Algebra Lineare e Geometria

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Modalità d'esame: scritto+orale (si può conservare il voto dello scritto). Lo scritto prevede 2 parziali (10 domande a risposta multipla, giusta +3, sbagliata -1, somma almeno superiore a 10) si va all'orale con voto maggiore di 15. Ricevimento: mercoledì 12.15/13.30 U5 terzo piano. Testo: Anichini-Conti geometria analitica e algebra lineare, Pearson

Capitolo 2

Matrici

l'algebra lineare studia delle strutture algebriche per formalizzazioni specifiche. La struttura algebrica è fatta da:

$$Matrici\ n \times m,\ \ con\ n, m \in \mathbb{N}$$

una matrice è una tabella con n righe e m colonne:

$$\begin{pmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,0} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}$$

a_{ij} è il numero all'incrocio tra la i-esima riga e la j-esima colonna.
Si definisce **Traccia** la somma degli elementi presenti sulla diagonale
Una matrice è detta *Diagonale* se $a_{ij} = 0$, per $i \neq j$, ovvero se gli elementi che non sono sulla diagonale sono nulli. Una matrice i cui elementi sono nulli è detta *Matrice Nulla*, e si scrive $A = (0)$
Una matrice le cui colonne sono ordinatamente le righe è detta *Matrice Trasposta* e si indica con A^T
Una matrice è detta *Simmetrica* se $A = A^T$, ovvero se la i-esima riga è uguale alla i-esima colonna.
Una matrice del tipo $1 \times n$ è detta *Matrice Riga*, mentre una del tipo $n \times 1$ è detta anche *Matrice Colonna*

2.1 Operazioni tra Matrici

2.1.1 Somma tra matrici

La matrice somma è una matrice dove la posizione $a_{i,j}$ della matrice somma è data dalla somma delle $a_{i,j}$ delle matrici di partenza. Si possono sommare solo due matrici dello stesso ordine. si ha che:

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esempio 1. *Si ha:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La somma gode delle seguenti proprietà:

- $A + B = B + A$ *proprietà commutativa*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *proprietà associativa*
- $A + (0) = (0) + A$ *esistenza dell'elemento neutro, la matrice nulla*
- $\forall A, \exists(-A) : A + (-A) = (0)$ *esistenza dell'opposta, ovvero la matrice con gli elementi di A con segno invertito*

2.1.2 Prodotto di una matrice per uno Scalare

Si ha poi il prodotto tra una matrice e uno scalare,$k \cdot A$, con k costante e $A = (a_{i\,j})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m} = \{a_{i\,j}\}_{i=1,\dots,n\,e\,j=1,\dots,m}$ matrice $n \times m$, i indice delle righe, j indice delle colonne, che è una matrice con i coefficienti di A moltiplicati per k.

Esempio 2. *Si ha:*

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot k & -2 \cdot k & 1 \cdot k \\ 2 \cdot k & 0 \cdot k & 3 \cdot k \end{pmatrix}$$

Il prodotto per uno scalare ha le seguenti proprietà:

- $k \cdot (h \cdot A) = (k \cdot h) \cdot A$, $\forall k, h \in \mathbb{R}$
- $(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A$, $\forall k, h \in \mathbb{R}$
- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$, $\forall k \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot A = A$

2.1.3 Prodotto di una matrice per un vettore

Definisco una matrice 4×1, è un vettore colonna:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Si definisce, infine, il prodotto *riga per colonna* tra una matrice e un vettore (che rappresenta gli elementi estratti da uno spazio vettoriale):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{x_4}{2} \\ \frac{x_1}{3} \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(In questo caso v è autovettore di A in quanto $v = A \cdot v$) Inoltre siano A matrice $n \times m$ e v un vettore colonna. Si ha che:

$$A \cdot v : (n \times m)(n \times 1) \to (n \times 1) = \begin{pmatrix} b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1,\,k} x_k \\ b_2 = \sum_{k=1}^{n} a_{2,\,k} x_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,\,k} x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,\,1}x_1 + a_{1,\,2}x_2 + \cdots + a_{1,\,m}x_m \\ a_{2,\,1}x_1 + a_{2,\,2}x_2 + \cdots + a_{2,\,m}x_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,\,1}x_1 + a_{n,\,2}x_2 + \cdots + a_{n,\,m}x_m \end{pmatrix}$$

(Il numero di colonne della prima matrice deve essere uguale al numero di righe della seconda matrice)

2.1.4 Prodotto Riga per Colonna tra Matrici

Siano $A : (n \times m)$ e $C : (m \times t)$ matrici, si avrà $A \cdot C : (n, t)$ così espressa:

$$C = (c_{ij}) = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{im} \cdot b_{mj},\ i = 1, 2, ..., n\ e\ j = 1, 2, ..., t$$

ovvero:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1\,1} & c_{1\,2} & c_{1\,3} \\ c_{2\,1} & c_{2\,2} & c_{2\,3} \\ c_{3\,1} & c_{3\,2} & c_{3\,3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} \cdot c_{1\,1} + a_{1\,2} \cdot c_{2\,1} + a_{1\,3} \cdot c_{3\,1} & a_{1\,1} \cdot c_{1\,2} + a_{1\,2} \cdot c_{2\,2} + a_{1\,3} \cdot c_{3\,2} & a_{1\,1} \cdot c_{1\,3} + a_{1\,3} \cdot c_{2\,3} + a_{1\,3} \cdot c_{3\,3} \\ a_{2\,1} \cdot c_{1\,1} + a_{2\,2} \cdot c_{2\,1} + a_{2\,3} \cdot c_{3\,1} & a_{2\,1} \cdot c_{1\,2} + a_{2\,2} \cdot c_{2\,2} + a_{2\,3} \cdot c_{3\,2} & a_{2\,1} \cdot c_{1\,3} + a_{2\,2} \cdot c_{2\,3} + a_{2\,3} \cdot c_{3\,3} \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$A \cdot C = B \rightarrow b_{k\,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{k\,i} \cdot c_{i\,j}$$

Per permettere il prodotto riga per colonna si deve avere il numero di colonne della prima pari al numero di righe della seconda, inoltre la matrice risultante avrà lo stesso numero di righe della prima e lo stesso numero di colonne delle seconda.
Se moltiplico una matrice $n \times m$ e una $m \times n$posso definire entrambi i prodotti $A \cdot B$, che sarà di ordine m e $B \cdot A$, che sarà di ordine n. In generale $A \cdot B \neq B \cdot A$, ovvero non si ha la proprietà commutativa.
Il prodotto di due matrici non nulle può dare come risultato una matrice nulla.
Si hanno le seguenti proprietà:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *proprietà associativa*
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *proprietà distributiva a destra*
- $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ *proprietà distributiva a destra*
- $A \cdot (0) = (0)$ *esistenza dell'elemento nullo, la matrice nulla*
- $A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B), \forall k \in \mathbb{R}$
- $A \cdot I = I \cdot A = A$ esistenze dell'elemento neutro, ovvero la matrice identità, la matrice diagonale con solamente il valore 1 come elementi della diagonale

2.2 Composizione

Siano $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A : (2 \times 3)$ e $C : (3 \times 3)$ matrici, si ha che;

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \to C \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \to A \cdot (C \cdot \underline{x}) \in \mathbb{R}^3 \to (A \cdot C)\underline{x}$$

Ovvero essendo le matrici delle funzioni si ha che la loro composizione non è altro che il prodotto riga per colonna tra le due.

2.3 Determinante

Definizione 1 (bonus)**.** *Si ha che una permutazione su n elementi è un'applicazione biunivoca $\sigma : J_n \to J_n$ dove $J_n = \{1, 2, ..., n\}$:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Si dice che σ è di ***classe pari*** *(rispettivamente di* ***classe dispari****) se si passa da $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ a $(1, 2, ..., n)$ con un numero pari (rispettivamente dispari) di scambi.*
(Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è di classe pari mentre $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ è di classe dispari)
Si dimostra che la definizione di classe pari e di classe dispari è ben posta, ovvero non dipende dal modo con cui σ si ottiene come composizione di scambi.
Data $\sigma \in S_n$ (gruppo simmetrico su n elementi) definiamo:

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 \text{ se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 \text{ se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Sia ora $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n. Si definisce il ***determinante*** *di A:*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$$

Esso è composto da $n!$ addendi dove ciascun addendo contiene uno ed un solo fattore preso da ciascuna riga e ciascuna colonna (σ è biunivoca). Si presentano i primi 2 casi:

- *caso* $n = 1$*: si hanno* $A = (\alpha_{11})$, $S_1 = \{\sigma = id\}$, $\varepsilon(\sigma) = +1$ *e* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e quindi:*
$$det(A) = +\alpha_{1,1}$$
- *caso n=2: si hanno* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $S_2 = \{\sigma_1 = id, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$, $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ *e* $\varepsilon(\sigma_2) = -1$ *e quindi:*
$$det(A) = +\alpha_{1\sigma_1(1)} \cdot \alpha_{2\sigma_1(2)} - \alpha_{1\sigma_2(1)} \cdot \alpha_{2\sigma_2(2)} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}$$

considero i tre sistemi:

$$\underbrace{\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}}_{A}, \underbrace{\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}}_{B}, \underbrace{\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}}_{C}$$

Si ha che:

$$A = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In B invece ho 2 equazioni con lo stesso vincolo quindi:

$$B = \begin{cases} Infinite\ soluzioni \end{cases}$$

In C si ha una contraddizione quindi:

$$C = \begin{cases} Impossibile \end{cases}$$

Si cerca quindi un modo per capire velocemente cosa fa un sistema. Questo ente algebrico è il **determinante**. Si ha che

$$Det = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Torno agli esempi di prima:

$$det(A) = -2,\ det(B) = 0,\ det(C) = 0$$

Quindi un sistema è risolvibile sse $det(N) \neq 0$, se $det(n) = 0$ ho non si hanno soluzioni o se ne hanno infinite.

Il determinante si ha solo per matrici quadrate
Si sa che data una matrice 2×2 il suo determinante è 0 sse le due righe o le due colonne sono proporzionali. A livello geometrico si avrebbe l'intersezione tra le due rette nulla, ovvero con rette parallele, che o non si intersecano mai (soluzione impossibile) o sono sovrapposte (infinite soluzioni):

$$\begin{cases} y = m \cdot x + q \\ y' = m' \cdot x' + q' \end{cases} = \begin{cases} y - m \cdot x = q \\ y' - m' \cdot x' = q' \end{cases} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ -m' & 1 \end{pmatrix} \rightarrow -m + m' = 0$$

Usando la notazione esplicita:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = -c \\ a' \cdot x + b' \cdot y = -c' \end{cases} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \rightarrow (a \cdot b') - (a' \cdot b) = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Passo alle matrici 3×3, dove si ha la *Regola di Sarrus*:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

prendo le prime due colonne e le accosto sulla destra:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{matrix}$$

Procedo come con le 2×2 usando le tre diagonali da tre elementi che mi si formano, si avranno le seguenti diagonali:
Per la parte positiva:

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & \\ & c_{22} & c_{23} & c_{21} & \\ & & c_{33} & c_{31} & c_{32} \end{matrix}$$

e per la parte negativa:

$$\begin{matrix} & & c_{13} & c_{11} & c_{12} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{21} & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & \end{matrix}$$

e quindi:

$$det(C) = ((c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33}) + (c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{31}) + (c_{13} \cdot c_{21} \cdot c_{32})) - ((c_{31} \cdot c_{22} \cdot c_{13}) + (c_{32} \cdot c_{23} \cdot c_{11}) + (c_{33} \cdot c_{21} \cdot c_{12}))$$

Con le matrici quadrate ciò che vale per le righe vale anche per le colonne.
Non si definisce il determinante per matrici non quadrate.

