PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 1 - Inducción

15 de marzo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propieddad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1) es verdadero$"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).

2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.
3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $k+1$. $(p(i)\forall i \leq k) \implies p(k+1)$.

- Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

- **Inducción Estructural:** Se utiliza cuando se quiere demostrar una propiedad en una estructura que está definida inductivamente (la inducción simple es un caso particular de inducción estructural), por ejemplo en listas enlazadas, en arboles, grafos, etc. Se utiliza BI, HI y TI de la misma forma que en la inducción simple.

1. Inducción Simple

Ejercicio A

Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución

BI: Como caso base tenemos $n = 1$, con esto, la sumatoria se simplifica:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{1 * (1+1) * (2 * 1 + 1)}{6} = 1$$

Por lo tanto, se cumple el caso base.

HI: Asumimos que se cumple $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para un n arbitrario.

TI: PD: $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

Para esto podemos simplificar los primeros n terminos de la sumatoria.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n^2 + 2n + 1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n^2 + 2n + 1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n^2 + 2n + 1) \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \frac{6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \frac{6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

Luego, realizando division de polinomios, probamos el candidato de divisor $(n+1)$ y obtendremos la siguiente factorización:

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Como llegamos a la expresión deseada, queda demostrado por inducción simple.

Ejercicio B

Demuestre que, si se tiene un conjunto de n lineas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes, entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

Solución

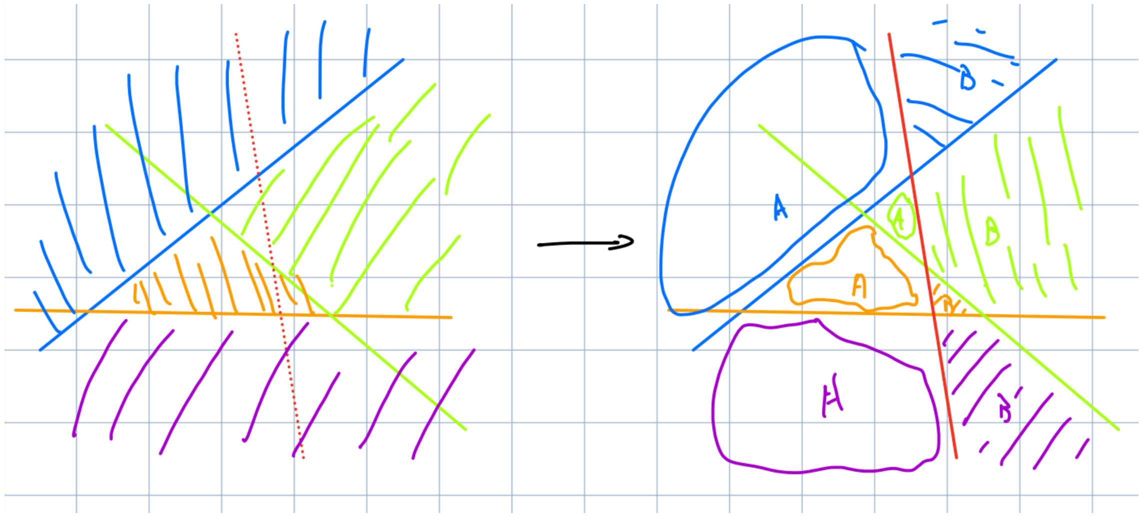
BI: n = 0, es decir, no hay ninguna línea en el plano, por lo que éste se divide en exactamente 1 región. Y sabemos que:

$$\frac{0^2+0+2}{2} = 1$$

Por lo tanto, la propiedad se cumple para n = 0

HI: Supongamos que para n líneas, se cumple que la cantidad de regiones es $\frac{n^2+n+2}{2}$, bajo las propiedades del enunciado.

TI: Demostremos que se cumple para n + 1 líneas.
Añadimos una línea tal que esta no es paralela a otra, ni es concurrente a 2 líneas ya existentes, de la siguiente manera:



Al añadir la línea roja, por cada línea que intersecta, se creará 1 nueva región, ya que cada región correspondiente se divide en 2 (regiones azul, verde y naranjo). Además, una última región adicional se divide en 2 (región morada de la imagen). Luego al agregar (n + 1)-ésima línea, la cantidad de regiones aumentaría en n + 1.

$$\begin{aligned}\#R &= \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n^2+2n+1)+n+3}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}\end{aligned}$$

Con lo que la propiedad se cumple para n + 1. Concluimos por PIS que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Inducción Fuerte

Ejercicio A

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se cumple que

$$F_n \geq \phi^{n-2}, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el "número áureo", y F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci definida como

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \qquad F_1 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

Solución

Demostraremos por medio del Principio de Inducción Fuerte.

