

Metodi Formali

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Contenuti del Corso	2
2	Sviluppo di Modelli e Sistemi	3
2.1	Sistemi Elementari	6
2.1.1	Diamond Property	19
2.1.2	Isomorfismo tra Sistemi di Transizione Etichettati . . .	22
2.1.3	Il Problema della Sintesi	23
2.1.4	Contatti	24
2.1.5	Situazioni Fondamentali	26
2.1.6	Sottoreti	32
2.1.7	Operazioni di Composizione per Reti di Petri	34
2.2	Reti Posti e Transizioni	37
2.2.1	I Filosofi a Cena	40
2.2.2	Formalizzazione delle Reti Posti e Transizioni	46

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlccgold/Appunti>.

Grazie mille e buono studio!

1.1 Contenuti del Corso

Il corso tratta di metodi e tecniche formali per specificare, disegnare e analizzare sistemi complessi, in particolare sistemi concorrenti e distribuiti costituiti da componenti che operano in modo indipendente e che interagiscono tra loro.

Si usa un linguaggio logico che spiega il comportamento di tali sistemi e fa riferimento alla **logica temporale** di tali sistemi, in quanto le proprietà di tali sistemi sono tali per cui evolvono con il cambiamento di stato del sistema e quindi serve una logica che descriva le proprietà dell'evoluzione del comportamento.

Si parlerà delle **Reti di Petri**, ovvero uno strumento per modellare tali sistemi concorrenti e distribuiti. Questo modello ha intrinseci dei teoremi matematici atti a studiare il comportamento di tali sistemi.

In laboratorio si studieranno algoritmi e strumenti software per la modellazione e l'analisi di tali sistemi.

Si introducono a che sistemi dinamici a tempi discreti, come gli **automi cellulari**.

Capitolo 2

Sviluppo di Modelli e Sistemi

Si hanno diverse fasi di sviluppo di *sistemi complessi* (nel nostro caso **concorrenti** e **distribuiti**). Si hanno 4 grandi fasi (che riprendono le generiche fasi dello sviluppo software), che non seguono una rigida sequenza cronologica tra di loro:

1. specifica del problema e delle proprietà della soluzione
2. modellazione della soluzione
3. implementazione
4. verifica, validazione e collaudo, sia sul modello che implementazione (con eventuali modifiche)

Queste fasi possono alternarsi a vicenda.

I metodi formali possono svolgere una parte rilevante in tutte queste 4 fasi e hanno la prerogativa di sviluppare questi sistemi in maniera corretta e persistente.

Ci si focalizza sulla modellazione e sulla specifica delle proprietà. Si studia inoltre la verifica delle proprietà sul modello costruito. *In questo corso si lascia un attimo da parte l'aspetto implementativo, che comunque seguirebbe alla verifica e alla validazione del metodo.*

Si hanno diversi modelli di sistemi concorrenti e distribuiti, presenti in letteratura:

- **Algebre di Processi**, ovvero una miriade di diversi linguaggi, studiate inizialmente da Milner, che introdusse il calcolo dei sistemi comunicanti, un calcolo algebrico utile alla semantica della concorrenza. Inoltre Hoare ha introdotto i **processi sequenziali comunicanti** come un nucleo di linguaggio di programmazione,

usato come linguaggio macchina per le prime macchine parallele. Queste algebre si basano sul paradigma di avere un forte aspetto della **composizionalità**, in quanto un sistema viene visto come costituito da diverse componenti autonome (sia hardware, che software, che umane) che interagiscono tra loro sincronizzandosi (in modo sincrono, *handshaking*, sfruttando un “canale di comunicazione” che viene modellato come un processo) e scambiandosi messaggi. Questo paradigma è anche alla base dello sviluppo di molti linguaggi di programmazione specificatamente dedicati alla concorrenza.

- **Automi a Stati Finiti.** Un modello concorrente e distribuito viene spesso rappresentato attraverso **sistemi di transizioni etichettati**, che sono una derivazione del modello degli automi a stati finiti, già usati in letteratura per modellare reti neurali, progettare circuiti asincroni, modellare macchine a stati finiti, riconoscere linguaggi regolari (il teorema di Kleene ci ricorda che *ad un automa a stati finiti è possibile associare un’espressione regolare*) e per la modellazione di protocolli di comunicazione.
- **Reti di Petri**, introdotte da Petri con la **teoria generale delle reti di Petri** nella sua tesi di dottorato. Questa teoria parte da una critica al modello a stati finiti dove il focus è su stati globali e trasformazione di stati globali. Petri cercava invece una teoria matematica (fondata sui principi della fisica moderna della relatività e della quantistica) che fosse una teoria dei sistemi in grado di descrivere sistemi complessi in cui mettere al centro il flusso di informazione e che potesse permettere di analizzare l’organizzazione dal punto di vista del flusso di informazione che passa da una componente all’altra. Non si ha il focus, quindi, su “macchine calcolatrici” ma come supporto alla comunicazione in organizzazioni complesse. Si hanno quindi diversi elementi chiave:
 - la comunicazione
 - la sincronizzazione tra componenti
 - il flusso di informazione che passa tra le varie componenti
 - la relazione di concorrenza e l’indipendenza causale tra i vari eventi che comportano i cambiamenti di stato. Ci si concentra su stati locali e non sulla visione di una sequenza di azioni e di uno stato globale

La teoria delle reti di Petri è stata poi sviluppata e ha avuto diverse applicazioni. Sono stati sviluppati diversi linguaggi, ovvero diverse **classi di reti di Petri** per descrivere un sistema complesso a livelli differenti di astrazione.

Sono state anche sviluppate tecniche formali di analisi e di verifica del modello (disegnato mediante reti di Petri), basate sulla teoria dei grafi e sull'algebra lineare.

Le reti di Petri hanno avuto un notevole utilizzo in diversi ambiti applicativi anche estranei all'informatica pura e allo studio della concorrenza, come la modellazione di sistemi biologici o la modellazione di reazioni chimiche. Mediante una classe di reti particolare, le **reti stocastiche** si può valutare le prestazioni di un determinato modello.

Sistemi di Transizioni Etichettati

Definizione 1. *I sistemi di transizione etichettati sono definiti come gli automi a stati finiti ma senza essere visti come riconoscitori di linguaggi infatti un sistema è formato da un insieme, solitamente finito, di stati globali S . Si ha poi un alfabeto delle possibili azioni che può eseguire il sistema. Si hanno anche delle relazioni di transizioni, ovvero delle transizioni che permettono di specificare come, attraverso un'azione, si passa da uno stato ad un altro. Le transizioni si rappresentano con archi etichettati tra i nodi, che rappresentano gli stati. Le etichette degli archi rappresentano le azioni necessarie alla trasformazione. L'insieme delle azioni viene chiamato E mentre $T \subseteq S \times E \times S$ è l'insieme degli archi etichettati. Può essere, opzionalmente, individuato uno stato iniziale s_0 . Un sistema non è obbligato a "terminare", quindi non si ha obbligatoriamente uno stato finale.*

Riassumendo quindi un sistema di transizione etichettato è un quadrupla:

$$A = (S, E, T, s_0)$$



Figura 2.1: Esempio di sistema di transizione etichettato

La critica di Petri è che in un sistema distribuito non sia individuabile uno **stato globale**, che in un sistema distribuito le trasformazioni di stato siano **localizzate** e non globali, che non esista un sistema di riferimento temporale unico (si possono avere più assi temporali in un sistema distribuito). Quindi la simulazione sequenziale non deterministica (emantica a “interleaving”) dei sistemi distribuiti è una forzatura e non rappresenta le reali caratteristiche del comportamento del sistema, ovvero la località, la distribuzione degli eventi e la relazione di dipendenza causale e non causale tra gli eventi.

2.1 Sistemi Elementari

Per introdurre i sistemi elementari delle reti di Petri, ovvero una classe molto semplice e astratta partiamo da un esempio:

Esempio 1. *Vediamo l'esempio del Produttore e del Consumatore.*

Si ha un sistema con una componente Produttore che produce elementi e li deposita in un buffer che ha un'unica posizione (quindi o è pieno o è vuoto) e con un consumatore che preleva dal buffer un elemento per poi consumarlo ed essere pronto a prelevare un altro elemento. Si ha un comportamento ciclico. Usiamo quindi le reti di Petri, col modello dei sistemi elementari, per rappresentare questo modello. Bisogna quindi individuare le proprietà fondamentali locali del sistema.

Partiamo dal produttore, che può avere 2 stati locali:

1. pronto per produrre
2. pronto per depositare

*Usiamo i **cerchi** per rappresentare condizioni locali che sono associabili a delle proposizioni della logica che possono essere vere o false. Queste preposizioni sono quindi stati locali. Gli eventi locali vengono invece rappresentati con un **rettangolo**. Un evento ha un arco entrante da uno stato che rappresenta le precondizioni di quell'evento (che devono essere vere per permettere l'occorrenza dell'evento). L'occorrenza dell'evento rende false le precondizioni e rende vere le postcondizioni (che sono stati raggiungibili con un arco uscente da un evento). Si ha quindi che il produttore può depositare solo se il buffer non è pieno, quindi le postcondizioni di un evento devono essere false affinché l'evento possa occorrere (oltre alle precondizioni vere).*

Passiamo al consumatore che estrae solo se il buffer è pieno ed è pronto a prelevare. Si procede poi con la stessa logica del produttore di cambiamento tra vero e falso delle varie condizioni locali.

In questo esempio si hanno quindi condizioni che sono preposizioni booleane e rappresentano stati locali.



Figura 2.2: Produttore e Consumatore

Lo stato globale del sistema è dato da una collezione di stati locali. Per segnare tali condizioni mettiamo un punto pieno dentro il cerchio e queste condizioni “abilitano” i vari eventi: Si può arrivare ad una configurazione



Figura 2.3: Uno stato globale Produttore e Consumatore dove l'evento *produce* è l'unico abilitato

dove, per esempio, sia l'evento *produce*, del produttore, che l'evento *preleva*, del consumatore, sono abilitati. Si ha quindi che i due eventi possono

occorrere in modo **concorrente** infatti i due eventi sono **indipendenti** in quanto condizionati da **precondizioni e postcondizioni completamente disgiunte**. Due eventi che occorrono in maniera concorrente lo possono fare in qualsiasi ordine, non si ha infatti una sequenza temporale specifica tra i due.

