Chapitre 6 : Systèmes à deux Points Matériels : Forces Centrales

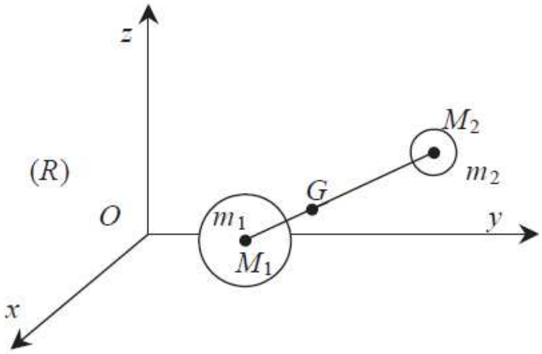
Nous nous proposons d'étudier un système de deux masses $\{m_1,m_2\}$ en interaction mutuelle ne subissant aucune action de l'extérieur. Le système $\{m_1,m_2\}$ est donc considéré comme mécaniquement isolé et sera caractérisé par son centre de masse G. Les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qu'exercent respectivement m_2 sur m_1 et m_1 sur m_2 sont des forces intérieures. Dans le cas de deux particules portant une charge électrique ces forces correspondent aux forces électrostatiques (loi de Coulomb). Au cours d'un choc entre deux particules elles correspondent aux actions de contact. Dans ce qui suit nous nous intéresserons au cas où les deux masses sont en interaction gravitationnelle.

I. ÉLÉMENTS CINÉTIQUES

1. Centre de masse

Considérons un système de deux masses ponctuelles localisées aux points M_1 et M_2. Nous rapportons l'étude à un référentiel galiléen $R(O,x,y,z)$.
On appelle centre de masse ou centre d'inertie ou encore centre de gravité ou barycentre d'un système de deux masses le point G dont la position est définie par :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$



Centre de masse d'un système constitué de deux masses

2. Vitesse et quantité de mouvement

Procédons à la dérivation de l'équation vectorielle précédente :

$$\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

<u>Théorème :</u>
La quantité de mouvement du centre de masse d'un système est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque élément du système.
Le système $\{m_1, m_2\}$ est mécaniquement isolé, ce qui conduit par dérivation à :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à chacune des masses donne :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 \ et \ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Ceci met en évidence le principe des actions réciproques (3ème loi de Newton) puisque la force que subit M_1 de la part de M_2 est opposée à la force subie par M_2 de la part de M_1.

3. Moment cinétique et énergie cinétique

Dans le référentiel R, le moment cinétique par rapport au point O du système de deux masses en interaction est égal à la somme vectorielle des moments cinétiques de chaque masse. Il en résulte que :

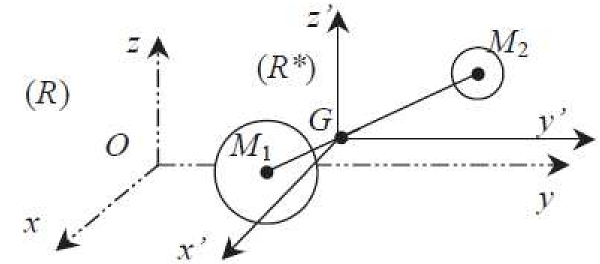
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$

De la même manière, l'énergie cinétique dans R est la somme des énergies cinétiques de chaque masse :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

II. RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE

1. Définition



Référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse.

On appelle référentiel du centre de masse ou référentiel barycentrique un référentiel noté R^* centré sur le centre de masse G du système et qui se déplace en translation par rapport au référentiel R galiléen.
Dans le cas de deux masses en interaction nous avons montré que la vitesse du centre de masse, par rapport à R, est constante. Le référentiel du centre de masse est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à R; c'est par conséquent un référentiel galiléen.

L'origine étant prise sur G, il est clair que la vitesse de G dans R^* est nulle.

