Programme Electrocinétique

CT 20h TD 10h

Prérequis

Cours d'Electrostatique

Objectifs généraux

A l'issue des enseignements, les étudiants devraient être capables de :
1. Connaitre les critères de l'approximation des régimes quasi-stationnaires
2. Appliquer les méthodes de résolution des circuits linéaires en courant continu et alternatif
3. comprendre les lois de l'électrocinétique (régime variable)
4. appliquer les lois de l'électrocinétique (régime variable)

Contenu

- Circuits électriques dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires
- Méthodes de résolution des circuits linéaires en courant continu et alternatif
- Circuits linéaires en régime variable : Circuit linéaire soumis à un échelon de tension, Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé

Table des matières

Chapitre 1 : Circuits électriques dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

Chapitre 2 : Méthodes de résolution des circuits linéaires en courant continu

Chapitre 3 : Circuits linéaires du premier ordre soumis à un échelon de tension

Chapitre 4 : Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Bibliographie et webographie

1) Mini manuel Electromagnétisme, Electrostatique magnétostatique Cours et exercices corrigés, M. Henry, A. Kassiba, Dunod, Paris 2009

2) Physique Tout-en-un 1ère année MPSI-PCSI-PTSI Cours et exercices corrigés, 3è édition, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset, Dunod, Paris, 2002, 2003, 2008

3) Physique Tout-en-un 1ère année MPSI/PTSI, Bernard Salamito, Damien Jurine, Stéphane Cardini, Marie-Noëlle Sanz, Dunod, Paris 2013.

4) CAPES de Sciences physiques, Tome 1-Physique Cours et exercices, 3è édition, N. Billy, J. Desbois, M. A. Duval, M. Elias, P. Monceau, A. Plaszczynski, M. Toulmonde, Belin, Paris 2004

5) http://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php

6) www.physagreg.fr/electromagnetisme/em5/EM15-essentiel.pdf

7) *www.physagreg.fr/electromagnetisme/.../EM18-notions-induction.p.*

Enseignant Chargé du cours : Abdoul Karim KAGONE

Maître de Conférences en Matériaux - Physique des plasmas

Département de Physique/UFR-SEA/ Université Joseph KI-ZERBO

Chapitre 1 : Circuits électriques dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires

Objectifs spécifiques :

OS1 : Enoncer les lois de l'électrocinétique (courant continu)
OS2 : Appliquer les lois de l'électrocinétique aux circuits linéaires en courant continu

Introduction

L'électrocinétique est l'étude du mouvement des porteurs de charge libres ou particules chargées qui se déplacent dans la matière sous l'action d'un champ électrique et donnent ainsi naissance à un courant électrique.
Ce chapitre sera l'occasion de définir les bases de l'électrocinétique, de revoir les grandeurs physiques comme la tension et le courant, ainsi que les lois qui les concernent dans un circuit quelconque.

I. Courant électrique

1) Définition

On appelle courant électrique, tout déplacement ordonné de porteurs de charge.
Dans les métaux, les porteurs de charge sont les électrons libres tandis que dans les solutions électrolytiques ce sont les ions (cations et anions).
Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement des porteurs de charge positive. C'est donc aussi le sens opposé au déplacement des porteurs de charge négative.

2) Intensité du courant électrique

Soient *S* la surface de base (section) d'un conducteur filiforme et *dq* la charge électrique qui traverse cette section pendant l'instant *dt* :

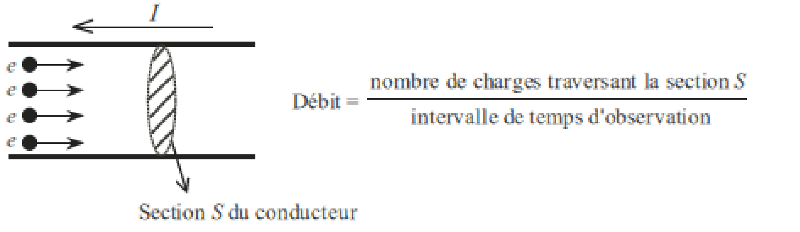


Figure 1.1 Intensité du courant électrique

On appelle intensité du courant électrique traversant la surface *S* à l'instant *t*, la grandeur algébrique :

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

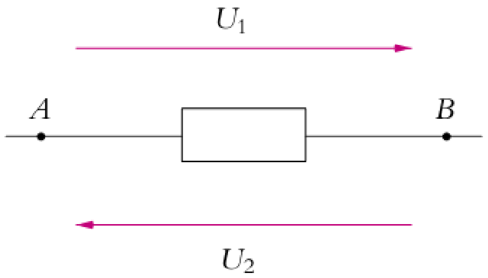
L'intensité du courant électrique se définit comme *un débit de charges* à travers une surface. Elle s'exprime en coulomb par seconde (C/s) ou en ampère (A).
L'intensité du courant électrique tout comme la charge électrique est une ***grandeur algébrique*** pouvant être positive ou négative.
L'intensité d'un courant électrique se mesure avec un **ampèremètre**.
L'usage consacre la lettre majuscule I pour des intensités constantes et la minuscule i pour des intensités variables dans le temps.
L'ordre de grandeur de l'intensité du courant étant très variable, on définit les domaines de :

• l'électronique signal (électronique numérique), où les intensités des courants sont de l'ordre de grandeur du mA. Cette électronique est celle des téléphones portables.
• l'électrotechnique, où les courants peuvent atteindre 10^3A. On peut citer dans ce cas les moteurs électriques des TGV (500 à 10^3 A) ou la consommation électrique d'une usine.
• les phénomènes naturels, par exemples les éclairs d'orages où l'intensité du courant peut atteindre 50.10^3 A, pendant une durée très brève.

II. Tension électrique

1) Différence de potentiel et tension électrique

Au repos, les charges électriques d'un conducteur sont en mouvement désordonné sous l'effet de l'agitation thermique. Cependant, ce mouvement ne se traduit pas par un déplacement global de charge susceptible de générer un courant électrique.
Pour mettre ces charges en mouvement dans une direction donnée, il est nécessaire d'appliquer une *différence de potentiel (d.d.p)* aux bornes du conducteur. Cette *différence de potentiel (d.d.p)* va donner naissance à un champ électrique à l'intérieur du conducteur. En présence de champ électrique, les électrons du conducteur seront soumis à une force électrique et auront un mouvement ordonné qui donnera naissance à un courant électrique.
La différence de potentiel est appelée *la tension électrique*. On la note *U* et elle s'exprime en *Volt.* Ainsi la tension U_{AB} entre deux points A et B d'un conducteur est égale à la différence de potentiel entre ces deux points A et B : $\boxed{U_{AB} = V_A - V_B}$



On indique toujours une tension sur un schéma par une flèche dont le sens est très important. En effet, il s'agit du choix de l'orientation de la tension soit $U_1 = V_B – V_A$ soit $U_2 = V_A − V_B$.
Ce choix, comme celui de l'orientation de l'intensité, est parfaitement arbitraire mais permet de déterminer le point dont le potentiel est le plus élevé. Ainsi si $U_2 > 0$ alors le point A a un potentiel plus élevé que le point B.

Figure 1.2 Représentation de la tension

Un générateur électrique permet de maintenir des tensions dans un circuit, afin d'imposer la circulation d'un courant électrique.
La tension entre deux points se mesure avec un **voltmètre**.
L'usage consacre la lettre majuscule U pour des tensions constantes et la minuscule u pour des tensions variables dans le temps.
L'ordre de grandeur d'une tension étant très variable, on peut citer :
• la tension entre les extrémités d'un éclair lors d'un orage, jusqu'à 500 MV,
• la tension domestique délivrée par la SONABEL, 230 V,
• la tension dans les circuits d'un téléphone portable, quelques mV à quelques centaines de mV.

2) Masse ou référence de potentiel

La tension électrique peut être mesurée expérimentalement grâce à un voltmètre ou un oscilloscope par contre aucun appareil ne permet d'accéder à la mesure du potentiel en un point donné.
Le potentiel est un état électrique dont la valeur en un point est définie à une constante près.
Pour fixer cette constante, on choisit arbitrairement une référence de potentiel nul, qu'on appelle la ***masse***.

Ainsi si on choisit par exemple comme masse une borne de l'oscilloscope, ce dernier donne la tension entre ses deux bornes.

Pour des raisons de sécurité, on relie la carcasse des appareils à la ***Terre***. Souvent la Terre est également reliée à une borne de l'appareil : la masse est alors prise à la Terre.

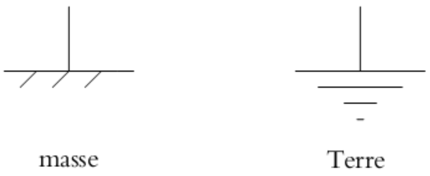


Figure 1.3 Symboles de la masse et de la Terre

3) La terre

Certaines prises possèdent, outre la phase et le neutre, une troisième fiche métallique apparente, nommée la **terre (figure 1.4)**. Elle est directement reliée à un conducteur métallique planté dans le sol. Cette prise de terre est obligatoire dans le cas d'équipement comportant une carcasse métallique, comme une machine à laver par exemple.

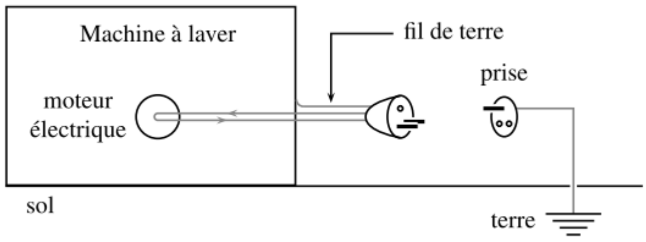


Figure 1.4 Branchement d'une prise de terre

La prise de terre est reliée à la carcasse métallique. Sans elle, en cas de faux contact, l'enveloppe de l'appareil peut être portée au potentiel de la phase, et électrocuter un utilisateur qui la toucherait. Avec la prise de terre, la carcasse reste au potentiel de la terre. Les pieds et la main de l'utilisateur qui touche l'appareil, sont au même potentiel ; donc il ne court aucun danger.

III. Régimes continus ou variables-approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

1) Régime continu ou variable

On dit qu'on est en *régime continu* lorsque toutes les grandeurs sont indépendantes du temps ; ce sera notamment le cas des intensités et des tensions que l'on notera I et U.

A contrario, on parle de *régime variable* quand les grandeurs dépendent du temps. Exemples : i(t) et u(t)

Le caractère variable peut avoir plusieurs origines possibles pouvant se combiner :

• modification des conditions extérieures faisant passer d'un régime continu à un autre : on parlera alors de régime transitoire,

• conditions extérieures variables par exemple de type sinusoïdales ou créneau : on parlera alors de régime forcé.

2) Approximation des régimes quasi-stationnaires ou ARQS

2-1 Définition

Quel que soit le régime (continu ou variable), l'intensité du courant est la même en tout point d'une branche d'un circuit.

2-2 Validité

Cette approximation est valable pour un régime variable si le temps caractéristique de sa variation (τ pour la charge ou décharge d'un condensateur, T pour un signal sinusoïdal imposé par un GBF) est grand devant le temps de propagation de l'intensité.

Cette approximation sera possible si les dimensions du circuit ne sont pas trop grandes, car l'intensité se propageant à une vitesse proche de celle de la lumière, le temps de propagation est $\frac{L}{c}$ ce qui fait 10^{-8} s pour un circuit d'1 mètre de longueur.

