Chapitre 4 Circuits linéaires du second ordre soumis à un échelon de tension

Objectifs spécifiques:
OS1 : Expliquer le phénomène de régime transitoire
OS2 : Déterminer les caractéristiques d'un circuit RLC en régime transitoire

Introduction

Au chapitre 3, nous avons étudié les régimes transitoires des circuits du premier ordre RC et RL dont on a résolu les équations différentielles pour trouver les expressions des tensions et intensités.

Dans ce chapitre, nous allons ici étudier dans le même esprit le régime transitoire du circuit RLC série qui comme nous allons le voir donne naissance à des oscillations électriques.

Le circuit RLC étant du deuxième ordre, ce sera aussi le cas de son équation différentielle.

Elle fera alors apparaître la notion de régimes : selon l'amortissement du circuit par effet Joule, le régime transitoire est différent.

1. ÉQUATION DIFFERENTIELLE DU CIRCUIT RLC SERIE

On étudie le circuit RLC soumis à une tension e(t), on s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité qui parcourt le circuit. La bobine est idéale.

On applique la loi des mailles:

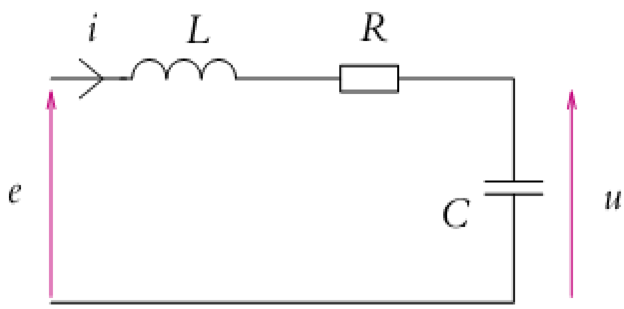

Figure 4.1 Circuit RLC série

$$u + Ri + L\frac{di}{dt} = e$$

Comme la relation tension-intensité pour un condensateur s'écrit : $i = C\frac{du}{dt}$

On obtient finalement l'équation différentielle suivante :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = e$$

Cette équation différentielle est une équation du second ordre à coefficients constants et second membre non nul, le circuit RLC série est appelé circuit du second ordre.

2. ETUDE DU REGIME LIBRE

Nous allons nous intéresser dans un premier temps au comportement du circuit lors que le condensateur à été préalablement chargé sous la tension E du générateur, et lorsqu'il se décharge dans la bobine et la résistance.

L'équation différentielle correspondant à ce régime libre (appelé aussi régime propre) est la suivante :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=0$$

On cherche donc une solution de cette équation qui est une équation homogène. Cette solution est du type $u = A exp(rt)$ avec A une constante.

Si on injecte cette solution dans l'équation précédente et que l'on élimine la solution u = 0 qui n'a pas de sens physique, on obtient :

$$LCr^2u+RCru+u=0 \quad \text{soit} \quad r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{LC}=0$$

Cette dernière équation est appelée polynôme caractéristique de l'équation différentielle. Trouver les solutions de ce polynôme permet de trouver les solutions de l'équation différentielle. Pour la résolution de l'équation différentielle, nous allons utiliser des variables dites "réduites".

2-1 Définition des variables réduites

L'intérêt des variables réduites est d'utiliser des variables de même dimension dans la résolution de l'équation. On peut donc appliquer sa résolution dans n'importe quel système d'unité.

2-1.1 Pulsation propre

Celle-ci correspond à la pulsation des oscillations en l'absence de "frottements" (amortissement par effet Joule ici) soit pour R = 0 :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 : pulsation propre en rad.s^{-1}, L: inductance de la bobine en henry (H), C : capacité du condensateur en Farad (F).

2-1.2 facteur d'amortissement

Il est lié à la résistance globale du circuit. Plus ce facteur sera grand, plus l'amortissement sera élevé :

$$\lambda=\frac{R}{2L}$$

λ : facteur d'amortissement exprimé en s^{-1}, L: inductance de la bobine en henry (H), R: résistance totale du circuit exprimée en Ohm (Ω).

