Chapitre 1 : Calcul vectoriel

Le calcul vectoriel est un outil mathématique qui joue un rôle considérable en Physique car beaucoup de grandeurs physiques (vitesse, accélération, quantité de mouvement,…) peuvent être représentées par des vecteurs. Il apparaît donc naturel de rappeler, avant tout développement, les propriétés des vecteurs et notamment les opérations telles que l'addition vectorielle, le produit scalaire et le produit vectoriel.

I°) Espace vectoriel

1°) Définition

On appelle espace vectoriel E sur un corps commutatif K un ensemble d'éléments appelés vecteurs qui satisfont aux propriétés suivantes :

a. E est muni d'une structure de groupe commutatif pour une loi interne, l'addition vectorielle notée $+$

b. Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v} \in E$, on a si λ et $\mu \in K$

$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$; $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$; $\lambda(\mu\ \vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$; $1\ \vec{u} = \vec{u}$.

2°) Espace vectoriel Euclidien

Un espace vectoriel E est euclidien s'il est muni d'un produit scalaire f qui à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E fait correspondre le nombre réel $f(\vec{u},\vec{v})$ tel que :

$f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$;

$f(\vec{u},\lambda\ \vec{v}) = \lambda\ f(\vec{u},\vec{v})$;

$f(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{v}) + f(\vec{u},\vec{w})$

$f(\vec{u},\vec{u}) > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u},\vec{u}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$.

La quantité $f(\vec{u},\vec{u})$ est appelée le carré de la norme de $\vec{u}$ laquelle est notée $\|\vec{u}\|$ ou plus brièvement u.

3°) Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel un système de n vecteurs de E, indépendants, permettant d'exprimer linéairement tout vecteur $\vec{u}$ de E : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

Les différents coefficients x_i sont appelés composantes de $\vec{u}$ dans la base considérée.

La base est orthonormée si $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$

II°) Espace affine

1°) Définition

On appelle espace affine ε, un ensemble d'éléments, appelés points, tel qu'à tout couple ordonné (A, B) de deux points quelconques A et B (bipoint), on puisse faire correspondre un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'un espace vectoriel E ; si

a) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

c) O étant un point quelconque de ε et $\vec{v} \in E$, il existe un point A et un seul de ε défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

2°) Espace métrique

Un espace métrique est un espace affine auquel on a associé un espace vectoriel euclidien. On peut alors définir une norme pour tout vecteur associé aux points A et A' : la norme est la distance de ces deux points. En coordonnées cartésiennes, dans une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de E, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \sum_i x_i \cdot \vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{OA'} = \sum_i x'_i \cdot \vec{e}_i$$

d'où $\overrightarrow{AA'} = \sum_i (x'_i - x_i) \cdot \vec{e}_i$.

On déduit la norme AA' telle que $\overrightarrow{AA'}^2 = \sum_i (x'_i - x_i)^2$

D'où $AA' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z'-z)^2}$

Si les points sont voisins alors $AA' = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

3°) Base directe et inverse

Trois vecteurs $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ forment une base directe si un observateur placé sur $\overrightarrow{OA} = \vec{U}$, les pieds en O et regardant vers $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$, voit $\overrightarrow{OC} = \vec{W}$ à sa gauche. Si le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est à sa droite, la base est inverse.
L'intérêt de cette distinction entre les bases directe et inverse est lié à l'existence de deux grandes catégories de grandeurs physiques : celles qui sont indépendantes de l'orientation de l'espace et celles qui en dépendent.
Les bases généralement utilisées en physique sont orthonormées et directes.

III°) Opérations sur les vecteurs.

1°) Addition vectorielle

Deux vecteurs sont équipollents s'ils sont parallèles de même longueur et de même sens.
Soient à faire la somme vectorielle de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

a) Règle du triangle

En un point quelconque, on prend un vecteur équipollent au vecteur $\vec{U}$, à l'extrémité du vecteur $\vec{U}$, on prend le second vecteur équipollent au vecteur $\vec{V}$, la somme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur qui a pour origine celle du vecteur $\vec{U}$ et pour extrémité celle du vecteur $\vec{V}$.

a) Règle du triangle b) Règle du parallélogramme

Figure n°1 Règles du triangle et du parallélogramme.

b) Règle du parallélogramme

A partir d'un point quelconque pris comme origine, menons deux vecteurs équipollents aux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, la somme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est la diagonale issue de l'origine commune du parallélogramme formé avec les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

2°) Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ tel que : $\forall \ \vec{V}_1, \ \vec{V}_2 \in \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \in \mathbb{R}$.

