Chapitre 4 : Dynamique du point matériel

La dynamique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées forces, qui les produisent. Les lois physiques sur lesquelles elle s'appuie ont été énoncées partiellement par G. Galilée en 1632 et complètement par I. Newton en 1687.
Dans ce chapitre, nous considérons d'abord les lois relatives au mouvement d'un point matériel, connues sous les noms de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ lois de Newton. La première loi, ou principe de l'inertie a été énoncée pour la première fois par Galilée ; dans la deuxième, Newton introduit déjà le concept de quantité de mouvement qui regroupe les notions de vitesse et de masse. La troisième loi, ou loi d'opposition des actions réciproques entre deux points matériels, joue un rôle essentiel dans l'étude des systèmes de N points matériels.

I°) Masse et quantité de mouvement

1°) Masse

L'univers peut être considéré comme un ensemble d'éléments appelé points matériels caractérisés :

a) cinématiquement, par un seul vecteur vitesse et un seul vecteur accélération ; on ne distingue donc pas les mouvements des différents points géométriques qui peuvent constitués de tels éléments.

b) dynamiquement, par un scalaire positif appelé masse inerte ou plus brièvement masse, qui est constant (au cours du mouvement) et invariant (par changement de référentiel). On mesure la masse d'un point matériel en la comparant à celle d'un point matériel prise comme unité : la comparaison se fait naturellement à partir des lois physiques où les masses interviennent. L'unité de masse dans le système international est le kilogramme (kg) : c'est la masse d'un certain cylindre en platine iridié appelé prototype international du kilogramme.

2°) Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est, pour point matériel A, de masse m et de vitesse $\vec{v}_{A/R}$ par rapport à un référentiel R, le vecteur : $\vec{p} = m\vec{v}_{A/R}$.
Tout comme la vitesse, ce vecteur est défini par rapport à un référentiel. On l'appelle parfois impulsion : on trouve la justification de cette appellation dans le rôle joué par $\vec{p}$ dans les problèmes de collision. En physique, on le désigne aussi par moment linéaire, ce qui est naturel dans le contexte de la formulation lagrangienne ou hamiltonienne de la mécanique.

II°) Principe de l'inertie

Le principe de l'inertie connu aussi sous le nom de première loi de Newton, a été énoncé la première fois par Galilée.

1°) Première loi de Newton

Par rapport à tout référentiel R, qualifié de Galiléen, tout point matériel A, éloigné de tout autre corps, a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = Cte$
C'est Galilée qui le premier a montré que le mouvement d'un point matériel éloigné de tout autre corps devait garder sa vitesse. Ce résultat a été vérifié expérimentalement de multiples fois dans le cas d'expériences terrestres dans lesquelles la pesanteur était compensée par la réaction d'un support.
Certains désaccords entre les prévisions théoriques et les résultats obtenus lors d'expériences très précises ont montré que le référentiel terrestre réalisait une moins bonne approximation d'un référentiel galiléen qu'un référentiel lié au soleil et à trois étoiles éloignées, ce référentiel, appelé référentiel de Copernic R_0 est défini expérimentalement.

2°) Transformation de Galilée

Considérons le mouvement d'un point A par rapport à deux référentiels R et R', en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. La transformation de Galilée est celle qui permet de relier les coordonnées d'un évènement dans R aux coordonnées du même évènement dans R'. On a : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$ où $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_{O'}.t + \overrightarrow{OO'}_0$ dépend de six paramètres, trois pour la vitesse $\vec{v}_{O'}$ et trois pour la position initiale O'_0

de O' Comme les vecteurs de base de R' s'expriment en fonction des vecteurs de base de R à l'aide de trois paramètres supplémentaires, il en résulte que la transformation de Galilée est caractérisée au total par neuf paramètres, une fois admise l'universalité du temps.
Si l'on suppose que les vecteurs de base des deux référentiels sont respectivement égaux, que la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ est portée par l'axe des x et qu'à l'instant pris comme origine les origines spatiales O et O' de ces deux référentiels coïncident, la transformation de Galilée se réduit aux formules simples suivantes : $x = x' + v_e t$, $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$ puisque le temps est supposé universel.
Une conséquence immédiate de la transformation de Galilée est la loi de composition des vitesses entre deux référentiels R et R'. En effet, les trois premières formules précédentes donnent par dérivation par rapport au temps universel : $v_x = v_e + v_{x'}$, $v_y = v_{y'}$ $v_z = v_{z'}$.

