Fisica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

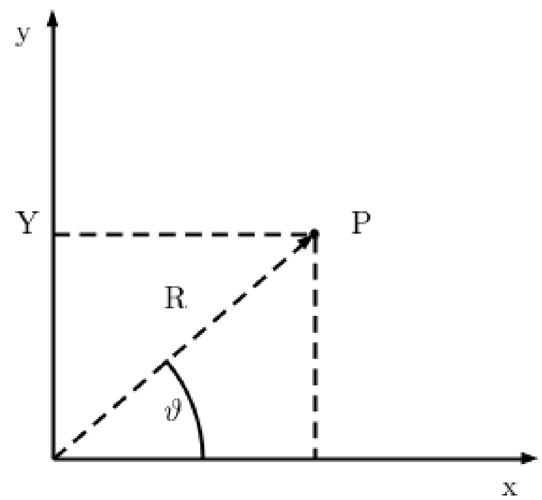
Capitolo 2

Meccanica

Si comincia con la Meccanica, la branca della fisica classica che studia il moto dei corpi, esprimendolo con leggi quantitative. Si ha la seguente divisione:

- **Cinematica**, dove si studia il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause
- **Dinamica**, dove si studia l'influenza delle forze nel moto

Si utilizzano i cosiddetti *punti materiali* per semplificare lo studio dei fenomeni. Un punto materiale infatti non ha estensione ma è dotato di una massa. In pratica ha dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove.
Un altro strumento essenziale per lo studio dei fenomeni è il *sistema di riferimento* mediante gli assi ortogonali:



e si hanno le seguenti formule:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$sin\vartheta = \frac{Y}{R}$$

$$cos\vartheta = \frac{X}{R}$$

$$tan\vartheta = \frac{Y}{X}$$

$$\vartheta = arctan\frac{Y}{X}$$

e per gli angoli si usano i *radianti* in quanto adimensionali. L'angolo in radianti infatti è:

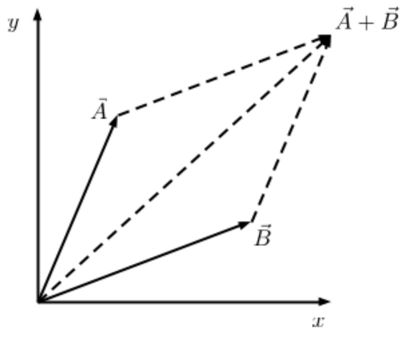
$$\vartheta_{rad} = \frac{Lunghezza\_arco}{raggio}$$

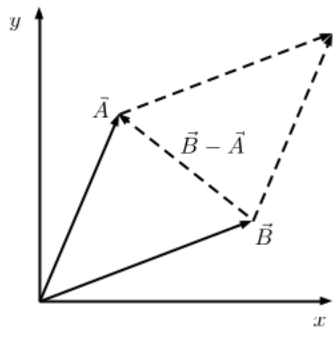
dove le due unità di misura esprimenti una lunghezza vengono "semplificate". Si ricordano inoltre le basi del calcolo vettoriale. Tra due vettori posso fare somme e sottrazioni La somma non è altro che la diagonale maggiore del parallelogramma che si forma tra i due vettori. Inoltre se $\vec{A} = (a_x, a_y)$ e $\vec{B} = (b_x, b_y)$ si ha:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

la sottrazione è la diagonale minore e:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$





2.1 Cinematica

Innanzitutto qualche definizione:

- **Moto:** posizione in funzione del tempo in un dato sistema di riferimento
- **Traiettoria:** luogo dei punti attraversati dal punto materiale in movimento
- **Velocità:** variazione della posizione
- **Accelerazione:** variazione della velocità
- **Quiete:** assenza di movimento in un certo sistema di riferimento

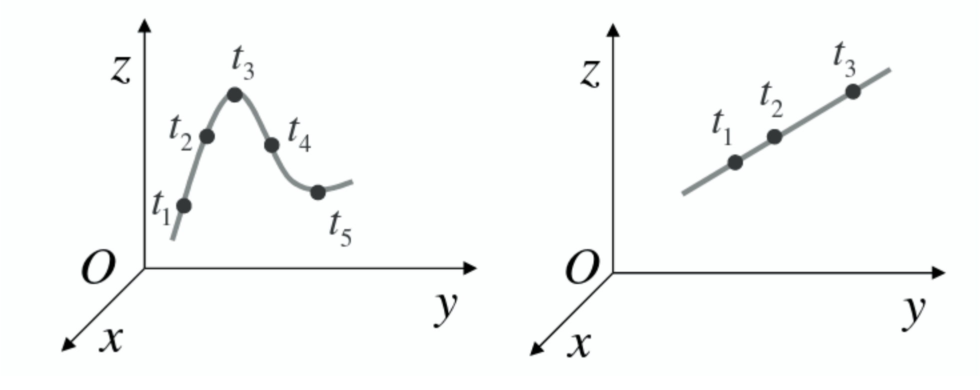
Come grandezze fondamentali del movimento si hanno quindi *posizione*, *velocità* e *accelerazione*, tutte e tre funzioni del tempo.

2.1.1 Moto Rettilineo

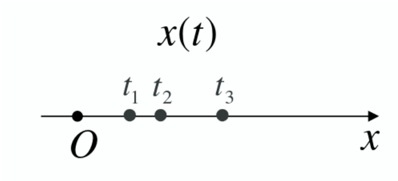
Rappresentando su un piano cartesiano avente la posizione come ordinata e il tempo come ascisse e rappresentando vri momenti del moto si ottiene una curva. Questa curva rappresenta la legge oraria.
Si ha la traiettoria più semplice, una retta. Il moto del punto quindi è esprimibile come funzione solo di

$$\vec{x}(t)$$

, che sarà la nostra equazione del moto.
Si passa quindi da un sistema di riferimento a 3 assi:



ad uno a un asse:



La scelta dell'origine della coordinata spaziale ($x = 0$) e di quella temporale ($t = 0$) sono arbitrari.
Si definisce la **distanza** come una quantità scalare la lunghezza del tratto percorso da un punto per cambiare posizione.

