Chapitre 3 : Changement de référentiel ; Composition des mouvements

- Jusqu'à présent nous avons décrit le mouvement d'un point matériel A, par rapport à un référentiel R en introduisant sa vitesse et son accélération par rapport à ce référentiel.
- La question à laquelle nous souhaitons répondre maintenant est d'une autre nature : R et R' étant deux référentiels en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre, quelles relations existe-t-il entre les caractéristiques cinématiques, vitesse et accélération, d'un point même point A, relatives à R et R'?
- Contrairement à l'usage, nous n'emploierons pas les qualificatifs généralement attribués à R et R', absolu et relatif respectivement : d'une part, parce toutes les vitesses et toutes les accélérations sont des grandeurs relatives à un référentiel ; d'autre part, parce que absolu a, historiquement, un sens très précis en dynamique, sur lequel il est inutile de s'étendre pour le moment ; nous verrons qu'il signifie relatif au référentiel de Copernic.

Remarque : Précisons que R et R' sont quelconques au sens où la dynamique privilégie certains référentiels dits galiléens. En revanche, en cinématique de la relativité restreinte, R et R' doivent être tous deux galiléens.

I°) Relativité du mouvement

1°) Principe galiléen ou newtonien de l'universalité du temps

Considérons deux référentiels R et R' en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre et un phénomène physique se produisant au point B, par exemple le passage devant un index de l'extrémité d'un pendule dont le bâti est lié à R.
Le principe de l'universalité du temps postule que les périodes du pendule mesurées par les horloges H et H' sont égales : le temps est un paramètre universel. Il est à la base de la cinématique dite galiléenne ou newtonienne.
Il en résulte que deux référentiels R et R' ne se distinguent que par leur repère d'espace, lequel est défini par un ensemble d'un point O et de trois vecteurs linéairement indépendants qui forment une base du référentiel.

2°) Dérivées d'un vecteur

C'est un fait expérimental bien connu que les concepts de vitesse et d'accélération sont relatifs au référentiel par rapport auquel on analyse le mouvement. Nous avons vu que, dans le calcul, cela se traduit par la nécessité de dériver par rapport au temps et relativement à une base, le vecteur reliant le point A considéré à l'origine choisie du référentiel.
Il importe donc d'établir avant tout développement la relation entre les dérivées d'un même vecteur par rapport au temps mais relativement à des bases de référentiels différents.
Considérons un vecteur $\vec{U}$ de composantes (x, y, z) dans la base de R et (x', y', z') dans celle de R' : $\vec{U} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}_z$.

Par définition, la dérivée d'un vecteur par rapport au temps, relativement à une base, est le vecteur obtenu en dérivant ses composantes dans cette base et en considérant que les vecteurs de base sont fixes. Ainsi :
$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} = \dot{x}'\vec{e}'_{x'} + \dot{y}'\vec{e}'_{y'} + \dot{z}'\vec{e}'_{z'}.$$
A partir de $\vec{U} = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}_z$, exprimons $\left(d\vec{U}/dt\right)_R$:
$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + x'\left(\frac{d\vec{e}'_{x'}}{dt}\right)_R + \dot{y}'\vec{e}'_{y'} + y'\left(\frac{d\vec{e}'_{y'}}{dt}\right)_R + \dot{z}'\vec{e}'_{z'} + z'\left(\frac{d\vec{e}'_{z'}}{dt}\right)_R$$

Désignons par $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(R'/R)$ le vecteur vitesse de rotation de R' par rapport à R, on sait que $\left(\dfrac{d\vec{e}'_{x'}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_{x'}$ d'où $\left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge (x'\vec{e}'_{x'} + y'\vec{e}'_{y'} + z'\vec{e}_{z'})$. Retenons que le terme complémentaire provient de la modification de la direction des vecteurs unitaires de la base de R' du fait du mouvement de rotation de R' par rapport à R. Cette égalité vectorielle est utile dans la pratique : elle permet, connaissant les composantes d'un vecteur $\vec{U}$ dans la base de R', de déterminer les composantes dans R' de sa dérivée par rapport au temps, relativement à une autre base. Notons que $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$ est nul lorsque R et R' sont en translation l'un par rapport à l'autre $(\vec{\Omega} = \vec{0})$.

