Fisica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

Capitolo 1

Introduzione

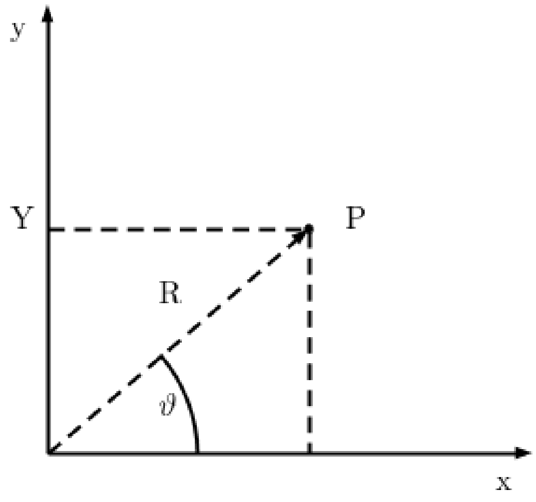
Capitolo 2

Meccanica

Si comincia con la Meccanica, la branca della fisica classica che studia il moto dei corpi, esprimendolo con leggi quantitative. Si ha la seguente divisione:

- **Cinematica**, dove si studia il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause
- **Dinamica**, dove si studia l'influenza delle forze nel moto

Si utilizzano i cosiddetti *punti materiali* per semplificare lo studio dei fenomeni. Un punto materiale infatti non ha estensione ma è dotato di una massa. In pratica ha dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove.
Un altro strumento essenziale per lo studio dei fenomeni è il *sistema di riferimento* mediante gli assi ortogonali:



e si hanno le seguenti formule:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$sin\vartheta = \frac{Y}{R}$$

$$cos\vartheta = \frac{X}{R}$$

$$tan\vartheta = \frac{Y}{X}$$

$$\vartheta = arctan\frac{Y}{X}$$

e per gli angoli si usano i *radianti* in quanto adimensionali. L'angolo in radianti infatti è:

$$\vartheta_{rad} = \frac{Lunghezza\_arco}{raggio}$$

dove le due unità di misura esprimenti una lunghezza vengono "semplificate".

2.1 Cinematica

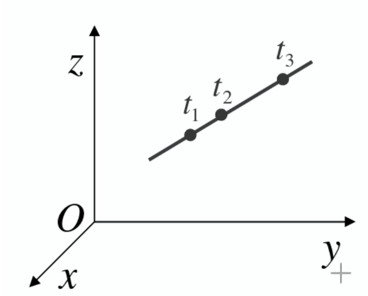
Innanzitutto qualche definizione:

- **Moto:** posizione in funzione del tempo in un dato sistema di riferimento
- **Traiettoria:** luogo dei punti attraversati dal punto materiale in movimento
- **Velocità:** variazione della posizione
- **Accelerazione:** variazione della velocità
- **Quiete:** assenza di movimento in un certo sistema di riferimento

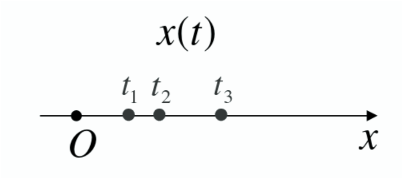
Come grandezze fondamentali del movimento si hanno quindi *posizione*, *velocità* e *accelerazione*, tutte e tre funzioni del tempo.

2.1.1 Moto Rettilineo

Si ha la traiettoria più semplice, una retta. Il moto del punto quindi è esprimibile come funzione solo di $x(t)$, che sarà la nostra equazione del moto. Si passa quindi da un sistema di riferimento a 3 assi:



ad uno a un asse:



La scelta dell'origine della coordinata spaziale ($x = 0$) e di quella temporale ($t = 0$) sono arbitrari.