Proprietà del determinante di una matrice quadrata $n \times n$ (*vari esempi sul libro da pagina 18)*:

- $det(A) = det(A^T)$, quindi posso tranquillamente sviluppare il determinante secondo le righe o secondo le colonne indistintamente
- se c'è una riga o una colonna di tutti zeri il determinante è 0
- scambiando due righe tra loro il determinante non cambia in valore assoluto ma cambia segno (vale anche se scambio due colonne)
- se ho due righe uguali il determinante è zero
- se ad una colonna A^i di una matrice A di ordine n si somma un'altra colonna A^j, con $i \neq j$, moltiplicata per $k \in \mathbb{R}$, il determinante non cambia. Ovvero:

  $$det(A^1, A^2, ...A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, ..., A^n) = det(A^1, A^2, ...A^{i-1}, A^i{+}k{\cdot}A^j, A^{i+1}, ..., A^n)$$

- se si hanno due colonne proporzionali (in particolare uguali) allora il determinate è nulla (per la proprietà sopra)
- se moltiplico una sola riga o una sola colonna per $k \in \mathbb{R}$ avrò il determinante pari a $k \cdot det(C)$ ovvero:

  $$det(A^1, A^2, ..., k \cdot A^i, ..., A^n) = k \cdot det(A)$$

- se ho una matrice diagonale allora il determinante è apri al prodotto degli elementi sulla diagonale, in particolare $det(I) = 1$
- sia $A = (A^1, A^2, ..., A^i, ..., A^n)$ una matrice e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ una qualunque matrice colonna. Allora, $\forall i = 1, 2, ..., n$ si ha:

  $$det(A^1, A^2, ..., A^i{+}B, ..., A^n) = det(A^1, A^2, ..., A^i, ..., A^n){+}det(A^1, A^2, ..., B, ..., A^n)$$

- se moltiplico, in una 2×2 entrambe le righe o entrambe le colonne per $k \in \mathbb{R}$ avrò il determinante pari a $k^2 \cdot det(C)$

- sia così espressa la proprietà distributiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

leggo la prima colonna come:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

sistemare la versione formale

$$det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{pmatrix}$$

con:

$$\begin{cases} a_{1\,1} = c_{1\,1} + a_{1\,1} \\ a_{1\,1} = a_{1\,1} + a_{1\,1} \end{cases}$$

Teorema 1. *Sia A una matrice 3×3 ottenuta accostando 3 vettori colonna: $A = \underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3$. Suppongo: $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2{}'$. Si ha che:*

$$det(A) = det(\underline{v}_1\, \underline{w}_2\, \underline{v}_3) + det(\underline{v}_1\, \underline{w}_2{}'\, \underline{v}_3)$$

Vale per qualsiasi riga o colonna. Posso anche spezzare più volte (più delle due nell'esempio sopra) la stessa riga/colonna

Inoltre se ho:

$$det(A) = det(\underline{v}_1,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3) \ e \ A = [\underline{v}_1,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3]$$

posso scrivere:

$$A' = [\underline{v}_1 - k \cdot \underline{v}_2,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3]$$

avrò:

$$det(A') = det(\underline{v}_1,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3) + det(-k \cdot \underline{v}_2,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3) - k \cdot det(\underline{v}_2,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3) = det(A)$$

2.3.1 Determinante di matrici n x n

Vediamo come calcolare il determinante di una matrice $n \times n$.

$$C = \begin{pmatrix} c_{1\,1} & c_{1\,2} & c_{1\,3} & \cdots & c_{1\,n} \\ c_{2\,1} & c_{2\,2} & c_{2\,3} & \cdots & c_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{3\,1} & c_{3\,2} & c_{3\,3} & \cdots & c_{n\,n} \end{pmatrix}$$

definisco il complemento algebrico di un elemento come il determinante della matrice risultante dall'eliminazione della riga e della colonna di quell'elemento moltiplicato per $(-1)^{nriga+ncolonna}$.

Teorema 2 (di Laplace)**.** *il determinante di una matrice si ottiene così: scelgo una riga e una colonna. Scelta una riga* $c_{1\,1}, ..., c_{1\,n}$ *il determinante è:*

$$det(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{1\,k} \cdot \mathbb{C}_{1\,k} = \sum_{k=1}^{n} c_{1\,k} \cdot (-1)^{1+k} det(C_{1\,k})$$

con $\mathbb{C}_{1\,k}$ *complemento algebrico di* $c_{1\,k}$

Per comodità scelgo la riga con più 0. In pratica prendo una matrice, tolgo una riga e una colonna, calcolo il determinante della matrice rimanente (avrà una riga e una colonna in meno), moltiplico per (-1) elevato alla somma tra il numero di riga e il numero di colonna e per il numero presente all'incrocio della riga e della colonna scelte.

Esempio 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la seconda colonna diventa la seconda meno la terza, ottenendo così altri zeri senza perdere le proprietà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ - & - & | & - \\ 1 & 4 & | & 3 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

scelgo la seconda riga e la terza colonna da elidere:

$$2 \cdot (-1)^5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

procedo ancora e per la nuova matrice elimino la prima riga e la seconda colonna (avrei potuto usare anche Sarrus). La matrice sara:

$$\begin{pmatrix} - & | & - \\ 1 & | & 3 \\ 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Si avrà quindi:

$$2 \cdot (-1)^5 \cdot 1 \cdot (-1)^3 det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (1-3) = -4$$

2.3.2 Teorema di Binet

Teorema 3 (di Binet)**.** *Se ho due matrici $n \times m$ dice che il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti:*

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

2.4 Dipendenza Lineare

Sia data una matrice A di ordine $m \times n$ si ha che:

Definizione 2. *Le righe $A_1, A_2, ..., A_M$ di A si dicono* ***linearmente dipendenti*** *se esistono $k_1, k_2, k_m \in \mathbb{R}$, non tutti nulli tali che:*

$$k_1 \cdot A_1 + k_2 \cdot A_2 + \cdots + k_m \cdot A_m = (0)$$

con (0) è la matrice nulla $1 \times n$ In caso contrario le righe sono dette ***linearmente indipendenti*** *e si ha:*

$$k_1 \cdot A_1 + k_2 \cdot A_2 + \cdots + k_m \cdot A_m = (0) \text{ sse } \forall k_i \text{ si ha } k_i = 0$$

Tutto ciò vale anche per le colonne e per un qualunque numero di righe e colonne

Ovvero k vettori, ambientati nello stesso spazio, sono linearmente dipendenti, esempio $\underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^n$, se uno di essi è esprimibile come combinazione lineare degli altri, cioè esistono $k-1$ numeri $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ tali che, per esempio, $\underline{v}_1 = \alpha_2 \cdot \underline{v}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{v}_3$

Esempio 4. *Siano:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si ha che sono dipendenti se: $\underline{v}_1 = \alpha_2 \cdot \underline{v}_2$, *ma si avrebbe:* $\begin{cases} 1 = 2 \cdot \alpha_2 \\ 1 = 3 \cdot \alpha_2 \end{cases}$ *, che è impossibile. I vettori sono quindi indipendenti.*

Se una matrice ha determinate 0 allora i vettori che la compongono sono linearmente dipendenti (e quindi proporzionali tra di loro). 3 vettori in $\mathbb{R}^3$ sono dipendenti sse $det[\underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3] = 0$. Si ha $\underline{v}_1 = k \cdot \underline{v}_2 + h \cdot \underline{v}_3$ e:

$$det[k \cdot \underline{v}_2 + h \cdot \underline{v}_3,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3] = k \cdot det[\underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3] + h \cdot det[\underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3]$$

Teorema 4. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si ha che $det(A) = 0$ sse le righe (o le colonne) di A sono linearmente dipendenti*

Definizione 3. *Si dice che una riga A_i della matrice A è* ***combinazione lineare*** *delle altre righe se esistono $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (che sono detti coefficienti della combinazione lineare) tali che:*

$$A_i = a_1 \cdot A_1, a_2 \cdot A_2, ..., a_{i-1} \cdot A_{i-1}, a_{i+1} \cdot A_{i+1}, ..., a_n \cdot A_n$$

Un'analoga definizione vale anche per le colonne

Teorema 5. *Si A una matrice $m \times n$. Allora le righe $A_1, A_2, ..., A_m$ di A sono linearmente dipendenti sse almeno una riga di A è combinazione lineare delle altre righe.*
Viceversa se una riga, per esempio A_1, è combinazione lineare delle altre righe allora $\exists a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}$ tali che:

$$-A_1 + a_2 \cdot A_2 + \cdots + a_m \cdot A_m = (0)$$

e dato che il coefficiente di A_1 è -1, che è diverso da 0, si ha che le righe $A_1, A_2, ..., A_m$ di A sono linearmente dipendenti. Questo risultato si ottiene anche ragionando sulle colonne.

2.5 Riduzione in scala di Gauss

Posso scrivere le varie righe di una matrice come prodotto di una delle altre righe con un certo $k \in \mathbb{R}$. Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

riscrivo la seconda riga come la seconda meno due volte la prima, ottengo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Queste operazioni non cambiano il determinante.
SI hanno le seguenti **operazioni elementari sulle righe (o colonne)** che possono essere applicate:

- scambiare le righe (o le colonne)
- moltiplicare una riga (o una colonna) per un $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$
- sommare ad una riga (o colonna) un'altra riga (o colonna) moltiplicata per un $k \in \mathbb{R}$

Si definisce *Pivot* il primo elemento della riga A_i che non è nullo. Una matrice è ridotta a scala se il pivot P_i si trova a sinistra del pivot P_{i+1}. Esempio, dove i pivot sono 1, 2 e 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per ridurre a scala una matrice si effettuano delle operazione sulla n-esima riga sottraendo un multiplo di una riga superiore esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{riga2=riga2-2\cdot riga1} \overbrace{\longrightarrow}^{riga3=riga3-riga1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{riga3=riga3-riga2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si chiama *metodo di riduzione di Gauss* che può essere effettuato anche invertendo delle righe. Se ottengo una riga di 0 significa che uno dei vettori è lineari e che quindi una delle equazioni in realtà non esiste autonomamente.

2.6 Calcolo della Matrice Inversa

A è invertibile se $\exists B$ quadrata tale che $A \cdot B = b \cdot A =$ matrice identità (che ha determinante 1). Condizione necessaria per cui A sia invertibile è che $Det(aA) \neq 0$ (conseguenza del teorema di Binet, infatti $det(B \cdot A) = det(b) \cdot det(A) = 1$). Inoltre si ha che $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$. Quindi $\forall b \, \exists! x : A \cdot x = b \longleftrightarrow det(A) \neq 0$ e $x = f^{-1}(b)$.

Esempio 5. *Calcolo la matrice inversa: Prendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

faccio la trasposta:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

calcolo la matrice aggiunta: $(-1)^{i+j} \cdot det(A^T)_{i\,j}$, *easy nelle 2x2:*

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

faccio:

$$A^T \cdot A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecco un altro metodo per calcolare l'inversa:
prendo la matrice:
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ gli accosto l'identità: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
operando sulle righe faccio comparire l'identità a sinistra:
riscrivo la prima riga e al posto della seconda faccio la seconda meno $\frac{6}{5}$ la prima:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

ho ottenuto così il primo 0 della seconda riga. ora faccio la prima riga meno venti volte la seconda, la seconda non la tocco

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 25 & -20 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

e ottengo lo 0 in seconda posizione della prima riga ora divido per 5 la prima riga e moltiplico per 5 la seconda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

e ho che le ultime due colonne sono la mia inversa, avendo ottenuto con prime due l'identità:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

se moltiplico

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

ottengo la seconda matrice con le righe invertite.
se invece moltiplico una matrice per una del tipo:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ottengo la prima riga per λ_1 e la seconda per λ_2.
Invece se moltiplico una matrice per:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottengo una matrice con α volte la seconda riga.
Invece se moltiplico una matrice per:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

ottengo una matrice con α volte la prima riga.
Un'altra tecnica per il calcolo della matrice inversa prevede i seguenti passaggi:

- si calcola il determinante della matrice A
- si calcola la matrice dei cofattori (si ricorda che si parte fissando la prima colonna e scalando sulle righe e così via)
- si calcola la matrice trasposta della matrice dei cofattori appena ottenuta
- si moltiplica questa matrice trasposta per $\frac{1}{det(A)}$

Esercizio 1. *Sia V l'insieme delle matrici 4×4 e W l'insieme della matrici con determinante nullo. W è sottospazio?*

- *dato che hanno determinante nullo si ha che lo 0 c'è*
- *se $A \in W$ allora $\lambda \cdot A \in W$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Ora $det(\lambda \cdot A) = \lambda^4 \cdot det(A) = 0$ e quindi la condizione è verificata.*
- *se $A \in W$ e $B \in W$ allora $A + B \in W$. Sappiamo che è complesso perché il determinante non è lineare. quindi $A+B \in W$ non è verificato. per esempio si ha:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

dove A e B hanno determinante nullo, mentre $det(I) =!$ Quindi W non è un sottospazio.

Esercizio 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile perché ha $det(A) = -10$. Applicando Binet calcolo il determinante dell'inversa, so infatti che $A \cdot A^{-1} = I$ quindi $det(\cdot A^{-1}) = det(I) = 1$ quindi $det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$ e $det(b^{-1}) = -\frac{1}{10}$

2.7 Rango

Definizione 4. *Sia data una matrice A di ordine $m \times n$. Si chiama **minore di ordine** r della matrice A una qualunque matrice di ordine r i cui elementi sono dati dall'intersezione di r righe e r colonne della matrice A. Dalla definizione si nota che*

$$r \leq min\{m, n\}$$

Si ha quindi la seguente definizione:

Definizione 5. *Si dice che una matrice A di ordine $m \times n$ ha **rango** $p = rg(A)$ se esiste un minore p con determinante diverso da zero e tutti i minori di A di ordine maggiore di p ha determinante uguale a 0. Inoltre*

$$rg(A) \leq min\{m, n\}$$

Il rango quindi è il massimo ordine di sottomatrice quadrata con determinante diverso da 0 che posso ottenere usando le righe e le colonne della matrice in esame. Inoltre se ho le $k \times k$ con determinante non nullo allora tutte le $(k+1) \times (k+1)$ avranno determinante 0.
Prendo una matrice $n \times m$ e scelgo tutte le sottomatrici quadrate possibili, l'ordine di quelle con determinante diverso da 0 è il rango.
due vettori sono dipendenti se:

$$v_1 = \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_k \cdot v_k$$

. Tutto ciò si può riscrivere come:

$$0 = -v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_k \cdot v_k$$

quindi si hanno coefficienti non tutti zero che danno zero. Se esiste una combinazione lineare dei v_1 con coefficienti non tutti nulli. Se c'è un α_n è nullo si ha:

$$\alpha_k \cdot v_k = -\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_{k-1} \cdot v_{k-1}$$

e posso spostare α_k:

$$v_k = \frac{-\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_{k-1} \cdot v_{k-1}}{\alpha_k}$$

Esempio 6. *ho:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e \; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Se l'unico modo per avere corrispondenza lineare è mettere i coefficienti a zero si hanno i vettori indipendenti

Sia A una matrice e V la matrice A ridotta a scala. Il rango di A è il numero di righe di V diverse da 0. infatti il rango di una matrice è uguale al rango della sua matrice ridotta.

