MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

Projekt z praktycznych zastosowań równań reakcji-dyfuzji

Benedikt Żurek

Luty 2026

Spis treści

1 Wstęp

Klausmeier [1] zaproponował następujący model do opisu formacji wzorów Turinga przez roślinność na zboczach w warunkach ograniczonego dostępu wody:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial T} = A - L\,W - R\,W\,N^2 + V\dfrac{\partial W}{\partial X}, & (1.1a) \\ \dfrac{\partial N}{\partial T} = R\,J\,W\,N^2 - M\,N + D\,\Delta N, & (1.1b) \end{cases}$$

gdzie $W((X,Y),T)$, $N((X,Y),T)$ to funkcje opisujące odpowiednio ilość wody i biomasy, a A, L, R, J, M, V, D to dodatnie współczynniki opisujące wielkości fizyczne:

- A - współczynnik opisujący ilość wody dostarczaną do systemu (opady);
- L - współczynnik parowania wody;
- R - współczynnik poboru wody przez roślinność;
- J - ilość biomasy otrzymanej z jednostki wody;
- M - śmiertelność roślin;
- V - prędkość spadku wody związanego z nachyleniem powierzchni (przyjętym w osi X);
- D - współczynnik dyfuzji biomasy.

Ten projekt analizuje zmodyfikowany model Klausmeiera, w którym teren jest płaski:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial T} = A - L\,W - R\,W\,N^2 + D_W\,\Delta W, & (1.2a) \\ \dfrac{\partial N}{\partial T} = R\,J\,W\,N^2 - M\,N + D_N\,\Delta N. & (1.2b) \end{cases}$$

Model ten jest analizowany między innymi w Wang et al. [3]. Ten sam model został również użyty przez Graya i Scotta do opisu pewnych reakcji chemicznych, dlatego jest on nazywany modelem Klausmeiera-Graya-Scotta. W tym projekcie rozważono model Klausmeiera-Graya-Scotta na ograniczonym obszarze $\Omega = [0\,;L_X] \times [0\,;L_Y] \subset \mathbb{R}^2$, przy warunkach brzegowych Dirichleta (wrogie otoczenie).

2 Opis eksperymentów numerycznych

Po ubezwymiarowieniu pracowano na układzie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a - u - u\,v^2 + d_1\,\Delta u & x \in \Omega, t > 0, & (2.1a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u\,v^2 - m\,v + d_2\,\Delta v & x \in \Omega, t > 0, & (2.1b) \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, & (2.1c) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega. & (2.1d) \end{cases}$$

Przeprowadzono na nim 3 eksperymenty numeryczne. Kod był pisany w Pythonie.

3 Opis matematyczny

3.1 Ubezwymiarowienie

Rozważamy układ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial T} = A - L\,W - R\,W\,N^2 + D_W\,\Delta_{\boldsymbol{X}} W, & (3.1a) \\ \dfrac{\partial N}{\partial T} = R\,J\,W\,N^2 - M\,N + D_N\,\Delta_{\boldsymbol{X}} N, & (3.1b) \end{cases}$$

gdzie $W, N \in \mathrm{C}^1(\Omega_{\boldsymbol{X}} \times [0\,;\infty))$ to funkcje zmiennych $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ i T, operator $\Delta_{\boldsymbol{X}} = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2}$ to laplasjan względem $\boldsymbol{X}$, a A, L, R, J i M to dodatnie stałe. Wprowadzamy nowe zmienne bezwymiarowe u, v, t i $\boldsymbol{x}$, zdefiniowane jako

$$W = W_0\,u, \quad N = N_0\,v, \quad T = T_0\,t, \quad \boldsymbol{X} = X_0\,\boldsymbol{x}, \tag{3.2}$$

gdzie wielkości z indeksem 0 to stałe skalujące. Mamy wówczas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{W_0}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{W_0}\frac{\partial W}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{T_0}{W_0}\frac{\partial W}{\partial T} \quad \text{i analogicznie} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{T_0}{N_0}\frac{\partial N}{\partial T}. \tag{3.3}$$

