# Semántica en lógica proposicional

Clase 4

IIC 1253

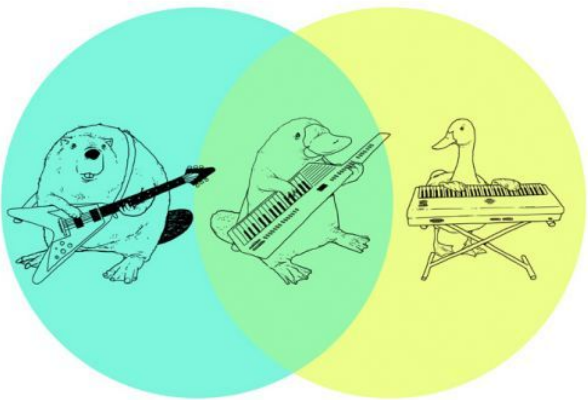
Prof. Sebastián Bugedo

# Outline

# Primer Acto: Fundamentos

## Inducción y lógica

# Playlist Primer Acto



Playlist del curso: DiscretiWawos

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

# Sintaxis de la lógica proposicional

Sea $P$ un conjunto de variables proposicionales

## Definición

Dado $P$, se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface

1. Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \star \psi) \in \mathcal{L}(P)$

Cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es una **fórmula proposicional**

Notemos que $\mathcal{L}(P)$ se define **inductivamente** a partir de un $P$ fijo

# Definiciones inductivas

**Ejemplo**

1. Defina la función $largo(\varphi)$ como el largo de una fórmula en lógica proposicional (cuenta variables, conectivos y paréntesis).
2. Defina la función $var(\varphi)$ como el número de ocurrencias de variables proposicionales en $\varphi$.
3. Demuestre que si $\varphi$ no contiene el símbolo $\neg$, se cumple que $largo(\varphi) \leq 4 \cdot var(\varphi)^2$.
    - ¿Qué pasa si contiene el símbolo $\neg$?

Nos aprovechamos de la estructura inductiva de $\mathcal{L}(P)$

# Sintaxis de la Lógica proposicional

**Ejercicio**

Definimos la función $largo(\varphi) : \mathcal{L}(P) \to \mathbb{N}$ como el largo de una fórmula mediante

1. $largo(p) = 1$, con $p \in P$.
2. $largo((\neg\varphi)) = 3 + largo(\varphi)$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $largo((\varphi \star \psi)) = 3 + largo(\varphi) + largo(\psi)$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

# Sintaxis de la Lógica proposicional

## Ejercicio

Similarmente definimos $var(\varphi) : \mathcal{L}(P) \to \mathbb{N}$ como el número de ocurrencias de variables proposicionales según

1. $var(p) = 1$, con $p \in P$.
2. $var((\neg\varphi)) = var(\varphi)$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $var((\varphi \star \psi)) = var(\varphi) + var(\psi)$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

## Ejercicio

Demostraremos que si $\varphi$ no contiene el símbolo $\neg$, se cumple que

$$largo(\varphi) \leq 4 \cdot var(\varphi)^2$$

Usaremos inducción estructural.

- **BI:** $largo(p) = 1 \leq 4 = 4 \cdot var(p)^2$.
- **HI:** Supongamos que la propiedad se cumple para $\varphi, \psi \in L(P)$ tales que no tienen el símbolo $\neg$. Es decir,
$$largo(\varphi) \leq 4 \cdot var(\varphi)^2$$
$$largo(\psi) \leq 4 \cdot var(\psi)^2$$
- **TI:** Debemos probar la propiedad para $(\varphi \star \psi)$, i.e. que
$$largo((\varphi \star \psi)) \leq 4 \cdot var((\varphi \star \psi))^2$$

# Sintaxis de la Lógica proposicional

## Ejercicio

- **TI:** Debemos probar la propiedad para $(\varphi \star \psi)$, i.e. que

$$\mathit{largo}((\varphi \star \psi)) \leq 4 \cdot \mathit{var}((\varphi \star \psi))^2$$

