Assignment 4

Davide Cozzi, 829827

Capitolo 1

Esercizio 1

Si ha la funzione:

$$f(x, y, z) = 3x + 4y + 11$$

col dominio:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 1\}$$

definisco la funzione $g(x, y, z)$ come la funzione rappresentante il dominio:

$$g(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1$$

so che il punto (x_0, y_0, z_0) candidato ad essere un punto di estremo relativo per f su M deve rispettare due condizioni:

1. $g(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

procedo quindi con lo studio della Lagrangiana, ricordando di avere a che fare con un solo vincolo. Ricordando che la Lagrangiana è della forma:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x_1, \dots x_n)$$

con m numero di vincoli, si ha, nel nostro caso, che:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$$

$$= 3x + 4y + 11 + \lambda[(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1]$$

cerco quindi i punti stazionari della Lagrangiana, ovvero quei punti (x_0, y_0, z_0) tali che:

$$\nabla L(x_0, y_0, z_o, \lambda_0) = 0$$

calcolo quindi il gradiente delle Lagrangiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\lambda\cdot[2(x-2)] \\ 4+\lambda\cdot[2(y-3)] \\ \lambda\cdot[2(z-4)] \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2\lambda x-4\lambda \\ 4+2\lambda y-6\lambda \\ 2\lambda z-8\lambda \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1 \end{bmatrix}$$

per avere nullo il gradiente devo quindi risolvere:

$$\begin{cases} 3+2\lambda x-4\lambda=0 \\ 4+2\lambda y-6\lambda=0 \\ 2\lambda z-8\lambda=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases}$$

risolviamo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3+2\lambda x-4\lambda=0 \\ 4+2\lambda y-6\lambda=0 \\ 2\lambda z-8\lambda=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3+2\lambda x-4\lambda=0 \\ 2+\lambda y-3\lambda=0 \\ 2z-8=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3+2\lambda x-4\lambda=0 \\ 2+\lambda y-3\lambda=0 \\ z=4 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda x=4\lambda-3 \\ \lambda y=3\lambda-2 \\ 2z-8=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ (\frac{3}{2\lambda})^2+(\frac{2}{\lambda})^2-1=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ \frac{9}{4\lambda^4}+\frac{4}{\lambda^2}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ \frac{25}{4\lambda^4}=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ \lambda^2=\frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{2\lambda} \\ y=3-\frac{2}{\lambda} \\ z=4 \\ \lambda=\pm\frac{5}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi due casi:

1. $\lambda = \frac{5}{2}$ da cui si ricavano:
   - $x = 2 - \frac{3}{2\lambda} \rightarrow x = 2 - \frac{3}{5} \rightarrow x = \frac{7}{5}$
   - $y = 3 - \frac{2}{\lambda} \rightarrow y = 3 - \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{11}{5}$

   avendo sempre $z = 4$ abbiamo trovato il primo punto:

   $$\left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 4\right)$$

2. $\lambda = -\frac{5}{2}$ da cui si ricavano:
   - $x = 2 - \frac{3}{2\lambda} \rightarrow x = 2 + \frac{3}{5} \rightarrow x = \frac{13}{5}$
   - $y = 3 - \frac{2}{\lambda} \rightarrow y = 3 + \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{19}{5}$

   avendo sempre $z = 4$ abbiamo trovato il secondo punto:

   $$\left(\frac{13}{5}, \frac{19}{5}, 4\right)$$

Non ci resta che valutare la funzione f nei due punti per stabilire se sono punti di massimo e minimo:

- $f\left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 4\right) = \frac{21}{5} + \frac{44}{5} + 11 = 24$
- $f\left(\frac{13}{5}, \frac{19}{5}, 4\right) = \frac{39}{5} + \frac{76}{5} + 11 = 34$

Si ha quindi che:

Il punto $\left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 4\right)$ **è un punto di minimo** mentre il punto $[\left(\frac{13}{5}, \frac{19}{5}, 4\right)$ **è un punto di massimo**

Capitolo 2

Esercizio 2

2.1 Parte Obbligatoria

Si ha la funzione su cui cercare gli eventuali punti candidati ad essere punti di minimo:

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \leq 16$$

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 13$$

Abbiamo quindi un vincolo di disuguaglianza e uno di uguaglianza:

- $(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 \leq 0$ **vincolo di disuguaglianza** e chiamo h la funzione:

  $$h(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16$$

  per l'**ammissibilità primale** (una delle condizioni di KKT)

- $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0$ **vincolo di uguaglianza** e chiamo g la funzione:

  $$g(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13$$

  per l'**ammissibilità primale** (una delle condizioni di KKT)