Les régimes variables étudiés ont des temps caractéristiques bien plus grand (ex: régime transitoire de la décharge d'un condensateur de capacité 1µF dans une résistance de 500Ω : $5\tau = 5RC = 2{,}5\,10^{-3}\,s \succ\succ 10^{-8}\,s$)

IV. Conventions récepteur et générateur

Il existe deux possibilités d'orientations relatives de la tension et de l'intensité au niveau d'un dipôle : de même sens ou de sens opposés.

Ces deux orientations relatives conduisent à deux conventions possibles :

- la *convention récepteur* où l'intensité I et la tension U sont choisies de sens opposé,
- la *convention générateur* où l'intensité I et la tension U sont choisies de même sens.

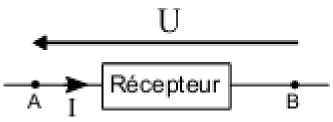


Figure 1.5.a Convention récepteur

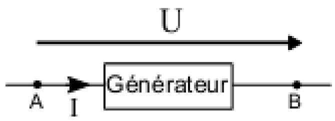


Figure 1.5.b Convention générateur

V. Dipôles passifs

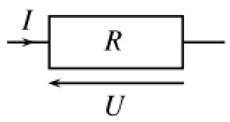
Un dipôle passif est un dipôle qui ne peut pas créer lui-même du courant. S'il n'est soumis à aucune tension, aucun courant ne le traverse. Sa caractéristique passe par l'origine du repère.

1) Conducteur ohmique

1.1 Loi d'Ohm

Un conducteur ohmique est le dipôle passif le plus simple, où la tension appliquée est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse : c'est la loi d'Ohm. La constante de proportionnalité est nommée résistance et notée R et s'exprime en ohm, de symbole Ω.

$$\boxed{U = RI}$$



Les valeurs numériques des résistances sont très variables, de quelques Ω à plus de $10^7\ \Omega$.

Une résistance « moyenne » en électronique est de l'ordre de 1000 Ω = 1 kΩ.

Figure 1.6 Conducteur ohmique en convention récepteur

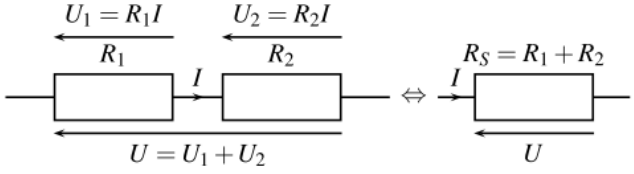
1.2 Effet Joule

L'effet Joule est la transformation d'énergie électrique en énergie thermique. La puissance Joule dissipée dans une résistance de valeur R, parcourue par un courant d'intensité I, soumise à une tension U, est :

$$\boxed{P = RI^2 = \frac{U^2}{R}}$$

2) Association de conducteurs ohmiques

2.1 Association en série



La tension aux bornes des deux résistances est :

$$U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = \left(R_1 + R_2\right) I = R_S I$$

Les deux résistances sont équivalentes à une seule résistance, de valeur $R_S = R_1 + R_2$.

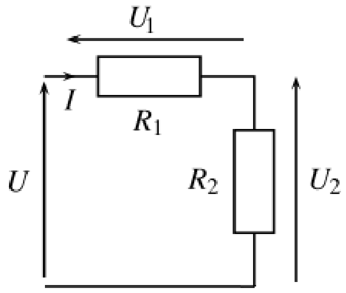
Figure 1.7 Association de résistances en série

Ce résultat est extrapolable à plus de deux résistances.

Plusieurs résistances R_i, montées en série, sont équivalentes à une unique résistance R_S, dont la valeur est la somme des résistances individuelles : $\boxed{R_S = \sum_i R_i}$.

2.2 Diviseur de tension

Un diviseur de tension est un circuit électrique qui permet, au prix d'une perte de puissance, de diminuer la valeur d'une tension.



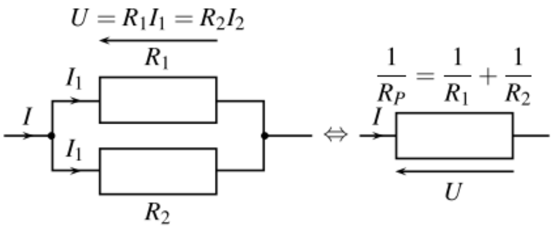
La loi des mailles impose :

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I \\ U_2 = R_2 I \\ U = \left(R_1 + R_2\right) I \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U} \text{ et } \boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U}$$

La tension U est multipliée par un terme inférieur à un, d'où le nom de diviseur de tension.

Figure 1.8 Diviseur de tension

2.3 Association en parallèle



La loi des nœuds impose :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{U}{R_p}$$

Les deux résistances sont équivalentes à une seule résistance R_P telle que : $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Figure 1.9 Association de résistances en parallèle

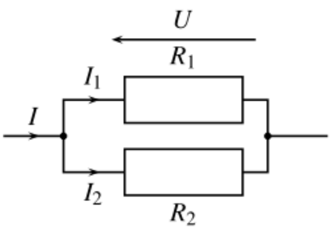
Ce résultat est extrapolable à plus de deux résistances.

Plusieurs résistances R_i montées en parallèle, sont équivalentes à une unique résistance R_P, telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$

2.4 Diviseur de courant

Un diviseur de courant permet de diviser un courant entre deux dipôles en parallèle.



En appliquant la loi d'Ohm on obtient :

$$U = R_{eq} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I \quad \text{or} \quad \begin{cases} I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I}$$

Figure 1.10 Diviseur de courant

Les intensités I_1 et I_2 sont des fractions de l'intensité totale I, ce qui explique la dénomination «diviseur de courant» donnée à ce circuit.

2.5 Transformation de Kennely ou transformation triangle-étoile

On considère le triangle formé des résistances R_{12}, R_{13}, R_{23}. On peut remplacer le montage triangle par un montage en étoile constitué de 3 résistances r_1, r_2 et r_3 branchées également entre les points A_1, A_2, A_3 de telle sorte que les 2 montages soient équivalents.

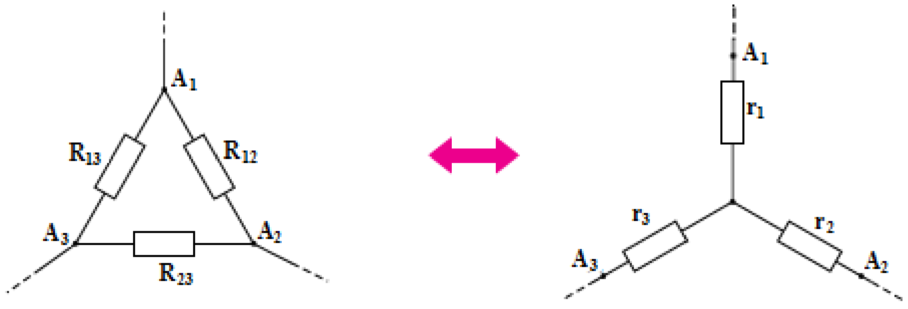


Figure 1.11 Transformation triangle-étoile

Objectif: on cherche les 3 résistances r_1, r_2 *et* r_3 du montage étoile en fonction des 3 résistances R_{12}, R_{13}, R_{23} du montage triangle.

$$\boxed{r_1 = \frac{R_{12}.R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}; \quad r_2 = \frac{R_{12}.R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}; \quad r_3 = \frac{R_{13}.R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}}$$

VI. Dipôles actifs

Un dipôle actif est un dipôle qui peut créer le passage d'un courant dans le circuit. Il a une fonction génératrice, il génère le déplacement des électrons dans le circuit, on le nomme **générateur**.
La caractéristique de ce genre de dipôles ne passe pas par l'origine du repère.

1) Générateur idéal de tension

Générateur idéal de tension = générateur qui délivre une tension constante quel que soit l'intensité débitée.

Tension délivrée = force électromotrice (f.é.m.), notée E et unité en *Volt (V).*

Sa caractéristique a pour équation : $\boxed{U = E}$

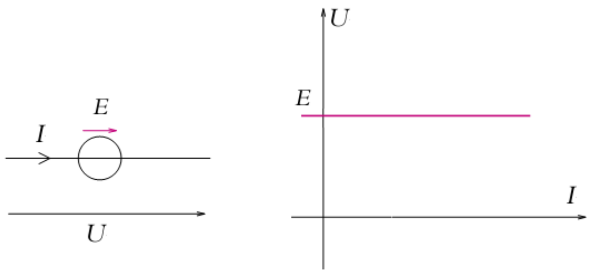


Figure 1.12 Symbole et caractéristique d'un générateur idéal de tension

2) Générateur idéal de courant

Générateur idéal de courant = générateur qui délivre une intensité constante quel que soit la tension à ses bornes.

Courant délivré = courant de court-circuit ou courant de Norton, noté I_N et unité *en Ampère (A).*

Sa caractéristique a pour équation : $\boxed{I = I_N}$

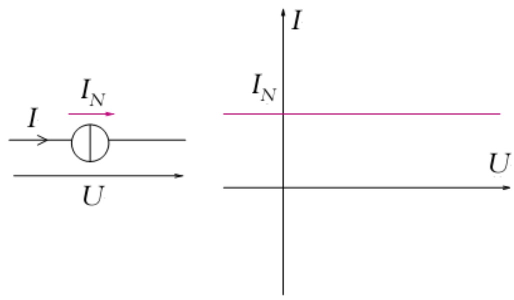


Figure 1.13 Symbole et caractéristique d'un générateur idéal de courant

3) Modèle de Thévenin

Tout générateur réel de tension peut être modélisé par un générateur idéal de tension de f. é. m E en série avec une résistance r appelée résistance interne du générateur.

4) Modèle de Norton

Tout générateur réel de courant peut être modélisé par un générateur idéal de courant I_N en parallèle avec une résistance r appelée résistance interne du générateur.

Sa caractéristique a pour équation : $\boxed{U = E - rI}$

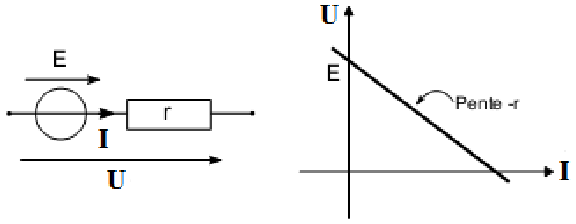


Figure 1.14 Modèle de Thévenin d'un générateur réel de tension

Sa caractéristique a pour équation :

$$\boxed{I = I_N - gU = I_N - \frac{U}{r}}$$

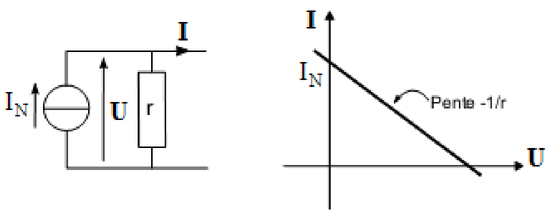
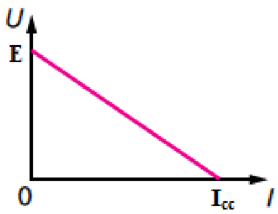


Figure 1.15 Modèle de Norton d'un générateur réel de courant

Remarque :

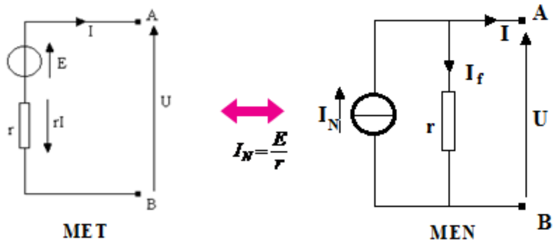
Tension de circuit ouvert et courant de court-circuit



Si I = 0 alors U = E : tension de circuit ouvert. C'est la plus grande tension disponible aux bornes d'un générateur de tension.