2-1.3 Coefficient d'amortissement

Il est intéressant de travailler avec une grandeur sans dimension. On définit alors le coefficient d'amortissement par :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

Ce coefficient peut être exprimé en fonction des valeurs des composants du circuit :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

2-1.4 Facteur de qualité

Pour caractériser un circuit, on utilise souvent une autre grandeur appelée facteur de qualité. Elle est reliée à toutes les grandeurs dont on vient de parler :

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

En utilisant ces variables réduites, on peut donc écrire le polynôme caractéristique de la manière suivante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

2-2 Les différents régimes

Le polynôme caractéristique acceptant plusieurs solutions selon la valeur de son discriminant, il en est de même pour l'équation différentielle.

Le discriminant a pour expression :

$$\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right) = 4\omega_0^2\left(\alpha^2 - 1\right)$$

Selon son signe on distingue trois régimes :

2-2.1 Régime apériodique (fortement amorti) : Δ > 0

Si $\Delta > 0$ alors $\lambda > \omega_0$; $\alpha \succ 1 \Leftrightarrow R \succ 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow Q \prec 1/2$

Racines du polynôme

Le polynôme admet deux racines négatives, on a :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 - \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$u(t) = A_1 \exp(r_1 t) + A_2 \exp(r_2 t)$$

Les racines étant toutes deux négatives, on s'assure que la solution u(t) ne tend pas vers l'infini, cela n'aurait pas de signification physique.

Détermination des constantes

On peut utiliser les conditions initiales pour expliciter les constantes A_1 et A_2. C'est parce que le circuit est du deuxième ordre qu'existent ces deux constantes et qu'il faut deux conditions initiales pour les déterminer.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur implique que u (t = 0) =E.

La continuité de l'intensité dans la bobine implique que i(t = 0) = 0.

On obtient alors deux équations à deux inconnues qui nous permettent de déterminer A_1 et A_2.

$$u(t=0) = A_1 + A_2 = E$$

$$i(t=0) = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \Leftrightarrow A_2 = -\frac{r_1 A_1}{r_2}$$

En remplaçant l'expression de A_2 dans la première condition aux limites on obtient l'expression de A_1:

$$A_1 - \frac{r_1 A_1}{r_2} = E \Leftrightarrow A_1 = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1}$$

L'expression de A_2 s'écrit alors :

$$A_2 = -\frac{r_1 E}{r_2 - r_1}$$

Expression et allure de la tension aux bornes du condensateur

$$u(t) = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1} exp(r_1 t) - \frac{r_1 E}{r_2 - r_1} exp(r_2 t)$$

Lorsque $\alpha > 1 \leftrightarrow Q < ½$, il n'y a pas d'oscillations électriques car l'amortissement est trop fort.

On remarque qu'à t=0, la pente de u(t) est nulle : **e**n effet $i(t=0) = C\frac{du}{dt} = 0$

Expression et allure de l'intensité dans le circuit

En utilisant la relation $i(t) = C\frac{du}{dt}$, on trouve l'expression de l'intensité :

$$i(t) = \frac{r_2 r_1 EC}{r_2 - r_1}\left[exp(r_1 t) - exp(r_2 t)\right]$$

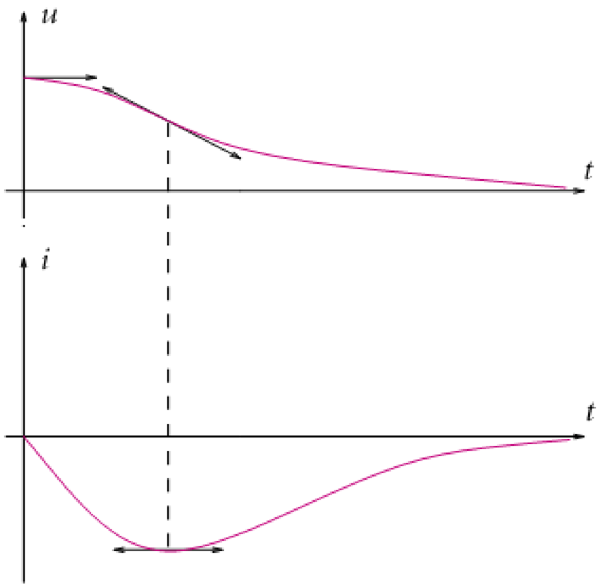

Figure 4.2 Tension aux bornes du condensateur et intensité dans le circuit en régime apériodique libre du circuit R LC série

2-2.2 Régime critique : Δ = 0

Si Δ = 0 alors λ = ω0 ; $\alpha = 1 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Leftrightarrow Q = 1/2$

La valeur de la résistance pour laquelle ce discriminant est nul est appelée *résistance critique*