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$; le résultat d'un produit scalaire est un scalaire.

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.

a) Propriétés du produit scalaire

- linéarité :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot \vec{W} = \vec{V}_1 \cdot \vec{W} + \vec{V}_2 \cdot \vec{W}$$
$$(\lambda \vec{V}) \cdot \vec{W} = \lambda(\vec{V} \cdot \vec{W})$$

- Symétrie par rapport aux vecteurs :

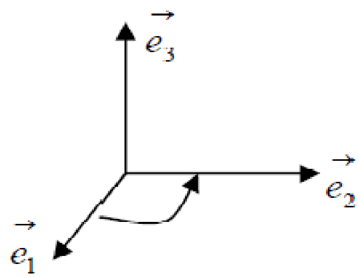
$\vec{V} \cdot \vec{W} = \vec{W} \cdot \vec{V}$ donc : $\vec{V} \cdot \vec{V} > \ 0 \ si \ \vec{V} \neq \vec{0}$

Le produit scalaire est une forme linéaire symétrique associée aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

b) Expression analytique du produit scalaire

Considérons une base b de l'espace R^3 notée : $b = (\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ \vec{e}_3)$. Cette base est orthonormée si :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$



La base *b* est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur $\vec{e}_3$ verra le vecteur $\vec{e}_1$ tourner vers le vecteur $\vec{e}_2$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Leurs expressions dans cette base sont :

$$\vec{V}_1 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$
$$\vec{V}_2 = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est donné par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

c) Norme ou module d'un vecteur

On appelle norme ou module d'un vecteur $\vec{V}$, noté : $\left\|\vec{V}\right\|$ la racine carrée du produit scalaire du vecteur par lui-même. $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2}$.

Nous avons en particuliers : $\left\|\lambda\vec{V}\right\| = \left|\lambda\right|\left\|\vec{V}\right\|$

$\left\|\vec{V}_1\right\| - \left\|\vec{V}_2\right\| \leq \left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| \leq \left\|\vec{V}_1\right\| + \left\|\vec{V}_2\right\|$: appelé inégalité triangulaire.

d) Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul : Si $\vec{V} \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V} \cdot \vec{W} = \vec{0}$.
Si trois vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, ils sont alors linéairement indépendant et ils constituent une base orthogonale dans $\mathbb{R}^3$.

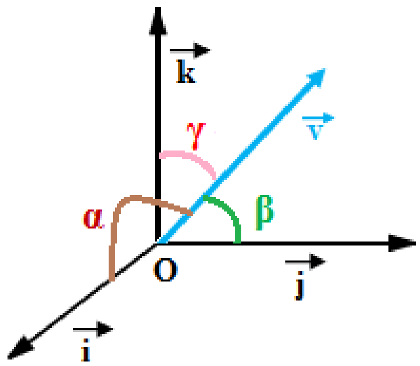
e) Base orthonormée

Une base est dite orthonormée si les vecteurs qui la constituent sont perpendiculaires deux à deux et si leurs normes sont égales à 1. Si $b = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons alors :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0, \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1^{\,2} = 1, \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2^{\,2} = 1, \qquad \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{\,2} = 1$$

d) Cosinus directeurs

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée; un vecteur $\vec{v}$ est repéré par rapport aux vecteurs de la base par 3 angles : $\alpha = (\vec{v}, \vec{i}), \beta = (\vec{v}, \vec{j}),\ \gamma = (\vec{v}, \vec{k})$.