Usando las definiciones anteriores,

$$\begin{aligned}
\mathit{largo}((\varphi \star \psi)) &= 3 + \mathit{largo}(\varphi) + \mathit{largo}(\psi) && (\quad) \\
&\leq 3 + 4 \cdot \mathit{var}(\varphi)^2 + 4 \cdot \mathit{var}(\psi)^2 && (\quad) \\
&= 3 + 4(\mathit{var}(\varphi)^2 + \mathit{var}(\psi)^2) && (\quad) \\
&= 3 + 4((\mathit{var}(\varphi) + \mathit{var}(\psi))^2 - 2 \cdot \mathit{var}(\varphi) \cdot \mathit{var}(\psi)) && (\quad) \\
&= 3 - 8 \cdot \mathit{var}(\varphi) \cdot \mathit{var}(\psi) + 4 \cdot (\mathit{var}(\varphi) + \mathit{var}(\psi))^2 && (\quad)
\end{aligned}$$

Como $\mathit{var}(\theta) \geq 1$ para cualquier $\theta \in L(P)$, tenemos que $8 \cdot \mathit{var}(\varphi) \cdot \mathit{var}(\psi) \geq 8$ y por lo tanto $3 - 8 \cdot \mathit{var}(\varphi) \cdot \mathit{var}(\psi) \leq 0$.

Finalmente, aplicando esta última desigualdad obtenemos que $\mathit{largo}((\varphi \star \psi)) \leq 4 \cdot \mathit{var}((\varphi \star \psi))^2$ como queríamos demostrar.

Por inducción estructural, se sigue que la propiedad es cierta para toda fórmula que no contiene $\neg$. $\square$

**Ejercicio (Propuesto ★)**

¿Qué pasa si contiene el símbolo $\neg$?

Como la regla que permite ocupar el conectivo $\neg$ no agrega variables pero sí aumenta el largo, podríamos ocuparla y aumentar arbitrariamente el largo de una fórmula sin aumentar el número de variables, con lo que la propiedad no se cumpliría luego de algún número de $\neg$ agregadas. Una idea para limitar esto es no permitir el uso de más de una negación; i.e., no permitir fórmulas del tipo $(\neg(\neg\varphi))$ y sucesivas. Esto se fundamenta más adelante.

# Objetivos de la clase

- Demostrar propiedades sintácticas en lógica proposicional
- Conocer la semántica proposicional
- Demostrar equivalencias lógicas sencillas

# Outline

# Semántica de la lógica proposicional

Ya sabemos construir y verificar fórmulas bien formadas en lógica proposicional

Pero necesitamos determinar si una fórmula es **verdadera** o **falsa**

- ¿Una fórmula siempre tiene un mismo valor de verdad?
- ¿De qué depende su valor de verdad?

La **semántica** se preocupa del **significado** de los símbolos que presentamos en la **sintaxis**

Antes de la semántica, las fórmulas son solo secuencias de símbolos **sin significado** en términos de valor de verdad

# Semántica de la lógica proposicional

## Definición

Sea $P$ un conjunto de variables proposicionales. Una **valuación** o **asignación de verdad** de las variables de $P$ es una función $\sigma : P \to \{0, 1\}$

Notemos que

- 0 representa el valor de verdad **falso**
- 1 representa **verdadero**
- la valuación solo asigna valor de verdad a variables (fórmulas atómicas)
- Si $|P| = n$,existen $2^n$ valuaciones diferentes para $P$

¿Cómo podemos extender el valor de verdad a fórmulas compuestas?

# Semántica de la lógica proposicional

## Definición

Sea $P$ un conjunto y $\sigma : P \to \{0,1\}$ una valuación de las variables de $P$. Se define la **valuación extendida** $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$,entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$
- **Semántica de la negación.**Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- **Semántica de la conjunción.**Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¡Le estamos dando **significado** a los conectivos lógicos!