Racines du polynôme

Le polynôme admet une racine double négative, on a :

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0$$

Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle s'écrit: $u(t) = (A_1 t + A_2)\exp(-\lambda t)$

Détermination des constantes

On utilise les mêmes conditions que précédemment :

$u(t=0) = A_2 = E$ soit $A_2 = E$

On exprime le courant :

$$i(t) = -\lambda C(A_1 t + A_2)\exp(-\lambda t) + A_1 C\exp(-\lambda t) = C\exp(-\lambda t)[A_1 - \lambda(A_1 t + A_2)]$$

La condition de continuité donne : $i(t=0) = A_1 - \lambda A_2 = 0$ soit $A_1 = \lambda A_2 = \lambda E$

Expression et allure de la tension aux bornes du condensateur

$$u(t) = E(\lambda t + 1)\exp(-\lambda t)$$

Le régime critique étant le premier régime apériodique, l'allure de la courbe est identique à celle du régime apériodique, le "retour à l'équilibre " se fait plus rapidement.

Expression et allure de l'intensité dans le circuit

En utilisant la relation $i(t)=C\dfrac{du}{dt}$, on trouve l'expression de l'intensité :

$$i(t)=-CE\lambda^2 t\,exp(-\lambda t)$$

De la même manière que précédemment, on retrouve l'allure de l'intensité du courant du régime apériodique.

2-2.3 Régime pseudopériodique (amorti en exponentielle) : Δ < 0

Si $\Delta < 0$ alors $\lambda < \omega_0$; $\alpha \prec 1 \Leftrightarrow R \prec 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \Leftrightarrow Q \succ 1/2$

Racines du polynôme

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées, on a :

$$\Delta = 4j^2\left(\omega_0^2-\lambda^2\right)=4j^2\omega_0^2\left(1-\alpha^2\right)=4j^2\omega^2$$

$$r_1=-\lambda+j\omega \text{ et } r_2=-\lambda-j\omega$$

avec $\omega=\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$

Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle est la combinaison linéaire de deux solutions complexes :

$u_1(t)=exp(r_1t)=exp[(-\lambda+j\omega)t]$ et $u_2(t)=exp(r_2t)=exp[(-\lambda-j\omega)t]$ donnent

$$u(t)=C_1\,exp(r_1t)+C_2\,exp(r_2t)$$

avec C_1 et C_2 des constantes complexes.

On peut montrer qu'à partir de ces deux solutions complexes, on peut construire deux solutions réelles tout aussi solutions de la même équation différentielle. Ces deux solutions réelles sont :

$$u_3(t)=\frac{u_1+u_2}{2}=exp(-\lambda t)cos(\omega t) \text{ et } u_4(t)=\frac{u_1-u_2}{2}=exp(-\lambda t)sin(\omega t)$$

La solution réelle de l'équation différentielle est alors une combinaison linéaire de u_3 et u_4 :

$$u(t)=\left[A_1\,cos(\omega t)+A_2\,sin(\omega t)\right]exp(-\lambda t)$$

avec A_1 et A_2 des constantes réelles.

Remarque : La solution de l'équation différentielle peut également se permettre sous la forme :

$$u(t)=A\,cos(\omega t+\phi)exp(-\lambda t)$$

Détermination des constantes A_1 et A2

Première condition

$u(t=0)=A_1=E$ soit $A_1=E$

On calcule l'intensité du courant :

$$i(t) = C\,exp(-\lambda t)[-A_1\omega\,sin(\omega t) + A_2\omega\,cos(\omega t) - A_1\lambda\,cos(\omega t) - A_2\lambda\,sin(\omega t)]$$

Deuxième condition :

$i(t=0) = A_2\omega - A_1\lambda = 0$ soit $A_2 = \dfrac{\lambda}{\omega}E$

Expression et allure de la tension aux bornes du condensateur

$$u(t) = E\left[cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}sin(\omega t)\right]exp(-\lambda t)$$

Cette solution se découpe en deux parties :

– une partie oscillante à la pulsation ω ;

– une amplitude décroissante de manière exponentielle.