2. Définition des éléments cinétiques dans R^*

Les éléments cinétiques que nous venons de définir dans R peuvent être définis dans R^*. Nous allons voir, en effet, que le mouvement des masses m_1 et m_2 est plus facile à étudier dans R^* que dans R. Nous travaillons donc dans le référentiel galiléen R^* (G, x, y, z) et un astérisque * indiquera que les grandeurs sont calculées dans ce référentiel.

a) Quantité de mouvement

Dans R^*, la quantité de mouvement totale est nulle puisque la vitesse du centre de masse G est nulle. On a donc :

$$m_1\vec{v}_1^* + m_2\vec{v}_2^* = \vec{0}$$

b) Energie cinétique

L'énergie cinétique dans R^* est égale à la somme des énergies cinétiques des masses m_1 et m_2 dans R^*. On a donc :

$$E_c^* = \frac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{*2}$$

c) Moment cinétique

Dans R^*, le moment cinétique par rapport à G du système est par définition :

$$\overrightarrow{L}^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \overrightarrow{v}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \overrightarrow{v}_2^*$$

Posons $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et en utilisant la relation $m_1 \overrightarrow{v}_1^* = -m_2 \overrightarrow{v}_2^*$

$$\overrightarrow{L}^* = (-\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2 \overrightarrow{v}_2^* = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge m_2 \overrightarrow{v}_2^* = \overrightarrow{r} \wedge m_2 \overrightarrow{v}_2^* = -\overrightarrow{r} \wedge m_1 \overrightarrow{v}_1^*$$

Remarquons que nous venons d'exprimer le moment cinétique du système en fonction de la distance r qui sépare les deux masses M_1 et M_2.

3. Masse réduite

a) Définition

Pour définir la notion de masse réduite, nous allons déterminer l'expression de la vitesse de la masse m_2 dans le référentiel barycentrique R^*. Nous utilisons la loi de composition de vitesse qui nous permet d'écrire que :

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_2^* + \overrightarrow{v}_{G/R}$$

avec :

$$\overrightarrow{v}_{G/R} = \frac{m_1 \overrightarrow{v}_1 + m_2 \overrightarrow{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Nous obtenons donc :

$$\overrightarrow{v}_2^* = \overrightarrow{v}_2 - \frac{m_1 \overrightarrow{v}_1 + m_2 \overrightarrow{v}_2}{m_1 + m_2}$$

soit

$$\overrightarrow{v}_2^* = \frac{m_1 (\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

Le terme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1$ apparaissant dans cette dernière expression n'est rien d'autre que la vitesse de M_2 par rapport à M_1

$$\overrightarrow{v}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{v}$$

On remarquera que la vitesse de M_2 par rapport à M_1 est donnée par :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1 = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}{\mathrm{d}t}$$

soit

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$$

La quantité de mouvement de la masse M_2 dans le référentiel barycentrique s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{p}_2^* = m_2 \overrightarrow{v}_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{p}_1^*$$

Le coefficient qui apparaît devant le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et qui est homogène à une masse est appelé *masse réduite* du système.

Définition

On appelle **masse réduite** d'un système de deux masses m_1 et m_2, la masse μ égale à :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

b) Expression des éléments cinétiques en fonction de la masse réduite

Les éléments cinétiques du système $\{m_1, m_2\}$ peuvent s'exprimer de façon concise en fonction de la masse réduite du système. Nous avons en effet :

$$\overrightarrow{p}_2^* = m_2 \overrightarrow{v}_2^* = \mu \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{p}_1^* = m_1 \overrightarrow{v}_1^* = -m_2 \overrightarrow{v}_2^* = -\mu \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{L}^* = \overrightarrow{r} \wedge m_2 \overrightarrow{v}_2^* = \mu \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$$

Dans le référentiel du centre de masse, l'énergie cinétique E_c est la somme des énergies cinétiques de chacune des deux masses soit :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$$

Si l'on remplace $\overrightarrow{v}_1^*$ et $\overrightarrow{v}_2^*$ par leur expression en fonction de $\overrightarrow{v}$, on a alors

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{-\mu \overrightarrow{v}}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\mu \overrightarrow{v}}{m_2} \right)^2$$

soit

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Le tableau 9.1 récapitule les expressions, en fonction de la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{v}$ de M_2par rapport à M_1, des éléments cinétiques dans le référentiel du centre de masse.

