Consecuencia lógica y resolución proposicional

Clase 6

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

Conjuntos de fórmulas

Notación

Dado un conjunto de fórmulas Σ en $L(P)$, diremos que una valuación σ **satisface** Σ, denotado por $\sigma(\Sigma) = 1$, si para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Definición

Un conjunto de fórmulas Σ es **satisfactible** si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es **inconsistente**.

¿Cuándo decimos que una fórmula se **deduce** de un conjunto?

Consecuencia lógica

Definición

ψ es **consecuencia lógica** de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

Lo denotamos por $\Sigma \vDash \psi$.

ψ debe ser satisfecha en cada "*mundo*" donde Σ es verdadero

Consecuencia lógica

Ejemplo

La regla de inferencia llamada **Modus ponens** es $\{p, p \rightarrow q\} \vDash q$

p	q	p	$p \rightarrow q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Nos tenemos que fijar en las valuaciones que satisfacen al conjunto...
En esos mundos, la fórmula "*objetivo*" también debe ser satisfecha

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre las siguientes reglas de inferencia

- **Modus tollens:** $\{\neg q, p \rightarrow q\} \vDash \neg p$
- **Demostración por partes:** $\{p \vee q \vee r, p \rightarrow s, q \rightarrow s, r \rightarrow s\} \vDash s$

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Este teorema combina dos mundos:
la **consecuencia lógica** y la **satisfactibilidad**

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de consecuencia lógica
- Demostrar consecuencias sencillas
- Comprender el método de resolución
- Demostrar consecuencias lógicas usando resolución

Outline

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma \vDash \varphi$. Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfactible, luego existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$. Esto implica que $\sigma(\Sigma) = 1$ y que $\sigma(\neg\varphi) = 1$, y por lo tanto $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \vDash \varphi$.

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma \vDash \varphi$. Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfactible, luego existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$. Esto implica que $\sigma(\Sigma) = 1$ y que $\sigma(\neg\varphi) = 1$, y por lo tanto $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \vDash \varphi$.

($\Leftarrow$) Sea $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente. Debemos demostrar que dada una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\sigma(\Sigma) = 1$, necesariamente $\sigma(\neg\varphi) = 0$, y luego $\sigma(\varphi) = 1$. Hemos demostrado que si σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$, por lo que concluimos que $\Sigma \vDash \varphi$. $\square$

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \vDash \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \vDash \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

- Podemos usar tablas de verdad para esto último...

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \vDash \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

- Podemos usar tablas de verdad para esto último...
- ...pero es muy lento!

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \vDash \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

- Podemos usar tablas de verdad para esto último...
- ...pero es muy lento!

Estudiaremos un método alternativo que no requiere tablas de verdad

Outline

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Notación

Denotaremos por $\square$ una contradicción cualquiera. La llamaremos **cláusula vacía**

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Notación

Denotaremos por $\square$ una contradicción cualquiera. La llamaremos **cláusula vacía**

Teorema

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Notación

Denotaremos por $\square$ una contradicción cualquiera. La llamaremos **cláusula vacía**

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \square$.

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vDash \square$.

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \square$.

Demostración (propuesta $\bigstar$)

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vDash \square$.

Demostración (propuesta $\bigstar$)

($\Rightarrow$) Dado que Σ es inconsistente, debemos demostrar que $\Sigma \vDash \square$. Como Σ es inconsistente, sabemos que toda valuación σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 0$, y luego se cumple trivialmente que $\Sigma \vDash \square$.

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vDash \square$.

Demostración (propuesta ★)

($\Rightarrow$) Dado que Σ es inconsistente, debemos demostrar que $\Sigma \vDash \square$. Como Σ es inconsistente, sabemos que toda valuación σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 0$, y luego se cumple trivialmente que $\Sigma \vDash \square$.

($\Leftarrow$) Dado que $\Sigma \vDash \square$, debemos demostrar que Σ es inconsistente. Por contradicción, supongamos que Σ es satisfactible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como $\square$ es una contradicción, tenemos que $\sigma(\square) = 0$, y por lo tanto obtenemos que $\sigma(\Sigma) = 1$ pero $\sigma(\square) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \vDash \square$.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Observaciones

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Observaciones

- Diremos que Σ es lógicamente equivalente a una fórmula φ si

$$\Sigma \equiv \{\varphi\}$$

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Observaciones

- Diremos que Σ es lógicamente equivalente a una fórmula φ si

$$\Sigma \equiv \{\varphi\}$$

- Para todo Σ se cumple

$$\Sigma \equiv \bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi$$

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$$

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\} \equiv \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}$$

obteniendo un **conjunto de cláusulas** que es equivalente al original.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(q \rightarrow r)\} \equiv \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}$$

obteniendo un **conjunto de cláusulas** que es equivalente al original.