Definizione 6. *Si dice che una matrice ha* ***rango per righe*** r *se* A *ha al più* r *righe linearmente dipendenti. Analogamente ha* ***rango per colonne*** s *se* A *ha al più* s *colonne linearmente indipendenti. Inoltre:*

$$r = s = rg(A)$$

Teorema 6. *data una matrice* $A = n \times m$ *il rango di* A *è il massimo numero di righe (o colonne) indipendenti di* A

2.8 Sistemi Lineari

Definizione 7. *Si chiama* ***equazione lineare*** *su* $\mathbb{R}$ *ogni equazione del tipo:*

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ *che vengono chiamati* ***coefficienti*** *delle* ***incognite*** x_i*, mentre* b *è il* ***termine noto*** *dell'equazione. Se* $a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \cdots + a_n \cdot k_n = b$ *si ha che la n-pla ordinata di numeri reali* $(k_1, k_2, ..., k_n)$ *è detta soluzione dell'equazione.*

Definizione 8. *Si definisce nella seguente maniera un* ***sistema lineare*** *di* m *equazioni lineari in* n *incognite* $(x_1, x_2, ..., x_n)$*:*

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *(con* $i = 1, 2, ..., m$ *e* $j = 1, 2, ..., m$*).*
Se tutti i termini noti delle equazioni b_i *(con* $i = 1, 2, ..., m$*) sono nulli allora si ha un* ***sistema omogeneo****.*

Una n-pla ordinata di reali k_i $(i = 1, ..., n)$ è detta soluzione del sistema lineare sse soddisfa tutte le m equazioni. Ciascuna soluzione è detta **soluzione particolare** e l'insieme di tutte le soluzioni particolari è detta **soluzione generale** del sistema, che può essere un solo elemento se il sistema ha una sola soluzione. Risolvere il sistema significa trovare la soluzione generale del suddetto. Se un sistema ammette soluzione allora è **risolubile**. La n-pla $0, 0, ..., 0$ è detta **soluzione nulla o banale**. Da un sistema con i termini noti non nulli posso ricavare un **sistema omogeneo associato** imponendo i termini noti nulli.

Teorema 7. *Sia $u = (k_1, ..., k_n)$ una soluzione particolare del sistema lineare generale e V quella del sistema omogeneo associato. Allpra la soluzione generale del sistema generale è data dall'insieme:*

$$u + V = \{u + v : v \in V\}$$

con $v = h_1, ..., h_n$ e $u + v = (k_1 + h_1, ..., k_n + h_n)$.

Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno la stessa soluzione generale. Per trasformare un sistema in uno equivalente posso:

- scambiare l'ordine delle equazioni
- moltiplicare un'equazione del sistema per un $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$
- sommare ad un equazione un'altra equazione moltiplicata per un $k \in \mathbb{R}$

Si può notare un'analogia con le operazione tra le righe che si possono fare nelle matrici.
Posso usare le matrici anche per rappresentare un sistema lineare utilizzando la cosiddetta **matrice incompleta** che rappresenta i coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

a cui si aggiungono la **colonna delle incognite** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e la matrice dei termini noti $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Il sistema lineare si può quindi scrivere come

$$A \cdot X = B$$

dove tra A e X abbiamo il prodotto riga per colonna.
Per esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Si nota che il sistema lineare può essere riscritto come:

$$x_1 \cdot A^1 + x_2 \cdot A^2 + \cdots + x_n \cdot A^n = B$$

2.8.1 Teorema di Cramer

Teorema 8 (di Cramer)**.** *Un sistema lineare ha una ed una sola soluzione sse il determinante della sua matrice incompleta ha determinante diverso da 0.*

Teorema 9 (regola di Cramer)**.** *Sia dato un sistema di n equazioni in n incognite, $A = n \times n$ il sistema ammette una e una sola soluzione sse $det(A) \neq 0$ (si nota che il teorema non è efficacie in termini computazionali) si ha che:*

$$\begin{cases} a_{1\,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1\,n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{n\,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{n\,n} \cdot x_n \end{cases}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$x_i = \frac{det(A')}{detA}$$

dove la matrice A' è ottenuta sostituendo alla colonna i-esima della matrice A il vettore $\underline{b}$

Se det(A)=0 il sistema non ha soluzioni oppure esistono più soluzioni

2.8.2 Teorema di Rouché-Capelli

Teorema 10 (di Rouché-Capelli)**.** *Sia dato un sistema di n equazioni in m incognite*

$$\begin{cases} a_{1\,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1\,n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{n\,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{n\,n} \cdot x_n \end{cases}$$

il sistema $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzione sse $rango(A) = rango(A|b)$. Inoltre detto r il rango di A, nel caso in cui si abbia $m > r$, abbiamo soluzioni che dipendono da $m - r$ parametri, ovvero ∞^{m-r} soluzioni (con m numero di incognite).

2.8.3 Metodo di Gauss

Per risolvere un sistema lineare posso prendere la sua matrice completa (ovvero $A|B$), ridurla a scala e risolvere il sistema ottenuto (drasticamente più semplice da risolvere di quello iniziale) con la riduzione a scala. Questo sistema è detto **Metodo di Gauss**

2.8.4 Sistemi Lineari Omogenei

I sistemi lineari omogenei hanno alcune particolarità:

- ammettono sempre la soluzione nulla
- la matrice completa e quella incompleta hanno lo steso rango
- se la caratteristica della matrice completa (o incompleta) è pari al numero di incognite il sistema, per il teorema di Cramer, ha una e una sola soluzione, quindi la **soluzione nulla**
- un sistema lineare omogeneo ha soluzione sse la caratteristica della matrice completa (o incompleta) è minore del numero delle incognite
- un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ha soluzioni non nulle sse il determinante della matrice incompleta è nullo
- se il rango r è minore delle n incognite il sistema ammette infinite soluzioni ∞^{n-r}

Capitolo 3

Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica composta da un *campo*, i cui elementi sono detti *scalari*, da un insieme, i cui elementi sono dei vettori, e da due operazioni binarie (caratterizzate da particolari proprietà), la *somma* e la *moltiplicazione per uno scalare.*

Definizione 9. *Sia V un insieme di elementi con due operazioni:*

- *somma fra vettori*
- *prodotto di un vettore per uno scalare*

*operazioni che a loro volta hanno determinate proprietà. Se si ha questa situazione si ha che V è uno **spazio vettoriale** su un certo campo (per esempio $\mathbb{R}$) e i suoi elementi sono detti **vettori**. Si ha infine che il vettore nullo è unico e che l'opposto di un certo vettore è unico.*

3.0.1 Somma Vettoriale

Siano: $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)$ allora si ha:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

Posso sommare due vettori sse appartengono allo stesso spazio vettoriale
Proprietà:

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ (commutativa)
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ (associativa)
- $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$ (elemento neutro)
- $\underline{x} + (\underline{-x}) = \underline{0}$ (elemento opposto)

3.0.2 Moltiplicazione di un Vettore per uno Scalare

Siano: $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha che:

$$\lambda \cdot \underline{x} = (\lambda \cdot x_1, ..., \lambda \cdot x_n)$$

3.0.3 Altro sui Sistemi Lineari

Per ogni vettore va sempre specificato lo spazio vettoriale. Se ho $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ posso risolvere il sistema e dire che $\underline{b} \in Im(A)$.
Si ha che i vettori usuali dello spazio, del piano o della retta formano uno spazio vettoriale. Infatti:

- essendoci corrispondenza biunivoca tra spazio e $\mathbb{R}^3$ ogni vettore dello spazio si può indicare con un vettore di $\mathbb{R}^3$ che è formato da una terna di numeri
- essendoci corrispondenza biunivoca tra il piano e $\mathbb{R}^2$ ogni vettore del piano si può indicare con un vettore di $\mathbb{R}^2$ che è formato da una coppia di numeri
- essendoci corrispondenza biunivoca tra la retta e $\mathbb{R}$ ogni vettore della retta si può indicare con un vettore di $\mathbb{R}$ che è formato da un numero

3.1 Proprietà degli spazi vettoriali

Su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ si definiscono le seguenti proprietà della somma:

- $\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_2} + \underline{v_3} \longrightarrow \underline{v_2} = \underline{v_3}$
- $\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_2} + \underline{v_1}$
- $(\underline{v_1} + \underline{v_2}) + \underline{v_3} = \underline{v_1} + (v_2 + \underline{v_3})$
- $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
- $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
- $\lambda \cdot (\underline{v_1} + \underline{v_2}) = \lambda \cdot \underline{v_2} + \lambda \cdot \underline{v_1}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{v} + \lambda_2 \cdot \underline{v}$
- esiste un solo $\underline{x}$ tale che :

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{x} \textit{ ovvero } \underline{x} = \underline{v} + (-\underline{u})$$

per il prodotto si hanno invece le seguenti proprietà, $\forall v, u \in V$

- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \underline{v}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \cdot \underline{u} + \alpha \cdot \underline{v},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{v},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
- $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \underline{0} \in V$
- $(-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$

3.2 Sottospazi Vettoriali

Definizione 10. *Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ con le seguenti proprietà:*

- $\underline{0} \in W$
- $\underline{w_1}, \underline{w_2} \in W \longrightarrow \underline{w_1} + \underline{w_2} \in W$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \underline{w} \in W \longrightarrow \lambda \cdot W \in W$

Teorema 11. *Un sottoinsieme non vuoto S di V è un sottospazio sse comunque presi $\underline{v}$ e $\underline{u} \in S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{u} \in S$$

Teorema 12. *Se S è un sottospazio di V allora S è un sottospazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni definite in V*

Definizione 11. *Si hanno 2 sottospazi particolari in ogni spazio vettoriale V:*

- *V stesso, che è detto* ***sottospazio improprio***
- *$\{\underline{0}\}$, che è detto* ***sottospazio banale***

Definizione 12. *Sia V uno spazio vettoriale qualsiasi e siano $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ vettori di V. Si dice* ***combinazione lineare*** *di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ ogni somma del tipo:*

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{v}_i$$

con $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$

Definizione 13. *Si definisce* ***sottospazio di V generato da*** $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ *l'insieme di tutte le possibili combinazioni di* $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ *. Esso viene indicato con:*

$$[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n] \text{ o } span\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$$

Questo insieme di combinazioni lineari è sottospazio di V

Dimostrazione. Siano $\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n$ e $\beta_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \underline{v}_n$ due combinazioni lineari di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$. La loro somma sarà:

$$(\alpha_1 + \beta_1) \cdot \underline{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \underline{v}_n$$

che è combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$. Inoltre sia $\gamma \in \mathbb{R}$ si che anche:

$$\gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n) = (\gamma \cdot \alpha_1) \cdot \underline{v}_1 + \cdots + (\gamma \cdot \alpha_n) \cdot \underline{v}_n$$

è combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$. □

3.3 Basi e Dimensione

Definizione 14. *Si dice che uno spazio vettoriale V ha* ***dimensione finita*** *se esistono dei vettori* $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ *che generano tutto V, ovvero tali che ogni elemento di V sia da loro generato.*
In caso contrario si parla di ***dimensione infinita***

Nota 1. *Si ha che lo spazio dei polinomi* $\mathbb{P}$ *è di dimensione infinita mentre gli spazi* $\mathbb{P}_n$ *sono dimensione finita. Un polinomio di grado* $\leq n$ *si scrive come combinazione lineare dei polinomi* $1, x, x^2, ..., x^n$

Anche per i vettori si ha la nozione di **dipendenza lineare**:

Definizione 15. *Dati i vettori* $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ *si dice che essi sono* ***linearmente dipendenti*** *se esistono n numeri reali* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *non tutti nulli tali che si abbia la combinazione lineare:*

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

Di conseguenze si ha che i vettori sono ***linearmente dipendenti*** *sse la combinazione lineare sia nulla solo* $\forall \alpha_i = 0$.

Si hanno quindi le seguenti proprietà:

- *se il vettore $\underline{v}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ allora tali vettori sono linearmente indipendenti*
- *se i vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti significa che almeno uno di essi si ottiene da una combinazione lineare dei rimanenti*
- *se uno dei vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ è il vettore nullo si ha che i vettori sono linearmente dipendenti*
- *se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti allora nessuno dei vettori è quello nullo*
- *se due dei vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono uguali essi sono linearmente dipendenti*
- *se ai vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ linearmente dipendenti si aggiungono i vettori $\underline{v}_{n+1}, ..., \underline{v}_m$ i vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}, ..., \underline{v}_m$ saranno linearmente dipendenti*
- *se da i vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ linearmente indipendenti si tolgono dei vettori i restanti saranno comunque dipendenti*
- *se i vettori $\underline{w}, \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti si h che il vettore $\underline{w}$ è combinazione lineare dei $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$*

3.3.1 Basi

Definizione 16. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. L'insieme di vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ è **base** se sono un sistema di generatori per V e sono linearmente indipendenti*

Nota 2. *Si definisce la **base canonica** in $\mathbb{R}^n$ quella formata dai seguenti vettori:*

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, ..., 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, ..., 1) \end{gathered}$$

che sono vettori indipendenti e generano tutto $\mathbb{R}^n$

Teorema 13. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita, allora esiste almeno una base di V e qualora esistano più basi diverse di V esse hanno lo stesso numero di elementi*

3.3.2 Dimensione di uno spazio vettoriale

Dall'ultimo teorema segue la seguente definizione:

Definizione 17. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita. Si chiama **dimensione** di V, che si indica con $dim(V)$, il numero di vettori che compongono una base di V*

Si hanno le seguenti dimensioni principali:

- lo spazio vettoriale nullo ha dimensione 0, $dim(\{\underline{0}\}) = 0$
- nel campo $\mathbb{R}$ si ha che $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- per le matrici si ha che $dim(M_{n,m}) = n \cdot m$
- per lo spazio dei polinomi si ha che $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$

Si ha il seguente teorema *(utile ma non affrontato a lezione)*:

Teorema 14. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita n. Se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s$ generano V, con $s > n$, allora togliendo opportuni vettori da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s$ si ottiene una base di V.*
Se invece ho vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$ linearmente indipendenti si ha che questi formano una base di V oppure esistono opportuni vettori di V, $\underline{v}_{m+1}, ..., \underline{v}_n$ tali che $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m, \underline{v}_{m+1}, ..., \underline{v}_n\}$ è una base di V

Teorema 15. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita n e sia $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ un'insieme di vettori linearmente indipendenti. B è una base di V ssen è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V.*
Quindi n vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V di dimensione n sono una base. Inoltre sia $C = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s\}$ un sistema di generatori per V, con $s > n$. Da C si può ottenere una base rimuovendo opportunamente dei vettori fino ad ottenere un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

Si ha infine il seguente teorema:

Teorema 16. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita n e sia $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ una base fissata di V. Allora ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può esprimere in uno e un solo modo come combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$*

Definizione 18. *Data una base $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ dello spazio vettoriale V si ha che $\forall \underline{v} \in V$ esistono univocamente n numeri $\alpha_1, ..., \alpha_n$ della combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ che produce $\underline{v}$. Tali numeri sono detti **coordinate (o componenti)** di $\underline{v}$ rispetto alla base B.*
Per esempio notiamo che le componenti di $\underline{v} = (x_1, ..., x_n)$ rispetto alla base canonica sono proprio $x_1, ..., x_n$

I concetti di base e dimensione possono essere estesi ad un qualsiasi sottospazio vettoriale S di V, essendo lui a sua volta uno spazio vettoriale.