Quantité de mouvement de M_2	$\overrightarrow{p}_2^* = \mu \overrightarrow{v}$
Quantité de mouvement de M_1	$\overrightarrow{p}_1^* = -\mu \overrightarrow{v}$
Quantité de mouvement totale	$\overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{0}$
Moment cinétique	$\overrightarrow{L}^* = \mu \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$
Energie cinétique	$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu v^2$

Eléments cinétiques d'un système à deux corps exprimés dans le référentiel barycentrique.

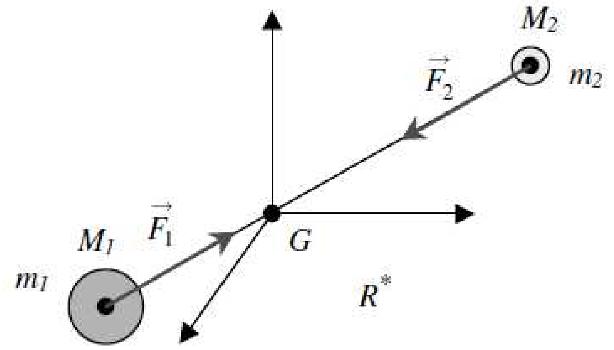
III. RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

1) Principe fondamental de la dynamique dans R^*

Le référentiel R^* est un référentiel galiléen. Il est donc possible d'y appliquer la relation fondamentale de la dynamique sans se préoccuper d'éventuelles forces d'inertie. Cette relation peut s'appliquer tout aussi bien à la masse m_1 qu'à la masse m_2. Nous avons donc :

$$m_1 \overrightarrow{a}_{M_1/R^*} = m_1 \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} \right)_{R^*} = \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F}_{M_2 \to M_1} = \overrightarrow{F}_1$$

$$m_2 \overrightarrow{a}_{M_2/R^*} = m_2 \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} \right)_{R^*} = \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F}_{M_1 \to M_2} = \overrightarrow{F}_2$$



Interaction entre deux masses m_1 et m_2

Les deux masses étant en interaction, les actions mutuelles qu'elles subissent sont opposées, ce qui conduit à :

$$m_1 \left.\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}\right)_{R^*} = \vec{F}_1; \quad m_2 \left.\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}\right)_{R^*} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\text{avec } \vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1} \text{ et } \vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}.$$

Nous obtenons ainsi deux équations différentielles du mouvement de ces deux masses.

2) Équation maîtresse

Par addition des deux équations ci-dessus, nous obtenons la relation suivante :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d^2(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{dt^2} = \vec{0}$$

Cette équation est valide en particulier dans le référentiel barycentrique et plus généralement dans tout référentiel galiléen. En intégrant une première fois cette relation, nous obtenons :

$$\boxed{m_1 \frac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r_2}}{dt} = \overrightarrow{cste}}$$

Par ailleurs :

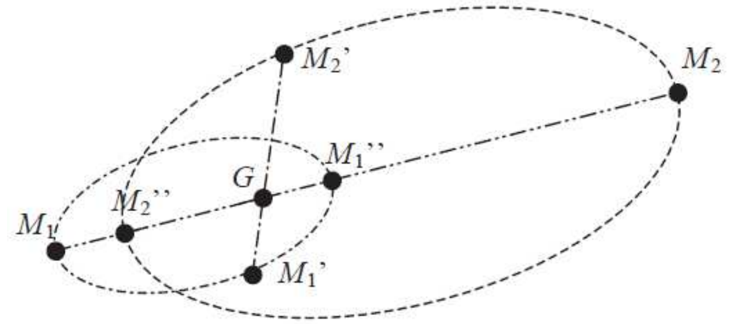
$$m_1 \frac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r_2}}{dt} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \overrightarrow{cste}$$

$$comme\ \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}_G = \overrightarrow{cste}$$

$$d'où\ \vec{v}_G = \overrightarrow{cste}$$

Ce qui montre que le centre de masse a un mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel d'étude. Si l'on fait le choix explicite (comme nous le faisons ici) de se placer dans le référentiel barycentrique, la constante est nulle puisque $\vec{v}_{G/R^*} = \vec{0}$. On retrouve le fait que, dans R^* , la quantité de mouvement de la masse m_1 est opposée à celle de la masse m_2. Une nouvelle intégration conduit ensuite à la relation de définition du centre de masse, à savoir :

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0} \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2$$



Trajectoire des centres d'inerties M_1 et M_2.