In questo sistema quindi siano solo stati locali ed eventi localizzati e non stati ed eventi globali. Un evento dipende solo dalle sue precondizioni e dalle sue postcondizioni.

Se rappresentiamo con delle marche le condizioni vere possiamo simulare il comportamento del sistema con il gioco delle marche che mostra come l'evoluzione delle condizioni avviene all'occorrenza degli eventi.

La simula di un tale sistema può comunque avvenire con un sistema di transizioni etichettato, ovvero con un automa a stati finiti, che rappresenta gli stati globali corrispondenti alle diverse combinazioni di stati locali che di volta in volta sono veri. Gli archi vengono etichettati con gli eventi che comportano un cambiamento di stato globale:



Figura 2.4: Semplificazione della nomenclatura del sistema per praticità



Figura 2.5: Rappresentazione del sistema con un automa a stati finiti che rappresenta stati globali

Passiamo ora alla formalizzazione di questi aspetti.

Definizione 2. Una **rete elementare** è definita come una tripla:

$$N = (B, E, F)$$

dove:

- B è un insieme finito di **condizioni**, ovvero stati locali, preposizioni booleane etc.... Vengono rappresentate con un cerchio
- E è un insieme finito di **eventi**, ovvero trasformazioni locali di stato e transizioni locali. Vengono rappresentate con un quadrato
- F è una **relazione di flusso** che connette condizioni ad eventi ed eventi a condizioni. Si ha quindi che:

$$F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$$

Le relazioni di flusso sono rappresentate da archi orientati. Inoltre la relazione di flusso è tale per cui non esistano **elementi isolati**, in quanto non avrebbero senso, in un tale sistema, eventi isolati (che non modificherebbero mai una condizione) o condizioni isolate (che non verrebbero mai modificate da un evento). Si ha, formalmente, che:

$$\text{dom}(F) \cup \text{ran}(F) = B \cup E$$

chiedere per formula sopra

Si ha che:

$$B \cap E = \emptyset$$

$$B \cup E \neq \emptyset$$

Ovvero gli insiemi delle condizioni e degli eventi sono tra loro disgiunti e non vuoti.

Sia ora x un elemento qualsiasi della rete, ovvero x può essere o una condizione o un evento, formalmente:

$$x \in B \cup E$$

si ha che:

- $\bullet x = \{y \in X : (y, x)\}$ rappresenta l'insieme di tutti gli elementi y che sono connessi dalla relazione di flusso ad x , ovvero si ha un arco da y a x . Sono quindi i **pre-elementi** di x , ovvero le precondizioni, se x è un evento, o i pre-eventi, se x è una condizione
- $x^\bullet = \{y \in X : (x, y)\}$ rappresenta l'insieme di tutti gli elementi y che sono connessi dalla relazione di flusso a partire da x , ovvero si ha un arco da x a y . Sono quindi i **post-elementi** di x , ovvero le postcondizioni, se x è un evento, o i post-eventi, se x è una condizione

Posso estendere questa notazione ad insiemi di elementi. Sia A un insieme qualsiasi di elementi, che possono quindi essere sia condizioni che eventi:

$$A \subseteq B \cup E$$

Si ha quindi che i pre-elementi dell'insieme A sono rappresentati con:

$$\bullet A = \bigcup_{x \in A} \bullet x$$

ovvero l'unione dei pre-elementi di ogni singolo elemento dell'insieme A . Analogamente si ha che i post-elementi dell'insieme A sono rappresentati con:

$$A^\bullet = \bigcup_{x \in A} x^\bullet$$

ovvero l'unione dei post-elementi di ogni singolo elemento dell'insieme A . Nelle reti c'è sempre una relazione di **dualità** tra due elementi, per esempio tra condizioni ed eventi, tra pre-eventi e post-eventi, tra pre-condizioni e post-condizioni. Inoltre si ha la caratteristica della **località**, quindi si hanno stati locali e trasformazioni di stato locali

La rete $N = (B, E, F)$ descrive la *struttura statica del sistema*, il comportamento è definito attraverso le nozioni di **caso (o configurazione)** e di **regola di scatto (o di transizione)**.

Una rete può anche essere suddivisa in sotto-reti, seguendo l'esempio sopra si potrebbe avere una sotto-rete per il produttore, una per il consumatore e anche una per il buffer.

Definizione 3. Un **caso (o configurazione)** è un insieme di condizioni $c \subseteq B$ che rappresentano l'insieme di condizioni vere in una certa configurazione del sistema, un insieme di **stati locali** che collettivamente individuano lo **stato globale** del sistema.

Graficamente le condizioni vere presentano un puntino in mezzo al cerchio mentre le condizioni false solo un cerchio vuoto

Definizione 4. Sia $N = (B, E, F)$ una rete elementare e sia $c \subseteq B$ una certa configurazione (non serve quindi necessariamente conoscere tutto lo stato del sistema). La **regola di scatto** mi permette di stabilire quando un evento $e \in E$ è abilitato, ovvero può occorrere, in c sse:

$$\bullet e \subseteq c \text{ e } e^\bullet \cap c = \emptyset$$

ovvero sse tutte le precondizioni dell'evento sono vere (e quindi sono contenute nella configurazione c) e sse tutte le postcondizioni sono false (quindi non si hanno intersezioni tra le postcondizioni e la configurazione).

L'occorrenza (l'abilitazione) di e in c si denota con la scrittura:

$$c[e >$$

Se un evento e è abilitato in c , ovvero $c[e >$, si ha che quando e occorre in c genera un nuovo caso c' e si usa la notazione:

$$c[e > c'$$

Si ha quindi che c' è così calcolabile:

$$c' = (c - \bullet e) \cup e^\bullet$$

Ovvero togliendo da c tutte le precondizioni dell'evento e e aggiungendo quindi tutte le postcondizioni di e

Le reti si basano sul **principio di estensionalità**, ovvero sul fatto che il cambiamento di stato è locale:

un evento è completamente caratterizzato dai cambiamenti che produce negli stati locali, tali cambiamenti sono indipendenti dalla particolare configurazione in cui l'evento occorre.

L'importante è che le precondizioni di un evento siano vere e le postcondizioni false (siamo comunque interessati solo alla validità delle condizioni che riguardano l'evento).

Esempio 2. Vediamo un esempio esplicativo dove l'evento e è l'unico abilitato, ovvero le sue precondizioni sono vere e le sue postcondizioni sono false. Lo scatto di e rende le precondizioni false e le postcondizioni vere, mentre le altre condizioni rimangono inalterate:



Si nota quindi che lo scatto dell'evento e riguarda solo le precondizioni e le postcondizioni di quel dato evento, come ci ricorda il principio di estensionalità

Definizione 5. Sia $N = (B, E, F)$ una rete elementare. Possiamo definire due tipologie di rete:

1. N è definita **semplice** sse:

$$\forall x, y \in B \cup E, (\bullet x = \bullet y) \wedge (x^\bullet = y^\bullet) \Rightarrow x = y$$

Ovvero per ogni coppia di elementi (che siano quindi eventi o condizioni) se i loro pre-elementi e i loro post-elementi coincidono allora non ha senso distinguere x e y .



Figura 2.6: Esempi di reti **non** semplici

2. N è definita **pura** sse:

$$\forall e \in E : \bullet e \cap e^\bullet = \emptyset$$

Ovvero se per ogni evento non esiste una preconditione che sia anche postcondizioni. Si ha quindi un **cappio** (detto anche **side condition**) tra un evento e una condizione. Avere questa situazione comporta che l'evento non può scattare in quanto la condizione che per lui è sia una preconditione che una postcondizioni non può essere contemporaneamente vera e falsa, l'evento non potrà mai scattare e quindi non potrà mai essere osservato. Non avrebbe quindi senso modellarlo



Figura 2.7: Esempio di rete **non** pura

Definizione 6. Data una rete elementare $N = (B, E, F)$ e sia $U \subseteq E$ un sottoinsieme di eventi e siano $c, c_1, c_2 \in B$ tre configurazioni. Si ha che:

- U è un **insieme di eventi indipendenti** sse:

$$\forall e_1, e_2 \in U : e_1 \neq e_2 \Rightarrow (\bullet e_1 \cup e_1^\bullet) \cap (\bullet e_2 \cup e_2^\bullet) = \emptyset$$

ovvero per ogni coppia distinta di eventi nell'insieme U si ha che le preconditioni e le postcondizioni dei due eventi sono completamente disgiunte.

- U è un **passo abilitato**, ovvero un insieme di eventi concorrenti in una certa configurazione c , che si indica con:

$$c[U >$$

sse:

$$U \text{ è un insieme di eventi indipendenti } \wedge \forall e \in U : c[e >$$

U quindi deve essere un insieme di eventi indipendenti e ogni evento in U è abilitato in c , quindi le sue precondizioni sono vere e le sue postcondizioni sono false. Si ha quindi che U è un insieme di eventi abilitati in maniera concorrente in c

- U è un **passo** dalla configurazione c_1 alla configurazione c_2 , che si indica con:

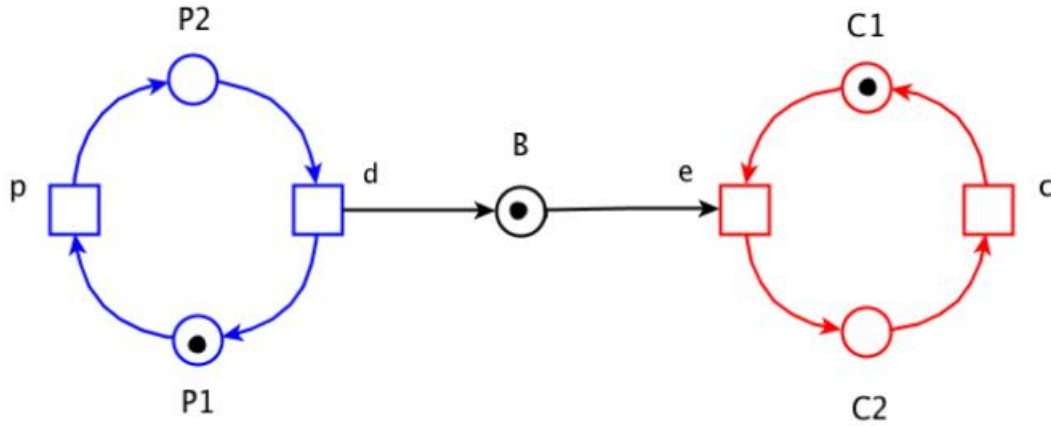
$$c_1[U > c_2$$

sse:

$$(c_1[U) \wedge (c_2 = (c_1 - \bullet U) \cup U \bullet))$$

ovvero sse U è un passo abilitato in c_1 e lo scatto degli eventi in U porta alla configurazione c_2 che si ottiene togliendo da c_1 l'insieme delle precondizioni degli eventi in U e aggiungendo quindi l'insieme delle postcondizioni degli eventi in U

Esempio 3. Riprendiamo l'esempio del produttore e del consumatore. Sia dato il sistema Σ che modella produttore e consumatore



Si hanno:

- $\{p, e\}, \{p, c\}, \{d, c\}$ esempi di insiemi di eventi indipendenti
- $\{p, e\}$ che è un passo abilitato in $\{P_1, B, C_1\}$
- $\{P_1, B, C_1\}[\{p, w\} > \{P_2, C_2\}$ ovvero lo scatto del passo $\{p, e\}$ ci porta in $\{P_2, C_2\}$

Diamo ora una definizione formale di **sistema elementare**.

