Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Lógica de Predicados

5 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **Conceptos importantes de lógica proposicional:**
  - Tautología: Una fórmula es una tautología si su valor de verdad es siempre 1, para cualquier valuación.
  - Contradicción: Una fórmula es una contradicción si su valor de verdad es siempre 0, para cualquier valuación.
  - Forma normal conjuntiva (CNF): Una fórmula está en forma normal conjuntiva si es una conjunción de disyunciones de literales. Es decir, es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$, donde cada C_i es una disyunción de literales, es decir, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{iki})$.
  - Forma normal disyuntiva (DNF): Una fórmula está en forma normal disyuntiva si es una disyunción de conjunciones de literales. Es decir, es de la forma $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, donde cada B_i es una conjunción de literales, es decir, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{iki})$.
  - Satisfacibilidad: Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es inconsistente.
- **Consecuencia lógica:**

  ψ es consecuencia lógica de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

  Notación: $\Sigma \models \psi$.
- **¿Qué es la lógica de predicados?**

  La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

  si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**
  - Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
  - Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
  - Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).
  - Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi \equiv \psi$$

    si para toda interpretación I y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

  - Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \models \varphi$$

    si para toda interpretación I y $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

1. Funcionalidad completa

Demuestre que el conectivo $\uparrow$ (también conocido como NAND) es funcionalmente completo. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución

Sabemos que el conjunto $C = \{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo (demostrado en clases, se puede usar). Demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida a partir de los conectivos del conjunto C tiene una fórmula equivalente que solo usa conectivos de $C' = \{\uparrow\}$, con ello demostrando que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Con $\varphi = p$, se cumple trivialmente que φ puede ser construida con conectivos de C'.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas construidas con los conectivos de C, y que existen $\varphi', \psi' \in \mathcal{L}(P)$ construidas con los conectivos de C' tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$.

TI: Demostraremos que toda fórmula θ construida con los pasos inductivos del conjunto C tiene una fórmula θ' construida con conectivos de C' tal que $\theta \equiv \theta'$. Notemos, en primer lugar, que para dos fórmulas α, β cualquiera se tiene que $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \uparrow \beta$. Como C tiene dos conectivos, hay dos casos:

- $\theta = \neg\varphi \overset{HI}{\equiv} \neg\varphi' \equiv \neg(\varphi' \wedge \varphi') \equiv \varphi' \uparrow \varphi'$. Luego, $\theta' = \varphi' \uparrow \varphi'$ cumple la propiedad.
- $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi' \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg(\varphi' \uparrow \psi') \equiv (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$.
  Luego, $\theta' = (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$ cumple la propiedad.

Concluímos que toda fórmula construida con conectivos de C tiene una equivalente construida con conectivos de C', y con ello que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

2. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$.

Solucion
a) DNF
Usaremos el método de la tabla de verdad para pasar la fórmula a DNF. A continuación vemos la tabla de verdad de la fórmula, con una columna adicional correspondiente a la subfórmula resultante de esa valuación:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(r \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$	subfórmula
0	0	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	0	1	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
0	1	1	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$
1	0	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
1	0	1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$
1	1	0	1	0	0	$-$
1	1	1	1	0	0	$-$

Finalmente, tomamos la disyunción de todas estas subfórmulas y tenemos una fórmula equivalente en DNF:
$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$
Notemos que esta fórmula puede ser simplificada significativamente, pero que para efectos de esta pregunta es válida.

b) CNF
Para encontrar una fórmula equivalente en CNF podemos aprovechar la Ley de De Morgan junto a la tabla de verdad y realizar un procedimiento similar, pero con las valuaciones que hacen a la fórmula falsa, y finalmente negar la fórmula resultante. Esto termina con la negación de una fórmula en DNF, lo que por Ley de De Morgan entrega una fórmula en CNF. Nuevamente, la tabla de verdad con las respectivas subfórmulas es:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(r \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$	subfórmula
0	0	0	0	0	1	$-$
0	0	1	0	1	1	$-$
0	1	0	0	0	1	$-$
0	1	1	0	0	1	$-$
1	0	0	0	0	1	$-$
1	0	1	0	1	1	$-$
1	1	0	1	0	0	$p \wedge q \wedge \neg r$
1	1	1	1	0	0	$p \wedge q \wedge r$

La fórmula DNF en este caso es $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$. Sin embargo, tomamos las valuaciones falsas, por lo que nos interesa la negación de esta fórmula: $\neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r))$. Con ello, por De Morgan, obtenemos $\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, que es una fórmula en CNF equivalente a la original.

3. Satisfacibilidad y Resolución

A. Satisfacibilidad

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

3.a.1

Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Solucion Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera y sean α, β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$.
Por demostrar: $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.

Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \alpha$.
Como β está en Σ, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$ (son lógicamente equivalentes), entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por esto, queda demostrado que para cualquier vector de valuaciones $\vec{v}$ se cumple que $\Sigma \backslash \alpha \models \alpha$, es decir, Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

3.a.2

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante

Solucion La afirmación es correcta y lo demostraremos de la siguiente forma. Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera tal que Σ es redundante de a pares.