III°) Loi fondamentale de la dynamique du point matériel

1°) Forces
Tout système matériel de l'Univers exerce sur un point matériel A non inclus dans ce système une force représentée, dans un référentiel galiléen R, par un vecteur lié, c'est-à-dire l'ensemble d'un point A et vecteur $\vec{F}$.
Exemples de forces

a) Force de gravitation universelle
Un point matériel A_1 subit de la part d'un autre point matériel A_2 une force d'expression
$\vec{F}_{2\to 1} = -G\dfrac{m_1^* m_2^*}{r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ et $\vec{r} = \overrightarrow{A_2A_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. La grandeur $G = 6{,}67\times 10^{-11}\,SI$ est la constante de gravitation et les quantités scalaires m_1^* et m_2^* sont les masses de gravitation de ces points. On montre qu'après analyse, qu'elles peuvent être identifiées aux masses inertes des points A_1 et A_2 ; Cette force introduite par Newton pour interpréter le mouvement des planètes du système solaire.

b) **Force électromagnétique de Lorentz**.

Un système de charges électriques au repos ou en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R exerce sur un point matériel chargé électriquement A, une force $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}]$ dans laquelle q est la charge électrique du point A, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique produits par le système, $\vec{v}$ la vitesse de A par rapport à R. Cette force fut appelée la force de Lorentz. Elle est bien plus intense que la précédente comme le montre l'exemple suivant de l'atome d'hydrogène ; le rayon de Bohr de l'atome étant
$a_0 \approx 0{,}05nm$, on a : $\vec{F}^{elec} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{a_0^2} \approx 8\times 10^{-8}N$ et $F^{grav} = G\dfrac{m_p m_e}{a_0^2} \approx 4\times 10^{-47}N$.

c) Forces nucléaires
Ces forces permettent d'expliquer la cohésion des nucléons qui composent le noyau. Elles ne sont pas aussi simples que les forces électriques ou les forces de gravitation, car elles ne dépendent pas seulement de la distance qui sépare les particules ; les vitesses et d'autres paramètres plus complexes interviennent aussi. Retenons qu'elles sont 100 fois plus intenses que les forces électromagnétiques et de très courte portée ($(1F = 10^{-15}m)$, au point que leur domaine d'application se limite au noyau.

d) Forces de contact
Aux forces fondamentales précédentes, qui apparaissent au niveau microscopique fondamental, l'expérience courante montre que l'on décrit bien le mouvement d'un point matériel en tenant compte de forces supplémentaires de contact : les forces de frottement visqueux, exercées par les fluides en mouvement, de la forme $-\alpha v$ ou $-\beta v^2$ et les forces de frottement entre solides.
2°) Deuxième loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique.

a) Enoncé

Par rapport à un référentiel galiléen R, le mouvement d'un point matériel A de masse m soumis à plusieurs forces, dont la somme est $\sum \vec{F}$, satisfait à la relation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$ soit $m\vec{a}_{A/R} = \sum \vec{F}$ dans laquelle $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement de la particule par rapport à un référentiel galiléen.

b) Conséquence : inertie de la masse

La propriété qu'a la masse d'intervenir dans la loi fondamentale s'appelle l'inertie car, pour deux points matériels, initialement au repos dans R, soumis à la même force $\vec{F}$, celui dont la masse est la plus grande acquiert l'accélération la plus faible : son aptitude à s'opposer à l'effet de $\vec{F}$ est donc plus grande ; on dit son inertie est plus grande.

c) Relativité galiléenne

Montrons que la loi fondamentale de la dynamique est invariante par changement de référentiels galiléens R et R' .Comme les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont nulles, on a : $\vec{a}_{A/R} = \vec{a}_{A/R'}$ d'où $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{A/R}$ et $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{A/R'}$; Ainsi aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer entre différents référentiels galiléens.

Cette invariance de la loi fondamentale lorsqu'on change de référentiel est appelée la relativité galiléenne. Dans ce contexte, le référentiel de Copernic, souvent utilisé comme référentiel galiléen, n'est qu'une très bonne réalisation d'un référentiel galiléen parmi d'autres.

d) Application à la mesure des forces

La preuve de l'existence d'une force est donnée par la non observation du principe de l'inertie. On constante qu'en présence d'autres corps étrangers à un point matériel A, sa quantité de mouvement n'est pas constante. La relation $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ devient une relation permettant de déterminer la force inconnue $\vec{F}$; C'est ainsi que Newton a pu établir à partir d'observations astronomiques, que la force de gravitation était inversement proportionnelle au carré de la distance des corps en interaction.

