Assignment 1

Davide Cozzi, 829827

Capitolo 1

esercizio 1

Innazitutto definisco i due insiemi degli indici. Per le cotture abbiamo:

$$C = \{G, V, GR\}$$

dove:

- $G = griglia$
- $V = vapore$
- $GR = gratinati$

per i piatti:

$$P = \{P, Z, T, O\}$$

dove:

- $P = peperoni$
- $Z = zucchine$
- $T = totani$
- $O = orate$

Quindi per $c \in C$ e $p \in P$ definisco $x_{c,p}$ il numero di piatti per cottura.
Sappiamo poi che il costo delle verdure è pari a 5, dei totani è 7 e delle orate è 11.
Definisco quindi la funzione obiettivo:

$$\min(z) = \left\{ 5 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,P} + 5 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,Z} + 7 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,T} + 11 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,O} \right\}$$

Dove con le varie sommatorie rappresentiamo la somma delle varie cotture per ogni piatto.
Analizziamo ora i vincoli.
Innanzitutto abbiamo che la somma dei piatti deve essere almeno 100. Si ha quindi che la somma di ogni piatto per ogni cottura deve essere ≥ 100:

$$\sum_{i \in C} x_{i,P} + \sum_{i \in C} x_{i,Z} + \sum_{i \in C} x_{i,T} + \sum_{i \in C} x_{i,O} \geq 100$$

Ovvero:

$$\sum_{i \in C} \sum_{j \in P} x_{i,j} \geq 100$$

Un altro vincolo consiste nell'avere i piatti cotti alla griglia di numero inferiore a 60:

$$\sum_{i \in P} x_{G,i} \leq 60$$

Abbiamo poi dicitura di indicare che il numero di ogni cottura deve essere uguale. Posso quindi esprimerlo con due vincoli, dicendo che le cotture alla griglia sono uguali sia a quelle al vapore che quelle gratinate (implicando quindi che le gratinate siano uguali a quella al vapore):

$$\sum_{i \in P} x_{G,i} = \sum_{i \in P} x_{V,i}$$

$$\sum_{i \in P} x_{G,i} = \sum_{i \in P} x_{GR,i}$$

Rappresentiamo poi che le orate possono essere unicamente cotte alla griglia (specificando che per qualsiasi altra cottura il numero di piatti sarà nullo):

$$\forall i \in \{V, GR\} : \; x_{i,O} = 0$$

Bisogna poi rappresentare che un piatto non può essere di numero negativo (per motivi logici):

$$\forall i \in P, \; \forall j \in C : \; x_{i,j} \geq 0$$

Siamo arrivati quindi a poter scrivere il nostro modello matematico:

Funzione obiettivo:

$$\min(z) = \left\{ 5 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,P} + 5 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,Z} + 7 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,T} + 11 \cdot \sum_{i \in C} x_{i,O} \right\}$$

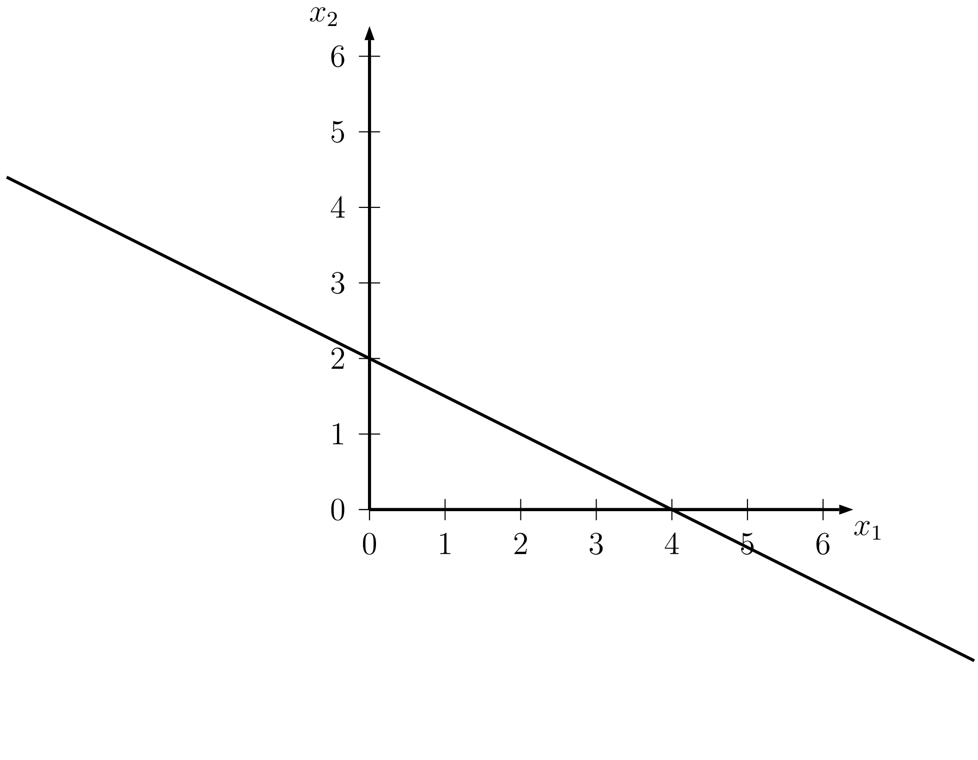
vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{i \in C} \sum_{j \in P} x_{i,j} \geq 100 \\ \sum_{i \in P} x_{G,i} \leq 60 \\ \sum_{i \in P} x_{G,i} = \sum_{i \in P} x_{V,i} \\ \sum_{i \in P} x_{G,i} = \sum_{i \in P} x_{GR,i} \\ \forall i \in \{V, GR\} : \; x_{i,O} = 0 \\ \forall i \in P, \; \forall j \in C : \; x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