Velocità

Per ottenere la velocità di un punto materiale ne misuro la posizione in due diversi istanti di tempo. Si ha:

- **Spostamento:** $\Delta\vec{x} = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$ è un vettore che descrive la differenza di posizione tra due punti. Viene misurato in *Metri (m)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce in $\frac{1}{299792458}s$
- **Intervallo di Tempo:** $\Delta t = t_2 - t_1$ che viene misurato in *Secondi (s)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il secondo è definito come la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra 2 livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133

Possiamo quindi definire la **Velocità Media:**

$$v_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{2}$$

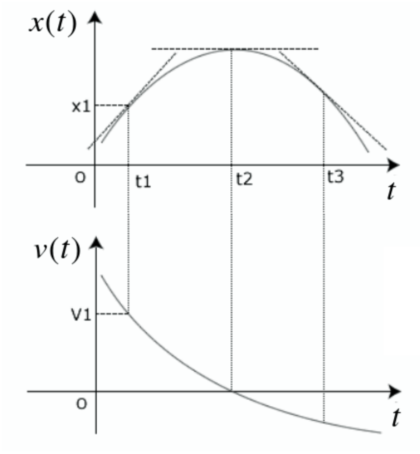
Questa grandezza però non fornisce nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Provo a spezzare il moto in più intervalli temporali al fine di studiarne ogni variazione. Si ottiene quindi la **Velocità Istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerata. Il segno della velocità indica la direzione del moto sull'asse delle ascisse. La velocità è a sua volta funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

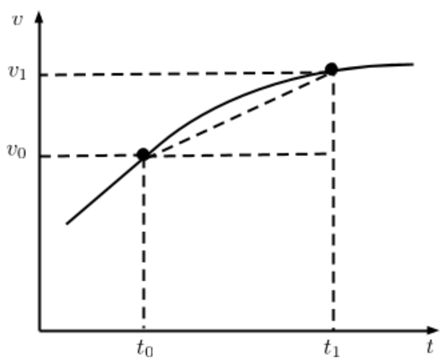
che è ben rappresentata dai seguenti grafici:



Se v è costante si parla di *Moto Rettilineo Uniforme*.
Si ha quindi:

$$\Delta x = v\Delta t \rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$$

che vale anche per v non costante ma per intervalli di tempo approssimati 0, infatti tra brevi istanti di tempo si può approssimare la velocità istantanea $v(t) = \frac{dx}{dt}$ come una velocità costante. Disegniamo ora un grafico velocità tempo con la curva rappresentante la legge oraria, indicando velocità e tempo in due momenti del moto:



calcolare l'area sottesa alla curva implica calcolare la differenza di posizione. Approssimo la curva ad una retta e procedo col banale calcolo del trapezio sottostante:

$$A = (t_1 - t_0)(\frac{\vec{v_1} - \vec{v_0}}{2}) + (t_1 - t_0)\vec{v_0} = (\frac{\vec{v_1} - \vec{v_0}}{2})\Delta t + \vec{v_0}\Delta t$$

$$A = \frac{\Delta t}{2}(\vec{v_1} - \vec{v_0} + 2\vec{v_0}) = \frac{\Delta t}{2}(\vec{v_0} + \vec{v_1}) = \Delta t v_{med}$$

Nota quindi l'equazione del moto

$$\vec{x}(t)$$

possiamo ricavare $v(t)$ derivando, infatti la posizione si ottiene, partendo dal grafico sopra, riducendo al massimo gli intervalli di tempo e calcolando la somma delle aree dei vari rettangolini .
Si può procedere anche al calcolo di

$$\vec{x}(t)$$

avendo nota $\vec{v}(t)$. Sappiamo che lo spostamento totale è: $\Delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} v_{m_i}\Delta t$ e che, per intervalli infinitesimi $dx = \vec{v}(t)dt$. Si ha quindi:

$$\Delta x = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx}_{\vec{x}(t)-x_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

che è l'equazione del moto rettilineo per una velocità qualunque.
Possiamo ora anche riscrivere la forma completa della velocità media, essendo $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$ si ha:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

Possiamo analizzare ora il *moto rettilineo uniforme* con v costante. Essendo v costante, e non più dipendente dal tempo, può essere portata fuori dall'integrale:

$$\vec{x}(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$

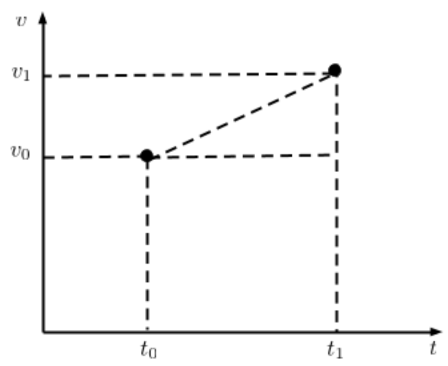
che è l'equazione generale del moto rettilineo uniforme dove lo spostamento varia linearmente col tempo.
La velocità di esprime in metri al secondo ($\frac{m}{s}$ o m/s) o in kilometri all'ora $\frac{km}{h}$ o km/h). Per passare da km/h a m/s divido la grandezza in km/h per 3,6, per passare da m/s a km/h moltiplico la grandezza in m/s per 3,6.