BI: Debido a que la sucesión de Fibonacci construye terminos inductivamente utilizando los dos términos anteriores, será necesario probar dos casos base.
Para $n = 2$, se tiene que

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 \geq 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2-2}$$

con lo que se cumple la propiedad.

Para $n = 3$, se tiene que

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \geq 1,618 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

HI: Supongamos que la propiedad se cumple para todo $k \in \mathbb{N}, k < n$, es decir, que $F_k \geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$ para todo $k < n$.

TI: Demostraremos que la propiedad se cumple para n. Por **HI** se tiene que

$$F_{n-2} \geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n-2)-2}$$

$$\text{y que} \qquad F_{n-1} \geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n-1)-2}$$

Sumando ambas inecuaciones se obtiene entonces que

$$F_{n-1} + F_{n-2} \geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-4} \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$F_n \geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-4} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

En esta misma línea, el término $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Luego, se tiene que

$$F_n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-4} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejercicio B

Demuestre que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Tip: un número x es racional si puede ser representado en la forma $x = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Solución

Aplicaremos el Principio de Inducción Fuerte sobre el numerador de la fracción que (dentro de una contradicción) representa a $\sqrt{2}$, para llegar a una contradicción. Lo que buscamos es demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{k}{b}$ no es una representación válida para $\sqrt{2}$.

BI: Con $a = 1$, se tiene que $\sqrt{2} = \frac{1}{b} \to 2 = \frac{1}{b^2} \to b^2 = \frac{1}{2}$, con lo que concluímos que $b \notin \mathbb{Z}$ y que por lo tanto $\sqrt{2}$ no puede ser representado con numerador 1.

HI: Supongamos que para $a, k \in \mathbb{Z}, a < k$ se cumple que $\sqrt{2}$ no puede ser representado como una fracción $\frac{a}{b}$, con $b \in \mathbb{Z}$.

TI: Demostraremos, por contradicción, que $\sqrt{2}$ no puede ser representado como una fracción $\frac{k}{b}$ con $k, b \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{k}{b}$. Se tiene que

$$2 = \frac{k^2}{b^2}$$
$$k^2 = 2b^2$$

Como k^2 es un número par, k necesariamente lo es también, por lo que puede ser escrito como $k = 2c$, con $c \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$(2c)^2 = 2b^2$$
$$4c^2 = 2b^2$$
$$2c^2 = b^2$$

Con lo que concluímos, por el raciocinio anterior, que b también es par, por lo que puede ser escrito como $b = 2d$ con $d \in \mathbb{Z}$. Volviendo a la ecuación inicial,

$$\sqrt{2} = \frac{k}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

Como $k = 2c$, sabemos que $c < k$, por lo que cumple el criterio de la **HI**. Con ello, concluímos por Principio de Inducción Fuerte, que

$$\sqrt{2} = \frac{c}{d}$$

es una contradicción, por lo que es $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

3. Inducción Estructural

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $|*| : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $|\bullet| = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$

Solución

Se demostrará la propiedad utilizando el Principio de Inducción Estructural sobre el conjunto de los árboles binarios S.

BI: Para el caso base $t = \bullet$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\bullet| &\leq 2^{h(\bullet)+1} - 1 \\ 1 &\leq 2^{0+1} - 1 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

por lo que la propiedad se cumple.

HI: Suponemos que la propiedad se cumple para $t_1, t_2 \in S$, es decir, que lo siguiente se cumple:

$$\begin{aligned} |t_1| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 \\ |t_2| &\leq 2^{h(t_2)+1} - 1 \end{aligned}$$

TI: Debemos demostrar que para un árbol binario construido usando las reglas de construcción $(t = \bullet(t_1, t_2))$, se cumple que $|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$. Sumando las desigualdades anteriores, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 + 2^{h(t_2)+1} - 1 \\ 1 + |t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \end{aligned}$$

Uno de $\{h(t_1),\, h(t_2)\}$ necesariamente será $max\{h(t_1),\, h(t_2)\}$, y el otro necesariamente será $min\{h(t_1),\, (t_2)\}$:

$$
\begin{aligned}
|t| &\leq 2^{max\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} - 1 \\
|t| &\leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Por la definición de $h(t)$,

$$h(t) = max\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Por otro lado, $max\{h(t_1),\, h(t_2)\} \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\}$.
Luego,

$$h(t) \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Teniendo esto en consideración, al volver a la expresión (1), por transitividad, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|t| &\leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{h(t)} \\
|t| &\leq 2 \cdot 2^{h(t)} - 1 \\
|t| &\leq 2^{h(t)+1} - 1
\end{aligned}
$$

con lo que se demuestra lo deseado.$\square$