

Programme Electrostatique - Magnétostatique CT 20h TD 10h

Prérequis

Cours de Mécanique du point (Système de coordonnées, Calculs vectoriels, opérateurs différentiels).

Objectifs généraux

A l'issue des enseignements, les étudiants devraient être capables de :

1. Comprendre les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique (courant continu)
2. Appliquer les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique (courant continu)

Contenu

- Champ et potentiel électrostatiques : Charge électrique, Distribution de charges, Etude des interactions électriques entre corps chargés, des lois qui les régissent et les applications associées, Champ électrostatique, Théorème de Gauss, Potentiel électrostatique, Dipôle électrostatique, Energie électrostatique
- Conducteurs en équilibre : Systèmes de conducteurs en équilibre, Conducteur en équilibre électrostatique, Influence électrostatique, condensateurs, Associations de condensateurs
- Champ magnétique et potentiel vecteur : Force magnétique, champ magnétique. Loi de Biot et Savart, la force de Lorentz, Force sur charge en mouvement dans un champ magnétique, Loi de Laplace, Champ créé par une charge en mouvement et un courant électrique, Flux de champ magnétique, Dipôle magnétique Interactions magnétiques, Théorème d'Ampère, théorème de Stokes, Potentiel vecteur.
- Induction Electromagnétique : Loi de Lenz, Loi de Faraday.

Table des matières

I. Electrostatique :

Chapitre 1 : Eléments d'analyse vectorielle

Chapitre 2 : Champ et potentiel électrostatiques

Chapitre 3 : Théorème de Gauss et applications

II. Magnétostatique :

Chapitre 4 : Champ magnétique et potentiel vecteur

Chapitre 5 : Induction électromagnétique

Bibliographie et webographie

- 1) La physique en Fac Electrostatique et Electrocinétique Cours et exercices corrigés, É. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm, N. Piccioli, Dunod, Paris 2006
- 2) Mini manuel Electromagnétisme, Electrostatique magnétostatique Cours et exercices corrigés, M. Henry, A. Kassiba, Dunod, Paris 2009
- 3) Physique Tout-en-un 1^{ère} année Cours et exercices corrigés, 3^e édition, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset, Dunod, Paris, 2002, 2003, 2008
- 4) Physique Tout-en-un PCSI, 5^e édition, Bernard Salamito, Stéphane Cardini, Damien Jurine, Marie-Noëlle Sanz, Dunod, 2013, 2016
- 5) CAPES de Sciences physiques, Tome 1-Physique Cours et exercices, 3^e édition, N. Billy, J. Desbois, M. A. Duval, M. Elias, P. Monceau, A. Plaszczynski, M. Toulmonde, Belin, Paris 2004
- 6) Physique 1^{ère} année ElectroMagnétisme 2014-2015, Constant NIAMIEN, Département Electronique & Télécom, ESIGELEC
- 7) Electrocinétique, Classe Prépa, Tout le cours, PCSI MPSI PTSI, Bernard Gendreau, Christophe Gripon, édition Nathan, 2006.
- 8) Electromagnétisme H-Prépa, 2^{ème} année MP/MP*-PC/PC*-PSI/PSI*-PT/PT*, J.M. Brébec et al., Hachette, Paris, 2003
- 9) <http://docplayer.fr/60665759-Cours-d-electromagnetisme-em14-conducteurs-en-equilibre-electrostatique-condensateurs.html>
- 10) <http://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php>

11)https://mafiadoc.com/cours-delectromagnetisme-em12-potentiel-et-energie-electrostatique_5a31c80e1723ddaff235fd02.html

12)<http://docplayer.fr/60665759-Cours-d-electromagnetisme-em14-conducteurs-en-equilibre-electrostatique-condensateurs.html>

Enseignant Chargé de cours : Abdoul Karim KAGONE

Maître de Conférences en Matériaux - Physique des plasmas

Département de Physique /UFR-SEA/ Université Joseph KI-ZERBO

Introduction

L'interaction électromagnétique est une des **quatre interactions fondamentales** : ces interactions régissent à elles seules tous les phénomènes physiques de l'univers.

Les trois autres interactions connues sont l'interaction gravitationnelle (qui se manifeste surtout avec des corps massiques), l'interaction forte (celle qui assure la cohésion des noyaux des atomes) et l'interaction faible (qui permet notamment la radioactivité).

	Interaction faible.	Interaction forte	Interaction électromagnétique	Interaction gravitationnelle
Echelle d'action	10^{-8} m	10^{-15} m	de 10^{-15} à 10^0 m	de 10^0 à 10^{26} m
Portée	Courte	Très courte	finie	infinie
Rôle	Radioactivité	Cohésion du noyau	Cohésion de l'atome	Cohésion des galaxies

L'**électromagnétisme** consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement. Quand on restreint l'étude aux phénomènes indépendants du temps, cela permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques.

Ce cours aborde l'**électrostatique** qui est une branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatiques) créés par des charges statiques (immobiles) pour l'observateur et le **magnétostatique** qui est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

Chapitre 1 : Eléments d'analyse vectorielle

1. SYSTEMES DE COORDONNEES

En physique, selon la physionomie du problème étudié, on choisit entre trois systèmes de coordonnées.

1.1. Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont les coordonnées les plus faciles à manipuler. Un point M de l'espace est repéré par trois coordonnées : x_M, y_M, z_M .

Le repère est muni de trois vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ qui donnent l'orientation de celui-ci.

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire est noté : $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ (1.1)

On peut aussi définir une surface élémentaire (dans le plan xOy par exemple) : $dS = dx \cdot dy$ (1.2)

Enfin, on peut définir un volume élémentaire : $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ (1.3)

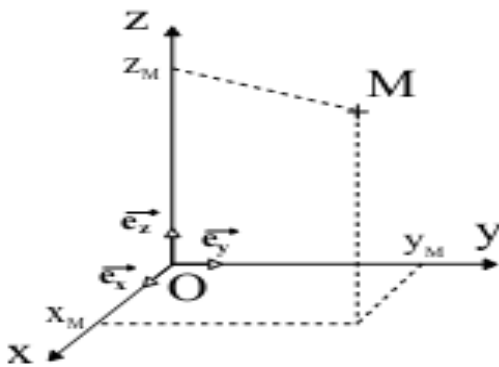


Figure 1.1 : Coordonnées cartésiennes

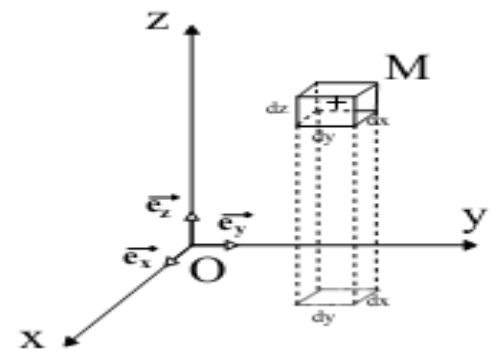


Figure 1.2 : Volume et surface élémentaires en coordonnées cartésiennes

1.2. Coordonnées cylindriques

Dans ce système de coordonnées, un point M de l'espace est repéré par un rayon ρ , un angle φ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon OM sur le plan xOy), et une hauteur z (par rapport au plan xOy).

On définit aussi trois vecteurs unitaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ que l'on place généralement au niveau du point M ou de son projeté sur le plan xOy.

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit : $\vec{dl} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$ (1.4)

Ainsi une surface élémentaire s'écrit : $dS = d\rho \cdot \rho d\varphi$ (1.5)

Et un volume élémentaire est défini par : $d\tau = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz$ (1.6)

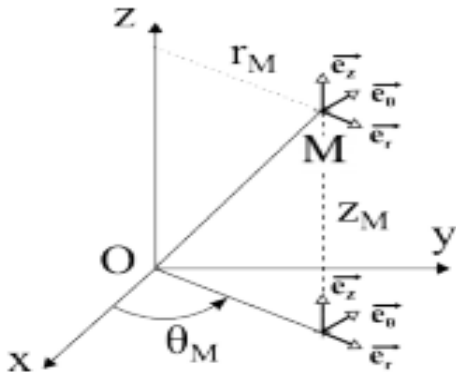


Figure 1.3 : Coordonnées cylindriques

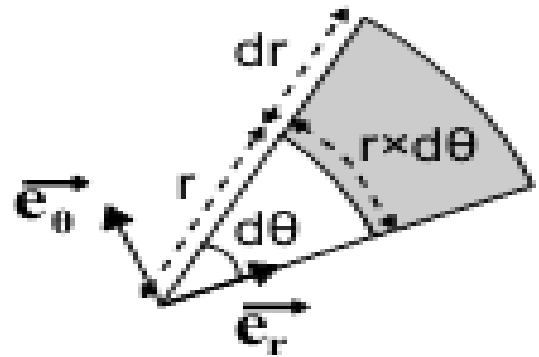


Figure 1.4 : Surface élémentaires en coordonnées cylindriques

1.3. Coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées, un point M de l'espace est repéré par un rayon $r = OM$, et deux angles : un angle θ (angle entre l'axe Oz et le rayon OM), un angle φ (angle entre l'axe Ox et la projection du rayon OM sur le plan xOy).

Trois vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ donnent l'orientation du repère.

Dans ce système de coordonnées, un déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{e}_\varphi \quad (1.7)$$

Une surface élémentaire s'écrit : $dS = r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi$ (1.8)

Et un volume élémentaire est défini par : $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi$ (1.9)

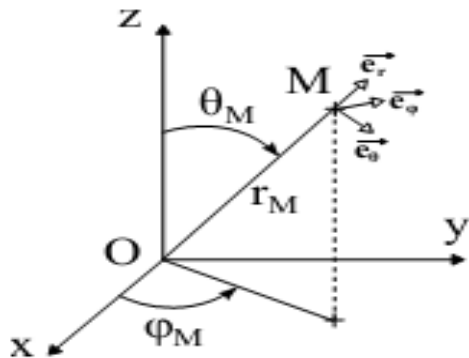


Figure 1.5 : Coordonnées sphériques

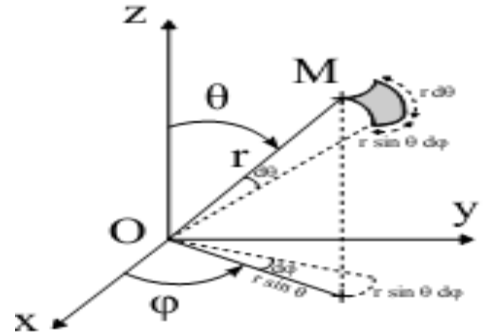


Figure 1.6: Surface élémentaires en coordonnées cylindriques

2. OPERATEURS DIFFERENTIELS

2.1. Champ scalaire-champ vectorielle

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.1)$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z) \quad (1.2)$$

Le vecteur $\vec{v}(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z)\vec{e}_x + v_y(x, y, z)\vec{e}_y + v_z(x, y, z)\vec{e}_z \quad (1.3)$$

2.2. Gradient d'un champ scalaire

Le gradient noté \overrightarrow{grad} est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant \vec{e}_x ,

$$\vec{e}_y \text{ et } \vec{e}_z \text{ les dérivées partielles de } f(M) \text{ par rapport à } x, y \text{ et } z \text{ respectivement : } \overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

En utilisant l'opérateur vectoriel nabla défini par $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, le gradient d'un champ scalaire f s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \quad (1.4)$$

le vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Le gradient donne la variation maximale de f avec la distance au point considéré, il pointe vers les plus fortes valeurs de f .

2.3. Divergence d'un champ vectoriel

La divergence notée (div) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

2.4. Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté \overrightarrow{rot} d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (1.6)$$

2.5. Laplacien

L'opérateur Laplacien est défini par :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.7)$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire.

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point est par définition un champ scalaire défini par :

$$\Delta f = div[\overrightarrow{grad}(f)] \text{ soit } \Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

Il peut également s'appliquer à un champ de vecteur.

Le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel \vec{v} est un champ vectoriel :

$$\Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{v})] - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})] \text{ soit } \Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \vec{e}_x \Delta v_x + \vec{e}_y \Delta v_y + \vec{e}_z \Delta v_z \quad (1.9)$$

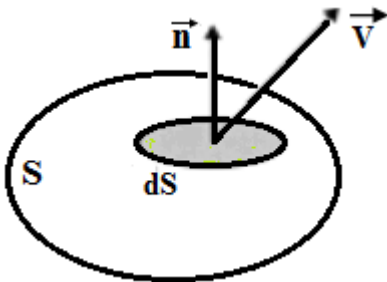
Remarque : L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.

3. FLUX ET CIRCULATION D'UN CHAMP DE VECTEUR

3.1. Flux d'un champ de vecteur a travers une surface

3.1.1. Définition

Soit une surface quelconque S et dS un élément de cette surface. \vec{n} est un vecteur unitaire normale à l'élément de surface. Le vecteur élément de surface s'écrit : $\vec{dS} = \vec{n}dS$.



Le flux élémentaire ($d\phi$) du champ de vecteurs \vec{V} à travers dS est défini par : $d\phi = \vec{V} \cdot \vec{dS} = \vec{V} \cdot \vec{n}dS$

• Le flux (ϕ) du champ de vecteurs \vec{V} est :

$$\phi = \int_S \vec{V} \cdot \vec{dS} = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS = \int_S V \cos(\theta) dS \quad (1.10)$$

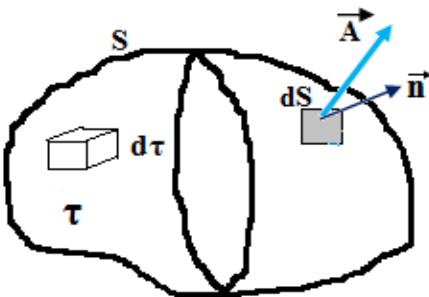
Pour une surface fermée (sphère, ellipsoïde, ...) on écrit que le flux est

égal à : $\phi = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS$

Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

3.1.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Ce théorème peut être considéré comme une définition de la divergence d'un champ de vecteur.



Selon le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux total de tout vecteur \vec{A} à travers une surface S entourant le volume τ est égal à la divergence du vecteur \vec{A} dans le volume τ :

τ étant un volume limité par une surface fermée S on a :

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_{\tau} \text{div}(\vec{A}) d\tau \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow d\phi = \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

La divergence donne la différence entre le flux sortant et le flux entrant :

- Si $\text{div}(\vec{A}) > 0$ alors les lignes de champ s'écartent ou « divergent »
- Si $\text{div}(\vec{A}) < 0$ alors les lignes de champ « convergent »

Si $\text{div}(\vec{A}) = 0$ alors les lignes de champ sont parallèles ; on dit aussi qu'il y a conservation du flux du champ de vecteur \vec{A} .

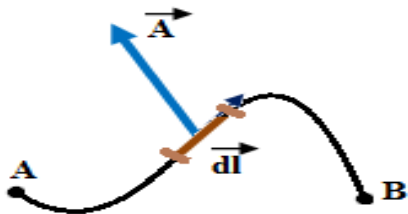
3.2. Circulation d'un champ de vecteur

3.2.1 Définition

Soit \vec{A} un vecteur mobile et $d\vec{l}$ un élément de longueur.

