

# Tabelle Fondamenti Logico Matematici

## Deduzione Naturale Proposizionale Varie Logiche

connettivo/falso	introduzione	eliminazione
$\wedge$	$\frac{A, B}{A \wedge B} i \wedge$	$\frac{A \wedge B}{A} e \wedge \quad \frac{A \wedge B}{B} e \wedge$
$\vee$	$\frac{A}{A \vee B} i \vee \quad \frac{B}{A \vee B} i \vee$	$\frac{A \vee B, \overset{A}{\cancel{\pi'_C}}, \overset{B}{\cancel{\pi''_C}}}{C} e \vee$
$\rightarrow$	$\frac{\overset{A}{\cancel{\pi_B}}}{A \rightarrow B} i \rightarrow$	$\frac{A, A \rightarrow B}{B} e \rightarrow$
$\neg$	$\frac{\overset{A}{\cancel{\pi_{\neg A}}}}{\neg A} i \neg$	$\frac{\overset{A}{\cancel{\pi_{\neg A}}}}{A} e \neg$
$\perp$	$\frac{A, \neg A}{\perp} i \perp$	$\frac{\perp}{B} e \perp$

- La regola dell'eliminazione del  $\perp$  non si può usare in logica minimale
- La regola dell'introduzione del  $\neg$  non si può usare in logica minimale
- La regola dell'eliminazione del  $\neg$  non si può usare in logica intuizionistica
- Le altre regole sono valide sia per la logica classica che per quella intuizionistica che per quella modale

## Deduzione Naturale Predicativa Varie Logiche

quantificatore	introduzione	eliminazione
$\exists$	$\frac{P(a)}{\exists x P(x)} i \exists$	$\frac{\overset{\pi}{\cancel{P(a)}} \overset{\pi_1}{\cancel{C}}}{\exists x P(x), C} e \exists$
$\forall$	$\frac{\overset{\pi}{P(a)}}{\forall x P(x)} i \forall$	$\frac{\forall x P(x)}{P(a)} e \forall$

- Le regole valgono sia per logica classica che intuizionistica

## Tableaux Logica Intuizionistica Proporzionale

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} T \wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB} F \wedge$
$\vee$	$\frac{S, T(A \vee B)}{S, TA/S, TB} T \vee$	$\frac{S, F(A \vee B)}{S, FA, FB} F \vee$
$\rightarrow$	$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA/S, TB} T \rightarrow$	$\frac{S, F(A \rightarrow B)}{S_T, TA, FB} F \rightarrow$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA} T \neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S_T, TA} F \neg$

### Tableaux Logica Intuizionistica Proporzionale Estesi con Ripetizioni

connettivo	T-regola con eventuale ripetizione
$\rightarrow$	$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA, T(A \rightarrow B)/S, TB} T \rightarrow$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA, T(\neg A)} T \neg$

## Tableaux Ottimizzati Logica Intuizionistica Proporzionale

	T-regola	F-regola	$F_C$ -regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} T \wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB} F \wedge$	$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, F_C A/S_C, F_C B} F_C \wedge$
$\vee$	$\frac{S, T(A \vee B)}{S, TA/S, TB} T \vee$	$\frac{S, F(A \vee B)}{S, FA, FB} F \vee$	$\frac{S, F_C(A \vee B)}{S, F_C A, F_C B} F_C \vee$
$\rightarrow$	$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA, T(A \rightarrow B)/S, TB} T \rightarrow$	$\frac{S, F(A \rightarrow B)}{S_C, TA, FB} F \rightarrow$	$\frac{S, F_C(A \rightarrow B)}{S_C, TA, F_C B} F_C \rightarrow$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, F_C A} T \neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S_C, TA} F \neg$	$\frac{S, F_C(\neg A)}{S_C, TA} F_C \neg$

- $S_C$  è definito come l'insieme  $S$  meno l'insieme delle formule segnate con  $F$

### Ottimizzazioni Implicazione Logica Intuizionistica Proporzionale

Antecedente $Ant$	$\mathbf{T} \rightarrow$
$Ant = A \text{ o } Ant = \neg A$	$\frac{S, TA \rightarrow B}{S, FA/S, TB} T \rightarrow AN$
$Ant = A \wedge B$	$\frac{S, T(A \wedge B) \rightarrow C}{S, T(A \rightarrow (B \rightarrow C))} T \rightarrow \wedge$
$Ant = A \vee B$	$\frac{S, T(A \vee B) \rightarrow C}{S, TA \rightarrow C, TB \rightarrow C} T \rightarrow \vee$
$Ant = A \rightarrow B$	$\frac{S, T(A \rightarrow B) \rightarrow C}{S, FA \rightarrow B, TB \rightarrow C/S, TC} T \rightarrow \rightarrow$

Implicazione segnata (*versione corretta ma non completa di  $T \rightarrow$* )

$$\frac{S, TA \rightarrow B}{S, F_C A/S_C, TB} \overline{T \rightarrow}$$

# Traduzione da Logica Classica Predicativa a Intuizionistica

Si ha  $\vdash_{CL} A \iff \vdash_{INT} \tau(A)$  con:

- $\tau(A) = \neg\neg A$ , con  $A$  atomica
- $\tau(A \wedge B) = \tau(A) \wedge \tau(B)$
- $\tau(A \rightarrow B) = \tau(A) \rightarrow \tau(B)$
- $\tau(A \vee B) = \neg(\neg\tau(A) \wedge \neg\tau(B))$
- $\tau(\neg A) = \neg\tau(A)$
- $\tau(\forall x A(x)) = \forall x \tau(A(x))$
- $\tau(\exists x A(x)) = \neg\forall x \neg\tau(A(x))$

## Tableaux Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\frac{S, T \exists x A(x)}{S, T A(a)} (\text{con } a \text{ nuovo})$	$\frac{S, F \exists x A(x)}{S, F A(a)}$
$\forall$	$\frac{S, T \forall x A(x)}{S, T A(a)}$	$\frac{S, F \forall x A(x)}{S_T, F A(a)} (\text{con } a \text{ nuovo})$

## Tableaux Logica Intuizionistica Predicativa Estesi con Ripetizioni

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\frac{S, T \exists x A(x)}{S, T A(a)} (\text{con } a \text{ nuovo})$	$\frac{S, F \exists x A(x)}{S, F A(a)}$
$\forall$	$\frac{S, T \forall x A(x)}{S, T A(a), T \forall x A(x)}$	$\frac{S, F \forall x A(x)}{S_C, F A(a)} (\text{con } a \text{ nuovo})$

## Tableaux Ottimizzati Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore	$F_C$ -regola
$\exists$	$\frac{S, F_C \exists x A(x)}{S, F_C A(a), F_C \exists x A(x)}$
$\forall$	$\frac{S, F_C \forall x A(x)}{S_C, F A(a), F_C \forall x A(x)} (\text{con } a \text{ nuovo})$

## Ottimizzazioni Implicazione Logica Intuizionistica Predicativa

quantificatore $Ant$	$T \rightarrow$
$\exists$	$\frac{S, T \exists x A(x) \rightarrow B}{S, T (\forall x (A(x) \rightarrow B))}$
$\forall$	$\frac{S, T \forall x A(x) \rightarrow B}{S, F \forall x A(x), T \forall x A(x) \rightarrow B / S, T B}$

# Logica di Kuroda

Si usano le regole dei tableaux Intuizionistici predicativi tranne le seguenti regole:

$$\frac{S, F_C \forall x A(x)}{S_C, F_C A(a)} \overline{F_C \forall} \text{ (con a nuovo)}$$

$$\frac{S, T \forall x A(x) \rightarrow B}{S, F \forall x A(x), F_C \neg \exists x (A(x) \rightarrow B) / S, T B} \overline{T \rightarrow \forall}$$

$$\frac{S_C, T A \rightarrow B}{S_C, F_C A / S_C, T B} CL-T \rightarrow$$

$$\frac{S}{S_C} AT \text{ (se } S \text{ contiene formule segnate } F \text{ solo atomiche, più le } T \text{ e } F_C \text{ qualsiasi)}$$

## Logica $T$

- la logica classica, con tutte le sue proprietà
- l'assioma  $\Box A \rightarrow A$
- l'assioma  $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- la regola di inferenza che dice che se è dimostrabile  $A$  allora è dimostrabile  $\Box A$ , ovvero  $\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$

## Logica $S_4$

- logica  $T$
- l'assioma  $\Box A \rightarrow \Box \Box A$

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, T A, T B} T \wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, F A / S, F B} F \wedge$
$\vee$	$\frac{S, T(A \vee B)}{S, T A / S, T B} T \vee$	$\frac{S, F(A \vee B)}{S, F A, F B} F \vee$
$\rightarrow$	$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, F A / S, T B} T \rightarrow$	$\frac{S, F(A \rightarrow B)}{S, T A, F B} F \rightarrow$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, F A} T \neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S, T A} F \neg$

operatore	T-regola	F-regola
$\Box$	$\frac{S, T(\Box A)}{S, T A} T \Box$	$\frac{S, F(\Box A)}{S_{\Box}, F A} F \Box$

$$S_{\Box} = \{T \Box X \mid T \Box X \in S\}$$

ovvero in  $S_{\Box}$  tengo solo le formule di  $S$  che sono  $T$  “necessarie”

**Regola con ripetizione**

$$\frac{S, T(\Box A)}{T(\Box A), S, T A} T \Box$$

### Tableaux Ottimizzati per Logica $S_4$

connettivo	T-regola	F-regola	$T_C$ -regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} T \wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB} F \wedge$	$\frac{S, T_C(A \wedge B)}{S, T_C A, T_C B} T_C \wedge$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA} T \neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S, TA} F \neg$	$\frac{S, T_C(\neg A)}{S, FA, T_C(\neg A)} T_C \neg$
$\Box$	$\frac{S, T(\Box A)}{S, T_C A} T \Box$	$\frac{S, F(\Box A)}{S_C, FA} F \Box$	$\frac{S, T_C(\Box A)}{S, T_C A} T_C \Box$

$$S_C = \{T \Box X | T \Box X \in S\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\}$$