Accelerazione

Si ha che in due istanti di tempo diversi abbiamo due diverse velocità: $\vec{v}(t_1) = \vec{v_1}$ e $\vec{v}(t_2) = \vec{v_2}$. Si definisce l'**Accelerazione Media:**

$$a_m = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Procediamo come per la velocità, con un grafico accelerazione-tempo e la legge del moto, calcolando l'area sottostante ottengo la differenza di posizione. Si ha una situazione più semplice ancora perché avendo a costante (e quindi $\overline{a}(t) = a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ e quindi $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$) essa può essere rappresentata come una retta l'area sottostante, che questa volta è letteralmente un trapezio senza approssimazioni, è lo spostamento.



ovvero:

$$A = x - x_0 = t_1 - v_0 + \frac{t_1(v_1 - v_0)}{2} = t_1 \frac{v_1 + v_0}{2}$$

e quindi

$$v_1 = v_0 + at_1$$

unendo con $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$ si ottiene:

$$x - x_0 = \frac{t_1}{2}(v_0 + at_1 + v_0) = \frac{t_1}{2}(2v_0 + at_1) = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

$$\downarrow$$

$$x = x_0 + v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

Ora, come per la velocità, analizziamo intervalli di tempo infinitesimi ricordando che anche l'accelerazione è una funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo e si ha che:

- $a = 0$ implica un moto rettilineo uniforme (si deriva una costante, v, e si ottiene 0)
- $a > 0$ implica una velocità crescente
- $a < 0$ implica una velocità decrescente

Proviamo ora a risalire a $\vec{v}(t)$ conoscendo *a(t)*. Sappiamo che $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt$. Risolviamo quindi l'equazione differenziale :

$$\int_{\vec{v_0}}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

che è l'equazione generale per la velocità, dove, nel caso di $a \neq 0$, ovvero di accelerazione costante, si ha:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + a\int_{t_0}^{t} dt = \vec{v_0} + a(t - t_0)$$

dove si nota come la velocità sia una funzione lineare del tempo se $t_0 = 0$, ottenendo $\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$.

Cerchiamo ora l'equazione del moto in caso di *moto rettilineo uniformemente accelerato*. si ha che:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + a(t - t_0)]dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v_0}dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

porto fuori le due costanti, $\vec{v_0}$ *e* a

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

dove, se si ha $t_0 = 0$, si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}at^2$$

Si ha che $\overline{x}(t)$ con accelerazione costante è una parabola.
Ricapitolando si ha.

- $v = v_0 + at$
- $x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

Possiamo usare le due formule combinandole. Per esempio dalla prima prendo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

e lo metto nella seconda formula:

$$x = x_0 + v\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{1}{2a}(v - v_0)^2$$

$$= x_0 + \frac{1}{a}(v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2a}(v^2 + v_0^2 - 2vv_0) = x_0 + \frac{1}{2a}(2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0 v)$$

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

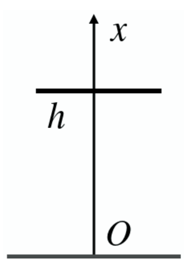
Si nota come sia il termine at nel caso di $\vec{v}(t)$ che il termine $\frac{1}{2}at^2$ nel caso di $a(t)$ non dipendono dalle condizioni iniziali.
Si definisce anche la velocità finale come:

$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

L'accelerazione si esprime in metri al secondo quadrato ($\frac{m}{s^2}$, m/s^2 o ms^-2)

2.1.2 Moto Verticale

Sperimentale si scopre come un qualunque corpo lasciato libero di cadere nei pressi della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g \simeq 9.81\, ms^{-2}$ (si trascurano attrito dell'aria e si trattano piccole altitudini). Il valore di g non è costante in ogni parte del mondo ma può variare fino a circa il 0.6%.
Impostiamo un sistema di riferimento con l'asse x crescente verso l'alto e quindi con $a = -g = -9.81ms^{-2}$. Si avrà un corpo in caduta libera da un'altezza h:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v_0} = 0$

Con queste premesse otteniamo:

- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = -gt$$

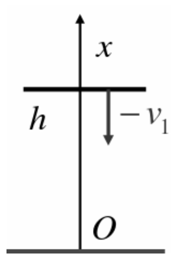
Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = v(t_c) = -gt_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Imponiamo ora una velocità iniziale $-\vec{v_1}$, quindi verso il basso:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v_0} = -\vec{v_1}$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = h - \vec{v_1}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = -\vec{v_1} - gt$$

Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - \vec{v_1}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 - \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + \vec{v_1}t - h = 0$$

$$\downarrow$$

$$t_c = \frac{-\vec{v_1} \pm \sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}}{g}$$

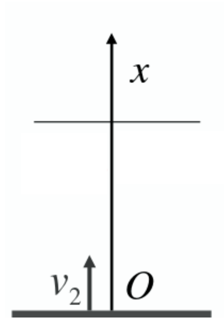
ma $t < 0$ non è una soluzione fisica, quindi tengo solo la soluzione col +

$$t_c = -\frac{\vec{v_1}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = -\vec{v_1} - gt_c = -\vec{v_1} - g\left[-\frac{\vec{v_1}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}\right] = -\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}$$

Con una velocità iniziale verso il basso avremo un tempo di caduta inferiore e una velocità al suolo maggiore rispetto alla partenza da fermo.
Analizziamo ora il moto verticale di un punto materiale lanciato dal basso verso l'alto con velocità $\vec{v_2}$:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $\vec{v_0} = \vec{v_2}$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = \vec{v_2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v_2} - gt$$

Inizialmente si ha $v > 0$, finché il punto sale verso l'alto, fino a fermarsi. Con $v = 0$ si ha l'altezza massima. Si ha quindi:

$$v = \vec{v_2} - gt = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{\vec{v_2}}{g}$$

e quindi:

$$x_{max} = x(t_{max}) = \vec{v_2}\frac{\vec{v_2}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{\vec{v_2}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{v_2}^2}{g}$$

raddoppiando la velocità iniziale avrò quindi un'altezza 4 volte superiore. Da questp momento in poi di avrà la caduta libera da $h = x - max$ con $\vec{v_0} = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{v_2}^2}{g}\right)} = \frac{\vec{v_2}}{g}$$

e quindi si avrà:

$$t_{tot} = t_{max} + t_c = \frac{2\vec{v_2}}{g}$$

2.1.3 Moto nel Piano

Si passa ora al moto in 2 dimensioni quindi con una traiettoria curva (e non più una retta).
Si introducono le coordinate cartesiane ($x(t)$ e $y(t)$) e quelle polari ($r(t)$ e $\vartheta(t)$). Si hanno le seguenti formule per il passaggio da coordinate cartesiane a polari:

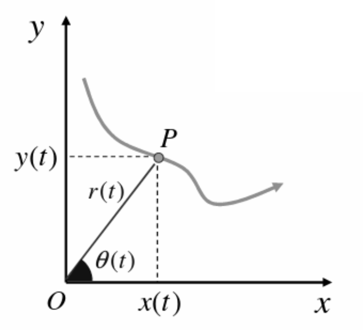
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tan\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

e le seguenti per il passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$x = r\,cos\,\vartheta$$

$$y = r\,sin\,\vartheta$$

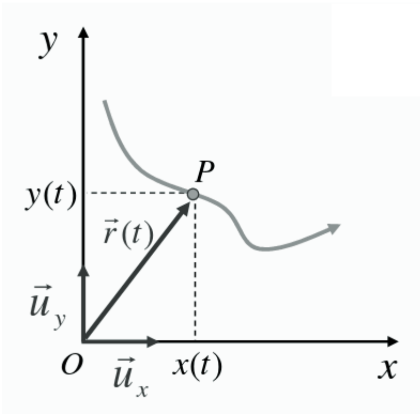


Il moto di P è descritto attraverso l'evoluzione del vettore posizione:

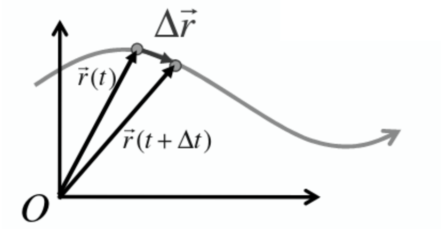
$$\vec{r}(t) \equiv (\vec{x}(t), y(t))$$

Si introducono inoltre i versori degli assi $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, ricordando che $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_y| = 1$ e che i versori restano fissi nel tempo. Si ottiene quindi:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$



Suppongo ora la traiettoria fissata e nota a priori. Fissata un'origine O, una posizione $s(t)$ e la velocità $v = \frac{ds}{dt}$ si ha che il moto è completamente determinato. Si ha una generalizzazione del moto rettilineo su una traiettoria curva.
Prendiamo ora in considerazione il seguente caso:



si ha il vettore spostamento:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

e il vettore velocità media:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

e il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

al limite $\Delta t \to 0$ lo spostamento infinitesimo si dispone sulla tangente alla traiettoria nel punto P:

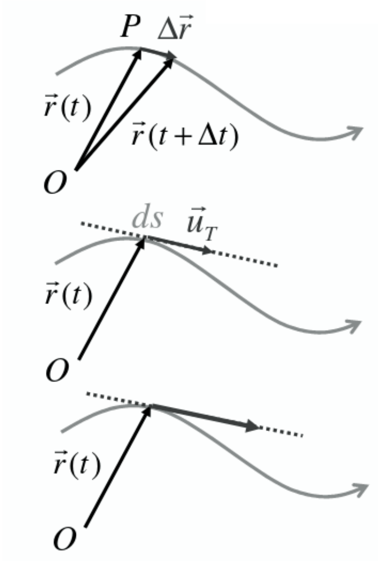
$$d\vec{r} = ds\vec{u}_T$$

con $|\vec{u}_T| = 1$ versore della tangente che indica una direzione variabile nel tempo. Per il vettore velocità avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$$

con v indicate il modulo della velocità e $\vec{u}_T$ la direzione.

Quanto appena descritto è visualizzabile nelle seguenti immagini:



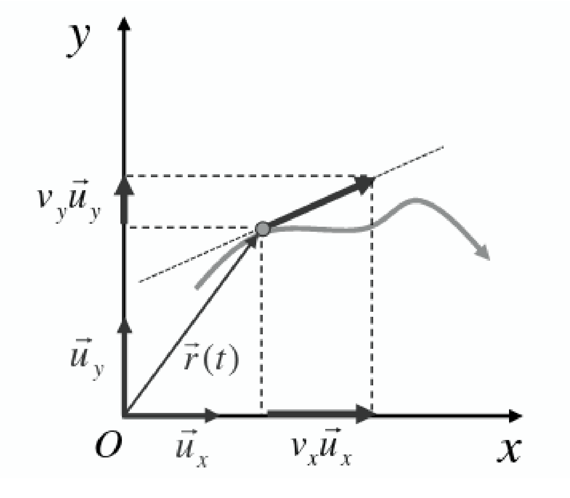
Analizziamo ora meglio la velocità nelle componenti cartesiane. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = \vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$ si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

con il modulo della velocità:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



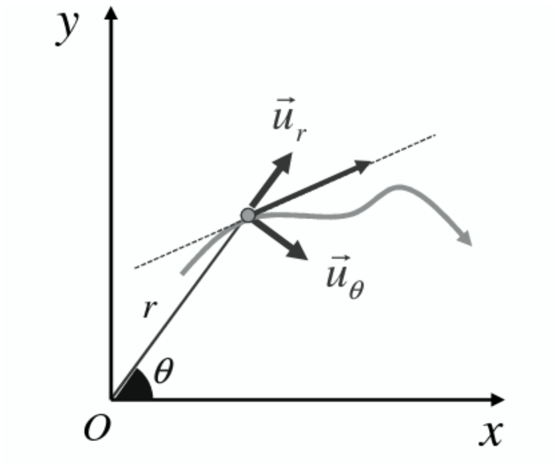
Passiamo alle componenti polari. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$ (col versore $\vec{u}_r$ mostrato in figura) si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta$$

in quanto solitamente la derivata di un versore è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\perp$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



Possiamo approfondire ancora lo studio della velocità in componenti polari infatti:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v_r}} + \underbrace{r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta}_{\vec{v_\vartheta}}$$

con:

- $\vec{v_r}$ è la **velocità radiale** e $|\vec{v_r}| = \frac{dr}{dt}$ è la variazione di r
- $\vec{v_\vartheta}$ è la **velocità traversa** e $|\vec{v_\vartheta}| = r\frac{d\vartheta}{dt}$ è la variazione della direzione