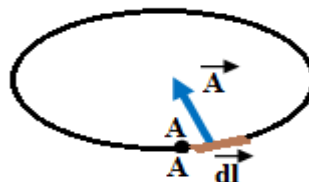
On définit la circulation C du vecteur \vec{A} le long de la courbe (AB) par :

$$C = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.12)$$

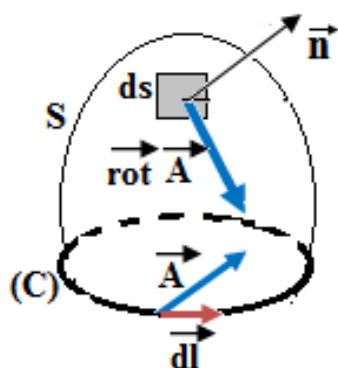


Sur un contour fermé, la circulation du vecteur \vec{A} s'écrit :

$$C = \oint_{A \rightarrow A} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



3.2.2 Théorème de Stokes



La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

S étant une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé (C) et limité par lui on peut écrire :

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow dC = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

Si $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ le champ vectoriel possède une composante tournante.

Le théorème de Stokes peut être considéré comme une relation de définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

Chapitre 2 : Champ et potentiel électrostatiques

Objectifs spécifiques :

OS1 : Appliquer la loi de Coulomb pour la résolution de cas pratiques

OS2 : Déterminer les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatiques créé par une ou plusieurs charge (s) ponctuelle (s), d'un doublet électrostatique ;

OS3 : Déterminer les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatiques créé par une distribution continue de charges.

Introduction

Electrostatique : étude de l'interaction des charges électriques au repos placées dans le vide.

Le champ électrique est appelé champ électrostatique s'il est invariant dans le temps.

Le potentiel électrostatique est une grandeur scalaire intimement lié au champ électrostatique. Cette grandeur permet de caractériser le champ électrostatique et est parfois plus simple à exploiter.

I. Loi de Coulomb

1) Charges électriques

Dans tout phénomène physique intervient un « objet » dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge électrique, mesurée en coulomb (C) dans le système international.

Interaction gravitationnelle : se manifeste entre des corps qui ont une masse “ m ”.

Interaction électrostatique : se manifeste entre particules chargées électriquement donc ayant une charge électrique “ q ”.

Charge électrique d'un corps = quantité d'électricité portée par ce corps.

$$q = n \cdot e, \text{ avec } q \text{ en coulomb (C) et } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Pour un électron $q = -e$ et pour un proton $q = +e$

Toute charge électrique est un multiple de la charge élémentaire.

Il existe deux types de charges électriques

Corps électrisé de dimensions assez petites assimilable à un point dans l'espace : **charge ponctuelle**

Cas contraire : **distribution continue de charges**

Il existe trois types de distribution continue de charges

❖ **Distribution volumique de charges**

On considère un volume τ qui contient la charge totale q .
Un élément de volume $d\tau$ contient une portion de la charge q notée dq .

Densité volumique de charge ρ : charge par unité de volume.

$$\rho(M) = \frac{q}{\tau} = \frac{dq}{d\tau} \Rightarrow q = \int_{\tau} \rho d\tau$$

Unité $C.m^{-3}$

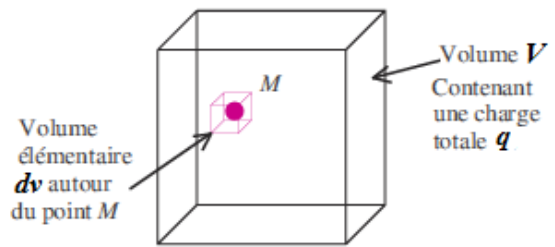


Figure 2.1 : Volume contenant une charge

❖ Distribution surfacique de charges

Soit une surface S qui contient une charge totale q .
Un élément de surface dS contient une portion de la charge q notée dq .

Densité surfacique de charge σ : charge par unité de surface.

$$\sigma(M) = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS} \Rightarrow q = \int_S \sigma dS$$

Unité $C.m^{-2}$.

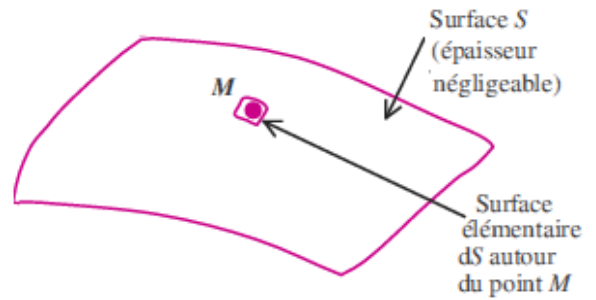


Figure 2.2 : Surface portant une charge

❖ Distribution linéique de charges

Considérons une ligne L qui porte la charge totale q . dl une portion de la ligne porte la charge dq .

Densité linéique de charge λ : charge par unité de longueur.

$$\lambda(M) = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dl} \Rightarrow q = \int_L \lambda dl$$

Unité $C.m^{-1}$.

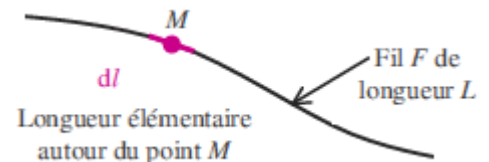


Figure 2.3 : Fil portant une charge

2) Loi de coulomb, interaction électrostatique

Enoncé : Soient deux charges q_1 et q_2 placées dans le vide respectivement aux points A_1 et A_2 . Pour un observateur au repos, la charge q_1 exerce sur q_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ appliquée au point A_2 , portée par la droite $(A_1 A_2)$ et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

De même q_2 exerce sur q_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ appliquée au point A_1 .

Illustration



Figure 2.4 : Attraction ou répulsion des charges selon leurs signes

La force d'interaction est attractive si les charges sont de signes contraires et répulsive si elles sont de même signe.

Formulation mathématique

L'expression vectorielle de la loi de Coulomb s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

avec $\vec{F}_{1/2}$ force exercée par la charge 1 sur la charge 2 dont l'intensité est en Newton (N)

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ S.I}$: constante de Coulomb, $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ S.I}$: permittivité électrique du vide

q_1, q_2 : charges électriques en Coulomb (C), r : distance entre les deux charges en mètre (m)

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{\|\overrightarrow{A_1 A_2}\|}$ vecteur unitaire qui permet de donner la direction de la force d'interaction.

Le principe des actions réciproques permet d'écrire: $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Le module ou (l'intensité) de la force électrique est donné(e) par l'expression :

$$F_{1/2} = F_{2/1} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Remarque : la loi de coulomb est une loi empirique et c'est le principe fondamental de l'électrostatique.

II. Champ et potentiel électrostatiques

1) Notion de champ

1.1 Les champs en physique

Un champ est une grandeur physique qui dépend de la position et du temps.

Il existe deux types de champ

Champ scalaire défini par des scalaires
Exemple : le champ de température $T(M, t)$ et le champ de pression $P(M, t)$

Champ vectoriel défini par les coordonnées d'un vecteur dans un espace à trois dimensions
Exemple : le champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$

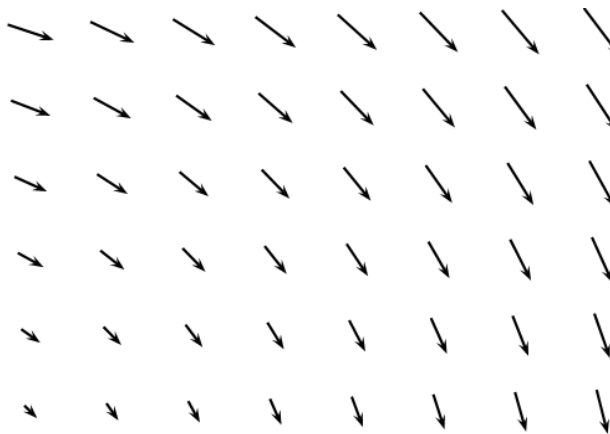


Figure 2.5 : Exemple de champ vectoriel

On passe aux **lignes de champ** en traçant les courbes qui sont en tout point tangentes aux vecteurs. Sur la **figure 2.6** on dessine les lignes de champ pour le champ vectoriel de la **figure 2.5**.

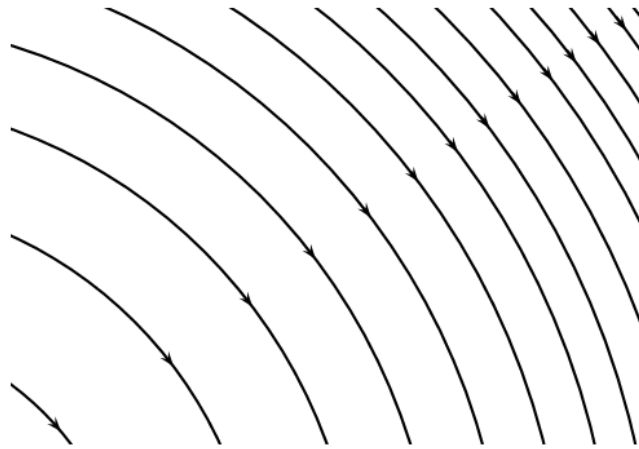


Figure 2.6 : Exemple de lignes de champ vectoriel.

1.2 Un champ vectoriel permet de décrire une interaction à distance

Lorsqu'on approche un aimant d'une pièce de 10, 25 ou 50 francs, la pièce est attirée par l'aimant. Mais comment ? Il n'y a rien qui relie les deux objets, aucun fil visible. On utilise le concept de champ pour interpréter cette action à distance : l'aimant crée un **champ magnétique** en tout point de l'espace autour de lui et c'est ce champ qui a une influence sur la pièce métallique.

- ❖ Le Soleil crée dans tout le système solaire un **champ gravitationnel** qui agit sur les planètes.
- ❖ L'interaction électrostatique de deux corps électrisés est due au **champ électrostatique**.

Dans ces théories les **champs (électrostatique, magnétique, de gravitation)** sont les intermédiaires qui transmettent les **actions mécaniquement observables**. Ils contiennent une certaine énergie, fournie à l'objet qui se met en mouvement.

2) Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge ponctuelle q_1 au point A permet de définir deux propriétés en un point M de l'espace environnant :

- une propriété vectorielle, le champ électrostatique.
- une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près).
- et une relation entre les deux propriétés

2.1 Champ électrostatique

La seule présence d'une charge électrique q_1 dans une région de l'espace suffit à rayonner un champ électrostatique dont l'intensité dépend de cette charge.

Une charge q_1 est située en A, rayonne en un point M situé à une distance r , le champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{AM^2} \vec{u}$$

\vec{E} : vecteur champ électrostatique dont l'intensité est exprimée en volt par mètre ($V.m^{-1}$)

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ vecteur unitaire qui donne la direction du vecteur champ électrostatique



Figure 2.7.a : Charge source positive, champ électrostatique centrifuge

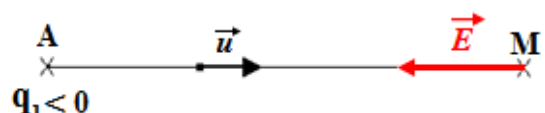


Figure 2.7.b : Charge source négative, champ électrostatique centripète

Ainsi, si une charge q_2 est placée au point M , elle subit la force électrostatique : $\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}(M)$

Remarque :

Le champ et la force électrostatiques sont des grandeurs vectorielles définies par quatre caractéristiques : le point d'application ; la direction ; le sens et le module ou intensité.

2.2 Potentiel électrostatique

On montre que le potentiel électrostatique créé par une charge q en un point M de l'espace est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

Le potentiel électrostatique est une grandeur scalaire définie à une constante additive près.

Si on considère que le potentiel est nul à l'infini, la constante est nulle et on a :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'unité du potentiel est le volt (V).

3) Champ et potentiel électrostatiques créés par un ensemble de charges ponctuelles

Le **principe de superposition** dit que le champ électrostatique (le potentiel électrostatique) créé en un point M de l'espace par un ensemble de 2 charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement aux points M_1 et M_2 est la somme vectorielle des champs électrostatiques (somme scalaire des potentiels électrostatiques) créés par chacune des charges au point M .

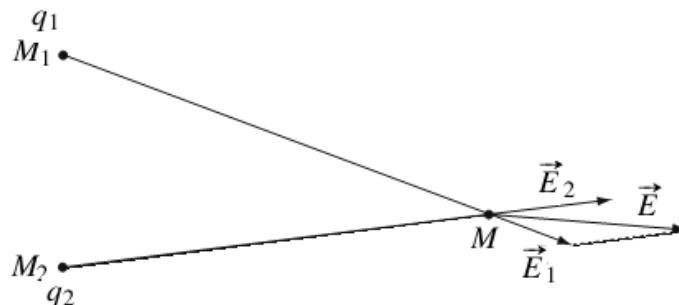


Figure 2.8 : Principe de superposition

Le champ et le potentiel électrostatiques résultant au point M s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \text{ et } V(M) = V_1 + V_2$$

Plus généralement le **principe de superposition** s'énonce de la manière suivante : le champ électrostatique (le potentiel électrostatique) créé en un point M de l'espace par un ensemble de n charges ponctuelles q_i placées respectivement aux points P_i est la somme vectorielle des champs électrostatiques (somme scalaire des potentiels électrostatiques) créés par chacune des charges au point M :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \text{ et } V(M) = \sum_{i=1}^n V_i$$

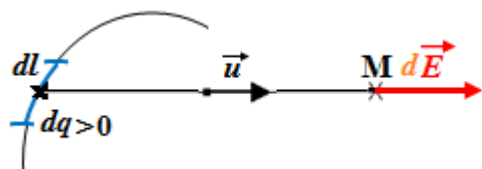
4) Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution linéique de charges

Pour une distribution linéique de charges, un petit élément de longueur dl portant la charge dq crée en un point M respectivement un champ et un potentiel électrostatiques élémentaires $d\vec{E}$ et dV avec

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$ et $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$. Ainsi, le champ et le potentiel électrostatiques total s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad V(M) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} + cste \quad \text{avec} \quad dq = \lambda dl$$

L'intégrale doit être étendue à tout l'espace occupé par la charge.



$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{PM} + Cste$$

Figure 2.9 : Distribution linéique de charges

Le **principe de superposition** s'applique aussi dans le cas des distributions continues de charges.

5) Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

On montre que le champ électrostatique est un champ de gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Cette relation est appelée relation locale entre le champ et le potentiel.

Elle est vérifiée en chaque point de l'espace où le champ et le potentiel électrostatiques peuvent être définis. Elle permet également de déterminer le potentiel lorsque le champ électrostatique est connu et réciproquement.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Remarque :

1. le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique
2. le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants
3. le champ électrostatique s'exprime également en V/m : $E = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{U}{d}$

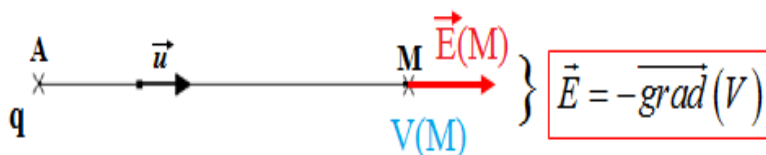


Figure 2.10 : Illustration de la relation locale entre le champ et le potentiel électrostatiques en un point M

6) Lignes de champ électrostatique et surface équipotentielle

6.1 Lignes de champ électrostatique

De manière générale, la représentation d'un champ vectoriel fait appel à la notion de **ligne de champ**.