Si U = 0 alors I_{cc} = E/r : courant de courant-circuit. C'est le plus grand courant que le générateur de tension peut délivrer à un circuit.

Dualité MET-MEN



Chapitre 2 : Méthodes de résolution des circuits linéaires en courant continu

Objectifs spécifiques:

OS1 : Enoncer les lois de l'électrocinétique (courant continu)

OS2 : Appliquer les lois de l'électrocinétique aux circuits linéaires en courant continu

Introduction

Ce chapitre sera l'occasion de définir les lois de l'électrocinétique qui permettent de déterminer les tensions et les courants dans un circuit quelconque.

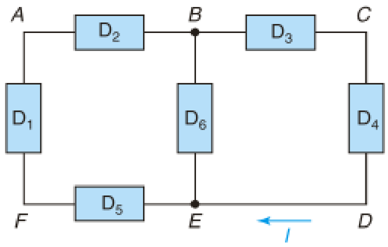
I. Lois de Kirchhoff

1) Terminologie des circuits

Un circuit électrique est un ensemble de conducteurs reliés entre eux par des fils de jonction et dans lequel circule un courant électrique. Un circuit électrique associe toujours un élément actif, ou générateur, qui délivre un certain courant et une certaine tension, et un élément passif, ou récepteur, qui les utilise. Dans un circuit électrique le générateur met en mouvement le courant, qui passe à travers le récepteur pour revenir dans le générateur.

• Un **dipôle** est un composant électrique relié au reste du circuit par deux bornes.

• Un **nœud** est un point où se rejoignent au moins trois branches.
• Une **branche** est une suite de dipôles entre deux nœuds consécutifs.
• Une **maille** est une partie d'un circuit électrique formant un contour fermé.

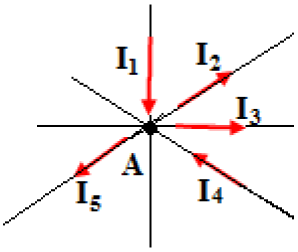


Sur la figure 2.1 :
• B et E sont des nœuds du circuit.
• BCDE, EFAB et EB sont les branches du circuit.
• la maille ABEFA est constituée des dipôles D_2, D_6, D_5, et D_1. Les contours fermés ABCDEFA et BCDEB sont les deux autres mailles du circuit.

Figure 2.1 circuit électrique

2) Loi des nœuds

Dans l'A.R.Q.S., il n'y a ni accumulation ni disparition de charge ; il y a conservation de la charge. La loi des nœuds traduit la loi de conservation de la charge.



La somme algébrique des courants qui convergent en un nœud est nulle. $\mathbf{I_1 + I_4 - I_2 - I_3 - I_5 = 0}$

Ou encore

La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent. $\mathbf{I_1 + I_4 = I_2 + I_3 + I_5}$

$$\boxed{\sum I_{entrant} = \sum I_{sor\tan t}}$$

Figure 2.2 Nœud d'un circuit

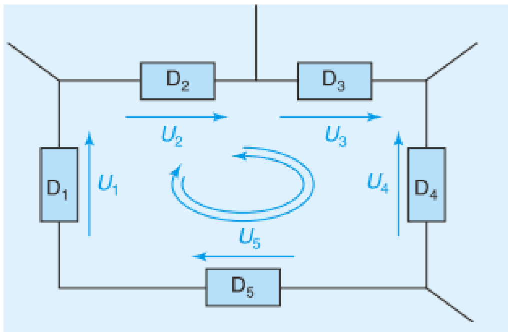
3) Loi des mailles

3.1 Loi des mailles

On choisit arbitrairement un sens de parcours (sens horaire ou anti-horaire).
La somme algébrique des tensions le long d'une maille comportant n branches est nulle :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la flèche tension U_k est dans le sens de parcours (positif choisi) et $\varepsilon_k = -1$ si la flèche tension U_k est dans le sens opposé à celui du parcours (sens opposé au sens positif choisi).

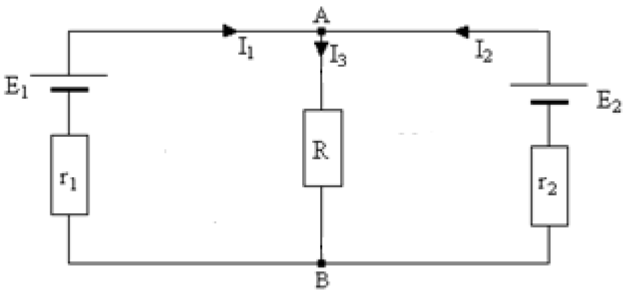


Sur la figure 2.3 :
• maille parcourue dans le sens horaire :
$U_1 + U_2 + U_3 - U_4 + U_5 = 0$
• maille parcourue dans le sens anti-horaire :
$-U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$

Figure 2.3 Maille d'un circuit électrique

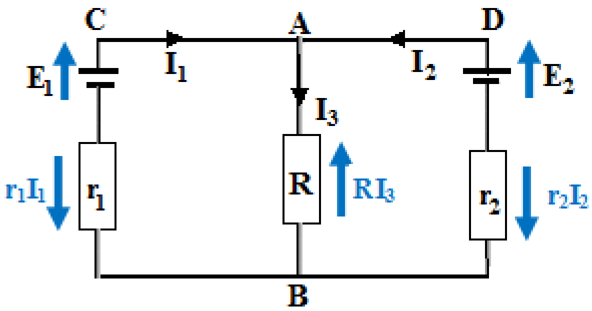
3.2 Application

Calculer les courants I_1, I_2 et I_3 ainsi que la tension U_{AB} aux bornes de la résistance R du circuit ci-dessous.
On donne : $E_1 = 6\ V$; $E_2 = 12\ V$; $r_1 = 1\ \Omega$; $r_2 = 2\ \Omega$ et $R = 10\ \Omega$



Résolution

1) En fonction de l'orientation du courant dans chaque branche, représentons la tension aux bornes des différents dipôles en utilisant les conventions générateur et récepteur.



2) Application des lois de Kirchhoff

Loi des nœuds : nœud A $I_3 = I_1 + I_2$

Loi des mailles : Maille 1 ABCA $E_1 - RI_3 - r_1 I_1 = 0$ ou $I_1 + 10I_3 = 6$

Maille 2 DBCD $E_1 - E_2 - r_1 I_1 + r_2 I_2 = 0$ ou $I_1 - 2I_2 = -6$

On obtient un système d'équations : $\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 & (1) \\ I_1 + 10.I_3 = 6 & (2) \\ I_1 - 2.I_2 = -6 & (3) \end{cases}$

3) Résolution du système d'équations

$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 & (1) \\ I_1 + 10.I_3 = 6 & (2) \\ I_1 - 2.I_2 = -6 & (3) \end{cases}$ En remplaçant I_3 dans l'équations (2), on a : $\begin{cases} 11.I_1 + 10.I_2 = 6 \\ I_1 - 2I_2 = -6 \end{cases}$

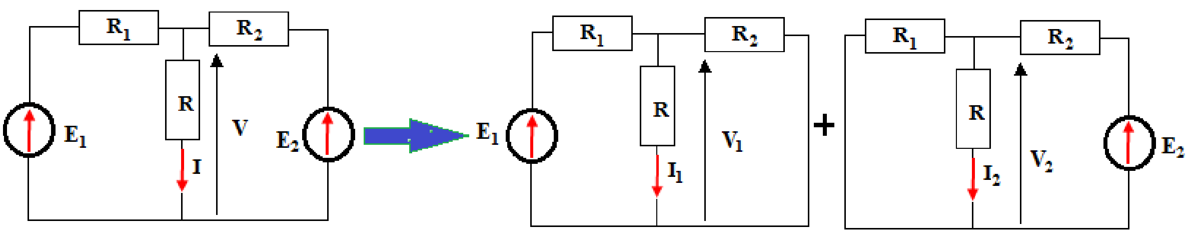
4) Solutions du système d'équation : $I_1 = -1.5A$, $I_2 = 2.25A$ et $I_3 = 0.75A$ $U_{AB} = R \cdot I_3 = 7.5V$

Remarque : *le signe négatif (-) de I_1 signifie que sur cette branche le sens réel du courant est contraire à celui imposé sur le schéma. Sur cette branche, le générateur 1 (E_1) se comporte comme un récepteur.*

II. Théorème de superposition

1) Enoncé

Dans un réseau linéaire alimenté par plusieurs sources indépendantes, l'intensité du courant circulant dans une branche (respectivement la tension entre 2 points) est la somme algébrique des intensités des courants (respectivement des tensions) dues à chaque source dans cette branche, les autres sources autonomes étant rendues passives.



$\boxed{I = I_1 + I_2}$ et $\boxed{V = V_1 + V_2}$

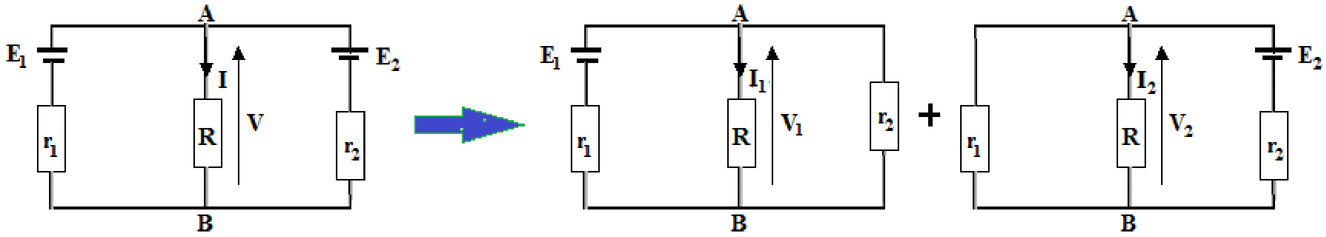
Remarque : *Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.*

2) Application 2

Calculer l'intensité du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

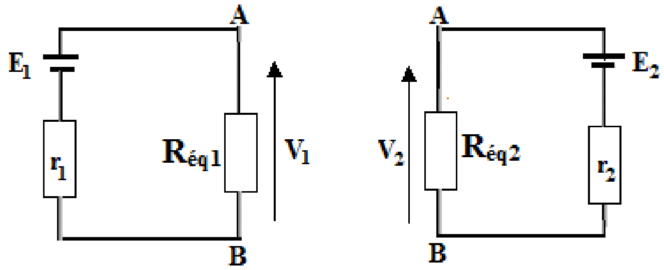
Résolution

Le circuit de l'exercice d'application 1 peut être transformé selon le schéma ci-dessous.



Circuit 1 Circuit 2

Les résistances R et r_2 (R et r_1) sont montées en parallèle par conséquent V_1 (V2) est la tension aux bornes de la résistance R (R) et aussi aux bornes de la résistance r_2 (r_1). V_1 (V2) est également la tension aux bornes de la résistance $R_{éq1}$ ($R_{éq2}$) par laquelle on peut remplacer R et r_2 (R et r_1).



Circuit 1 Circuit 2

En appliquant la loi du diviseur de tension aux circuits 1 et 2, on obtient :

$$V_1 = \frac{R_{éq1}}{R_{éq1}+r_1}E_1 = \frac{5/3}{(5/3)+1}6 = \frac{15}{4}V \text{ et } V_2 = \frac{R_{éq2}}{R_{éq2}+r_2}E_2 = \frac{10/11}{(10/11)+2}12 = \frac{15}{4}V$$

On calcule la tension V par le théorème de superposition : $V = V_1 + V_2 = 7.5V$

La loi d'Ohm permet de calculer l'intensité du courant: $I = \frac{V}{R} = \frac{7.5}{10} = 0.75A$

III. Loi des nœuds en termes de potentiels – Théorème de Millman

Considérons L conducteurs ohmiques de résistance (R_1, R_2, …, R_L) ayant un nœud commun N. Soit (I_1, I_2, …, I_L) les intensités des courants circulant dans chacune des résistances et orientés vers le point N.

