Tabelle Fondamenti Logico Matematici

Deduzione Naturale Proposizionale Varie Logiche

connettivo/falso	introduzione	eliminazione
$\wedge$	$\dfrac{A,B}{A\wedge B}i\wedge$	$\dfrac{A\wedge B}{A}e\wedge \quad \dfrac{A\wedge B}{B}e\wedge$
$\vee$	$\dfrac{A}{A\vee B}i\vee \quad \dfrac{B}{A\vee B}i\vee$	$\dfrac{A\vee B, \begin{matrix}\cancel{A}\\ \pi'\\ C\end{matrix}, \begin{matrix}\cancel{B}\\ \pi''\\ C\end{matrix}}{C}e\vee$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{A}\\ \pi\\ B\end{matrix}}{A\rightarrow B}i\rightarrow$	$\dfrac{A,A\rightarrow B}{B}e\rightarrow$
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{A}\\ \pi\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}i\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\neg A}\\ \pi\\ \bot\end{matrix}}{A}e\neg$
$\bot$	$\dfrac{A,\neg A}{\bot}i\bot$	$\dfrac{\bot}{B}e\bot$

- **La regola dell'eliminazione del $\bot$ non si può usare in logica minimale**
- **La regola dell'introduzione del $\neg$ non si può usare in logica minimale**
- **La regola dell'eliminazione del $\neg$ non si può usare in logica intuizionistica**
- **Le altre regole sono valide sia per la logica classica che per quella intuizionistica che per quella modale**

Deduzione Naturale Predicativa Varie Logiche

quantificatore	introduzione	eliminazione
$\exists$	$\dfrac{P(a)}{\exists x P(x)}i\exists$	$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \exists x P(x),\end{matrix} \begin{matrix}\cancel{P(a)}\\ \pi_1\\ C\end{matrix}}{C}e\exists$
$\forall$	$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ P(a)\end{matrix}}{\forall x P(x)}i\forall$	$\dfrac{\forall x P(x)}{P(a)}e\forall$

- **Le regole valgono sia per logica classica che intuizionistica**

Tableaux Logica Intuizionistica Proposizionale

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\vee$	$\frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}T\vee$	$\frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}F\vee$
$\to$	$\frac{S,T(A\to B)}{S,FA/S,TB}T\to$	$\frac{S,F(A\to B)}{S,TA,FB}F\to$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$

Tableaux Logica Intuizionistica Proposizionale Estesi con Ripetizioni

connettivo	T-regola con eventuale ripetizione
$\to$	$\frac{S,T(A\to B)}{S,FA,T(A\to B)/S,TB}T\to$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA,T(\neg A)}T\neg$

Tableaux Ottimizzati Logica Intuizionistica Proposizionale

	T-regola	F-regola	F_C-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$	$\frac{S,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}F_C\wedge$
$\vee$	$\frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}T\vee$	$\frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}F\vee$	$\frac{S,F_C(A\vee B)}{S,F_CA,F_CB}F_C\vee$
$\to$	$\frac{S,T(A\to B)}{S,FA,T(A\to B)/S,TB}T\to$	$\frac{S,F(A\to B)}{S_C,TA,FB}F\to$	$\frac{S,F_C(A\to B)}{S_C,TA,F_CB}F_C\to$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,F_CA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S_C,TA}F\neg$	$\frac{S,F_C(\neg A)}{S_C,TA}F_C\neg$

- S_C **è definito come l'insieme** S **meno l'insieme delle formule segnate con** F

Ottimizzazioni Implicazione Logica Intuizionistica Proposizionale

Antecedente Ant	**T** $\to$
$Ant = A$ *o* $Ant = \neg A$	$\frac{S,TA\to B}{S,FA/S,TB}T\to AN$
$Ant = A\wedge B$	$\frac{S,T(A\wedge B)\to C}{S,T(A\to(B\to C))}T\to\wedge$
$Ant = A\vee B$	$\frac{S,T(A\vee B)\to C}{S,TA\to C,TB\to C}T\to\vee$
$Ant = A\to B$	$\frac{S,T(A\to B)\to C}{S,FA\to B,TB\to C/S,TC}T\to\to$