Definizione 7. Un **sistema elementare** $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ è definito come una rete $N = (B, E, F)$ e a cui è associato un caso iniziale, una configurazione iniziale, ovvero un sottoinsieme di condizioni che rappresentano lo stato iniziale da cui inizia la computazione e l'evoluzione del sistema. Formalmente il caso iniziale si indica con $C_{in} \in B$

Definizione 8. Dato un sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ si indica con C_Σ l'insieme dei **casi raggiungibili** da tale sistema a partire dal caso iniziale c_{in} .

Formalmente l'insieme dei casi raggiungibili è il di piccolo sottoinsieme dell'insieme delle parti di B , ovvero 2^B , tale che:

- $c_{in} \in C_\Sigma$, ovvero sicuramente il caso iniziale appartiene all'insieme dei casi raggiungibili
- se $c \in C_\Sigma$, $U \subseteq E$ e $c' \subseteq B$ sono tali che $c[U > c'$ allora $c' \in C_\Sigma$, ovvero se ho un generico caso c che appartiene ai casi raggiungibili, se ho un insieme di eventi U tale che questo insieme di eventi (che abbiamo visto essere indipendenti, per la definizione di passo abilitato) è abilitato in c in un unico passo e la sua occorrenza mi porta in c' , allora anche c' appartiene a C_Σ .

Questa è una definizione data per **induzione strutturale**, nel primo punto si ha la base, nel secondo l'ipotesi e la conseguenza

Definizione 9. Dato un sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ si indica con U_Σ l'**insieme dei passi** di Σ , ovvero di tutti i possibili insiemi di eventi indipendenti che possono occorrere in qualche caso. Formalmente:

$$U_\Sigma = \{U \subseteq E \mid \exists c, c' \in C_\Sigma : c[U > c'\}$$

Ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di eventi tali per cui esistano due casi raggiungibili in C_Σ e U è abilitato in c e il suo scatto mi porta in c' .

Definiamo ora il comportamento dei sistemi elementari.

Definizione 10. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare e siano $c_i \in C_\Sigma$ ed $e_i \in E$. Definiamo;

- un **comportamento sequenziale** come una sequenza di eventi che possono occorrere dal caso iniziale. Facendo scattare in maniera sequenziale gli eventi uno alla volta in c_n :

$$c_{in}[e_1 > c_1[e_2 > \dots [e_n > c_n$$

Scrittura che può essere alleggerita in:

$$c_{in}[e_1 e_2 \dots e_n > c_n$$

Possiamo dire di avere a che fare con una **simulazione sequenziale non deterministica**, detta anche **semantica a interleaving**, infatti ho più eventi abilitati da prendere uno alla volta

- un **comportamento non sequenziale**, in quanto possiamo anche considerare insiemi di eventi, ovvero passi. Considero quindi sequenze di passi, avendo a che fare con la **step semantics**. Non ho quindi una simulazione sequenziale non deterministica in quanto dal caso iniziale faccio scattare un insieme di eventi, in maniera concorrente (e quindi senza ordine specificato), per poi far scattare un altro insieme di eventi fino ad arrivare a c_n :

$$c_{in}[U_1 > c_1[U_2 > \dots [U_n > c_n$$

Scrittura che può essere alleggerita in:

$$c_{in}[U_1 U_2 \dots U_n > c_n$$

Gli insiemi U_i non sono insiemi massimali abilitati ma sottoinsiemi indipendenti e abilitati in c_{in} .

Posso avere anche un altro tipo di **comportamento non sequenziale**, definito da Petri stesso, in una **semantica ad ordini parziali** in cui si definiscono processi non sequenziali. Il comportamento di tale sistema viene registrato in una rete di Petri

In ogni caso si considerano sia sequenze finite che infinite (con cicli) di eventi o passi.

Esempio 4. Dato il sistema elementare Σ :



si ha, per esempio, la seguente sequenza di occorrenza di eventi:

$$\{1, 2\}[a > \{3, 2\}][b > \{3, 4\}][c > \{1, 2\}][b > \{1, 4\}][d > \{5\}]$$

arrivati in “5” abbiamo un caso finale, ovvero una situazione di **deadlock**, in quanto il sistema non può evolvere ulteriormente.

Vediamo anche la seguente possibile sequenza di passi. In “1” e “2” sia “a” che “b” sono indipendenti e sono entrambi abilitati (scattano in maniera concorrente in un unico passo... ovviamente posso avere passi con lo scatto di un solo evento):

$$\{1, 2\}[\{a, b\} > \{3, 4\}][\{c\} > \{1, 2\}][\{b\} > \{1, 4\}]$$

Come ricordato posso finire in una sequenza infinita.

Vediamo ora come modellare e registrare il comportamento del sistema. Un modo è usando il **grafo dei casi raggiungibili**.

Definizione 11. Il **grafo dei casi raggiungibili** di un sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ è il sistema di transizioni etichettato:

$$CG_{\Sigma} = (C_{\Sigma}, U_{\Sigma}, A, c_{in})$$

dove:

- C_{Σ} è l'insieme dei nodi del grafo, ovvero gli stati globali sono i casi raggiungibili dal sistema Σ
- U_{Σ} , è l'alfabeto, ovvero i passi del sistema rappresentano l'alfabeto

- A è l'insieme di archi etichettati, formalmente definito come:

$$A = \{(c, U', c') \mid c, c' \in C_\Sigma, U \in U_\Sigma, c[U > c']\}$$

ovvero sono archi che connettono uno caso c con un caso c' e sono etichettati con un passo U sse U è abilitato in c e porta in c' . Ovviamente c e c' devono essere raggiungibili e U deve appartenere all'insieme dei passi di Σ

Figura 2.8: il sistema Σ Figura 2.9: Grafo dei casi del sistema Σ

2.1.1 Diamond Property

Dato un sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ e il suo grafo dei casi $CG_\Sigma = (C_\Sigma, U_\Sigma, A, c_{in})$ si ha che il grafo soddisfa una particolare proprietà, detta **diamond property**, tipica solo dei sistemi elementari.

Definizione 12. La **diamond property** stabilisce una proprietà della struttura del grafo della rete elementare, ovvero, dati $U_1, U_2 \in U_\Sigma$ tali che:

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $U_1 \neq \emptyset$
- $U_2 \neq \emptyset$

e dati $c_i \in C_\Sigma$ allora vale, per esempio:



ovvero se posso rilevare come sottografo una struttura come quella a sinistra nell'immagine allora sicuramente tale sottografo contiene anche l'arco gli archi per ottenere l'immagine di destra. Il discorso vale anche all'opposto.

Si possono fare delle prove:

1. **prima prova:**

Dimostriamo che possiamo passare all'immagine di destra da quella di sinistra aggiungendo i due archi mancanti.

Per semplicità diciamo che U_i è un singolo evento e_i , con $i = 1, 2$. Siano inoltre $c_1, c_2 \in C_\Sigma$, ovvero sono casi raggiungibili, ed $e_1, e_2 \in E$ tali che $c_1[e_1 > c_2[e_2 >$ e $c_1[e_2 >$, i due eventi quindi sono abilitati in sequenza e da c_1 è anche abilitato c_2 . Si vuole dimostrare che:

$$(\bullet e_1 \cup e_1 \bullet) \cap (\bullet e_2 \cup e_2 \bullet) = \emptyset$$

ovvero che i due eventi sono indipendenti, che sono entrambi abilitati e che sono eseguibili in qualsiasi ordine.

Da $c_1[e_1 > e_2]$ segue che:

- $\bullet e_1 \cap \bullet e_2 = \emptyset$
- $\bullet e_2 \cap \bullet e_1 = \emptyset$

infatti se e_1 e e_2 sono entrambi abilitati in c_1 , le loro pre-condizioni sono vere e le post-condizioni false, e quindi non è possibile che una condizione sia contemporaneamente precondizione di e_1 (vera) e anche postcondizione di e_2 (falsa), e viceversa. Quindi le precondizioni di un evento sono disgiunte dalle postcondizioni dell'altro. Inoltre dal fatto che ho $c_1[e_1 > c_2[e_2]$, ovvero che da c_1 è abilitato e_1 e che dopo lo scatto di e_1 è ancora abilitato e_2 possiamo dire che:

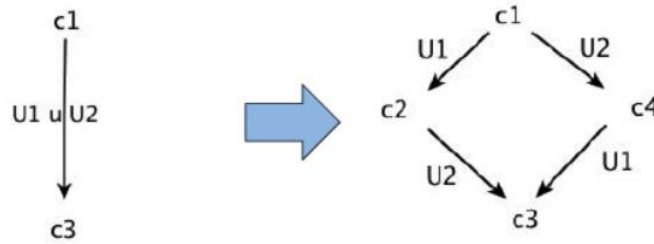
- $e_1^\bullet \cap e_2^\bullet = \emptyset$
- $\bullet e_1 \cap \bullet e_2 = \emptyset$

in c_2 , infatti, le pre-condizioni di e_1 sono false mentre le precondizioni di e_2 sono vere e quindi e_1 e e_2 non possono avere precondizioni in comune; inoltre sempre in c_2 le postcondizioni di e_1 sono vere, mentre quelle di e_2 sono false, e quindi e_1 e e_2 non possono avere post-condizioni in comune. Quindi le precondizioni dei due eventi sono disgiunte, come del resto anche le postcondizioni, in quanto i due eventi sono sequenziali.