La présence d'un champ électrostatique est difficile à visualiser. Grâce aux lignes de champ, on a une idée de la cartographie du champ électrostatique dans une région de l'espace.

Un **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrostatique, en chaque point de celle-ci, le champ électrostatique est tangent.



Figure 2.11 : Lignes de champ

Les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en un point P sont des droites passant par le point P. On dit que le champ électrostatique produit par une charge électrique est radial. *Les lignes de champ sont divergentes si la charge est positive et convergentes si la charge est négative.*

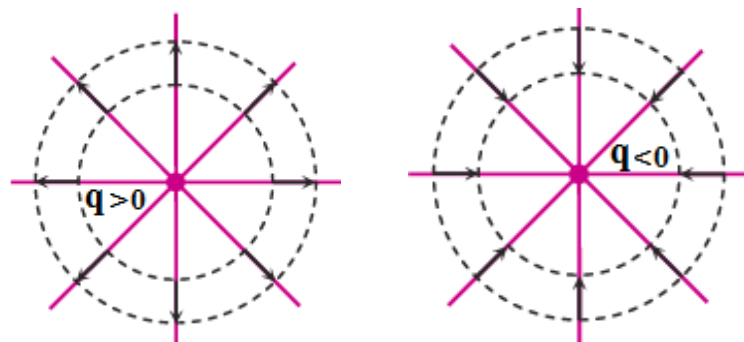


Figure 2.12 : Lignes de champ d'une charge ponctuelle

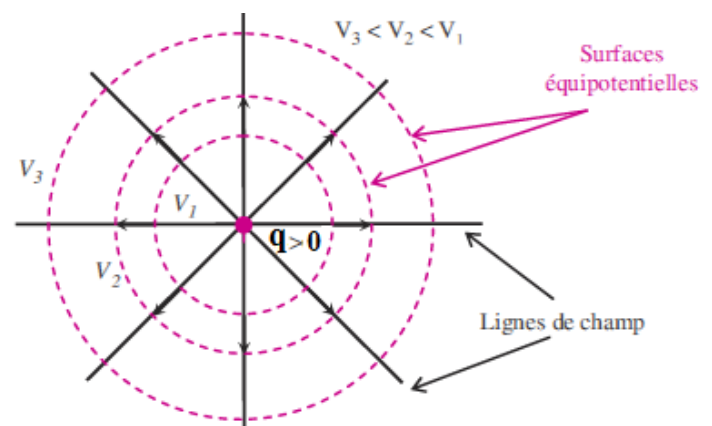
6.2 Surface équipotentielle:

Une surface équipotentielle correspond à l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel. Elle est donc définie par : $V(M) = \text{constante}$.

Les lignes de champ électrostatique sont normales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Pour une charge ponctuelle q , les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

Les lignes de champ radiales sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et dirigées vers les potentiels décroissants.



III. Énergie potentielle électrostatique

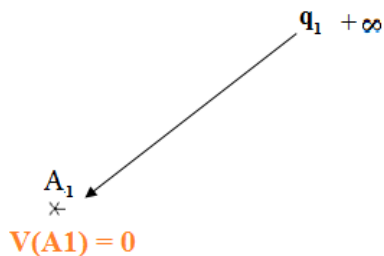
1) Energie électrostatique d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique

Une charge q placée dans un champ électrostatique en un point M où le potentiel est $V(M)$, possède de l'énergie électrostatique ou énergie potentielle électrique :

$$E_p(M) = qV(M)$$

2) Énergie potentielle d'interaction d'un système de charges ponctuelles

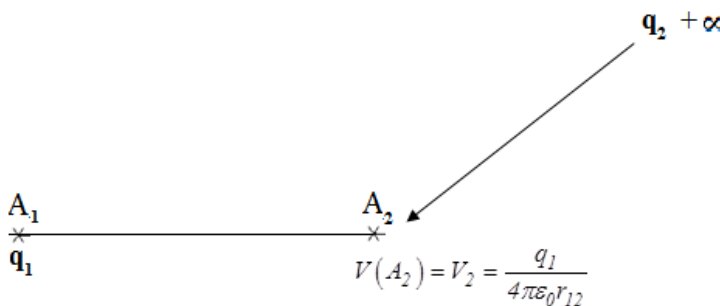
Soient q_1, q_2, \dots, q_n des charges électriques placées respectivement aux points A_1, A_2, \dots, A_n . Chaque charge est soumise à l'action du champ électrostatique créée par toutes les autres.



On amène dans l'espace vide la charge q_1 , de l'infini où le potentiel est nul, au point A_1 où le potentiel est également nul puisqu'il n'y pas d'autre charges.

L'énergie potentielle acquise par la charge q_1 est :

$$E_{p_1} = q_1 V(A_1) = 0$$

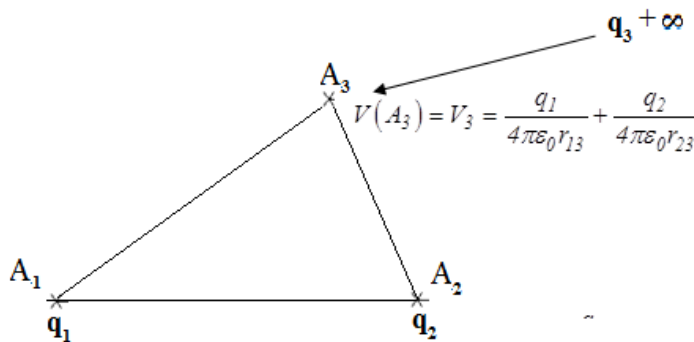


On amène q_2 de l'infini au point A_2 où règne le potentiel V_2 créée par la charge q_1 placée au point A_1

La charge q_2 acquiert l'énergie :

$$E_{p_2} = q_2 V(A_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

avec $r_{12} = A_1 A_2$



La charge q_1 étant au point A_1 et la charge q_2 au point A_2 , on amène la charge q_3 de l'infini au point A_3 où le potentiel est créé par les charges q_1 et q_2 . La charge q_3 acquiert donc l'énergie :

$$E_{p_3} = q_3 V(A_3) = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

avec $r_{13} = A_1 A_3$ et $r_{23} = A_2 A_3$

L'énergie acquise par l'ensemble des charges est : $E_p = \sum_{i=1}^3 E_{p_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$ soit

$$E_p = \sum_{i=1}^3 E_{p_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

De manière générale on écrit :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Remarque : Travail et énergie potentielle d'interaction

Lorsqu'un opérateur déplace une charge d'un point I (initial) vers un point F (final), les vitesses initiale et finale étant nulles, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c(\text{finale}) - E_c(\text{initiale}) = W(\vec{F}_{app}) = W_{IF}(\vec{F}_{elect}) + W_{op} = 0 \text{ soit}$$

$$W_{op} = -W_{IF}(\vec{F}_{elect}) = E_P(\text{finale}) - E_P(\text{initiale})$$

IV. Dipôle électrostatique

Les dipôles ont une importance particulière en chimie, car dans les molécules, les liaisons entre deux atomes d'électronégativités différentes peuvent être assimilées à des dipôles (H_2O , HCl ...).

1) Définition

Un dipôle électrostatique est un doublet composé de deux points portant des charges opposées: le point B qui porte la charge $+q$ et le point A qui porte la charge $-q$. La distance AB est très petite par rapport à la distance r à laquelle on étudie le champ et le potentiel électrostatiques créés par les deux charges.

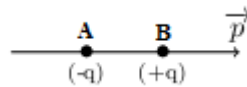


Figure 2.13 : Dipôle électrostatique et moment dipolaire

On associe une grandeur à ce dipôle, appelée moment dipolaire et définie par : $\vec{p} = q\vec{AB}$

L'unité du moment dipolaire est le coulomb-mètre (C.m) mais on utilise une autre unité plus petite qui est le Debye (D) $1 D = 3,336.10^{-30} C.m$. La molécule d'eau possède un moment dipolaire de 1,85 D.

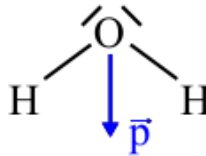
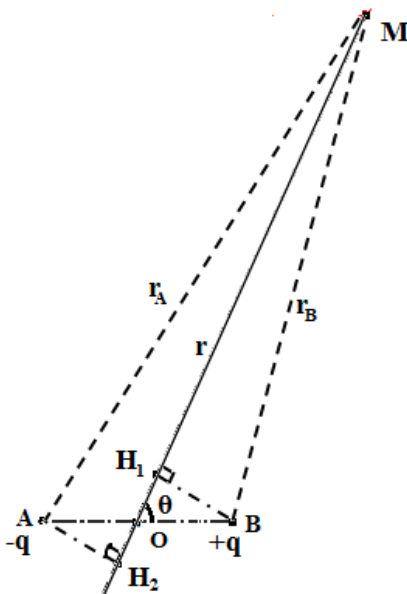


Figure 2.14 : Molécule d'eau et moment dipolaire

2) Potentiel électrostatique créée à grande distance par un dipôle



Principe de superposition

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} \right)$$

On veut exprimer le potentiel en fonction de la distance $OM = r$ et de l'angle θ . Il faut donc exprimer r_A et r_B en fonction r et de l'angle θ .

On projete orthogonalement le point A sur la droite (OM) et on obtient le point H_2 . La projection orthogonale du point B sur la droite (OM) donne le point H_1 .

Comme $OM \gg a$ ($AB=a$), on assimile les triangles BMH_1 et AMH_2 à des triangles isocèles avec $H_1M = BM = r_B$ et $H_2M = AM = r_A$.

- Calcul de r_A : $r_A = H_2M = H_2O + OM = H_2O + r$

$$\cos(\theta) = \frac{OH_2}{OA} = \frac{OH_2}{a/2} \text{ soit } OH_2 = \frac{a}{2} \cos(\theta) \text{ et } H_2M = r + \frac{a}{2} \cos(\theta) \text{ soit } r_A = r + \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

- Calcul de r_B : $OM = OH_1 + H_1M$ ou $H_1M = OM - OH$ soit $r_B = H_1M = r - OH_1$

$$\cos(\theta) = \frac{OH_1}{OB} = \frac{OH_1}{a/2}, \Rightarrow OH_1 = \frac{a}{2} \cos(\theta) \text{ et } r_B = r - OH_1 = r - \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

- Calcul de $(r_A - r_B)$

$$r_A - r_B = \left(r + \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) - \left(r - \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) = a \cos(\theta); \quad r_A - r_B = a \cos(\theta)$$

- Calcul de $r_A r_B$

$$r_A \cdot r_B = \left(r + \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) \cdot \left(r - \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) = r^2 - \left(\frac{a}{2} \cos(\theta)\right)^2$$

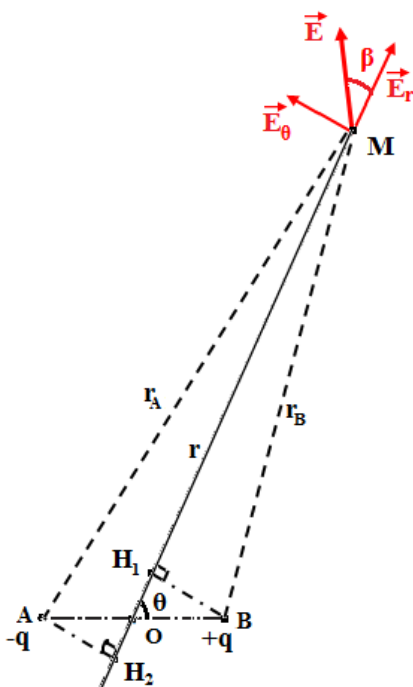
$$\text{Or: } a \ll r \Rightarrow a^2 \ll r^2 \text{ et } \forall \theta, \cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) \leq 1$$

$$\text{On déduit donc que : } \frac{a^2}{4} \cos^2(\theta) \ll r^2 \text{ soit } r_A \cdot r_B \approx r^2$$

$$\text{Finalement : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a \cos(\theta)}{r^2} \right) = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(M) = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ ou encore } V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ avec } p = qa$$

3) Champ électrostatique crée à grande distance par un dipôle électrostatique



On utilise la relation locale entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ en coordonnées polaires. Dans l'expression du potentiel ci-dessus, les deux variables sont : r et θ .

- ✓ Composante radiale

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- ✓ Composante orthoradiale

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- ✓ Expression du champ électrostatique : $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$

$$\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \text{ ou } \|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2(\theta)}$$

- ✓ Angle $\beta = (\vec{E}_r; \vec{E})$: $\text{tg}(\beta) = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}$ soit

$$\text{tg}(\beta) = \frac{1}{2} \text{tg}(\theta)$$

V. Calcul du champ électrostatique par la méthode intégrale : exemple du fil infini

Calculer le champ électrostatique créé par un fil infini portant une densité linéique de charges $\lambda > 0$ en un point M situé à la distance h du fil. En déduire le potentiel électrostatique.

Méthodologie

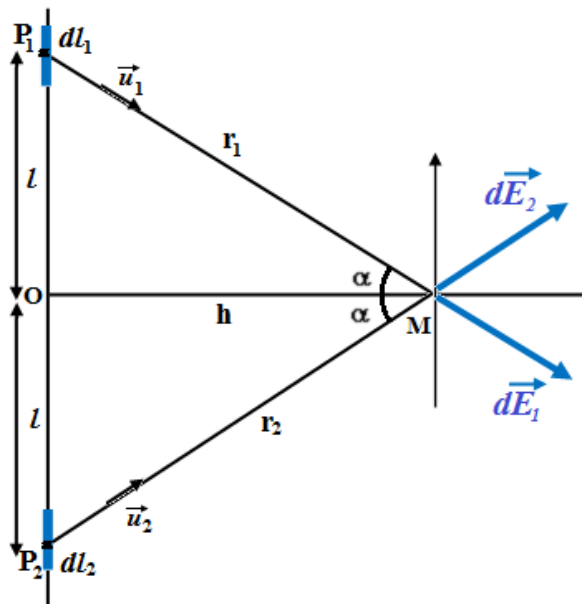
- 1) Faire la décomposition de la distribution en élément de charge dq assimilable à une charge ponctuelle.
- 2) Calculer le champ $d\vec{E}$ créé par la charge dq .
- 3) Intégrer sur l'ensemble de la distribution pour obtenir le champ total \vec{E} .

Application

- 1) décomposition de la distribution en élément de charge dq assimilable à une charge ponctuelle.

Soit dl_1 un élément de longueur qui porte la charge électrique élémentaire $dq_1 = \lambda dl_1$.