3°) Composition des vitesses de rotation.

Soient deux points A et B appartenant à un repère R_2, en rotation par rapport aux référentiels R_0 et R_1. Notons $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$, les vecteurs vitesses de rotation de R_2 par rapport à R_0 et R_1 respectivement, et $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$ le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0, il vient : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$ et $\left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{AB}$. Comme d'autre part : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$, nous en déduisons l'égalité : $\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$, soit puisque les points A et B de R_2 sont quelconques : $\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$.

Cette addition vectorielle des vitesses angulaires se généralise à un nombre quelconque de repères.

II°) Composition des vitesses.

1°) Loi de composition des vitesses

Les vitesses d'un point A en mouvement par rapport aux référentiels R et R' s'écrivent respectivement : $\vec{V}_{A/R} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R$ et $\vec{V}_{A/R'} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{R'}$. Calculons la différence de ces deux vecteurs :

$$\vec{V}(A/R) - \vec{V}(A/R') = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{R'}$$

$\vec{V}(A/R) - \vec{V}(A/R') = \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}$ ce qui donne $\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}.$ On a donc la relation suivante : $\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R') + \vec{V}_e(A)$ avec $\vec{V}_e(A) = \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}$.

La vitesse $\vec{V}_e(A)$ est appelée la vitesse d'entraînement. Notons que c'est la vitesse du point invariablement lié à R' et qui, à l'instant considéré, coïncide avec le point A; aussi dit-on la vitesse du point A' coïncidant avec le point A.

Dans le cas particulier de la translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$, la vitesse d'entraînement se réduit à $\vec{V}(O'/R)$. Elle est indépendante de la position du point A .On dit exceptionnellement que A est entraîné avec «la vitesse du référentiel R'».

2°) Exemples

a)Lancement vers l'est de satellites terrestres

La composition des vitesses permet de montrer qu'on tire avantage au mieux de la rotation de la terre en installant les champs de tirs de satellites artificiels le plus proche de l'équateur et en les lançant vers l'est. Soit Txyz le référentiel terrestre invariablement lié à la terre. R_g le référentiel géocentrique qui a pour origine le centre de la terre T et des axes parallèles à ceux du repère de Copernic R_0 lié au soleil et à trois étoiles lointaines.

La vitesse d'un point O situé à la surface de la terre à la latitude λ par rapport à R_g est

$$\vec{V}(O/R_g) = R\cos\lambda.\Omega = 6400\times10^3\cos\lambda\frac{2\pi}{3600\times24} = 465{,}4\cos\lambda\ m/s$$

$\Omega = 2\pi/3600\times24$ étant la vitesse de rotation de la terre autour de l'axe des pôles.

D'après la composition des vitesses, une fusée A lancée en O de la terre avec une vitesse $\vec{V}(A/R)$ a par rapport à R_g : $\vec{V}(A/R_g) = \vec{V}(A/R) + \vec{V}(O/R)$.

Pour que la vitesse $\vec{V}(A/R_g)$ soit maximale, il faut que :

a) $\vec{V}(O/R_g)$ soit maximale c'est-à-dire $\lambda = 0$

b) $\vec{V}(A/R)$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{V}(O/R_g)$, c'est à dire dirigé vers l'est.

b) Composition des vitesses en coordonnées sphériques

Le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation, alors la vitesse d'entraînement s'écrit alors $\vec{V}_e = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OA} = (\dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi)\wedge\overrightarrow{OA}$. La projection du vecteur $\vec{e}_z$ sur la base associée aux coordonnées sphériques donne $\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta$. La loi de composition de la vitesse donne $\vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{A/T} + \vec{V}_e = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$. $\vec{V}_{A/T}$ est la vitesse du point A par rapport au repère lié à la tige.