Nota 3. *Per trovare le componenti di un certo vettore $\underline{v}$ rispetto alla base B, per esempio in $\mathbb{R}^2$ $B = \{\underline{w_1}, \underline{w_2}\}$ si procede così:*

- *si scrive $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{w_1} + \beta \cdot \underline{w_2}$*
- *ricordando che $\underline{v}, \underline{w_1}$ e $\underline{w_2}$ sono vettori colonna risolvo il sistema lineare associato alla matrice che si viene a formare, con il vettore $\underline{v}$ che sarà la colonna dei termini noti.*
- *trovati α e β (nel caso a 2 dimensioni, per n dimensioni avrò n coefficienti) riscrivo $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{w_1} + \beta \cdot \underline{w_2}$ con i valori di α e β trovati*

Nota 4. *Sia S, generato da $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s$, un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, considero la matrice le cui righe sono le componenti di questi vettori di S rispetto alla base canonica. Dato che il rango ella matrice è dato dal numeri di righe linearmente indipendenti si ha che il rango rappresenta la dimensione del sottospazio generato dai vettori riga e i vettori indipendenti sono base di S. Inoltre si ha che n vettori di $\mathbb{R}^n$formano una base sse il determinante della matrice quadrata, le cui righe sono le componenti di questi vettori, ha determinante non nullo.*

Teorema 17. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo di dimensione finita n e S un suo sottospazio vettoriale.*

$$\textit{Se } dim(S) = dim(V) \textit{ allora si ha che } S \textit{ coincide con } V$$

Capitolo 4

Applicazioni Lineari

Definizione 19. *Suppongo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.* f *è lineare se:*

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(k \cdot x) = k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
- $f(x-x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0 \longrightarrow f(0) = 0$

f *se è lineare manda 0 in 0. Per esempio* $\log(x+y)$ *non è lineare*

il grafico di una funzione lineare è una retta che passa per l'origine. Quindi

$$f(x) = m \cdot x$$

in quanto:

$$x = x \cdot 1 \to f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1),\ f(1) = m$$

Si ha che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare, infatti penso a $\underline{x} = (\underline{x_1}, \underline{x_2})$ e $\underline{y} = (\underline{y_1}, \underline{y_2})$ si ha:

- $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$
- $f(k \cdot \underline{x}) = k \cdot f(\underline{x}),\ k \in \mathbb{R}$

Definizione 20. *SIa $f : V \to W$ un'applicazione lineare, l'insieme $f^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}\}$ si dice **nucleo (kernel) dell'applicazione** f e si indica con:*

$$ker(f)$$

*L'insieme $f(V) = \{f(\underline{v}), \, \underline{v} \in V\}$ si dice **immagine dell'applicazione** f e si indica con:*

$$Im(f)$$

*Si definisce **rango dell'applicazione** f la dimensione di $Im(f)$*

Se X è lo spazio di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ il sottoinsieme delle funzioni lineari è un sottospazio. Devo vedere se:

- $\underline{0} \in W$ (lo dimostro mettendo 0 al posto di y nelle proprietà delle funzioni lineari)
- siano $f_1(x) = m_1 \cdot x$, $f_2(x) = m_2 \cdot x$ funzioni lineari, la loro somma è lineare $f_3(x) = m_3 \cdot x$, $m_3 = m_1 + m_2$
- $k \cdot f(x) \in W$

Quindi la somma di funzioni lineari è lineare.
(nell'esempio si legga $x = \underline{x}$ e $y = \underline{y}$)

$$(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y)$$

$$= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$$

inoltre:

$$(f+g)(\lambda \cdot x) = f(\lambda \cdot x) + f(\lambda \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = \lambda \cdot (f+g)(x)$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quindi

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = x_1 + y_1 = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

e

$$\lambda \cdot \underline{x} = (\lambda \cdot x_1, \, \lambda \cdot x_2)$$

con:

$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = (\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot f(\underline{x})$$

una funzione: $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $h(x) = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ è lineare ed è l'unico caso di funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

Dimostrazione. prendo F lineare $F\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $F(1,0) = k$, $k \in \mathbb{R}$ allora siccome F è lineare allora

$$F(x_1, 0) = F(x_1 \cdot 1, 0) = F(x_1 \cdot (1,0)) = x_1 \cdot F(1,0) = x_1 \cdot k$$

sia $F(0,1) = d$ quindi

$$F(0, x_2) = F(x_2 \cdot (0,1)) = x_2 \cdot F(0,1) = x_2 \cdot d$$

infine:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1, 0) + F(0, x_2) = x_1 \cdot k + x_2 \cdot d$$

$\square$

Passo al caso $\mathbb{R}^n$ con $\underline{x} = x_1, ..., x_n$ e $\underline{y} = y_1, ..., y_n$, n-uple. le proprietà sono come sopra solo con n elementi e non 2. Si avranno n proiezioni P_k, $P_k(x_1, ..., x_n) = x_k$ e ogni P_k è lineare. In generale $(x_1, ...x_n) \to \alpha_l \cdot x_k$. Posso sommare le proiezioni e ottenere una funzione lineare:

$$F(x_1, ...x_n) = \alpha_1 \cdot x_1 + ... + \alpha_n \cdot x_n$$

e si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot x_1 + ... + \alpha_n \cdot x_n = f(x, x_n)$$

definisco la base fondamentale a 3 dimensioni:

$$(1,0,0) = e_1$$

$$(0,1,0) = e_2$$

$$(0,0,1) = e_3$$

Si ha:

$$F(x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n) = x_1 \cdot F(e_1) + ... + x_n \cdot F(e_n)$$

Teorema 18. *se $f : V \to W$ è lineare allora $Ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V*

Dimostrazione. mostro che $W = Ker(F)$ è un sottospazio.

- $\underline{0} \in W$ perché è lineare (F manda 0 in 0)
- $\underline{x}, \underline{y} \in W$ allora $\underline{x} + \underline{y} \in W$ perché $F(\underline{x}) + F(\underline{y}) = 0 + 0 = 0$
- $F(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot F(\underline{x}) = 0 \cdot 0 = 0$

□

Teorema 19. *L'immagine di un'applicazione $f : V \to W$ è un sottospazio vettoriale di W*

I seguenti 2 teoremi sono comodi ma non sono stati affrontati a lezione dalla professoressa kuhn

Teorema 20. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. f è iniettiva sse $ker(f) = \{\underline{0}\}$ mentre è suriettiva sse il rango di f è uguale alla dimensione di W.*
Inoltre se $dim(V) = dim(W)$ f è iniettiva sse f è suriettiva

Teorema 21. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con V di dimensione finita. Vale la seguente uguaglianza:*

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)$$

Teorema 22. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Se $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ è una base di V allora $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ generano $Im(f)$*

Teorema 23. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Se $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ è una base di V allora $\{f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)\}$ è una base di $Im(f)$*

Definizione 21. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Si ha che:*

- *f è un* ***endomorfismo*** *(di V) se $V = W$*
- *f è un* ***isomorfismo*** *se è biunivoca e V e W sono detti* ***isomorfi****. f quindi è suriettiva, quindi $Im(f) = W$, e iniettiva, quindi $dim(Im(f)) = dim(V)$. Due spazi isomorfi hanno quindi la stessa dimensione. Si nota che uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$*

4.0.1 Applicazioni e matrice rappresentativa

Presa una applicazione lineare (tipo $f(x,y,z) = (z-x, y+z)$) posso associare una matrice con colonne pari al numero di incognite e righe pari al numero di operazioni (nell'esempio sarà una 2×3) mettendo nella colonna i-esima le coordinare di $f(e_i)$, con e_i i-esima base canonica.
Seguendo l'esempio sopra si avrà:

$$f(1,0,0) = (-1,0) \text{ ovvero i coefficienti della x}$$

$$f(0,1,0) = (0,1) \text{ ovvero i coefficienti della y}$$

$$f(0,0,1) = (1,1) \text{ ovvero i coefficienti della z}$$

formando così la seguente matrice rappresentativa:

$$M_f \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che moltiplicata per il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, formato dalle componenti del vettore (x,y,z) secondo la base canonica di $\mathbb{R}^3$, da esattamente $\begin{pmatrix} z-x \\ y+z \end{pmatrix}$.
Si può quindi dire che applicare f o moltiplicare per la matrice rappresentativa da lo stesso risultato

Definizione 22. *Formalizziamo quanto detto fin'ora.*
Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita, dim$(V) = n$ e dim$(W) = m$. Siano $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ una base di V e $B' = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ una base di W. Considero l'applicazione $f : V \to W$. In generale si ha che, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, poiché $f(\underline{v}_i) \in W$, esistono dei numeri $a_{1i}, ..., a_{mi} \in \mathbb{R}$ tali che:

$$f(\underline{v}_i) = a_{1i} \cdot \underline{w}_1 + \cdots + a_{mi} \cdot \underline{w}_m$$

Si consideri ora la seguente matrice:

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ottenuta scrivendo nell'ordine i coefficienti a_{ij} di tutte queste combinazioni lineari. Nella prima colonna si avranno le componenti di $f(\underline{v}_i$ e cosi via

rispetto alle B'.
Si prenda un vettore $\underline{v} \in$, *che si scriverà come combinazione lineare di* $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$, *ovvero:*

$$\underline{v} = c_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \underline{v}_n$$

analogamente il vettore $f(\underline{v})$ *si scriverà come combinazione lineare di* $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ *ovvero:*

$$f(\underline{v}) = k_1 \cdot \underline{w}_1 + \cdots + k_m \cdot \underline{w}_m$$

Quindi pero ogni vettore $\underline{v} \in V$ *la matrice* A *ha questa proprietà:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

ovvero moltiplicando A_f *per la colonna delle coordinate di* $\underline{v}$ *si ottiene la colonna delle coordinate (o componenti) di* $f(\underline{v})$ *rispetto alla base* B'.
La matrice A_f *è detta* ***Matrice Associata all'applicazione lineare*** f *rispetto alle basi* B *e* B'.
Se $V = W$ *e* $B = B'$ *allora la matrice associata a* f *lo sarà solo rispetto alla bas e* B

4.0.2 Funzioni lineari

Sono $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Trattiamo le $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, trattiamo quindi vettori e non numeri (salvo gli scalari). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (significa assegnare due funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ quindi $f = (f_1,\ f_2)).f$ è lineare sse f_1 e f_2 sono lineari, inoltre $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ e $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$, dove sono tutti vettori (anche f) tranne λ. So che $f_1(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ e $f_2(x, y) = \gamma \cdot x + \delta \cdot y$ ottengo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x + \beta \cdot y \\ \gamma \cdot x + \delta \cdot y \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare sse $\exists A \to f(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e A è detta matrice rappresentativa di f.