Soit V_N le potentiel du nœud N et V_1, V_2, …, V_L les potentiels des extrémités des *L* branches. Les potentiels des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence.

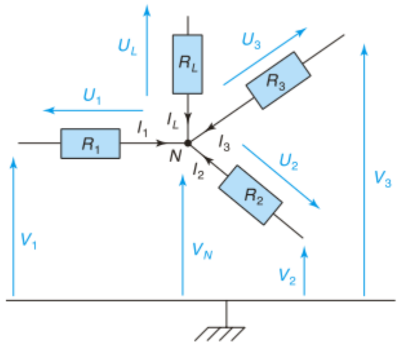


Figure 2.4 Loi des nœuds en termes de potentiels

On veut calculer le potentiel au point N en fonction de $\boldsymbol{R_L}$ et $\boldsymbol{V_L}$.

La loi des nœuds au point N s'écrit : $I_1 + I_2 + \ldots + I_L = 0$ or $U_L = V_L - V_N = R_L I_L$ soit encore $\frac{V_1 - V_N}{R_1} + \frac{V_2 - V_N}{R_2} + \ldots + \frac{V_L - V_N}{R_L} = 0$.

A partir de l'équation précédente on peut écrire que :

$$\boxed{V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \ldots + \frac{V_L}{R_L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_L}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_N = \frac{\sum_{i=1}^{L} \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{L} \frac{1}{R_i}}}$$

<u>Remarque</u> :

Le théorème de Millman n'est qu'une façon particulière d'exprimer la loi des nœuds.

Lorsque le circuit comporte des générateurs de tension et de courant, le théorème de Millman s'écrit :

$$\boxed{V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{E_i}{R_i} + I_{Ni}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}}}$$

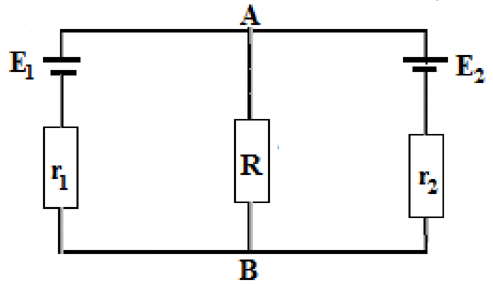
Application 3

Calculer les courants I_1, I_2 et I_3 ainsi que la tension U_{AB} aux bornes de la résistance R du circuit cde l'application 1. On donne : $E_1 = 6\ V$; $E_2 = 12\ V$; $r_1 = 1\ \Omega$; $r_2 = 2\ \Omega$ et $R = 10\ \Omega$

Résolution

1) Calcul du potentiel au point A

On prend le point B comme origine des potentiels ($\boldsymbol{V_B = V_{ref}}$). On a donc : $\boldsymbol{E_1 = 6\ V\ ;\ E_2 = 12\ V}$ ***et*** $\boldsymbol{V_B = 0}$.



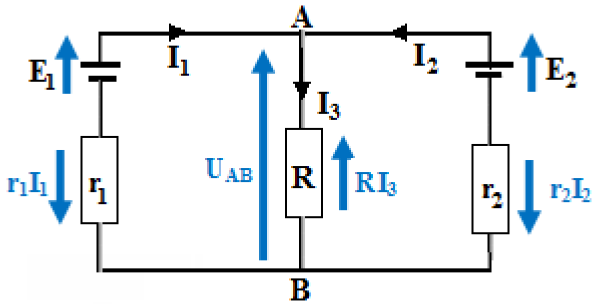
Le potentiel du point A se calcule en appliquant le théorème de Millman

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{0}{R}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}} \qquad \underline{\text{A.N}} : \quad V_A = \frac{\frac{6}{1} + \frac{12}{2} + \frac{0}{10}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = 7.5V$$

2) Calcul de la tension U_{AB} : $U_{AB} = V_A - V_B = 7.5V$

3) Calcul des courants I_1, I_2 et I_3 à partir de la loi d'Ohm

En tenant compte de l'orientation du courant dans chaque branche, on représente la tension aux bornes des différents dipôles en utilisant les conventions générateur et récepteur.



Pour la branche contenant ***R*** : $U_{AB} = V_A - V_B = R.I_3 = 7.5V \Rightarrow I_3 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{7,5}{10} = 0,75A$

Pour la branche contenant ***E₁*** : $U_{AB} = E_1 - r_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{r_1} = \frac{6-7,5}{1} = -1,5A$

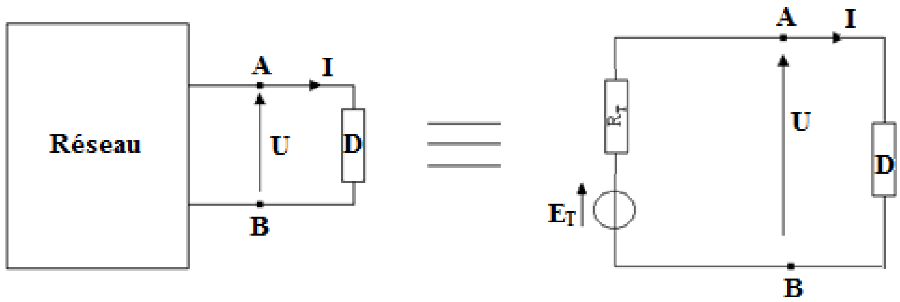
Pour la branche contenant ***E₂*** : $U_{AB} = E_2 - r_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{r_2} = \frac{12-7,5}{2} = 2,25A$

$$I_1 = -1.5A,\ I_2 = 2.25A \text{ et } I_3 = 0.75A \quad U_{AB} = R \cdot I_3 = 7.5V$$

IV. Théorème de Thevenin

1) Enoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par un générateur de tension de f.é.m E_T et de résistance interne R_T.



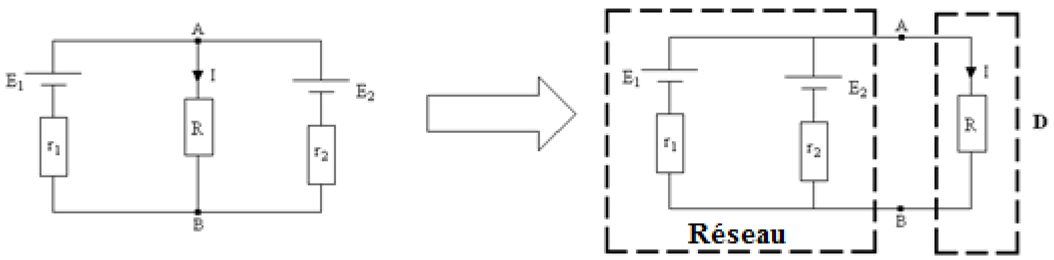
- E_T est la tension mesurée à vide entre A et B
- R_T est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes (les f.é.m. sont remplacées par des courts-circuits et les sources de courant sont enlevées et toute branche qui en contenait une reste ouverte)

2) Application 4

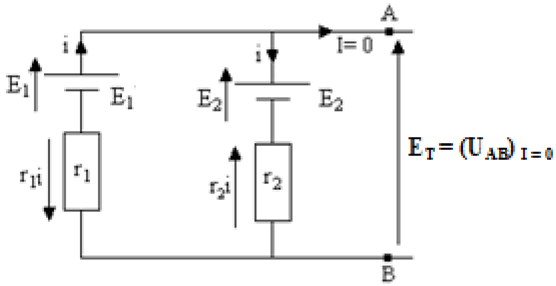
Calculer l'intensité du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

Résolution

Le circuit de l'exercice de l'application 1 peut être transformé selon le schéma ci-dessous.



1) Calcul de la tension de Thévenin



Pour calculer la tension de Thévenin on peut utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous

1.1 Loi de Kirchhoff

La loi d'addition des tensions donne : $E_T = E_2 + r_2 \cdot i$

Appliquons la loi des mailles au circuit série : $r_2 i + E_2 - E_1 + r_1 i = 0$ soit $i = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$.

$$E_T = E_2 + r_2 \cdot \left(\frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} \right) = \frac{E_2 \cdot r_1 + E_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \qquad \underline{\text{A.N}}: \; E_T = 8V$$

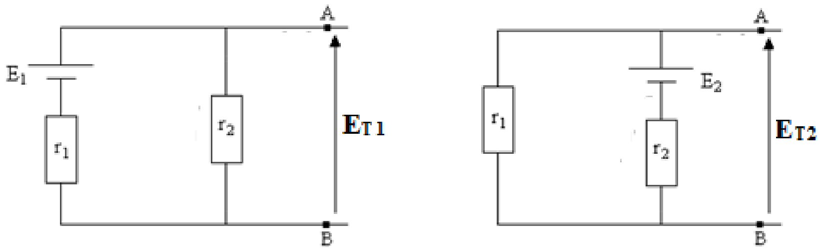
1.2 **Théorème de Millman**

Le théorème de Millman appliqué au point A en prenant le point B comme référence des potentiels donne

$$V_A = \frac{\dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}} = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 + r_2} \quad \underline{\text{A.N}} \; V_A = \frac{12+12}{3} = 8V \quad \text{soit} \quad E_T = U_{AB} = V_A - V_B = 8V$$

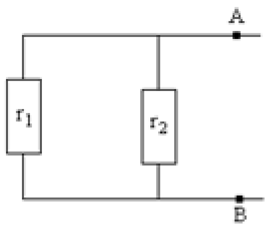
1.3 **Théorème de superposition**

En appliquant la loi du diviseur de tension aux circuits 1 et 2, on peut calculer la tension de Thévenin par le théorème de superposition.



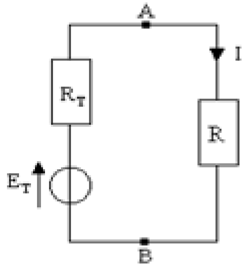
$$E_{T1} = \frac{r_2}{r_2 + r_1} E_1 \;\; \text{et} \;\; E_{T2} = \frac{r_1}{r_2 + r_1} E_2 \;\text{soit}\; E_T = E_{T1} + E_{T2} = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 + r_2}$$

2) Calcul de la résistance de Thévenin



Les deux résistances sont montées en parallèle donc $R_T = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ **AN :** $R_T = \dfrac{2}{3}\Omega$

3) Générateur de Thévenin

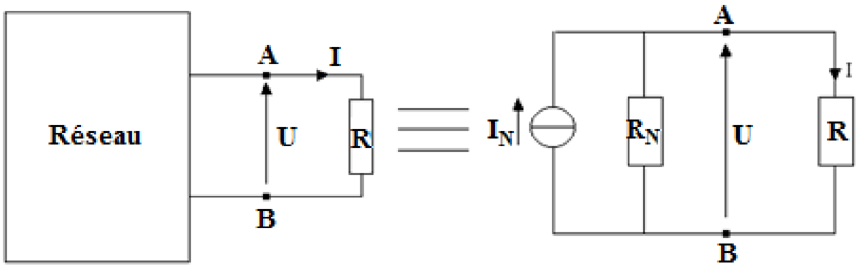


En appliquant la loi des mailles au générateur de Thévénin, on peut calculer le courant qui traverse la résistance ***R*** on obtient : $I = \frac{E_T}{R_T + R}$ **<u>A.N</u>** : $I = 0.75A$

V. Théorème de Norton

1) Enoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de courant d'intensité I_N et de résistance interne R_N.