III°) Composition des accélérations

1°) Loi de composition des accélérations

Dérivons $\vec{V}(A/R)$ dans l'équation traduisant la loi de composition des vitesses par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\vec{V}_{A/R}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{V}_{O'/R}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_R \quad \text{or}$$

$$\left(\frac{d\vec{V}_{A/R'}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R'}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R') \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}$$

Comme $\vec{a}_{A/R} = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R}}{dt}\right)_R$, $\vec{a}_{A/R'} = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R'}}{dt}\right)_{R'}$ et $\vec{a}_{O'/R} = \left(\frac{d\vec{V}_{O'/R}}{dt}\right)_R$, nous obtenons :

$\vec{a}_{A/R} = \vec{a}_{O'/R} + \vec{a}_{A/R'} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)\wedge\overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{A/R'}$ que l'on écrit sous la forme :

$\vec{a}_{A/R} = \vec{a}_{A/R'} + \vec{a}_C(A) + \vec{a}_e(A)$ avec $\vec{a}_e(A) = \vec{a}_{O'/R} + \dot{\vec{\Omega}}\wedge\overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A})$ et $\vec{a}_C(A) = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{A/R'}$

a) Accélération d'entraînement

Le terme $\vec{a}_e(A)$ est appelé l'accélération d'entraînement. Il s'interprète comme $\vec{V}_e(A)$: c'est l'accélération d'un point A' invariablement lié à R'. On dit que aussi que $\vec{a}_e(A)$ est l'accélération du point A' coïncidant avec le point A. La relation entre $\vec{a}_e(A)$ et $\vec{V}_e(A)$ n'est pas simple

$\vec{a}_e(A) = \left(\frac{d\vec{V}_e(A)}{dt}\right)_R - \vec{\Omega}\wedge\vec{V}_{A/R'} \neq \left(\frac{d\vec{V}_e(A)}{dt}\right)_R$ sauf dans le cas d'une translation.

b) Accélération de Coriolis

Le terme $\vec{a}_C(A) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{A/R'}$ est l'accélération de Coriolis, c'est ce terme qui est à l'origine de la célèbre force de Coriolis.

Notons que cette force disparaît dans les deux cas particuliers :

- $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0}$ c'est-à-dire pour un mouvement de translation
- lorsque A est invariablement lié à R' c'est-à-dire en équilibre dans R'

2°) Exemples

a) Cinématique terrestre

Proposons d'exprimer l'accélération d'un point O situé à la surface de la terre par rapport au référentiel de Copernic R_0 lié à la sphère céleste. Introduisons le référentiel géocentrique $R_g = Tx_0y_0z_0$. La loi de composition des accélérations donne : $\vec{a}_{O/R_0} = \vec{a}_{O/R_g} + \vec{a}_{T/R_0}$ car $\vec{\Omega}(R_g/R_0) = \vec{0}$. Comme $\vec{a}_{O/R_g} = -\vec{\Omega}^2 HO$, on a : $\vec{a}_{O/R_0} = -\vec{\Omega}^2 HO + \vec{a}_{T/R_0}$. Numériquement :

$\vec{\Omega}^2 HO = \Omega^2 R\cos\lambda = 3{,}41\times10^{-2}\times\cos\lambda\ m/s^2$ et $a_{T/R_0} = \dfrac{V^2_{T/R_0}}{ST} \approx \dfrac{(30\times10^3)^2}{149\times10^9} = 6\times10^{-3}\,m/s^2$.

b) Composition des accélérations en coordonnées sphériques

Reprenons l'exemple du point A mobile sur la tige T :
Désignons par T le repère lié à la tige et associé aux coordonnées sphériques.

$\vec{a}_{A/T} = \ddot{r}\vec{e}_r$, $\vec{a}_e(A) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{A/T}$

$$\vec{a}_{A/R} = \vec{a}_{A/T} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C = \left|\begin{array}{l} \ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) \\ r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \end{array}\right._T$$

En conclusion retenons les lois de composition des vitesses et des accélérations avec la signification précise des termes, notamment pour l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis : $\vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{A/R'} + \vec{V}_e$ et $\vec{a}_{A/R} = \vec{a}_{A/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ avec $\vec{V}_e = \vec{V}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A}$ $\vec{a}_e/R = \vec{a}_{O'/R} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A})$ et $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{A/R'}$

$\vec{\Omega}$ étant le vecteur vitesse de rotation de R' par rapport à R. Ces relations possèdent un champ d'application très vaste, puisque, d'une part, elles préparent toute l'étude de la dynamique et que, d'autre part, elles possèdent en propre un intérêt pratique, notamment dans l'étude de la cinématique des solides en contact.