Consecuencia en predicados

Clase 8

IIC 1253

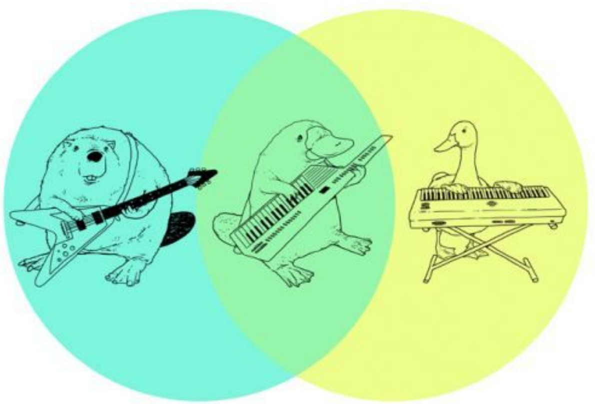
Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Primer Acto: Fundamentos

Inducción y lógica

Playlist Primer Acto



Playlist del curso: DiscretiWawos

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Equivalencia lógica

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $\psi(x_1, ..., x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, .., a_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \vDash \psi(a_1, .., a_n)$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres) equivalentes, entonces para toda interpretación $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \vDash \psi$$

Equivalencia lógica

Observación

Todas las equivalencias de lógica proposicional son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas φ, ψ y θ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad:** $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
2. **Asociatividad:** $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
3. **Idempotencia:** $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
4. **Doble negación:** $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
5. **Distributividad:** $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
6. **De Morgan:** $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
7. ...

¿Hay más equivalencias en predicados?

Equivalencia lógica

Ejemplos

Las siguientes fórmulas también son lógicamente equivalentes:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$

2. $\forall x(P(x)) \rightarrow \exists y(R(y)) \equiv \neg \exists y(R(y)) \rightarrow \neg \forall x(P(x))$

Equivalencia lógica

Tenemos nuevas equivalencias además de las ya mencionadas:

Teorema

Sea $\varphi(x), \psi(x)$ fórmulas con x su variable libre. Entonces:

$$\neg \forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg \varphi(x))$$
$$\neg \exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg \varphi(x))$$
$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

¿Qué nos dicen estos teoremas?

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre los teoremas.

Equivalencia lógica

Ejercicio

¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

- $\forall x(\exists y(\varphi(x,y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(\varphi(x,y)))$ ✗
- $\forall x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \forall x(\varphi(x)) \lor \forall x(\psi(x))$ ✗
- $\exists x(\varphi(x) \land \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\varphi(x)) \land \exists x(\psi(x))$ ✗

Para probar no-equivalencia basta con proporcionar una interpretación que satisface solo a una de las fórmulas comparadas

Objetivos de la clase

- Identificar equivalencia lógica en predicados
- Comprender consecuencia lógica en predicados
- Conocer métodos de demostración
- Relacionar los métodos con fórmulas en predicados

Outline

Consecuencia lógica

Las siguientes definiciones nos ayudan a extender el concepto de consecuencia lógica.

Definición

Para un conjunto Σ de fórmulas, decimos que $\mathcal{I}$ **satisface** Σ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ si:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ para toda } \varphi \in \Sigma$$

Notación: $\mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$

Consecuencia lógica

Definición

Una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \vDash \varphi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, ..., a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, ..., a_n)$$

Consecuencia lógica

Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))\} \vDash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ ✓
- $\{\exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))\} \vDash \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ ✗
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \vDash \exists x(\varphi(x))$ ✓
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x, y)))\} \vDash \exists x(\forall y(\varphi(x, y)))$ ✗

¿Existe algún algoritmo que nos permita resolver este problema?
¿Qué tal nuestro sistema deductivo de lógica proposicional?

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

1. Especificación universal:

$$\frac{\forall x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. Generalización universal:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para un } a \text{ arbitrario}}{\forall x(\varphi(x))}$$

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

3. Especificación existencial:

$$\frac{\exists x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. Generalización existencial:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x(\varphi(x))}$$

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todas las personas son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es persona.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $P(x) := x$ es persona
- $M(x) := x$ es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \\ P(s) \\ \hline M(s) \end{array}$$

Consecuencia lógica

Ejercicio

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(P(x) \to M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg P(x) \lor M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg P(x) \lor M(x)), P(s), \neg M(s)\}$:

(1)	$\forall x(\neg P(x) \lor M(x))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg P(s) \lor M(s)$	especificación universal de (1)
(3)	$P(s)$	$\in \Sigma$
(4)	$M(s)$	resolución de $(2), (3)$
(5)	$\neg M(s)$	$\in \Sigma$
(6)	$\square$	resolución de $(4), (5)$

Outline

¿Qué es una demostración?