Si è quindi dimostrato che i due eventi hanno precondizioni e post-condizioni completamente disgiunte e quindi la tesi è verificata

2. seconda prova:

Analizzando la situazione:



Si supponga che $U_1 \cup U_2 \in U_\Sigma$ e che si abbiano:

- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ovvero sono disgiunti
- $U_1 \neq \emptyset$
- $U_2 \neq \emptyset$

allora se $c_1[(U_1 \cup U_2) > c_3]$, quindi è abilitato il passo $U_1 \cup U_2$ in c_1 , sicuramente si ha che sono abilitati anche i singoli passi:

- $c_1[U_1 >$
- $c_1[U_2 >$

resta da dimostrare che dopo lo scatto di U_1 è ancora abilitato U_2 in c_2 . Ma se $U_1 \cup U_2$ è un passo abilitato significa che posso eseguirli in qualsiasi ordine, quindi anche prima U_1 e poi U_2 , e questo comporta sicuramente che U_2 è abilitato e che porta a c_3 . Analogamente invertendo U_1 e U_2 , formalmente:

- $c_1[U_1 > c_2[U_2 > c_3]$
- $c_1[U_2 > c_4[U_1 > c_3]$

Si dimostra così che l'immagine di sinistra comporta quella di destra.

Grazie alla diamond property possiamo non considerare il grafo dei casi raggiungibili ma solo il **grafo dei casi sequenziale**:

Definizione 13. *Un **grafo dei casi sequenziale** del sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ è una quadrupla:*

$$SCG_\Sigma = (C_\Sigma, E, A, c_{in})$$

dove le etichette sono i singoli eventi (mentre il resto rimane definito come nel grafo dei casi raggiungibili). Formalmente si ha quindi che:

$$A = \{(c, e, c') \mid c, c', e \in E : c[e > c']\}$$



Figura 2.10: Esempio di grafo dei casi sequenziale

Si registra quindi l'occorrenza di un evento alla volta. Il grafo dei casi sequenziale è quindi il sistema di transizione con gli archi etichettati dai singoli eventi.



Figura 2.11: Esempio di grafo dei casi sequenziale dell'esempio con produttore e consumatore

Riprendendo l'immagine precedente si ha che per la diamond property possono aggiungere l'arco "centrale" che trasformerebbe nuovamente il grafo dei casi sequenziale in quello dei casi raggiungibili quindi: *per la diamond property, nei sistemi elementari il grafo dei casi e il grafo dei casi sequenziale sono sintatticamente equivalenti*, ovvero possono essere ricavati a vicenda.

Questo implica il fatto che due sistemi elementari hanno grafi dei casi **isomorfi** se hanno grafi dei casi sequenziali isomorfi.

2.1.2 Isomorfismo tra Sistemi di Transizione Etichettati

Si ricorda che:

Si parla di isomorfismo quando due strutture complesse si possono applicare l'una sull'altra, cioè far corrispondere l'una all'altra, in modo tale che per ogni parte di una delle strutture ci sia una parte corrispondente nell'altra struttura; in questo contesto diciamo che due parti sono corrispondenti se hanno un ruolo simile nelle rispettive strutture.

Diamo ora una definizione formale di isomorfismo tra sistemi di transizione etichettati, che possono quindi essere grafi dei casi o grafi dei casi sequenziali.

Definizione 14. *Siano dati due sistemi di transizione etichettati:*

$A_1 = (S_1, E_1, T_1, s_{01})$ e $A_2 = (S_2, E_2, T_2, s_{02})$.

*e siano date due **mappe biunivoche**:*

1. $\alpha : S_1 \rightarrow S_2$, ovvero che passa dagli stati del primo sistema a quelli del secondo
2. $\beta : E_1 \rightarrow E_2$, ovvero che passa dagli eventi del primo sistema a quelli del secondo

allora:

$$\langle \alpha, \beta \rangle : A_1 = (S_1, E_1, T_1, s_{01}) \rightarrow A_2 = (S_2, E_2, T_2, s_{02})$$

*è un **isomorfismo** sse:*

- $\alpha(s_{01}) = s_{02}$, ovvero l'immagine dello stato iniziale del primo sistema coincide con lo stato iniziale del secondo
- $\forall s, s' \in S_1, \forall e \in E_1 : (s, e, s') \in T_1 \Leftrightarrow (\alpha(s), \beta(e), \alpha(s')) \in T_2$
ovvero per ogni coppia di stati del primo sistema, tra cui esiste un arco etichettato e , vale che esiste un arco, etichettato con l'immagine di e , nel secondo sistema che va dall'immagine del primo stato considerato del primo sistema all'immagine del secondo stato considerato del secondo sistema, e viceversa

Definizione 15. *Si definiscono due **sistemi equivalenti** sse hanno grafi dei casi sequenziali, e quindi di conseguenza anche grafi dei casi, isomorfi. Due sistemi equivalenti accettano ed eseguono le stesse sequenze di eventi*

2.1.3 Il Problema della Sintesi

Si presenta ora un problema tipico dell'informatica, il **problema della sintesi**, ovvero dato un comportamento, o meglio una sua specifica, decidere se esiste un'implementazione di tale specifica, ovvero un modello, che abbia esattamente quel comportamento.

In questo caso dato un sistema di transizioni etichettato $A = (S, E, T, s_0)$, con:

- S insieme degli stati
- E insieme delle etichette, ovvero degli eventi
- T insieme delle transizioni
- s_0 stato iniziale

ci si propone di stabilire se esiste un sistema elementare $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$, tale che l'insieme degli eventi del sistema esattamente l'insieme delle etichette di A e tale che il suo grafo dei casi SCG_Σ sia isomorfo ad A . Ci si propone anche di costruirlo.

Il problema è stato risolto mediante la cosiddetta **teoria delle regioni** (che però non verrà trattato nel corso). Si può però dire che A dovrà soddisfare la diamond property, in quanto altrimenti non sarebbe un sistema di transizioni che potrebbe corrispondere al comportamento di un sistema elementare.

2.1.4 Contatti

Definizione 16. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare e siano $e \in E$ un evento e $c \in C_\Sigma$ un caso raggiungibile dal caso iniziale. Allora si ha che (e, c) è un **contatto** sse:

$$\bullet e \subseteq c \wedge e^\bullet \cap c \neq \emptyset$$

Ovvero, in termini pratici, siamo nel caso in cui un evento e ha le precondizioni vere, si ha quindi che $\bullet e \subseteq c$, e l'evento non ha tutte le postcondizioni false, quindi $e^\bullet \cap c \neq \emptyset$, allora si dice che l'evento e è in una situazione di contatto e quindi non può scattare



Figura 2.12: Esempio dove l'evento *deposita* è in una situazione di contatto

Definizione 17. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare. Si dice che il sistema è **senza contatti** sse:

$$\forall e \in E, \forall c \in C_\Sigma \text{ si ha che } \bullet e \subseteq c \Rightarrow e^\bullet \cap c = \emptyset$$

ovvero per ogni evento e e per ogni caso raggiungibile dal caso iniziale succede sempre che se le precondizioni sono vere, ovvero $\bullet e \subseteq c$, allora le postcondizioni sono false, ovvero disgiunte dal caso considerato ($e^\bullet \cap c = \emptyset$)

Ci si chiede se sia possibile trasformare un sistema elementare Σ , con contatti, in uno Σ' , senza contatti, senza però modificarne il comportamento. La risposta a questo quesito è affermativa e la procedura consiste nell'aggiungere a Σ il complemento di ogni condizione che crea situazione di contatto, ottenendo così un sistema Σ' con grafo dei casi isomorfo a quello di Σ . Per aggiungere il complemento, data la condizione x , si aggiunge la condizione $\text{not } x$ che sarà vera tutte le volte che x è falsa e viceversa. Per ottenere questo risultato la nuova condizione avrà come pre-eventi i post-eventi di x e come post-eventi i pre-eventi di x . Ovvero connesso la nuova condizione agli stessi eventi di quella vecchia ma con archi orientati in senso opposto. Ovviamente le inizializzazioni delle due condizioni dovranno essere opposte (una vera e l'altra falsa).



Figura 2.13: Esempio con l'ottenimento del complemento di un sistema

Se un sistema è senza contatti si ha una regola di contatto semplificata:

Definizione 18. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare **senza contatti**. Sapendo che se le precondizioni di un evento sono vere allora sicuramente le postcondizioni di quell'evento sono false in quel caso. Dato che questo avviene per ogni evento e per ogni caso raggiungibile dal caso iniziale per verificare che un evento e sia abilitato in un caso raggiungibile c è sufficiente verificare che le precondizioni di e siano vere (in quanto automaticamente le postcondizioni saranno false). In maniera formale quindi si ha che:

$$c[e \text{ sse } \bullet e \subseteq c, \quad \text{con } e \in E, c \in C_\Sigma$$

semplificando di molto la **regola di scatto**

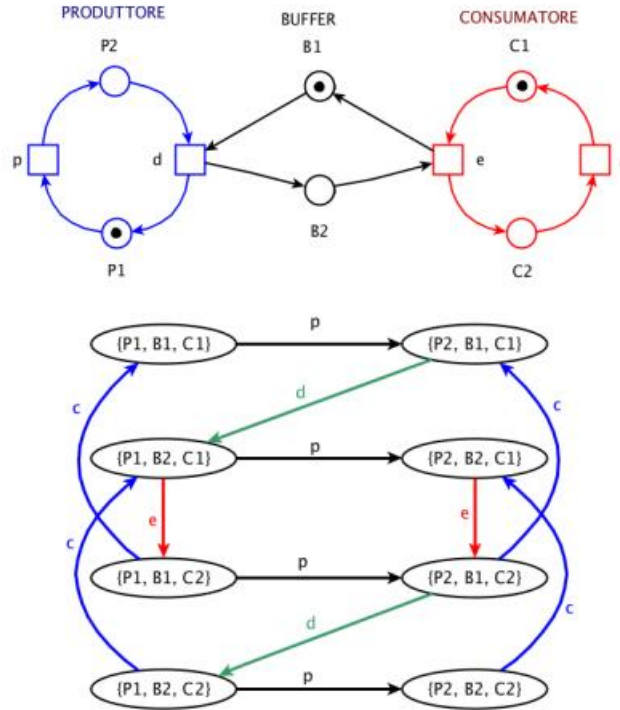


Figura 2.14: Esempio con il complemento del sistema produttore-consumatore (dove è stato aggiunto solo il complemento di “buffer-pieno”, ottenendo così sia $B1$ che $B2$, in quanto le altre condizioni avevano già il loro complemento). In aggiunta si ha anche il grafo dei casi sequenziale corrispondente al nuovo sistema senza contatti (grafo che è isomorfo a quello ottenibile al sistema con contatti)

2.1.5 Situazioni Fondamentali

Sequenza

Definizione 19. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare, con contatti o meno e siano $c \in C_\Sigma$ un caso raggiungibile dal caso iniziale e $e_1, e_2 \in E$ due eventi.