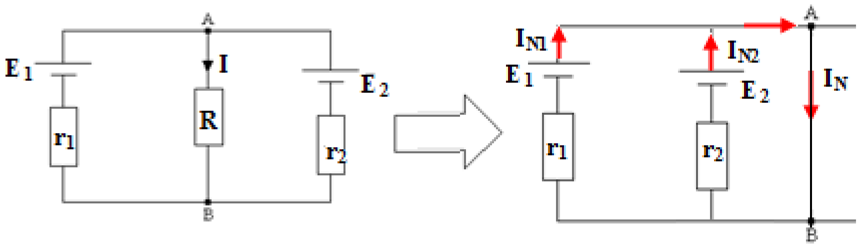


- I_N est le courant de court-circuit entre A et B
- R_N est la résistance mesurée entre A et B lorsque la résistance R est retirée du circuit et que tous les générateurs du réseau sont passivés (remplacés par leurs résistances internes).

2) Application 5

Calculer l'intensité I du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

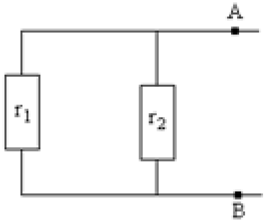
1) Calcul du courant de Norton



Sur chaque branche nous pouvons déterminer le courant de Norton **I_{N1} et I_{N2}.**

$I_N = I_{N1} + I_{N2}$ et $I_N = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}$ soit $I_N = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2}$ **<u>A.N</u> :** $I_N = I_1 + I_2 = 12A$

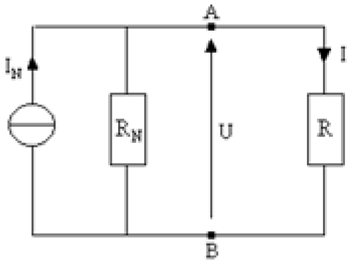
2) Calcul de la résistance de Norton



Les deux résistances sont montées en parallèle donc

$$R_N = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \quad \underline{\textbf{AN :}} \quad R_N = \frac{2}{3}\Omega$$

3) Générateur de Norton

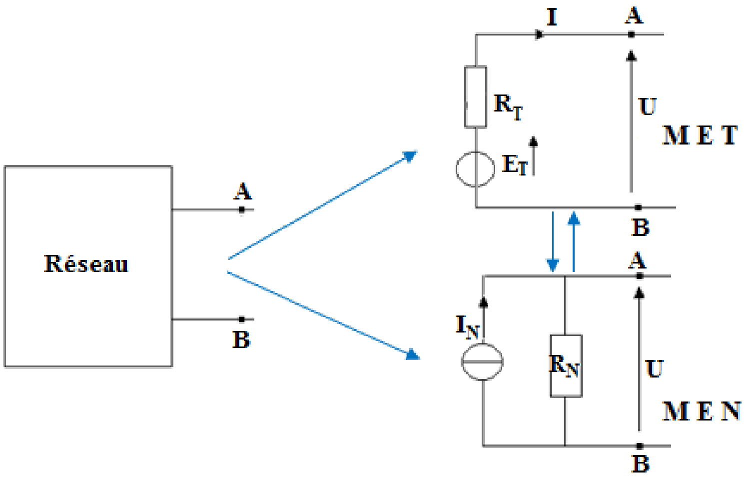


En appliquant la loi du diviseur de courant au circuit équivalent on obtient : $I = \dfrac{R_N}{R_N + R} I_N$

A.N : $I = 0.75A$

Remarque

- Le théorème de Norton est la transformation duale du théorème de Thevénin.
- La connaissance d'un modèle équivalent permet la déduction immédiate du modèle dual car $R_N = R_T$ et $E_T = R_T \cdot I_N$.



La source de tension (E_T, R_T) est remplacée par une source de courant (I_N, R_N).

$$I_N = \frac{E_T}{R_T} = \frac{E_T}{R_N} = E_T \cdot G_N$$

Chapitre 3 Circuits linéaires du premier ordre soumis à un échelon de tension

Objectifs spécifiques:

OS1 : Expliquer le phénomène de régime transitoire

OS2 : Déterminer les caractéristiques d'un circuit RC/ RL en régime transitoire

Introduction

Nous allons , dans ce chapitre, étudier les circuits linéaires R, C série et R, L série soumis à un échelon de tension, c'est-à-dire au régime transitoire de ces circuits entre deux régimes continus. Pour cette étude, on

reste dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, à savoir qu'on néglige tout phénomène de propagation.
Les intensités et tensions dans ces circuits dépendent du temps. Pour les calculer, on est amené à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

I. Différents types de régimes

1) Régime continu ou variable

Le *régime continu* correspond au fonctionnement d'un circuit lorsque toutes les intensités et toutes les tensions du circuit sont indépendantes du temps : toutes les grandeurs électriques sont des constantes par rapport au temps. Cela sous-entend qu'aucun paramètre des sources n'est modifié. Par opposition, on parle de *régime variable* quand intensités et tensions varient au cours du temps.

2) Régime permanent

On appelle *régime permanent* le fonctionnement où pendant un certain temps les caractéristiques des intensités et des tensions ne varient pas au cours du temps.
Le régime continu est un cas particulier de régime permanent.
Un régime variable peut être permanent : c'est le cas du régime sinusoïdal qui est variable (l'intensité et la tension sont des fonctions trigonométriques périodiques), mais comme les caractéristiques de i(t) et u(t) restent les mêmes, ce régime est aussi permanent.
Il sera donc nécessaire de bien distinguer un régime permanent d'un régime continu et de ne pas faire d'amalgame entre ces deux notions.

3) Régime transitoire

On appelle *régime transitoire* le régime durant lequel on passe d'un régime permanent à un autre.
C'est par exemple ce qui se passe à l'établissement ou à l'arrêt d'une source de courant ou de tension. Il s'agit d'un régime temporaire par opposition aux précédents régimes. Malgré son caractère éphémère, il est cependant d'une grande importance.
Il peut en effet se produire des phénomènes très brefs durant lesquels intensité et/ou tension risquent de prendre des valeurs très grandes, ce qui risque d'endommager les composants en les soumettant à des contraintes en dehors de leur domaine de fonctionnement.

II. Circuit RC- charge et décharge d'un condensateur

On s'intéressera ici à un circuit RC soumis à un échelon de tension e : le générateur délivre E pour la charge du condensateur, 0 pour sa décharge dans la résistance.

1) Schéma du montage

On cherche à observer, puis prévoir par le calcul, le comportement du montage de la figure 3.1 lorsqu'il est alimenté par une tension constante délivrée par un générateur basse fréquence (GBF). On observe simultanément les tensions délivrées par le GBF et aux bornes du condensateur sur les deux voies d'un oscilloscope.

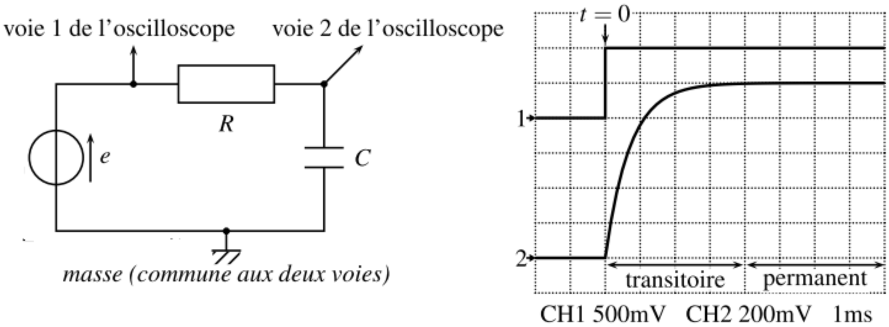


Figure 3.1 Montage RC étudié et formes des signaux

On observe expérimentalement les formes des signaux de la figure3.1, c'est-à-dire les graphes des tensions en fonction du temps, lorsque e passe de 0 à une tension positive (voie 1). La tension aux bornes du condensateur (voie 2) passe de 0 à 5 carreaux. On définit alors deux régimes :

- le ***régime établi***, ou ***régime permanent***, pour lequel la sortie est de la même forme que l'entrée, ici constante,
- le ***régime transitoire***, entre l'instant initial et le régime permanent.

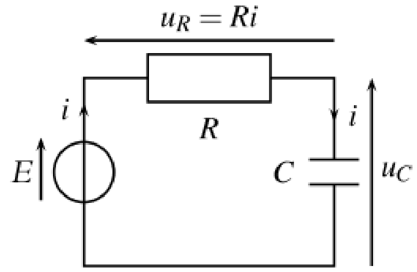
Le signal délivré par le GBF est nommé ***échelon de tension***.

On peut obtenir également un échelon de tension en fermant ou en ouvrant un interrupteur qui relie un générateur de tension continue au circuit à étudier.

2) Equation différentielle de la charge du condensateur

On étudie le circuit RC soumis à une tension E = cste, on s'intéresse à l'allure de la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité du courant parcourant le circuit.

Initialement, le condensateur est déchargé.



On applique la loi des mailles donne : $E = u_C + Ri$

Or la relation entre l'intensité traversant un condensateur et la tension à ses bornes s'écrit : $i = C\dfrac{du_C}{dt}$

On obtient alors l'équation différentielle suivante : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

soit $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ en posant τ = RC.

Figure 3.2 Circuit R, C série

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la solution s'écrit comme la somme :

– de la solution générale de l'***équation homogène*** associée (c'est-à-dire à second membre nul) qui correspond à la réponse du circuit RC sans excitation : c'est ce que l'on appelle le ***régime libre***. Elle tend exponentiellement vers zéro et n'aura d'effets qu'après un temps largement supérieur à une durée caractéristique que l'on appelle ***temps de relaxation*** ;

– d'une solution particulière qui correspond au régime permanent observé lorsque les effets transitoires sont atténués.

On doit trouver une solution à l'équation : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

Solution de l'équation homogène : On cherche une solution à l'équation homogène de la forme $u_{C,h}(t) = A\exp(\alpha t)$ avec A une constante et α un réel. En injectant u dans l'équation homogène on obtient $\alpha = -1/\tau$.

Solution particulière : On cherche une solution particulière $u_{C,p}$ constante.

Soit $u_{C,p}$ la solution particulière de l'équation différentielle. On a :

$\dfrac{du_{C,p}}{dt} + \dfrac{u_{C,p}}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ or $u_{C,p}$ étant une solution particulière, elle est indépendante du temps, soit $\dfrac{du_{C,p}}{dt} = 0$. On déduit l'expression : $u_{C,p} = E$.

Solution générale : elle s'écrit $u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p} = E + A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Condition initiale : L'équation différentielle que nous étudions est du premier ordre, une seule condition initiale suffit à trouver la seule constante à déterminer.

On utilise alors la propriété importante que ***la tension d'un condensateur est une fonction continue du temps***.

En supposant que le condensateur est initialement déchargé, on a : A t = 0, $u_C\left(0\right)=E+A=0$ soit $A=-E$

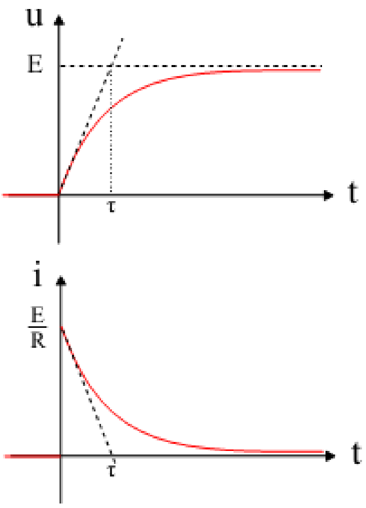
Finalement la solution de l'équation différentielle qui satisfait aux conditions initiales est :

$$u_C\left(t\right)=E\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

L'intensité peut s'en déduire :

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=CE\cdot\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)=\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les allures de la tension et de l'intensité en fonction du temps sont donc :



Comme le montre la figure 3.3, la constante de temps τ = RC peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse de charge du condensateur, plus il est faible plus le condensateur se charge vite.