Definición

Una **demostración** es un **argumento válido** para establecer la verdad de una **afirmación matemática**.

Afirmaciones matemáticas

¿Qué tipos de afirmaciones matemáticas conocemos?

- Definición
- Axioma
- Teorema
- Proposición
- Lema
- Corolario
- Conjetura
- Problema abierto

Afirmaciones matemáticas

Definición

Una **afirmación matemática** es una sentencia sobre objetos matemáticos que puede ser verdadera o falsa.

Observación

Todo predicado o fórmula es una afirmación matemática.

Ejemplos

- Todo número natural cumple que si es par, entonces su sucesor es impar.
- Existe un número natural tal que todo número es mayor a él.

Axiomas

Definición

Un **axioma** es una afirmación matemática que se considera evidente y se acepta sin requerir demostración previa.

¿Qué axiomas conocemos?

Axiomas

Axiomatización de Peano

- $0 \in \mathbb{N}$
- $\forall x(x = x)$
- $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$
- $\forall x \forall y(x = y \wedge y \in \mathbb{N} \to x \in \mathbb{N})$
- $\forall x(x \in \mathbb{N} \to S(x) \in \mathbb{N})$
- $\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow S(x) = S(y))$
- $\neg(\exists x(S(x) = 0))$

Teoremas

Definición

Un **teorema** es una afirmación matemática verdadera y demostrable.

Ejemplos

- Teorema de Pitágoras.
- Teorema fundamental del álgebra.
- Teorema de los 4 colores.
- Teoremas de incompletitud de Gödel.

Teoremas

Definición

Un **lema** es un resultado menor cuyo fin es ayudar en la demostración de un teorema.

Definición

Una **proposición** es un resultado interesante, pero de menor importancia que un teorema.

Definición

Un **corolario** es una afirmación matemática cuya demostración se deriva casi directamente de un teorema.

Conjeturas

Definición

Una conjetura es una afirmación matemática que se cree que es verdad pero **NO** se ha demostrado.

Ejemplo

- *"Todo número par mayor a 2 puede ser expresado como suma de dos primos"*

  Conjetura de Goldbach

- $\forall x \forall y \forall z \forall n (n > 2 \rightarrow x^n + y^n \neq z^n)$

  (ex) Conjetura de Fermat

Problemas abiertos

Definición

Un **problema abierto** es una afirmación matemática la cual no se sabe si es verdadera o falsa, y para la cual todavía no se conoce una solución o demostración.

¿Cuál es el problema abierto más importante en ciencia de la computación?

¿Qué es una demostración?

Definición

Una **demostración** es un **argumento válido** para establecer la verdad de una **afirmación matemática**.

Un argumento válido es una secuencia de argumentos que puede estar compuesta por:

- Axiomas
- Hipótesis (si existen)
- Afirmaciones previamente demostradas

Cada argumento en la secuencia de argumentos está conectado con el anterior por una regla de inferencia. El último paso de la secuencia establece la verdad de la afirmación.

Se parece a algo que ya vimos, ¿no?

¿Qué **NO** es una demostración?

- Una secuencia de símbolos
- Una secuencia disconexa de argumentos

IMPORTANTE

La secuencia de argumentos debe ser lo más **clara**, **precisa** y **completa** posible. La demostración debe **convencer** al lector u oyente sin dejarle ninguna duda sobre la correctitud de la demostración.

¿Cómo encontramos una secuencia de argumentos para demostrar un teorema?

- Experiencia
- Intuición
- Creatividad
- Perseverancia
- **Métodos de demostración**

Supongamos que tenemos una afirmación como la siguiente:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

¿Qué métodos de demostración podemos ocupar?

Métodos de demostración

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Directa
- Contrapositivo
- Contradicción
- Por análisis de casos
- Otros tipos de demostración

Veremos cada una de las distintas metodologías.

Demostración directa

También se conoce del latin *modus ponendo ponens* ("la forma en que se afirma afirmando"). Por demostrar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Método directo

Suponemos que $P(n)$ es verdadero para un n arbitrario y demostramos que $Q(n)$ también es verdadero.

Ejercicio

Un entero $n \in \mathbb{Z}$ se dice un **cuadrado perfecto** si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. Demuestre que si n y m son cuadrados perfectos, entonces $n \cdot m$ también lo es.

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar.

