Assignment 2

Davide Cozzi, 829827

Capitolo 1

Esercizio 1

1.1 Parte a

Innanzitutto dobbiamo scrivere il problema in forma standard introducendo 3 variabili di slack s_1, s_2, s_3. Otteniamo quindi la seguente funzione obiettivo:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \qquad\qquad & \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + s_2 \qquad & \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + s_3 & \leq 20 \end{aligned}$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Scriviamo quindi il tableau, ricordandoci di invertire il segno dei coefficienti della funzione obiettivo:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	-2	1	-1	0	0	0
60	3	1	1	1	0	0
10	1	-1	2	0	1	0
20	1	1	-1	0	0	1

abbiamo quindi le variabili di slack in base e le variabili del problema originale fuori base.
Nella prima riga, detta $riga_0$, si leggono i tassi di miglioramento. Si capirà

di essere giunti alla soluzione ottimale quando non si avranno coefficienti negativi come tassi di miglioramento.
Partiamo con la **prima iterazione**.
Scegliamo la variabile da far entrare in base e scegliamo quella col tasso di miglioramento più grande, in questo caso x_1 che ha tasso di miglioramento pari a -2, e chiamiamo **colonna pivot** la colonna sottostante:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iniziamo ora a cercare la variabile uscente. Si parte col **test del minimo rapporto**. Prendo i rapporti tra i termini noti e i corrispettivi coefficienti positivi (tutti nel nostro caso) della colonna pivot e ne cerco il minimo:

$$\min\left\{\frac{60}{3}, \frac{10}{1}, \frac{20}{1}\right\}$$

e notiamo che il minimo, 10, corrisponde al rapporto tra il termini della seconda riga, che diventa quindi la nostra **riga pivot**:

$$[10, 1, -1, 2, 0, 1, 0]$$

L'incrocio tra riga e colonna pivot corrisponde al nostro **elemento di pivot**, che, in questo caso, è pari a 1. Divido ora la riga pivot per l'elemento pivot (anche se in questo caso è un'operazione banale essendo il pivot pari a 1) e riscrivo il tableau con la nuova riga pivot:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	-2	1	-1	0	0	0
60	3	1	1	1	0	0
10	1	-1	2	0	1	0
20	1	1	-1	0	0	1

manipolo ora il tableau in modo da annullare tutti i valori della colonna pivot tranne il pivot stesso. Effettuo quindi le seguenti operazioni tra righe:

$$riga_0 = riga_0 + 2riga_2$$

$$riga_1 = riga_1 - 3riga_2$$

$$riga_3 = riga_3 - riga_2$$

ottenendo quindi un nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
20	0	-1	3	0	2	0
30	0	4	-5	1	-3	0
10	1	-1	2	0	1	0
10	0	2	-3	0	-1	1

Qundi ora in base abbiamo x_1, s_1, s_3 mentre s_2 esce dalla base.
Sulla riga 0 abbiamo i nuovi tassi di miglioramento e, avendo ancora valori negativi, sappiamo che non abbiamo raggiunto la soluzione ottimale. Quindi il primo valore della $riga_0$, 20, non è il valore ottimale della funzione obiettivo.
Procedo quindi con la **seconda iterazione**.
Il tasso di miglioramento maggiore è -1 quindi vogliamo far entrare in base x_2. La colonna pivot sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Facciamo nuovamente il test del rapporto minimo, ricordando di prendere solo i valori strettamente positivi della colonna pivot:

$$\min \left\{ \frac{30}{4}, \frac{10}{2} \right\}$$

e il minimo, 5, corriponde ai rapporti tra i valori della terza riga che qindi diventa la nostra riga pivot:

$$[10, 0.2, -3, 0, -1, 1]$$

Il nostro elemento pivot corriponde quindi a 2.
Divido ora la riga pivot per l'elemento pivot e riscrivo il tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
20	0	-1	3	0	2	0
30	0	4	-5	1	-3	0
10	1	-1	2	0	1	0
5	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

manipolo ora il tableau in modo da annullare tutti i valori della colonna pivot tranne il pivot stesso. Effettuo quindi le seguenti operazioni tra righe:

$$riga_0 = riga_0 + riga_3$$

$$riga_1 = riga_1 - 4riga_3$$

$$riga_2 = riga_2 + riga_3$$

ottengo quindi il nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
25	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
10	0	0	7	1	-1	-2
15	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

quindi x_2 è entrato in base mentre s_3 esce dalla base.
Non si hanno più tassi di miglioramento negativi, abbiamo trovato la soluzione ottimale.
Quindi siamo giunti alla risoluzione:

Il punto di massimo è dato da $(15, 5, 0, 10, 0, 0)$
Il massimo è 25

1.2 Parte b

Dobbiamo scrivere il problema duale della funzione obiettivo:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Innazitutto bisogna invertire cosa si ricerca nella funzione obiettivo del problema primale. Nel nostro caso il problema primale cerca il massimo quindi il duale cercherà il minimo. Inoltre i termini noti dei vincoli del primale diventeranno i coefficienti della funzione obiettivo del duale e i coefficienti della funzione obiettivo del problema primale diventeranno i termini noti dei vincoli. Nei vincoli si cambia anche il “verso” quindi $\leq$ diventerà $\geq$, mentre i vincoli di dominio conservano il “verso”. Infine i coefficienti dei vincoli del problema duale non sono altro che la matrice trasposta dei coefficienti del problema primale.

Si ottiene quindi la seguente funzione obiettivo per il problema duale:

$$\min z^* = 60y_1 + 10y_2 + 20y_3$$

Con i seguenti vincoli:

$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1 - y_2 + y_3 \geq -1$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Prodedo ora cercando il punto di ottimo del duale col teorema degli scarti. Procedo usando il teorema, ricordando che $x_1 = 15$, $x_2 = 10$ e $x_3 = 0$. Applico quindi le condizioni di complementarietà:

- $y_1 \cdot (3x_1 + x_2 + x_3 - 60) = 0$, sostituisco le x_i e ottengo $y_1 \cdot (-10) = 0$ quindi $y_1 = 0$ che è la **prima condizione**
- $y_2 \cdot (x_1 - x_2 + 2x_3 - 10) = 0$ sostituisco le x_i e ottengo $y_2 \cdot (0) = 0$ quindi **non posso dedurre alcuna condizione di complementarietà** su y_2
- $y_3 \cdot (x_1 + x_2 - x_3 - 20) = 0$, sostituisco le x_i e ottengo $y_3 \cdot (0) = 0$ **quindi non posso dedurre alcuna condizione di complementarietà** su y_3
- $(3y_1 + y_2 + y_3 - 2) \cdot x_1 = 0$ che corrisponde a $(3y_1 + y_2 + y_3 - 2) \cdot 15 = 0$ quindi $3y_1 + y_2 + y_3 - 2 = 0$ è la **seconda condizione**
- $(y_1 - y_2 + y_3 + 1) \cdot x_2 = 0$ che corrisponde a $(y_1 - y_2 + y_3 + 1) \cdot 5 = 0$ quindi $y_1 - y_2 + y_3 + 1 = 0$ è la **terza condizione**
- $(y_1 + 2y_2 - y_3 - 1) \cdot x_3 = 0$ che corrisponde a $(y_1 + 2y_2 - y_3 - 1) \cdot 0 = 0$ **quindi non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà sul primo vincolo duale**

risolvo quindi il sistema con le 3 condizioni trovate:

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - 2 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ y_2 + y_3 = 2 \\ y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

Ottengo quindi:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e sostituendo nella funzione obiettivo del problema duale ottengo esattamente $z^* = 25$ quindi la soluzione è congruente. Inoltre, sempre sostitutendo, verifico che tutti i vincoli (compresi quelli di dominio) sono rispettati, verificando così la correttezza dei risultati ottenuti.