Soit dl_2 le symétrique de dl_1 par rapport à O. L'élément de longueur dl_2 porte la charge électrique élémentaire $dq_2 = \lambda dl_2$



- 2) Calcul du champ $d\vec{E}$ créée par chaque charge électrique élémentaire

La charge élémentaire $dq_1 = \lambda dl_1$ crée au point M le champ élémentaire $d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{P_1 M^2} \vec{u}_1$

La charge électrique élémentaire $dq_2 = \lambda dl_2$, crée au point M le champ élémentaire $d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_2}{P_2 M^2} \vec{u}_2$

La distribution de charge présente une symétrie par rapport à O.

$$\left. \begin{array}{l} dl_1 = dl_2 = dl \\ dq_1 = dq_2 = dq \\ P_1 M = P_2 M = r \end{array} \right\} \Leftrightarrow dE_1 = dE_2$$

Calcul du champ $d\vec{E}$ résultant : $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$

Projection de la relation vectorielle dans le repère $(M; x, y)$

$$\begin{cases} dE_x = dE_{I_x} + dE_{2x} = dE_I \cos(\alpha) + dE_2 \cos(\alpha) \\ dE_y = dE_{I_y} + dE_{2y} = -dE_I \sin(\alpha) + dE_2 \sin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dE_x = 2dE_I \cos(\alpha) \\ dE_y = 0 \end{cases}$$

Le champ résultant est donc porté par l'axe (M, x) et : $d\vec{E} = 2dE_I \cos(\alpha) \vec{e}_x$

3) Intégration sur l'ensemble de la distribution pour obtenir le champ total \vec{E} .

$$dE = 2dE_I \cos(\alpha) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos(\alpha) \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dl}{r^2} \cos \alpha$$

On a trois variables (dl, r, α) donc pour la résolution de l'intégrale, il faut ramener le problème à une variable.

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{l}{h} \Rightarrow l = h \text{tg}(\alpha) \text{ et } \frac{dl}{d\alpha} = h \frac{d[\text{tg}(\alpha)]}{d\alpha} = h \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \text{ soit } \frac{dl}{d\alpha} = \frac{h}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow dl = \frac{h}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\alpha)}{h^2}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{h}{\cos^2(\alpha)} d\alpha \frac{\cos^2(\alpha)}{h^2} \cos(\alpha) \text{ soit enfin que : } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos(\alpha) d\alpha$$

Bornes de l'intégrale en utilisant la relation $\text{tg}(\alpha) = \frac{l}{h}$

$$\text{Si } l \rightarrow +\infty, \text{ tg}(\alpha) \rightarrow +\infty \Rightarrow \alpha \rightarrow +\frac{\pi}{2} \text{ et Si } l \rightarrow 0, \text{ tg}(\alpha) \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos(\alpha) d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha$$

$$E(h) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \vec{e}_x$$

4) Calcul du potentiel électrostatique

A partir de la relation locale entre le champ et le potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ on obtient

$$E = -\frac{dV}{dh} \text{ soit } dV = -E(h)dh \text{ et } V(M) = -\int E(h)dh = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dh}{h} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(h) + Cste$$

VI. Applications

Application 1

1. Calculer l'intensité de la force de répulsion électrostatique entre deux électrons séparés d'une distance r .
2. Calculer l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle $F_g = G \frac{m^2}{r^2}$ de deux électrons séparés d'une distance r .

$$\text{On donne : } m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}, e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I}, G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$$

3. Comparer la répulsion électrostatique entre deux électrons à leur attraction gravitationnelle. Conclusion.
4. Quand devra-t-on tenir compte des forces de gravitation ?

Application 2

On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté a , et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y (**figure 1**)

On donne : $q_1 = q$, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$

- 1) Calculer le vecteur champ électrostatique créé au centre O du carré par les quatre charges.
- 2) Calculer le potentiel électrostatique V créé au point O par les quatre charges.

3) Calculer l'énergie potentielle électrostatique associée au système de quatre charges.

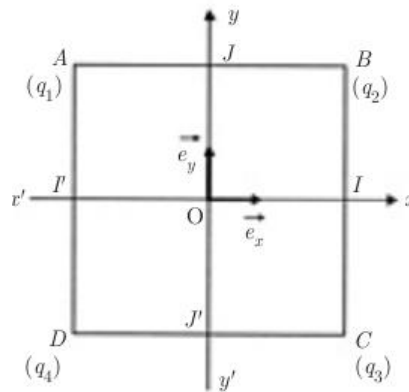


Figure 1

Consignes de travail

Application 2. 1) et 2) Utiliser le principe de superposition

3. Utiliser l'équation (2.7) en remplaçant les indices i et j par les lettres A, B, C et D . Lorsque $i = A$ alors j prend alors les valeurs B, C, D . Lorsque $i = B$ alors j prend les valeurs C, D mais pas la valeur A .

Chapitre 3 : Théorème de Gauss et applications

Objectifs spécifiques :

OS1 : Appliquer le théorème de Gauss pour la résolution de cas pratiques (fil rectiligne infini, plan, sphère et cylindre)

OS2 : Enoncer les équations locales de l'électrostatique

OS3 : Calculer la capacité de condensateurs (plan, sphérique et cylindrique)

Introduction

Le théorème de Gauss permet un calcul plus aisé du champ électrostatique à condition que les symétries de la distribution soient suffisantes.

I. Symétries et invariances

Le calcul analytique des champs électrostatiques créés par des distributions de charges n'est pas toujours aisé car selon la distribution continue de charges qui est à l'origine du champ, il apparaît dans le calcul du champ électrostatique des intégrales doubles ou triples (cas de distribution continue de charges).

De plus le champ électrostatique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

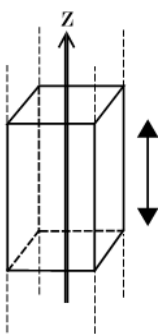
- En coordonnées cartésiennes : $\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$
- En coordonnées cylindriques : $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$
- En coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \phi)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi)\vec{e}_\phi$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{E}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales.

1) Invariances

Les invariances permettent d'éliminer des coordonnées (x, y, z) , (r, θ, z) et (r, θ, ϕ) dont dépend le champ électrostatique en un point M.

1.1 Invariance par translation selon un axe



Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution), alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement.

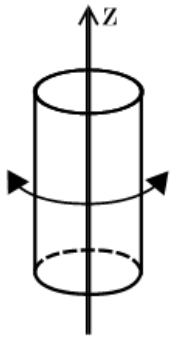
Si cet axe est Oz (système de coordonnées cartésiennes ou cylindriques), alors les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la coordonnée z.

Coordonnées cartésiennes $\vec{E}(M) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y + E_z(x, y)\vec{e}_z$

Coordonnées cylindriques $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta)\vec{e}_z$

Figure 3.1 : Invariance par translation

1.2 Invariance par rotation autour d'un axe



Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement.

Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la coordonnées θ (système de coordonnées cylindriques ou sphériques)

Coordonnées cylindriques $\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, z)\vec{e}_z$

Coordonnées sphériques $\vec{E}(M) = E_r(r, \phi)\vec{e}_r + E_\theta(r, \phi)\vec{e}_\theta + E_\phi(r, \phi)\vec{e}_\phi$

Figure 3.2 : Invariance par rotation

1.3 Exemples

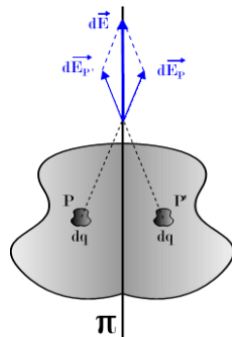
1. Une répartition de charges à symétrie cylindrique (**cylindre infini**) d'axe (Oz) est une répartition invariante par toute translation de vecteur parallèle à (Oz) et par toute rotation autour de (Oz) . En coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) , la densité volumique de charge est indépendante de θ et de z : $\rho(M) = \rho(r)$.
2. Une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O est une répartition invariante par toute rotation autour de n'importe quel axe qui passe par O . En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de centre O , la densité volumique de charge est indépendante de θ et ϕ : $\rho(M) = \rho(r)$.

2) Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries permettent **d'éliminer des composantes du champ électrostatique** (E_x, E_y, E_z) , (E_r, E_θ, E_z) et (E_r, E_θ, E_ϕ) .

En effet, un principe appelé **principe de Curie** dit que les symétries des causes (*que sont les charges, sources de l'électrostatique*) doivent se retrouver dans les effets (*que sont le champ et le potentiel électrostatiques*) : la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrostatique.

2.1 Plan de symétrie

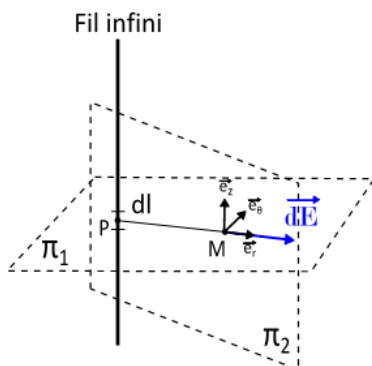


Si une distribution admet un plan de symétrie π (figure 1.16) alors le champ électrostatique appartient nécessairement à ce plan.

$$\vec{E} \in (\pi_s)$$

Figure 3.3 : Plan de symétrie et champ électrostatique

Exemple du fil infini



Le plan π_1 ou $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution (le fil) donc $d\vec{E} \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$d\vec{E}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r + dE_\theta(M)\vec{e}_\theta$$

Le plan π_2 ou $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est lui aussi un plan de symétrie pour la distribution donc

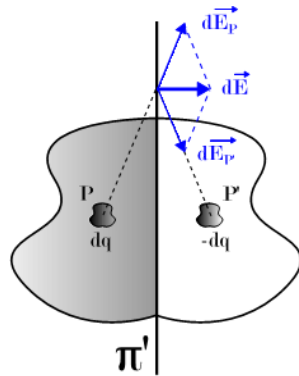
$$d\vec{E} \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) :$$

$$d\vec{E}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r + dE_z(M)\vec{e}_z$$

Conclusion : $d\vec{E} \in (\pi_1 \cap \pi_2) \Rightarrow d\vec{E}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r$

Figure 3.4 : Plan de symétrie du fil infini

2.2 Plan d'antisymétrie

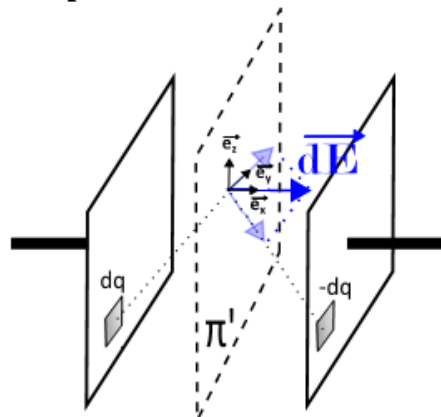


Si une distribution admet plan d'antisymétrie π' (figure 1.18) alors le *champ électrostatique est nécessairement orthogonal à ce plan*.

$$\vec{E} \perp (\pi_{AS})$$

Figure 3.5 : Plan d'antisymétrie et champ électrostatique

Exemple du condensateur plan



Le plan π' ou $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie pour le condensateur car les charges portées par ses deux plaques sont opposées. $d\vec{E} \perp (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Le champ électrostatique élémentaire s'écrit : $d\vec{E}(M) = dE_x(M)\vec{e}_x$

Figure 3.6 : Antisymétrie et condensateur

II. Théorème de Gauss

Ce théorème permettra un calcul plus aisé à condition que les symétries de la distribution soient suffisantes.

1) Enoncé

Le flux du vecteur champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée S est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la surface S .

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Remarque :

La surface S est une surface purement géométrique appelé surface de Gauss. Son choix se fait arbitrairement mais de façon judicieuse ce qui permet un calcul facile et rapide du champ électrostatique en tout point de l'espace. La surface passera par le point où l'on souhaite calculer l'expression du champ électrostatique.

On choisit :

- une surface sphérique si le système chargé présente une symétrie sphérique
- une surface cylindrique si le système chargé présente une symétrie cylindrique ou s'il est filiforme

2) Equations locales de l'électrostatique

Les équations dites « locales » font appel aux opérateurs vectoriels ; **gradient**, **divergence**, **rotationnel** et **laplacien**.

Loi	Forme intégrale	Théorème	Forme différentielle
Théorème de Gauss	$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	Green-Ostrogradsky	$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Circulation du champ électrostatique	$\oint_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Stokes	$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$
Equation de Poisson : Il s'agit d'exprimer en termes de potentiel le théorème de Gauss. $E = \text{fct}(\rho)$ et $E = \text{fct}(V)$ donc $V = \text{fct}(\rho)$???			$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Remarque :

En l'absence de charge $\rho = 0$ on a :

- $div(\vec{E}) = 0$ c'est l'équation d'isotropie, même propriété du milieu en toute direction en un point
- $\Delta V = 0$ c'est l'équation de **Laplace**

III. Application du théorème de Gauss

1) Fil rectiligne infinie portant une densité linéique $\lambda > 0$

Calculer le champ électrostatique en un point M situé à la distance r du fil

Résolution

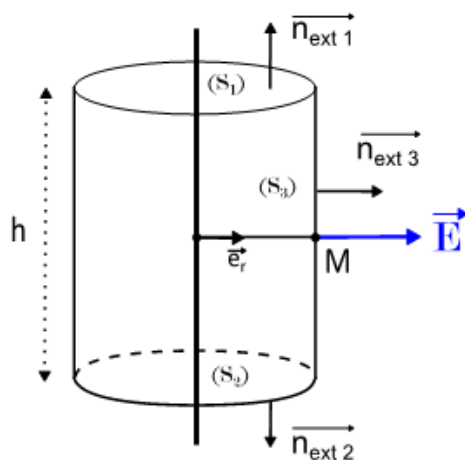
Calcul du champ électrostatique

- **Nature de la surface de Gauss**

Cylindre fermé de rayon r , de hauteur h (égale à la longueur du fil) et dont l'axe coïncide avec le fil.

Remarque : *Un cylindre a trois surfaces : deux surfaces de base et une surface latérale.*

- **Flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss**



Le flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss est le flux à travers les 3 surfaces du cylindre :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \int_{S1} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext1} dS_1 + \int_{S2} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext2} dS_2 + \int_{S3} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext3} dS_3$$

$$\vec{n}_{Sb1} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext1} = 0 \quad \vec{n}_{Sb2} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext2} = 0$$

$$\vec{n}_{ext3} // \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext3} = E$$

$$\phi = \phi_3 = \int_{S3} \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \int_S E dS$$

E étant un vecteur constant, on a :

$$\phi = \phi_3 = E \int_{S3} dS = E 2\pi r h$$

Figure 3.7 : Surface de Gauss et calcul de flux du champ électrostatique

- **Charges intérieures à la surface de Gauss**

Les charges intérieures à la surface de Gauss sont situées sur une longueur du fil identique à la hauteur h du cylindre :

$$\lambda = \frac{Q_{int}}{h} \Rightarrow Q_{int} = \lambda h$$

- **Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Finalement :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \text{ Intensité du champ électrostatique qui est une fonction de la variable } r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r \text{ Vecteur champ électrostatique}$$

On retrouve le même résultat que par la méthode intégrale du chapitre 1.