Remarquons que par le biais de cette relation, la connaissance de la position de la masse m_1 entraîne ipso facto celle de la position de m_2. On dit que les masses décrivent des trajectoires homothétiques de rapport $\frac{m_1}{m_2}$, ce que montre la figure ci-dessus.

Par multiplication de chaque équation de la relation fondamentale de la dynamique par la masse de l'autre objet, et soustraction des deux équations nous obtenons :

$$m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = m_2 \overrightarrow{F}_2 - m_1 \overrightarrow{F}_1$$

Or, d'après le principe des actions réciproques, $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2$, ce qui conduit à :

$$m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2(\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1)}{\mathrm{d}t^2} = m_2 \overrightarrow{F}_2 + m_1 \overrightarrow{F}_2 = (m_1 + m_2)\overrightarrow{F}_2$$

Il s'ensuit que

$$m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2(\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1})}{\mathrm{d}t^2} = m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{F}_2$$

ce qui conduit après introduction de la variable $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et de la masse réduite μ du système, à :

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F}_2$$

Cette équation est l'**équation maîtresse** du mouvement.

3) Conservation du moment cinétique

L'équation fondamentale de la dynamique est généralement utilisée pour traduire le mouvement de translation du système. Une grandeur très utile pour appréhender le mouvement de rotation est le moment cinétique. Dans R^*, l'expression du moment cinétique est donnée par :

$$L^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$$

La dérivée du moment cinétique du système s'écrit dans R^* :

$$\frac{d\vec{L^*}}{dt} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{v} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d\vec{L^*}}{dt} = \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ce qui après utilisation de l'équation maîtresse conduit à :

$$\frac{d\vec{L^*}}{dt} = \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_2$$

La force est la force d'interaction en provenance de M_1 qui agit sur M_2. Sa droite d'action a donc pour support le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, ce qui montre que la force est colinéaire à $\vec{r}$. On dit que *la force est centrale*..

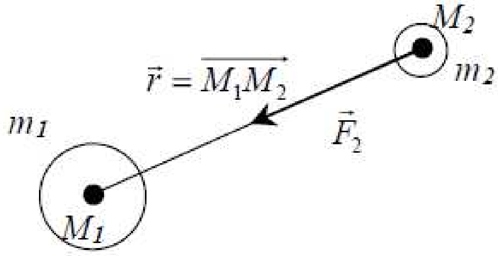


Illustration d'une force centrale ; le vecteur force est colinéaire au rayon vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

a) Définition

On appelle force centrale une force dont la droite d'action passe par l'origine du rayon vecteur $\vec{r}$.

Il en résulte que la dérivée du moment cinétique du système $\frac{d\vec{L^*}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_2$ est nulle dans R^*, ce qui montre que le moment cinétique du système est constant au cours du temps.

b) Théorème de la force centrale

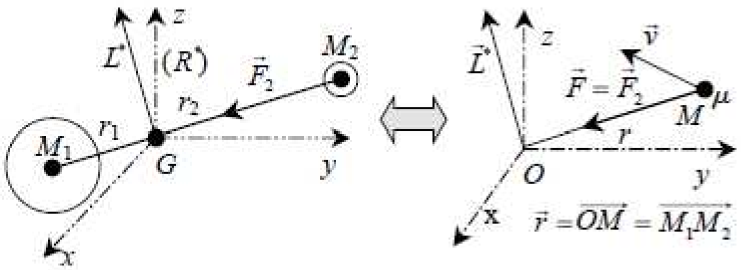
Dans un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique.

Pour un mouvement à force centrale, la trajectoire est contenue dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant.