Procedo ora calcolando i gradienti di f, h e g:

- $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\nabla h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x-4) \\ 2x_2 \end{bmatrix}$
- $\nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-2) \end{bmatrix}$

Imposto quindi la **condizione di stazionarietà per problemi di minimo**, avendo un moltiplicatore μ (uno solo avendo un solo vincolo di disuguaglianza, $p = 1$) e un moltiplicatore λ (uno solo avendo un solo vincolo di uguaglianza, $m = 1$):

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \cdot h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot g_j(x^*) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_1, x_2) + \mu \cdot \nabla h(x_1, x_2) + \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 2(x-4) \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \end{cases}$$

ricordiamo anche le altre 2 condizioni di KKT rimanenti:

1. **complementarietà**: $\mu \cdot h(x^*) = 0$
2. **ammissibilità duale**: $\mu \geq 0$

Sappiamo che il vincolo di uguaglianza è sempre attivo, mentre quello di disuguaglianza può essere attivo ($h(x^*) = 0$) o inattivo ($h(x^*) < 0$). Per far valere la condizione di complementarietà quindi nel caso il vincolo sia attivo bisognerà verificare la validità dell'ammissibilità duale (che comporterà la validità della complementarietà). Nel caso il vincolo non sia attivo impongo a priori $\mu = 0$, così si ha la validità dell'ammissibilità duale e anche della complementarietà.

2.1.1 Vincolo di disuguaglianza inattivo

Imposto un sistema dove devono essere valide le condizioni di KKT, ricordando l'imposizione di $\mu = 0$:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu[(x_1 - 4^2) + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 - 6\lambda = 0 \\ 2\lambda x_2 - 4\lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda x_1 = 6\lambda - 1 \\ 2\lambda x_2 = 4\lambda \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (-\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 + 4 - 16 < 0 \\ (\frac{1}{2\lambda})^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (-\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ \frac{1}{4\lambda^2} = 13 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (-\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ 52\lambda^2 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (-\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{26} \end{cases}$$

abbiamo quindi 2 alternative:

1. $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{26}$ quindi:

   - $x_1 = 3 - \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{26}} \rightarrow x_1 = 3 - \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{13}} \rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{13}$
   - $h(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{26}} - 1)^2 - 12 = (-\sqrt{13} - 1)^2 - 12 = 2 + 2\sqrt{13}$
     (infatti la penultima equazione deriva da $h(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16$)

   ma $h(x_1, x_2) = 2 + 2\sqrt{13} \geq 0$ quindi la condizione di ammissibilità primale $h(x^*) \leq 0$ non è rispettata, quindi il punto $(3 - \sqrt{13}, 2)$ *non è ammissibile*

2. $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{26}$ quindi:

   - $x_1 = 3 - \frac{1}{-2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{26}} \rightarrow x_1 = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{13}} \rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{13}$
   - $h(x_1, x_2) = (-\frac{1}{-2\frac{\sqrt{13}}{26}} - 1)^2 - 12 = (\sqrt{13} - 1)^2 - 12 = 2 - 2\sqrt{13}$
     (infatti la penultima equazione deriva da $h(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16$)

   in questo caso si ha che $h(x_1, x_2) = 2 - 2\sqrt{13} < 0$, quindi la dondizione di ammissibilità primale è rispettata. La quarta equazione ci conferma che anche l'altra condizione di ammissibilità è rispettata $g(x_1, x_2) = 0$. Inoltre le condizioni di complementarietà e ammissibilità duale sono rispettate dal fatto che è stato imposto il vincolo di disuguaglianza inattivo mettendo $\mu = 0$.
   Quindi il punto $(3 + \sqrt{13}, 2)$, con $f(3 + \sqrt{13}, 2) = 3 + \sqrt{13}$ è un candidato punto di minimo

2.1.2 Vincolo di disuguaglianza attivo

Imposto un sistema dove devono essere valide le condizioni di KKT, rciordando di avere il vincolo di disuguaglianza attivo:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 = 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 = 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 = 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_1^2 - 8x_1 + 16 + x_2^2 - 16 = 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -x_1^2 + 8x_1 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -x_1^2 + 8x_1 \\ x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 4x_2 + 4 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -x_1^2 + 8x_1 \\ x_1^2 - 6x_1 + 9 + -x_1^2 + 8x_1 - 4x_2 + 4 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -x_1^2 + 8x_1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -x_1^2 + 8x_1 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_2^2 = -4x_2^2 + 16x_2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ 5x_2^2 = 16x_2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Si arriva quindi a poter dire che x_2 può valere 0 oppure $\frac{16}{5}$:

1. se $x_2 = 0$ si ricava che $x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = 0$
2. se $x_2 = \frac{16}{5}$ si ricava che $x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = \frac{32}{5}$

riprendiamo ad analizzare quindi il sistema nei due casi.