Si ha che:

$v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = (x, y) \to f(v) = f(x \cdot e_1) + f(y \cdot e_2) = x \cdot f(e_1) + y \cdot f(e_2)$

quindi:

$$f(e_1) = (f_1(e_1), f_2(e_2)) = (\alpha, \gamma) = \text{ prima colonna di A}$$

$$e$$

$$f(e_2) = (f_1(e_2), f_2(e_2)) = (\beta, \delta) = \text{ seconda colonna di A}$$

$$A \cdot e_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{ prima colonna}$$

e cosi via per le altre colonne.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x \\ \gamma \cdot x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot y \\ \delta \cdot y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

$f(v)$ è combinazione lineare delle colonne di A $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare si rappresenta con una matrice $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

con i vari e_k vettori di n righe
Se ho invece, per esempio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare si rappresenta con una matrice 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix}$$

con i vari e_k vettori di 2 righe

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da X a Y è lineare allora $ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di X e $Im(f)$ è sottospazio vettoriale di Y Vediamo perché $Im(f)$ è sottospazio vettoriale di Y:

Dimostrazione. $W = Im(f)$, quindi:

- $0 \in W$
- $w_1, w_2 \in Im(f) \to w_1 + w_2 \in W$ allora $\exists v_1, v_2 \in X : f(v_1) = w_1$ *e* $f(v_2) = w_2$, quindi $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$
- se $w \in Im(f) \to \lambda \cdot w \in Im(f)$ infatti: $\exists v \in X : f(v) = w$ ergo: $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)) = \lambda \cdot w$

$\square$

Se W è sottospazio di Y allora $f^{-1}(W)$ è un sottospazio di X e se A è sottospazio di X allora $Im(A)$ è sottospazio di Y.
I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ è di dimensione 1. La dimensione di $\underline{0}$ è 0.
Sia

$$v = (a, b) \to t \cdot v \to (t \cdot a, t \cdot b)$$

sostituisco $x = a \cdot t$ e $y = b \cdot t$ quindi $y = \frac{b}{a} \cdot t$ ... quindi $\searrow$ è un luogo di punti con sottospazi di dimensione 1 (escludendo i casi banali $\underline{0}$ e $\mathbb{R}^2$), ovvero sono tutte le rette passanti per l'origine.
Vado in $\mathbb{R}^3$, qui abbiamo sottospazi di dimensione 1 (generato da un vettore) e 2 (generato da 2 vettori), oltre ai banali. per la dimensione 1 si ha:

$$v = (a, b, c) \to t \cdot v \to (t \cdot a, t \cdot b, t \cdot c)$$

sostituisco $x = a \cdot t$, $y = b \cdot t$ e $z = c \cdot t$ e rappresentano una retta passante per l'origine. Si ha quindi:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{a} \\ t = \frac{y}{b} \\ t = \frac{z}{c} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases}$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 0$$

Per la dimensione 2 si ha il sottospazio vettoriale di tutti i piani passanti per l'origine degli assi.
Si ricorda che retta e piano sono luoghi di punti
Il sottospazio generato da $v_1, ..., v_k$ è l'insieme dei $W = \alpha_1 \cdot_1, ..., \alpha_k \cdot v_k$
$= < \alpha_1 \cdot v_1, ..., \alpha_k \cdot v_k >$

Sia f lineare, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ può essere rappresentato da una matrice A, detta *matrice rappresentativa.* $ker(f) = \{x|\, f(x) = 0\} = \{x|\, A \cdot x = 0\}$ è un sottospazio.
L'insieme delle soluzioni di $A \cdot x = b$ è sottospazio solo se $b = 0$ (per la prima proprietà dei sottospazi).

Definizione 23. *Si ha la definizione del traslato di un sottospazio V: scelgo un $b \in \mathbb{R}^n$ e $b \neq 0$ allora il traslato è l'insieme $W = \{b = b+v,\ v \in V\}$. Geometricamente, per esempio in $\mathbb{R}^2$, sarà una retta parallela a v traslata di b.*
Sia $A \cdot x = b$ vero per un certo x_0, per Rouché-Capelli. Cerco le soluzioni traslate. Ogni altra soluzione di $A \cdot x = b$ si può scrivere come:

$$x_0 + v \ \ dove\ A \cdot v = 0$$

Dimostrazione. Sia $x^{'}$ una qualunque soluzione di $A \cdot x = b$. ho quindi: $A \cdot x^{'} = b$ e v=$x - x_0 \to A \cdot v = A \cdot (x - x_0) = A \cdot x^{'} - A \cdot x_0 = b - b = 0$.
Quindi $v \in ker(f)$ inoltre $x^{'} = x_0 + v$ e il numero di soluzioni dipende dalla dimensione del $ker(f)$. □

Esempio 7.

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2 \cdot x - 2 \cdot y + z = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

cerco:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Avrò di sicuro due vettori dipendenti (i primi 2) e infatti $rg(A) = 2$ Avrò:

$$\begin{cases} x - z = y \\ 2 \cdot x + z = 2 \cdot y \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con det $= 3$. *Ho quindi una sola variabile libera (y) e dim(ker)* $= n - rg$, $n =$ *numero di incognite e* $rg =$ *rango.*
Uso Cramer:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} y & -1 \\ 2 \cdot y & 1 \end{pmatrix}}{3} = y$$

e

$$z = \frac{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & 2 \cdot y \end{pmatrix}}{3} = 0$$

Comporta:

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi si ha il sottospazio: $t \cdot (1, 1, 0)$ *Tornando al sistema di partenza si hanno le seguenti soluzioni:*
Scelgo x_0, *una delle infinite soluzioni. Per esempio:*

$$x_0 = \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ovvero valori che fanno valere la prima equazione.
Quindi le soluzioni saranno solo del tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1 Endomorfismi e Omomorfismi

Siano V e W spazi vettoriali. $f : V \to W$ è lineare se:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$

Sia $V = R[x]$ polinomi di x 3 $f : p(x) \to p^{'}(x)$, derivate di $p(x)$, f è lineare. Si ha che la dimensione di V è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che posso trovare in V. $R[x]$ ha dimensione infinita,
infatti $\forall n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ci sono $n + 1$ vettori linearmente indipendenti. $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n \cdot x^n = 0$ infatti mi assicura, per il teorema fondamentale dell'algebra, che ha solo vettori linearmente indipendenti. Siano V e W spazi vettoriali. $f : V \to W$ lineare

- Se $V = W$ f è un endomorfismo
- $V \neq W$ f è ha un omomorfismo

Sia V di dimensione finita pari a n. Scelgo una base, che chiamo e_1, e_2, ... , e_n e definisco i vari $f(e_i)$. Si ha che:

- $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot e_i$
- $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot f(e_i) = y$

e si ha che i vettori $f(e_i)$ sono un sistema di generatori per l'immagine di f, $Im(f)$. Ovvero:

$$y \in Im(f) \longleftrightarrow \exists x \in V,\ f(x) = y$$

e si ha che

$$dim(Im(f)) \leq dim(f)$$

Esercizio 3. *Costruisco una* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
tale che $Im(f) = \{(x, y),\ y = 2x + 3\}$ *ma non posso perché non passa per l'origine,* $\nexists f$*.*
Cambio retta e scelgo una parallela che passa per l'origine,
$Im(f) = \{(x, y),\ y = 2x\}$ *Questo è un sottospazio vettoriale. Scelgo le basi canoniche di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

e

$$f(e_1) = (0,0)$$
$$f(e_2) = (1,2)$$
$$f(e_3) = (1,2)$$

che va bene, posso scegliere punti uguali, e da dimensione 2. Si ha quindi la seguente matrice associata ad f secondo la base canonica:

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e si ha che:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \cdot x & 1 \cdot y & 1 \cdot z \\ 0 \cdot x & 2 \cdot y & 2 \cdot z \end{pmatrix}$$

4.2 Cambiamento di Base

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ e $B^{'} = \{\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n\}$ delle basi di V. Si quindi che, con α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$

$$\underline{v} = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n$$

$$\underline{w} = \beta_1 \cdot \underline{w}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \underline{w}_n$$

Si ha che, dati $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ e $X^{'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ si ha che esiste una matrice invertibile C tale che:

$$X^{'} = C \cdot X$$

Questa matrice è detta **matrice associata al cambiamento di base**, da B a $B^{'}$. I vettori colonna di X e $X^{'}$ sono le componenti di $\underline{v}$ rispetto a queste basi.
Se D è la matrice associata all'applicazione identica per mezzo di B e $B^{'}$ si ha che $C \cdot D = I$, quindi C è invertibile e $X = C^{-1} \cdot X^{'}$ è la matrice associata al cambiamento di base da $B^{'}$ a B.
Sia f un endomorfismo di V e A sia la matrice associata a f rispetto a B e D quella rispetto a $B^{'}$. Si cerca una relazione tra A e D:
sia $\underline{v}$ un vettore di V e sia $\underline{w} = f(\underline{v})$. Se X e Y sono vettori colonna formati dalle componenti di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ rispettivamente per mezzo di B si ha che $Y = A \cdot X$.

Se invece X' e Y' sono vettori colonna formati dalle componenti di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ rispettivamente per mezzo di B' si ha $Y' = D \cdot X'$. Poiché $X' = C \cdot X$ e $Y' = C \cdot Y$, ovviamente con C invertibile si ha:

$$C \cdot Y = D \cdot C \cdot X \longrightarrow Y = (C^{-1} \cdot D \cdot C) \cdot X$$

Si ha quindi che $C^{-1} \cdot D \cdot C$ è la matrice associata a f per mezzo di B, perciò, essendo la matrice unica, si ha $A = C^{-1} \cdot D \cdot C$

Definizione 24. *Due matrici A e D si dicono* ***simili*** *se esiste una matrice invertibile tale che:*

$$A = C^{-1} \cdot D \cdot C$$

Due matrici sono simili sse rappresentano la stessa applicazione lineare, inoltre due matrici simili hanno lo stesso determinante, infatti;

$$det(A) = det(C^{-1} \cdot D \cdot C) = det(C^{-1}) \cdot det(D) \cdot det(C)$$

$$= det(C)^{-1} \cdot det(D) \cdot det(C) = det(D)$$

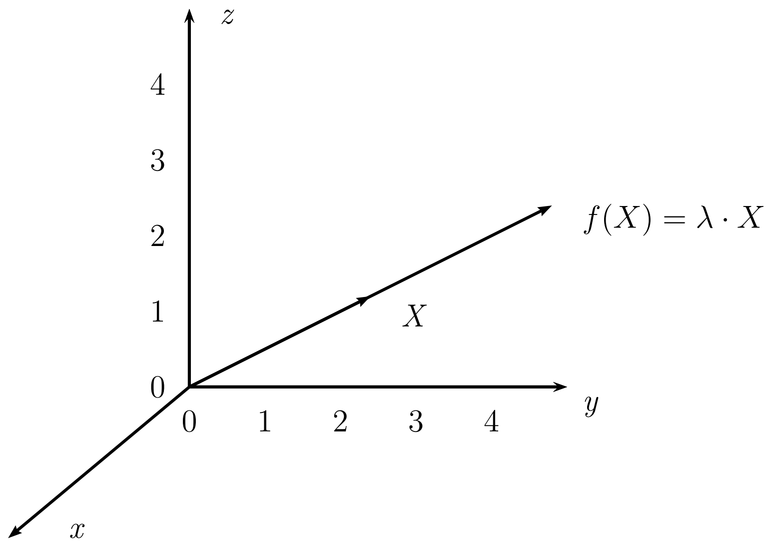
Nota 5 (determinante di endomorfismi)**.** *Si chiama* ***determinante di un endomorfismo*** *f il determinante di una matrice associata a f per mezzo di una qualsiasi base, infatti cambiando base si ottiene una matrice simile a quella data, quindi con lo stesso determinante.*
Se f è un'applicazione con determinate diverso da 0 si ha che f è invertibile.

4.3 Autovalori e Autovettori

Definizione 25. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo.*
*Un vettore non nullo $\underline{v} \in V$ si dice **autovettore** di f se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

*Tale $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore** di f riferito all'autovettore $\underline{v}$. Egualmente si dice che $\underline{v}$ è l'autovettore relativo all'autovalore λ.*



L'applicazione identica ha 1 come solo autovalore e ogni suo vettore è autovettore, infatti $I_V(\underline{v}) = \underline{v}$

Definizione 26. *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V e sia λ un autovalore di f. L'insieme:*

$$E_\lambda = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \lambda \cdot V\}$$

*è detto **autospazio** di V. SI ha che E_λ è sottospazio di V*

4.3.1 Polinomio Caratteristico

Definizione 27. *Sia* $B = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}n\}$ *una base di* V *e sia* A *la matrice associata a* f *per mezzo di* B. *Allora* λ *è un autovalore di* f *se esiste* $\underline{v} \in V$ *tale che* $f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$. *Ergo si ha che:*

$$f(\underline{v}) - \lambda \cdot \underline{v} = 0, \underline{v} \neq 0$$

Perciò si ha che $f - I_V$ *non deve essere invertibile, poiché non è iniettiva essendo il kernel non nullo, essendo* $\underline{v}$ *un suo elemento. Ne segue che la matrice associata a* $f - I_V$ *è:*

$$A - \lambda \cdot I$$

e quindi λ *è un autovalore di* f *sse:*

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

dove $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ *è detto* ***polinomio caratteristico*** *della matrice* A. *Gli autovalori di* A *sono la soluzione del polinomio caratteristico. Se si prende un'altra base* $B^{'}$ *si ha che la matrice associata a* f *per mezzo di* $B^{'}$ *è una matrice* D *simile ad* A*, ne segue che:*

$$\exists C \text{ invertibile} : D = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

proseguendo per sostituzione si ha:

$$det(D - \lambda \cdot I) = det(C^{-1} \cdot A \cdot C - \lambda \cdot I) = det(C^{-1} \cdot A \cdot C - \lambda \cdot C^{-1} \cdot C)$$

$$= det(c^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot I) \cdot C) = det(C^{-1}) \cdot det(A - \lambda \cdot I) \cdot det(C) = det(A - \lambda \cdot I)$$

Si ha quindi che il polinomio caratteristico dipende unicamente da f *e non dalla base scelta per determinare la matrice associata.*

Supponiamo $V = \mathbb{R}^n$ e B la base canonica. Sia $\underline{v} = (x_1, ..., x_n)$ e sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora si ha che $f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ può essere riscritto come:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

dove i vettori colonna della formula sono gli autovettori e λ è l'autovalore di A.
Si nota che il polinomio caratteristico di una matrice di ordine n ha grado n. Non tutte le applicazioni su uno spazio vettoriale hanno autovalori e autovettori (a meno di stare sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi).