Z kolei do wyznaczenia laplasjanu względem nowych współrzędnych potrzebny jest wzór na drugą pochodną funkcji złożonej: Mamy

$$\begin{aligned}(f \circ g)''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((f \circ g)'(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f' \circ g(x)\,g'(x)) = (f' \circ g)'(x)\,g'(x) + f' \circ g(x)\,g''(x) \\ &= f'' \circ g(x)\,g'(x)^2 + f' \circ g(x)\,g''(x),\end{aligned} \tag{3.4}$$

czyli w notacji Leibniza

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}g^2}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\,\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}. \tag{3.5}$$

Jako że X_i zależy tylko od x_i, czyli $\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial W}{\partial X_i}\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}x_i}$, to reguła ta działa również w tym przypadku. Mamy więc:

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{x}} u &= \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{W_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = \frac{1}{W_0}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_i^2}\left(\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}x_i}\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial X_i}\,\frac{\mathrm{d}^2 X_i}{\mathrm{d}x_i^2}\right) \\ &= \frac{1}{W_0}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X_i^2}\,X_0^2 + \frac{\partial W}{\partial X_i}\cdot 0\right) = \frac{X_0^2}{W_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 W}{\partial X_i^2} = \frac{X_0^2}{W_0}\,\Delta_{\boldsymbol{X}} W.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Mamy więc

$$\Delta_{\boldsymbol{X}} W = \frac{W_0}{X_0^2}\,\Delta_{\boldsymbol{x}} u \quad \text{i analogicznie} \quad \Delta_{\boldsymbol{X}} N = \frac{N_0}{X_0^2}\,\Delta_{\boldsymbol{x}} v. \tag{3.7}$$

Podstawiając (3.1) oraz (3.7) do (3.3) otrzymujemy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{T_0}{W_0} \left(A - L\, W_0\, u - R\, W_0\, N_0^2\, u\, v^2 + D_W\, \dfrac{W_0}{X_0^2}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} u \right), & (3.8a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{T_0}{N_0} \left(R\, J\, W_0\, N_0^2\, u\, v^2 - M\, N_0\, v + D_N\, \dfrac{N_0}{X_0^2}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} v \right), & (3.8b) \end{cases}$$

czyli po uproszczeniach

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A\, \dfrac{T_0}{W_0} - L\, T_0\, u - R\, T_0\, N_0^2\, u\, v^2 + D_W\, \dfrac{W_0}{X_0^2}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} u, & (3.9a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = R\, J\, W_0\, N_0\, T_0\, u\, v^2 - M\, T_0\, v + D_N\, \dfrac{N_0}{X_0^2}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} v. & (3.9b) \end{cases}$$

Podstawiając

$$T_0 \coloneqq \frac{1}{L}, \quad N_0 \coloneqq \sqrt{\frac{L}{R}}, \quad W_0 \coloneqq \frac{1}{J}\sqrt{\frac{L}{R}}, \quad X_0 = 1, \tag{3.10}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{A\, J\, R^{1/2}}{L^{3/2}} - u - u\, v^2 + \dfrac{D_W\, L^{1/2}}{J\, R^{1/2}}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} u, & (3.11a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u\, v^2 - \dfrac{M}{L}\, v + \dfrac{D_N\, L^{1/2}}{R^{1/2}}\, \Delta_{\boldsymbol{x}} v. & (3.11b) \end{cases}$$

Ostatecznie, definiując nowe stałe

$$a \coloneqq \frac{A\, J\, R^{1/2}}{L^{3/2}}, \quad m \coloneqq \frac{M}{L}, \quad d_1 \coloneqq \frac{D_W\, L^{1/2}}{J\, R^{1/2}}, \quad d_2 \coloneqq \frac{D_N\, L^{1/2}}{R^{1/2}}, \tag{3.12}$$

otrzymujemy postać bezwymiarową układu (3.1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a - u - u\, v^2 + d_1\, \Delta_{\boldsymbol{x}} u, & (3.13a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u\, v^2 - m\, v + d_2\, \Delta_{\boldsymbol{x}} v. & (3.13b) \end{cases}$$

