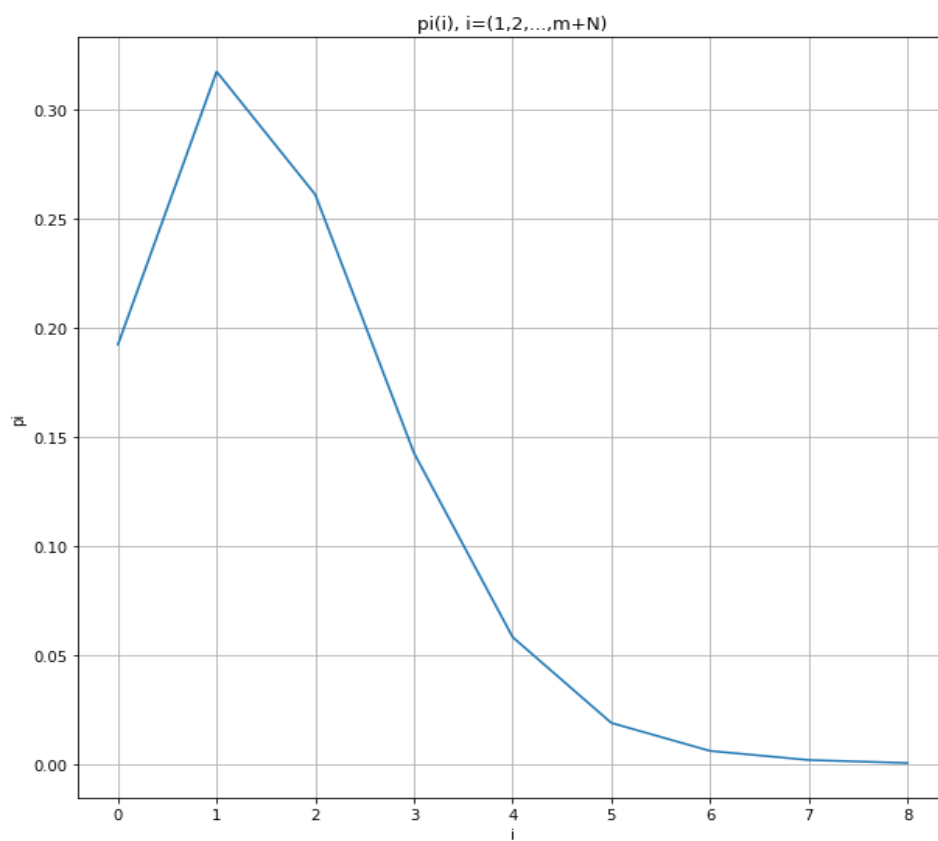
Wykres czasu między nadejściem wiadomości dla:

$$f(x; \frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \exp(-\frac{x}{\beta}),$$
$$\text{gdzie: } \beta = \frac{1}{\lambda}$$



Rysunek 1. Histogram wartości wylosowanych z rozkładu wykładniczego dla : $\beta = \frac{1}{\lambda}$

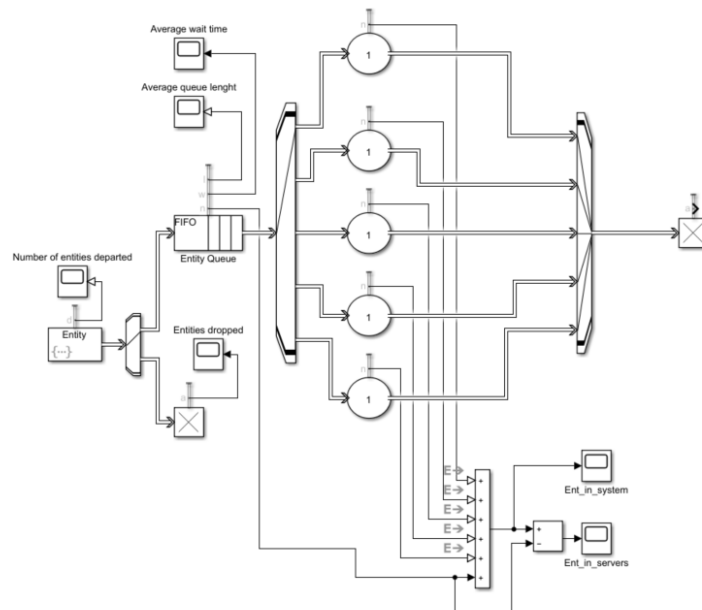
Przy pomocy języka Python zdefiniowano funkcje pozwalające na obliczenie własności systemu.