Por demostrar: Σ es redundante
Suponga que Σ es redundante a pares, entonces sabemos que existen α y β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \models \beta$.
Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \{\beta\}$. Dado que α está en $\Sigma \backslash \{\beta\}$, entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por definición de consecuencia lógica, como $\alpha \models \beta$ y $\alpha(\vec{v}) = 1$, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Por lo tanto, queda demostrado que si Σ es redundante a pares, entonces Σ es redundante.

3.a.3

Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

Solucion En este caso la afirmación es falsa. Para demostrar que no se cumple lo propuesto se propondrá un posible contraejemplo que deja en evidencia que existe un caso donde no se cumple lo pedido.
Considere el conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Debemos demostrar que este conjunto es redundante y no es redundante de a pares.
Su tabla de verdad que se utilizará para la demostración es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para que sea redundante se tiene que cumplir que existe α tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$. Si consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$ nos podemos dar cuenta que $\{p, q\} \models p \leftrightarrow q$. Esto es fácilmente visible mediante la fila 4 de la tabla de verdad. Por lo tanto, Σ es redundante.
Ahora, para demostrar que Σ no es redundante de a pares debemos demostrar que para todo par α, β en Σ con $\alpha \neq \beta$ no se cumple que $\alpha \models \beta$. Como Σ tiene 3 fórmulas proposicionales, debemis ver los 6 casos y demostrar para cada uno que no es cierto que $\alpha \models \beta$.

- $p \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 3)
- $p \models q$: no se cumple (fila 3)
- $p \leftrightarrow p \models q$: no se cumple (fila 1)
- $p \leftrightarrow q \models q$: no se cumple (fila 1)
- $q \models p$: no se cumple (fila 2)
- $q \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 2)

Ya que para todos los pares no se cumple la consecuencia lógica, entonces Σ no es redundante a pares.

B. Resolución

Demuestre que $\Sigma = \{p \leftrightarrow q, p \oplus q\}$, con '$\oplus$' la disyunción exclusiva, es inconsistente.
Observación: La disyunción exclusiva es similar a la disyunción, la única diferencia es que cuando los dos valores (p y q) son verdad, esta es falsa. Su tabla de verdad es

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Solucion El método de resolución es una herramienta potente para demostrar inconsistencia de conjuntos. Para poder utilizarlo debemos pasar las fórmulas del conjunto a CNF en primer lugar, para obtener un conjunto de solo cláusulas. Se tiene que

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
- $p \oplus q \equiv \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Luego, $\Sigma' = \{(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p), (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)\} \equiv \Sigma$. Además, un conjunto es lógicamente equivalente a la conjunción de sus fórmulas, por lo que se tiene que $\Sigma' \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p) \land (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$, y esta fórmula, por asociatividad de $\land$, es a su vez es equivalente al conjunto $\Sigma'' = \{\neg p \lor q, \neg q \lor p, p \lor q, \neg p \lor \neg q\}$. Como este es un conjunto de cláusulas, podemos aplicar resolución sobre él. Como queremos demostrar que Σ es inconsistente, buscamos una demostración por resolución que nos lleve a la cláusula vacía $\square$:

$$
\begin{array}{lr}
(1)\ \neg p \lor q & \in \Sigma'' \\
(2)\ p \lor q & \in \Sigma'' \\
(3)\ q & \text{Resolución de (1) y (2)} \\
(4)\ p \lor \neg q & \in \Sigma'' \\
(5)\ p & \text{Resolución de (3) y (4)} \\
(6)\ \neg p \lor \neg q & \in \Sigma'' \\
(7)\ \neg q & \text{Resolución de (5) y (6)} \\
(8)\ \square & \text{Resolución de (3) y (7)}
\end{array}
$$

Como existe una demostración por resolución sobre Σ'' que lleva a la cláusula vacía, concluímos que Σ'' es inconsistente. Finalmente, como $\Sigma'' \equiv \Sigma' \equiv \Sigma$, concluímos que Σ es inconsistente, que es lo que se quería demostrar.

4. Lógica de predicados

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x, y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &:= \text{Personas} \\
\mathcal{I}(R(x)) &:= x \text{ conoce el cahuin} \\
\mathcal{I}(C(x, y)) &:= x \text{ le contó el cahuin a } y \\
\mathcal{I}(x = y) &:= x \text{ es igual a } y
\end{aligned}
$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el cahuin y otra que no" se puede definir con la fórmula $\exists x. \exists y. (R(x) \land \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

Solucion

1. Si una persona conoce el cachuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
$$\forall x.\forall y.(R(x) \wedge C(x, y) \rightarrow R(y))$$

2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
$$\neg\exists x.(R(x) \wedge C(x, x))$$

3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
$$\exists x.(R(x) \wedge \forall y.\neg C(y, x))$$

4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.
$$\neg\exists x.\exists y.\exists z.(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x) \wedge C(x, y) \wedge C(y, z) \wedge C(z, x))$$