Contrapositivo

También se conoce del latin *modus tollendo tollens* ("el camino que niega al negar"). Por demostrar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Método por contrapositivo

Suponemos que $Q(n)$ es falso para un n arbitrario y demostramos que $P(n)$ también es falso.

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.

Ejercicio

Sea $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Demuestre que si $n = a \cdot b$ entonces $a \leq \sqrt{n}$ o $b \leq \sqrt{n}$.

Demostración por contradicción

"Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game."

A mathematician's apology (G. H. Hardy).

Demostración por contradicción

Por demostrar:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Método por contradicción

Suponemos que existe un n tal que $P(n)$ es verdadero y $Q(n)$ es falso e inferimos una contradicción.

¿A qué se parece?

Ejercicio

Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

Ejercicio

Demuestre que existe una cantidad infinita de números primos.

Demostración por contradicción

Ejercicio

Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

Por contradicción suponemos que $\sqrt{2}$ es racional, y entonces puede escribirse de la forma $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ sin factores en común y $b \neq 0$. Notemos que al no tener factores en común, no pueden ser ambos pares. Desarrollando la igualdad:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\
2 &= \frac{a^2}{b^2} && \text{(Elevamos al cuadrado)} \\
a^2 &= 2b^2
\end{aligned}$$

Entonces, a^2 es par y por teorema anterior a también es par: $a = 2k$.

Demostración por contradicción

Ejercicio

Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

Entonces, a^2 es par y por teorema anterior a también es par: $a = 2k$.
Reemplazando en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 \\ (2k)^2 &= 2b^2 \\ 4k^2 &= 2b^2 \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Entonces, b^2 es par, y por teorema anterior b también es par. Esto es una contradicción, ya que entre a y b alguno debe ser un número impar.
Concluimos entonces que $\sqrt{2}$ no puede ser racional, y por lo tanto es irracional.

Demostración por análisis de casos

Por demostrar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Dividimos el dominio de la interpretación $\mathcal{I}$ con que trabajamos en una cantidad finita de casos $C_1, ..., C_n$, tal que:

$$\mathcal{I}(dom) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Método por casos

Para cada subdominio $C_1, \ldots, C_n$ demostramos que:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $n^2 \geq n$.

Demostración por análisis de casos

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $n^2 \geq n$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos 3 casos:

1. $n = 0$: es claro que se cumple la propiedad.
2. $n > 0$: como $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que $n \geq 1$.
   Si multiplicamos por n a ambos lados, obtenemos que $n^2 \geq n$.
3. $n < 0$: si multiplicamos por n (negativo) a ambos lados:
   $n^2 > 0 \Rightarrow n^2 > n \Rightarrow n^2 \geq n$.

Ya que no existen más casos, concluimos que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Otros tipos de demostración

- Demostración por doble-implicación
- Demostración por contra-ejemplo
- Demostración existencial

Demostración por doble implicación

Por demostrar:

$$\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

Demostración por doble implicación

Se deben demostrar ambas direcciones por separado. En términos formales:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$$

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que n es impar si y sólo si n^2 es impar.

Demostración por contra-ejemplo

Por demostrar:

$$\neg(\forall x(P(x)))$$

Método por contra-ejemplo

Encontrar un elemento n (cualquiera) tal que $P(n)$ es falso.

Ejercicio

Demuestre que es falso que todo número entero es suma de dos cuadrados perfectos.

Probamos con los primeros números mayores a 1:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 1^2 + 1^2 \\ 3 & \neq & 1^2 + 1^2 \\ & \neq & 2^2 + 1^2 \end{array}$$

Por lo tanto, 3 no es la suma de dos cuadrados perfectos.

Demostración existencial

Por demostrar:

$$\exists x(P(x))$$

Método por existencia

Debemos demostrar que existe un elemento n tal que $P(n)$ es verdadero. (Nótese que NO es estrictamente necesario mostrar n explícitamente.)

Ejercicio

Demuestre que existen a, b irracionales tal que a^b es racional.

Demostración existencial

Ejercicio

Demuestre que existen a, b irracionales tal que a^b es racional.

Como sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional, considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Tenemos dos casos:

1. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es **racional**, entonces $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$ es suficiente.
2. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es **irracional**, entonces considere $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$:

$$\begin{array}{rcl} \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} & = & \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \\ & = & \sqrt{2}^{2} \\ & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto, a^b es racional. $\square$

Outline

Objetivos de la clase

- Identificar equivalencia lógica en predicados
- Comprender consecuencia lógica en predicados
- Conocer métodos de demostración
- Relacionar los métodos con fórmulas en predicados