Implicazione segnata (*versione corretta ma non completa di* $T\to$)

$$\frac{S,TA\to B}{S,F_CA/S_C,TB}\overline{T\to}$$

Traduzione da Logica Classica Predicativa a Intuizionistica

Si ha $\vdash_{CL} A \iff \vdash_{INT} \tau(A)$ con:

- $\tau(A) = \neg\neg A$, con A atomica
- $\tau(A \wedge B) = \tau(A) \wedge \tau(B)$
- $\tau(A \to B) = \tau(A) \to \tau(B)$
- $\tau(A \vee B) = \neg(\neg\tau(A) \wedge \neg\tau(B))$
- $\tau(\neg A) = \neg\tau(A)$
- $\tau(\forall x A(x)) = \forall x \tau(A(x))$
- $\tau(\exists x A(x)) = \neg\forall x \neg\tau(A(x))$

Tableaux Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\dfrac{S{,}T\,\exists x A(x)}{S{,}T A(a)}$ (con a nuovo)	$\dfrac{S{,}F\,\exists x A(x)}{S{,}F A(a)}$
$\forall$	$\dfrac{S{,}T\,\forall x A(x)}{S{,}T A(a)}$	$\dfrac{S{,}F\,\forall x A(x)}{S_T{,}F A(a)}$ (con a nuovo)

Tableaux Logica Intuizionistica Predicativa Estesi con Ripetizioni

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\dfrac{S{,}T\,\exists x A(x)}{S{,}T A(a)}$ (con a nuovo)	$\dfrac{S{,}F\,\exists x A(x)}{S{,}F A(a)}$
$\forall$	$\dfrac{S{,}T\,\forall x A(x)}{S{,}T A(a){,}T\,\forall x A(x)}$	$\dfrac{S{,}F\,\forall x A(x)}{S_C{,}F A(a)}$ (con a nuovo)

Tableaux Ottimizzati Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore	F_C-regola
$\exists$	$\dfrac{S{,}F_C\,\exists x A(x)}{S{,}F_C A(a){,}F_C\,\exists x A(x)}$
$\forall$	$\dfrac{S{,}F_C\,\forall x A(x)}{S_C{,}F A(a){,}F_C\,\forall x A(x)}$ (con a nuovo)

Ottimizzazioni Implicazione Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore Ant	$T \to$
$\exists$	$\dfrac{S{,}T\,\exists x A(x) \to B}{S{,}T(\forall x(A(x) \to B))}$
$\forall$	$\dfrac{S{,}T\,\forall x A(x) \to B}{S{,}F\,\forall x A(x){,}T\,\forall x A(x) \to B / S{,}T B}$

Logica di Kuroda

Si usano le regole dei tableaux Intuizionistici predicativi tranne le seguenti regole:

$$\frac{S, F_C\,\forall x A(x)}{S_C, F_C A(a)} \overline{F_C \forall} \text{ (con a nuovo)}$$

$$\frac{S, T\forall x A(x) \to B}{S, F\forall x A(x), F_C \neg\exists x(A(x) \to B)/S, TB} \overline{T \to \forall}$$

$$\frac{S_C, TA \to B}{S_C, F_C A/S_C, TB} CL\text{-}T \to$$

$\dfrac{S}{S_C}AT$ (se S contiene formule segnate F solo atomiche, più le T e F_C qualsiasi)

Logica T

- la logica classica, con tutte le sue proprietà
- l'assioma $\Box A \to A$
- l'assioma $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- la regola di inferenza che dice che se è dimostrabile A allora è dimostrabile $\Box A$, ovvero $\vdash A \implies \vdash \Box A$

