Chapitre 5 : Energétique du point matériel

Nous allons déduire de la loi fondamentale de la dynamique un théorème faisant intervenir des grandeurs scalaires, telles que la puissance et le travail d'une force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique d'un point matériel. Le point de départ est la multiplication scalaire de l'égalité vectorielle qui exprime la 2ème loi de Newton, soit : $\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{v} = \sum \vec{F}.\vec{v}$ soit $m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}.\vec{v}$.

I°) Puissance et travail d'une force.

Considérons, dans un référentiel R, un point matériel A de vitesse $\vec{v}$ et soumis à une force $\vec{F}$

1°) Puissance

Par définition, la puissance d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur le point matériel A, ou puissance reçue par A par l'intermédiaire de la force $\vec{F}$ est : $P = \vec{F}.\vec{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}$. Comme la vitesse, la puissance d'une force $\vec{F}$ dépend du référentiel dans lequel elle a été calculée.
Certaines forces ont une puissance nulle :

a) La force magnétique, qui s'exerce sur une particule chargée plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ puisque : $P = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0$
b) La force de Coriolis qui s'exerce sur un point matériel lorsque le référentiel considéré n'est pas galiléen : $P = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}).\vec{v}$

Plus généralement, la puissance d'une force quelconque est nulle pour tout déplacement normal à la direction de cette force. Ainsi la puissance du poids d'un corps est nulle pour déplacement dans un plan horizontal car le poids est dans la direction verticale.
Lorsque $P > 0$ la puissance est motrice ; lorsque $P < 0$, elle est résistante. L'unité de puissance est le watt (W). L'ancienne unité, encore utilisée, le cheval vapeur, vaut 736 W

2°) Travail

a) **expression élémentaire**.

Par définition, le travail élémentaire de $\vec{F}$ s'exerçant sur A est $\delta T = Pdt = \vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OA}$, $d\overrightarrow{OA}$ étant un déplacement élémentaire de A dans le référentiel R par rapport auquel la vitesse est comptée. La notation δ indique δW est une forme différentielle à priori non intégrable qui n'est donc pas la différentielle (totale exacte) d'une fonction.
A l'aide de la base de R, $\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. L'unité de travail est le joule (J).

b) **Travail au cours d'un déplacement fini**.

1°) Lorsque la force $\vec{F}$ est une fonction à la fois de la position du point A, de sa vitesse et du temps, ce qui est peu fréquent, l'expression du travail est la suivante : $W = \int_{t_i}^{t_f} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt$ dans laquelle les bornes t_i et t_f définissent les instants initial et final. Si la force est indépendante du temps et la vitesse, alors : $W = \int_{t_i}^{t_f} (F_x(x,y,z)\dot{x} + F_y(x,y,z)\dot{y} + F_z(x,y,z)\dot{z})dt = \int_C F_x\, dx + F_y dy + F_z dz$ .C'est une intégrale curviligne le long de la trajectoire C du point d'application de la force, entre ses positions A_i et A_f , aux instants initial et final. Le travail est ici défini pour un parcours déterminé indépendamment de la manière dont ce parcours est effectué au cours du temps.

Exemple : Soit la force $\vec{F}$ telle que $F_x = 3x$, $F_y = -5z$, $F_z = 10x$ avec $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^2$. Le travail entre les instants $t_1 = 0s$ et $t_2 = 1s$ est $W = \int_0^1 [6t(t^2+1) - 20t^3 + 20t(t^2+1)]dt = 14{,}50\ J$

2°) Si la force est indépendante du temps et de la vitesse, alors :

$$W = \int_{t_i}^{t_f} [F_x(x,y,z)\dot{x} + F_y(x,y,z)\dot{y} + F_z(x,y,z)\dot{z}]dt = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz\,.$$

C'est une intégrale curviligne calculée le long de la trajectoire C du point d'application de la force, entre ses positions A_i et A_f aux instants initial et final. Le travail est ici défini pour un parcours déterminé indépendamment de la manière dont ce parcours est effectué au cours du temps :

Exemple : Soit la force $\vec{F}$ telle que $F_x = 3x$, $F_y = -5z$, $F_z = 10x$ et la trajectoire C définie par $y = 2x^2$ et $z = 0$. Entre $x = 0$ et $x = 1$, on obtient pour $z = 0$: $W = \int_0^1 3x dx = \left[3x^2/2\right]_0^1 = 1{,}50\ J$

II°) Théorème de l'énergie cinétique

1°) Enoncé

D'après la loi fondamentale de la dynamique, le mouvement de A par rapport à R est $d\vec{p}/dt = m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}$.