Dans une base orthonormée les composantes de $\vec{v}$ sont :

$v_1 = \vec{v} \cdot \vec{i} = \|\vec{v}\| \cos\alpha\ ;\ v_2 = \vec{v} \cdot \vec{j} = \|\vec{v}\| \cos\beta\ ;$

$v_3 = \vec{v} \cdot \vec{k} = \|\vec{v}\| \cos\gamma$.

Les cosinus directeurs de $\vec{v}$ sont:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}; \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}; \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$$

En écrivant que $\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, on obtient la relation fondamentale entre les cosinus directeurs dans un repère orthonormé : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

<u>Remarque</u> : la direction du vecteur $\vec{v}$ est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère

<u>Application :</u>

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

<u>Solution</u> :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

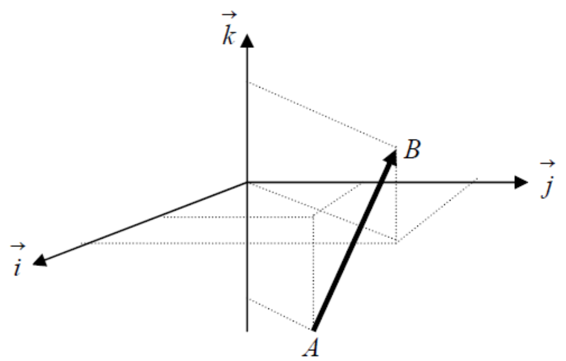
Son module : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère. Ces angles s'obtiennent en calculant les cosinus directeurs de $\overrightarrow{AB}$ qui sont :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \dfrac{3}{\sqrt{50}} = 0,424 \Rightarrow \alpha = 64,89° \\ \cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \dfrac{4}{\sqrt{50}} = 0,565 \Rightarrow \beta = 55,54° \\ \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{k}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = 0,707 \Rightarrow \theta = 44,99° \end{cases}$$

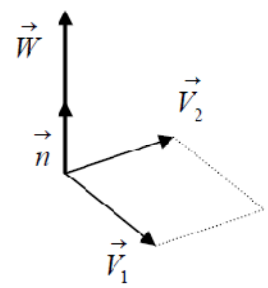
Son sens : comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère. En effet on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = 3 \geq 0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{j} = 4 \geq 0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{k} = 5 \geq 0 \end{cases}$$



3°) Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, défini par : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\| \sin\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)\vec{n}$ ou $\vec{n}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



Le produit vectoriel est nul si :
- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.

a) Propriétés du produit vectoriel

-Le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$;

-Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{W} + \vec{V}_2 \wedge \vec{W}$$
$$\vec{W} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{W} \wedge \vec{V}_1 + \vec{W} \wedge \vec{V}_2$$

-Le produit vectoriel est associatif pour la multiplication par un nombre réel :

$$(\lambda\vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$
$$\vec{V} \wedge (\lambda\vec{W}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

-Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

Si on applique cette propriété au produit vectoriel d'un même vecteur, nous aurons :

$$\vec{V} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{V})$$

On déduit à partir de cette propriété que : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

$$\vec{V}_1 \,/\,/ \vec{V}_2 \;\; alors \;\; \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$$

En effet si $\vec{V}_1 \,/\,/ \vec{V}_2$ on peut écrire : $\vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \lambda(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$

b) Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

Si $b = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons:

$$\begin{aligned} &Sens\ direct\ : \ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ &Sens\ opposé : \ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \end{aligned}$$

c) Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de composantes respectives dans une base orthonormée direct *R*:

$$\vec{V}_1 \ {}_R\left| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix} \right. \quad et \quad \vec{V}_2 \ {}_R\left| \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix} \right.$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \ {}_R\left| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix} \right. \wedge \ {}_R\left| \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix} \right. = \ {}_R\left| \begin{matrix} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{matrix} \right.$$

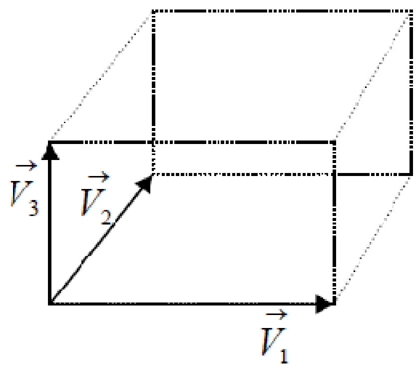
d) Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ \vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.

Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.



On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

Remarque :

Une notation simplifiée, dans laquelle les opérateurs n'apparaissent pas, est adoptée dans ce cas pour faciliter l'écriture des équations vectorielles :

$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ est équivalent à $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$

nous avons alors : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

e) Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est un vecteur $\vec{W}$ donné par la relation : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)\cdot$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{W} \perp \vec{V}_1 \\ \vec{W} \perp (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{W} \in au\ plan\ formé\ par\ les\ vecteurs\ \vec{V}_2 \text{ et } \vec{V}_3$$

Le vecteur $\vec{W}$ peut donc s'écrire $\vec{W} = a\vec{V}_2 + b\vec{V}_3$.

Autrement dit $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$

Le produit vectoriel n'étant pas commutatif, faites attention à l'ordre des vecteurs. Cette formule est plus facile à retenir sous la forme :

$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

IV°) Vecteur lié et systèmes de vecteurs liés

1°) Définition d'un vecteur lié

On appelle vecteur lié le couple d'un vecteur $\vec{V}$ de E et d'un point A de ε associé à E. On le note $(A,\ \vec{V})$. Par exemple la force qu'exerce un système matériel sur un point matériel A peut être représenté par un vecteur lié $(A, \vec{F})$.

2°) Moment en un point d'un vecteur lié

Par définition, le moment en un point O d'un vecteur lié $(A,\vec{V})$ est le vecteur : $\vec{M}_O(\vec{V}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}$

Etablissons la relation entre $\vec{M}_O$ et le moment du même vecteur en un autre point O' : $\vec{M}_{O'}(\vec{v}) = \overrightarrow{O'A} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V} \rightarrow \vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{M}_O(\vec{V})$.

3°) Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Par définition, O étant un point fixe de l'axe Δ de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$, le moment du vecteur lié $(A,\vec{v})$ par rapport à Δ est le produit scalaire $\vec{e}_\Delta.\vec{M}_O(\vec{V}) = \vec{e}_\Delta.(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V})$ noté $M_\Delta(\vec{V})$.

Cette notation a bien un sens puisqu'elle ne dépend pas du point choisi sur l'axe. En effet soit O' un second point de l'axe Δ : $M_\Delta(\vec{V}) = \vec{e}_\Delta(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}) \wedge \vec{V} = \vec{e}_\Delta.(\overrightarrow{O'A} \wedge \vec{V}) = \vec{e}_\Delta(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V})$.

4°) Vecteur et moment d'une famille de vecteurs liés

Soit un ensemble de n vecteurs liés $\{A_i, \vec{V}_i\}$. On appelle vecteur ou résultante $\vec{R}$ et le moment résultant en O arbitraire, de cette famille de vecteurs, les vecteurs suivants :

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$ et $\vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{V}_i$. O' étant un autre point arbitraire, on a :

$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{V}_i = \vec{M}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$.

V°) Détermination des composantes d'un vecteur.

Bien que purement technique, la détermination des composantes d'un vecteur est capitale pour traduire les lois physiques de nature vectorielle. Dans la suite, pour la commodité des calculs, nous ne considérerons que des bases orthonormées directes.

1°) Technique de projection

Il arrive souvent que l'on doive projeter un vecteur unitaire $\vec{e}$ situé dans un plan orienté. Il convient alors de localiser d'abord l'axe polaire, c'est-à-dire l'axe qui, par une rotation de $\pi/2$, se confond avec le second axe du plan, puis d'évaluer algébriquement l'angle θ que fait le vecteur unitaire $\vec{e}$ avec cet axe. Ainsi dans

le cas des figures ci-dessous, il n'est pas inutile de rappeler que les composantes de $\vec{e}$ situé dans le plan Oxy sont : $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dans tous les cas ;
1er cas : l'angle θ est aigu et positif.
2ème cas : l'angle θ est obtus et positif.
3ème cas : l'angle θ est aigu et négatif.