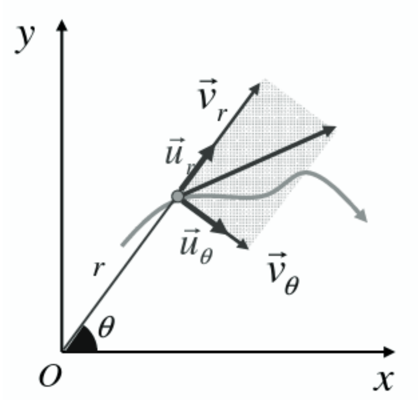
quindi:

$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\vartheta}$$

e quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}$$

Ecco un'immagine che spiega quanto detto:



Passiamo ora all'accelerazione nel piano. Essa è, come sappiamo, la variazione della velocità $\vec{v} = v\vec{u}_T$ ma, se nel moto rettilineo è solo la variazione del modulo, nel moto del piano si ha anche la variazione della direzione. Iniziamo sapendo che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Quindi:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

ricordando la derivata di un versore si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

con:

- $\vec{u}_N$ versore perpendicolare al versore tangente
- $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ variazione del modulo velocità, detta $\vec{a}_T$ **accelerazione tangenziale**
- $v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$ variazione della direzione, detta $\vec{a}_T$ **accelerazione normale o centripeta**

quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

procedendo con l'analisi della traiettoria si nota come essa possa essere approssimata da una circonferenza con un certo raggio R che può essere usato come raggio di curvatura. Si ha quindi $ds = R\,d\phi$ e quindi:

$$\frac{d\,\phi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

Posso quindi sostituire $\frac{d\phi}{dt}$ nella formula precedentemente trovata dell'accelerazione ottenendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

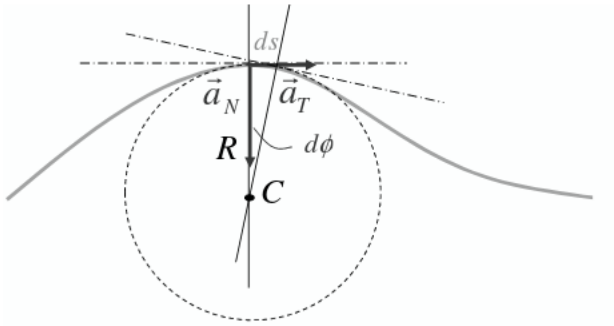
quindi $\vec{a}_N$ può anche essere indicata con $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$. Da questi ultimi due risultati si intuiscono due cose:

1. se $r \to \infty$ si ha $\vec{a}_N = 0$ e quindi un moto rettilineo
2. se $\frac{dv}{dt} = 0$ si ha $\vec{a}_T = 0$ e quindi un moto curvilineo uniforme con solo il cambiamento della direzione

Si ha infine il modulo dell'accelerazione:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

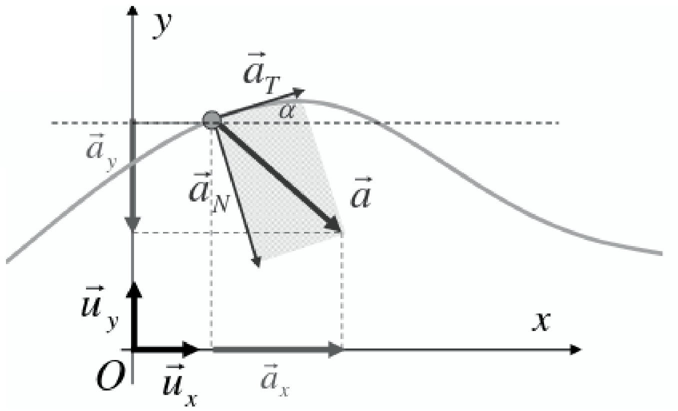
Ecco un'immagine di quanto detto:



Proiettiamo ora l'accelerazione sugli assi del sistema cartesiano:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$$

analizziamo anche quanto succede sul piano:



Possiamo ora scrivere le componenti cartesiane in funzione di quella tangenziale e di quella centripeta:

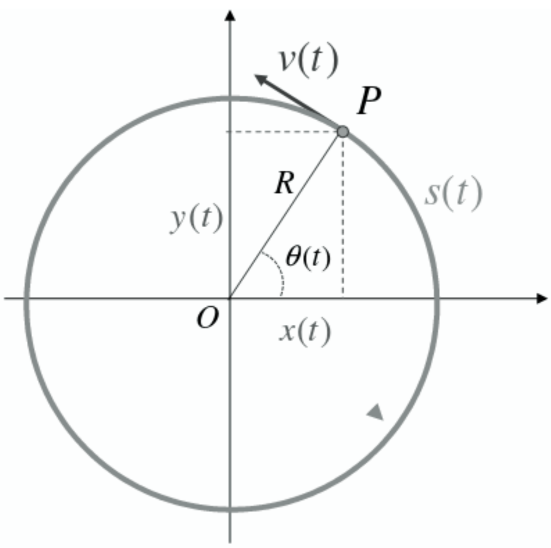
- per l'ascisse:
$$a_x = (a_T)_x + (a_N)_x = a_t cos\,\alpha + a_n cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{dv}{dt} cos\,\alpha + \frac{v^2}{R} sin\,\alpha$$
- per l'ordinata:
$$a_y = \frac{dv}{dt} sin\,\alpha - \frac{v^2}{R} cos\,\alpha$$