En multipliant scalairement par $\vec{v}$, $\vec{v}\,\dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{\gamma}\,\vec{v} = d(\dfrac{d(mv^2/2 + Cte)}{dt}$

Par convention, on prend la constante nulle. La quantité scalaire non négative $mv^2/2$ est appelée énergie cinétique $E_{C/R}$ en raison de sa dépendance essentielle avec la vitesse : $E_{C/R} = mv^2/2$

Il vient donc d'après la loi fondamentale $dE_C/dt = P_R$, ce qui s'écrit aussi $dE_{C/R} = P_R dt = \delta T_R$ et $\Delta E_{C/R} = T_R$ après intégration.

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de toutes les forces qui s'exercent sur ce point ou bien la variation d'énergie cinétique est égale au travail de toutes les forces appliquées.

Remarques

a) Si R est non galiléen, il faut ajouter à la puissance des forces appliquées celle de la force d'inertie d'entraînement celle de Coriolis étant toujours nulle.

b) Le théorème de l'énergie cinétique est particulièrement adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul paramètre, puisqu'il ne fournit qu'une seule équation scalaire.

2°) Exemple

Une masselotte A de masse m glisse sans frottement sur un guide circulaire de rayon l vertical. On repère sa position par θ l'angle que fait OA avec la verticale descendante. O étant l'origine du référentiel terrestre R supposé galiléen.

Expression de l'énergie cinétique et la puissance des différentes forces :

$E_{C/R} = ml^2\dot{\theta}^2/2$, $P_{m\vec{g}} = m\vec{g}\vec{v} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$ et $P_{\vec{R}} = \vec{R}.\vec{v} = 0$. L'application du théorème de l'énergie cinétique donne : $\dfrac{d(ml^2\dot{\theta}^2/2)}{dt} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$ soit $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$ et $\ddot{\theta} + g\sin\theta/l = 0$ en divisant par $ml\dot{\theta} \neq 0$. Dans le cas des petites oscillations, on a : $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ avec $\omega^2 = g/l$ Ce qui caractérise un mouvement un mouvement oscillant de période $T_0 = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$.

L'équation du mouvement peut être obtenue à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O : $\dfrac{d(ml^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z)}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} = -mgl\sin\theta\,\vec{e}_z \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$.

III°) Energie potentielle

Considérons le cas important (très fréquent) où le travail d'une force qui s'exerce sur le point matériel ne dépend ni de la façon dont le parcours est effectué au cours du temps ni du chemin suivi entre les positions initiale et finale fixées.

1°) Définition

Dans certaines conditions, le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point A se met sous la forme de la différentielle d'une fonction : $\delta T = \vec{F}.d\overrightarrow{OA} = -dE_P$. La fonction $E_P(OA)$ est appelée énergie potentielle de A associée à la force $\vec{F}$. On écrit $\vec{F}$ sous la forme condensée $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$. En coordonnées cartésiennes : $F_x = -\partial E_P / \partial x$ $F_y = -\partial E_P / \partial y$ $F_z = -\partial E_P / \partial z$. Ainsi $E_P$comme E_C est définie à une constante additive près.

Remarque : comme tenu de la constante, $E_P$peutêtre positive ou négative, alors que la convention admise pour l'énergie E_C rend cette dernière une fois pour toutes positive ou nulle.

2°) Exemples : La plupart des forces fondamentales dérivent d'une énergie potentielle

a) Energie potentielle newtonienne

Considérons un point matériel A soumis, de la part du centre O, à la force newtonienne de la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \overrightarrow{OA}/r$, K la constante d'interaction.