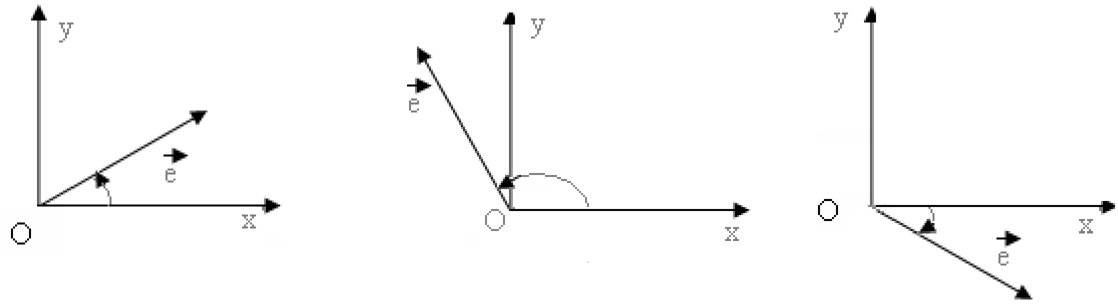


Figure 2 : Technique de projection du vecteur unitaire

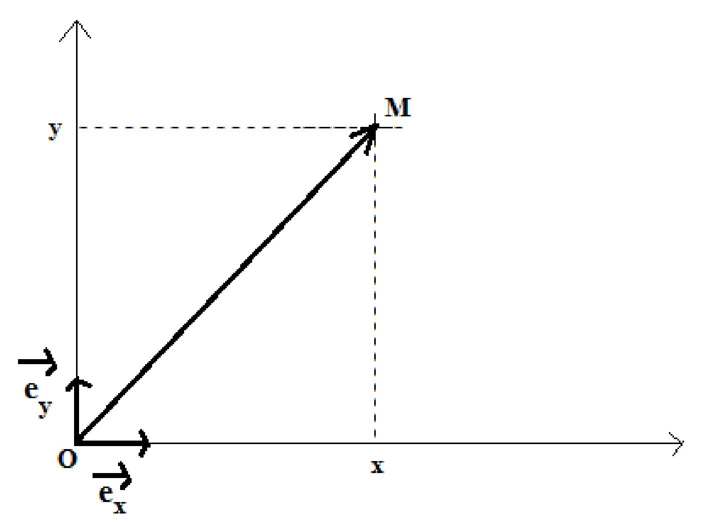
2°) Systèmes usuels de coordonnées

a) Coordonnées cartésiennes

- Dans le plan, c'est un ensemble de deux axes rectangulaires Ox et Oy. La position d'un point M est déterminé par 2 nombres algébriques (x, y) appelées coordonnées cartésiennes de M : ce sont aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Soient ($\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$) les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy, on a :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_z$.

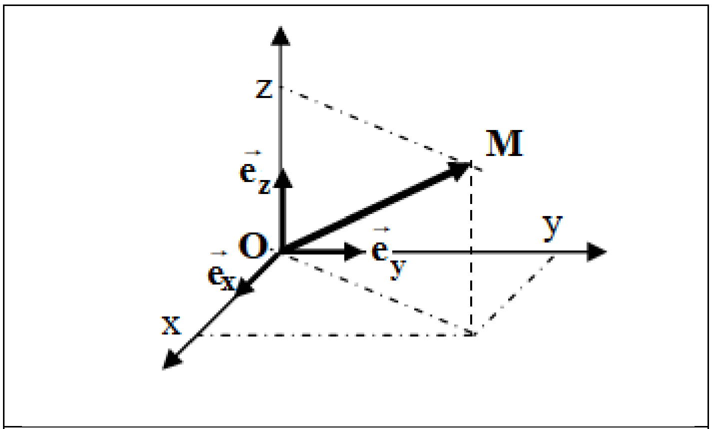
Tout déplacement élémentaire de M s'écrit $\overrightarrow{dM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$



Coordonnées cartésiennes à deux dimensions

- Dans l'espace ordinaire de dimension 3, la position de M sera déterminée en adjoignant aux deux coordonnées précédentes, un troisième z mesurant la côte de M. Le repère sera défini par trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$ $\vec{e}_z$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_z + z\vec{e}_z \Rightarrow \overrightarrow{dM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$



Coordonnées cartésiennes à trois dimensions

b) Coordonnées polaires.

