Ayudantía 2 - Lógica Proposicional

22 de marzo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica** $\equiv$

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

1. Doble negación:
   $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
2. De Morgan:
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
3. Conmutatividad:
   $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
   $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
4. Asociatividad:
   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
5. Distributividad:
   $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
6. Idempotencia:
   $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
   $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
7. Absorción:
   $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
   $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
8. Implicancia:
   $\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
9. Doble implicancia:
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv$
   $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

Ejemplos:

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$

1. Inducción Estructural

A. Palíndromos

Dado un alfabeto finito Σ, se puede definir recursivamente el conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$ como:

- $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$
- $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$
- Si $u \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot u \cdot a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$

Por otro lado, para una palabra $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ se define su *palabra reversa* $w^R = a_n \ldots a_2 a_1$.

4.B.1

Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $w = w^R$.

Solución

Se busca demostrar por inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$ entonces $w = w^R$.

Uamos inducción estructural sobre $\mathcal{P}_\Sigma$. Se definen $S[0] = \{\epsilon, a\}$ con $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ y $S[n]$ la enésima capa del conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$.

BI: Existen dos casos base que revisaremos a continuación:

1. Se tiene ϵ en la primera capa $S[0]$, caso en que cumple claramente $\epsilon = \epsilon^R$.
2. Se tienen aquellas letras $a \in \Sigma$ en la primera capa, cumpliéndose también que $a = a^R$.

HI: Se define $w \in \mathcal{P}_\Sigma$ perteneciente a la enésima capa $S[n]$, de modo que se cumple $w = w^R$.

TI: Ahora sea $u \in \mathcal{P}_\Sigma$ tal que $|u| \geq 2$ perteneciente a $S[n+1]$, entonces se tiene que $\exists a \in \Sigma$ tal que $u = a \cdot w \cdot a$ con $w \in \mathcal{P}_\Sigma$ (Por la regla de construcción recursiva de $\mathcal{P}_\Sigma$).

Ahora, $u^R = (a \cdot w \cdot a)^R = a \cdot w^R \cdot a = a \cdot w \cdot a = u$, quedando así demostrado que si $u \in \mathcal{P}_\Sigma \implies u = u^R$.

4.B.2

Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$, entonces $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Solución

Se busca demostrar por inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$, entonces se cumple que $w \in \mathcal{P}_\Sigma$ mediante inducción estructural sobre Σ^*.

BI: Se considera ϵ que claramente cumple $\epsilon = \epsilon^R$, luego por definición del conjunto base de $\mathcal{P}_\Sigma$, se tiene que $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$.

HI: Se asume que para toda palabra u de largo menor a w, se tiene que si $u = u^R$, entonces se cumple $u \in \mathcal{P}_\Sigma$.

TI: Ahora, dado $w \in \Sigma^*$, por la definición recursiva del conjunto Σ^*, se tiene que $w = u \cdot a$ para algún $u \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$, con $u = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. Para demostrar la implicancia, asumiremos que $w = w^R$, de modo que:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a = w = w^R = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a)^R = a \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$$

A partir de esto se deduce que $a = a_1$, con lo que se define $w' = a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ y $w = a \cdot w' \cdot a$. Dado que $|w'| < w$, por hipótesis inductiva entonces $w' \in \mathcal{P}_\Sigma$. Finalmente, por la definición recursiva de $\mathcal{P}_\Sigma$, puesto que $w = a \cdot w' \cdot a$ y $w' \in \mathcal{P}_\Sigma$, se cumple que $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, quedando así demostrada la implicancia.

B. Lógica

Sea $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ una fórmula construida usando los conectivos del conjunto $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Llamamos φ' a la fórmula obtenida desde φ reemplazando todas las ocurrencias de $\wedge$ por $\vee$, las de $\vee$ por $\wedge$, y todas las variables proposicionales por sus negaciones.

Demuestre que φ' es lógicamente equivalente a $\neg\varphi$.

Solución

Demostraremos por inducción estructural.

BI: Con $\varphi = p$ se tiene que $\varphi' \equiv \neg p \equiv \neg\phi$ con lo que la propiedad se cumple.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas construidas usando los conectivos de C.

TI: Demostraremos que una fórmula $\theta \in \mathcal{L}(P)$ construida inductivamente a partir de φ y/o ψ también cumple la propiedad. Hay tres casos posibles:

1. $\theta = \neg\varphi$:
   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\neg\varphi)' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} (\varphi')' \equiv \varphi \stackrel{\text{Doble negación}}{\equiv} \neg(\neg\varphi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.