Si ha che e_1 ed e_2 sono **in sequenza** nel caso raggiungibile c sse:

$$c[e_1 > \wedge \neg c[e_2 \wedge c[e_1 e_2 >$$

ovvero in c è abilitato e_1 ma non e_2 ma, dopo lo scatto di e_1 , e_2 diventa abilitato. Quindi in c è possibile attivare prima e_1 e poi e_2 in sequenza.

Si ha quindi una relazione di **dipendenza causale tra e_1 ed e_2** , ovvero

qualche postcondizione di e_1 è preconditione di e_2 (che quindi può occorrere solo se precedentemente è occorso e_1).



Figura 2.15: Esempio di sequenza tra e_1 ed e_2

Concorrenza

Definizione 20. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare, con contatti o meno e siano $c \in C_\Sigma$ un caso raggiungibile dal caso iniziale e $e_1, e_2 \in E$ due eventi.

Si ha che i due eventi sono **concorrenti** nel caso raggiungibile c sse:

$$c[\{e_1, e_2\}] >$$

ovvero se possono essere abilitati in unico passo o, detto in maniera diversa, se sono indipendenti ed entrambi abilitati in c

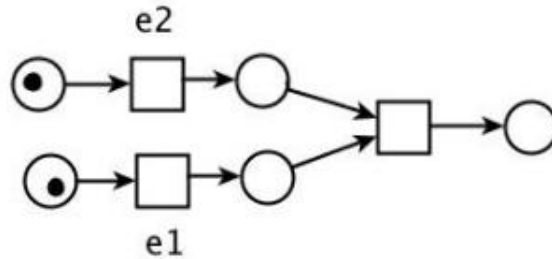


Figura 2.16: Esempio di concorrenza tra e_1 ed e_2

Conflitto

Definizione 21. Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare, con contatti o meno e siano $c \in C_\Sigma$ un caso raggiungibile dal caso iniziale e $e_1, e_2 \in E$ due eventi.

Si ha che e_1 ed e_2 sono in conflitto sse:

$$c[e_1] > \wedge c[e_2] \wedge \neg c[\{e_1, e_2\}] >$$

ovvero i due eventi sono entrambi abilitati (quindi le precondizioni sono vere mentre le postcondizioni son false) ma l'occorrenza di uno disabilita l'altro, quindi non possono essere abilitati in un unico passo, in quanto non sono indipendenti. Ci sono due casi:

1. i due eventi hanno una precondizione in comune, e in tal caso si parla di **conflitto forward** (ovvero in avanti)



Figura 2.17: Esempio di conflitto forward tra e_1 ed e_2

2. i due eventi hanno una postcondizione in comune, e in tal caso si parla di **conflitto backward** (ovvero all'indietro)



Figura 2.18: Esempio di conflitto backward tra e_1 ed e_2

Si ha quindi una situazione di **non determinismo**, non essendo specificato quale dei due eventi scatterà prima (e lo scatto di uno impedisce lo scatto dell'altro).

*Posso ritrovarmi nel caso in cui effettivamente un evento scatta, cambiando lo stato del sistema. In tal caso, in un'ottica completamente deterministica, si deve assumere che **l'ambiente** abbia fornito un'informazione riguardo il conflitto, ovvero c'è stato qualcosa di esterno che ha permesso ad uno dei due eventi di scattare ugualmente. Ho quindi guadagnato dell'informazione.*



Figura 2.19: Esempio di conflitto con l'intervento dell'ambiente tra e_1 ed e_2 (con conseguente guadagno di informazione)

Ci sono però casi in cui in ogni caso non si può avere informazione su quale esempio sia scattato. Si può ipotizzare che tale informazione fosse presente nello stato precedente del sistema (una sola condizione attiva, per esempio). Quindi l'informazione, finita nell'ambiente (ricevuta dall'ambiente), si è persa.



Figura 2.20: Esempio di conflitto tra e_1 ed e_2 con conseguente perdita di informazione (si può ipotizzare, per esempio, che nello stato precedente la preconditione di e_1 fosse attiva mentre quella di e_2 fosse inattiva)

*Il modello, nell'ottica di Petri, non è quindi un **modello chiuso** ma è in grado di comunicare con l'ambiente (in sintonia con le teorie della fisica).*

Confusione

Definizione 22. La situazione di **confusione** è una mistura di situazioni di concorrenza e di conflitto. Si hanno 2 tipi di confusione, entrambe ammissibili:

1. detta **confusione asimmetrica** considera il fatto di avere un caso raggiungibile e due eventi abilitati, nella figura e_1 ed e_2 , in maniera concorrente in c , che nella figura consiste nel caso $\{b_1, b_2, b_3\}$. I due eventi sono quindi indipendenti. Nella figura lo scatto dei due eventi porterebbe allo stato $c' = \{b_4, b_5\}$. Bisogna analizzare però nel dettaglio il sistema. Se prima occorre e_1 non si ha alcun conflitto mentre se occorre prima e_2 (che porterebbe in $\{b_1, b_3, b_4\}$) si crea un conflitto tra e_1 ed e_3 , che viene risolto a favore di e_1 e a sfavore di e_3 . **Non è possibile stabilire oggettivamente se è stato sciolto un conflitto.** Sono quindi in una situazione di confusione in quanto non so se è stata effettuata o meno una scelta.



Figura 2.21: Esempio di confusione asimmetrica tra e_1 ed e_2

Una soluzione che vedremo sarà la scomposizione in più componenti del sistema

2. detta **confusione simmetrica**, nome dovuto al fatto che la rete risulta disegnata in modo simmetrico, comportando delle problematiche. Prendiamo nell'immagine il caso raggiungibile $c = \{b_1, b_2\}$ e i due eventi e_1 ed e_3 , abilitati in maniera concorrente. Si ha che $c[\{e_1, e_3\}] > c'$, con $c' = \{b_3, b_5\}$. Anche in questo caso si hanno dei conflitti, infatti sia e_1 che e_3 sono in conflitto con e_2

(in quanto se uno dei due viene eseguito e_2 non può più occorrere). Anche in questo caso non posso stabilire se il conflitto è stato risolto nel momento in cui arrivo in c' (ovvero se si è deciso di fare e_1 piuttosto che e_2 o e_3 piuttosto che e_2).

Anche in questo caso potremo dividere in componenti (una che esegue e_1 ed e_2 e un'altra che esegue e_1 ed e_3 , con e_2 che è una sincronizzazione tra le due componenti).

Non si può dire chi ha deciso e chi ha la responsabilità di decidere quale evento deve occorrere, se alla componente di b_1 o a quella di b_2 .



Figura 2.22: Esempio di confusione simmetrica tra e_1 ed e_2

Petri era convinto, nella sua visione deterministica e senza conflitti, che l'avere una situazione di confusione nel modello fosse dovuto al non aver esplicitato alcuni aspetti o di aver costruito male il modello, con informazioni parziali e non complete sul modello e sull'ambiente.

Un altro studioso, Einar Smith, molto vicino a Petri ha invece dimostrato come la confusione sia inevitabile

Vediamo un esempio famoso, detto della **mutua esclusione**, portato da Smith per spiegare come la confusione sia inevitabile nella realtà.

Esempio 5. Si analizza il seguente sistema:



In rosso e in Blu abbiamo specificate le due componenti del sistema, che condividono una risorsa, ovvero la condizione b_4 , che rappresenta che la risorsa è libera e a disposizione. L'evento e_1 e evento e_4 rappresentano eventi di acquisizione della risorsa (rispettivamente per la prima e per la seconda componente) e quindi le loro precondizioni rappresentano la necessità di acquisirla. Tra questi due eventi c'è una **situazione di conflitto**. Le condizioni b_2 e b_7 , ovvero le rispettive postcondizioni dei due eventi, rappresentano che la risorsa è in uso per la rispettiva componente mentre gli eventi e_2 ed e_5 rappresentano il rilascio della risorsa condivisa, sempre per la rispettiva componente, arrivando rispettivamente nella componente b_3 e b_8 . Ovviamente la risorsa non può essere contemporaneamente in uso da entrambe le risorse, quindi b_2 e b_7 non possono essere contemporaneamente marcate, ovvero vere, e per questo si parla di *mutua esclusione* (se una delle due è vera l'altra deve essere necessariamente falsa). D'altro canto gli eventi e_3 ed e_6 possono invece occorrere in modo concorrente senza conflitti. Scrivendo formalmente si ha che, nel caso che la risorsa sia stata acquisita dalla componente rossa e successivamente rilasciata:

$$\{b_3, b_4, b_6\}[\{e_3, e_4\} > \{b_1, b_7\}]$$

ma se scatta prima e_3 ho il conflitto tra e_1 ed e_4 , se scatta prima e_4 non ho conflitti con e_1 . Quindi non ho informazioni sulla risoluzione del conflitto.

Capire se è confusione simmetrica

2.1.6 Sottoreti

Partiamo subito con una definizione formale:

Definizione 23. Siano $N = (B, E, F)$ e $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$ due reti elementari.