Capitolo 2

Esercizio 2

Partiamo dalla seguente funzione obiettivo:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 2$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sappiamo, grazie al testo, che si ha il seguente tableau finale:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{18}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

Procediamo per punti:

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei termini noti b_i:
  - il primo è $b_1 = 4$. Sappiamo che al primo vincolo è associata la variabile di slack s_1 la quale può modificare il valore del termine noto. Prendendo il tableau finale dobbiamo ottenere che i termini noti restino positivi

al più di Δ_1 volte il valore della variabile di slack in quella riga. Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{6}{5} + \frac{3}{5}\Delta_1 \geq 0 \\ \frac{8}{5} - \frac{1}{5}\Delta_1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-2 \leq \Delta_1 \leq 8$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di b_1:

$b_1 \in [4 - 2, 4 + 8] = [2, 12]$

- il secondo è $b_2 = 2$. Sappiamo che al secondo vincolo è associata la variabile di slack s_2 la quale può modificare il valore del termine noto. Prendendo il tableau finale dobbiamo ottenere che i termini noti restino positivi al più di Δ_2 volte il valore della variabile di slack in quella riga. Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{6}{5} - \frac{3}{5}\Delta_2 \geq 0 \\ \frac{8}{5} + \frac{6}{5}\Delta_2 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-\frac{4}{3} \leq \Delta_2 \leq 2$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di b_2:

$b_2 \in [2 - \frac{4}{3}, 2 + 2] = [\frac{2}{3}, 4]$

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili in base c_1:
  - il primo è $c_1 = 3$. Riscrivo il tableau ponendo un $-\Delta_1$, nella $riga_0$ in corrispondenza alla variabile di cui sto studiando il coefficiente. Cerco quindi un modo per riportare la variabile in base e studio le trasformazioni che vengono propagate. Il tableu sarà quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5}$	$-\Delta_1$	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{18}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

e procedo facendo $riga_0 = riga_0 + \Delta \cdot riga_2$ in quanto x_1 è presente per la $riga_2$, rimandando così x_1 in base. Ottengo quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{8}{5}$	0	0	$\frac{7}{5} - \Delta_1 \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{18}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{6}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

ma sappiamo che per mantenere ottima la soluzione devo avere solo termini positivi in $riga_0$ quindi:

$$\begin{cases} \frac{7}{5} - \Delta_1 \cdot \frac{1}{5} \geq 0 \\ \frac{18}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{6}{5} \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-3 \leq \Delta_1 \leq 7$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di c_1:

$c_1 \in [3 - 3, 3 + 7] = [0, 10]$

– il secondo è $c_2 = 4$. Riscrivo il tableau ponendo un $-\Delta_2$, nella $riga_0$ in corrispondenza alla variabile di cui sto studiando il coefficiente. Cerco quindi un modo per riportare la variabile in base e studio le trasformazioni che vengono propagate. Il tableu sarà quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5}$	0	$-\Delta_2$	$\frac{7}{5}$	$\frac{18}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

e procedo facendo $riga_0 = riga_0 + \Delta \cdot riga_1$ in quanto x_2 è presente per la $riga_1$, rimandando così x_2 in base. Ottengo quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{6}{5}$	0	0	$\frac{7}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{18}{5} - \Delta_2 \cdot \frac{3}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

ma sappiamo che per mantenere ottima la soluzione devo avere solo termini positivi in $riga_0$ quindi:

$$\begin{cases} \frac{7}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{3}{5} \geq 0 \\ \frac{18}{5} - \Delta_2 \cdot \frac{3}{5} \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-\frac{7}{3} \leq \Delta_2 \leq 6$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di c_2:

$$c_2 \in [4 - \frac{3}{7}, 4 + 6] = [\frac{5}{3}, 10]$$

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili fuori base k_i.
  Per rispondere alla domanda non si deve fare nulla in quanto le variabili della funzione obiettivo sono in base. "Per sport" calcoliamo lo stesso quelle delle variabili fuori base, anche se non sono nella funzione obiettivo.
  In questo caso ci basta verificare che i valori corrispondenti alle variabili fuori base nella $riga_0$ restino positivi al più di un Δ_i, in modo di restare nella condizione di avere la soluzione ottimale. Si ha quindi:

$$-\frac{7}{5} + \Delta_1 \geq 0 \Longrightarrow \Delta_1 \geq -\frac{7}{5}$$
$$-\frac{18}{5} + \Delta_2 \geq 0 \Longrightarrow \Delta_2 \geq -\frac{18}{5}$$

  quindi si ottiene che:

$$k_1 \in [-\frac{7}{5}, +\infty]$$
$$k_2 \in [-\frac{18}{5}, +\infty]$$