La détermination de la position du point M du plan Oxy, n'est pas le seul mode de représentation des points du plan. Si le problème étudié présente une symétrie de révolution autour d'un point O, il est commode d'utiliser les coordonnées polaires (ρ,φ) où $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et φ est l'angle que fait le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

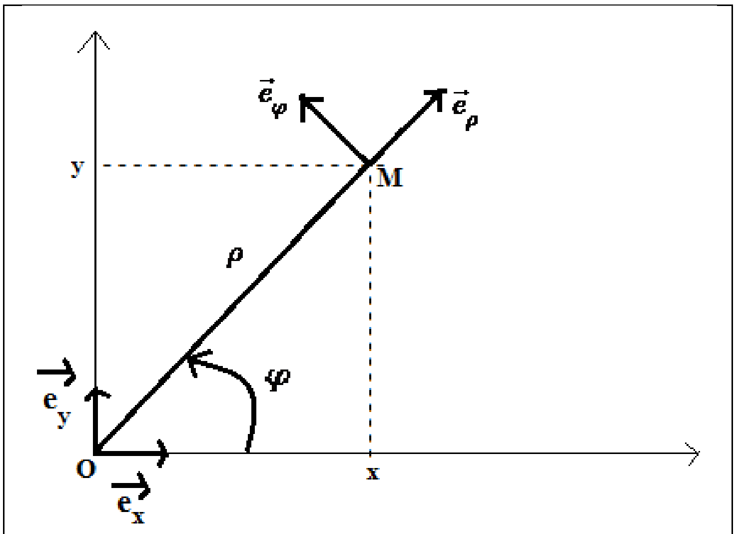
L'origine O est appelée pôle et l'axe Ox l'axe polaire.

On a les relations suivantes : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = \rho\cos\varphi\ \vec{e}_x + \rho\sin\varphi\ \vec{e}_y$ qui donne par identification :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = Arc\tan(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \Rightarrow \overrightarrow{dM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi$$



Coordonnées polaires

c) Coordonnées cylindriques

Lorsque le problème étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe, les coordonnées cylindriques sont les plus indiquées. On détermine la position d'un point M de l'espace ordinaire en associant aux deux coordonnées polaires (ρ,φ), une troisième z fixant la côte du point M. (ρ,φ,z) sont les coordonnées cylindriques du point M.

- ✓ Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

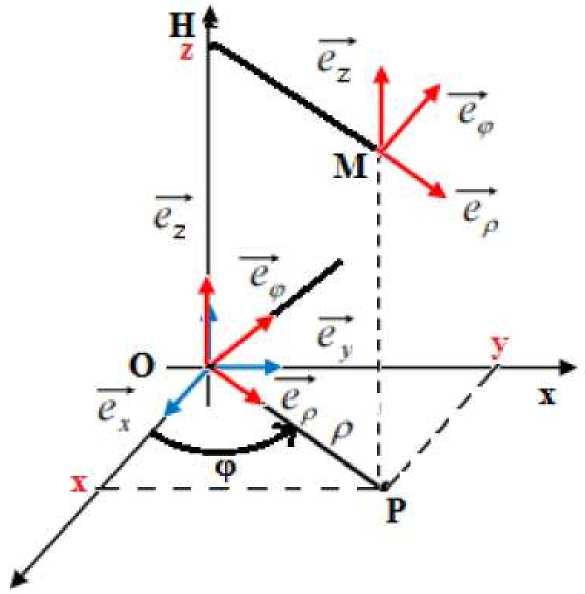
- ✓ Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

or $\rho\vec{e}_\rho = \rho\cos\varphi\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\vec{e}_y$

$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ Par identification on a :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} et \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



Coordonnées cylindriques

Le déplacement élémentaire s'écrit avec les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \Rightarrow \overrightarrow{dM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

d) Coordonnées sphériques

Lorsque le problème étudié présente une symétrie sphérique autour d'un point O, il est commode de repérer les points de l'espace par un système de coordonnées sphériques

r, θ, φ où r désigne la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou la distance du point M au point O

θ et φ sont des angles fixant la position du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans l'espace. L'angle φ défini à chaque instant, la position du demi méridien zMP contenant le point M par rapport au demi méridien contenant l'axe Ox tandis que θ fixe la position du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le demi méridien contenant l'axe Ox, r et θ sont les coordonnées polaires de M dans le plan zMP.

