Inducción estructural

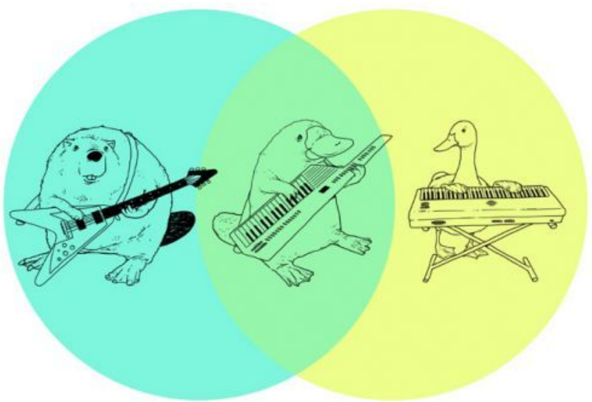
Clase 2

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Playlist Primer Acto



Playlist del curso: DiscretiWawos

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Principio de inducción simple

PIS (Tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

n_0 es el **CB** que se demuestra a mano

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción fuerte
- Comprender definiciones inductivas
- Definir operadores inductivamente
- Demostrar propiedades mediante inducción estructural

Outline

El poder de la inducción

La **sucesión de Fibonacci** es una serie de naturales $F(0), F(1), F(2), \ldots$ que cumple la siguiente **recurrencia**

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

¿cómo calculamos el valor de $F(n)$ para un n cualquiera?

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(2) &= F(1) + F(0) = 1 + 0 = 1 \\ F(3) &= F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2 \\ F(4) &= \ldots \end{aligned}$$

¿Basta inducción simple para probar que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$?

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción por curso de valores (PICV)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A \;\Rightarrow\; n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Observaciones

- También es conocido como **Principio de Inducción Fuerte**
- La **HI** es la expresión $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A$
- La **TI** es la expresión $n \in A$

¿Dónde está el **caso base** en el principio anterior?

Principio de inducción fuerte

PICV (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si P cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(k) \text{ es verdadero } \textbf{para todo k} < \mathbf{n}, \quad \text{entonces} \quad P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Ejemplo

Demuestre que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

¡Ojo! El **CB** se debe demostrar manualmente igual que en inducción simple

Principio de inducción fuerte

Demostración

$$P(n) := \quad F(n) \le 2^n \quad \text{para todo } n$$

1. **CB.** $\mathbf{P(0)}:\ F(0) = 0 \le 2^0$
   $\mathbf{P(1)}:\ F(1) = 1 \le 2^1$

2. **HI.** Sup. $\mathbf{P(k)}:\ F(k) \le 2^k$ es verdadero para todo $k < n$, entonces:

$$\begin{aligned} \textbf{TI. } \mathbf{P(n)}: \quad F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \\ &\le 2^{n-1} + 2^{n-2} && \text{(por HI)} \\ &\le 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &\le 2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$.

En este caso se debía demostrar 2 casos base

Principio de inducción fuerte

Ejemplo (Propuesto ★)

Demostremos que la siguiente propiedad se cumple para todo natural $n \geq 2$

$$P(n) \ := \quad n \text{ tiene un factor primo}$$

1. **CB.** $\mathbf{P(2)}$ es cierto pues 2 es primo, por lo que tiene un factor primo.
2. **HI.** Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.
3. **TI.** Consideramos $\mathbf{P(n)}$. Tenemos dos casos:
   - Si n es primo, entonces tiene un factor primo.
   - Si no, existen dos naturales k_1, k_2 tales que $n = k_1 \cdot k_2$ y donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por **HI** tiene un factor primo k_3. Como $n = k_1 \cdot k_2$, entonces k_3 también es factor de n.

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$ **tal que** $n \geq 2$.

Notemos que en **TI**, cuando n es primo en realidad es un **caso base**!

Equivalencia de principios de inducción

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Principio del buen orden.
2. Principio de inducción simple.
3. Principio de inducción fuerte.

Demostraremos solo que 1. $\Rightarrow$ 2.
Las implicancias 2. $\Rightarrow$ 3. y 3. $\Rightarrow$ 1. quedan propuestas.

ADVERTENCIA: usaremos el método de demostración por **contrapositivo**.
Supondremos falso 2. y probaremos que 1. es falso.

Equivalencia de principios de inducción

Demostración (Propuesta ★)

Supongamos que el PIS es falso; es decir, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple las reglas del PIS, pero $A \neq \mathbb{N}$.

Sea entonces el conjunto $B = \mathbb{N} - A$, el cual cumple que $B \subseteq \mathbb{N}$ y $B \neq \varnothing$. Mostraremos que este conjunto no tiene menor elemento, y por lo tanto el PBO es falso.