3.2 Analiza niestabilności Turinga

Od teraz rozważamy układ bezwymiarowy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a - u - u\, v^2 + d_1\, \Delta u & x \in \Omega, t > 0, & (3.14a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u\, v^2 - m\, v + d_2\, \Delta v & x \in \Omega, t > 0, & (3.14b) \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0, & (3.14c) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega. & (3.14d) \end{cases}$$

Poniższe rozważania wzorowane są na formalizmie przedstawionym w pracy Kanako Suzuki [2].

3.2.1 Jednorodne stany stacjonarne

Układ kinetyczny odpowiadający układowi (3.13) to

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a - u - u\, v^2 & t > 0, & (3.15a) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u\, v^2 - m\, v & t > 0. & (3.15b) \end{cases}$$

Znajdziemy jego stany stacjonarne (u_*, v_*). Mamy

$$\begin{cases} a - u_* - u_* \, v_*^2 = 0, & (3.16a) \\ u_* \, v_*^2 - m \, v_* = 0. & (3.16b) \end{cases}$$

Z równania (3.16b) mamy dwa przypadki: Pierwszy to $v_* = 0$. Wówczas podstawiając do (3.16a) otrzymujemy $u_* = a$. Jest to stan pustynny (brak wegetacji), mało interesujący. Drugi przypadek to $u_* \, v_* = m$. Z równania (3.16a) mamy $u_* \neq 0$, więc mamy wówczas $v_* = \frac{m}{u_*}$. Po podstawieniu do (3.16a) i wymnożeniu przez u_* otrzymujemy

$$-u_*^2 + a \, u_* - m^2 = 0. \tag{3.17}$$

W zależności od znaku wyróżnika kwadratowego $\Delta_u = a^2 - 4\,m^2 = (a + 2\,m)\,(a - 2\,m)$ mamy więc trzy przypadki:

- $\Delta_u < 0$, czyli $a < 2\,m$: Wówczas jedynym stanem stacjonarnym jest stan pustynny (zbyt mała ilość opadów względem śmiertelności roślin).
- $\Delta_u = 0$, czyli $a = 2\,m$: Wówczas mamy niezerowy stan stacjonarny $(u_{*0}, v_{*0}) = (a, \frac{m}{a}) = (a, \frac{1}{2})$.
- $\Delta_u > 0$, czyli $a > 2\,m$: Wówczas mamy dwa niezerowe (i nieujemne) rozwiązania

$$(u_{*\pm}, v_{*\pm}) = \left(\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4\,m^2}}{2}, \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,m^2}}{2\,m} \right)$$

Przeanalizujmy teraz stabilność tych stanów stacjonarnych. Macierz Jacobiego dla układu (3.15) ma postać

$$J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - v^2 & -2\,u\,v \\ v^2 & 2\,u\,v - m \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Dla stanu pustynnego mamy

$$J\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Jest to macierz diagonalna o wartościach własnych $-1, -m < 0$, więc stan pustynny jest zawsze liniowo stabilny. Dla innych stanów stacjonarnych skorzystamy z równości $u_* = \frac{m}{v_*}$ by uprościć macierz Jacobiego do postaci

$$J\begin{pmatrix} \frac{m}{v} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - v^2 & -2\,m \\ v^2 & m \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Stosując tą postać otrzymujemy

$$J\begin{pmatrix} u_{*0} \\ v_{*0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -2\,m \\ \frac{1}{4} & m \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Macierz ta ma wyznacznik $\det J(u_{*0}, v_{*0}) = \lambda_1 \, \lambda_2 = -\frac{3}{4} m < 0$, więc stan ten jest niestabilny. Przejdźmy do stanów stacjonarnych $(u_{*\pm}, v_{*\pm})$. Mamy

$$\det J\begin{pmatrix} u_{*\pm} \\ v_{*\pm} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - v_{*\pm}^2 & -2\,m \\ v_{*\pm}^2 & m \end{vmatrix} = -m - m\,v_{*\pm}^2 + 2\,m\,v_{*\pm}^2 = -m + m\,v_{*\pm}^2 = m\left(v_{*\pm}^2 - 1\right), \tag{3.22}$$