On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à 5 τ, le condensateur est totalement chargé.

On est passé du régime transitoire au régime permanent.

On peut vérifier que la fonction $u_C(t)$ est bien continue tandis que la fonction i(t) est discontinue.

Figure 3.3 Charge d'un condensateur

3) Décharge du condensateur

Il s'agit de l'effet inverse : on suppose que le condensateur possède une charge initiale Q = CE. Ceci est rendu possible par l'existence d'une valeur limite (obtenue au paragraphe précédent) de la tension aux bornes du condensateur. À t = 0, on ouvre le circuit précédent, ce qui revient à faire passer la tension de la valeur E à la valeur 0.

L'équation différentielle est simplement $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=0$ dont la solution est : $u_C\left(t\right)=A_1\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

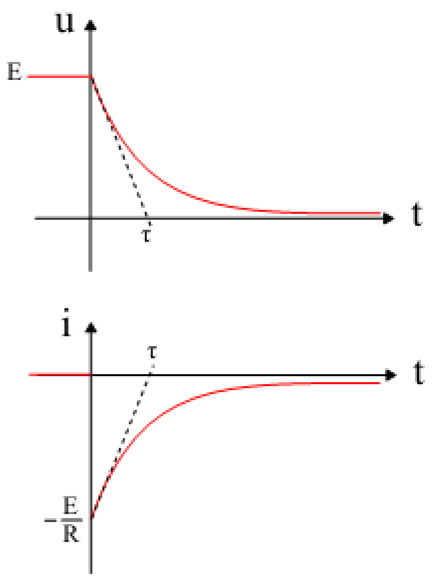
Avec, par continuité de u_C ; $u_C\left(0\right)=A_1=E$ soit

$$u_C\left(t\right)=E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On en déduit l'intensité :

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=-\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les allures de l'intensité et de la tension au cours du temps sont donc les suivantes :



On vérifie bien sur les courbes de la figure 3.4 que la fonction $u_C(t)$ est bien continue tandis que la fonction i(t) est discontinue.

Au bout de 5τ, on peut considérer :

• que la tension $u_C(t)$ est égale à E et que l'intensité i(t) est nulle lors de la charge du condensateur,

• que la tension $u_C(t)$ et l'intensité i(t) sont nulles lors de la décharge du condensateur.

Figure 3.4 Décharge d'un condensateur

4) Aspect énergétique

On se place dans le cas où la charge et la décharge sont complètes.

Pendant la charge, le générateur fournit l'énergie : $W_G = \int_0^{\infty} Ei(t)\,dt = E\int_0^{Q} dq = EQ = CE^2$

Le condensateur stocke l'énergie : $W_C = \int_0^{\infty} u_c(t)\,i(t)\,dt = \dfrac{CE^2}{2}$

La résistance dissipe par effet Joule l'énergie : $W_J = \int_0^{\infty} Ri^2(t)\,dt = \dfrac{CE^2}{2}$

Le condensateur stocke donc la moitié de l'énergie fournie par le générateur et l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Pendant la décharge, il n'y a plus d'énergie fournie : le générateur est éteint.

Le condensateur restitue l'énergie qu'il a stockée lors de la charge. Cette énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance, en l'absence de toute autre utilisation.

Remarque : On retiendra qu'un condensateur peut stocker et restituer de l'énergie alors qu'une résistance ne fait que dissiper l'énergie sous forme de chaleur par effet Joule.

III. Circuit RL - Établissement et rupture du courant dans une bobine

On s'intéressera ici à un circuit RL soumis à un échelon de tension e, donc la tension aux bornes de la bobine est égale à une constante : E pour l'établissement du courant dans la bobine, 0 pour sa rupture.

1) La bobine

1.1 Constitution et symbole

Une bobine est constituée d'un enroulement de spires conductrices autour d'un isolant. Elle admet donc une certaine résistance interne du fait de cette grande longueur de fil.

La bobine sera donc symbolisée en convention récepteur de la manière suivante :

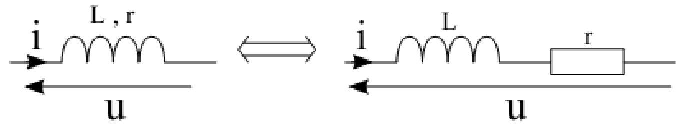


Figure 3.5 Symbole d'une bobine réelle

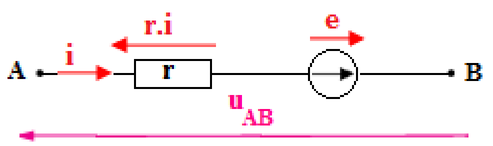


Figure 3.6 Modèle électrique équivalent

1.2 Relation tension-intensité

Le phénomène qui caractérise la bobine est l'auto-induction : le passage d'un courant i qui varie dans les spires de la bobine créé un champ magnétique $\vec{B}$ qui fait apparaître une f.é.m e aux bornes de celle-ci.
Mathématiquement, pour une bobine idéale (sans résistance interne), cette auto-induction s'écrit :

$$e = -L\frac{di}{dt}$$

L est appelée *inductance* de la bobine et s'exprime en henry, de symbole H.
En tenant compte de la résistance interne de la bobine, la tension aux bornes de celle-ci s'écrit :

$$u = ri - e \qquad u = L\frac{di}{dt} + ri$$

avec r la résistance interne de la bobine qui s'exprime en Ohm (Ω).

Remarque :
En régime continu, i est une constante et la relation précédente implique que u = 0 : la bobine idéale constitue alors un court-circuit. Par contre la bobine réelle se comporte comme un conducteur ohmique de faible résistance (r = 10 - 12Ω).

Si on utilise la convention générateur pour une bobine idéale, on a alors la relation : $u' = e = -L\frac{di}{dt}$

2) Association d'inductances

2-1 Association en série

Soit une association en série de bobines d'inductances L_1, L_2, ..., L_N. Une même intensité traverse toutes les bobines et la tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque bobine :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} + \ldots + L_N\frac{di}{dt} = \left(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N\right)\frac{di}{dt}$$

L'association en série de bobines d'inductances L_1, L_2, ..., L_N est donc une bobine d'inductance :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N \qquad (2.4)$$

On retrouve la même loi d'association que pour les résistances.

2-2 Association en parallèle

Soit une association en parallèle de bobines d'inductances L_1, L_2, ..., L_N. La tension aux bornes de toutes les bobines est la même et l'intensité entrant ou sortant de l'association parallèle est la somme des intensités qui traversent chaque bobine: $i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_N$ donc $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + \ldots + \frac{di_N}{dt}$

soit $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \frac{u}{L_3} + \ldots + \frac{u}{L_N} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N}\right)u$

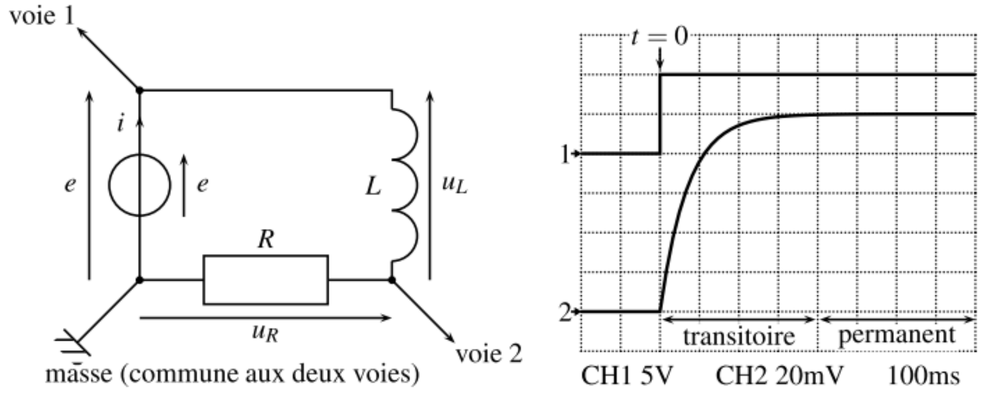
L'association en parallèle de bobines d'inductances est donc une bobine inductance L telle que :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots + \frac{1}{L_N} \qquad (2.5)$$

On retrouve les mêmes lois d'association en parallèle que celles obtenues pour des résistances.

3) Schéma du montage expérimental

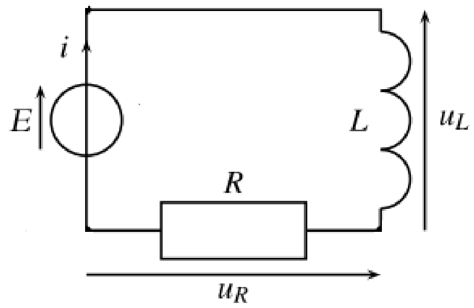
Le montage de la figure 3.7 permet de visualiser en même temps à l'oscilloscope la tension e délivrée par le GBF et l'intensité i du courant, via la tension u_R = Ri aux bornes de la résistance.

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Figure 3.7 Montage RL étudié et formes des signaux</td><td></td></tr>
</table>

On s'intéresse au courant i (t) qui circule dans le montage alimenté par e.

4) Équation différentielle de l'établissement du courant dans la bobine

On étudie le circuit R L soumis à une tension E, on s'intéresse à l'allure de l'intensité dans le circuit et à la tension aux bornes de la bobine. On considère de plus que la bobine est idéale (r = 0).



La loi des mailles donne : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants du même type que celle obtenue lors de l'étude du circuit R, C.

Figure 3.8 Circuit R, L série

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{R\tau}$$

en notant posant τ = L/R qu'on interprète comme un temps caractéristique.

La solution pour t > 0 s'écrit comme la somme :

• de la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RL sans excitation : c'est ce que l'on appelle le régime libre : $i_h(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

• d'une solution particulière qui correspond au régime permanent : $i_p = \dfrac{E}{R}$.

La solution générale de l'équation différentielle (3.16) est : $i(t) = \dfrac{E}{R} + A\,exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Pour déterminer la constante A, on utilise cette propriété importante : ***l'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue du temps.***

A t = 0, $i(0) = \dfrac{E}{R} + A = 0$ soit $A = -\dfrac{E}{R}$

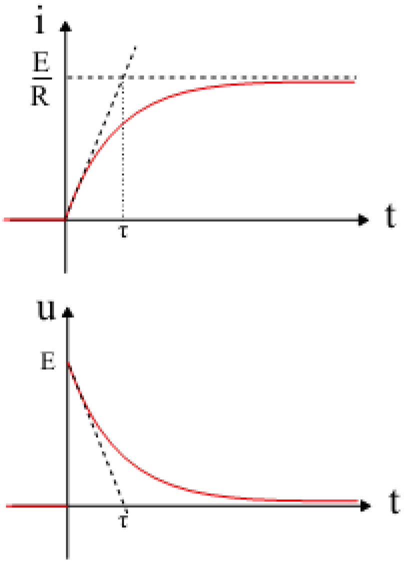
Finalement la solution de l'équation différentielle qui satisfait aux conditions initiales est :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

L'expression de la tension aux bornes de l'inductance s'obtient par dérivation :

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = E\,exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les allures de la tension et de l'intensité sont à la figure 3.9.



Comme le montre la figure 3.8, la constante de temps τ = L/R peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse d'établissement du courant, plus il est faible plus le courant s'établit vite. On dit aussi souvent qu'au bout d'un temps t égal à 5 τ, on est passé du régime transitoire au régime permanent.

On peut vérifier que la fonction i(t) est bien continue tandis que la fonction u(t) est discontinue.