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

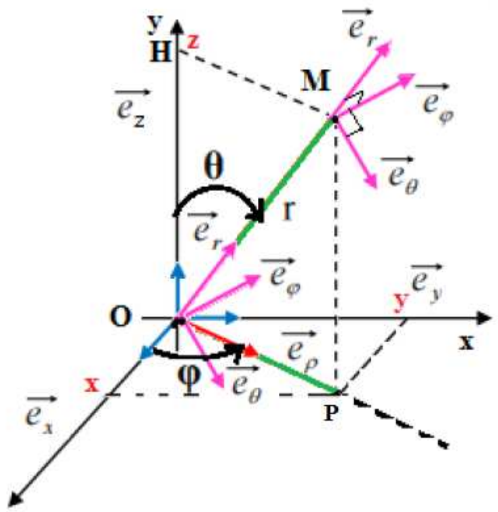
$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_z + \sin\theta\vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} et \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = Arc\tan(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}) \\ \varphi = Arc\tan(y / x) \end{cases}$$

Le déplacement élémentaire s'écrit avec les coordonnées



sphériques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \Rightarrow \overrightarrow{dM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$	

3°) Coordonnées curvilignes

a) Définitions

- Soit M un point de l'espace affine, on appelle système de coordonnées dans l'espace affine tout mode de définition d'un point M de cet espace en fonction de n scalaires q_i qu'on appelle coordonnées curvilignes du point M.
- Les lignes ou courbes coordonnées pour un tel système sont les trajectoires des points M lorsqu'une seule coordonnée varie.

b) Exemple : système de coordonnées sphériques :

$x = q_1 \sin q_2 \cos q_3 = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = q_1 \sin q_2 \sin q_3 = r\sin\theta\sin\varphi$,

$z = q_1 \cos q_2 = r\cos\theta$

En faisant varier une coordonnée, les deux autres étant constantes, M décrit une courbe.

La ligne coordonnée quand $q_1 = r$ varie, on obtient une demi-droite d'origine O

La ligne coordonnée quand $q_2 = \theta$ varie, on obtient un demi cercle de rayon r_0

La ligne coordonnée quand $q_3 = \varphi$ varie, on obtient un cercle parallèle

Si maintenant on fait varier deux coordonnées en laissant la 3$^{\text{ème}}$ fixe, M décrit une surface

$q_2 = \theta$ et $q_3 = \varphi$ varient avec $r = Cte$, M décrit une sphère de centre r

$q_1 = r$ et $q_3 = \varphi$ varient avec $\theta = Cte$, M décrit une surface conique.

$q_1 = r$ et $q_2 = \theta$ varient avec $\varphi = Cte$, M décrit le plan méridien défini par $\varphi = Cte$

c) Déplacement élémentaire le long d'une courbe coordonnée.

Tout déplacement élémentaire résulte des variations des q_i : $\overrightarrow{dOM} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} dq_i$.

Posons $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = h_i\vec{e}_i$: h_i est le module du vecteur $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ et est appelé facteur métrique.

Alors $d\overrightarrow{OM} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3$ est le déplacement résultant.

$(d\overrightarrow{OM})_{C_i} = h_i dq_i \vec{e}_i$ désigne le déplacement le long de la courbe coordonnée C_i.

La base locale associée aux coordonnées curvilignes est $R_L = (M; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où les vecteurs $\vec{e}_i$ sont unitaires tangents aux courbes coordonnées et orientés dans le sens croissant de la variable.