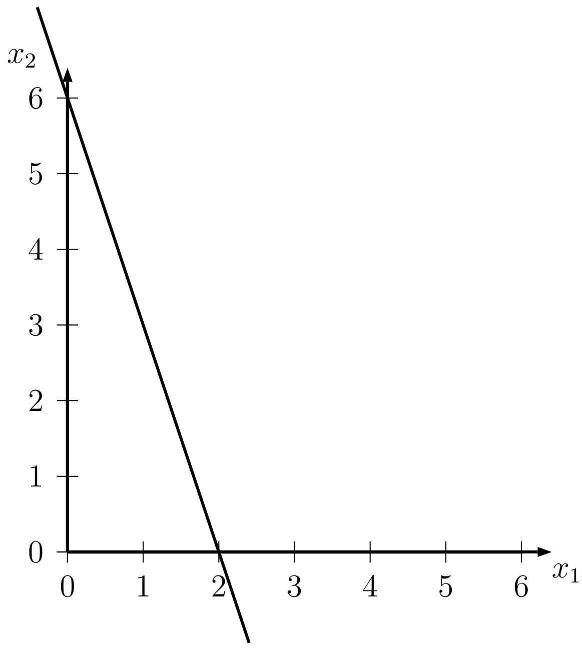
Capitolo 2

Esercizio 2

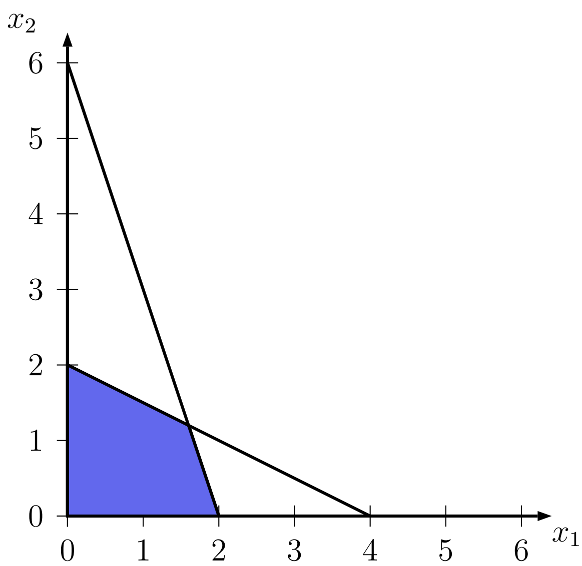
Innazitutto, procedendo con la risoluzione grafica, cerchiamo la regione ammissibile data dai vincoli. Prendendo il vincolo $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 4$ cerchiamo l'area sottesa alla retta $x_1 + 2 \cdot x_2 = 4$ (che ha $q = 2$ e $m = 4$):



Prendiamo poi il secondo vincolo $x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_2 \leq 2$. Procediamo nella stessa maniera di sopra, disegnando la retta ($x_1 + \frac{1}{3}$ che ha $q = 6$ e $m = -3$) e ragionando sull'area sottesa:



L'ultimo vincolo mi specifica che sono nel primo quadrante del piano cartesiano (con ascisse e ordinate positive).
Uniamo quindi le aree di interesse dei vincoli per ottenere la regione ammissibile:



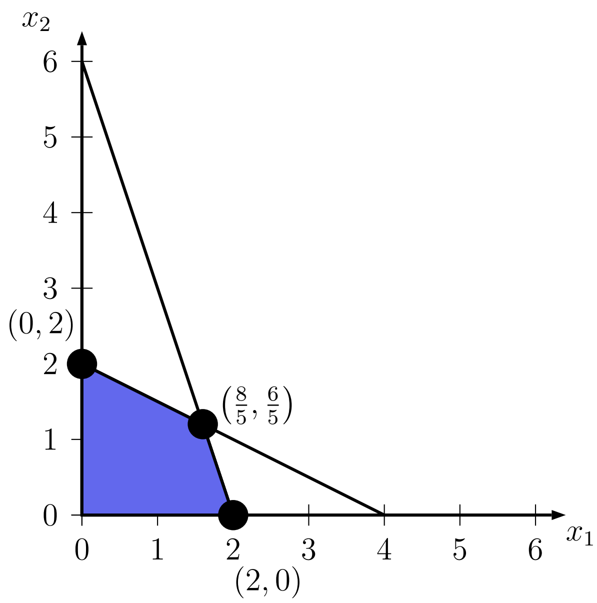
I punti di interesse sono quindi $(0, 2)$, $(2, 0)$ e il punto di intersezione tra le due rette $x_1 + \frac{1}{3}{}_2 = 2$ e $x_1 + 2 \cdot x_2 = 4$.
Calcoliamo quindi questo punto mettendo a sistema le due rette:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

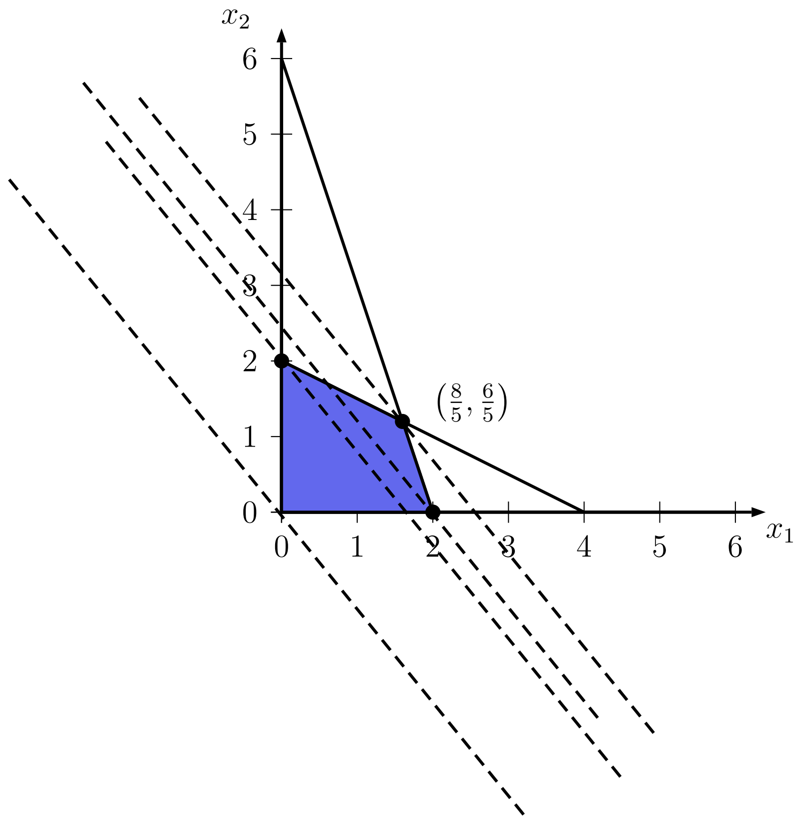
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 1 & \frac{1}{3} & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -\frac{5}{3} & | & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi $-\frac{5}{3} \cdot x_2 = -2$, ovvero $x_2 = \frac{6}{5}$. Sostituendo x_2 nella prima equazione otteniamo $x_1 = \frac{8}{5}$. Abbiamo quindi i 3 punti di interesse: $(0, 2)$, $(2, 0)$ e $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$:



Procediamo ora con la ricerca del massimo. Prendiamo la funzione obiettivo e calcoliamo la retta passante per l'origine. In questo caso avremmo $5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 0$, che ha $q = 0$ e $m = \frac{-5}{4}$. Per vedere quale dei tre punti è massimo vediamo le tre rette parallele a quella passante per l'origine è più lontana dall'origine stessa. Per farlo sostituiamo le coordinate dei punti in $5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$ ottenendo le tre q che rappresentano le 3 rette parallele.

Per $(0, 2)$ avremo $q = 8$, per $(2, 0)$ $q = 10$ e per $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ $q = \frac{64}{5}$. Disegnamo quindi le rette parallele, muovendoci aumentando q (che corrisponde alla z della funzione obiettivo):



Come si dimostra sia graficamente che matematicamente col calcolo del termine noto q si ha che il punto di massimo cercato è il punto:

$$P = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

quindi:

il valore che massimizza la funzione obiettivo è $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ con $z = \frac{64}{5}$