Caso 1

In questo caso si ha $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, riprendiamo quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 8\mu - 6\lambda = 0 \\ -4\lambda = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[0] = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{8} \\ \lambda = 0 \\ \frac{1}{8} \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si hanno tutte le condizioni verificate quindi:
il punto $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$, **è un candidato punto di minimo**

2.1.3 Caso 2

In questo caso si ha $x_1 = \frac{32}{5}$ e $x_2 = \frac{16}{5}$, riprendiamo quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2\mu(x_1 - 4) + 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ \mu(2x_2) + 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(\frac{32}{5} - 4) + 2\lambda(\frac{32}{5} - 3) = 0 \\ \mu(2\frac{16}{5}) + 2\lambda(\frac{16}{5} - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(\frac{32}{5} - 4)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu(\frac{12}{5}) + 2\lambda(\frac{17}{5}) = 0 \\ \mu(\frac{32}{5}) + 2\lambda(\frac{16}{5}) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(\frac{12}{5})^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{24}{5}\mu + \frac{34}{5}\lambda = 0 \\ \frac{32}{5}\mu + \frac{32}{5}\lambda = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[\frac{144}{25} + \frac{256}{25} - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{24}{5}\mu + \frac{34}{5}\lambda = 0 \\ \frac{32}{5}\mu = -\frac{12}{5}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ \mu[16 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{24}{5}\mu + \frac{34}{5}\lambda = 0 \\ \mu = -\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{24}{5}\left(-\frac{12}{32}\lambda\right) + \frac{34}{5}\lambda = 0 \\ \mu = -\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{9}{5}\lambda + \frac{34}{5}\lambda = 0 \\ \mu = -\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 5\lambda = 0 \\ \mu = -\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \mu = -\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \mu = \frac{3}{40} \\ \frac{3}{40} \geq 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Si hanno tutte le condizioni verificate quindi:
il punto $\left(\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right)$, con $f\left(\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right) = \frac{32}{5}$, **è un candidato punto di minimo**

Conclusioni

Si sono ottenuti 3 punti candidati ad essere punto di minimo:

1. $(3+\sqrt{13}, 2)$, con $f(3+\sqrt{13}, 2) = 3+\sqrt{13}$
2. $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$
3. $\left(\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right)$, con $f\left(\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right) = \frac{32}{5}$

Grazie alle valutazioni della funzione nei punti si ha che il punto $(0,0)$ è **punto di minimo**

2.2 Parte Facoltativa

Essendo la maggior parte dei conti identici alla parte obbligatoria alcuni di essi verranno omessi per praticità.
Questa volta ci occupiamo di ricercare i candidati punti di massimo.
Imposto quindi la **condizione di stazionarietà per problemi di massimo**, avendo un moltiplicatore μ (uno solo avendo un solo vincolo di disuguaglianza, $p = 1$) e un moltiplicatore λ (uno solo avendo un solo vincolo di uguaglianza, $m = 1$):

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \cdot h_i(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \cdot g_j(x^*) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_1, x_2) - \mu \cdot \nabla h(x_1, x_2) - \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mu \cdot \begin{bmatrix} 2(x-4) \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2(x_1-3) \\ 2(x_2-2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 - 2\mu(x_1 - 4) + -\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -\mu(2x_2) - 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \end{cases}$$

ricordiamo anche le altre 2 condizioni di *KKT* rimanenti:

1. **complementarietà**: $\mu \cdot h(x^*) = 0$
2. **ammissibilità duale**: $\mu \geq 0$

Sappiamo che il vincolo di uguaglianza è sempre attivo, mentre quello di disuguaglianza può essere attivo ($h(x^*) = 0$) o inattivo ($h(x^*) < 0$). Per far valere la condizione di complementarietà quindi nel caso il vincolo sia attivo bisognerà verificare la validità dell'ammissibilità duale (che comporterà la validità della complementarietà). Nel caso il vincolo non sia attivo impongo a priori $\mu = 0$, così si ha la validità dell'ammissibilità duale e anche della complementarietà.