Para determinar si $\Sigma \vDash \varphi$, construiremos un conjunto de cláusulas $\Sigma' \equiv \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

La regla de resolución

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\overline{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\overline{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \overline{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Observaciones

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Observaciones

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2,\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4\} \vDash C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Observaciones

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2,\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4\} \vDash C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$
- ℓ y $\bar{\ell}$ se llaman literales **complementarios**

La regla de resolución

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \overline{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Ejemplo

Algunos casos particulares de resolución

La regla de resolución

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Ejemplo

Algunos casos particulares de resolución

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ \bar{\ell} \end{array}}{C_1 \vee C_2}$$

La regla de resolución

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Ejemplo

Algunos casos particulares de resolución

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ \bar{\ell} \end{array}}{C_1 \vee C_2} \qquad \frac{\begin{array}{c} \ell \\ \bar{\ell} \end{array}}{\square}$$

La regla de factorización

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3 y un literal ℓ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3}{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3}$$

La regla de factorización

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3 y un literal ℓ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3}{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3}$$

Observación

La regla de factorización

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3 y un literal ℓ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3}{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3}$$

Observación

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3\} \vDash C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3$

Demostraciones por resolución

Definición

Demostraciones por resolución

Definición

Una **demostración por resolución** de que Σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j, C_k usando la regla de resolución o

Demostraciones por resolución

Definición

Una **demostración por resolución** de que Σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j, C_k usando la regla de resolución o
  - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la regla de factorización

Demostraciones por resolución

Definición

Una **demostración por resolución** de que Σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, \dots, C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j, C_k usando la regla de resolución o
  - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la regla de factorización
- $C_n = \square$

Lo denotamos por $\Sigma \vdash \square$.

Resolución proposicional

Ejemplo

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

$$(1) \qquad p \vee q \vee r \qquad \in \Sigma$$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \lor q \lor r, \neg p \lor s, \neg q \lor s, \neg r \lor s, \neg s\}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & p \lor q \lor r & \in \Sigma \\ (2) & \neg p \lor s & \in \Sigma \end{array}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

$$\begin{array}{lll} (1) & p \vee q \vee r & \in \Sigma \\ (2) & \neg p \vee s & \in \Sigma \\ (3) & s \vee q \vee r & \text{resolución de } (1), (2) \end{array}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & p \vee q \vee r & \in \Sigma \\
(2) & \neg p \vee s & \in \Sigma \\
(3) & s \vee q \vee r & \text{resolución de } (1),(2) \\
(4) & \neg q \vee s & \in \Sigma \\
(5) & s \vee s \vee r & \text{resolución de } (3),(4)
\end{array}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3), (4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de (1), (2)
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de (3), (4)
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3), (4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de $(6), (7)$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3), (4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de $(6), (7)$
(9)	s	factorización de (8)

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1),(2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3),(4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de $(6),(7)$
(9)	s	factorización de (8)
(10)	$\neg s$	$\in \Sigma$

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3), (4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de $(6), (7)$
(9)	s	factorización de (8)
(10)	$\neg s$	$\in \Sigma$
(11)	$\square$	resolución de $(9), (10)$

Es decir, existe una demostración por resolución de que Σ es inconsistente

Resolución proposicional

Teorema

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Completitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Completitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Completitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Corolario (forma alternativa)

Un conjunto de cláusulas Σ es inconsistente si y sólo si existe una demostración por resolución de que es inconsistente.

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Completitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Corolario (forma alternativa)

Un conjunto de cláusulas Σ es inconsistente si y sólo si existe una demostración por resolución de que es inconsistente.

¡Resolución resuelve nuestro problema!

Resolución proposicional

¡Resolución resuelve nuestro problema de consecuencia lógica!

Resolución proposicional

¡Resolución resuelve nuestro problema de consecuencia lógica!

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Resolución proposicional

¡Resolución resuelve nuestro problema de consecuencia lógica!

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r)\} \vDash q \rightarrow r$.

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto
2. Transformar todo en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a CNF y separar cláusulas

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto
2. Transformar todo en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a CNF y separar cláusulas
3. Obtener una secuencia de cláusulas por resolución para llegar a $\square$

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto
2. Transformar todo en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a CNF y separar cláusulas
3. Obtener una secuencia de cláusulas por resolución para llegar a $\square$

El desarrollo se deja propuesto ★

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r)$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r)$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r)$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

$$\psi = \neg(q \to r)$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

$$\psi = \neg(q \to r) \equiv \neg(\neg q \vee r)$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

$$\psi = \neg(q \to r) \equiv \neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

$$\psi = \neg(q \to r) \equiv \neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r \equiv \{q,\ \neg r\}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

$$(1) \quad p \qquad \in \Sigma$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \Box$:

$$\begin{array}{lll} (1) & p & \in \Sigma \\ (2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \end{array}$$

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & p & \in \Sigma \\
(2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \\
(3) & \neg q \vee r & \text{resolución de } (1), (2)
\end{array}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & p & \in \Sigma \\
(2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \\
(3) & \neg q \vee r & \text{resolución de } (1), (2) \\
(4) & q & \in \Sigma
\end{array}$$

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

$$\begin{array}{lll} (1) & p & \in \Sigma \\ (2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \\ (3) & \neg q \vee r & \text{resolución de } (1),(2) \\ (4) & q & \in \Sigma \\ (5) & r & \text{resolución de } (3),(4) \end{array}$$

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \Box$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & p & \in \Sigma \\
(2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \\
(3) & \neg q \vee r & \text{resolución de } (1),(2) \\
(4) & q & \in \Sigma \\
(5) & r & \text{resolución de } (3),(4) \\
(6) & \neg r & \in \Sigma
\end{array}$$

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

(1)	p	$\in \Sigma$
(2)	$\neg q \vee \neg p \vee r$	$\in \Sigma$
(3)	$\neg q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	q	$\in \Sigma$
(5)	r	resolución de $(3), (4)$
(6)	$\neg r$	$\in \Sigma$
(7)	$\square$	resolución de $(5), (6)$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de consecuencia lógica
- Demostrar consecuencias sencillas
- Comprender el método de resolución
- Demostrar consecuencias lógicas usando resolución