Figure 3.9 Établissement du courant dans une bobine.

5) Rupture du courant dans une bobine

Il s'agit de l'effet inverse : on suppose que la tension passe de la valeur E à 0. On résout l'équation différentielle et en supposant que l'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction continue du temps, on en déduit l'expression suivante de l'intensité :

$$i(t) = \frac{E}{R}exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et de la tension :

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = -E\,exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les allures de l'intensité et de la tension au cours du temps sont données à la figure 3.9.

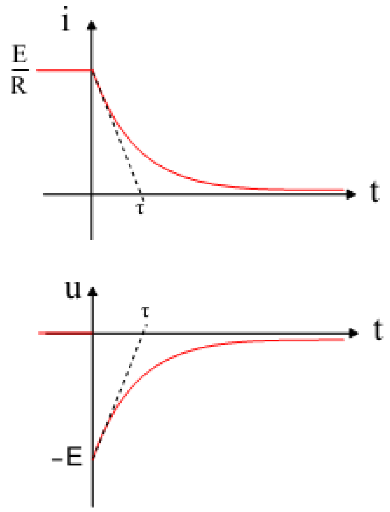


Figure 3.10 Rupture du courant dans une bobine.

On vérifie bien sur les courbes de la figure 3.10 que la fonction i(t) est bien continue tandis que la fonction u(t) est discontinue.

6) Aspect énergétique

On se place dans le cas où l'établissement et la rupture sont complets.

Pendant l'établissement du courant, le générateur fournit l'énergie : $W_G = \int_0^{\infty} Ei(t)\,dt = L\left(\frac{E}{R}\right)^2 = LI_0^2$

La bobine stocke une partie de l'énergie : $W_L = \int_0^{\infty} u(t)\,i(t)\,dt = \frac{LI_0^{\,2}}{2}$

La résistance dissipe par effet Joule l'énergie : $W_J = \int_0^{\infty} Ri^2(t)\,dt = \frac{LI_0^{\,2}}{2}$

La puissance délivrée par le générateur se répartit entre une puissance magnétique stockée par la bobine et une puissance perdue par effet Joule.

Pendant la rupture du courant, il n'y a plus d'énergie fournie : le générateur est éteint.

La bobine restitue l'énergie qu'elle a stockée lors de l'établissement du courant. Cette énergie est alors dissipée par effet Joule dans la résistance, en l'absence de toute autre utilisation.

On retiendra qu'une bobine peut stocker et restituer de l'énergie alors qu'une résistance ne fait que dissiper l'énergie sous forme de chaleur par effet Joule.

Chapitre 4 Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Objectifs spécifiques:

OS1 : Donner la notation complexe d'un signal sinusoïdal et vice versa

OS2 : Donner l'expression des impédances de dipôles de base (résistance, condensateur et inductance)

OS3 : Appliquer les lois de l'électrocinétique aux circuits linéaires en régime sinusoïdal

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons travaillé sur les régimes transitoires des circuits comportant un conducteur ohmique, une bobine et un condensateur : on leur appliquait un échelon de tension et nous regardions l'évolution de la tension et/ou de l'intensité.

Nous allons garder les mêmes circuits, mais cette fois-ci leur comportement sera étudié dans le cas d'un régime variable (la tension et l'intensité varient au cours du temps) permanent (ces variations sont périodiques).

Un circuit électrique est dit en régime permanent sinusoïdal lorsque les excitations extérieures (source de tension ou de courant) sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation et n'engendrent dans le circuit que des tensions et courants sinusoïdaux de la forme :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{et} \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Les lois du courant continu ne sont applicables en régime permanent sinusoïdal que lorsque la fréquence de la source excitatrice est inférieure ou égale à *20 kHz* ($f \leq 20$ kHz) (domaine des basses fréquences). Cela nécessite alors l'utilisation d'un *G.B.F* (Générateur de Basses fréquences) comme source excitatrice.

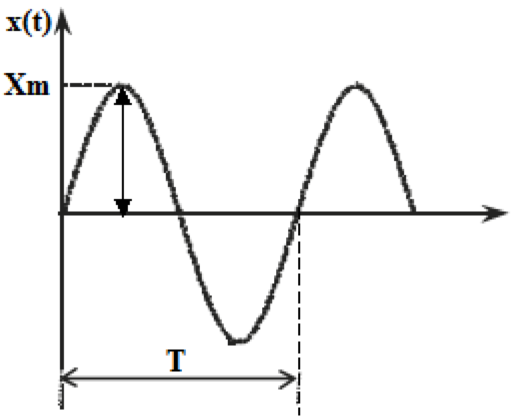
I. Grandeurs électriques en régimes sinusoïdaux

1) Amplitude, phase, pulsation et fréquence

Un signal sinusoïdal est un signal dépendant du temps t (on dit qu'il est variable) et dont l'expression en fonction de t est :

$$\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)} \text{ ou } \boxed{x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

X_m est l'amplitude maximale du signal (dimension de la grandeur x) ; ω est la pulsation du signal en rad.s^{-}; $(\omega t + \varphi)$ est la phase instantanée ou phase à l'instant t (rad) ; φ est la phase initiale à t = 0 (rad)



Un signal sinusoïdal est donc défini par sa *valeur maximale, sa pulsation et sa phase à l'origine*.

La pulsation ω représente la vitesse de périodicité du signal (vitesse que met le signal à reprendre la forme qu'il avait avant). La pulsation est donc directement reliée à la période T exprimée en seconde et à la fréquence f exprimée en hertz (Hz) : $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$; $\boxed{\omega = 2\pi f}$ et $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

La *période temporelle* est la durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même.

La *fréquence* du signal est le nombre de périodes (ou cycles) par seconde.

Figure 4.1 Signal sinusoïdal

2) Valeur moyenne et valeur efficace

On définit d'une manière générale pour un signal périodique la valeur moyenne notée $< x >$ par :

$$< x > = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

Cette intégrale représente l'aire ou la surface du signal x(t) et pour une grandeur sinusoïdale $< x > = 0$

On définit d'une manière générale pour un signal périodique la valeur efficace notée X_{eff} par

$$X_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Pour une grandeur sinusoïdale $\quad X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$

Remarque :

- On appelle intensité efficace, l'intensité du courant continu qui donnerait dans la même résistance pendant le même temps, le même dégagement d'énergie qu'un courant sinusoïdal

- L'énergie dégagée dans une résistance parcourue par un courant sinusoïdal ***i(t) = I_m cos ($\omega t + \varphi_i$)*** pendant une période est : $dW = Ri^2 dt$

$$W_{RES} = R.I_m{}^2\int_0^T \cos^2(\omega t + \phi_i)dt = \frac{1}{2}RI_m{}^2T$$

-L'énergie dégagée dans la même résistance parcourue par un courant continu pendant le temps T est : $W_{CC} = R.I^2T$

$$W_{CC} = W_{RES} \text{ soit } \quad I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = I_{eff}$$

- En régime permanent sinusoïdal, l'ampèremètre et le voltmètre mesurent les valeurs efficaces :

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = I_{eff} \quad \text{et} \quad U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = U_{eff}$$

II. Notation complexe d'un signal périodique

1) Définitions

Soit un signal sinusoïdal d'expression mathématique $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on lui associe une grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

On peut également définir une amplitude complexe :

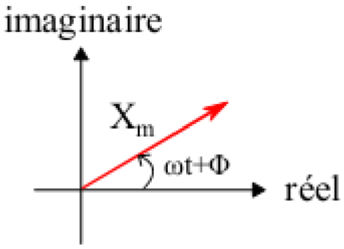
$$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} \text{ donc } \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$

Conclusion $\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{X} = X_m e^{j\varphi}}$

2) Représentation de Fresnel

Il s'agit d'une représentation vectorielle qui permet une visualisation géométrique de la grandeur sinusoïdale.

A la grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe dans le plan complexe un vecteur de longueur X_m et dont l'angle avec l'axe horizontal est $(\omega t + \varphi)$.



En général, on représente le vecteur de Fresnel à l'instant t = 0.

Conclusion :

$$\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(X_m, \varphi)}$$

Figure 4.2 Représentation de Fresnel d'un signal

3) Dérivation des signaux complexes

3-1 Méthode de Fresnel

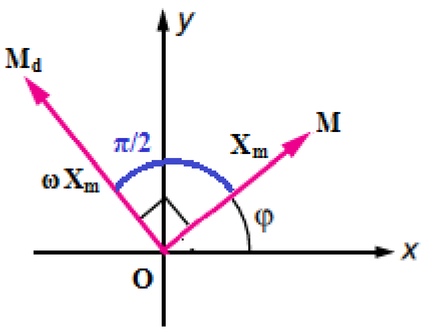
A la grandeur sinusoïdale *x(t)* correspond la représentation vectorielle $\overrightarrow{OM}$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(X_m, \varphi)$$

$$x_d(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi, à la grandeur sinusoïdale $x_d(t)$ on fait correspondre la représentation vectorielle $\overrightarrow{OM}_d$

$$x_d(t) = X_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_d\left(\omega X_m, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



La dérivation de la grandeur sinusoïdale fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OM}$ *de π/2 et son module est multiplié par ω.*

Figure 4.3 Représentation de Fresnel

3-2 Méthode des complexes

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{x}(t)$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$$

La dérivée d'un signal complexe est obtenue en multipliant le signal complexe par *jω*. Pour une dérivée seconde se sera une multiplication par *$(j\omega)^2$*…

Conclusion Si $\boxed{x(t) \to \underline{X}}$ alors $\boxed{x_d(t) \to j\omega \underline{X}}$

4) Intégration des signaux complexes

4-1 Méthode de Fresnel

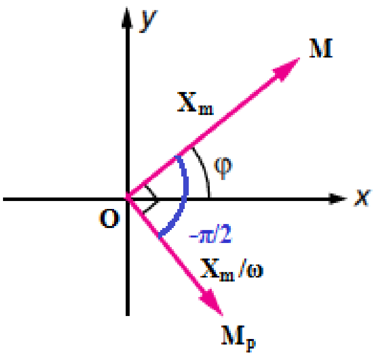
A la grandeur sinusoïdale *x(t)* correspond la représentation vectorielle $\overrightarrow{OM}$

$$x(t) = X_m\, cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(X_m, \varphi)$$

$$x_p(t) = \int x(t)dt = \frac{X_m}{\omega} sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_m}{\omega} cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi, à la grandeur sinusoïdale $x_p(t)$ on fait correspondre la représentation vectorielle $\overrightarrow{OM}_p$

$$x_p(t) = \frac{X_m}{\omega} cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_p\left(\frac{X_m}{\omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$



La primitive du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur qui a tourné de -π/2 et dont le module est divisé par ω.

Figure 4.4 Représentation de Fresnel

4-2 Méthode des complexes

$$\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega} X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$$

$$\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$$

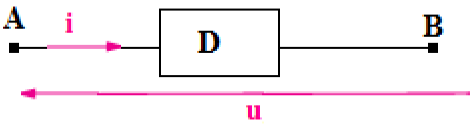
La primitive d'un signal complexe est obtenue en multipliant celui-ci par *1/jω*.