2.2.1 Vincolo di disuguaglianza inattivo

Imposto un sistema dove devono essere valide le condizioni di *KKT*, ricordando l'imposizione di $\mu = 0$:

$$\begin{cases} 1 - 2\mu(x_1 - 4) - 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -\mu(2x_2) - 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\mu(x_1 - 4) - 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -\mu(2x_2) - 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu[(x_1 - 4^2) + x_2^2 - 16] = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda x_1 + 6\lambda = 0 \\ -2\lambda x_2 + 4\lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda x_1 = 6\lambda + 1 \\ 2\lambda x_2 = 4\lambda \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16 < 0 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 + 4 - 16 < 0 \\ (\frac{1}{2\lambda})^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ \frac{1}{4\lambda^2} = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ 52\lambda^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{2\lambda} \\ x_2 = 2 \\ \mu = 0 \\ 0 = 0 \\ (\frac{1}{2\lambda} - 1)^2 - 12 < 0 \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{26} \end{cases}$$

abbiamo quindi 2 alternative:

1. $\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{26}$ quindi:

   - $x_1 = 3 + \frac{1}{-2\cdot\frac{\sqrt{13}}{26}} \rightarrow x_1 = 3 + \frac{1}{-\frac{\sqrt{13}}{13}} \rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{13}$
   - $h(x_1, x_2) = (\frac{1}{-2\frac{\sqrt{13}}{26}} - 1)^2 - 12 = (-\sqrt{13} - 1)^2 - 12 = 2 + 2\sqrt{13}$
     (infatti la penultima equazione deriva da $h(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16$)

   ma $h(x_1, x_2) = 2+2\sqrt{13} \geq 0$ quindi la condizione di ammissibilità primale $h(x^*) \leq 0$ non è rispettata, quindi il punto $(3 - \sqrt{13}, 2)$ *non è ammissibile*

2. $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{26}$ quindi:

   - $x_1 = 3 + \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{13}}{26}} \rightarrow x_1 = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{13}} \rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{13}$
   - $h(x_1, x_2) = (\frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{26}} - 1)^2 - 12 = (\sqrt{13} - 1)^2 - 12 = 2 - 2\sqrt{13}$
     (infatti la penultima equazione deriva da $h(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16$)

   in questo caso si ha che $h(x_1, x_2) = 2-2\sqrt{13} < 0$, quindi la dondizione di ammissibilità primale è rispettata. La quarta equazione

ci conferma che anche l'altra condizione di ammissibilità è rispettata $g(x_1, x_2) = 0$. Inoltre le condizioni di complementarietà e ammissibilità duale sono rispettate dal fatto che è stato imposto il vincolo di disuguaglianza inattivo mettendo $\mu = 0$.
Quindi il punto $(3 + \sqrt{13}, 2)$, con $f(3 + \sqrt{13}, 2) = 3 + \sqrt{13}$ è un candidato punto di massimo

2.2.2 Vincolo di disuguaglianza attivo

Si danno per scontati (in quanto identici a quelli fatti per cercare i punti minimi candidati) i primi passaggi e si analizzano direttamente i due casi.

Caso 1

In questo caso si ha $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, riprendiamo quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\mu(x_1 - 4) - 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -\mu(2x_2) - 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 8\mu + 6\lambda = 0 \\ 4\lambda = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[0] = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{8} \\ \lambda = 0 \\ -\frac{1}{8} \geq 0 \text{ impossibile} \\ 0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi che l'ammissibilità duale non è verificata e quindi il punto $(0, 0)$ non è un candidato punto di massimo

2.2.3 Caso 2

In questo caso si ha $x_1 = \frac{32}{5}$ e $x_2 = \frac{16}{5}$, riprendiamo quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 - 2\mu(x_1 - 4) - 2\lambda(x_1 - 3) = 0 \\ -\mu(2x_2) - 2\lambda(x_2 - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(x_1 - 4)^2 + x_2^2 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 2\mu(\frac{32}{5} - 4) - 2\lambda(\frac{32}{5} - 3) = 0 \\ -\mu(2\frac{16}{5}) - 2\lambda(\frac{16}{5} - 2) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(\frac{32}{5} - 4)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 16] = 0 \\ x_1 = \frac{32}{5} \\ x_2 = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1-2\mu(\frac{12}{5})-2\lambda(\frac{17}{5})=0 \\ -\mu(\frac{32}{5})-2\lambda(\frac{16}{5})=0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[(\frac{12}{5})^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2-16]=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-\frac{24}{5}\mu-\frac{34}{5}\lambda=0 \\ -\frac{32}{5}\mu-\frac{32}{5}\lambda=0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu[\frac{144}{25}+\frac{256}{25}-16]=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1-\frac{24}{5}\mu-\frac{34}{5}\lambda=0 \\ \frac{32}{5}\mu=-\frac{12}{5}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ \mu[16-16]=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-\frac{24}{5}\mu-\frac{34}{5}\lambda=0 \\ \mu=-\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-\frac{24}{5}\left(-\frac{12}{32}\lambda\right)-\frac{34}{5}\lambda=0 \\ \mu=-\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1+\frac{9}{5}\lambda-\frac{34}{5}\lambda=0 \\ \mu=-\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-5\lambda=0 \\ \mu=-\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{5} \\ \mu=-\frac{12}{32}\lambda \\ \mu \geq 0 \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{5} \\ \mu=-\frac{3}{40} \\ -\frac{3}{40} \geq 0 \text{ impossibile} \\ 0=0 \\ x_1=\frac{32}{5} \\ x_2=\frac{16}{5} \end{cases}$$