Remarque : Le théorème de Gauss permet de calculer l'intensité du champ électrostatique

2) Plan uniformément chargé de densité surfacique $\sigma > 0$

- **Nature de la surface de Gauss :** cylindre de hauteur h et de rayon r .
- **Flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss**

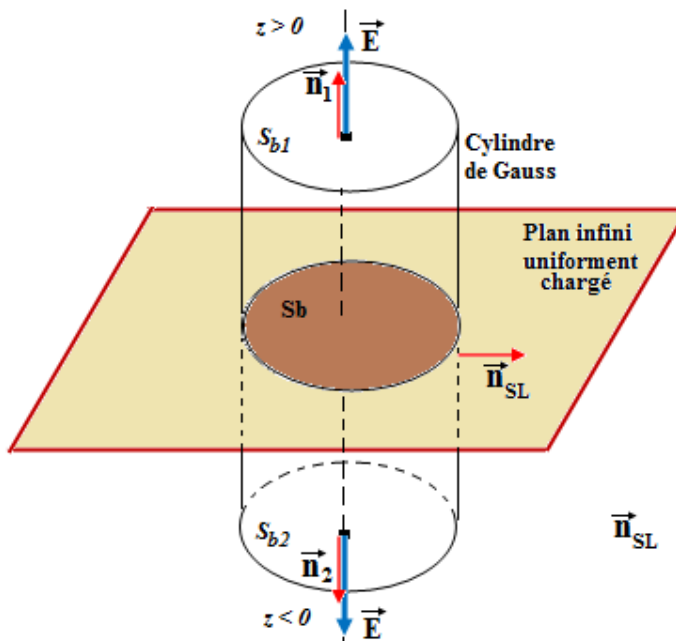


Figure 3.8 : Surface de Gauss et calcul de flux du champ électrostatique

Le flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss est le flux à travers les 3 surfaces du cylindre :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_{b2} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{n}_{SL} dS_L$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe du cylindre, d'où :

$$\vec{E} \perp \vec{n}_{SL} \Rightarrow \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{n}_{SL} dS_L = 0$$

$$\phi = \int_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_{b2} = \int_{S_{b1}} E dS_{b1} + \int_{S_{b2}} E dS_{b2}$$

E étant un vecteur constant et $S_{b1} = S_{b2} = S_b$, on a :

$$\phi = ES_b + ES_b = 2ES_b$$

- Charges intérieures à la surface de Gauss**

$$\sigma = \frac{Q_{int}}{S_b} \Rightarrow Q_{int} = \sigma S_b$$

- Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2ES_b = \frac{\sigma S_b}{\epsilon_0} \text{ soit } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

IV. Calcul de capacité de condensateurs

Dans ce paragraphe nous définirons la notion de conducteurs à l'équilibre électrostatique et d'influence électrostatique. Ce qui nous permettra de parler des condensateurs qui sont des composants électriques importants.

1) Conducteur

Un conducteur est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :

- Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres.
- Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

1.1 Conducteur isolé ou en équilibre électrostatique

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges libres de ce conducteur sont en moyenne au repos.

Condition d'équilibre du conducteur $\vec{F}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{int} = q\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$ car $q \neq 0$.

Le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul.

1.2 Conducteur et potentiel électrostatique

Quand le conducteur est à l'équilibre (plus de mouvement de charges), le champ à l'intérieur de celui-ci est nul.

$$\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{grad}(V_{int}) \Rightarrow \boxed{E_{int} = -\frac{dV_{int}}{dl}} \text{ avec } \boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{V_{int} = -\int \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l} = Cste}.$$

Le potentiel est uniforme au sein du conducteur, on dit aussi que **le conducteur est un volume équipotentiel**.

1.3 Répartition des charges

Le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul.

$$\text{div}(\vec{E}_{int}) = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0} \text{ avec } \boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\rho_{int} = 0}.$$

Il y a autant de charges positives que de charges négatives à l'intérieur du conducteur.

Si le conducteur est préalablement chargé alors **les charges se répartissent à la surface du conducteur**. On définit donc une densité surfacique de charge σ .

1.4 Phénomène d'influence de deux conducteurs chargés

1.4.1 Influence partielle

Soit un conducteur C_2 isolé, initialement neutre et un conducteur C_1 isolé et chargé positivement avec une densité surfacique $\sigma_1 > 0$. Le conducteur C_2 se trouve placé dans le champ électrostatique créée par le conducteur C_1 .

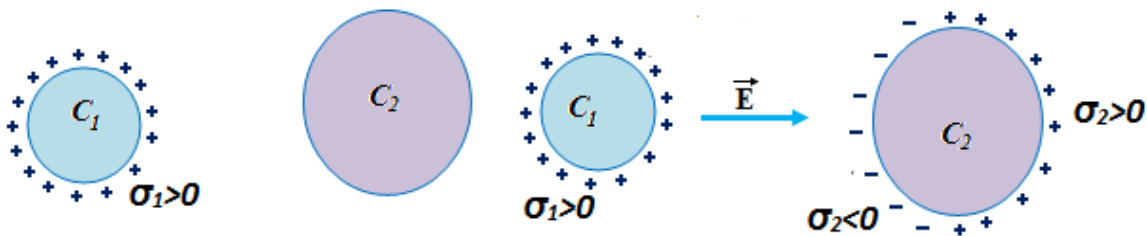


Figure 3.9 : Influence partielle

Les charges électriques vont se mouvoir dans le conducteur C_2 : les charges négatives (électrons libres) sont attirées par le champ électrostatique tandis que les charges positives (ions positifs) sont repoussées.

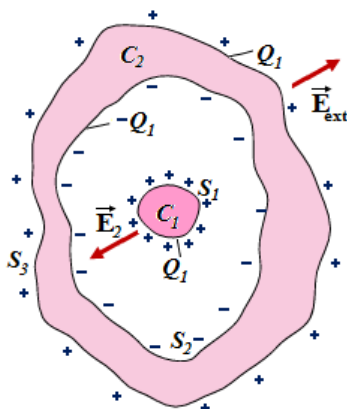
Il apparaît sur la surface de C_2 :

- une densité de charge $\sigma_2 < 0$ sur la partie faisant face à C_1
- une densité $\sigma_2 > 0$ sur la partie opposée.

Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de C_2 .

L'action de C_1 sur C_2 s'appelle influence électrostatique et elle conduit à une modification de la répartition des charges sur la surface de C_2 .

1.4.2 Influence totale



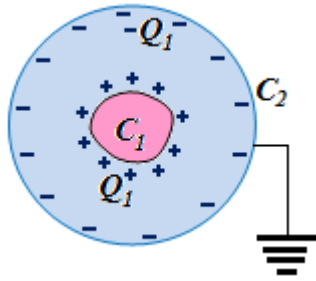
Il y a influence totale lorsque le conducteur C_2 entoure complètement le conducteur C_1 .

Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées : $Q_{S1} = -Q_{S2}$

Condition de neutralité électrique de C_2 : $Q_{S2} = -Q_{S3}$

Finalement : $Q_{S1} = -Q_{S2} = Q_{S3}$

Figure 3.10 : Influence totale



Remarque :

Si on relie la surface extérieure du conducteur C_2 à la Terre par un fil conducteur, toutes les charges positives qui s'y trouvent s'écoulent vers la Terre.

Figure 3.11 : Conducteurs en influence totale reliés à la Terre

2) Les condensateurs

2.1 Définition

On appelle condensateur l'ensemble de deux conducteurs placés dans des conditions d'influence totale. Les deux conducteurs C_1 et C_2 constituent les armatures du condensateur. C_1 est l'armature interne et C_2 l'armature externe.

2.2 Capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur caractérise l'aptitude du condensateur à accumuler des charges électriques sur ses armatures lorsqu'il est soumis à une tension ($V_1 - V_2$).

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Q charge du condensateur = charge portée par l'armature interne.

V_1 potentiel de l'armature interne et V_2 celui de l'armature externe

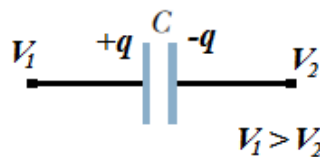


Figure 3.12 : Symbole d'un condensateur

La capacité d'un condensateur dépend de la géométrie des armatures.

La capacité se mesure en *farads* (F) mais cette unité est beaucoup trop grande pour les emplois usuels ; on utilise surtout des sous - multiples :

le *microfarad* (μF): $1 \mu F = 10^{-6} F$, le *nanofarad* (nF): $1 nF = 10^{-9} F$ et le *picofarad* (pF): $1 pF = 10^{-12} F$.

2.3 Capacité d'un condensateur plan

Un condensateur est plan lorsque les armatures sont des conducteurs plans suffisamment rapprochés pour les considérer sous influence totale. Les deux plans, (P_1) et (P_2) de même surface S et séparés par une distance (e), portent respectivement des densités surfaciques de charges opposées $+\sigma$ et $-\sigma$.

On a montré dans le chapitre précédent que l'intensité du champ électrostatique créé par un plan infini est

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

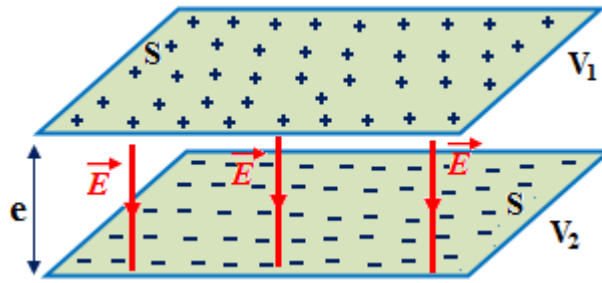


Figure 3.14 : Condensateur plan

a) Champ électrostatique entre les armatures

Le principe de superposition permet d'écrire : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}$

Le champ électrostatique entre les armatures est uniforme et à pour module $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

b) Expression de la charge Q

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow \boxed{Q = \epsilon_0 S E}$$

c) Expression de la différence de potentiel ($V_1 - V_2$)

On suppose que l'armature 1 de potentiel V_1 est à l'abscisse x_1 et l'armature 2 de potentiel V_2 à l'abscisse x_2 .

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -E \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = eE} \text{ avec } (x_2 - x_1 = e)$$

d) La capacité du condensateur plan :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S E}{eE} = \epsilon_0 \frac{S}{e} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{e}}$$

Remarque :

Si on remplace le vide par un diélectrique (mica, céramique, verre, ...) de constante diélectrique ϵ_r on a :

$$C = \epsilon \frac{S}{e} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{e} = \epsilon_r C_0$$

avec ϵ_r est la permittivité relative du diélectrique.

On multiplie la capacité à vide du condensateur par un facteur $\epsilon_r > 1$.

En effet, le diélectrique a la propriété de se polariser sous l'action d'un champ électrique. Il crée alors un champ opposé au champ créé au sein du condensateur. Le champ électrique global diminue alors entre les armatures et la tension entre celles-ci diminue ce qui a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur, pour une charge électrique d'armature donnée.

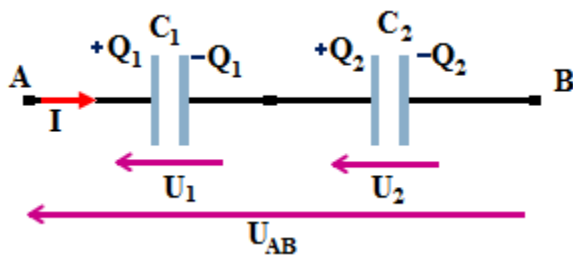
Énergie potentielle électrostatique d'un condensateur

$$E_P = \frac{1}{2} Q (V_A - V_B) = \frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

V. Association de condensateurs

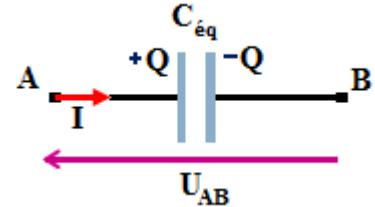
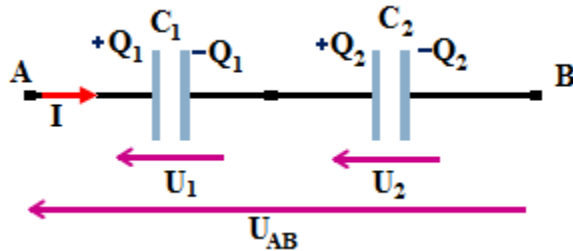
1) Association en série

- Charge Q des armatures



Considérons le montage ci-contre constitué de deux condensateurs C_1 et C_2 montés en série. On a : $I = I_1 = I_2$
 La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire : $It = I_1t = I_2t$ ou encore $Q = Q_1 = Q_2$
 Toutes les charges des armatures sont identiques en valeur absolue.

- Capacité équivalente



$$U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (1)$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (2)$$

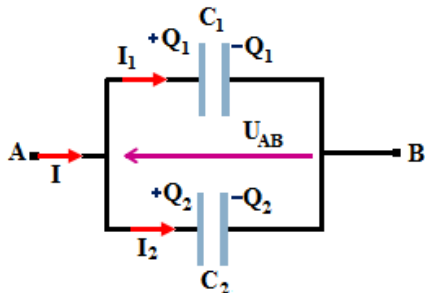
$$U_{AB} = U_{AB} \text{ (Équation (1) = (2))} \Leftrightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Généralisation :

Pour n condensateurs en série on a : $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

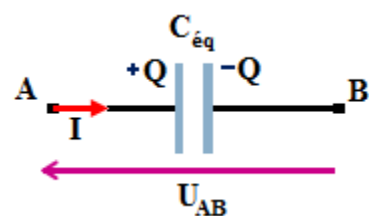
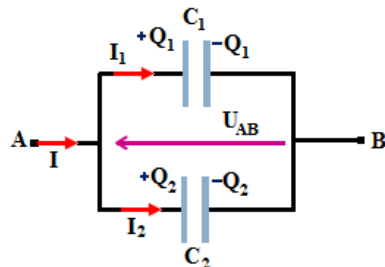
2) Association en parallèle

- Charge Q du condensateur



Pour le montage ci-contre les deux condensateurs C_1 et C_2 sont montés en parallèles. On a : $I = I_1 + I_2$
 La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire : $I = I_1 + I_2 \Leftrightarrow It = I_1t + I_2t \Leftrightarrow Q = Q_1 + Q_2$

- Capacité équivalente



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U_{AB} + C_2 U_{AB} \quad (1)$$

$$Q = C_{eq} U_{AB} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) étant identiques on a : $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$

Généralisation :

Pour n condensateurs en parallèle on a : $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$

Application

Un condensateur cylindrique est formé de deux armatures coaxiales de rayons R_1 et R_2 tel que $R_1 < R_2$ et de hauteur h . Le cylindre de rayon R_1 , appelée armature interne porte la densité surfacique de charges $+\sigma$ uniformément répartie sur sa surface latérale et est au potentiel V_1 . Le cylindre de rayon R_2 , appelée armature externe porte la densité surfacique de charges $-\sigma$ uniformément répartie sur sa surface latérale et est au potentiel V_2 . Les armatures sont séparées d'une distance e .

1. On considère un point M (entre les armatures) situé à la distance r de l'axe et tel que $R_1 < r < R_2$ et on se propose de calculer le champ électrostatique \vec{E} au point M .

1.1 Donner la nature de la surface de Gauss

1.2 Faire un schéma en faisant apparaître la surface de Gauss, le vecteur champ électrostatique \vec{E} et la normale à la surface de Gauss

1.3 Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss

1.4 Calculer la somme des charges intérieures à la surface de Gauss et déduire le champ électrostatique \vec{E} au point M .