Pokażemy, że $v_{*-} < 1$ dla $a, m > 0$ i $a > 2\,m$: Mamy równanie

$$v_{*-} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\,m^2}}{2\,m} < 1. \tag{3.23}$$

Skoro $m > 0$, to

$$a - \sqrt{a^2 - 4\,m^2} < 2\,m, \tag{3.24}$$

$$a - 2\,m < \sqrt{a^2 - 4\,m^2}. \tag{3.25}$$

Jako że $a > 2\,m$, to obie strony nierówności są dodatnie, więc możemy ją podnieść do kwadratu

$$a^2 - 4\,a\,m + 4\,m^2 < a^2 - 4\,m^2, \tag{3.26}$$

$$m\,(2\,m - a) < 0. \tag{3.27}$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla wszystkich $a, m > 0$, takich że $a > 2\,m$, więc przy naszych założeniach, zawsze zachodzi $v_{*-} < 1$, czyli

$$\det J \begin{pmatrix} u_{*-} \\ v_{*-} \end{pmatrix} = m\,(v_{*-} + 1)\,(v_{*-} - 1) < 0, \tag{3.28}$$

więc stan stacjonarny (u_{*-}, v_{*-}) jest zawsze niestabilny. Z kolei dla stanu (u_{*+}, v_{*+}) mamy

$$v_{*+} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\,m^2}}{2\,m} > \frac{a}{2\,m} > 1, \tag{3.29}$$

czyli

$$\det J \begin{pmatrix} u_{*+} \\ v_{*+} \end{pmatrix} = m\,(v_{*+} + 1)\,(v_{*+} - 1) > 0. \tag{3.30}$$

Skoro iloczyn wartości własnych jest dodatni, to ich części rzeczywiste mają ten sam znak. Zatem, by stan był stabilny wystarczy jedynie by ślad macierzy J (suma wartości własnych) był ujemny. Mamy

$$\operatorname{tr} J \begin{pmatrix} u_{*+} \\ v_{*+} \end{pmatrix} = m - 1 - v_{*+}^2 < 0, \tag{3.31}$$

$$v_{*+}^2 > m - 1 \tag{3.32}$$

Stan jest więc na pewno stabilny dla $m < 1$. Z kolei w ogólności mamy

$$v_{*+}^2 = \frac{a^2 - 2\,m^2 + a\,\sqrt{a^2 - 4\,m^2}}{2\,m^2} > m - 1 \tag{3.33}$$

$$a\,\sqrt{a^2 - 4\,m^2} > 2\,m^3 - a^2 \tag{3.34}$$

Bibliografia

[1] Christopher A. Klausmeier. „Regular and Irregular Patterns in Semiarid Vegetation”. W: *Science* 284.5421 (1999), s. 1826–1828. DOI: 10.1126/science.284.5421.1826. eprint: https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.284.5421.1826. URL: https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.284.5421.1826.

[2] Kanako Suzuki. „Mechanism Generating Spatial Patterns in Reaction-Diffusion Systems”. W: *Interdisciplinary Information Sciences* 17.3 (2011), s. 131–153. DOI: 10.4036/iis.2011.131.

[3] Xiaoli Wang, Junping Shi i Guohong Zhang. „Bifurcation and pattern formation in diffusive Klausmeier-Gray-Scott model of water-plant interaction”. W: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 497.1 (2021), s. 124860. ISSN: 0022-247X. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124860. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X20310234.