Conclusion Si $\boxed{x(t) \to \underline{X}}$ alors $\boxed{x_p(t) \to \frac{1}{j\omega} \underline{X}}$

III. Impédance complexe

1) Définition

L'impédance complexe d'un dipôle linéaire est le rapport de la tension complexe et du courant complexe. Ce rapport est un nombre complexe indépendant du temps et qui ne dépend pas de la fréquence.



$$i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi_i) \to \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$$

$$u(t) = U_m\, cos(\omega t + \varphi_u) \to \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

La relation $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ constitue la loi d'Ohm en régime sinusoïdal. L'impédance complexe peut se mettre sous la forme : $\boxed{\underline{Z} = R_0 + jX_0}$

- R_0 est la résistance du circuit (partie réelle) s'exprime en Ω
- X_0 est la réactance du circuit (partie imaginaire) s'exprime en Ω

$$\boxed{|\underline{Z}| = \sqrt{R_0^{\,2} + X_0^{\,2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{tg(\varphi_Z) = \frac{X_0}{R_0}}$$

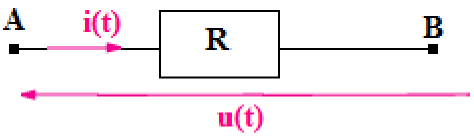
<u>Forme polaire</u> :

$\boxed{\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi_Z}}$ et $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \dfrac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ soit $\boxed{|\underline{Z}| = \dfrac{U_m}{I_m}}$ et $\boxed{arg(\underline{Z}) = arg(\underline{U}) - arg(\underline{I})}$ ou $\boxed{\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i}$; $(\varphi_u - \varphi_i)$ est le déphasage entre la tension et le courant.

Pour les circuits où il y'a des dérivations, on utilise la grandeur $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ appelée *admittance*.

2) Impédance de dipôles de base

Résistance



<u>Equation</u> : ***u(t)=Ri(t)*** *(Loi d'Ohm en régime sinusoïdal)*

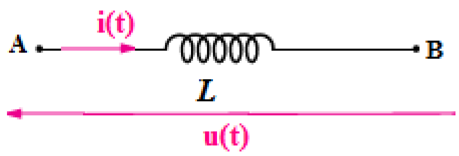
En régime sinusoïdal $i(t) \to \underline{I}$ et $u(t) \to \underline{U}$

L'équation *u(t)=Ri(t)* devient $\underline{U} = R\underline{I}$

$$\boxed{\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases} \quad \textit{u(t) et i(t) sont en phase}$$

<u>Représentation de Fresnel</u> :

Inductance pure ou self :



Equation différentielle : $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

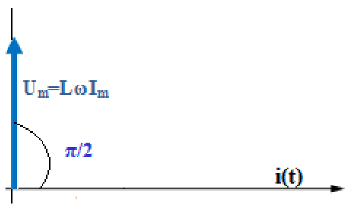
En régime sinusoïdal $i(t) \to \underline{I}$ et $u(t) \to \underline{U}$ et $\dfrac{di(t)}{dt} \to j\omega\underline{I}$

L'équation différentielle devient donc : $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$

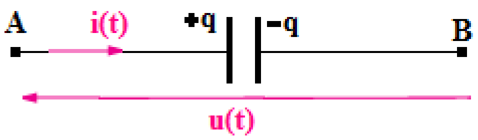
L'impédance complexe est : $\boxed{\underline{Z}_L = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = jL\omega}$

Forme polaire : $\underline{Z}_L = L\omega\, e^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{Z}|e^{j\varphi_{ZL}} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_L| = L\omega \\ \varphi_{Z_L} = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ u(t) est en avance de π/2 sur i(t)

<u>Représentation de Fresnel</u> :



Condensateur parfait ou capacité :



Equation différentielle : $u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$

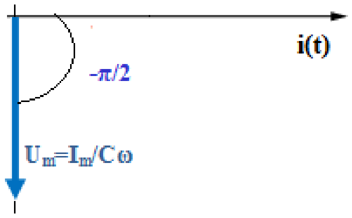
En régime sinusoïdal $i(t) \to \underline{I}$ et $u(t) \to \underline{U}$ et $\int i(t)dt \to \frac{\underline{I}}{j\omega}$

L'équation différentielle devient donc : $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$

L'impédance complexe est : $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega}}$

Forme polaire : $\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{Z}_C|e^{j\varphi_Z} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}_C| = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_{Z_C} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ u(t) est en retard de π/2 sur i(t) (4.14)

<u>Représentation de Fresnel</u> :



IV. Lois de l'électrocinétique en notation complexe

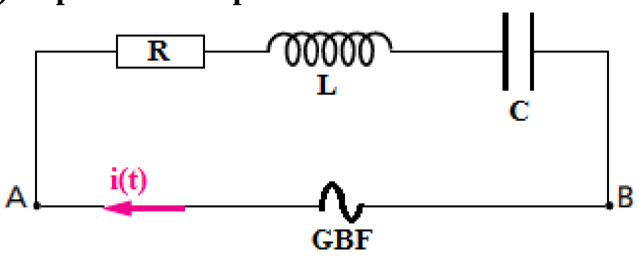
Les lois que nous avons rencontrées en régime continu sont valables en notation complexe :

- association en série d'impédance : $\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i$
- association en parallèle d'impédance : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i}$ ou $\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Y}_i$
- loi des nœuds $\sum \underline{I}_{arrivent} = \sum \underline{I}_{partent}$,
- loi des mailles $\sum \underline{U}_i = 0$ ou $\sum \underline{Z}_i.\underline{I}_i = \sum \varepsilon.\underline{E}_i$,

de même pour les ponts diviseurs de courant et de tension, les modèles de Thévenin et de Norton, le théorème de Millman.

V. Etude du circuit RLC série : résonance d'intensité

1) Impédance complexe



Les dipôles ***R, L et C*** étant en série, on a :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega - \left(\frac{j}{C\omega}\right)$$

$$\boxed{\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Module de l'impédance complexe : $\boxed{|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

Phase de l'impédance complexe : $\boxed{tg(\varphi_Z) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$

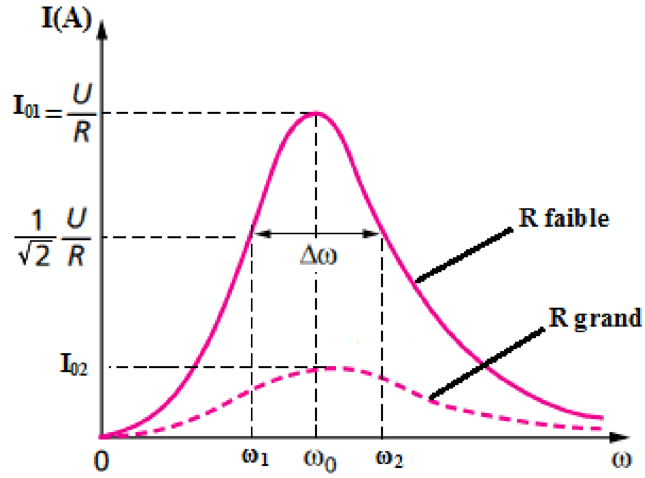
2) Etude de la résonance d'intensité

On étudie l'amplitude de l'intensité du courant en fonction de la pulsation : $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$

U_m étant l'amplitude de la tension sinusoïdale aux bornes du circuit RLC.
Quand ω tend vers zéro, l'amplitude du courant tend vers zéro. Quand ω tend vers +∞, l'amplitude du courant tend vers zéro. On en déduit que l'amplitude du courant admet un maximum pour une valeur particulière de $\omega = \omega_0$. Cette valeur particulière de la pulsation est obtenue lorsque le module de l'impédance est minimal. Le module de l'impédance $\underline{Z}$ est minimale (et égale à R) quand la pulsation est égale à ω_0 tel que $L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad LC\omega_0^{\ 2} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \quad et \quad f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ ω_0 et f_0 sont respectivement *la pulsation propre* et la *fréquence propre* du circuit RLC.

Pour $\omega=\omega_0$, $\underline{Z} = R$ et $I_0 = \dfrac{U_m}{R}$ est maximal et $tg(\varphi_Z) = 0 \quad \Rightarrow \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = 0$ et $\varphi_u = \varphi_i$ ***i(t) et u(t) sont en phase***.
Pour une tension U_m donnée aux bornes du circuit, l'intensité du courant est maximale. On dit que le circuit est à la ***résonance d'intensité***.

3) Caractéristique de la résonance d'intensité



Bande passante

La bande passante est l'intervalle de pulsation pour lequel on a : $I_0 \geq \dfrac{I_o}{\sqrt{2}}$ ($BP_1 = \omega_2 - \omega_1$).

La résonance peut être plus ou moins aigue et cela se traduit par un pic d'intensité plus ou moins prononcé.
La valeur maximale de l'amplitude du courant est grande lorsque la résistance du circuit est faible : ***on a une résonance aigue***.
Si la valeur maximale de l'amplitude du courant est faible, alors la résistance du circuit est grande : ***on a une résonance floue***.

Tension aux bornes du condensateur (à la résonance): $U_C = \dfrac{I_0}{C\omega_0}$

Tension aux bornes de l'inductance (à la résonance): $U_L = L\omega_0 I_0$ avec $I_0 = \dfrac{U_G}{R}$

A la résonance : $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0} \quad \Rightarrow \quad U_C = U_L$ d'où $U_C = \dfrac{U_G}{RC\omega_0}$ et $U_L = \dfrac{L\omega_0}{R} U_G$

Si R est petite, alors U_C et U_L peuvent être très grandes par rapport à U_G (tension du générateur): c'est le phénomène de ***surtension à la résonance***.

U_C et U_L peuvent être même suffisamment grandes pour détériorer la bobine ou le condensateur. On caractérise l'acuité de la résonance par un coefficient caractéristique appelé ***facteur de qualité Q***. On montre que : $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ $\quad (\Delta\omega = \dfrac{R}{L})$

On définit aussi le coefficient de surtension σ et qui est utilisé même en dehors des conditions de résonance : $\sigma = \dfrac{U_C}{U} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$. A la résonance $\sigma = Q$

VI. Puissance en régime sinusoïdal forcée

1) Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue par un dipôle à un instant t est définie par $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Si le courant et la tension instantanées sont de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

La puissance instantanée s'écrit : $p = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

L'expression précédente peut se mettre sous la forme

$p = 2UI \cdot \dfrac{1}{2}\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right] = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$.

La puissance instantanée a pour expression :

$$p = UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

La puissance instantanée oscille deux fois plus vite que la tension et l'intensité (pulsation 2ω).

1) Puissance moyenne et facteur de puissance

On calcule la puissance moyenne par :

$$< p >= P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$\langle p \rangle = P = UI\cos(\Delta\varphi) \text{ avec } \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$$

Le terme $\cos(\Delta\varphi)$ est appelé **facteur de puissance**.

Aux bornes d'une résistance P = UI

Aux bornes d'une inductance ou d'un condensateur P = 0.

La puissance moyenne s'exprime en watt (W).

2) Puissance complexe

La puissance complexe s'écrit : $\underline{P} = \dfrac{1}{2}\underline{U} \cdot \underline{I}^*$.

Le complexe conjugué de $\underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ est $\underline{I}^* = I_m e^{-j\varphi_i}$

$\underline{P} = \dfrac{1}{2}\underline{U} \cdot \underline{I}^* = \dfrac{1}{2}U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ soit $\underline{P} = UIe^{j\varphi_z}$ ou encore $\underline{P} = UI\cos(\varphi_z) + jUI\sin(\varphi_z) = P + jQ$

Puissance active ou moyenne

On appelle puissance active ou puissance moyenne ***P*** est la partie réelle de la puissance complexe

$$\boxed{P = UI\cos(\varphi_Z)}$$

***P** s'exprime en Watt (W).*

Puissance réactive

La puissance réactive **Q** est la partie imaginaire de la puissance complexe.

$$Q = UI\ sin(\ \varphi_Z\ )$$

Q *s'exprime en Volt Ampère Réactif (VAR).*

Puissance apparente

La puissance apparente **S** est le module de la puissance complexe.

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\underline{P}|$$

S *s'exprime en Volt Ampère (V.A).*