2. $\theta = \varphi \vee \psi$:
   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\varphi \vee \psi)' \equiv \varphi' \wedge \psi' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi \wedge \neg\psi \stackrel{\text{De Morgan}}{\equiv} \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.

3. $\theta = \varphi \wedge \psi$:
   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\varphi \wedge \psi)' \equiv \varphi' \vee \psi' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi \vee \neg\psi \stackrel{\text{De Morgan}}{\equiv} \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.

Concluímos entonces por inducción estructural que para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ construida mediante los conectivos de C se cumple que $\varphi' \equiv \neg\varphi$.

2. Tabla de Verdad

A

Escriba el siguiente enunciado con lógica proposicional

- Si superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría.
- Si superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente.
- Si superman no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo.
- Si superman existe, no es ni impotente ni malévolo.
- Superman no previene el mal.

Demuestre que superman no existe.

Solución:

Vamos a definir las siguientes proposiciones:

- P: "Superman es capaz"
- Q: "Superman desea prevenir el mal"
- R: "Superman es impotente"
- S: "Superman es malévolo"
- E: "Superman existe"
- M: "Superman previene el mal"

El enunciado se puede escribir formalmente como:

$$[(P \land Q \to M) \land (\neg P \to R) \land (\neg Q \to S) \land (E \to \neg(R \lor S)) \land (\neg M)]$$

Ahora nos piden demostrar que $\neg E$. Vamos a hacer un análisis de cada proposición de la conjunción de forma separada.

1. $(P \land Q \to M)$

P	Q	M	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to M$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

2. $(\neg P \to R)$

P	R	$\neg P$	$\neg P \to R$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

3. $(\neg Q \to S)$

Q	S	$\neg Q$	$\neg Q \to S$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

4. $(E \to \neg(R \vee S))$

E	R	S	$\neg(R \vee S)$	$E \to \neg(R \vee S)$
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

5. $(\neg M)$

M	$\neg M$
1	0
0	1

Llamemos

$$N = [(P \land Q \to M) \land (\neg P \to R) \land (\neg Q \to S) \land (E \to \neg(R \lor S)) \land (\neg M)]$$

Para demostrar que superman no existe, debemos demostrar que $N \to \neg E$, es decir, que si se cumplen todas nuestras frases (N), entonces superman no existe. Ahora notemos que para que $N \to \neg E$ sea verdad tendremos la siguiente tabla de verdad.

N	E	$\neg E$	$N \to \neg E$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

(los siguientes pasos están separados para fácilitar la lectura)

- Ahora notemos que el único caso que falla es cuando $N := 1$ y $E := 1$.
- Pero que $E := 1$ por la tabla 4. hace que necesariamente $R := 0$ y $S := 0$.
- Viendo la tabla 2., tendremos que $P := 1$. Viendo la tabla 3. también tendremos que $Q := 1$.
- Así viendo la tabla 1. y ocupando que $P := 1$, $Q := 1$ y $M := 0$ (por tabla 5.) tendremos que $(P \land Q \to M)$ es 0.
- Pero esto hace falso a N ya que una de sus conjunciones es 0.

B

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p, q, r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3(q + r) - 5p \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la tabla de verdad de EQ

Solución

p	q	r	$3(q+r)-5p$	$EQ(p,q,r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	3	1
0	1	0	3	1
0	1	1	6	1
1	0	0	-5	0
1	0	1	-2	0
1	1	0	-2	0
1	1	1	1	1

3. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \lor (p \to q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) \equiv p \land q$$

Solución

$(p \lor (p \to q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q)$

$\equiv (p \lor (\neg p \lor q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q)$ /Ley de implicancia

$\equiv ((p \lor \neg p) \lor q) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q)$ /Asociatividad de $\lor$

$\equiv \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q)$ /$((p \lor \neg p) \lor q)$ es una tautología

$\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q)$ /De Morgan

$\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (\neg r \lor q)$ /Ley de implicancia

$\equiv p \land (\neg r \lor p) \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q)$ /Asociatividad de$\land$

$\equiv p \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q)$ /Absorción$\land$

$\equiv p \land ((r \land \neg r) \lor q)$ /Distributiva

$\equiv p \land q$ /$r \land \neg r$ es una contradicción