Si ha quindi che l'ammissibilità duale non è verificata e quindi il punto $\left(\frac{32}{5},\frac{16}{5}\right)$ non è un candidato punto di massimo

Conclusioni

Si ha quindi che solo il punto $(3+\sqrt{13},2)$, con $f(3+\sqrt{13},2)=3+\sqrt{13}$, è un **candidato punto di massimo** e quindi è il **punto di massimo**

Capitolo 3

Esercizio 3

- *Qual è lo scopo della lista tabù in una metaeuristica di tipo tabù search?*
  Dato che usando la tabù search si hanno alcune *mosse* dette **mosse di non miglioramento** si hanno i **tabù**, ovvero si proibiscono le ultime mosse dell'algoritmo stesso per evitare di analizzare inutilmente più volte lo stesso ottimo. Queste mosse vietate sono contenute nella **tabù list**.
  A livello di algoritmo si ha che nell'iterazione dello stesso si usano innazitutto mosse assenti nella tabù list, identificate mediante un *metodo di ricerca locale*. Se, però, una mossa nella tabù list è migliore di tutte le altre trovate può essere usata, grazie al **criterio di aspirazione**.
  Alla fine dell'iterazione la mossa corrente viene caricata nella tabù list, alla quale vengono eventualmente rimossi gli elementi più vecchi.
  L'uso della tabù list consente quindi una maggior esplorazione dello spazio delle soluzioni.

- *Qual è lo scopo della temperatura in una metaeuristica di tipo simulated annealing?* Con il simulated annealing si cercano soluzioni successive in modo casuale a partire da quella corrente, cercando comunque una soluzione nel suo intorno. Se la nuova soluzione non risulta migliore di quella corrente può essere comunque accettata in base ad una certa probabilità che è direttamente proporzionale ad un valore T detto **temperatura** (termine che ricorda la metallurgica, alla quale si ispira l'intero algoritmo). La probabilità è inoltre inversamente proporzionale alla distanza tra le due soluzioni.

All'inizio dell'algoritmo si ha una *temperatura* molto alta in modo da accettare anche mosse di peggioramento al fine di allontanare l'analisi dai punti di ottimo locale. La *temperatura* cala per tutta la durata dell'algoritmo nel monento in cui si hanno un certo numero di iterazioni tutte alla stessa temperatura. Alla fine dell'algortimo la temperatura sarà scesa fino ad un valore prossimo a 0 (in modo che non vengano più accettate mosse di peggioramento). Dopo aver iterato un certo numero di volte con la temperatura minima scelta si può dire di aver ottenuto la miglior soluzione.
Per una buona esecuzione si parte con una *temperatura* in grado di accettare almeno la metà delle mosse peggiorative possibili e durante l'esecuzione viene diminuita lentamente.
Si vede come la velocità di convergenza al punto di ottimo globale è direttamente influenzata dalla *temperatura* e dal "rate" a cui viene diminuita.

- *A cosa servono gli operatori genetici negli algoritmi genetici?*
  Innazitutto si ha che gli operatori genetici sono 2: **crossover** e **mutazione**. Questi operatori vengono usati per migliorare la ricerca di soluzioni mediante un algoritmo genetico, generando i discendenti di una popolazione secondo determinati criteri. Con il crossover infatti i *figli* vengono generati ricombinando il materiale genetico degli individui che costituiscono il *matingpool*, consentendo di ottenere nuovi individui il cui codice genetico è mutuato in parte da un genitore e in parte dall'altro. Con la **mutazione**, invece, si mantiene la diversità genetica per cercare di esplorare anche zone dello spazio di ricerca non presenti nella popolazione attuale.