Si dice che N_1 è **sottorete** di N sse:

- $B_1 \subseteq B$, quindi l'insieme delle condizioni della rete N_1 è sottoinsieme di quello della rete N
- $E_1 \subseteq E$, quindi l'insieme degli eventi della rete N_1 è sottoinsieme di quello della rete N
- $F_1 = F \cap [(B_1 \times E_1) \cup (E_1 \times B_1)]$, ovvero la relazione di flusso di N_1 è definita come la restrizione della relazione di flusso di N rispetto alle condizioni e B_1 e agli eventi E_1 (tengo quindi solo gli archi di N che connettono eventi e condizioni di N_1)

Definizione 24. Siano $N = (B, E, F)$ e $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$ due reti elementari.

Si dice che N_1 è **sottorete generata da** B_1 di N (ovvero di sottorete generata da un insieme di condizioni) sse:

- $B_1 \subseteq B$, quindi l'insieme delle condizioni della rete N_1 è sottoinsieme di quello della rete N
- $E_1 = {}^\bullet B_1 \cup B_1^\bullet$, ovvero come eventi si hanno tutti quegli eventi che sono collegati in N alle condizioni incluse nell'insieme di condizioni B_1 , prendendo quindi tutti i pre-eventi e i post-eventi delle condizioni dell'insieme B_1
- $F_1 = F \cap [(B_1 \times E_1) \cup (E_1 \times B_1)]$, ovvero la relazione di flusso di N_1 è definita come la restrizione della relazione di flusso di N rispetto alle condizioni B_1 e agli eventi E_1

Non ho quindi una sottorete generata da un insieme arbitrario di condizioni ed eventi ma questi ultimi sono direttamente presi in relazione all'insieme delle condizioni scelto

Definizione 25. Siano $N = (B, E, F)$ e $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$ due reti elementari.

Si dice che N_1 è **sottorete generata da** E_1 di N (ovvero di sottorete generata da un insieme di condizioni) sse:

- $B_1 = {}^\bullet E_1 \cup E_1^\bullet$, ovvero come condizioni si hanno tutte quelle condizioni che sono collegati in N agli eventi inclusi nell'insieme di eventi E_1 , prendendo quindi tutte le precondizioni e le postcondizioni degli eventi dell'insieme E_1
- $E_1 \subseteq E$, quindi l'insieme degli eventi della rete N_1 è sottoinsieme di quello della rete N
- $F_1 = F \cap [(B_1 \times E_1) \cup (E_1 \times B_1)]$, ovvero la relazione di flusso di N_1 è definita come la restrizione della relazione di flusso di N rispetto alle condizioni B_1 e agli eventi E_1

Non ho quindi una sottorete generata da un insieme arbitrario di condizioni ed eventi ma le prime sono direttamente prese in relazione all'insieme degli eventi scelto

Esempio 6. Tornando all'esempio della mutua esclusione:



si ha, per esempio:

- in rosso si ha la sottorete $N' = (\{b_1, b_2, b_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}, F')$, che è la sottorete generata dall'insieme di condizioni $B' = \{b_1, b_2, b_3\}$
- in blu si ha la sottorete $N' = (\{b_6, b_7, b_8\}, \{e_4, e_5, e_6\}, F')$, che è la sottorete generata dall'insieme di condizioni $B' = \{b_6, b_7, b_8\}$
- si ha la sottorete $N' = (\{b_2, b_4, b_7\}, \{e_1, e_2, e_4, e_5\}, F')$, che è la sottorete generata dall'insieme di condizioni $B' = \{b_2, b_4, b_7\}$
- si ha la sottorete $N' = (\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, F')$, che è la sottorete generata da dall'insieme di eventi $E' = \{e_1, e_2, e_3\}$

2.1.7 Operazioni di Composizione per Reti di Petri

Data una rete $N = (B, E, F, c_0)$ questa può essere ottenuta componendo altre reti di Petri. Si hanno in letteratura 3 modi principali:

1. la **composizione sincrona**
2. la **composizione asincrona**
3. la **composizione mista, tra sincrona e asincrona**

Iniziamo informalmente a vedere degli esempi pratici.

Esempio 7. Supponiamo di avere i modelli di due componenti, N_1 , con un evento che corrisponde ad un'azione di invio, ed N_2 , con un evento che corrisponde ad un'azione di ricezione:



Supponiamo che invio e ricezione siano eventi corrispondenti all'hand-shaking, ovvero l'invio avviene solo se può avvenire la ricezione.

Vado quindi a sincronizzare questi due eventi, che diventano quindi un'unico evento nella rete composta, che è abilitato se le due precondizioni, nelle due componenti sono entrambe vere:



La composizione viene indicata con:

$$N_1 || N_2$$

Lo scatto dell'evento, in maniera sincrona, rende vere le postcondizioni nelle due componenti e false le due precondizioni.

Abbiamo appena visto un esempio di **composizione sincrona**

Esempio 8. Supponiamo di avere i modelli di due componenti, N_1 , che invia in un canale un messaggio (per esempio in un buffer), e N_2 , che riceverà il messaggio solo quando esso sarà disponibile:



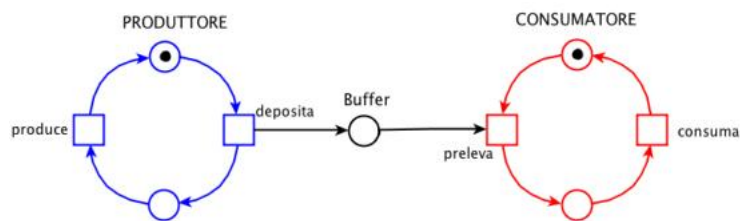
In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, non identifichiamo eventi ma condizioni. Identifico quindi il canale (le due condizioni) come uno solo, che avrà il pre-evento in una componente e il post-evento nell'altra. Quindi il pre-evento, nella componente N_1 , può scattare solo se questa nuova condizione condivisa, il canale, è libera, indipendentemente dalla componente N_2 . D'altro canto l'evento in N_2 può scattare solo se la condizione condivisa è marcata, indipendentemente dallo stato della prima componente, liberando il canale di comunicazione. Avvio e ricezione (dopo che il messaggio è stato inviato può essere letto in un qualsiasi futuro) non sono sincronizzati e si ha quindi a che fare con un esempio di **composizione asincrona**

Sarà interessante studiare come la composizione di due componenti, per esempio, senza deadlock non comporta, in generale, l'ottenimento di una rete priva di deadlock.

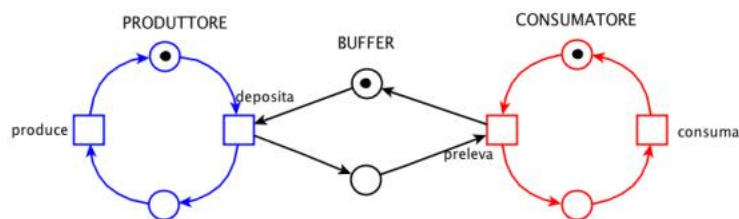
2.2 Reti Posti e Transizioni

Vediamo ora una nuova classe delle *reti di Petri*, detta **reti Posti e Transizioni**, permette di rappresentare un sistema in modo più compatto, sono una sorta di *ripiegamento* dei sistemi elementari. Partiamo quindi da un esempio:

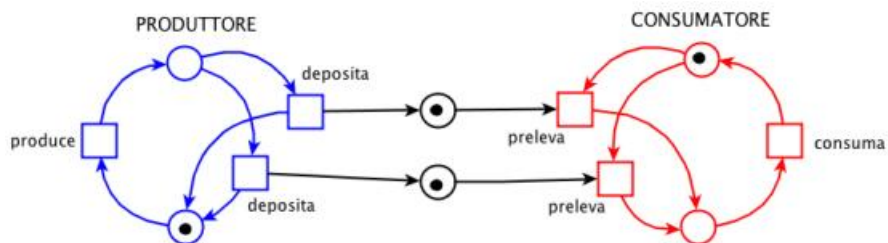
Esempio 9. prendiamo in studio sempre il sistema produttore-consumatore: Sia nella versione con contatto:



che senza:



Suppongo di voler modellare il sistema in modo che il buffer possa avere un numero determinato di posizioni, per esempio 2 (il buffer può quindi depositare fino a due elementi). Si ottiene quindi:



Dove si hanno due posizioni del buffer (e quindi basta che una sia vuota per permettere al produttore di depositare) a disposizione del sistema. Si nota come l'aumento dei buffer complica drasticamente la modellazione del

sistema. Si cerca quindi una soluzione più compatta, compattando gli eventi deposita e preleva e dando nuova notazione al buffer. Si ottiene:



con il buffer che diventa anche un **contatore** del numero di elementi presenti al suo interno. Un buffer a due posizioni diventa quindi una condizione non più booleana, detta **Posto**, con una **capacità** pari a 2. Il produttore non può produrre oltre la capacità.

Con questa rappresentazione non ho più alcuna difficoltà nel rappresentare più posizioni del buffer in quanto basta aumentare la capacità. Ho però perso delle informazioni infatti non ho più una relazione di dipendenza tra dove si deposita (se nella prima posizione o nella seconda) e dove si preleva.

Aggiungiamo un'altra complicanza: aggiungiamo un secondo consumatore:



Possiamo comprimere nella stessa maniera, ottenendo, in quanto i due consumatori hanno lo stesso modello di comportamento:



Anche qui perdo l'informazione riguardo quale dei due consumatori ha effettivamente prelevato, riguardo quale dei due è pronto a prelevare e quale a consumare, continuando ad ignorare anche la posizione del buffer nei confronti della quale stanno agendo.

Si può arrivare ad avere due componenti identiche che sono concorrenti tra loro.

Le condizioni non sono più, in generale, booleane ma sono **posti** dotati di **contatori**, gli elementi all'interno sono detti **marche**. Ai posti si assegna anche una **capacità**.