Por contradicción, supongamos que B sí tiene un menor elemento al que llamamos b.

$$
\begin{array}{rcll}
0 \in A & \Rightarrow & b \neq 0 & (\text{def. de } B) \\
 & \Rightarrow & b - 1 \in \mathbb{N} & (\text{axioma de } \mathbb{N}) \\
 & \Rightarrow & b - 1 \notin B & (b \text{ es el menor de } B) \\
 & \Rightarrow & b - 1 \in A & (\text{def. de } B) \\
 & \Rightarrow & b \in A & (A \text{ cumple reglas del } PIS)
\end{array}
$$

Esto contradice el hecho de que b sea el menor elemento de B. □

Outline

Definiciones inductivas

Estrategia

Para **definir inductivamente** un conjunto necesitamos:

1. Establecer que el conjunto es el menor que cumple las reglas.
2. Un conjunto (no necesariamente finito) de elementos base, que se supondrá que inicialmente pertenecen al conjunto que se quiere definir.
3. Un conjunto finito de reglas de construcción de nuevos elementos del conjunto a partir de elementos que ya están en él.

Pueden haber infinitos casos base y más de una regla recursiva

Definiciones inductivas

Ejemplo

El conjunto de los **números pares** es el menor conjunto tal que

1. El 0 es un número par.
2. Si n es número par, $n + 2$ es un número par.

¿Podemos definir inductivamente algo que no sea un número?

Definiciones inductivas

Definición ($\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$)

El conjunto $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

¿Qué representan los elementos de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$?

Ejemplo

Los siguientes son elementos de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

- $\varnothing$
- $\varnothing \to 6$ o análogamente, $\to 6$ (omitiremos $\varnothing$ cuando hay más elementos)
- $\to 6 \to 5 \to 6 \to 0$

Definiciones inductivas

Definición (listas enlazadas)

El conjunto de las **listas enlazadas** sobre los naturales $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

El operador 2. para $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es "*agregar flechita y natural al final de una lista*"

Definiciones inductivas

Además de conjuntos, podemos definir **operaciones o funciones** sobre elementos de conjuntos recursivos

Ejemplo

El operador factorial se define sobre $\mathbb{N}$ según

1. $0! = 1$
2. $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Además de operadores, ¿se pueden definir propiedades?

Definiciones inductivas

¿Cuándo dos listas enlazadas son iguales?

1. Si alguna es vacía, son iguales si y solo si la otra también es vacía
2. Si ninguna es vacía, entonces estamos en un escenario

   $$L_1 \to k_1 \quad \text{versus} \quad L_2 \to k_2$$

   En este caso, resulta natural considerar

   $$L_1 \to k_1 = L_2 \to k_2 \quad \text{si y solo si} \quad L_1 = L_2 \text{ y } k_1 = k_2$$

Es decir, la **igualdad de listas** se puede definir a partir de la def. de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

Solo nos falta ser capaces de **demostrar** propiedades inductivas

Outline

Demostración de propiedades inductivas

Consideremos una lista $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y la propiedad

$$P(L): \quad L \text{ tiene el mismo número de flechas que de elementos}$$

¿Cómo abordamos esta demostración?

Inducción estructural

Principio de Inducción estructural

Sea A un conjunto definido inductivamente y P una propiedad sobre los elementos de A. Si se cumple que:

1. Todos los elementos base de A cumplen la propiedad P,
2. Para cada regla de construcción, si la regla se aplica sobre elementos en A que cumplen la propiedad P, entonces los elementos producidos por la regla también cumplen la propiedad P

entonces todos los elementos en A cumplen la propiedad P.

¡El PIS es un caso particular de este principio!

Inducción estructural

Ejemplo

$$P(L): \quad L \text{ tiene el mismo número de flechas que de elementos}$$

BI: El único caso base es la lista vacía $\varnothing$, la cual no tiene flechas ni elementos, y por lo tanto $P(\varnothing)$ es verdadera.

HI: Supongamos que una lista cualquiera L cumple $P(L)$, es decir, tiene exactamente la misma cantidad de flechas que de elementos.

¿Qué elemento tomamos para la **TI**?

Inducción estructural

Ejemplo

HI: Supongamos que una lista cualquiera L cumple $P(L)$, es decir, tiene exactamente la misma cantidad de flechas que de elementos.

TI: Debemos demostrar que $P(L \to k)$ es verdadero, es decir, que $L \to k$ tiene tantas flechas como elementos, con $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $L \to k$ tiene exactamente una flecha y un elemento más que L. Por HI, sabemos que L tiene la misma cantidad de flechas y de elementos, y por lo tanto $P(L \to k)$ es verdadera.

Por inducción estructural se sigue que todas las listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ tienen la misma cantidad de flechas que de elementos. $\square$

La def. de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ nos guía en las demostraciones de propiedades dentro de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

Inducción estructural

Para demostrar propiedades más complejas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$, definamos más operadores.