2. Calculer la différence de potentiel ($V_1 - V_2$) entre les armatures en utilisant la relation locale entre le champ électrostatique et le potentiel

3. Déduire la capacité du condensateur cylindrique.

4. Que devient cette capacité lorsque e devient très petit devant R_1 ($R_2 - R_1 = e$)

On utilisera l'approximation suivante : pour $x \ll 1$ alors $\ln(1 + x) \approx x$

Consignes de travail

On pourra s'inspirer de la méthodologie de l'application 1 paragraphe 3 de ce chapitre.

Chapitre 4 : Champ magnétique et potentiel vecteur

Objectifs spécifiques :

OS1 : Appliquer la loi de Biot et Savart pour la résolution de cas pratiques,

OS2 : Appliquer le théorème d'Ampère pour la résolution de cas pratiques,

OS3 : Calculer le potentiel vecteur dans des cas pratiques

OS4 : Calculer les actions d'un champ magnétique

Introduction

La magnétostatique est l'étude des champs magnétiques créés par des courants dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps.

Dans ce chapitre, nous étudierons le champ magnétique créé par des courants filiformes, c'est à dire des courants passant dans des fils conducteurs dont l'épaisseur est négligeable.

Mais il existe aussi des courants surfaciques et des courants volumiques.

Les applications industrielles des champs magnétiques sont nombreuses. Aussi le calcul des champs magnétiques créés par des courants constitue une partie importante de l'électrotechnique, notamment depuis le développement de méthodes numériques performantes.

I. Notion de champ magnétique

Plusieurs expériences mettent en évidence les phénomènes magnétiques.

- deux aimants placés l'un à côté de l'autre se repoussent si les pôles identiques sont en regard ou s'attirent si les pôles contraires sont en regard.
- un fil parcouru par un courant électrique fait dévier l'aiguille d'une boussole ou toute autre aiguille aimantée placée à proximité (expérience d'Oersted 1820).
- deux fils parcourus par un même courant s'attirent ou se repoussent ; c'est l'interaction du courant électrique mise en évidence par Biot et Savart (1821).

Les phénomènes précédemment cités sont dus à l'existence d'un champ d'induction magnétique ou champ magnétique.

Il règne un champ magnétique dans une région de l'espace lorsqu'une aiguille aimantée y subit des actions mécaniques et prend une direction bien définie.

Le sens du champ magnétique est le sens \overrightarrow{SN} (Sud-Nord) de l'aiguille aimantée. Le champ magnétique est une grandeur vectorielle notée \vec{B} .

L'espace environnant un aimant ou une charge électrique en mouvement est le siège d'un champ magnétique.

Quelques ordres de grandeur de champ magnétique :

- Champ magnétique terrestre : $4,7 \times 10^{-5}$ T
- Aimant permanent : 0,1 T
- Electroaimant : 10 T

II. Loi de Biot et Savart

C'est à partir de l'étude des forces exercées entre conducteurs parcourus par des courants que Biot et Savart ont énoncé (1821) la loi qui porte leur nom et qui permet d'exprimer le champ magnétique créé par un courant en un point M de l'espace.

1) Champ magnétique créé par un conducteur filiforme parcouru par un courant

Soit un conducteur filiforme parcouru par un courant I. Soit une portion \vec{dl} de ce conducteur, orientée dans le sens du courant I qui le parcourt. Le champ magnétique élémentaire \vec{dB} créé par l'élément de courant $I\vec{dl}$ en un point M situé à la distance PM est donné par l'expression :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad \text{ou encore} \quad \vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \times \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

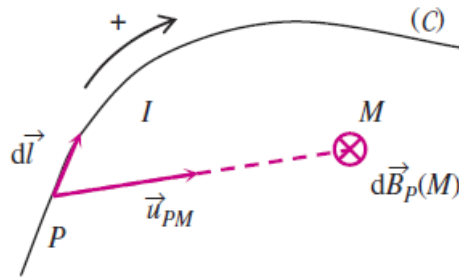


Figure 4.1 Loi de Biot et Savart

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$ est la perméabilité magnétique du vide. dB s'exprime en tesla (T) ou (Wb.m^{-2})
 Pour obtenir le champ total en un point M il faut ajouter vectoriellement la contribution de tous les éléments de courant constituant le circuit. On a alors :

$$\vec{B}(M) = \int_C d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Remarque :

- Le champ magnétique en un point est inversement proportionnel à la distance au carré séparant l'élément de courant et le point considéré : $d\vec{B}(M) = k_m \frac{I}{PM^2} d\vec{l} \times \vec{u}_{PM}$ avec $k_m = \mu_0 / 4\pi = 10^{-7} \text{ S.I}$.

- Notons que la loi de Biot et Savart donnant l'expression du champ infinitésimal créé par une portion de circuit n'est qu'un artifice de calcul : on ne peut pas isoler une portion de circuit parcouru par un courant (alors qu'on peut isoler des charges électriques dans le cas du champ électrostatique).

2) Détermination du sens de $d\vec{B}$

- Le sens de $d\vec{B}$ est tel que le trièdre formé par $(d\vec{l}, \vec{u}_r, d\vec{B})$ soit direct, c'est-à-dire dans le même sens que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (**figure 4.2.a**)

- Règle des trois doigts de la main droite (**figure 4.2.b**)

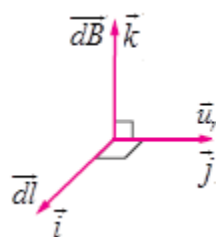


Figure 4.2.a

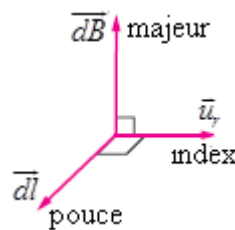


Figure 4.2.b

III. Lignes de champ magnétique

Comme pour le champ \vec{E} si on trace des lignes orientées suivant le champ magnétique et sur lesquelles celui-ci est tangent, on obtient les lignes de champ magnétique. On appelle souvent le dessin de ces lignes un spectre magnétique.

Contrairement au vecteur champ électrostatique, le vecteur champ magnétique est un pseudo-vecteur, son sens dépend de l'orientation de l'espace. Ceci provient de l'apparition d'un produit vectoriel notamment

dans la loi de Biot et Savart. Ce produit vectoriel est un produit de deux vrais vecteurs (vecteurs dont la direction ne dépend pas de l'orientation de l'espace).

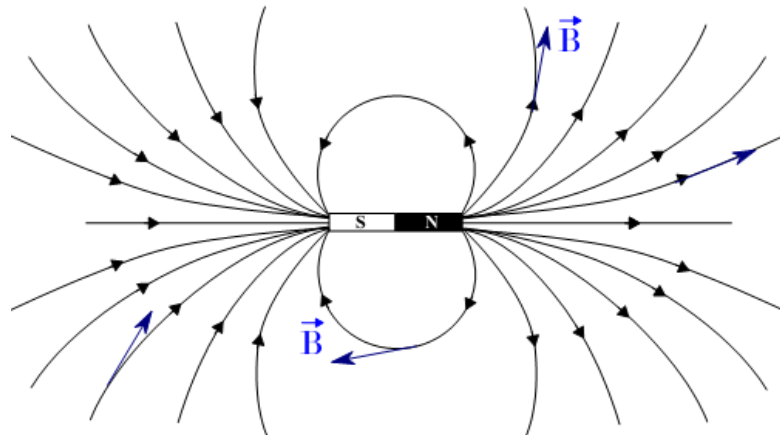


Figure 4.3 : Spectre magnétique d'un aimant droit

IV. Symétries et invariances

Tout comme pour le champ électrostatique, la connaissance des symétries et invariances que présentent les sources permet de déduire certaines caractéristiques du champ magnétique résultant.

A cause du produit vectoriel, les propriétés du champ magnétique sont différentes de celles du champ électrostatique : le champ magnétique est qualifié de champ axial alors que le champ électrostatique est un champ polaire.

Le champ magnétique en un point de l'espace possède plusieurs composantes et dépend de plusieurs paramètres :

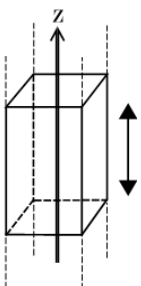
- En coordonnées cartésiennes : $\vec{B}(M) = B_x(x, y, z)\vec{e}_x + B_y(x, y, z)\vec{e}_y + B_z(x, y, z)\vec{e}_z$
- En coordonnées cylindriques : $\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$
- En coordonnées sphériques : $\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, \phi)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, \phi)\vec{e}_\theta + B_\phi(r, \theta, \phi)\vec{e}_\phi$

La considération des symétries et invariances d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{B}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales.

1) Invariances

Les invariances permettent **d'éliminer des coordonnées dont dépend le champ magnétique** en un point M. Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M' obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ magnétique calculé en M et en M'est identique.

1.1 Invariance par translation selon un axe



Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution), alors le champ magnétique ne doit pas non plus subir de changement.

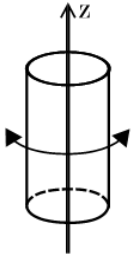
Si cet axe est Oz (système de coordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ magnétique ne dépendront pas de la coordonnée z :

$$\vec{B}(M) = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y + B_z(x, y)\vec{e}_z \quad \text{ou}$$

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta + B_z(r, \theta)\vec{e}_z$$

Figure 4.4 : Invariance par translation

1.2 Invariance par rotation autour d'un axe



Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ magnétique ne doit pas non plus subir de changement.

Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ magnétique ne dépendront pas de la coordonnées θ (système de coordonnées cylindriques ou sphériques)

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, z)\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{B}(M) = B_r(r, \phi)\vec{e}_r + B_\theta(r, \phi)\vec{e}_\theta + B_\phi(r, \phi)\vec{e}_\phi$$

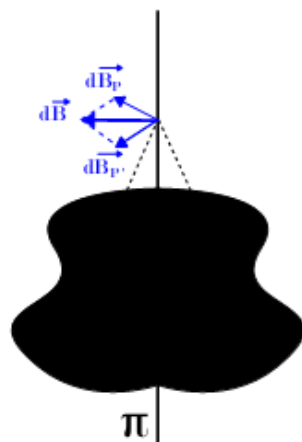
Figure 4.5 : Invariance par rotation

2) Symétries et antisymétries

Les symétries et antisymétries permettent d'éliminer des composantes du champ magnétique.

En effet, un principe appelé **principe de Curie** dit que les éléments de symétries des causes (*que sont les courants, sources de la magnétostatique*) doivent se retrouver dans les effets produits (*que sont le champ magnétique*) : la symétrie de la distribution de courant se retrouvera dans l'expression du champ magnétique.

2.1 Plan de symétrie

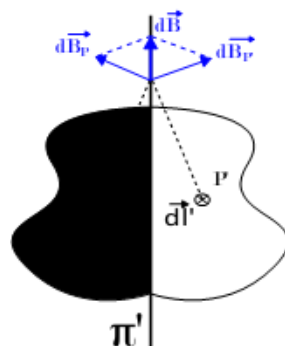


Si une distribution de courants admet un plan de symétrie (**Figure 4.6**), alors le *champ magnétique est forcément orthogonal à ce plan*.

$$\vec{B} \perp (\pi_s)$$

Figure 4.6 : Champ magnétique et plan de symétrie

2.2 Plan d'antisymétrie



Si une distribution de courants admet un plan d'antisymétrie (**Figure 4.7**), alors le *champ magnétique est contenu dans ce plan*.

$$\vec{B} \in (\pi_{AS})$$

Figure 4.7 : Champ magnétique et plan d'antisymétrie

V. Calcul du champ magnétique par la méthode intégrale : exemple du fil infini

On considère un fil infiniment long parcouru par un courant d'intensité I . On cherche le champ magnétique créé en un point M distant de r du fil.

On utilisera les coordonnées cylindriques dans ce problème.

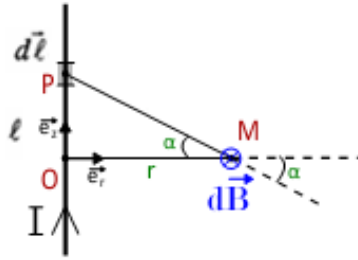


Figure 4.8 : Schéma de situation pour le calcul du champ magnétique créé par un fil infini

1. Symétries et invariances :

Le fil infini est la distribution continue la plus simple que l'on peut rencontrer. On se place dans un repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

- Pour ce qui est des invariances, le fil étant infini, la distribution est invariante si l'on se translate le long du fil. Le fil étant dirigé suivant Oz, la coordonnée z est éliminée.

Aussi, la distribution est inchangée par rotation autour du fil, la coordonnée θ est éliminée.

Ainsi : $\vec{B}(M) = B_r(r)\vec{e}_r + B_\theta(r)\vec{e}_\theta + B_z(r)\vec{e}_z$

- Pour ce qui est des symétries, le plan perpendiculaire au fil passant par M $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution, le champ magnétique doit être contenu dans ce plan :

$$\vec{B}(M) = B_r(r)\vec{e}_r + B_\theta(r)\vec{e}_\theta$$

Le plan contenant le fil et le point M $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$.

Le plan contenant le fil et le point M $(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est également un plan de symétrie pour les courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$. Ce plan n'est pas à retenir parce que sinon \vec{B} serait un vecteur radial alors que \vec{B} est un vecteur axial.

Finalement :
$$\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$$

2. Champ magnétique élémentaire : Comme nous l'avons fait pour le champ électrostatique, nous allons calculer le champ magnétique créé par un élément infinitésimal de fil, puis nous sommerons sur l'ensemble du fil infini.

D'après la loi de Biot et Savart, on a :
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{PM}}{PM^3}$$

En intensité
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot PM}{PM^3} \sin(\vec{dl}, \vec{PM}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{PM^2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{PM^2} \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{PM}$$

d'où
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos^3(\theta)$$

D'autre part : $l = r \tan(\alpha)$ soit $\frac{dl}{d\alpha} = r \frac{d \tan(\alpha)}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2(\alpha)}$ et l'expression de la loi de Biot et Savart devient

$$: \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos(\alpha) d\alpha \quad \text{ou} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos(\alpha) d\alpha \vec{e}_\theta$$

3. Intégration : Afin de considérer un fil infini, nous devons intégrer α de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Mais comme la situation est symétrique de part et d'autre du point O, nous pouvons intégrer entre 0 et $\pi/2$ et multiplier le champ obtenu par 2.

$$B_{\theta}(r) = \int_{fil} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos(\alpha) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos(\alpha) d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos(\alpha) d\alpha \text{ soit } B_{\theta}(r) = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin(\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le champ magnétique créé par un fil infini s'écrit : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$

VI. Champ magnétique crée par une charge en mouvement

Le fait qu'un courant électrique c'est-à-dire un ensemble de charges en mouvement produit un champ magnétique suppose qu'une simple charge en mouvement peut également créer un champ magnétique. Le champ magnétique créé, par une charge en mouvement, en un point M situé à la distance r de la charge s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (1.1)$$

Le champ électrique créé par la même charge q au point M en admettant qu'il n'est pas modifié par le mouvement de la charge s'écrit. $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

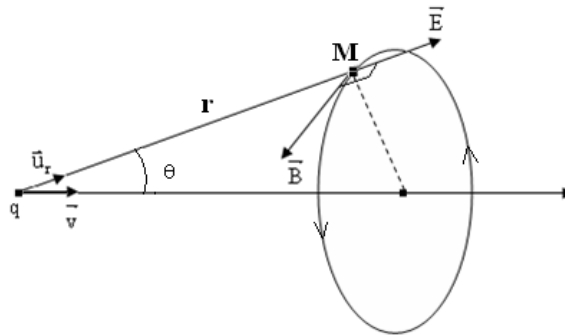


Figure 4.9 Champs électrique et magnétique créés par une charge en mouvement

L'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (1.2)$$

avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière ou de tout rayonnement électromagnétique dans le vide.

