Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Ayudantía 1 - Inducción

15 de marzo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

---

## Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo $n$ número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales $n$ tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propieddad se cumple para el número natural $n$. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1) es verdadero$"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales $n$ tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).

2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a $k$. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.

3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $k+1$. $(p(i)\forall i \leq k) \implies p(k+1)$.

- Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

- **Inducción Estructural:** Se utiliza cuando se quiere demostrar una propiedad en una estructura que está definida inductivamente (la inducción simple es un caso particular de inducción estructural), por ejemplo en listas enlazadas, en arboles, grafos, etc. Se utiliza BI, HI y TI de la misma forma que en la inducción simple.

# 1. Inducción Simple

## Ejercicio A

Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Ejercicio B

Demuestre que, si se tiene un conjunto de $n$ lineas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes, entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

# 2. Inducción Fuerte

## Ejercicio A

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se cumple que

$$F_n \geq \phi^{n-2}$$

donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el "número áureo", y $F_n$ es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci definida como

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

## Ejercicio B

Demuestre que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Tip: un número $x$ es racional si puede ser representado en la forma $x = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

# 3. Inducción Estructural

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios $S$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $|*| : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $|\bullet| = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| = 2^{h(t)+1} - 1$$