Teorema 24. *Se $\underline{v}$ è tale che $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ e $\underline{w}$ è tale che $A \cdot \underline{w} = \gamma \cdot \underline{w}$, con $\lambda \neq \gamma$. Allora $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono indipendenti.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che

$$A \cdot \underline{v} = A \cdot (k \cdot \underline{w}) = k \cdot A \cdot \underline{w} = k \cdot \gamma \cdot \underline{w}$$

ovvero suppongo una dipendenza lineare. Ne segue che $\lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot k \cdot \underline{w}$ che implica:

$$(\lambda - \gamma) \cdot k \cdot \underline{w}$$

ma questo implica che $\lambda = \gamma$, che è assurdo per ipotesi, quindi i vettori sono indipendenti □

Teorema 25. *Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. Allora se f ha $\lambda_1, ..., \lambda_n$ come autovalori distinti si ha che i corrispondenti autovettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Bisogna provare che $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono vettori linearmente indipendenti, ovvero che $\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$ sse $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Si procede per induzione:

- **caso base:** per $n = 1$ è vero perché un vettore non nullo è linearmente indipendente

- **caso passo:** suppongo vero il teorema per $n-1$. Moltiplico l'applicazione lineare per λ_1, ottenendo:

  $$\lambda_1 \cdot \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_1 \cdot \alpha_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

  essendo f un'applicazione lineare si ha:

  $$\alpha_1 \cdot f(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(\underline{v}_n) = \underline{0}$$

  ovvero:

  $$\lambda_1 \cdot \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \alpha_n \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

  dove posso effettuare la sottrazione membro a membro ottenendo:

  $$\alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$$

  essendo per ipotesi $\underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ linearmente indipendenti si ha che $\alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha_n \cdot (\lambda_n - \lambda_1) = 0$. Essendo i vari λ_i diversi tra loro ne segue che $\alpha_2, ..., \alpha_n = 0$ e quindi anche $\alpha_1 = 0$, quindi il risultato è stato dimostrato induttivamente

□

Non vale l'inverso, si possono avere autovettori linearmente indipendenti corrispondenti tutti allo stesso autovalore

4.4 Diagonalizzazione

Definizione 28. *Data una matrice quadrata $n \times n$ ad elementi reali si ha che è simile ad una matrice diagonale (una matrice con valori, anche nulli, unicamente sulla diagonale principale), detto altrimenti che è una **matrice diagonalizzabile** se esiste una matrice C, a valori reali, invertibile tale che:*

$$A = C^{-1} \cdot D \cdot C$$

con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ che ono gli autovalori di A

Dato che da una matrice quadrata A di ordine n, fissata una base B di V, si può costruire un'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da A per mezzo di B si ha:

Teorema 26. *Una matrice A è diagonalizzabile sse la corrispondente applicazione lineare f ha n autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Suppongo che f abbia n autovettori indipendenti $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ relativi agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non necessariamente distinti. Si ha che $B' = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ è una base di V e si ha:

$$\begin{cases} f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 \\ f(\underline{v}_2) = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \\ f(\underline{v}_n) = \lambda_n \cdot \underline{v}_n \end{cases}$$

Quindi la matrice associata a f per mezzo di B' è una matrice diagonale in cui gli elementi della diagonale sono gli autovalori di f.
Sia ora C la matrice di passaggio da B a B'. Si ha che $A = C^{-1} \cdot D \cdot C$ e la prima parte del teorema è dimostrata.
Viceversa, sia A simile ad una matrice diagonale, ovvero $\exists C$, quadrata di ordine n, tale che $A = C^{-1} \cdot D \cdot C$ con D diagonale. Sia $B' = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ la base ottenuta col cambiamento di base determinato da C dalla base $B =$

$\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n\}$. D è la matrice associata a f per mezzo di B' quindi:

$$\begin{cases} f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 \\ f(\underline{v}_2) = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \\ f(\underline{v}_n) = \lambda_n \cdot \underline{v}_n \end{cases}$$

quindi esistono n autovettori linearmente indipendenti e il teorema è dimostrato. $\square$

Una matrice con n autovalori reali distinti è sicuramente diagonalizzabile. Se invece si hanno autovalori coincidenti (ovvero con molteplicità maggiore di 1) occorre vedere se gli autovettori sono linearmente indipendenti. In aiuto si ha il seguente teorema *(comodo ma non esposto a lezione*

Teorema 27 (bonus)**.** *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora A è diagonalizzabile sse la dimensione degli autospazi coincide con la molteplicità algebrica dei corrispondenti autovalori*

Teorema 28. *Sia A una matrice quadrata di ordine n e si suppone A diagonalizzabile. Allora, se $X_1, ..., X_N$ sono autovettori linearmente dipendenti di A e C è la matrice con i vettori $X_1, ..., X_N$ come colonne si ha:*

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = D$$

con D matrice diagonale degli autovalori di A

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con autovalori 1 e -2 e sia

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale con gli autovalori. ho che: $M_d \cdot e_1 = e_1$ e che $B \cdot M_d \cdot e_1 = B \cdot e_1 = prima\ \ colonna = v_1$. Inoltre $A \cdot v_1 = 1 \cdot v_1$ per l'autovalore 1 quindi v_1 è l'autovettore dell'autovalore 1. Per io secondo elemento si ha $M_d \cdot e_2 = -2 \cdot e_2$ e si ha $B \cdot (M_d \cdot e_2) = B \cdot (-2 \cdot e_2) = -2 \cdot B \cdot e_2 = -2 \cdot seconda\ \ colonna$ inoltre $B \cdot e_2 = seconda\ \ colonna = v_2$ e quindi: $A \cdot (B \cdot e_2) = A \cdot v_2 = -2 \cdot v_2$. Ovviamente e_1 e e_2 sono base di $\mathbb{R}^2$, la base canonica.

Nel caso $n \times n$ suppongo $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalori e $v_1, ..., v_n$ autovettori linearmente indipendenti. se chiamo B kla matrice con i v_i sulle colonne questa è una matrice invertibile e posso continuare come per le 2×2: $A \cdot B = B \cdot M_d$ infatti A e M_d coincidono sui valori della base canonica. $M_d \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i$ poi applico B:

$$B \cdot (M_d \cdot e_i) = B \cdot (\lambda_i \cdot e_i) = \lambda_i \cdot B \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i$$

inoltre $B \cdot e_i = v_i$ e $A \cdot B \cdot e_i = A \cdot v_i = \lambda : i \cdot v_1$ e infine:

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = M_d$$

geometricamente. si ha che $B : e_1 \to v_1$ e $B^{-1} : v_1 \to e_1$

Definizione 29. *due matrici A e C si dicono **simili** se hanno la stessa dimensione $n \times n$ e deve esistere una matrice B invertibile tale che:*

$$A = B^{-1} \cdot C \cdot B$$

una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale. A sim C è una relazione di equivalenza, ovvero:

- *A sim A ovvero $\exists B$ tale che $A = B^{-1} \cdot A \cdot B$ ed è l'identità*
- *A sim C implica C sim A ovvero $A = B^{-1} \cdot C \cdot B$ e $C = D^{-1} \cdot A \cdot B$ quindi $B \cdot A = C \cdot B$ e $B \cdot A \cdot B^{-1} = C$ quindi $D = B^{-1}$*
- *vale la transitività: se A sim C e C sim E allora A sim E. si ha: $A = B \cdot C \cdot B^{-1}$ e $C = D \cdot E \cdot D^{-1}$, per sostituzione si ha: $A = B^{-1} \cdot d^{-1} \cdot E \cdot D \cdot B$*

inoltre matrici simili hanno lo stesso determinante. Inoltre matrici simili hanno gli stessi autovalori. Infatti sapendo che : $det(A - \lambda \cdot I) = 0$, con λ autovalore sse è soluzione di quell'equazione. Sia A sim C. Quindi $A = B \cdot C \cdot B^{-1}$ e $C = B \cdot A \cdot B^{-1}$. l'equazione caratteristica di C è: $det(C - \lambda \cdot I) = 0$, sostituisco: $det(B \cdot A \cdot B^{-1} - \lambda \cdot I) = 0$. essendo $I = B \cdot B^{-1}$ si ha $det(B \cdot A \cdot B^{-1} - \lambda \cdot B \cdot B^{-1}) = 0$ e $B \cdot A \cdot B^{-1} - \lambda \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot (A - \lambda \cdot I) \cdot B^{-1}$ quindi: $det(B \cdot (A - \lambda \cdot I) \cdot B^{-1}) = det(B) \cdot det(A - \lambda \cdot B) \cdot det(B^{-1}$ ma $det(B) \cdot det(B^{-1}) = 1$ ergo:

$$det(A - \lambda \cdot I) = det(C - \lambda \cdot I)$$

Teorema 29. *Sia $A = A^T$, ovvero sia simmetrica, allora A è diagonalizzabile*

Capitolo 5

Sistemi Sovradeterminati e Regressione Lineare

Si ha che le incognite possono essere pensate come variabili indipendenti o come gradi di libertà del sistema.
Si impongono dei vincoli (per esempio per una retta sarà $y = m \cdot x + q$).
Per esempio può servire per trovare una retta che approssima il passaggio per, si parla della *retta di regressione lineare*.
Si definisce: $Y = X \cdot \beta$ con $\beta = \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ quindi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

Il sistema può avere o non avere soluzioni; nel caso abbia soluzioni, il Teorema di Rouché-Capelli dà importanti informazioni sulla loro natura. Nel caso non abbia soluzioni, fino ad ora abbiamo evitato ogni ulteriore considerazione. Esistono tuttavia contesti in cui la situazione più frequente è proprio quella della non esistenza di soluzioni. Tale sistema sicuramente non avrà soluzioni se misuriamo con sufficiente precisione le distanze y_i. Nonostante ciò, esso contiene molte informazioni di interesse per le scienze applicate. In questo testo analizzeremo superficialmente solo una di queste.

Ho quindi la retta nel piano definita come $y = m \cdot x + q$ quindi:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$$

.
Definisco il residuo i-esimo di (x_i, y_i) rispetto alla retta l, retta che rappresenta la regressione, (ovvero la distanza tra la retta e il punto):

$$r(l)_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot x_i$$

Ora tra tutte le rette così fatte cerco quella che minimizza i vari scarti.Si ha il metodo dei minimi quadrati con la seguente sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} [r(l)_i]^2$$

quindi:

$$f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot x_i)^2$$

e trovo il minimo (non si dimostra, servono le derivate parziali) di quest'ultima quantità. Si ottengono quindi: definisco:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

e si ha:

$$\beta_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

$$\beta_0' = \overline{y} - \beta_1' \cdot \overline{x}$$

Esempio 8. *prendo un po' di punti:*

$$(-1,0)\,(1,2)\,(2,1)$$

che ovviamente non sono allineati.
calcolo il baricentro $(\overline{x},\overline{y})$ *e si ha:*

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{2}{3},1\right)$$

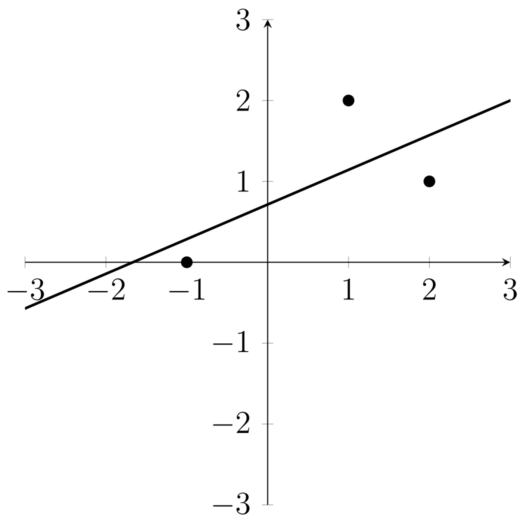
ora calcolo il coefficiente angolare β_1

$$\beta_1^{'} = \frac{(-1-\frac{2}{3})\cdot(-1)+(1-\frac{2}{3})\cdot(2-1)+(2-\frac{2}{3})\cdot(0)}{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{25}{9}+\frac{1}{9}+\frac{16}{9}} = 2\cdot\frac{9}{42} = \frac{3}{7}$$

e

$$\beta_0^{'} = \frac{5}{7}+\frac{3}{7}\cdot x$$

Ecco il grafico dell'esercizio:



5.0.1 Altre proprietà della regressione Lineare

Si ha che $x \cdot x^T$ genera una matrice invertibile sotto determinate ipotesi:

- x ha rango massimo
- $n \geq k+1$

Sia $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \cdots + \beta_k \cdot x_k$.

