



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN  
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

# Tarea 2

27 de marzo de 2024

1º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Buggedo - N. Alvarado

---

## Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega:** Hasta las 23:59 del 5 de abril a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en  $\text{\LaTeX}$ , salvo por el inciso optativo 1 (d). Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template  $\text{\LaTeX}$  publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. **Hint:** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo PDF correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un zip con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también. En caso de entregar el bonus de código, este debe incluirse por separado en único archivo con nombre `numalumno.py`.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

# Problemas

## Problema 1

Se define el conjunto de expresiones algebraicas sobre los naturales, denotado por  $S$ , como el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si  $n$  es natural, entonces  $n \in S$ .
- Si  $a, b \in S$ , entonces  $(a + b)$ ,  $(a * b)$ ,  $(a - b)$  y  $(a/b)$  son expresiones algebraicas sobre los naturales.

Por ejemplo, 5 y  $((4 - (5 + 3))/6)$  son expresiones algebraicas sobre los naturales. Observe que estas expresiones se definen como secuencias de caracteres (*strings*).

- (a) Demuestre por inducción estructural que si  $a \in S$ , entonces o bien  $a$  es un natural, o bien  $a$  empieza con "(" y termina con ")".
- (b) Defina el operador largo,  $\text{length} : S \rightarrow \mathbb{N}$ , que cuente la cantidad de números, operaciones (+, \*, -, /) y paréntesis que contiene una expresión algebraica sobre los naturales. Observe que el caso base para  $n \in \mathbb{N}$  cumple  $\text{length}(n) = 1$ .
- (c) Sea  $a \in S$ . Definimos la profundidad de  $a$ , denotada por  $\text{depth}(a)$ , como:
  - Si  $a \in \mathbb{N}$ , entonces  $\text{depth}(a) = 0$
  - Si  $a = (a_1 \# a_2)$ , para  $a_1, a_2 \in S$  y  $\# \in \{+, *, -, /\}$ , entonces

$$\text{depth}(a) = \max \{ \text{depth}(a_1), \text{depth}(a_2) \} + 1$$

Demuestre por inducción que para todo natural  $n \geq 1$  se cumple que existe una expresión algebraica sobre los naturales  $a \in S$  tal que

$$\text{length}(a) \geq n \text{ y } \text{depth}(a) \leq \log_2(\text{length}(a))$$

El siguiente inciso es optativo y ofrece un bonus de 1 punto a la nota de la tarea 2.

- (d) Escriba un programa recursivo en Python para la función `is_valid_expression(s)` que, dado un string `s`, retorne un booleano que indique si `s` es una expresión algebraica sobre los naturales.

*Sugerencia:* puede usar las propiedades en el inciso (a) junto con las funciones `isdigit`, `startswith` y `endswith` definidas para strings en Python y encontrar el operador de  $a$  a menor profundidad para separar una expresión algebraica en sus subexpresiones.

*Condiciones de entrega:* único archivo de nombre `numero_alumno.py` tal que su solución se pruebe haciendo un llamado a la función `is_valid_expression(s)` en dicho archivo.

*Ejemplos de ejecución:*

```
is_valid_expression('((3-(4*((4+1)*8)))/7)') retorna True
is_valid_expression('((3-(4*((4+1)*8)))/7)') retorna False
```

## Problema 2

Considere el funcionamiento de un semáforo en instantes discretos de tiempo que llamaremos estados, tal que la cantidad de estados totales es finita.

- (a) Defina un conjunto  $P$  de variables proposicionales adecuadas que permitan definir un lenguaje  $\mathcal{L}(P)$  de fórmulas proposicionales para modelar este escenario. Explique brevemente el significado de cada variable definida. *Sugerencia:* examine los incisos (b), (c) y (d) para determinar qué necesita incluir en su diseño.

Con el lenguaje definido en (a), proponga una fórmula proposicional  $\varphi$  para cada uno de los siguientes incisos. Su fórmula debe ser satisfacible si y solo si la propiedad descrita se cumple para un semáforo dado. Explique brevemente el significado de las partes de su fórmula. No necesita demostrar la correctitud de su fórmula.

- (b) La luz del semáforo en todo estado es, o verde, o roja, o amarilla.
- (c) Los únicos cambios de color de luz del semáforo ocurren entre estados sucesivos y pueden ocurrir de verde a amarilla, de amarilla a roja y de roja a verde.
- (e) La luz puede tener el mismo color en, a lo más, 3 estados sucesivos.