L'équation (1.2) établit une relation étroite entre le champ magnétique et le champ électrique créés par une charge en mouvement.

Une charge au repos crée seulement un champ électrostatique alors qu'une charge en mouvement crée à la fois un champ électrique et un champ magnétique, reliés par l'équation (1.2). Le champ électrique et le champ magnétique sont donc deux aspects d'une propriété fondamentale de la matière et il est plus correct d'utiliser le terme *champ électromagnétique* pour décrire la situation physique mettant en jeu des charges en mouvement.

Remarque

1. L'équation (1.1) n'est valable que pour des vitesses v petites devant c (domaine non relativiste)
2. L'équation (1.1) fait intervenir la vitesse \vec{v} de la particule, vitesse qui dépend du repère choisi pour décrire le phénomène par conséquent \vec{B} dépend aussi de ce repère.

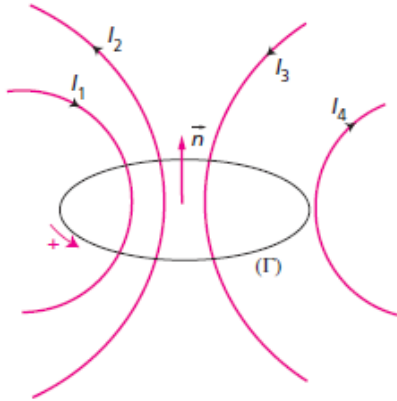
VII. Propriétés du champ magnétique

1) Relation entre le champ et les sources : Théorème d'Ampère

Ce théorème permettra un calcul plus aisé à condition que les symétries de la distribution soient suffisantes.

1.1 Enoncé du théorème d'Ampère

Soit (\mathcal{C}) un contour fermé orienté et une surface S s'appuyant sur ce contour. Soit I_1, I_2, \dots, I_n les courants enlacés par le contour fermé, la circulation du champ magnétique le long du contour orienté est égale au produit de la perméabilité μ_0 du vide par la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour.



$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{int}$$

avec $I_{int} > 0$ s'ils sont dans le même sens que \vec{n} (vecteur normal à la surface S) si non les I_{int} sont négatifs.

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_1 - I_3)$$

Remarque

Le théorème d'Ampère est à la magnétostatique ce que le théorème de Gauss est à l'électrostatique : un outil efficace pour obtenir rapidement l'expression du champ magnétique créé par un ou plusieurs courants lorsque certaines conditions de symétrie sont respectées.

Figure 4.10 Courants enlacés par un contour orienté

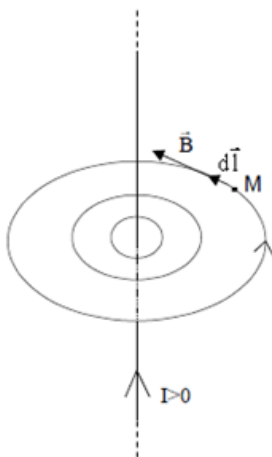
1.2 Application du théorème d'Ampère au fil infini

1. On commence toujours par simplifier l'expression du champ magnétique en éliminant les coordonnées et composantes grâce aux **symétries et invariances**. Nous avons déjà fait ceci, on a toujours :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

2. Nature de la courbe d'Ampère : cercle de rayon r et centré sur le fil.

3. Pour calculer le champ magnétique en un point donné, choisir un contour fermé passant par ce point, pour lequel la direction du champ est tangente et le module de B constant (**Figure 4.11**)



1. On commence toujours par simplifier l'expression du champ magnétique en éliminant les coordonnées et composantes grâce aux **symétries et invariances**. On a toujours :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

2. Nature de la courbe d'Ampère : cercle de rayon r et centré sur le fil.

3. Pour calculer le champ magnétique en un point donné, choisir un contour fermé passant par ce point, pour lequel la direction du champ est tangente et le module de B constant (**Figure 4.11**)

4. Circulation du champ magnétique le long de la courbe d'Ampère :

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r$$

Figure 4.11 : Courbe d'Ampère

5. Courants intérieurs à la courbe d'Ampère : $\sum I_{int} = +I$

6. Enfin, nous appliquons le théorème d'Ampère : $C = \mu_0 \sum I_{int} \Leftrightarrow B 2\pi r = \mu_0 I$

Finalement : $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ et $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$. On retrouve le même résultat que par la méthode intégrale.

Remarque :

La **Figure 4.11** montre que les lignes de champ magnétique sont des lignes fermées.

1.3 Forme différentielle du théorème d'Ampère

En exprimant le courant électrique comme le flux de la densité de courant $I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ ($j = I/S$ c'est le courant par unité de surface $A.m^{-2}$) on peut exprimer le théorème d'Ampère sous la forme :

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

(S) étant une surface quelconque limitée par le contour fermé (C).

D'après le théorème de Stokes $C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$, soit

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Les lignes de champ magnétique se renferment sur elle-même.

L'équation précédente établit une relation locale entre le champ magnétique en un point et la densité de courant \vec{j} au même point de l'espace. Les courants électriques sont les sources du champ magnétique.

En l'absence de courant électrique $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$

On définit le vecteur excitation magnétique par la relation $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ soit $\overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$

2) Conservation du flux du champ magnétique

On montre que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque est toujours nul.

On dit que le champ magnétique est à flux conservatif soit

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Le flux s'exprime en $T.m^2$ ou en Weber (Wb).

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire $\phi = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_\tau \text{div}(\vec{B}) d\tau = 0$ soit :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

VIII. Potentiel vecteur

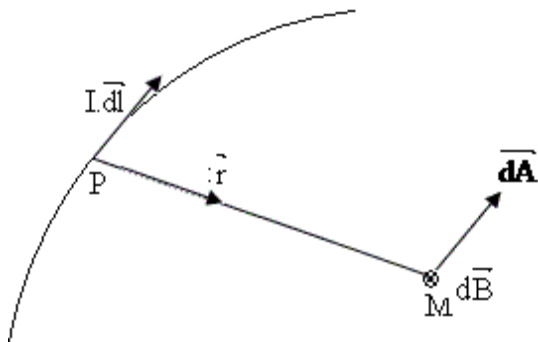
1) Définition

Contrairement à la circulation du champ électrostatique qui est nul le long d'un contour fermé, la circulation du champ magnétique ne l'est pas. Le champ magnétique ne dérive donc pas d'un potentiel scalaire.

On montre que $\text{div}[\overrightarrow{rot}(\vec{A})] = 0$ donc si $\text{div}(\vec{B}) = 0$ il existe alors un vecteur \vec{A} tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

Ce champ de vecteur est appelé potentiel vecteur du champ magnétique. Il joue pour la magnétostatique un rôle analogue à celui du potentiel électrostatique.



On montre que le potentiel vecteur crée par une distribution linéique de courant a pour expression :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{PM}$$

Le potentiel vecteur est donc colinéaire à l'élément de courant $I d\vec{l}$.

L'unité du potentiel vecteur est le *Weber par mètre* ($\text{Wb} \cdot \text{m}^{-1}$).

Figure 4.12 potentiel vecteur $d\vec{A}$ créée en un point M par un élément de fil $d\vec{l}$ situé au voisinage d'un point P et parcouru par un courant I

2) Invariance de Jauge

Comme le potentiel scalaire de l'électrostatique le potentiel vecteur n'est pas complètement déterminé par la relation $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$. Le potentiel vecteur est déterminé au gradient d'une fonction f différentiable près. Pour lever l'indétermination on impose au potentiel vecteur une condition supplémentaire appelée *jauge de Coulomb*

$$\text{div}(\vec{A}) = 0$$

3) Equation de Poisson de la magnétostatique

L'équation de Poisson à laquelle satisfait le potentiel V en électrostatique s'écrit $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$. On passe à l'équation de Poisson de la magnétostatique en remplaçant V par \vec{A} , $1/\epsilon_0$ par μ_0 et ρ par \vec{j} .

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Les courants électriques sont les sources du potentiel vecteur.

IX. Equation du champ électromagnétisme statique

	Electrostatique	Magnétostatique
Flux à travers une surface fermée S	Théorème de Gauss $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$ $\text{div}(\vec{B}) = 0$
Circulation le long d'un contour fermé	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	Théorème d'Ampère $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{int}$ $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
Relation champ-potentiell	$\vec{E} = -\text{grad}(V)$	$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

X. Actions d'un champ magnétique

1) Force magnétique s'exerçant sur une charge électrique en mouvement

La force exercée par un champ magnétique sur une charge en mouvement est proportionnelle à la charge électrique, à sa vitesse et la direction de la force est perpendiculaire au plan (\vec{v}, \vec{B}) .

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Le sens de la force magnétique est tel que $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ forment un trièdre direct si $q > 0$.

Cette force est appelée le plus souvent *force de Lorentz*.

Lorsque la particule se déplace dans une région où règnent un champ magnétique et un champ électrique c'est-à-dire un champ électromagnétique, la force totale est la somme de la force magnétique et de la force électrique.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Force de Lorentz.}$$

2) Force magnétique agissant sur un conducteur : loi de Laplace

Soit un conducteur parcouru par un courant électrique I constant et soumis à un champ magnétique uniforme.

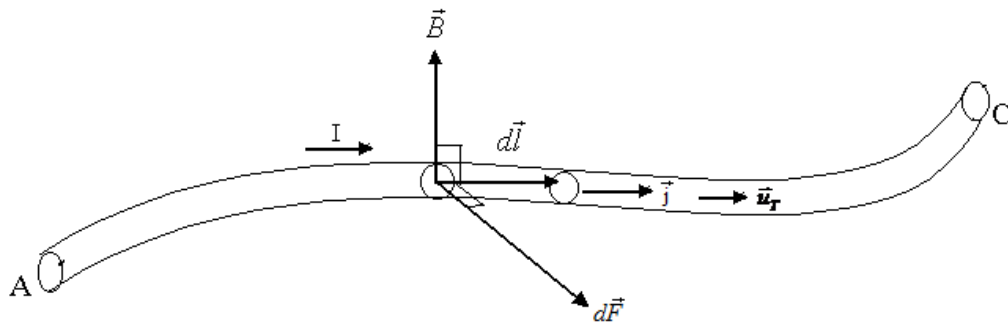


Figure 4.13 Conducteur parcouru par un courant et soumis à un champ magnétique

Comme le courant I n'est rien d'autre qu'un déplacement de charges à l'intérieur du conducteur, de par la force magnétique qui s'exerce sur chaque charge en mouvement, le conducteur lui-même va subir une force due à la présence du champ magnétique. La force élémentaire qui s'exerce sur un élément dl du conducteur parcouru par un courant électrique I a pour expression :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{Loi de Laplace}$$

$d\vec{F}$ est la force élémentaire qui s'applique sur un élément dl parcouru par un courant électrique I .

Dans le cas d'un conducteur rectiligne placé dans un champ magnétique uniforme on a :

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Le sens de la force magnétique est donné :

- par le bras gauche d'un observateur d'Ampère couché sur le conducteur regardant dans le sens du courant et le courant lui entrant par les pieds

- par le pouce de la main droite placée sur le conducteur, le courant sortant par les doigts et la paume tournée dans le sens de \vec{B}

Chapitre 5 : Induction électromagnétique

Objectifs spécifiques :

- OS1 : Expliquer le phénomène d'induction électromagnétique,
- OS2 : Expliquer la loi de Lenz,
- OS3 : Appliquer la loi de Faraday pour la résolution de cas pratiques,
- OS4 : Expliquer le phénomène d'auto-induction ;

Introduction

L'induction électromagnétique est le couplage entre le champ électrique et le champ magnétique. Le phénomène d'induction électromagnétique découvert par Michael Faraday en 1831 permet d'obtenir une f.é.m. grâce au mouvement d'un conducteur ou au mouvement d'un circuit par rapport à un champ magnétique indépendant du temps ou variable au cours du temps

L'induction électromagnétique est le principe de base des générateurs électriques, des transformateurs, et de nombreux autres dispositifs (chauffage par induction, moteur électrique, freinage par courant de Foucault, etc.).

Après une approche expérimentale, on découvrira les lois qui régissent ce phénomène.

Enfin, nous parlerons du phénomène d'auto-induction qui permet d'introduire l'inductance d'une bobine, caractéristique de celle-ci et qui a son importance en électrocinétique.

I. Mise en évidence expérimentale de l'induction électromagnétique

1) Définitions

On appelle **inducteur** la source de champ magnétique. Cela peut être un aimant ou un électroaimant.

On appelle **induit** le circuit électrique, siège du phénomène d'induction, il peut être ouvert (fermé par un voltmètre par exemple) ou fermé (fermé par un ampèremètre par exemple).

Deux types d'inductions

Le phénomène d'induction, c'est l'apparition d'une f.é.m. induite (induit ouvert ou fermé) et/ou d'un courant induit (induit fermé seulement) dans un circuit grâce à un champ magnétique.

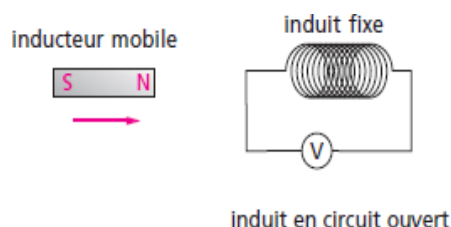
Il y a deux façons d'obtenir cela :

- soit en déplaçant un champ magnétique stationnaire au voisinage d'un circuit électrique fixe ;
- soit en déplaçant (ou déformant) un circuit électrique au voisinage d'un champ magnétique stationnaire fixe.

2) Expérience fondamentale de Faraday (1831)

On déplace progressivement un aimant vers une bobine fixe (**Figures 5.1 et 5.2**).

2.1 Circuit Ouvert

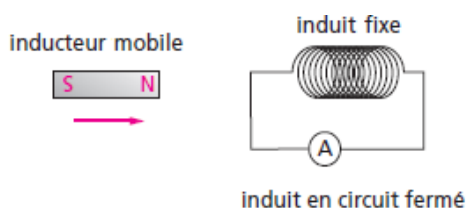


Observations :

- le voltmètre indique une tension positive
- la tension s'annule si le déplacement cesse
- la tension est d'autant plus grande que le déplacement est rapide
- le signe de la tension s'inverse si on inverse les pôles de l'aimant

Figure 5.1 Induit fixe en circuit ouvert et inducteur mobile

2.2 Circuit fermé



Observation :

Le milliampèremètre permet de mettre en évidence la circulation d'un courant électrique.