Ejemplo

Definiremos los siguientes operadores para listas

- Largo, recibe lista y entrega número de elementos (números)

$$|\cdot|: \ \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

- Suma, recibe lista y entrega la suma de sus elementos

$$\mathrm{sum}: \ \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

- Máximo, recibe lista y entrega el máximo (o -1 si es vacía)

$$\max: \ \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

- Cabeza, recibe lista **no vacía** y entrega su primer elemento

$$\mathrm{head}: \ \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{N}$$

Inducción estructural

Ejemplo

- Largo, recibe lista y entrega número de elementos (números)

$$|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

1. $|\varnothing| = 0$
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $|L \to k| = |L| + 1$

- Suma, recibe lista y entrega la suma de sus elementos

$$\mathrm{sum} : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$

1. $\mathrm{sum}(\varnothing) = 0$
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathrm{sum}(L \to k) = \mathrm{sum}(L) + k$

Inducción estructural

Ejemplo

- Máximo, recibe lista y entrega el máximo (o -1 si es vacía)

$$\max : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

1. $\max(\varnothing) = -1$
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\max(L \to k) = \begin{cases} \max(L) & \text{si } \max(L) \geq k \\ k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Cabeza, recibe lista **no vacía** y entrega su primer elemento

$$\text{head} : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{N}$$

1. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{head}(\to k) = k$
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ no vacía y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{head}(L \to k) = \text{head}(L)$

Inducción estructural

Además, podemos definir operadores que retornan listas!

Ejemplo

El operador sufijo recibe una lista no vacía y entrega la lista resultante de sacarle el primer elemento

$$\text{suf}: \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$$

1. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{suf}(\to k) = \varnothing$
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ no vacía y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{suf}(L \to k) = \text{suf}(L) \to k$

Con estos operadores podemos demostrar propiedades más complejas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

Teorema (props. listas)

Si $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$, entonces

1. $\text{sum}(L) \geq 0$
2. $\max(L) \leq \text{sum}(L)$
3. $\text{sum}(L) = \text{head}(L) + \text{sum}(\text{suf}(L))$
4. Si $L_1, L_2 \neq \varnothing$, entonces
$$L_1 = L_2 \quad \text{si y solo si} \quad \text{suf}(L_1) = \text{suf}(L_2) \text{ y } \text{sum}(L_1) = \text{sum}(L_2)$$

Demostraremos 4.
El resto queda propuesto (★)

Inducción estructural

Teorema (prop. 4. de listas)

Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$. Si $L_1, L_2 \neq \varnothing$, entonces

$$L_1 = L_2 \quad \text{si y solo si} \quad \mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2) \text{ y } \mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$$

Demostración

La dirección ($\Rightarrow$) es trivial.

Para la dirección ($\Leftarrow$), supondremos que L_1, L_2 son listas tales que

$$\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2) \text{ y } \mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$$

¿Cuál(es) es(son) **CB**?

Inducción estructural

Demostración

Para la dirección $(\Leftarrow)$, supondremos que L_1, L_2 son listas tales que

$$\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2) \text{ y } \mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$$

- **BI:** Sean $L_1 = \to k$ y $L_2 = \to j$ dos listas tales que $\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2)$ y $\mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$. Por definición de sum, tenemos que

  $$k = \mathrm{sum}(\to k) = \mathrm{sum}(\to j) = j$$

  y luego $k = j$. Concluimos que $L_1 = L_2$.

- **HI:** Dadas dos listas L_1 y L_2 cualquiera, supongamos que si $\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2)$ y $\mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.

Ojo: el antecedente de la **HI** no necesariamente se cumple.
Cuando se cumple, entonces podemos concluir que $L_1 = L_2$

Inducción estructural

- **HI:** Dadas dos listas L_1 y L_2 cualquiera, supongamos que si $\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2)$ y $\mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.

- **TI:** Sean ahora dos listas $L_1 \to k$ y $L_2 \to j$. Queremos demostrar que si $\mathrm{suf}(L_1 \to k) = \mathrm{suf}(L_2 \to j)$ y $\mathrm{sum}(L_1 \to k) = \mathrm{sum}(L_2 \to j)$, entonces $L_1 \to k = L_2 \to j$.

  Supongamos entonces que $\mathrm{suf}(L_1 \to k) = \mathrm{suf}(L_2 \to j)$ y $\mathrm{sum}(L_1 \to k) = \mathrm{sum}(L_2 \to j)$. Por definición de ambas funciones, obtenemos que

  $$\mathrm{suf}(L_1) \to k = \mathrm{suf}(L_2) \to j$$
  $$\mathrm{sum}(L_1) + k = \mathrm{sum}(L_2) + j$$

  Por igualdad de listas, sabemos que necesariamente $\mathrm{suf}(L_1) = \mathrm{suf}(L_2)$ y $k = j$. Usando este último resultado, obtenemos también que $\mathrm{sum}(L_1) = \mathrm{sum}(L_2)$. Luego, por **HI** tenemos que $L_1 = L_2$, y como $k = j$ concluimos que $L_1 \to k = L_2 \to j$. $\square$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción fuerte
- Comprender definiciones inductivas
- Definir operadores inductivamente
- Demostrar propiedades mediante inducción estructural