Une surface élémentaire est obtenue en faisant le produit de deux déplacements élémentaires :

$dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$, $dS_2 = h_1 h_3 dq_1 dq_3$, $dS_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$

Le volume élémentaire est obtenu en prenant le produit de 3 déplacements élémentaires :

$dv = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

Le Jacobien de la transformation est par définition le produit des trois facteurs métriques noté $J = h_1 h_2 h_3$.

4°) Opérateurs différentiels

a) Opérateur gradient dans un repère orthonormé $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On défini l'opérateur vectorielle noté : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ comme étant la dérivée dans l'espace suivant les trois directions des vecteurs unitaires.

Le gradient d'un scalaire U est défini comme étant la dérivée vectorielle suivant les trois $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par rapport aux variables x, y et z.

$$\overrightarrow{grad}U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \;\; ou \;\; \overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla} U$$

Exemple :

$U = 3xy - 2zx + 5yz$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 3y - 2z \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 3x + 5z \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = -2x + 5y \end{cases}$$

$\overrightarrow{grad}U(x,y,z) = (3y-2z)\vec{i} + (3x+5z)\vec{j} + (-2x+5y)\vec{k}$

Le gradient d'un scalaire est un vecteur.

b) Opérateur divergence dans un repère orthonormé $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

La divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ est définie comme étant le produit scalaire de l'opérateur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})\cdot(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

c) Opérateur rotationnel dans un repère orthonormé $R(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}})$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ est définie comme étant le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par la vecteur $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right. \wedge \left| \begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{matrix} \right.$$

Le rotationnel d'un vecteur est aussi un vecteur.

d) Opérateur Laplacien dans un repère orthonormé $R(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}})$

Le Laplacien d'une fonction f est la divergence du gradient de cette fonction. C'est un scalaire, on le note : $\nabla^2 f$ ou Δf . L'opérateur Laplacien est noté : Δ .

$$div\left(\overrightarrow{gradf}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Remarques :

Si f est un champ scalaire et $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques, les relations suivantes sont vérifiées :

- $div(f\vec{A}) = fdiv\vec{A} + \vec{A}\overrightarrow{grad}f$;
- $rot(rot\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, $avec\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

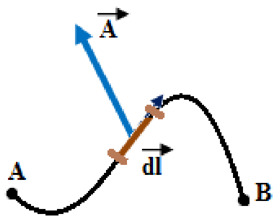
- $\overrightarrow{rot}(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}f \wedge \vec{A} + f\overrightarrow{rot}(\vec{A})$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}f) = \vec{0}$
- $div(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{A}}) = 0$
- $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\text{B}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{A}} - \vec{\text{A}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\text{B}}$

5°) Circulation d'un vecteur

Soit $\vec{A}$ un vecteur mobile $\vec{dl}$ un élément de longueur.

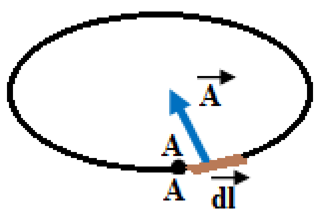
On définit la circulation C du vecteur $\vec{A}$ le long de la courbe (A,B) par :

$$C = \int_A^B \vec{A} \cdot \vec{dl}$$



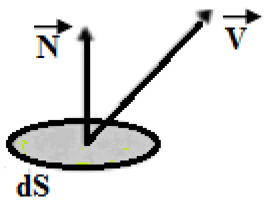
Sur un contour fermé, la circulation du vecteur $\vec{A}$ s'écrit :

$$C = \oint_{A \to A} \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$$



6°) Flux d'un vecteur a travers une surface

Soient $d\vec{S}$ un élément de surface ($d\vec{S} = \vec{N}dS$), $\vec{N}$ la normale à cet élément de surface. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs.



- Le flux élémentaire ($d\phi$) du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers dS est défini par : $d\phi = \vec{V} \cdot \vec{dS} = \vec{V} \cdot \vec{N}dS$
- Le flux (ϕ) du champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$\phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N}dS = \iint_S V.\cos(\theta)dS$$

Pour une surface fermée (sphère, ellipsoïde, …) on écrit que le flux est égal à :

$$\phi = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{N}dS$$