Figure 5.2 Induit fixe en circuit fermé et inducteur mobile

Conclusion :

La variation de la valeur du champ magnétique entraînant la variation du flux magnétique à travers la bobine est à l'origine d'un courant induit si le circuit est fermé et d'une f.é.m. induite si le circuit est ouvert.

II. Loi de modération de Lenz : sens du courant induit

Énoncé 1 : dans un circuit, un courant induit prend naissance lorsqu'on fait varier le flux du champ magnétique dans ce circuit. Le sens du courant induit est tel qu'il s'oppose à la variation du flux inducteur en créant un champ magnétique \vec{B}_i .

Énoncé 2 : le sens du courant induit est tel qu'il tend par ses effets à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

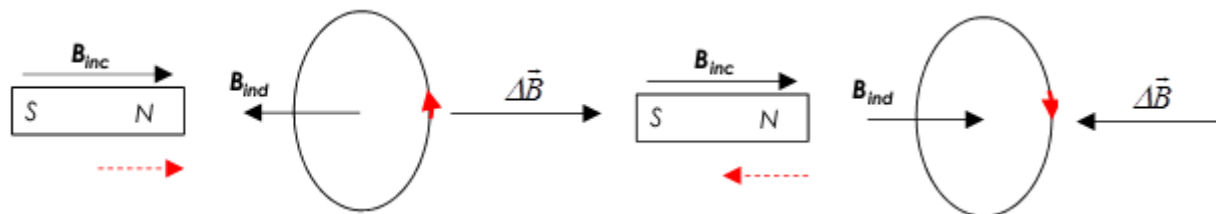


Figure 5.3 a et b Illustration de la loi de Lenz

Si on approche l'aimant il y a répulsion $SN \leftrightarrow N$. Le sens du courant induit est tel qu'une face Nord apparait pour s'opposer au pôle Nord de l'aimant.

Si on éloigne l'aimant il y a attraction $SN \leftrightarrow S$. Le sens du courant induit est tel qu'une face Sud apparait pour attirer le pôle Nord de l'aimant.

Dans les deux cas le champ magnétique \vec{B}_i apparait pour s'opposer à la variation $\Delta \vec{B}$ du champ inducteur, donc à la variation du flux inducteur.

III. Loi de Faraday

1) Notion de force électromotrice

Une force électromotrice (f.é.m.) est homogène à une tension, elle s'exprime donc en Volt (V). Dans un circuit, c'est elle qui permet de mettre en mouvement les charges électriques et d'obtenir un courant électrique.

Si \vec{F} est la force qui s'exerce sur la charge q pour la mettre en mouvement dans le circuit C , alors :

$$e = \oint_C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

C'est le travail fourni par unité de charge ou encore la circulation du champ électrique induit appelé champ électromoteur ("champ qui fait bouger les électrons").

Pour un générateur, la f.é.m. est la tension à vide aux bornes de celui-ci, c'est-à-dire quand il n'est pas engagé dans un circuit.

2) Expression de la loi de Faraday

2.1 Loi de Faraday

Cette loi exprime le fait que le courant induit apparaît par l'intermédiaire d'une force électromotrice induite. Et celle-ci provient de la variation du flux magnétique à travers la surface orientée constituée par le circuit électrique.

On écrira donc :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Si c'est la variation du flux magnétique qui permet la création d'un courant induit, pour créer celui-ci, on peut faire varier S (en déformant le circuit) ou bien \vec{B} (en approchant ou éloignant la source du champ, ou bien en changeant sa direction, en changeant sa valeur).

Orientation du circuit, f.é.m. et courant induit

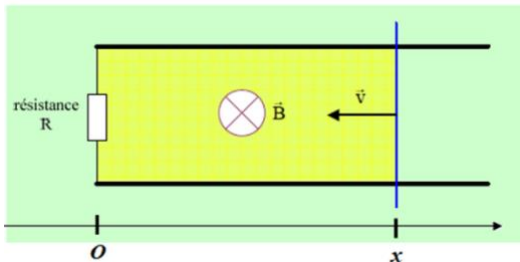
L'orientation du circuit, qui permet de définir la surface orientée S , donne son orientation à la f.é.m. et ainsi le sens du courant induit dans le circuit.

On pourra utiliser une représentation électrique du circuit siège de ce phénomène d'induction : on y fera apparaître la f.é.m. (générateur), le courant induit, ainsi que la résistance électrique du circuit.

Remarque

Le signe - qui apparaît dans la loi de Faraday montre qu'il y a opposition entre la f.é.m. induite et la variation de flux, ceci est la traduction de la loi de Lenz : les effets s'opposent aux causes.

2.2 Exemple : expérience des « rails de Laplace »

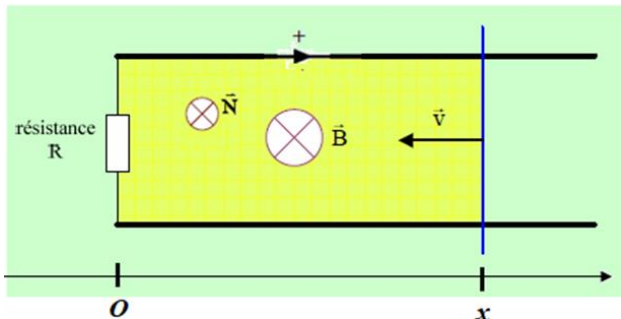


Deux rails métalliques parallèles et distants de l , parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice, de résistance R . Ces conducteurs constituent un ensemble rigide et immobile.

Afin de fermer le circuit, une barre métallique, parfaitement conductrice, est posée sur les rails, orthogonalement à ceux-ci.

Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant.

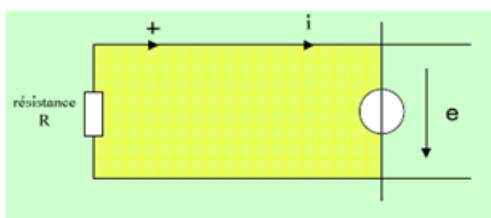
On déplace la barre métallique à la vitesse $v \rightarrow$ variation du flux magnétique dans le circuit \rightarrow f.é.m. induite \rightarrow un courant induit i apparaît.



(On choisit une orientation arbitraire du circuit et la règle de la main droite donne le sens du vecteur surface).

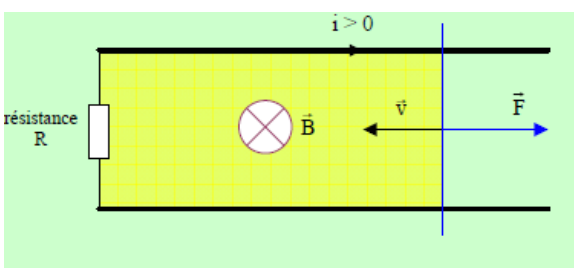
$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = +Blx$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl \frac{dx}{dt} = +Blv$$



On obtient le courant induit en appliquant la loi d'Ohm :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}$$



Le courant induit provoque dans le rail une force de Laplace qui *s'oppose* au mouvement de celui-ci. Ce qui est bien conforme à la loi de Lenz : *le courant induit, par ses effets, s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.*

2.3 Forme différentielle de la loi de Faraday

En combinant les équations de la loi de Faraday et de la définition de la f.é.m induite, on a maintenant une égalité de la forme :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

et en utilisant le théorème de Stokes $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot \vec{n} dS$, on a l'égalité: $\int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot \vec{n} dS = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$

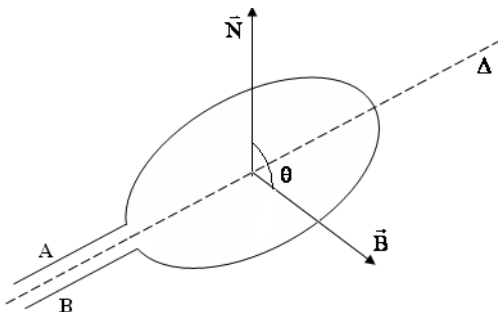
et donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette relation fondamentale, appelée équation de *Maxwell-Faraday*, traduit localement une propriété du champ électromagnétique qui montre qu'un *champ magnétique variable dans le temps implique l'existence d'un champ électrique au même endroit*.

2.4 Exemples d'application

Soit une spire, de surface S , mobile autour d'un axe Δ au niveau duquel on ménage deux connections éventuelles, en A et B , avec un circuit extérieur. Immergé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , perpendiculaire à Δ , la spire est mise en rotation à vitesse angulaire ω constante.



Si θ est l'angle de \vec{B} avec la normale \vec{N} à la spire, celle-ci est traversée par un flux : $\phi = BS \cos(\theta)$ (avec $\theta = \omega t + \varphi$) variable dans le temps comme θ . Une f.é.m. d'induction :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS \frac{d}{dt} [\cos(\omega t + \varphi)] = BS \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

apparaît dans la spire : elle peut faire circuler un courant, ici sinusoïdal, dans un circuit branché entre A et B . Nous avons fabriqué un **alternateur**.

Figure 5.4 alternateur

- Dans un transformateur, ce sont deux bobines aux caractéristiques différentes (nombre de spires qui permettent d'augmenter ou de diminuer les tensions à l'entrée et à la sortie : la première bobine parcourue par un courant crée un champ magnétique qui induit un courant dans la deuxième bobine.
- Dans le freinage par courants de Foucault, un conducteur se déplace dans un champ magnétique, donc du point de vue du conducteur, le champ magnétique varie. Il apparaît alors des courants induits dans le conducteur appelés courants de Foucault. D'après la loi de Lenz-Faraday, l'apparition de ces courants doit s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance, donc au mouvement : il y a donc freinage. Celui-ci s'effectue par l'intermédiaire des forces de Laplace qui s'exerce sur le conducteur puisqu'il est parcouru par des courants et est plongé dans un champ magnétique.

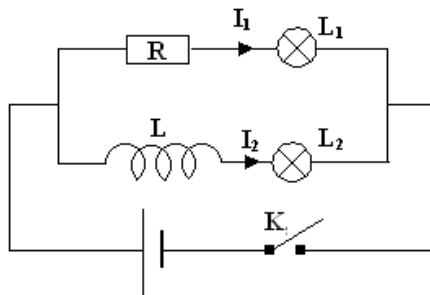
IV. Auto-induction

1) Phénomène d'auto-induction

Un circuit quelconque parcouru par un courant influe sur lui-même. On parle d'auto-induction. Ce phénomène a été mis en évidence en 1830.

1-1 Mise en évidence expérimentale

L'auto-induction se manifeste à l'ouverture et à la fermeture d'un circuit.



Lorsqu'on ferme l'interrupteur K :

- L_1 s'allume immédiatement.

- L_2 s'allume avec un retard dû à un courant induit dans la bobine qui s'oppose au passage du courant I_2 .

Lorsqu'on ouvre K, L_2 s'éteint après L_1 .

Figure 5.5 Circuit électrique

1-2 Interprétation

Un courant qui passe dans une spire crée un champ magnétique. Si ce courant varie, le champ magnétique varie également. Ainsi, on est en présence d'un champ magnétique variable à l'intérieur d'un conducteur, la bobine elle-même !

Il y a donc auto-induction : la spire parcourue par le courant crée un champ magnétique qui crée un courant induit dans cette même spire.

D'après la loi de Lenz, ce courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : ce courant induit est dans le sens inverse du courant initial qui s'établit dans la spire.

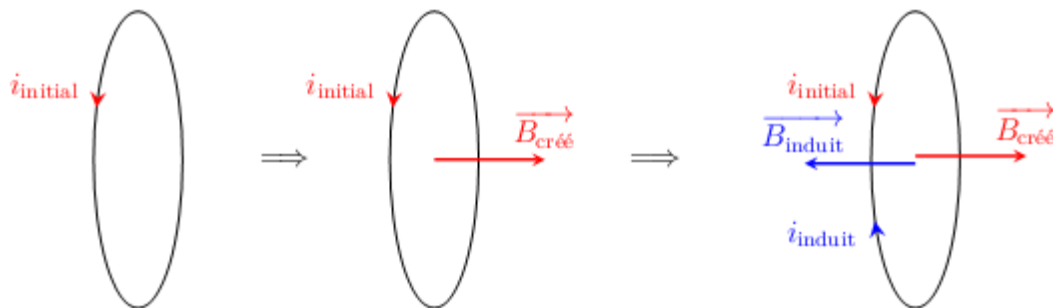
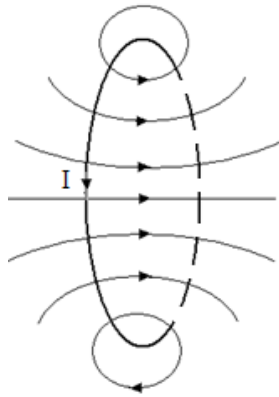


Figure 5.6 Phénomène d'auto-induction dans une spire

Le courant induit n'existe que lorsqu'il y a variation du champ magnétique. En régime permanent, ce courant n'existe plus mais en régime variable, il va "freiner" l'établissement du courant dans le circuit : l'établissement du courant dans un circuit comportant une bobine n'est pas instantané.

2) Flux propre-coefficient d'auto-induction

Considérons un circuit parcouru par un courant I . D'après le théorème d'Ampère le courant crée un champ magnétique qui en chaque point est proportionnel à I et le circuit est plongé dans ce champ magnétique (**Figure 2.7**).



Le flux à travers ce circuit est appelé flux-propre et est proportionnel à I :

$$\phi_p = LI$$

Le coefficient de proportionnalité L dépend de la forme géométrique du conducteur et est appelé *inductance propre* ou *coefficient d'auto-induction* et s'exprime en Henry (H) si ϕ_p est en Weber et I en Ampère.

L'inductance propre d'un circuit est toujours positive.

Figure 5.7 Flux propre à travers un circuit

Remarque :

Si on veut des inductances plus importantes, on insère un noyau de fer doux (fer ou acier doux = ajouts d'éléments chimiques au fer, silicium, nickel, molybdène par exemple, pour en modifier les propriétés) dans la bobine, ce matériau a la propriété de se polariser magnétiquement (sa perméabilité μ est importante) et donc d'augmenter le champ magnétique à l'intérieur de la bobine donc son inductance.

3) F.é.m. induite

Si I varie en fonction du temps, le flux propre à travers le circuit aussi. Et en accord avec la loi d'induction électromagnétique (loi de Faraday), une f.é.m. est induite dans le circuit. Le circuit est à la fois l'inducteur et l'induit : c'est l'auto-induction.

$$e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt} \text{ si } L \text{ est constante}$$

Le signe négatif indique que e s'oppose à la variation du courant.

- Si $i = \text{cste}$: alors $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0$. L'auto-induction ne se manifeste pas en régime continu.

- Si K est fermé i augmente alors $\frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0$; la f.é.m. e tend à s'opposer à l'établissement du courant.

- Si K est ouvert, i diminue, alors $\frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0$; la f.é.m. tend à ralentir l'annulation du courant.

Conclusion : Une inductance s'oppose à la variation du courant dans un circuit.

4) Energie magnétique propre d'un circuit filiforme

Pour un circuit filiforme C d'inductance L , parcouru par le courant d'intensité I et traversé par le flux propre $\Phi = LI$, l'énergie magnétique emmagasinée est :

$$W_m = \frac{1}{2} I \Phi \text{ ou } W_m = \frac{1}{2} LI^2$$