Rysunek 2. Wykres prawdopodobieństwa zajętości i kanałów otrzymany z obliczeń

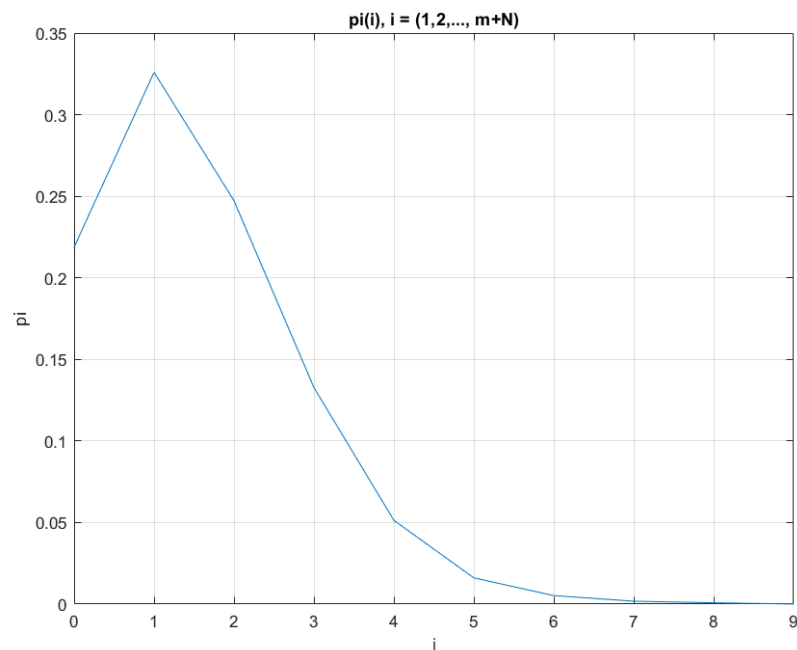
- **Prawdopodobieństwo odmowy:** $2.1e-04$
- **Średnia liczba zajętych kanałów obsługi:** 1.63
- **Średnia liczba zgłoszeń w kolejce:** 0.014
- **Średni czas oczekiwania w kolejce:** $9.28e-05$
- **Średni czas w systemie:** 0.011

Następnie w celu sprawdzenia poprawności obliczeń analitycznych stworzono prosty model kolejki z wykorzystaniem biblioteki Simevents w środowisku Matlab.



Rysunek 3. Schemat symulacji systemu stworzony w aplikacji Simulink

Na podstawie wyników symulacji stworzono wykres prawdopodobieństwa zajętości kanałów.



Rysunek 4. Wykres prawdopodobieństwa zajętości i kanałów otrzymany z symulacji.

Pozostałe właściwości systemu:

- **Prawdopodobieństwo odmowy:** 1.32e-04
- **Średnia liczba zajętych kanałów obsługi:** 1.54
- **Średnia liczba zgłoszeń w kolejce:** 0.012
- **Średni czas oczekiwania w kolejce:** 7.35e-05
- **Średni czas w systemie:** 0.011

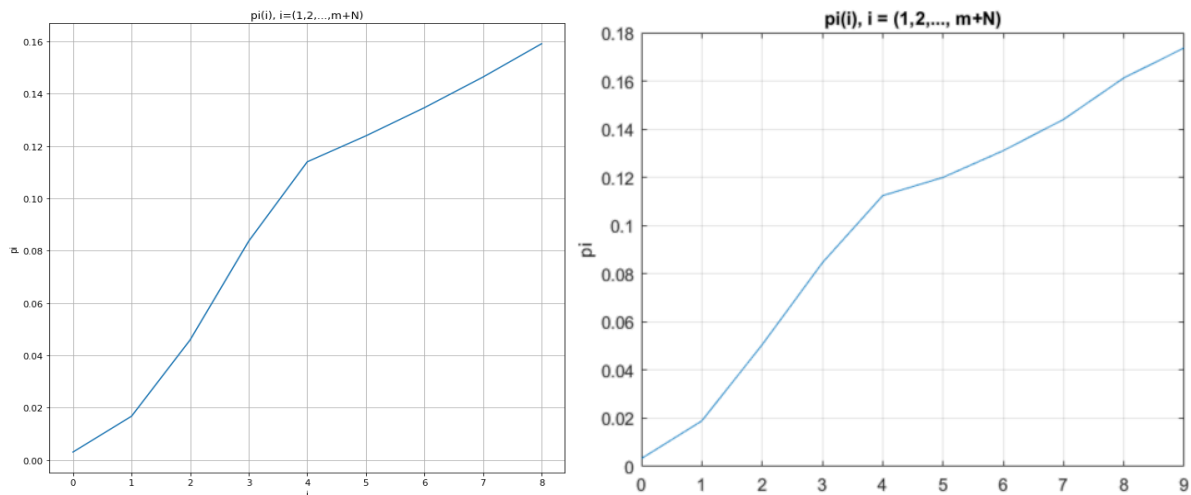
3. Wnioski

Dla przedstawionego przypadku testowego wyniki symulacji pokrywają się z wynikami obliczeń analitycznych.

