Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica Proposicional

22 de marzo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica** $\equiv$

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

1. Doble negación:
   $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
2. De Morgan:
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
3. Conmutatividad:
   $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
   $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
4. Asociatividad:
   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
   $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
5. Distributividad:
   $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
6. Idempotencia:
   $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
   $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
7. Absorción:
   $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
   $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
8. Implicancia:
   $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
9. Doble implicancia:
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

Ejemplos:

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$

1. Inducción Estructural

A. Palíndromos

Dado un alfabeto finito Σ, se puede definir recursivamente el conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$ como:

- $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$
- $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$
- Si $u \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot u \cdot a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$

Por otro lado, para una palabra $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ se define su *palabra reversa* $w^R = a_n \ldots a_2 a_1$.

i) Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $w = w^R$.

ii) Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$, entonces $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

B. Lógica

Sea $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ una fórmula construida usando los conectivos del conjunto $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Llamamos φ' a la fórmula obtenida desde φ reemplazando todas las ocurrencias de $\wedge$ por $\vee$, las de $\vee$ por $\wedge$, y todas las variables proposicionales por sus negaciones.

Demuestre que φ' es lógicamente equivalente a $\neg\varphi$.

2. Tabla de Verdad

A. Superman

- Si superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría.
- Si superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente.
- Si superman no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo.
- Si superman existe, no es ni impotente ni malévolo.
- Superman no previene el mal.

Demuestre que superman no existe.

B. Conectivo

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p, q, r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3(q + r) - 5p \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la tabla de verdad de EQ.

3. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$$