Velocità

Per ottenere la velocità di un punto materiale ne misuro la posizione in due diversi istanti di tempo. Si ha:

- **Spostamento:** $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$
- **Intervallo di Tempo:** $\Delta t = t_2 - t_1$

Possiamo quindi definire la **Velocità Media:**

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Questa grandezza però non fornisce nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Provo a spezzare il moto in più intervalli temporali al fine di studiarne ogni variazione. Si ottiene quindi la **Velocità Istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerata. Il segno della velocità indica la direzione del moto sull'asse delle ascisse. La velocità è a sua volta funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Se v è costante si parla di *Moto Rettilineo Uniforme*. Nota quindi l'equazione del moto $x(t)$ possimao ricavare $v(t)$ derivando.
Si può procedere anche al calcolo di $x(t)$ avendo nota $v(t)$. Sappiamo che lo spostamento totale è: $\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} v_{m_i} \Delta t$ e che, per intervalli infinitesimi $dx = v(t)dt$. Si ha quindi:

$$\Delta c = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx}_{x(t)-x_0} = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

che è l'equazione del moto rettilineo per una velocità qualunque.
Possiamo ora anche riscrivere la forma completa della velocità media, essendo $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ si ha:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Possiamo analizzare ora il *moto rettilineo uniforme* con v costante. Essendo v costante, e non più dipendente dal tempo, può essere portata fuori dall'integrale:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$

che è l'equazione generale del moto rettilineo uniforme dove lo spostamento varia linearmente col tempo.
La velocità di esprime in metri al secondo ($\frac{m}{s}$ o m/s) o in kilometri all'ora $\frac{km}{h}$ o km/h). Per passare da km/h a m/s divido la grandezza in km/h per 3,6, per passare da m/s a km/h moltiplico la grandezza in m/s per 3,6

Accelerazione

Si ha che in due istanti di tempo diversi abbiamo due diverse velocità: $v(t_1) = v_1$ e $v(t_2) = v_2$. Si definisce l'**Accelerazione Media:**

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ora, come per la velocità, analizziamo intervalli di tempo infinitesimi ricordando che anche l'accelerazione è una funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo e si ha che:

- $a = 0$ implica un moto rettilineo uniforme (si deriva una costante, v, e si ottiene 0)
- $a > 0$ implica una velocità crescente
- $a < 0$ implica una velocità decrescente

Proviamo ora a risalire a *v(t)* conoscendo *a(t)*. Sappiamo che $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt$. Risolviamo quindi l'equazione differenziale :

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

che è l'equazione generale per la velocità, dove, nel caso di $a \neq 0$, ovvero di accelerazione costante, si ha:

$$v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0)$$

dove si nota come la velocità sia una funzione lineare del tempo se $t_0 = 0$, ottenendo $v(t) = v_0 + at$.
Cerchiamo ora l'equazione del moto in caso di *moto rettilineo uniformemente accelerato*:
si ha che:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

$$\textit{porto fuori le due costanti, } v_0 \textit{ e } a$$
$$\downarrow$$
$$x(t) = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$
$$\downarrow$$
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

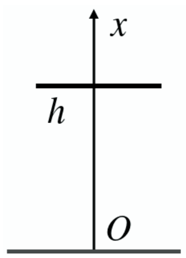
dove, se si ha $t_0 = 0$, si ottiene:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}at^2$$

Si nota come sia il termine at nel caso di $v(t)$ che il termine $\frac{1}{2}at^2$ nel caso di $a(t)$ non dipendono dalle condizioni iniziali.
L'accelerazione si esprime in metri al secondo quadrato ($\frac{m}{s^2}$, m/s^2 o ms^-2)

2.1.2 Moto Verticale

Sperimentale si scopre come un qualunque corpo lasciato libero di cadere nei pressi della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g \simeq 9.81\, ms^{-2}$ (si trascurano attrito dell'aria e si trattano piccole altitudini). Il valore di g non è costante in ogni parte del mondo ma può variare fino a circa il 0.6%.
Impostiamo un sistema di riferimento con l'asse x crescente verso l'alto e quindi con $a = -g = -9.81ms^{-2}$. Si avrà un corpo in caduta libera da un'altezza h:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $v_0 = 0$

Con queste premesse otteniamo:

- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = -gt$$

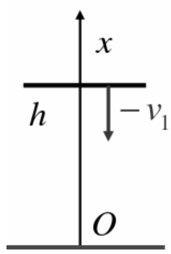
Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = v(t_c) = -gt_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Imponiamo ora una velocità iniziale $-v_1$, quindi verso il basso:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $v_0 = -v_1$

- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$\downarrow$$
$$x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + at$$
$$\downarrow$$
$$v(t) = -v_1 - gt$$

Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 - \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + v_1 t - h = 0$$
$$\downarrow$$
$$t_c = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$$

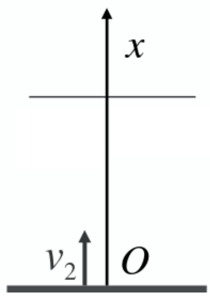
ma $t < 0$ non è una soluzione fisica, quindi tengo solo la soluzione col +

$$t_c = -\frac{v_1}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = -v_1 - gt_c = -v_1 - g\left[-\frac{v_1}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_1^2 + 2gh}\right] = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

Con una velocità iniziale verso il basso avremo un tempo di caduta inferiore e una velocità al suolo maggiore rispetto alla partenza da fermo.
Analizziamo ora il moto verticale di un punto materiale lanciato dal basso verso l'alto con velocità v_2:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $v_0 = v_2$
- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = v_2 - gt$$

Inizialmente si ha $v > 0$, finché il punto sale verso l'alto, fino a fermarsi. Con $v = 0$ si ha l'altezza massima. Si ha quindi:

$$v = v_2 - gt = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{v_2}{g}$$

e quindi:

$$x_{max} = x(t_{max}) = v_2 \frac{v_2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_2^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g}$$

raddoppiando la velocità iniziale avrò quindi un'altezza 4 volte superiore. Da questp momento in poi di avrà la caduta libera da $h = x - max$ con $v_0 = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}\right)} = \frac{v_2}{g}$$

e quindi si avrà:

$$t_{tot} = t_{max} + t_c = \frac{2v_2}{g}$$

2.1.3 Moto Armonico

Si ha la seguente equazione del moto per un *moto armonico semplice* lungo un asse rettilineo:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$

con:

- A ampiezza, espressa in m e costante
- ω pulsazione, espressa in s^{-1} e costante
- φ fase iniziale
- $\omega t + \varphi$ è detta fase

Si ha inoltre:

- $sin(\omega t + \varphi)$ che è la traiettoria e si ha che $-1 \geq sin(\omega t + \varphi) \leq 1$
- $x_0 = x(0) = asin\varphi$ è la posizione iniziale generica

$x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$ è una funzione periodica con periodo $T = 2\pi$ (la posizione si ripete dopo ogni periodo T). Consideriamo $T = t_2 - t_1 = 2\pi$. Si ha quindi che:

$$x(t_2) = x(t_1)$$
$$\downarrow$$
$$Asin(\omega t_2 + \varphi) = Asin(\omega t_1 + \varphi)$$
$$\downarrow$$
$$(\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) = 2\pi$$
$$\downarrow$$
$$\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$$
$$\downarrow$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

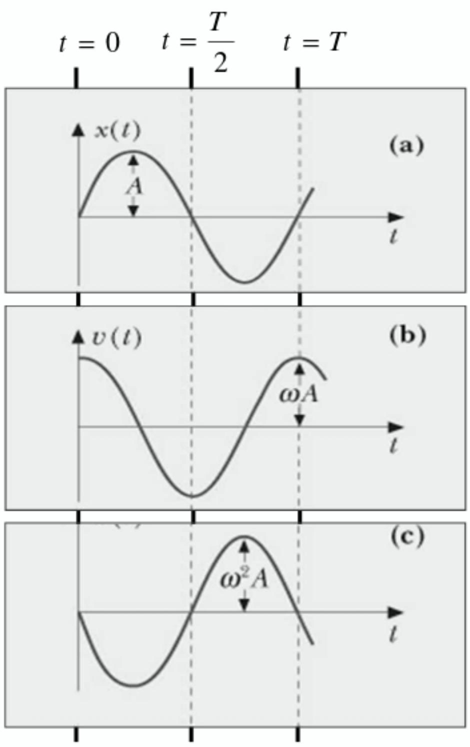
Si ha quindi che:

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la pulsazione è inversamente proporzionale al periodo
- **Frequenza:** $\nu = \frac{1}{T}$ quindi $\omega = 2\pi \ni$

Pulsazione e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza.
Posso ora trovare velocità ed accelerazione dall'equazione del moto $x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$:

- **velocità:** $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \, cos(\omega t + \varphi)$
- **accelerazione:** $v(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \, sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

Ampiezza di *v(t)* e *a(t)* dipendono dalla pulsazione. Le tre curve *x(t)*, *v(t)* e *a(t)* hanno lo stesso andamento ma sono sfasate tra loro. Ricordando che $sin(\alpha + \frac{\pi}{2} = cos\alpha$ e che $sin(\alpha + \pi) = -sin\alpha$ notiamo che *v(t)* è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a *x(t)* (*quadratura di fase*) e che *a(t)* è sfasata di π rispetto a *x(t)* (*opposizione di fase*)



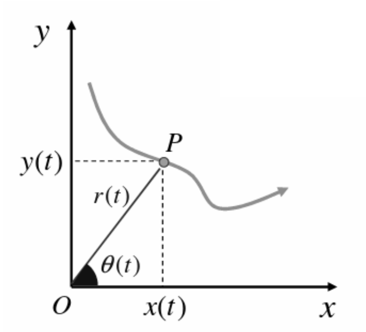
2.1.4 Moto nel Piano

Si passa ora al moto in 2 dimensioni quindi con una traiettoria curva (e non più una retta).
Si introducono le coordinate cartesiane ($x(t)$ e $y(t)$) e quelle polari ($r(t)$ e $\vartheta(t)$). Si hanno le seguenti formule per il passaggio da coordinate cartesiane a polari:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tan\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

e le seguenti per il passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$x = r\,cos\,\vartheta$$
$$y = r\,sin\,\vartheta$$

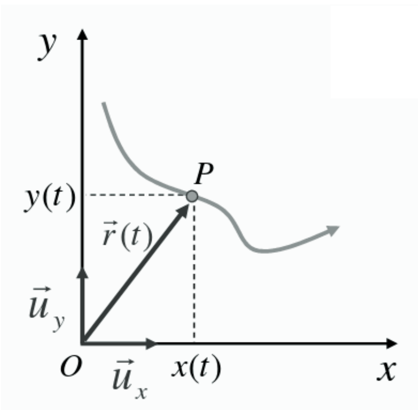


Il moto di P è descritto attraverso l'evoluzione del vettore posizione:

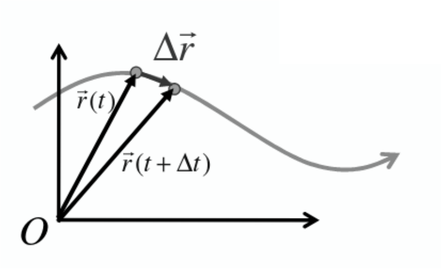
$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$$

Si introducono inoltre i versori degli assi $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, ricordando che $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_y| = 1$ e che i versori restano fissi nel tempo. Si ottiene quindi:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$



Suppongo ora la traiettoria fissata e nota a priori. Fissata un'origine O, una posizione $s(t)$ e la velocità $v = \frac{ds}{dt}$ si ha che il moto è completamente determinato. Si ha una generalizzazione del moto rettilineo su una traiettoria curva.
Prendiamo ora in considerazione il seguente caso:



si ha il vettore spostamento:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

e il vettore velocità media:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

e il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

al limite $\Delta t \to 0$ lo spostamento infinitesimo si dispone sulla tangente alla traiettoria nel punto P:

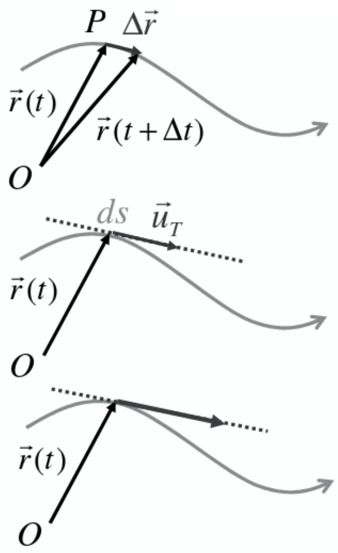
$$d\vec{r} = ds\vec{u}_T$$

con $|\vec{u}_T| = 1$ versore della tangente che indica una direzione variabile nel tempo. Per il vettore velocità avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$$

con v indicate il modulo della velocità e $\vec{u}_T$ la direzione.

Quanto appena descritto è visualizzabile nelle seguenti immagini:



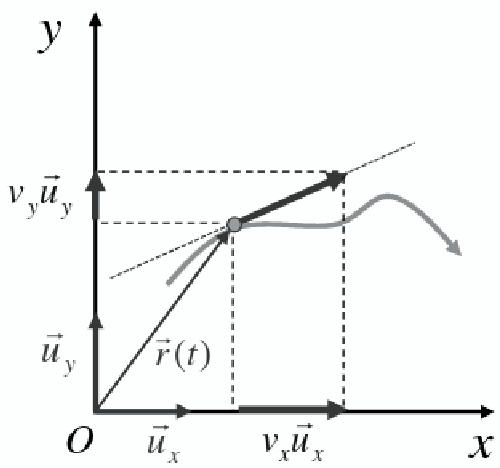
Analizziamo ora meglio la velocità nelle componenti cartesiane. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$ si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

con il modulo della velocità:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



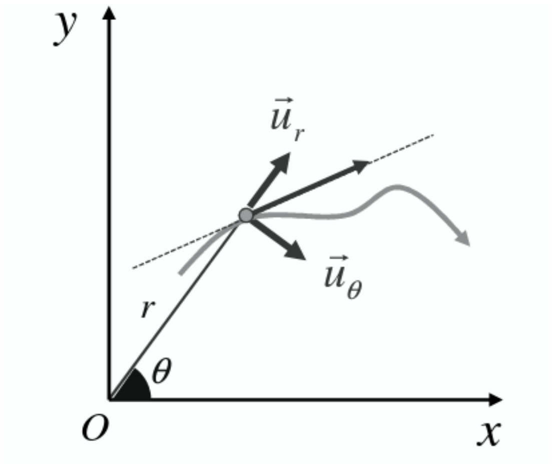
Passiamo alle componenti polari. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$ (col versore $\vec{u}_r$ mostrato in figura) si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta$$

in quanto solitamente la derivata di un versore è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\perp$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



Possiamo approfondire ancora lo studio della velocità in componenti polari infatti:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v_r}} + \underbrace{r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta}_{\vec{v}_\vartheta}$$

con:

- $\vec{v_r}$ è la **velocità radiale** e $|\vec{v_r}| = \frac{dr}{dt}$ è la variazione di r
- $\vec{v_\vartheta}$ è la **velocità traversa** e $|\vec{v_\vartheta}| = r\frac{d\vartheta}{dt}$ è la variazione della direzione

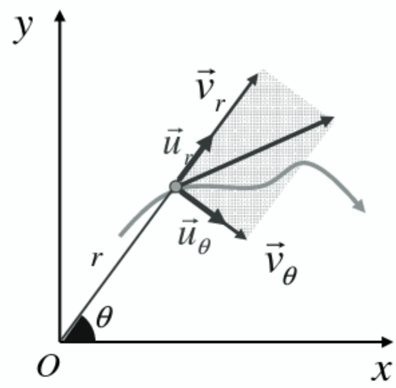
quindi:

$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\vartheta}$$

e quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}$$

Ecco un'immagine che spiega quanto detto:



Passiamo ora all'accelerazione nel piano. Essa è, come sappiamo, la variazione della velocità $\vec{v} = v\vec{u}_T$ ma, se nel moto rettilineo è solo la variazione del modulo, nel moto del piano si ha anche la variazione della direzione. Iniziamo sapendo che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Quindi:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

ricordando la derivata di un versore si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

con:

- $\vec{u}_N$ versore perpendicolare al versore tangente
- $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ variazione del modulo velocità, detta $\vec{a}_T$ **accelerazione tangenziale**
- $v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$ variazione della direzione, detta $\vec{a}_T$ **accelerazione normale o centripeta**

quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

procedendo con l'analisi della traiettoria si nota come essa possa essere approssimata da una circonferenza con un certo raggio R che può essere usato come raggio di curvatura. Si ha quindi $ds = R\,d\phi$ e quindi:

$$\frac{d\,\phi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

Posso quindi sostituire $\frac{d\phi}{dt}$ nella formula precedentemente trovata dell'accelerazione ottenendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

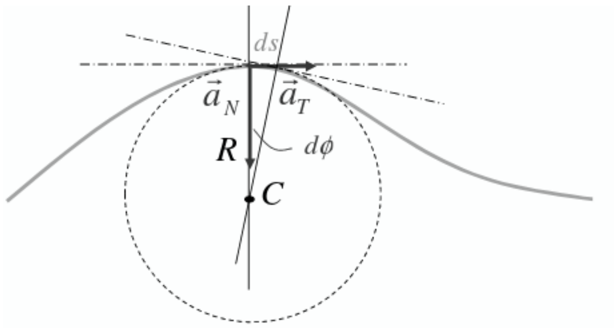
quindi $\vec{a}_N$ può anche essere indicata con $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$. Da questi ultimi due risultati si intuiscono due cose:

1. se $r \to \infty$ si ha $\vec{a}_N = 0$ e quindi un moto rettilineo
2. se $\frac{dv}{dt} = 0$ si ha $\vec{a}_T = 0$ e quindi un moto curvilineo uniforme con solo il cambiamento della direzione

Si ha infine il modulo dell'accelerazione:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

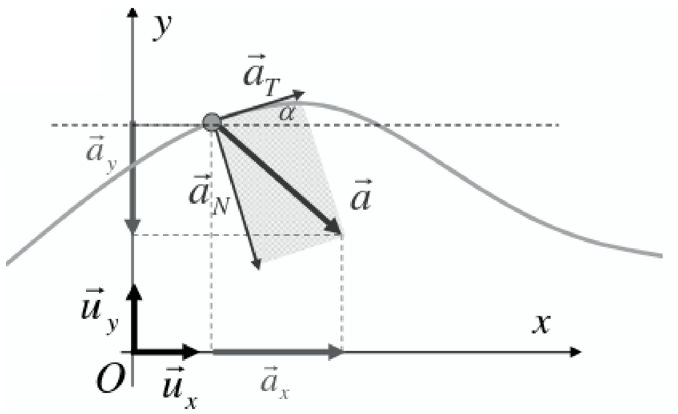
Ecco un'immagine di quanto detto:



Proiettiamo ora l'accelerazione sugli assi del sistema cartesiano:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$$

analizziamo anche quanto succede sul piano:



Possiamo ora scrivere le componenti cartesiane in funzione di quella tangenziale e di quella centripeta:

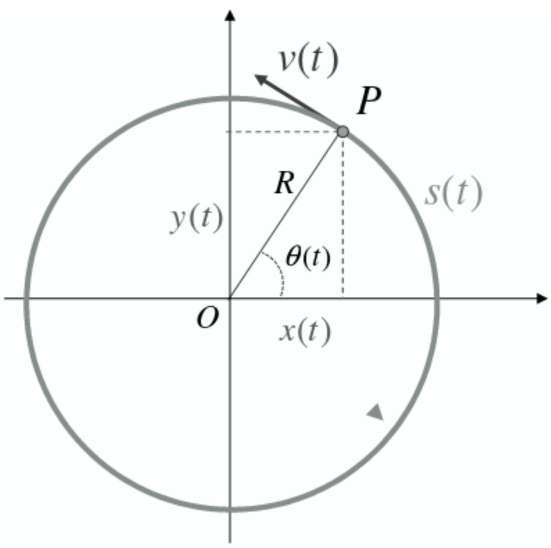
- per l'ascisse:
$$a_x = (a_T)_x + (a_N)_x = a_t cos\,\alpha + a_n cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{dv}{dt} cos\,\alpha + \frac{v^2}{R} sin\,\alpha$$
- per l'ordinata:
$$a_y = \frac{dv}{dt} sin\,\alpha - \frac{v^2}{R} cos\,\alpha$$

2.1.5 Moto Circolare

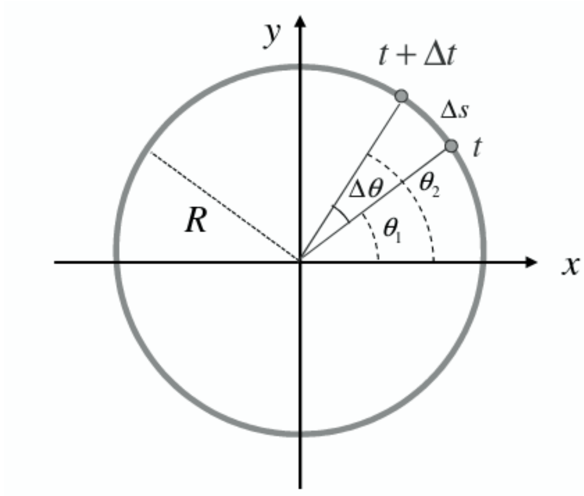
Si tratta di un caso particolare di moto curvilineo nel piano. In generale si ha il modulo della velocità non uniforme. Si hanno quindi:

- *coordinate polari*:
  - angolo $\theta(t)$
  - raggio $r(t) = R = costante$
- *coordinate curvilinee*:
  - posizione misurata lungo la traiettoria $s(t) = R\theta(t)$
- *coordinate cartesiane:*
  - $x(t) = R\,cos\,\theta(t)$
  - $y(t) = R\,sin\,\theta(t)$

ovvero:



Iniziamo ad analizzare il moto circolare. Considero il punto P in due istanti t e $t + \Delta t$. Quindi avrò $\theta(t) = \theta_1$ e $\theta(t + \Delta t) = \theta_2$. Nel complesso si ha $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:



Si definisce innanzitutto la velocità angolare media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{dt}$$

mentre per la velocità angolare istantanea si ha:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

Si indica ora la velocità angolare in funzione di v e R, ricordando che $ds = Rd\theta$:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

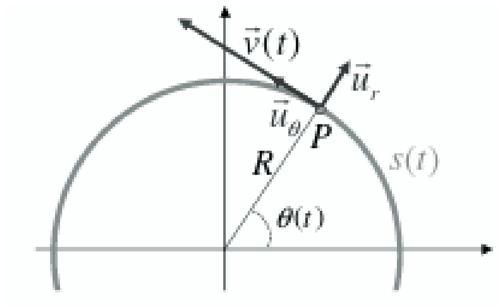
quindi la velocità angolare è proporzionale al modulo della velocità ed inversamente proporzionale al raggio. Inoltre $v = \omega R$. Partiamo da qui per approfondire la velocità nel moto circolare. Sappiamo che in generale nel moto curvilineo si ha: $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$. Si ha che $\frac{dr}{dt} = 0$ quindi:

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dr}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta$$

in quanto R è costante e quindi si ha come modulo della velocità:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \omega(t)R$$

graficamente si ha:



Si ha inoltre che se si parla di moto circolare uniforme si ha che $v = \omega R$ è costante in quanto ω è costante.
Passiamo all'accelerazione nel moto circolare uniforme. Si ha solo l'accelerazione centripeta in quanto $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{U}_N$$

con v^2 costante e si ha il modulo dell'accelerazione pari a:

$$a = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega\, v$$

Quindi per il moto lungo la traiettoria si ha:

- $s(t) = s_0 + vt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

e nel moto circolare uniforme si può notare un moto periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

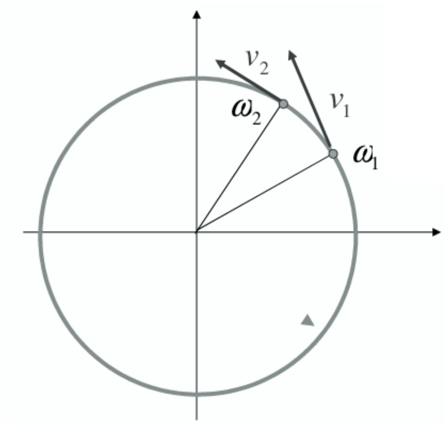
vediamo ora l'accelerazione in caso di moto non uniforme, quindi con $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ e con $v(t) = \omega(t)R$. Definisco un'accelerazione angolare media:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

e l'accelerazione angolare istantanea, si ricorda che $\omega = \frac{v}{r}$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}a_T$$

visivamente:



Possiamo quindi riscrivere accelerazione normale e tangenziale in funzione di quantità angolari:

- $a_N = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{v=\omega R} a_N = \omega^2 R$
- $a_T = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=\omega R} a_T = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$

quindi:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + \omega^2 R \vec{u}_N = R(\alpha \vec{u}_T + \omega^2 \vec{u}_N)$$

quindi infine:

- $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^{t} dt = \omega_0 + \alpha t$ in quanto $t_0 = 0$
- $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \alpha t) dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$, dove si nota l'analogia con l'accelerazione nel moto rettilineo
- $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

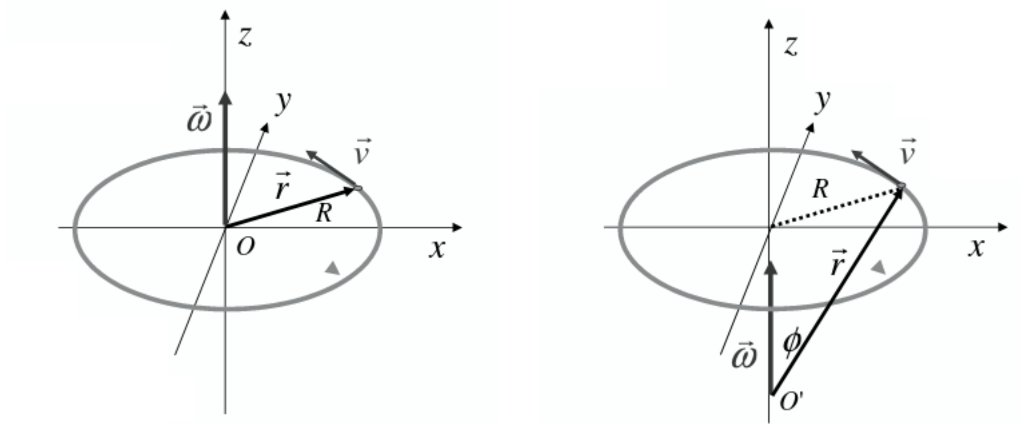
Diamo nuovamente un'occhiata alla velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$. Si ha che è una quantità scalare. Studiamo ora la notazione vettoriale di $\vec{\omega}$. Questo vettore ha direzione ortogonale alla circonferenza e , visto dalla punta di $\vec{\omega}$ il moto appare antiorario. SI ha quindi che $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$ e:

$$|\vec{v}| = \omega R sin \frac{\pi}{2} = \omega R$$

anche se il vettore $\vec{\omega}$si può applicare a qualunque punto dell'asse z, ottenendo:

$$|\vec{v}| = \omega R sin \, \phi = \omega R$$

graficamente si ha a sinistra il caso con applicazione sull'origine normale e a destra il caso applicazione in un punto a scelta:



2.2 Dinamica