Zwiększając wartość $\lambda = 500$, otrzymujemy system niespełniający warunku ergodyczności

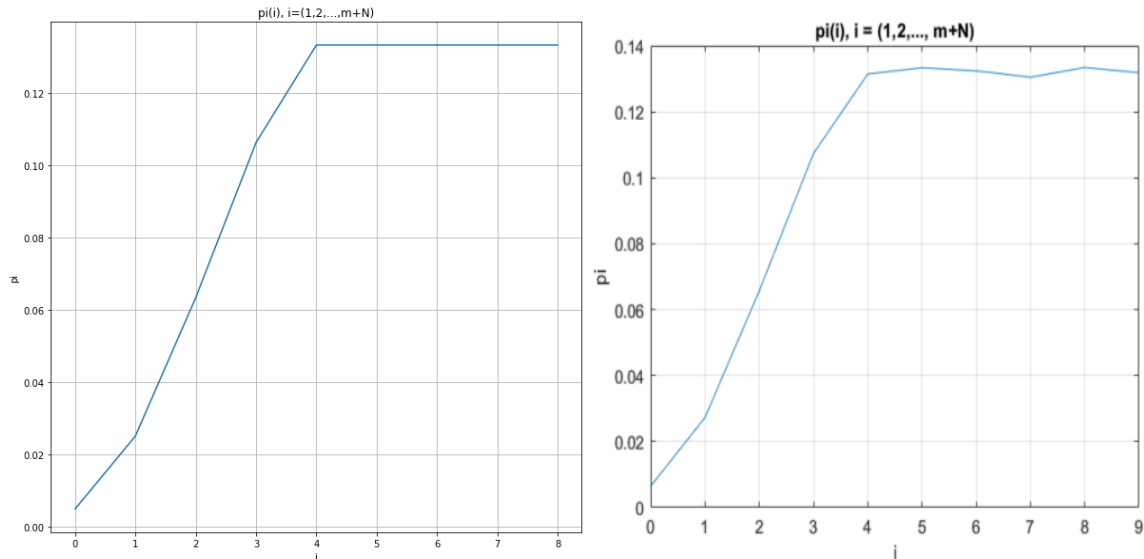
$$\frac{SK_m^m}{SK_{m-1}^m} = 1.087$$

Wynik pokrywają się z obliczeniami:



Rysunek 5. Wykres prawdopodobieństwa zajętości i kanałów otrzymany z obliczeń (lewo) oraz symulacji (prawo).

Dla warunku ergodyczności wynoszącego ≈ 1 (0.99), $\lambda = 460$:



Rysunek 6. Wykres prawdopodobieństwa zajętości i kanałów otrzymany z obliczeń (lewo) oraz symulacji (prawo).

Wzór na średnią długość kolejki:

$$\bar{Q} = \frac{SK_m^m}{2m!} N(N+1)\pi_0, \quad \text{for } \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} = q = 1,$$

$$\bar{Q} = \frac{(SK_m^m)^2}{m!} SK_m^{m-1} \frac{1 - q^N [1 - N(1-q)]}{(SK_m^{m-1} - SK_m^m)^2} \pi_0,$$

for $q \neq 1$.

Daje nam niepoprawne wyniki, jeśli wartość q jest bardzo zbliżona do 1 (± 0.03). zmieniając warunek na:

$$0.97 \leq \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \leq 1.03$$

Wyniki zaczynają pokrywać się z symulacją.

Wyniki otrzymane przed zmianą warunku dla obliczeń:

```
Prawdopodobieństwo odmowy: 0.1333408756548238
Średnia liczba zajętych kanałów obsługi: 4.333295621725879
Średnia liczba zgłoszeń w kolejce: 4448389390888281.0
Średni czas oczekiwania zgłoszenia: 9670411719322.35
Średni czas w systemie: 9670411719322.36
```

Wyniki otrzymane po zmianie warunku dla obliczeń:

```
Prawdopodobieństwo odmowy: 0.1333408756548238
Średnia liczba zajętych kanałów obsługi: 4.333295621725879
Średnia liczba zgłoszeń w kolejce: 1.3334087565482395
Średni czas oczekiwania zgłoszenia: 0.0028987146881483466
Średni czas w systemie: 0.012318922561465476
```

Oraz wyniki otrzymane z symulacji:

- Prawdopodobieństwo odmowy: 0.1315
- Średnia liczba zajętych kanałów obsługi: 4.3152
- Średnia liczba zgłoszeń w kolejce: 1.321
- Średni czas oczekiwania w kolejce: 0.0033
- Średni czas w systemie: 0.014