Si ha inoltre che lo scatto di una transizione dipende dalla disponibilità delle risorse, per esempio un produttore può produrre n elementi alla volta e il consumatore consumarne m . Si usano quindi archi pesati (se non indicato ovviamente ha peso 1, quello del normale check booleano di condizione attiva) tali che una transizione possa scattare sse i pesi vengono rispettati:

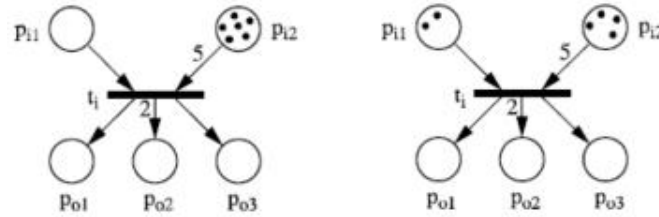


Figura 2.23: Esempi con la transizione t_i non abilitata

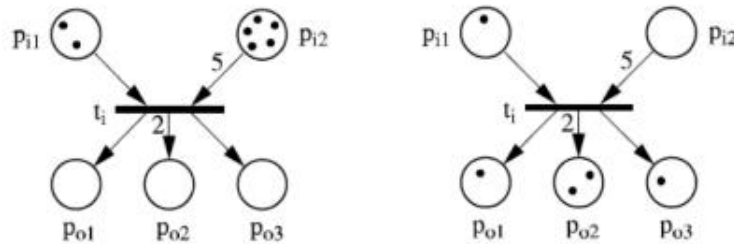


Figura 2.24: Esempio con la transizione t_i abilitata, a sinistra il “prima” e a destra il “dopo” lo scatto di t_i

Esempio 10. Petri aveva introdotto l'uso delle reti anche per le reazioni chimiche, per esempio:

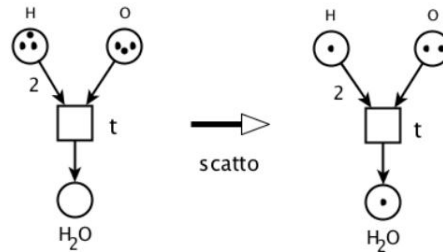


Figura 2.25: Esempio con la modellazione della produzione di H_2O

2.2.1 I Filosofi a Cena

Questo è un classico problema di sincronizzazione, introdotto da Dijkstra. Si ha un tavolo rotondo con 5 filosofi ($p_i, i = 0, \dots, 4$), ciascuno ha davanti un piatto di spaghetti e si hanno solo 5 forchette ($f_i, i = 0, \dots, 4$):

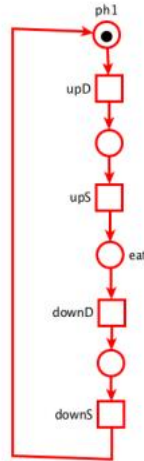


Figura 2.26: Rappresentazione schematica del problema dei 5 filosofi

Ogni filosofo ha lo stesso comportamento, un po' pensa e un po' mangia, prendendo prima la forchetta alla sua destra e poi quella alla sua sinistra (perché necessitano di due forchette per mangiare). Si ha quindi il *deadlock* se tutti vogliono mangiare, prendendo tutti in primis una forchetta, impedendosi tutti a vicenda di mangiare (non potendo prendere due forchette) o

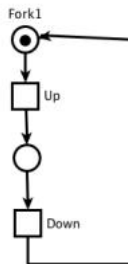
si ha la *starvation* in quanto potrebbero accordarsi per mangiare in quattro, impedendo a uno di mangiare.

Si vuole modellare tale schema. Ogni filosofo può essere modellato come una rete elementare, che farà da componente al modello finale:



con gli eventi *upD* e *upS*, dove il filosofo prende la forchetta destra e sinistra, e rispettivamente *downD* e *downS*, dove le mette giù. Si ha la condizione che specifica che il filosofo sta pensando e quella che mi segnala l'azione del mangiare, oltre alle due condizioni intermedie che separano le azioni tra forchetta sinistra e destra.

Si modella anche la componente della forchetta, con gli eventi che segnalano se è depositata, *down*, o meno, *up*:



Combino quindi le due componenti per specificare il filosofo che prende la sua forchetta destra e poi la sinistra, quindi per ogni componente *filosofo* si hanno due componenti *forchetta*:



con la *forchetta 1* (*fork 1*) che sarà la forchetta destra e la *forchetta 2* (*fork 2*) che sarà la forchetta sinistra. Si hanno quindi diverse transizioni di sincronizzazione tra le due componenti (ogni volta che il filosofo interagisce con la forchetta).

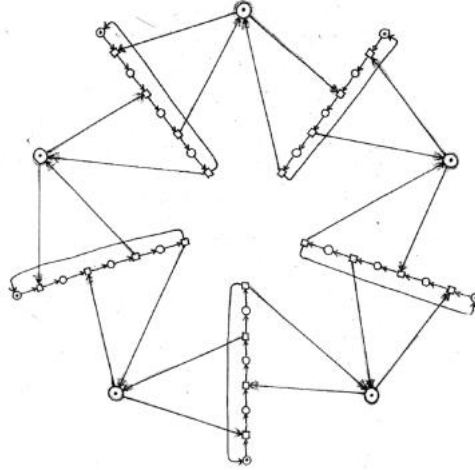
Bisogna aggiungere che ogni forchetta può essere presa da due filosofi, ognuna a destra di un filosofo e a sinistra di un altro:



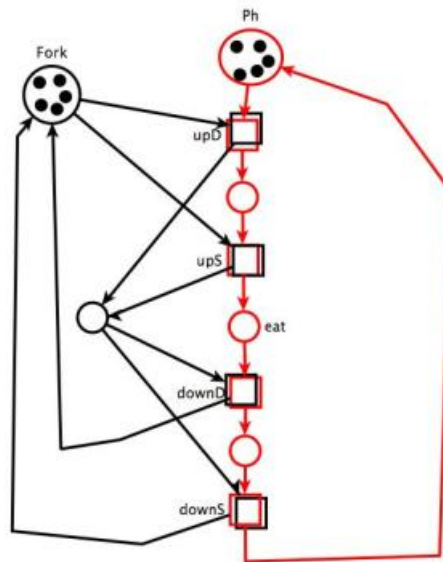
Ogni forchetta quindi si sincronizza alternativamente tra due filosofi, venendo presa da uno dei due filosofi. Si è arrivati quindi ad una **situazione di conflitto**, o meglio ad una **situazione di confusione**.

Per ora la soluzione di questo problema viene lasciato da parte per valutare il modello dello stesso.

Si ha quindi una possibile rappresentazione del modello completo:



Ma ogni filosofo, come del resto ogni forchetta, si comporta nella stessa maniera. Si tenda quindi di *ripiegare* il modello, modellando un'unica componente filosofo con 5 marche distribuite nei vari stati locali del filosofo. Stesso discorso per le forchette. Ottengo quindi il seguente modello:



Con le due componenti, *filosofo* e *forchetta*, entrambe inizializzate con 5 marche ciascuno. Questo modello però perde informazione sulla forchetta che

un filosofo può prendere, si ha un radicale **cambio di protocollo**. Un filosofo può prendere una qualsiasi forchetta e non più quella alla sua destra/sinistra. Non posso quindi usare le *reti Posti e Transizioni* in quanto perdo troppe informazioni.

L'unica soluzione possibile è quindi quella di recuperare le informazioni perse inserendole nelle marche, alle quali viene aggiunta una struttura dati. Si ha così modo di distinguere i vari filosofi e le forchette. Per compattare il sistema devo quindi rendere più complessa l'essenza della marca, viene arricchita con una struttura dati.

Si arriva così ad avere una **Rete di Alto Livello**, come, per esempio, una *rete colorata*, a partire da un rete elementare.

Distinguo quindi filosofi e forchette nei due insiemi di strutture dati:

1. $Phil = \{p_0, \dots, p_4\}$, insieme dei filosofi
2. $Fork = \{f_0, \dots, f_4\}$, insieme delle forchette

Si nota che per gli indici si ha una somma *modulo 5*, ovvero gli indici rispondono alla regola:

$$(i + 1) \bmod 5$$

In modo che gli indici siano ordinati avendo inoltre lo 0 che segue il 4, in modo circolare.

Si ottiene quindi, mantenendo il protocollo iniziale:



Si mantiene quindi un modello simile a quello descritto sopra ma al posto di marche non strutturate si ha nel posto delle 5 forchette le marche dell'insieme *Fork* e al posto dei 5 filosofi le marche dell'insieme *Phil*.



Le transizioni scattano in determinate condizioni. Per esempio la prima transizione, relativa al fatto che il filosofo prende la forchetta alla sua destra, scatta sse con l'istanza filosofo p_j e forchetta f_i si ha che $i = j$ (ho quindi almeno una forchetta, almeno un filosofo e la forchetta deve essere quella alla sua destra, che, per come abbiamo modellato il problema, è quella con lo stesso indice). Sugli archi si hanno quindi annotate determinate variabili che denotano istanze. Per la forchetta a sinistra si usa il modulo 5. Si procede quindi per i vari filosofi.

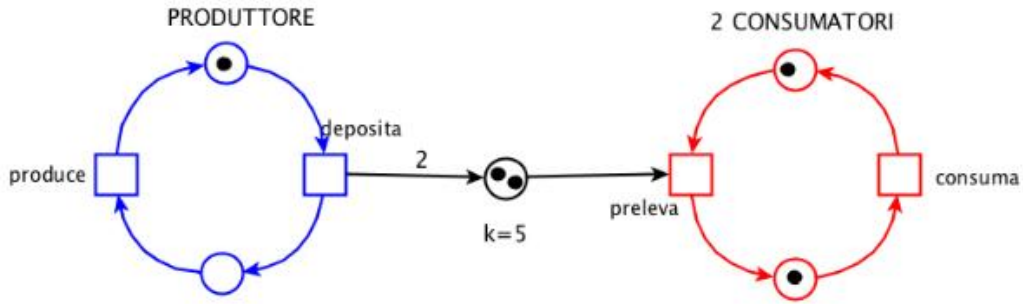


Figura 2.27: Esempio con il filosofo p_3 che ha già preso la forchetta alla sua destra, f_3 , e prende quella a sinistra, f_4

Si ha quindi un prezzo per rappresentare in maniera compatta un sistema elementare, mediante una rete di alto livello, ovvero l'arricchimento della struttura dati.