Très souvent, on mesure $\vec{F}$ par la variation de la déformation d'un système, tel qu'un ressort dont on a fixé une extrémité. Il est nécessaire dans ce cas d'étalonner préalablement le ressort. On réalise ainsi un dynamomètre.

IV°) Moment cinétique

1°) Définition

On appelle moment cinétique d'un point matériel A, par rapport à un référentiel R, en un point O de R, le moment de sa quantité de mouvement : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}_A$. Le moment cinétique est parfois appelé moment angulaire.

2°) Théorème du moment cinétique

Si on dérive $\vec{\sigma}_{O/R}$ par rapport au temps, relativement à R, supposé galiléen, il vient :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OA} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \sum \vec{F} \text{ d'où } \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \overrightarrow{M}_O .$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel, en un point fixe O d'un référentiel galiléen, est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur ce point.

Remarque : Nous avons supposé que le point O est fixe dans R. étudions le cas où le moment cinétique est calculé en un point O' mobile dans R . Comme $\vec{\sigma}_{O'} = \overrightarrow{O'A} \wedge m\vec{v}_A$, il vient :

$\left(\dfrac{d\vec{\sigma}_{O'}}{dt}\right)_R = [\vec{v}_{A/R} - \vec{v}_{O'/R}] \wedge m\vec{v}_{A/R} + \overrightarrow{O'A} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt}$. En un point mobile O' dans R, le théorème du moment cinétique s'écrit donc : $\left(\dfrac{d\vec{\sigma}_{O'}}{dt}\right)_R + \vec{v}_{O'/R} \wedge m\vec{v}_{A/R} = \sum \overrightarrow{M}_{O'}$.

V°) Méthode d'application de la loi fondamentale de la dynamique

Pour appliquer la loi fondamentale de la dynamique en minimisant les risques d'erreur, il est préférable de procéder selon une méthode déterminée que nous allons illustrer sur l'exemple d'un point matériel lancé, à la surface de la terre avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle θ_0 avec l'horizontale.

a) Définition du système : le système est constitué d'un point matériel

b) Nature galiléenne du référentiel R.

Le repère d'analyse R est le repère terrestre qui est une bonne approximation d'un référentiel galiléen pour vu que l'on introduise le poids et que la vitesse ne soit trop grande (inférieure à 700 m/s).

c) Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la résistance de l'air de forme $-\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$; cette dernière est une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse.

d) Expression vectorielle de la loi fondamentale de la dynamique L'application de la loi fondamentale donne : $m\vec{a}(A/R) = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$ soit $\vec{a} = \vec{g} - \dfrac{\alpha}{m}\vec{v}$

e) Projection sur une base Explicitons, dans une base orthonormée directe, généralement la commode (ici celle de R), l'équation vectorielle précédente. En introduisant la grandeur $\tau = \alpha / m$, homogène à une durée, il vient :

$\ddot{x} = -\dot{x}/\tau$ $\ddot{y} = -g - \dot{y}/\tau$ $\ddot{z} = -\dot{z}/\tau$ ce qui donne les trois scalaires suivantes: $\ddot{x} + \dot{x}/\tau = 0$, $\ddot{y} + \dot{y}/\tau = -g$, $\ddot{z} + \dot{z}/\tau = 0$.

f) Résolution des équations différentielles.

Les équations suivant x et z sont identiques. La première s'écrit : $\ddot{x} + \dot{x}/\tau = 0$ soit $\dot{v}_x + v_x/\tau = 0$.