2.1.4 Moto Circolare

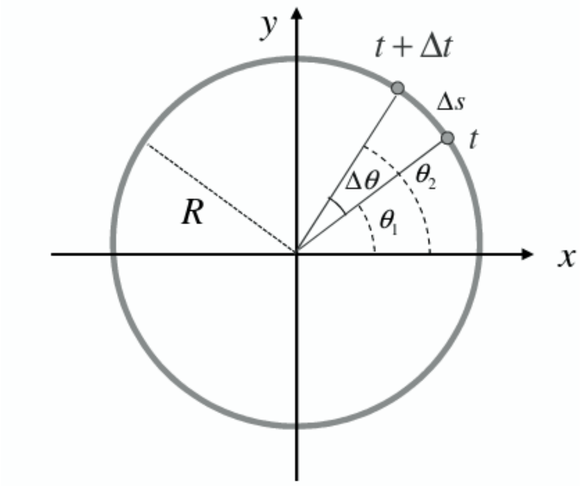
Si tratta di un caso particolare di moto curvilineo nel piano. In generale si ha il modulo della velocità non uniforme. Si hanno quindi:

- *coordinate polari*:
  - angolo $\theta(t)$
  - raggio $r(t) = R = costante$
- *coordinate curvilinee*:
  - posizione misurata lungo la traiettoria $s(t) = R\theta(t)$
- *coordinate cartesiane:*
  - $\vec{x}(t) = R\,cos\,\theta(t)$
  - $y(t) = R\,sin\,\theta(t)$

ovvero:



Iniziamo ad analizzare il moto circolare. Considero il punto P in due istanti t e $t + \Delta t$. Quindi avrò $\theta(t) = \theta_1$ e $\theta(t + \Delta t) = \theta_2$. Nel complesso si ha $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:



Si definisce innanzitutto la velocità angolare media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{dt}$$

mentre per la velocità angolare istantanea si ha:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

Si indica ora la velocità angolare in funzione di v e R, ricordando che $ds = Rd\theta$:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

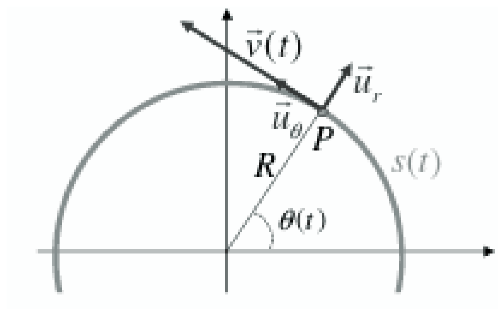
quindi la velocità angolare è proporzionale al modulo della velocità ed inversamente proporzionale al raggio. Inoltre $v = \omega R$. Partiamo da qui per approfondire la velocità nel moto circolare. Sappiamo che in generale nel moto curvilineo si ha: $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$. Si ha che $\frac{dr}{dt} = 0$ quindi:

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dr}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta$$

in quanto R è costante e quindi si ha come modulo della velocità:

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| = \omega(t)R$$

graficamente si ha:



Si ha inoltre che se si parla di moto circolare uniforme si ha che $v = \omega R$ è costante in quanto ω è costante.
Passiamo all'accelerazione nel moto circolare uniforme. Si ha solo l'accelerazione centripeta in quanto $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{U}_N$$

con v^2 costante e si ha il modulo dell'accelerazione pari a:

$$a = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega\, v$$

Quindi per il moto lungo la traiettoria si ha:

- $s(t) = s_0 + vt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

e nel moto circolare uniforme si può notare un moto periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

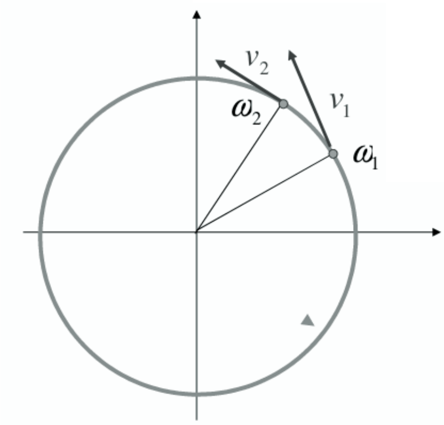
vediamo ora l'accelerazione in caso di moto non uniforme, quindi con $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ e con $\vec{v}(t) = \omega(t)R$. Definisco un'accelerazione angolare media:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

e l'accelerazione angolare istantanea, si ricorda che $\omega = \frac{v}{r}$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}a_T$$

visivamente:



Possiamo quindi riscrivere accelerazione normale e tangenziale in funzione di quantità angolari:

- $a_N = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{v=\omega R} a_N = \omega^2 R$
- $a_T = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=\omega R} a_T = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$

quindi:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + \omega^2 R \vec{u}_N = R(\alpha \vec{u}_T + \omega^2 \vec{u}_N)$$

quindi infine:

- $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^{t} dt = \omega_0 + \alpha t$ in quanto $t_0 = 0$
- $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \alpha t) dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$, dove si nota l'analogia con l'accelerazione nel moto rettilineo
- $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

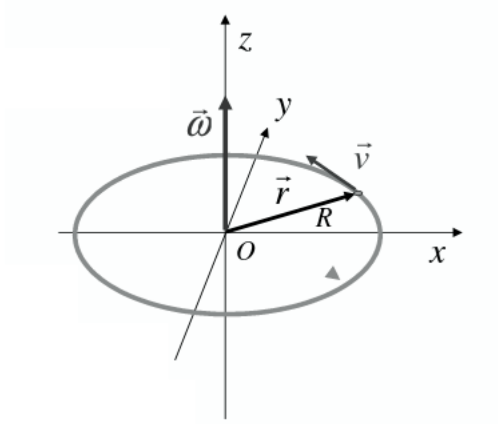
Diamo nuovamente un'occhiata alla velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$. Si ha che è una quantità scalare. Studiamo ora la notazione vettoriale di $\vec{\omega}$. Questo vettore ha direzione ortogonale alla circonferenza e , visto dalla punta di $\vec{\omega}$ il moto appare antiorario. SI ha quindi che $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$ e:

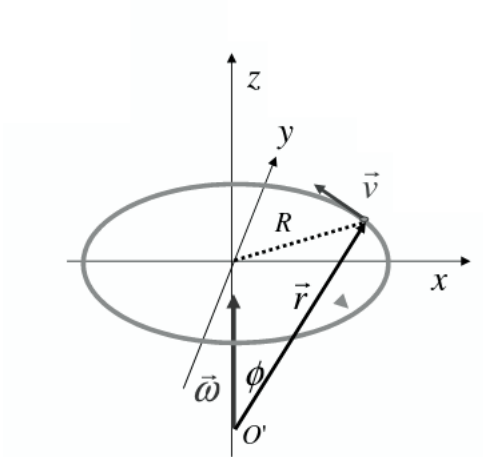
$$|\vec{v}| = \omega R sin\, \frac{\pi}{2} = \omega R$$

anche se il vettore $\vec{\omega}$si può applicare a qualunque punto dell'asse z, ottenendo:

$$|\vec{v}| = \omega R sin\, \phi = \omega R$$

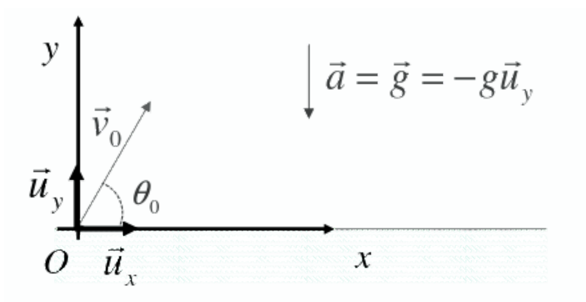
graficamente si ha a sinistra il caso con applicazione sull'origine normale e a destra il caso applicazione in un punto a scelta:





2.1.5 Moto Parabolico

Consideriamo il moto di un punto materiale lanciato da terra (con angolo θ_0) con una certa velocità iniziale v_0:



posto $t_0 = 0$ e $\vec{r}(t_0) = 0$ otteniamo per la velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt = \vec{v_0} - g\vec{u}_y \int_{t_0}^{t} dt = \vec{v_0} - gt\vec{u}_y$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 cos\theta_0 \\ v_y = v_0 sin\theta_0 - gt \end{cases}$$

e per la posizione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x = (v_0 cos\theta_0)t \\ y = y(t) = \int_{t_0}^{t} v_y = (v_0 sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

notiamo che la componente x rappresenta un moto rettilineo uniforme mentre quella y un moto uniformemente accelerato. Passiamo ora al calcolo della traiettoria $y(x)$. Dall'equazione di $x(t)$ otteniamo:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta_0}$$

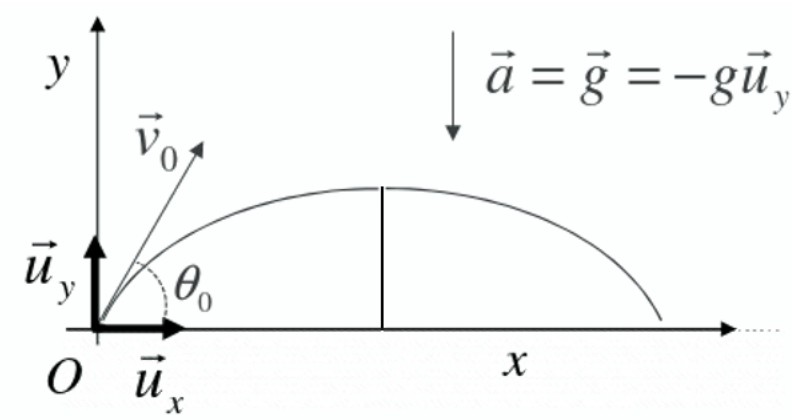
quindi:

$$y(x) = (v_0 sin\theta_0)\frac{x}{v_0 cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 cos\theta_0^2}$$

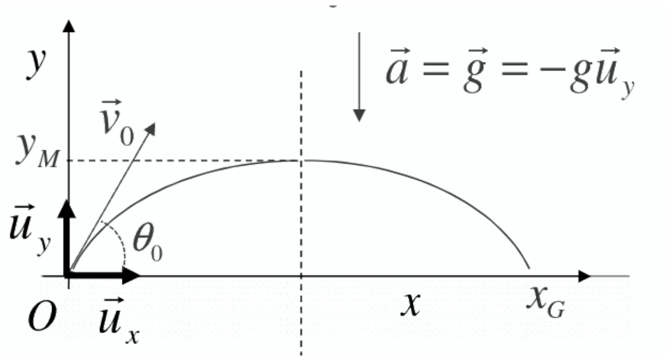
$$\downarrow$$

$$y(x) = (tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta_0}x^2$$

ovvero l'equazione di una parabola con asse verticale, infatti:



Studiamo ora la gittata, che si ha con $y(x) = 0$:



Quindi, essendo $y(x) = 0$, si ha:

$$tan\theta_0 = \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta_0}$$

quindi:

$$x_G = \frac{2v_0^2}{g}cos^2\theta_0 tan\theta_0 = \frac{2v_0^2}{g}cos\theta_0 sin\theta_0$$

$$\downarrow$$

$$x_G = \frac{v_0^2}{g}sin(2\theta_0)$$

e, fissata la velocità iniziale si ha la gittata massima con $sin(2\theta_0) = 1$ (quindi con $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 45°$). Si ha quindi:

$$x_{G_{max}} = \frac{v_0^2}{g}$$

la parabola è simmetrica rispetto all'asse e a x_M si ha l'altezza massima $y_M = y(x_M)$. Si ha:

$$x_M = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}sin(2\theta_0)$$

e, mettendo x_M nella formula della traiettoria, si ottiene:

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g}sin^2\theta_0$$

che è l'altezza massima lungo la traiettoria. Ne segue che l'altezza massima si ha sulla verticale (con $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) e quindi si ha l'altezza massima pari a:

$$Y_{M_{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Possiamo ora calcolare il tempo di volo, ovvero il tempo impiegato a raggiungere la gittata x_G:

$$t_G = \frac{x_G}{v_x} = \frac{v_0^2}{g} sin(2\theta_0) \frac{1}{v_0 cos\theta_0}$$

$$\downarrow$$

$$t_G = \frac{2v_0}{g} sin\theta_0$$

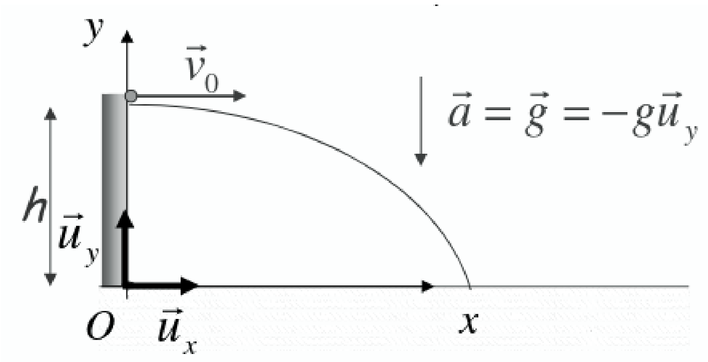
che con $sin\theta_0 = 1$, ovvero con $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (sulla verticale), raggiunge il suo massimo:

$$t_{G_{max}} = \frac{2v_0}{g}$$

si hanno inoltre le seguenti velocità finali:

$$\begin{cases} v_x(t_G) = v_x(t_0) = v_0 cos\theta_0 \\ v_y(t_G) = -v_y(t_0) = -v_0 sin\theta_0 \end{cases}$$

Vediamo ora un punto materiale lanciato orizzontalmente da altezza h.



è un moto parabolico con condizioni iniziali diverse:

- $x(0) = 0$
- $y(0) = h$
- $v_x(0) = v_0$
- $v_y(0) = 0$

con la seguente equazione del moto:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

che implicano:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

si hanno quindi:

- tempo di volo: $t = \frac{x}{v_0}$
- traiettoria: $y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$
- tempo di caduta: $y(t) = 0 \rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- gittata: $x(t_c) = x_G = v_0 t_c = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$
- velocità finale: $v_x(t_c) = v_0 \ e \ v_y(t_c) = -\sqrt{2gh} \rightarrow v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

2.1.6 Esercizi

prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\, cos\theta$$

prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \rightarrow |\vec{c}| = ab\, sin\theta$$

Esercizio 1. *si ha una strada rettilinea di 5.2km percorsa in auto a 43km/h, dopo si ha un altro percorso di 1.2km (fatto in 27m). Trovo velocità media nei due tratti:*

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5.2 + 1.2 = 6.4km$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{v} + \Delta t_2 = \frac{5.2}{43} + 0.45 = 0.12 + 0.45 = 0.57h$$

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6.4}{0.57} = 11km/h$$

ora torna alla macchina, tornando indietro di 1.2km in 35m, quindi la nuova velocità media totale sarà:

$$v_{med2} = \frac{5.2}{0.57 + 0.58} = 4.5km/h$$

sistemare parte finale

Esercizio 2. *negli anni '60 c'è stato il record di velocità al suolo con 631km/h in 3.72s. L'accelerazione media è maggiore di quella di gravità?*

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{631}{3.6}\frac{1}{3.72} = 47,2m/s^2$$

che è maggiore di 9.81

Esercizio 3. *la metro va da A a B. Quando parte accelera con 1.2m/s^2, per metà tratta accelera così positivamente e poi frena con lo stesso modulo. Tra A e B ci sino 1100m. Calcolo tempo e velocità massima:*

$$v_{max} = v\frac{\Delta x}{2} = \sqrt{2a\Delta x\frac{1}{2}} = \sqrt{a\Delta x} = \sqrt{1.2 * 1100} = 36,3m/s$$

$$v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v_{fin}}{a} = \frac{36.3}{1.2} = 30.3s$$
$$\Delta t_{tot} = 30.3 \cdot 2 = 60.6s$$

in quanto accelera e frena con lo stesso modulo

Esercizio 4. *un tizio urla in un pozzo e l'eco gli torna dopo 2s. Quanto è profondo il pozzo ($v_{suono} = 344m/s$)*

$$2\Delta x = v\Delta t \rightarrow t = \frac{344 \cdot 2}{2} = 344m$$

Esercizio 5. *Un aereo per staccarsi dalla pista deve avere una velocità finale di 360km/h. La pista è lunga 1,8km. Si ha accelerazione costante. Qual è l'accelerazione minima?*

$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow a = \frac{360}{3.6}\frac{1}{2 \cdot 1.8 \times 10^3} = 2.7m/s^2$$

Esercizio 6. *Un tizio fa cadere una chiave inglese da un grattacielo. Dov'è la chiave dopo 1.5s?*

$$\Delta x = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{9.81 \cdot 1.2^2}{2} = -11m$$

negativo nel mio sistema di riferimento

Esercizio 7. *lancio una palla in alto con $v_0 = 12m/s$, quanto ci impiega ad arrivare alla massima altezza?*

$$v_f = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{12}{9.81} = 1.2s$$

quanta strada fa?

$$x = -\frac{v_0^2}{2g} = -\frac{12^2}{2 \cdot (-9.81)} = 7,3m$$

quanto impiega la palla per arrivare a 5m sopra il punto di lancio?

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \to \frac{1}{2}9,81t^2 + 12t + 5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\frac{9,81}{2}5}}{2,45} = \begin{cases} 0,53s \\ 1,9s \end{cases}$$

sappiamo che per arrivare all'altezza massima impiega 1,2s, quindi impiegherà 0,53s per arrivare a 5m e 1,9s per salire all'apice e scendere nuovamente a 5m

Esercizio 8. *Un aereo getta aiuti umanitari ad una quota di 1200m volando a 430km/h. Calcolo a quale angolo devono essere gettati gli aiuti?*

$$\begin{cases} x = v_{0_x} t \\ y = v_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2400}{9,81}} = 15,6s$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{430}{3,6} \cdot 15,6 = 1863m$$

$$\downarrow$$

$$tan(\frac{\pi}{2} - theta) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1869}{1200}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = arctan(\frac{1869}{1200}) = 57°$$

2.2 Dinamica