2.2.2 Formalizzazione delle Reti Posti e Transizioni

Nonostante la sezione si occupi di formalismi ci appoggiamo ad un esempio per avere un confronto diretto tra teoria e pratica. Questo esempio è un'ultima versione del sistema produttore-consumatore, con un produttore che deposita a due elementi alla volta, in un buffer che ha capacità massima aperta a cinque, che vengono consumati da due consumatori:



quindi al massimo ho cinque marche nel buffer e 2 in uno degli stati del consumatore (in quanto rappresenta due consumatori).
Passiamo ora alla formalizzazione:

Definizione 26. Si definisce un **sistema Posti e Transizioni** (**sistema P/T**) la sestupla:

$$\Sigma = (S, T, F, K, W; M_0)$$

dove:

- (S, T, F) è una rete con:
 - S che rappresenta l'insieme dei posti
 - T che rappresenta l'insieme delle transizioni
 - F che rappresenta la relazione di flusso che lega posti e transizioni tramite archi
- $K : S \rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ che rappresenta una funzione che ad ogni posto in S assegna un valore, che può essere un naturale strettamente

positivo o anche infinito (ovvero in quel posto posso avere un numero qualsiasi di marche). Il valore zero non è ammesso in quanto implicherebbe che il posto non potrebbe mai essere occupato, rendendo la modellazione di un tale posto inutile. K è detta **funzione capacità dei posti**.

- $W : F \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ che rappresenta una funzione che assegna ad ogni arco un peso mediante un valore naturale che stavolta può essere, oltre che infinito, anche zero. W è detta **funzione peso degli archi**
- $M_0 : S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \forall s \in S \text{ t.c. } M_0(s) \leq K(s)$ che rappresenta la **marcatatura iniziale** del sistema, ovvero una funzione che assegna ad ogni posto un naturale, eventualmente nullo o infinito, minore o uguale alla capacità massima di tale posto (capacità espressa dalla funzione K) indicante il numero di marche allo stato iniziale.

Bisogna ora definire la regola di scatto, ovvero il **gioco delle marche**, la regola per cui le marche si spostano sulla rete. Si ha quindi, dati:

$$M : S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ e } t \in T$$

ovvero data una marcatatura e una qualsiasi transizione t si ha che:

$$M[t >$$

ovvero una transizione è abilitata in una certa marcatatura,

sse:

$$\forall s \in S, M(s) \geq W(s, t) \wedge M(s) + W(t, s) \leq K(s)$$

ovvero per ogni posto si ha che ci sono abbastanza marche nei posti perché possa scattare la transizione, ovvero c'è un arco di peso corretto che collega quel posto con la transizione, avendo peso dell'arco minore o uguale al numero di marche del posto, e, inoltre, si deve verificare che la transizione non metta troppe marche in quel posto, quindi la marcatatura del posto (ovvero il numero di marche già presenti in esso) più il numero di marche che si aggiungono con lo scatto della transizione non deve superare la capacità del posto.

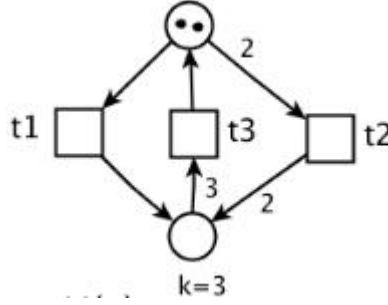


Figura 2.28: Nell'esempio si ha che la transizione t_2 può scattare sse nella posto precedente ho almeno due marche, in quanto l'arco tra i due ha peso due. Inoltre ho il posto che segue vuoto ma con capacità massima pari a tre, quindi la transizione può scattare in quanto l'arco tra i due pesa due, assicurandomi che dopo la transizione, nel posto che la segue, non verrà superata la capienza massima, arrivando infatti ad avere marcatura pari a 2

Lo scatto della transizione, se questa è abilitata nella marcatura, mi genera una nuova marcatura che viene ottenuta da quella precedente togliendo tante marche dal posto che è di input alla transizione quanto il peso dell'arco che connette tale posto alla transizione e aggiungendo tante marche al posto in output quante il peso dell'arco che connette la transizione a tale posto, ovvero, formalmente:

$$M[t > M'$$

sse

$$M[t > \wedge \forall s \in S, M'(s) = M(s) - W(s, t) + W(t, s)$$

quindi il nuovo posto avrà marcatura pari a quella precedente al più dei due contributi, il primo negativo e il secondo positivo, dei pesi dei due archi.

Definizione 27. *Dato un sistema $P/T \Sigma = (S, T, F, K, W; M_0)$ si definisce l'insieme delle marcature raggiungibili, dalla marcatura iniziale di Σ come:*

$$[M_0 >$$

ed esso è il più piccolo insieme tale che:

- $M_0 \in [M_0 >$, ovvero la marcatura iniziale appartiene all'insieme delle marcature raggiungibili
- se $M \in [M_0 > \wedge \exists t \in T : M[t > M'$ allora $M' \in [M_0 >$, ovvero se M appartiene all'insieme delle marcature raggiungibili ed esiste una transizione tale per cui M va in M' allora, di

conseguenza si ha che M' appartiene all'insieme delle marcature raggiungibili dallo stato iniziale

Anche questa è una definizione per induzione

Esempio 11. Vediamo qualche esempio particolare (se la capacità non è specificata si ha che essa è infinita):

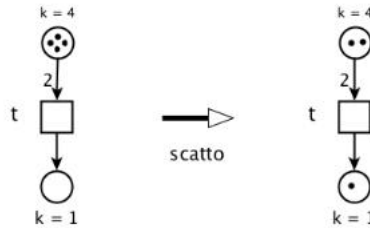


Figura 2.29: Lo scatto toglie due marche dall'input e ne mette una nell'output ma la seconda volta t non sarebbe più abilitata in quanto il posto in output si satura alla prima transizione, è un caso di **contatto**

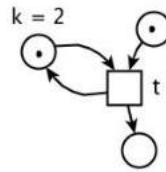


Figura 2.30: La transizione t è abilitata avendo i posti in ingresso col giusto numero di marche e in uscita ha un posto vuoto che può riempire a piacere e lo stesso porto che prima aveva in input che può riempire con una marca rispettando le regole di capacità

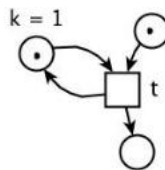


Figura 2.31: La transizione t non è abilitata, e non lo sarà mai in M in quanto la regola di scatto prevede che ci sia a priori una capacità sufficiente nei posti di output, cosa che qui non accade avendo uno di essi capacità uno, non si ragiona in modo sequenziale “prima tolgo e poi metto”, lo spazio deve essere disponibile a priori per far scattare la transizione

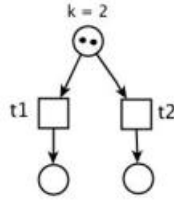


Figura 2.32: In questa rete si ha che t_1 e t_2 sono abilitate in M ed esse sono **concorrenti** in quanto lo scatto dell'una non disabilita lo scatto dell'altra dovendo entrambe prelevare una marca da un posto che ne contiene due per riversarne una ciascuna in un posto libero. Si ha quindi concorrenza anche in corrispondenza di transizioni non indipendenti

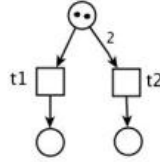


Figura 2.33: In questa rete si ha che t_1 e t_2 sono in **conflitto** e **non concorrenti** tra loro. Si ha infatti che lo scatto di una disabilita quella dell'altra, visto che da sola t_2 svuoterebbe il posto in input (se scatta prima t_1 poi ho una sola marca nello stato in input disabilitando t_2 che ne richiede due, viceversa lo scatto di t_2 lascerebbe vuoto lo stato in input impedendo a t_1 di scattare). Il conflitto è dato non dalla struttura della rete ma dalla sua marcatura iniziale. Quindi in questa rete con questa marcatura può scattare una sola delle due transizioni, inoltre t_1 potrebbe occorrere due volte senza errori, essendo quindi, se occorre contemporaneamente per quelle due volte, **concorrente con se stessa**. La doppia occorrenza di t_1 , indicatata con $2t_1$ è un **passo**

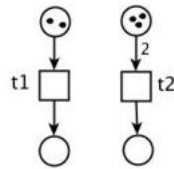


Figura 2.34: In questa rete si ha che t_1 è abilitata due volte, avendo quindi $2t_1$ e lo è anche t_2 , che può scattare solo una volta. Si ha quindi che t_1 occorre concorrente con se stessa e contemporaneamente concorrente con t_2 . Si ha quindi che il *multiset* $2t_1 + t_2$ è un **passo abilitato**

Si da ora la definizione formale di *multiset di transizioni abilitate* in un sistema:

Definizione 28. Dato un sistema $P/T \Sigma = (S, T, F, K, W; M_0)$ si definisce un **multiset** $U : T \rightarrow \mathbb{N}$ come una funzione che assegna ad una transizione un numero naturale. Si ha inoltre che:

- un multiset è detto **concorrentemente abilitato** in $M \in [M_0 >$, quindi con M marcatura raggiungibile. Detto in maniera diversa U è un passo $M[U >$. Un multiset è concorrentemente abilitato in M sse:

$$\forall s \in S, \sum_{t \in T} U(t) \cdot W(s, t) \leq M(s) \wedge M(s) + \sum_{t \in T} U(t) \cdot W(t, s) \leq K$$

ovvero per ogni posto si devono avere un numero di marche nella marcatura iniziale superiore al numero che posso togliere mediante le varie transizioni nel multiset U . Inoltre le marche che devo aggiungere più il numero di marche già presenti nel posto in output deve essere inferiore alla capacità dell'output.

Questa condizione può essere riscritta come:

$$\sum_{t \in T} U(t) \cdot W(s, t) \leq M(s) \leq K(s) - \sum_{t \in T} U(t) \cdot W(t, s)$$

- un multiset U abilitato in M può occorrere generando M' , avendo quindi:

$$M[U > M'$$

sse:

$$\forall s \in S \quad M'(s) = M(s) - \sum_{t \in T} U(t) \cdot W(s, t) + \sum_{t \in T} U(t) \cdot W(t, s)$$

quindi la marcatura M' in un certo posto è uguale alla marcatura del posto presente prima del passo al più dei contributi, positivi e negativi, delle varie transizioni (positivi se si ha tale posto come output e negativi se lo si ha come input)

- U_Σ è l'**insieme dei passi** di Σ e viene definito come:

$$U_\Sigma = \{U : T \rightarrow \mathbb{N} \mid \exists M, M' \in [M_0 > : M[U > M']\}$$

ovvero l'insieme dei passi possibili tali per cui passo da una marcatura raggiungibile ad un'altra attivando il passo