Expression et allure de l'intensité dans le circuit

On a :

$$i(t) = -CE\left[\frac{\omega^2 + \lambda^2}{\omega}\right]sin(\omega t)exp(-\lambda t)$$

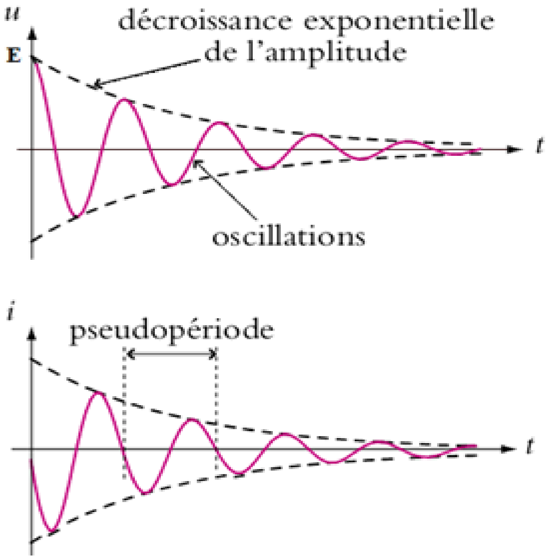

Figure 3.3 Tension aux bornes du condensateur et intensité dans le circuit en régime pseudopériodique libre du circuit R LC série

Pseudo-période des oscillations

On observe donc des oscillations électriques à la pulsation ω, donc de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}}$$

On parle de pseudo- période car l'amplitude décroît.

La pseudo-période est voisine mais plus grande que la période propre du circuit (celle qui correspond à un circuit non amorti (R =0)).

Plus l'amortissement est fort (α augmente), plus la pseudo-période s'éloigne de la période propre $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

2-2.4 Comparaison des trois régimes

Les résultats précédents peuvent être résumés par la figure suivante :

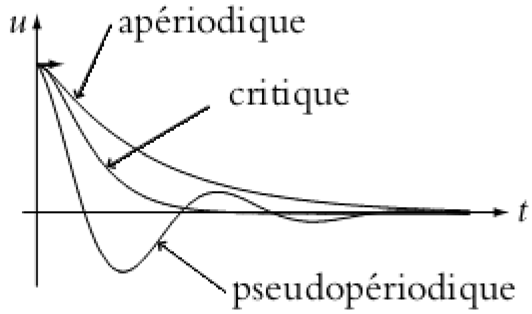

Figure 3.4 Les trois régimes d'un circuit R LC série

3. REPONSE DU CIRCUIT RLC SERIE A UN ECHELON DE TENSION

L'équation différentielle concernant la tension aux bornes du condensateur dans ce cas a la forme suivante :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E$$

La solution est donc la somme :

• de la solution de l'équation homogène associée ou régime libre u_{libre} (t) qui vient d'être déterminée,

• d'une solution particulière de l'équation avec second membre, que l'on cherche constante u = E.

La solution globale s'écrit : $u(t) = u_{libre}(t) + E$

On retrouve pour $u_{libre}(t)$ l'un des trois cas précédents.

Mais la détermination des constantes de la solution homogène doit être effectuée en tenant compte de la solution particulière. Ainsi :

– on écrira la solution de l'équation homogène avec ces constantes ;

– on lui a joutera la solution particulière ;

– et en dernier lieu, on déterminera les constantes avec les conditions initiales.

4. ASPECTS ENERGETIQUES

Comme pour les circuits du premier ordre, on reprend l'équation différentielle pour réaliser l'étude énergétique. On l'écrit :

$$\frac{Ldi}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e$$

Et on la multiplie par $idt = \frac{dq}{dt}dt$ soit :

$$Li\frac{di}{dt}dt + Ri^2dt + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = eidt$$

Soit

$$d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) + Ri^2dt = eidt$$

Ces différents termes peuvent s'interpréter de la façon suivante.

1. $eidt$ est l'énergie fournie par le générateur entre t et t +dt ,

2. Ri^2dt est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sous forme de chaleur entre t et t +dt,

3. $d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right)$ correspond à la variation d'énergie entre t et t +dt :

- magnétique $\frac{Li^2}{2}$ de la bobine,
- électrostatique $\frac{q^2}{2C}$ du condensateur.

Cette énergie est stockée ou cédée lors du passage d'un courant dans le circuit.

Le bilan énergétique montre que l'énergie apportée par le générateur est en partie dissipée par effet Joule dans la résistance et en partie stockée dans la bobine et dans le condensateur. Ces derniers peuvent à leur tour céder cette énergie quand il n'y a plus de générateur, cette énergie cédée est alors dissipée dans la résistance.