# Semántica de la lógica proposicional

## Definición (cont.)

- **Semántica de la disyunción.**Si $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 0 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la implicancia.**Si $\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la doble implicancia.**Si $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = \hat{\sigma}(\psi_2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por simplicidad usaremos $\sigma$ en vez de $\hat{\sigma}$

# Semántica de la lógica proposicional

**Ejercicio**

Dado $P = \{p, q\}$ y la valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ dada por

$$\sigma(p) = 1 \qquad \sigma(q) = 0$$

determine el valor de verdad de $\sigma(\varphi)$ para $\varphi = ((\neg(\neg p)) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge q))$.

# Visualizando la semántica: mundos posibles

Cada valuación describe un **mundo posible**. Podemos representarlos de forma exhaustiva en **tablas de verdad**

| $p$ | $q$ | $\varphi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

- Cada fila representa una valuación específica (un mundo posible)
- Cada columna muestra en qué mundos es verdadera una fórmula $\varphi$

Una fórmula queda determinada semánticamente por su tabla de verdad: sabemos dónde (en qué $\sigma$) es verdadera/falsa

# Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

| $p$ | $q$ | $(\neg p)$ | $(p \wedge q)$ | $(p \vee q)$ | $(p \to q)$ | $(p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Ejercicio

Considere un conjunto de variables proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para variables en $P$?
- ¿Cuántas tablas de verdad diferentes hay en $\mathcal{L}(P)$?

Los números $2^n$ y $2^{2^n}$ nos acompañarán por siempre en computación

# Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

| $p$ | $q$ | $(\neg p)$ | $(p \wedge q)$ | $(p \vee q)$ | $(p \rightarrow q)$ | $(p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Comparemos con una fórmula particular $\varphi = (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

| $p$ | $q$ | $\varphi$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

¿Se parece a alguna tabla de verdad conocida?

# Equivalencia lógica

La visualización anterior sugiere la existencia de fórmulas con sintaxis diferente, pero misma semántica

## Definición

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son **lógicamente equivalentes** si para toda valuación $\sigma$, se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$, denotándolo como $\varphi \equiv \psi$.

Las fórmulas equivalentes comparten semántica teniendo diferente sintaxis

# Equivalencia lógica

## Ejemplo

Demostremos que

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Para esto, podemos mostrar las tablas de verdad de ambas fórmulas con variables en $P = \{p, q, r\}$

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge q) \wedge r$ | $p \wedge (q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Como sus tablas de verdad son iguales, concluimos que son equivalentes.

Más aún, este resultado muestra que el conectivo $\wedge$ es **asociativo**

# Equivalencia lógica

Mediante tablas de verdad se prueba una serie de **leyes de equivalencia**

## Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

1. **Doble negación**

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

2. **Leyes de De Morgan**

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

3. **Conmutatividad**

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

# Equivalencia lógica

## Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

4. **Asociatividad**

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

5. **Distributividad**

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

6. **Idempotencia**

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

# Equivalencia lógica

## Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

7. **Absorción**

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$$

8. **Implicancia material**

$$\varphi \to \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

9. **Doble implicancia**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Demuestre las leyes enunciadas.
¿Se puede demostrar que $\to$ es asociativo?

# Consideraciones...

Hoy estudiamos la versión formal de la sintaxis en $\mathcal{L}(P)$. Desde ahora

- Omitiremos paréntesis externos
- Omitiremos paréntesis asociativos
- Omitiremos cualquier paréntesis que no produzca ambigüedad
- Usaremos operadores generalizados por simplicidad:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

¿Por qué es ilegal usar los operadores generalizados con $n = \infty$?

# Outline

# Objetivos de la clase

- Demostrar propiedades sintácticas en lógica proposicional
- Conocer la semántica proposicional
- Demostrar equivalencias lógicas sencillas