Cherchons la solution sous la forme $v_x = C\ e^{rt}$, on trouve $r + 1/\tau = 0$. Par conséquent :

$v_x = v_0 \cos\ \theta_0 e^{-t/\tau}$ car pour $t = 0,\ v_x = v_0 \cos\theta_0$. En intégrant, on obtient :

$x = -v_0\tau\cos\theta_0 e^{-t/\tau} + x_0 = v_0\tau\cos\theta_0(1 - e^{-t/\tau})$ puisque pour $t = 0,\ x = 0$. Comme à l'instant initial, on a : $\dot{z}_0 = 0$ et $z_0 = 0$. Le mouvement est contenu dans le plan xOy. Quant à l'équation en y, il suffit pour la résoudre, d'ajouter à la solution générale précédente la solution particulière suivante évidente :

$v_{yp} = -g\tau$. Par conséquent : $v_y = C\ e^{-t/\tau} - g\tau$. à $t = 0,\ v_x = v_0 \sin\theta_0 = C - g\tau$. D'où

$v_y = (v_0 \sin\theta_0 + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau.$ En intégrant une nouvelle fois et en faisant $y_0 = 0,$ on obtient :

$y = -g\tau\ t + \tau(v_0 \sin\theta_0 + g\tau)[1 - e^{-t/\tau}]$

On notera que la trajectoire change considérablement selon les conditions initiales : dans le cas général c'est une courbe, alors que pour $v_0 = 0,\ \theta_0 = \pi/2$ ou $\theta_0 = -\pi/2$ c'est une droite verticale.

g) Analyse physique des résultats

- Lorsque t devient très grand, v_x et v_y tendent vers des valeurs limites $(v_x)_l = 0$ et $(v_y)_l = -g\tau.$ Quant à x et y, ils valent respectivement :

$(x)_l = v_0\tau\ \cos\theta_0$ et $(y)_l = -g\tau\ t$.

- Enfin si $t << \tau$, on retrouve les résultats bien connus :

$x \approx v_0\tau\ \cos\theta_0(1 - 1 - t/\tau) = v_0 \cos\theta_0 t$

$y \approx -g\tau\ t + \tau[v_0 \sin\theta_0 + g\tau]\left(1 - 1 + t/\tau - t^2/2\tau^2\right) \approx -gt^2/2 + v_0 \sin\theta_0 t$

VI°) Troisième loi de Newton

La troisième loi de Newton, ou principe de l'opposition des actions réciproques entre deux points permet de passer de la mécanique du point matériel à celle des systèmes.

1°) Enoncé

Si un point matériel A_1 exerce sur un autre point matériel A_2 une force $\vec{F}_{1\to 2}$, A_2exerce la force opposée $\vec{F}_{2\to 1}$, on a : $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

Exemple :Dans le cas de la gravitation on a : $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} = -\dfrac{Gm_1^* m_2^*}{r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ et $\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$

2°) Application à la comparaison des masses

L'opposition des actions réciproques permet d'établir un résultat important relatif à un système de deux points matériels soumis à leurs actions mutuelles. Des relations :

$\dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{2\to 1}$ et $\dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1\to 2}$, on déduit $\dfrac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$ soit $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{Cte}$

Donc, la quantité de mouvement d'un système isolé de deux points matériels est une constante vectorielle.

Ce résultat fournit une méthode de comparaison des masses. Par rapport à un référentiel R, on peut écrire la relation suivante entre deux instants t et t' : $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ soit

$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2$, on en déduit : $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\|\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\|}$

Conclusion : La loi fondamentale de la dynamique permet d'étudier tout problème de mécanique du point matériel connaissant les forces qui s'exercent sur lui. Relativement à un référentiel galiléen, elle s'écrit $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$ soit $m\vec{a} = \sum F$ puisque $p = m\vec{v}$. Son application fournit dans le cas général, trois équations différentielles du deuxième ordre qu'il faut résoudre pour connaître le type de mouvement. La difficulté se présente alors sous forme qui relève de la technique mathématique. Les constantes introduites par cette dernière résolution sont déterminées de manière non *ambigüe* par des conditions particulières du mouvement, le plus souvent initiales, qui portent sur la position et la vitesse. Une fois le mouvement déterminé, il convient de vérifier les prévisions théoriques en s'aidant de l'expérience où à défaut son intuition newtonienne.

Dans certains cas, il est commode d'appliquer le théorème du moment cinétique, directement issu la loi fondamentale de la dynamique dans le cas du mouvement d'un point matériel : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O$ avec $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}$

Tout l'intérêt de la loi fondamentale vient de son très large domaine d'application. Rappelons que les limites sont définies par :

1°) l'échelle atomique $(1\ nm \approx 10^{-9} m)$,

2°) Les vitesses non négligeables devant celle de la lumière dans le vide $c \approx 3\times 10^8 m/s$.