Logica S_4

- logica T
- l'assioma $\Box A \to \Box\Box A$

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\vee$	$\frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}T\vee$	$\frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}F\vee$
$\to$	$\frac{S,T(A\to B)}{S,FA/S,TB}T\to$	$\frac{S,F(A\to B)}{S,TA,FB}F\to$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$

operatore	T-regola	F-regola
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,TA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_\Box,FA}F\Box$

$$S_\Box = \{T\Box X | T\Box X \in S\}$$

ovvero in $S_\Box$ tengo solo le formule di S che sono T "necessarie"

Regola con ripetizione

$$\frac{S, T(\Box A)}{T(\Box A), S, TA} T\Box$$

Tableaux Ottimizzati per Logica S_4

connettivo	T-regola	F-regola	T$_C$-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,FA,T_C(\neg A)}T_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_CA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA}F\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_CY | T_CY \in S\}$$

Ovvero in S_C manteniamo sia le formule $T\Box$ che le formule T_C di S

Logica K_1

- logica S_4
- l'assioma $\Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$

Tableaux Ottimizzati per Logica K_1

connettivo	T$_C$-regola	F$_C$-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$	$\frac{S_C,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}F_C\wedge-f$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,F_CA}T_C\neg$	$\frac{S,F_C(\neg A)}{S,T_CA}F_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$	$\frac{S,F_C(\Box A)}{S_C,F_CA}F_C\Box$

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_CY | T_CY \in S\} \cup \{F_CZ | F_CZ \in S\}$$

Ovvero in S_C manteniamo sia le formule $T\Box$ che le formule T_C che quelle F_C di S
T-regole e F-regole come S_4

Regola di Finning

$$\frac{S}{S_C}TH, \;\; S_C \neq \emptyset$$

Se non posso applicare la regola di Finning, avendo quindi S e non S_C:

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)}F_C\wedge$$

Logica $K_{1.1}$

- logica S_4
- l'assioma $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$

Tableaux Ottimizzati per Logica $K_{1.1}$

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB} T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB} F\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA} T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA} F\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_C A} T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA,F_C(A\wedge\neg\Box A)} F\Box$

connettivo	T_C-regola	F_C-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_C A,T_C B} T_C\wedge$	$\frac{S_C,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_C A/S_C,F_C B} F_C \wedge -f$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,F_C A} T_C\neg$	$\frac{S,F_C(\neg A)}{S,T_C A} F_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_C A} T_C\Box$	$\frac{S,F_C(\Box A)}{S_C,F_C A} F_C\Box$

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\} \cup \{F_C Z | F_C Z \in S\}$$

Ovvero in S_C manteniamo sia le formule $T\Box$ che le formule T_C che quelle F_C di S

Regola di Finning

$$\frac{S}{S_C} TH, \;\; S_C \neq \emptyset$$

Se non posso applicare la regola di Finning, avendo quindi S e non S_C:

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)} F_C\wedge$$

Logica S_5

- logica S_4
- l'assioma $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Tableaux Ottimizzati per Logica S_5

connettivo	T-regola	F-regola	T_C-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,FA,T_C(\neg A)}T_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_CA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA,[S_u]}F\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\}$$

Regola di jumping

$$\frac{S, [S_u]}{S_C, [S_{u'}], sB} JP, \text{ con } sB \in S_u$$

Ovvero con la regola di jumping si tolgono da S tutte le formule T, che non siano necessitate, e F e da $[S_u]$ si ottiene $[S_{u'}]$ estraendo la formula sB

$$[S_u] = S - S_C$$

ovvero $[S_u]$ è l'insieme che contiene solo le formule di S segnate T ed F

$$[S_{u'}] = (S_u \cup \{S - S_C\}) - \{sB\}$$

quando si applica la regola di jumping si estrae da $[S_u]$ una formula segnata T o F, che chiamo sB, e chiamo l'insieme rimanente $[S_{u'}]$