4) Réduction du système à 2 corps : masse réduite ou masse fictive

Le mouvement des deux masses est un mouvement plan pour lequel il y a conservation du moment cinétique. Le mouvement est caractérisé dans le référentiel barycentrique par les éléments cinétiques suivants :

$\vec{p}_2^* = \mu \vec{v} = -\vec{p}_1^*$ $\vec{L^*} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ $\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ $E_C^* = \frac{1}{2}\mu v^2$	Le mouvement des deux masses M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique est déterminé par la connaissance, en fonction du temps, des vecteurs positions $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$. Pour cela il suffit de déterminer le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$. On constate alors que le problème se résume à l'étude du mouvement d'un point matériel fictif M de masse μ repéré dans un référentiel galiléen (muni d'une origine O) par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, se déplaçant à la vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ et subissant une force centrale $\vec{f} = \vec{F}_2$. Cela signifie que le problème à deux corps a été *réduit* à un problème à *un seul corps* de masse μ appelé masse réduite du système.

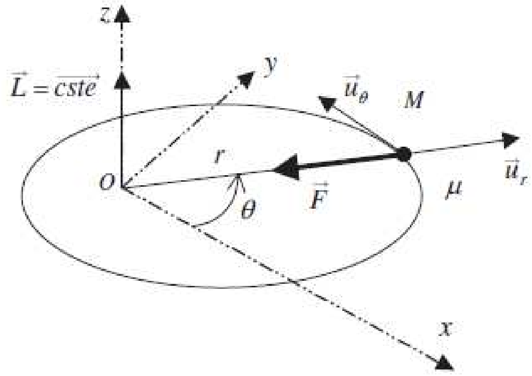


Système à deux corps équivalent à un système à un corps
de masse m soumis à une force centrale.

IV. PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT

1) Loi des aires

La conservation du moment cinétique des deux masses permet de définir une propriété nouvelle du mouvement. Nous étudions maintenant le mouvement du point matériel fictif M affecté de la masse μ dans le référentiel galiléen R(O, x, y, z, t) avec comme base d'étude la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.



Mouvement de la masse réduite dans le référentiel galiléen (O, x, y, z, t).

En appliquant le théorème du vecteur unitaire tournant, il est facile de voir que la vitesse du point M est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Le moment cinétique du système est donc égal à :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}_{M_2/M_1} = r\vec{u}_r \wedge \mu(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

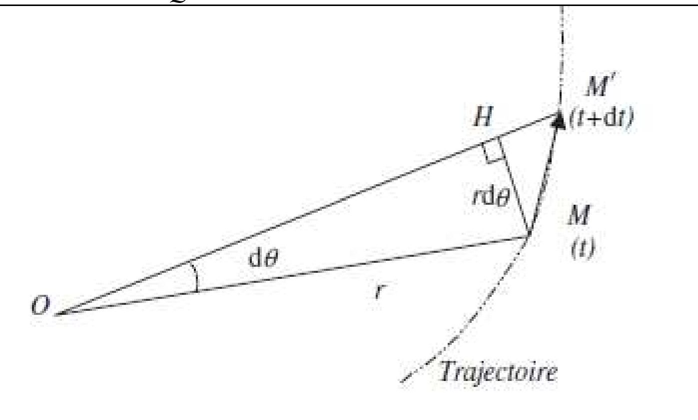
$$\vec{L} = \mu r^2\dot{\theta}\vec{k}$$

Nous avons montré que ce moment est constant, ce qui entraîne que la quantité :

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{\mu} = C$$

est constante. La constante C est appelée **constante des aires** . En effet, elle a une signification géométrique liée à l'aire balayée par le point M au cours de son mouvement. La figure 9.9 met en évidence que cette quantité représente deux fois l'aire balayée par unité de temps par le point M entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. On a ainsi :

$$C = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

	L'aire élémentaire dA balayée par le rayon OM pendant la durée dt est assimilable à l'aire du triangle OMM' qui est égale à $\frac{1}{2}(OM')(\mathrm{MH}) = \frac{1}{2}(r+dr)rd\theta$. Au premier ordre, par rapport aux infiniment petits dr et dθ (grossis volontairement sur le schéma), on obtient $\frac{1}{2}r^2 d\theta$. Cela revient à négliger la surface du triangle HMM' devant celle du triangle OMH.

L'aire élémentaire dA/dt balayée par le point M est constante au cours du temps ; l'aire totale balayée par le point M varie donc linéairement dans le temps.