Si K>0, on a une interaction répulsive (forces entre charges électriques de même signes)
Si K<0, on a une interaction attractive (forces entre charges électriques de signes opposés)

Expression du travail élémentaire : $\delta T = \vec{F}.d\vec{r} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r.d\vec{r} = \frac{Kdr}{r^2} = d\left(-\frac{K}{r}\right) = -dE_P$ d'où $E_P = K/r + Cte$,

$E_P(\infty) = 0 \Rightarrow Cte = 0$

b) Energie potentielle de pesanteur

$\delta T = m\vec{g}.d\vec{r} = d(m\vec{g}\vec{r}) = -dE_P$ d'où $E_P = -m\vec{g}.\vec{r} + Cte$. Si conventionnellement $E_P$pour r=0 $E_P = -m\vec{g}.\vec{r} = mgz$

c) Energie potentielle élastique d'un ressort de raideur K

$\delta T = -(K(x - l_0)dx = -dE_P \Rightarrow E_P = K(x-l_0)^2/2 + Cte$

$E_P(l_0) = 0 \Rightarrow Cte = 0$, $E_P = K(x-l_0)^2/2 = KX^2/2$, $X = x - l_0$ est l'allongement du ressort.

d) Energie potentielle centrifuge.

Lorsque le repère d'analyse R' n'est pas galiléen et qu'il tourne uniformément autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen R, on montre qu'il apparaît une force supplémentaire d'expression $m\omega^2\overrightarrow{HA}$ ω étant la vitesse de rotation de R'/R. Par conséquent, $\delta T = m\omega^2\overrightarrow{HA}\ d\overrightarrow{OA} = m\omega^2\overrightarrow{HA}\ d\overrightarrow{HA} = -dE_P$ alors $E_P = -m\omega^2\overrightarrow{HA}^2/2 + Cte$ On prend l'énergie potentielle nulle sur l'axe de rotation.

IV°) Théorème de l'énergie mécanique. Conservation.

1°) Définition de l'énergie mécanique

On appelle énergie mécanique E_M d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $E_M = E_C + E_P$.

2°) Théorème de l'énergie mécanique

Distinguons dans les forces qui s'exercent sur un point matériel A celles qui dérivent d'une énergie potentielle de celles qui n'en dérivent pas. Le travail élémentaire de toutes les forces peut se mettre sous la forme : $\delta T = -dE_p + \delta T'$ où $\delta T'$ est le travail élémentaire des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient : $dEc = -dE_P + \delta T'$ soit $d(Ec + E_P) = \delta T'$, ce qui s'écrit $dE_M / dt = P'$ ou $dE_M = P'dt = \delta T'$ soi en intégrant : $\Delta E_M = T'$: P' étant la puissance des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle et T' le travail correspondant

3°) Conservation de l'énergie mécanique.

Dans le cas général, l'énergie mécanique ne se conserve pas puisque $P' \neq 0$. On dit que E_M n'est pas une grandeur conservative. La thermodynamique postule précisément dans son premier principe que l'énergie totale, somme de E_M de son énergie électromagnétique et d'une nouvelle énergie interne est une grandeur conservative (cf. thermodynamique).

Cependant, lorsque les seules forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle P'= 0 et $E_M = E_C + E_P$ est une constante. La constante E_M est alors déterminée par les conditions initiales du mouvement. Cette conservation occasionnelle de l'énergie mécanique fournit une équation différentielle du premier ordre contrairement au théorème de l'énergie cinétique. Pour cette raison, on l'appelle parfois intégrale première de l'énergie.

Remarque : les forces qui dérivent d'une énergie potentielle sont appelées forces conservatives. On comprend pourquoi lorsqu'elles interviennent seules, l'énergie mécanique du point se conserve.

Conclusion

Rappelons le théorème de l'énergie sous la forme qui ne privilégie pas la forme cinétique par rapport à la forme potentielle : $dE_M = \delta W^{nc}$ ou $\Delta E_M = W^{nc}$, $E_M = E_C + E_P$ étant l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle et W^{nc} le travail des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

On détermine l'énergie potentielle associée à une force en calculant son travail élémentaire. Si, entre deux positions extrêmes A_i et A_f, le travail W ne dépend pas du chemin suivi, alors, on peut écrire $W = E_P(A_i) - E_P(A_f)$. En d'autres termes, si δW est une différentielle totale exacte, alors on pose $\delta W = -dE_P$.

Retenons que l'application du théorème de l'énergie pour un point matériel présente un intérêt multiple.

- On manipule des quantités scalaires et non des vecteurs, lesquels exigent des bases de projection.
- Lorsque les seules forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique se conserve.