Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Lógica Proposicional y de Predicados

5 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **Conceptos importantes de lógica proposicional:**
  - Tautología: Una fórmula es una tautología si su valor de verdad es siempre 1, para cualquier valuación.
  - Contradicción: Una fórmula es una contradicción si su valor de verdad es siempre 0, para cualquier valuación.
  - Forma normal conjuntiva (CNF): Una fórmula está en forma normal conjuntiva si es una conjunción de disyunciones de literales. Es decir, es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$, donde cada C_i es una disyunción de literales, es decir, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$.
  - Forma normal disyuntiva (DNF): Una fórmula está en forma normal disyuntiva si es una disyunción de conjunciones de literales. Es decir, es de la forma $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, donde cada B_i es una conjunción de literales, es decir, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$.
  - Satisfacibilidad: Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es inconsistente.
- **Consecuencia lógica:**

  ψ es consecuencia lógica de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

  Notación: $\Sigma \models \psi$.
- **¿Qué es la lógica de predicados?**

La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

  si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**
  - Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
  - Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
  - Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).
  - Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi \equiv \psi$$

    si para toda interpretación I y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

  - Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \models \varphi$$

    si para toda interpretación I y $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

1. Funcionalidad completa

Demuestre que el conectivo $\uparrow$ (también conocido como NAND) es funcionalmente completo. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$.

3. Satisfacibilidad y Resolución

A. Satisfacibilidad

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

3.a.1

Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

3.a.2

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante

3.a.3

Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

B. Resolución

Demuestre que $\Sigma = \{p \leftrightarrow q, p \oplus q\}$, con '$\oplus$' la disyunción exclusiva, es inconsistente.
Observación: La disyunción exclusiva es similar a la disyunción, la única diferencia es que cuando los dos valores (p y q) son verdad, esta es falsa. Su tabla de verdad es

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Lógica de predicados

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x,y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(dom) &\coloneqq \text{Personas} \\ \mathcal{I}(R(x)) &\coloneqq x \text{ conoce el cahuin} \\ \mathcal{I}(C(x,y)) &\coloneqq x \text{ le contó el cahuin a } y \\ \mathcal{I}(x = y) &\coloneqq x \text{ es igual a } y \end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación “existe una persona que conoce el cahuin y otra que no” se puede definir con la fórmula $\exists x.\exists y.(R(x) \land \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cachuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un “cahuinero original”, o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen “triángulos de cahuineros”, o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.