Ovvero in  $S_C$  manteniamo sia le formule  $T \Box$  che le formule  $T_C$  di  $S$

### Logica $K_1$

- logica  $S_4$
- l'assioma  $\Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box A$

### Tableaux Ottimizzati per Logica $K_1$

connettivo	$T_C$ -regola	$F_C$ -regola
$\wedge$	$\frac{S, T_C(A \wedge B)}{S, T_C A, T_C B} T_C \wedge$	$\frac{S_C, F_C(A \wedge B)}{S_C, F_C A/S_C, F_C B} F_C \wedge -f$
$\neg$	$\frac{S, T_C(\neg A)}{S, F_C A} T_C \neg$	$\frac{S, F_C(\neg A)}{S, T_C A} F_C \neg$
$\Box$	$\frac{S, T_C(\Box A)}{S, T_C A} T_C \Box$	$\frac{S, F_C(\Box A)}{S_C, F_C A} F_C \Box$

$$S_C = \{T \Box X | T \Box X \in S\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\} \cup \{F_C Z | F_C Z \in S\}$$

Ovvero in  $S_C$  manteniamo sia le formule  $T \Box$  che le formule  $T_C$  che quelle  $F_C$  di  $S$   
 $T$ -regole e  $F$ -regole come  $S_4$

### Regola di Thinning

$$\frac{S}{S_C} TH, \quad S_C \neq \emptyset$$

Se non posso applicare la regola di thinning, avendo quindi  $S$  e non  $S_C$ :

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)} F_C \wedge$$

# Logica $K_{1.1}$

- logica  $S_4$
- l'assioma  $\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow A$

## Tableaux Ottimizzati per Logica $K_{1.1}$

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} T\wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB} F\wedge$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA} T\neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S, TA} F\neg$
$\Box$	$\frac{S, T(\Box A)}{S, T_C A} T\Box$	$\frac{S, F(\Box A)}{S_C, FA, F_C(A \wedge \neg \Box A)} F\Box$

connettivo	$T_C$ -regola	$F_C$ -regola
$\wedge$	$\frac{S, T_C(A \wedge B)}{S, T_C A, T_C B} T_C\wedge$	$\frac{S_C, F_C(A \wedge B)}{S_C, F_C A/S_C, F_C B} F_C\wedge -f$
$\neg$	$\frac{S, T_C(\neg A)}{S, F_C A} T_C\neg$	$\frac{S, F_C(\neg A)}{S, T_C A} F_C\neg$
$\Box$	$\frac{S, T_C(\Box A)}{S, T_C A} T_C\Box$	$\frac{S, F_C(\Box A)}{S_C, F_C A} F_C\Box$

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in S\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\} \cup \{F_C Z | F_C Z \in S\}$$

Ovvero in  $S_C$  manteniamo sia le formule  $T\Box$  che le formule  $T_C$  che quelle  $F_C$  di  $S$

## Regola di Thinning

$$\frac{S}{S_C} TH, \quad S_C \neq \emptyset$$

Se non posso applicare la regola di thinning, avendo quindi  $S$  e non  $S_C$ :

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)} F_C\wedge$$

# Logica $S_5$

- logica  $S_4$
- l'assioma  $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

## Tableaux Ottimizzati per Logica $S_5$

connettivo	T-regola	F-regola	$T_C$ -regola
$\wedge$	$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB} T \wedge$	$\frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB} F \wedge$	$\frac{S, T_C(A \wedge B)}{S, T_C A, T_C B} T_C \wedge$
$\neg$	$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA} T \neg$	$\frac{S, F(\neg A)}{S, TA} F \neg$	$\frac{S, T_C(\neg A)}{S, FA, T_C(\neg A)} T_C \neg$
$\Box$	$\frac{S, T(\Box A)}{S, T_C A} T \Box$	$\frac{S, F(\Box A)}{S_C, FA, [S_u]} F \Box$	$\frac{S, T_C(\Box A)}{S, T_C A} T_C \Box$

$$S_C = \{T \Box X | T \Box X \in S\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\}$$

### Regola di jumping

$$\frac{S, [S_u]}{S_C, [S_u], sB} JP, \text{ con } sB \in S_u$$

Ovvero con la regola di jumping si tolgono da  $S$  tutte le formule  $T$ , che non siano necessitate, e  $F$  e da  $[S_u]$  si ottiene  $[S_u']$  estraendo la formula  $sB$

$$[S_u] = S - S_C$$

ovvero  $[S_u]$  è l'insieme che contiene solo le formule di  $S$  segnate  $T$  ed  $F$

$$[S_u'] = (S_u \cup \{S - S_C\}) - \{sB\}$$

quando si applica la regola di jumping si estrae da  $[S_u]$  una formula segnata  $T$  o  $F$ , che chiamo  $sB$ , e chiamo l'insieme rimanente  $[S_u']$