Si hanno quindi $k+1$ incognite e $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \underline{\beta}$ Da vari esperimenti si ottengono vari $y, \cdots, y^k$ composte a loro volta da vari x_n^k che ne danno le caratteristiche. chiedo che: $y^1 = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1^1 + \cdots + \beta_k \cdot x_k^1$ fino a $y^n = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1^n + \cdots + \beta_k \cdot x_k^n$ gli indici sono il numero dell'esperimento e i pedici il numero dell'incognita. Tutto ciò si può scrivere in forma matriciale con:

$$y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^k \end{pmatrix}$$

e la matrice, $(n \times k+1)$, è:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_k^1 \\ 1 & x_1^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^n & \cdots & x_k^n \end{pmatrix}$$

Quindi x^T è del tipo $k+1 \times n$ e quindi $x \cdot x^T$ è del tipo $k+1, \times k+1$ ed è invertibile. Si ha:

$$x^T \cdot y = x \cdot x^T \cdot \beta$$

e tutto ciò ha senso a livello dimensionale, entrambi lati hanno dimensione $k+1$. Sia $c = x \cdot x^T$, posso scrivere:

$$c^{-1} \cdot x^T \cdot y = c^{-1} \cdot c \cdot \beta$$

e posso dire che:

$$c^{-1} \cdot x^t \cdot y = \beta$$

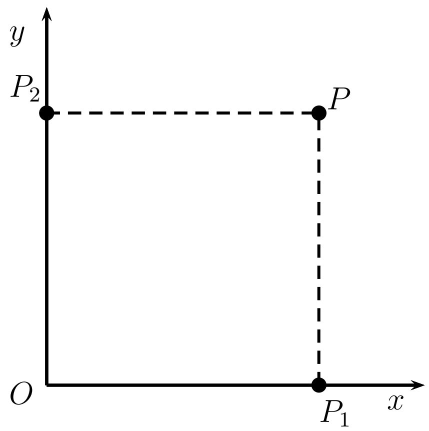
Guardare anche dispense sulla Regressione Lineare, fruibili su Moodle

Capitolo 6

Geometria Analitica

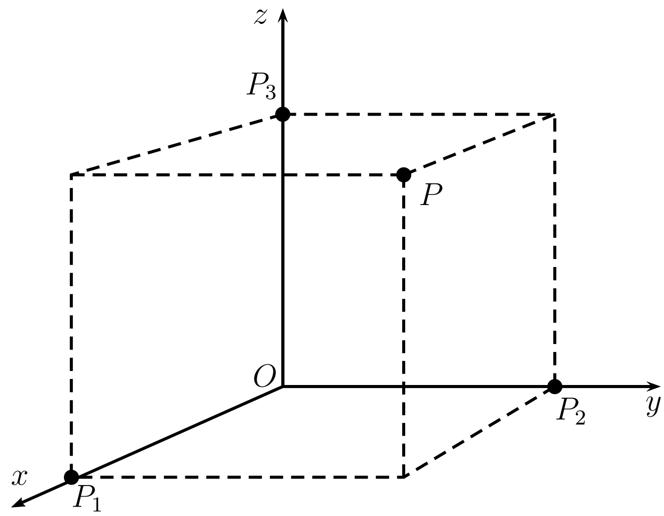
6.1 Coordinate

Considerando il classico piano euclideo fissiamo 2 assi, con due rette ortogonali x (*ascissa*) e y (*ordinata*), dove prendiamo dei segmenti unitari, che si suppone uguale per i due assi, e sia O il punto della loro intersezione, detta *origine degli assi*. Abbiamo appena fissato un **sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O,x,y)**.
Sia ora dato un punto P del piano e siano P_1 e P_2 le sue proiezioni ortogonali sul piano rispettivamente sull'asse x e sull'asse y. Sia x la misura di OP_1 e y quella di OP_2



Si ha una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano euclideo e le coppie ordinate di numeri reali (x, y) e si indica con $P = (x, y)$ o $P \longleftrightarrow (x, y)$. Questa corrispondenza biunivoca identifica i punti del piano con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di reali. A ogni coppia di reali corrisponde un punto del piano.

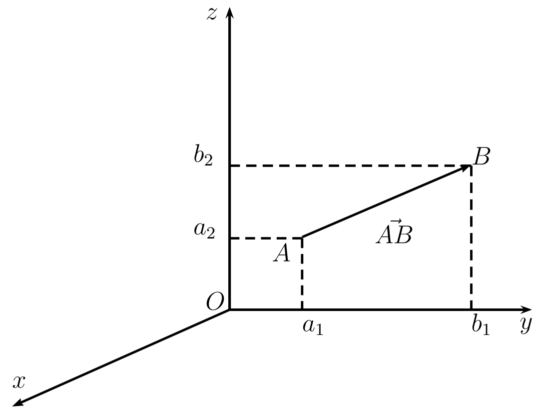
Questo discorso si può fare anche nello spazio tridimensionale, ottenendo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O, x, y, z), dove l'asse z è detto *quota*, ottenendo:



Si ha quindi corrispondenza biunivoca tra i punti P e l'insieme delle terne di numeri reali, ovvero $\mathbb{R}^3$. I tre piani individuati dalle coppie di rette x e y, y e z e x e z sono detti *piani coordinati, piano xy (x,y,0), piano yz (0,y,z) e piano xz (x,0,z).* Inoltre i punti, per esempio su x avranno coordinate $(x, 0, 0)$ e coì via per y e z.

6.2 vettori

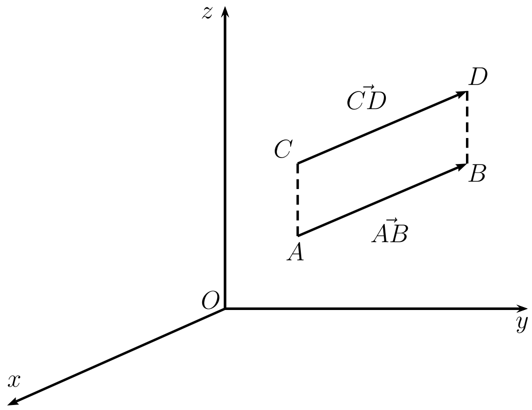
Si chiama vettore applicato, e si indica con $\vec{AB}$ una coppia ordinata di punti A e B del pino o dello spazio. A è detto **punto di applicazione** e B **punto finale**:



Quindi un vettore è un segmento orientato da A a B.

Il verso è detto **verso del vettore** e la direzione individuata dalla retta è detta **direzione del vettore** e la misura è detta **lunghezza o norma o modulo del vettore**, definita come $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$. Direzione e verso si definiscono solo per $A \neq B$.

Definizione 30. *Due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono equivalenti o equipollenti se A, B, C, D sono i vertici di un parallelogramma, ovvero se uno può essere ottenuto dall'altro mediante una traslazione degli assi, quindi i due vettori devono avere stesso verso, direzione e lunghezza:*



Inoltre ogni vettori ha un vettore equivalente applicato all'origine.

Definizione 31. *Si definiscono due operazioni:*

- *si definisce così l'addizione tra punti in uno spazio n-dimensionale: siano $A = (a_1, ..., a_n)$ e $B = (b_1, ..., b_n)$ si ha:*

$$A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

- *si definisce così la moltiplicazione tra un punto in uno spazio n-dimensionale e uno scalare: siano $A = (a_1, ..., a_n)$ e $k \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$k \cdot A = (k \cdot a_1, ..., k \cdot a_n)$$

Teorema 30. *Si enuncia questo teorema nel piano ma resta valido anche in dimensione n*
Siano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ quattro punti del piano. Allora $\vec{AB}$ è equivalente a $\vec{CD}$ sse

$$B - A = D - C$$

Dimostrazione. Si ha che:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \end{cases}$$

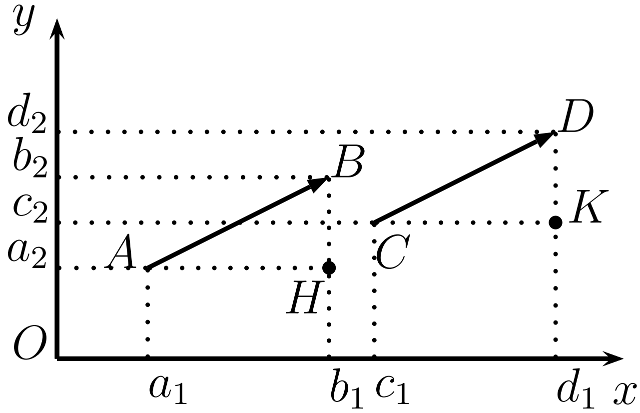
Si portano da A e B le parallele ad x e y, con H il punto di intersezione. Analogamente si fa con C e D, con K intersezione delle parallele. Si ottiene:

$$\begin{cases} AH = b_1 - a_1 \\ BH = b_2 - a_2 \\ CK = d_1 - c_1 \\ DK = d_2 - c_2 \end{cases}$$

e per ipotesi si ha che:

$$\begin{cases} AH = CK = b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \\ BH = DL = b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \end{cases}$$

quindi i triangoli che si vengono a formare, $A\overset{\triangle}{H}B$ e $C\overset{\triangle}{K}D$ sono uguali. Quindi $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ hanno lo stesso verso, la stessa direzione e la stessa lunghezza



□

Ogni vettore $\vec{AB}$ ha un vettore equivalente $\vec{OP}$ applicato all'origine. Grazie al teorema appena enunciato possiamo dire che:

$$P = A - B$$

per comodità di notazione una terna di numeri reali può indicare sia un punto nello spazio che il vettore $\vec{OP}$ applicato nell'origine.

Definizione 32. *Definiamo 3 vettori particolari in* $\mathbb{R}^3$

$$\underline{i} = (1, 0, 0)$$

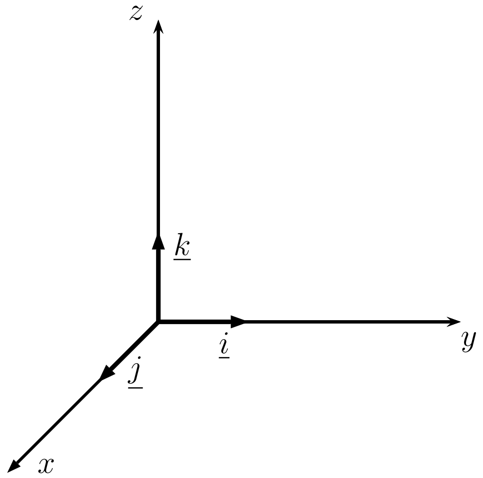
$$\underline{j} = (0, 1, 0)$$

$$\underline{k} = (0, 0, 1)$$

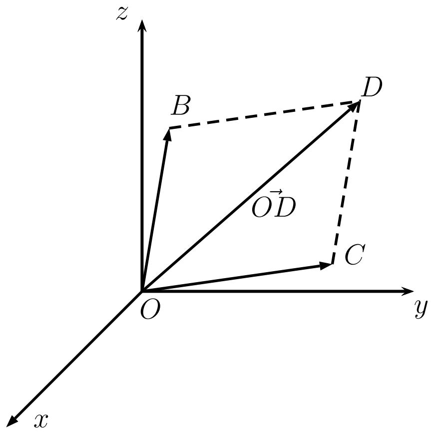
essi vengono detto ***versori degli assi****. Si ha che:*

$$\underline{v} = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$

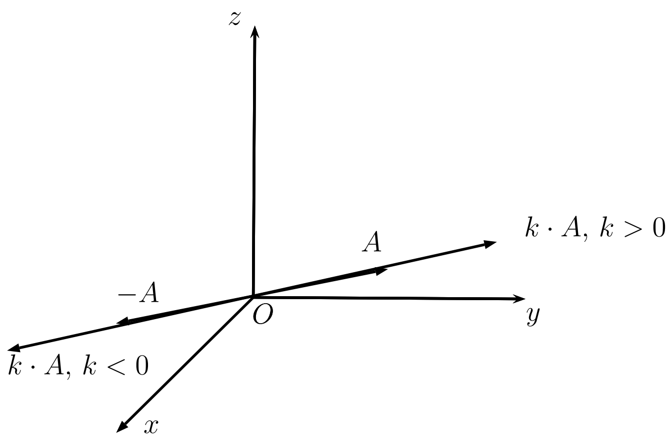
Ovvero sono vettori di norma 1:



Nota 6 (Significato geometrico della somma tra punti)**.** *Sappiamo che due vettori* $\vec{AB}$ *e* $\vec{CD}$ *sono equivalenti se hanno la stessa direzione, verso e lunghezza. Inoltre i 4 punti che li compongono formano i vertici di un parallelogramma, quindi* $B - A = D - C$*. Se prendiamo il punto* A *coincidente con l'origine, si ha* $B = D - C$*, quindi si ha* $D = B + C$ *e* $\vec{OD}$ *forma la diagonale del parallelogramma* $OCDB$*. Quindi se considero i punti* B *e* C *e ne sommo le coordinate ottengo il punto* D*.*
Se invece considero B *e* C *come vettori applicati all'origine e li sommiamo con la regola del parallelogramma otteniamo il vettore* D *applicato all'origine*



Nota 7 (Significato geometrico del prodotto di un numero reale per un punto)**.** *Sia* $A = (x, y, z)$ *e sia* $k \in \mathbb{R}$*. Considero* A *come un vettore non nullo applicato all'origine. Si ha che il vettore* $k \cdot A$ *ha la stessa direzione di* A*, lo stesso verso se* $k > 0$*, il verso opposto se* $k > 0$*, e la lunghezza è quella di* A *moltiplicata per* $|k|$



Ovviamente se $k = 0$ *si otterrà il vettore nullo, ovvero un punto, che sarà esattamente l'origine.*

Definizione 33. *I vettori A e $k \cdot A$ sono detti **vettori paralleli**, se si assume che un vettore nullo sia parallelo a tutti i vettori si ha che questa definizione vale $\forall k \in \mathbb{R}$. Quindi due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono paralleli sse lo sono $B - A$ e $D - C$ ovvero se $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$B - A = k \cdot (D - C) \text{ oppure } k \cdot (B - A) = D - C$$

Definizione 34. *Si dice che un vettore A è **complanare** ai vettori B e C sse $\exists \beta, \gamma$ tali che:*

$$A = \beta \cdot B + \gamma \cdot C$$

6.2.1 Prodotto scalare

Definizione 35. *Siano $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ due vettori nello spazio. Si definisce il loro **prodotto scalare**, indicato con $A \cdot B$ il numero reale dato da:*

$$A \cdot B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot b + A \cdot C$
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $A \cdot A \geq 0$, $\forall A \in \mathbb{R}^3$
- $A \cdot A = 0$, $A = \underline{0} = (0, 0, 0)$

Definizione 36. *Si definisce **norma** del vettore A il numero reale:*

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Quindi, se per esempio $A = (a_1, a_2, a_3)$, si avrà:

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ovviamente vale per $\forall n$. Quindi la norma di un vettore è la sua lunghezza. Inoltre si ha che:

$$\|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

che è la distanza tra i punti A e B nello spazio, ovvero la lunghezza di $\vec{AB}$. Infine si ha che:

$$\|k \cdot A\| = |k| \cdot \|A\|, \forall k \in \mathbb{R}$$

Nota 8. *Grazie alla definizione di norma possiamo dare una nuoca definizione di* ***versore*** *(in quanto è un vettore di norma 1), con la stessa direzione e verso di A:*

$$vers(A) = \frac{A}{\|A\|}$$

Si definiscono altre 2 proprietà:

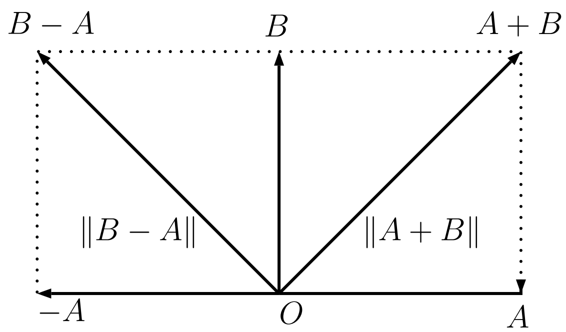
- $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

Con i seguenti teoremi si cercherà di comprendere il significato geometrico del prodotto scalare

Teorema 31. *Due vettori non nulli A e B sono* ***perpendicolari (o ortogonali)*** *sse:*

$$A \cdot B = 0$$

Dimostrazione. Si parte dal seguente grafico, con due vettori A e B non nulli e ortogonali per la dimostrazione:



dal grafico si vede che vale vale:

$$\|A + B\| = \|B - A\|$$

quindi si ha che:

$$\|A + B\|^2 = \|B - A\|^2 \longrightarrow (A + B)^2 = (B - A)^2$$

ovvero:

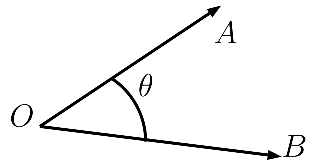
$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 \longrightarrow 4 \cdot A \cdot B = 0$$

e quindi si ha:

$$A \cdot B = 0$$

Quindi la tesi è dimostrata □

Definizione 37. *Si definisce* ***angolo tra due vettori*** *A e B, indicato con θ l'angolo convesso individuato tra A e B:*



Teorema 32. *Siano A e B due vettori non nulli e sia θ l'angolo tra A e B. Allora:*

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \cdot \|B\|}$$

Inoltre dato che $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ si ha che:

$$|A \cdot B| \leq |\, \|A\| \cdot \|B\| \,|$$

questa diseguaglianza è detta ***diseguaglianza di Cauchy***

6.2.2 Prodotto Vettoriale

Definizione 38. *Siano dati due vettori dello spazio:*

$$\underline{v} = (a, b, c) = a \cdot \underline{i} + b \cdot \underline{j} + c \cdot \underline{k}$$

$$\underline{w} = (a_1, b_1, c_1) = a_1 \cdot \underline{i} + b_1 \cdot \underline{j} + c_1 \cdot \underline{k}$$

Si definisce ***prodotto vettoriale*** *tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$, e si indica con $\underline{v} \wedge \underline{w}$ il vettore:*

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (b \cdot c_1 - b_1 \cdot c) \cdot \underline{i} + (a_1 \cdot c - a \cdot c_1) \cdot \underline{j} + (a \cdot b_1 - a_1 \cdot b) \cdot \underline{k}$$

o anche:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (b \cdot c_1 - b_1 \cdot c,\; a_1 \cdot c - a \cdot c_1,\; a \cdot b_1 - a_1 \cdot b)$$

Nota 9. *Per calcolare il prodotto vettoriale si può usare il seguente procedimento:*
Prendo le componenti dei vettori e li metto in matrice e alla prima riga metto i versori e ne calcolo il determinante

Esempio 9. *Siano $\underline{v} = 2 \cdot \underline{i} + 3 \cdot \underline{j} + \underline{k}$ e $\underline{w} = 4 \cdot \underline{i} + \underline{j} - 2 \cdot \underline{k}$. Si avrà:*

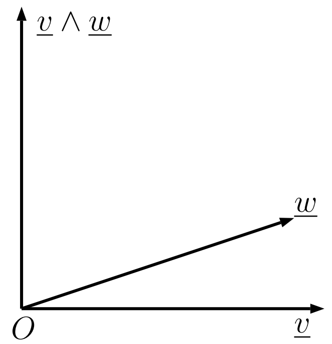
$$\underline{v} \wedge \underline{w} = det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{i} \cdot (-6 - 1) - \underline{j} \cdot (-4 - 4) + \underline{k} \cdot (2 - 12) = -7 \cdot \underline{i} + 8 \cdot \underline{j} - 10 \cdot \underline{k}$$

Ecco alcune proprietà del prodotto vettoriale:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{u}$
- $(h \cdot \underline{v}) \wedge \underline{w} = h \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}),\ h \in \mathbb{R}$
- $\underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = 0$ *e* $\underline{w} \cdot (\underline{w} \wedge \underline{v})$ ovvero si ha che $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è perpendicolare ad entrambi i vettori
- $(\alpha \cdot \underline{v}) \wedge \underline{v} = \underline{0},\ \alpha \in \mathbb{R}$ ovvero il prodotto di due vettori paralleli è nullo
- se $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ allora $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{v}$ oppure $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{w}$ ovvero se due vettori hanno il prodotto vettoriale nullo allora sono paralleli

Inoltre i tre vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$ formano una terna destrorsa, ovvero rappresentabile con la *regola della mano destra*, dove il pollice rappresenta un vettore, l'indice un altro e il prodotto tra i due sarà il vettore uscente dal palmo.



Nota 10. *Si cerca ora il modo di calcolare il modulo del prodotto vettoriale. Sappiamo che:*

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|^2 = (b \cdot c_1 - b_1 \cdot c)^2 + (a_1 \cdot c - a \cdot c_1)^2 + (a \cdot b_1 - a_1 \cdot b)^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1) = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2$$

quindi si ha anche la seguente proprietà:

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2$$

Ma quindi, ricordando il prodotto scalare tra vettori si ha:

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 \cdot \cos^2\theta$$
$$= \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 \cdot (1 - \cos^2\theta) = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2 \cdot \sin^2\theta$$

Quindi si ha che:

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot \sin\theta$$

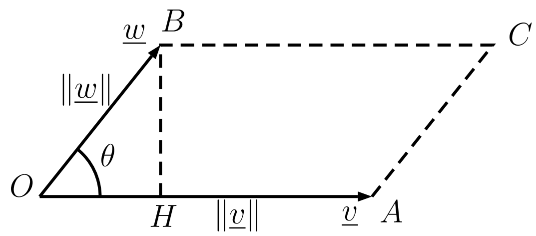
inoltre si ha $\sin\theta \geq 0$*, essendo* θ *un angolo convesso e poiché:*

$$\|\underline{w}\| \cdot \sin\theta = BH$$

si ha:

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot \sin\theta = OA \cdot AH$$

quindi il prodotto vettoriale non è altro che l'area del parallelogramma $OACB$ *individuato da* $\underline{v}$ *e* $\underline{w}$



6.2.3 Dipendenza e indipendenza lineare

In questa sezione si analizza il significato geometrico della dipendenza lineare
Innanzitutto si ricorda che due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti se $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{v} = k \cdot \underline{w}$ o $\underline{w} = k \cdot \underline{v}$. Inoltre se si ha $\lambda_1 \cdot \underline{v} + \lambda_2 \cdot \underline{w}$ con λ_1, λ_2 non entrambi nulli accade che:

- se $\lambda_1 \neq 0$ si ha: $\underline{v} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \underline{w}$
- se $\lambda_2 \neq 0$ si ha: $\underline{w} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \underline{v}$

quindi 2 vettori nel piano (o nello spazio etc...) sono linearmente dipendenti sse sono paralleli. Inoltre 2 vettori del piano $\underline{v}_1 = a_1 \cdot \underline{i} + b_1 \cdot \underline{j}$ e $\underline{v}_2 = a_2 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}$ sono paralleli sse $\exists\, \lambda_1$, λ_2, non entrambi nulli, tali che:

$$\lambda_1 \cdot (\underline{v}_1 = a_1 \cdot \underline{i} + b_1 \cdot \underline{j}) + \lambda_2 \cdot (\underline{v}_1 = a_2 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}) = 0 \cdot \underline{i} + o \cdot \underline{j}$$

cioè sse solo se il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \lambda_1 + a_2 \cdot \lambda_2 = 0 \\ b_1 \cdot \lambda_1 + b_2 \cdot \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle, quindi si ha:

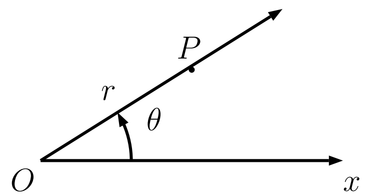
$$det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

che quindi è la *condizione necessaria* affinché due vettori nel piano siano paralleli.
Lo stesso discorso vale nello spazio con tre vettori complanari (ovviamente si avrà il determinante di una matrice 3×3 con le 3 componenti dei 3 vettori).

Teorema 33. *Siano dati 3 vettori dello spazio, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, non complanari. Allora ogni altro vettore$\underline{v}$ dello spazio è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e formano una* ***base*** *per i vettori dello spazio e quindi le componenti λ_1, λ_2 e λ_3 di $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono uniche. Quindi i vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s$, con $s \geq 4$, dello spazio sono sempre linearmente indipendenti (nel piano saranno con $s \geq 2$ etc...).*

6.3 Coordinate Polari

Oltre le coordinate cartesiane esiste un altro sistema di coordinate: le **coordinate polari**:
Si fissa nel piano un punto O detto **origine** o **polo**.Da O si manda una retta orientata x detta **asse polare**. Si fissa un verso positivo (antiorario) per le rotazioni e il radiante come unità degli angoli. Si prende ora un punto $P \neq O$ e chiamo r la distanza tra P e O e θ l'angolo che si viene a formare tra x (il semiasse polare positivo) e la semiretta OP (θ viene detto **anomalia**). Si ha che r e θ sono dette le **coordinate polari** di P:



All'origine si assegna $r = 0$ e θ indefinito. Per ogni valore si ha un solo valore di $r > 0$ associato e infiniti valori di θ che differiscono per multipli di $2 \cdot \pi$, quindi per comodità si definisce $\theta \in [0, 2 \cdot \pi)$ così da avere un solo θ associato.
Suppongo ora di avere un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine uguale a quelle di un sistema di coordinate polari, con l'asse polare coincidente con l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate scelto in modo che il semiasse positivo delle x si sovrapponga al semiasse positivo delle y con una rotazione positiva di $\frac{\pi}{2}$ radianti. Cerco la formula di passaggio tra i due sistemi di coordinate.

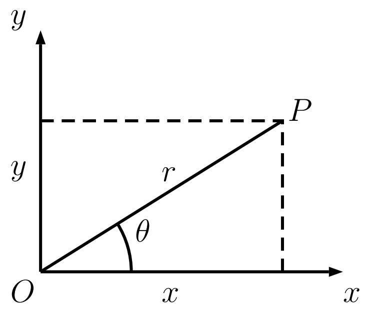
Sia $P = (x, y) = (r, \theta)$. Si ha che:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

viceversa, se $P \neq O$ si ha:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Graficamente si ha:

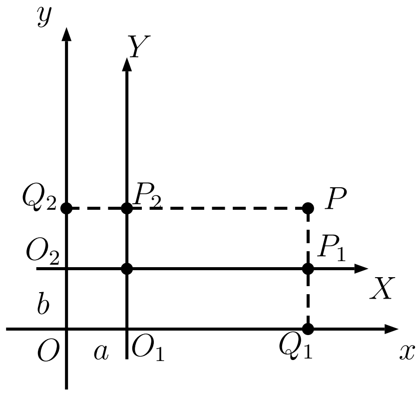


6.3.1 Traslazioni e Rotazioni

In geometria analitica è spesso comodo lavorare con un sistema di coordinate diverso da quello si partenza. Si supponga di fissare un punto P in un sistema di coordinate $(O; x, y)$ che quindi avrà coordinate x, y. Nello stesso piano fisso un nuovo sistema di coordinate $(O'; X, Y)$, che per comodità hanno la stessa unità di misura. Si vuole esprimere P in $(O'; X, Y)$ per mezzo delle vecchie coordinate $(O; x, y)$. Si hanno due opzioni: la **traslazione degli assi** e la **rotazione degli assi**.

traslazione degli assi

Suppongo che l'asse X sia parallelo ed equiverso all'asse x e che l'asse Y sia parallelo ed equiverso all'asse y. In questo caso per ottenere il nuovo sistema si usa la traslazione degli assi.
Siano (a, b) le coordinate di $O^{'}$ rispetto a $(O; x, y)$. Siano (x, y) le coordinate di P rispetto al vecchio sistema e (X, Y) quelle rispetto al nuovo. Si ha:



e si hanno:

$$O^{'}P = X, \quad O^{'}P_2 = Y, \quad OO_1 = O_2O^{'} = a,$$
$$OO_2 = O_1O^{'} = b, \quad OQ_1 = x, \quad OQ_2 = y$$

da cui le seguenti formule:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \quad \textit{da cui} \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

che sono le formule di trasformazione di coordinate nel caso in cui il nuovo sistema di riferimento sia traslato rispetto al primo.