2) Énergie mécanique

Lorsque le zéro de l'énergie potentielle est pris à l'infini, l'expression de l'énergie potentielle est donnée par:

$$E_P = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

Nous avons vu que l'énergie cinétique totale du système est $E_C = \frac{1}{2}\mu v^2$. L'énergie mécanique E du système des deux masses en interaction est donc :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

La vitesse du point M_2 est égale à $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (9.5) ce qui conduit à : $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.

Il en résulte que l'énergie mécanique du système s'écrit :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

Le mouvement est régi par la loi des aires. En utilisant la relation $C = r\dot{\theta}^2$ on obtient l'expression suivante :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

Le système est mécaniquement isolé, ce qui impose que l'énergie mécanique du système soit constante. Nous avons donc :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{P_{eff}}$$

Nous venons de faire apparaître dans l'expression de l'énergie mécanique une énergie potentielle dite **énergie potentielle effective**, qui ne dépend que de r et qui s'écrit :

$$E_{P_{eff}} = \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$$

Cette énergie, dont une partie provient de l'énergie cinétique, possède des propriétés remarquables quant à l'interprétation du mouvement du système.

3) Étude de l'énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective est constituée de la somme de deux termes de signes opposés. Le premier terme, positif, domine aux petits r alors que le second négatif, domine lorsque r devient grand. La somme de ces deux termes antagonistes est représentée sur la figure 9.10. On peut voir que l'énergie potentielle effective passe par un minimum qui correspond à l'annulation de la dérivée de l'énergie potentielle effective pour $r = r_0 = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G} m_1 m_2}$.

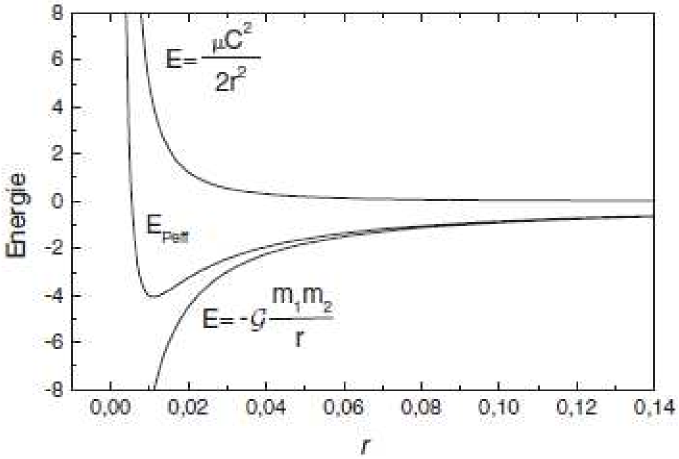


Diagramme d'énergie pour un système de deux masses en interaction.

4) États liés et états de diffusion

L'énergie potentielle effective est un excellent outil pour appréhender la nature de la trajectoire des deux objets. En effet, le système est conservatif, ce qui signifie que son énergie mécanique E est constante. Or l'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle effective et d'un terme relatif à l'énergie cinétique de la masse μ qui doit nécessairement être positif. On peut traduire cette condition de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - E_{P_{eff}} > 0$$

Il en résulte que l'énergie mécanique du système doit rester supérieure à son énergie potentielle effective. Cette condition définit les états possibles du système. La figure 9.11 représente l'allure de l'energie potentielle effective et deux valeurs de l'énergie mécanique. Elle fait apparaître que trois cas sont à distinguer, selon la valeur prise par E (valeur qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement) :

- $E > 0$: le système peut se déplacer entre une valeur limite r_{min} et l'infini. On dit que l'on a affaire à un **état de diffusion** car le système n'a qu'une limite imposée ;
- $E < 0$: le système est astreint, pour maintenir la condition $E > E_{Peff}$, à se déplacer entre deux positions r_{min} et r_{max}. On dit pour cette raison que l'état du système est un *état lié* . Quand $E = E_{Peff}(r = r_0)$, r ne peut prendre que la valeur r_0. La masse μ décrit donc un cercle ;
- $E = 0$: c'est un état intermédiaire entre les deux états précédents. Il correspond à la condition de passage entre l'état lié et l'état de diffusion et donc à la **libération** de l'état lié.