Teoria dell'Informazione e Crittografia

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.

Capitolo 2

Introduzione agli argomenti del corso

Si ha una sorgente che emette messaggi e li vuole mandare tramite un canale di comunicazione, che contiene del rumore che agisce sui messaggi e li rovina. Il destinatario per capire che il messaggio è rovinato ha varie tecniche. Una prima cosa che potrebbe fare è chiedere di rimandare il messaggio ma sarebbe meglio correggere *in loco* e si hanno algoritmi per farlo (tra cui lo **schema di Hamming** usando il modello del **rumore bianco**).
Un'altra tematica è la codifica stessa del sorgente, comprimendo flussi di dati, senza perdere informazioni.
Si parlerà anche dei canali di comunicazione, delle capacità e dei **teoremi di Shannon**.
Si vedranno poi le basi della crittografia, i crittosistemi storici, vari standard etc...

Capitolo 3

Teoria dell'informazione

Si hanno due sottoparti principali:

- **teoria dei codici**, per individuare e correggere gli errori. Si studia il canale di trasmissione cercando di contrastare il rumore che c'è nel canale
- **teoria dell'informazione**, in cui il focus è la sorgente delle informazioni

Vediamo il classico schemino della teoria dell'informazione:

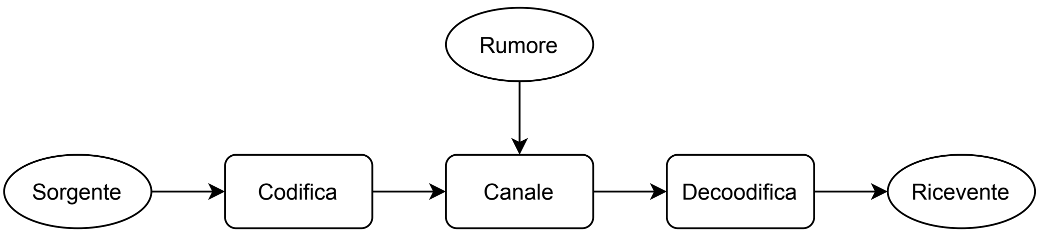


Figura 3.1: Schema di un sistema generale di comunicazione tipico della teoria dell'informazione

Avendo:

- la **sorgente** che produce segnali, dei simboli, che potrebbero essere continui (come la corrente), anche se noi li assumeremo come simboli di un alfabeto finito, avendo quindi una **sorgente discreta**
- i simboli, per poter essere spediti all'interno di un canale, vanno codificati, avendo una parte di **codifica**

- una volta codificati i simboli vanno nel **canale di trasmissione**, dove si ha del **rumore**. Tale *rumore* prende un simbolo di quelli inseriti e lo cambia
- dal canale esce o il simbolo che è entrato o il simbolo modificato dal rumore e, tipicamente, non è immediatamente utilizzabile ma deve passare per una fase di **decodifica**
- il simbolo decodificato arriva al **destinatario**

Si hanno alcune assunzioni sulla sorgente:

- è **discreta**, i simboli emessi appartengono ad un alfabeto finito. Normalmente tali simboli sono $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$
- i simboli vengono emessi uno alla volta ad ogni **colpo di clock**. Non si ha mai che in un colpo di clock non escano simboli o che ne escano più di uno solo
- la sorgente è **senza memoria (*memoryless*)**, avendo che i simboli già usciti non influenzano per nulla il simbolo che sta per uscire. Ogni simbolo che esce non tiene conto del passato, *è come se fosse il primo*
- è **probabilistica e randomizzata**. Si ha quindi che i simboli $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ escono con le probabilità $(p_1, p_2, \dots, p_q)$. Deve valere che, ovviamente, che $p_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, q$. Si ha inoltre che le varie probabilità, nel loro insieme, devono formare una distribuzione di probabilità, avendo che:

  $$\sum_{i=1}^{q} p_i = 1$$

  Potrei avere simboli con probabilità nulla di comparire ma nella pratica non è qualcosa di sensato. La sorgente la costruisco o da zero (e a quel punto un simbolo con probabilità nulla non lo metterei) o ho una sorgente che devo studiare (e qui potrei avere simboli con probabilità bassissime se non nulle, in tal caso bisognerebbe rivalutare l'assunzione dei simboli di quella sorgente). Possiamo quindi meglio dire che $p_i \in (0, 1], \forall i = 1, \dots, q$.
  D'altro canto vedo se posso avere probabilità pari a 1 per un simbolo ma in tal caso avrei solo quello e non sarebbe interessante. Si ha quindi che:

  $$p_i \in (0, 1), \forall i = 1, \dots, q$$

$$\sum_{i=1}^{q} p_i = 1$$

Le sorgenti che emettono i simboli secondo uno schema prefissato, deterministico, sono poco interessanti, avendo un comportamento banale

Il concetto di *spedire in un canale* può anche essere generalizzato in altre "idee", come il disco su cui salvo dei dati e il tempo per cui li salvo.
La parte di *codifica e decodifica* può essere approfondita. Nello schema in figura 3.1 ci si è infatti concentrati sul canale, avendo che la codifica serve a fare in modo che il simbolo trasmesso vada bene per essere trasmesso nel canale. La **codifica** è a sua volta suddivisa in due parti:

1. **codifica di sorgente**, che ha come obiettivo rappresentare nel modo più efficiente e compatto i simboli emessi dalla *sorgente*. Si vuole quindi comprimere la sequenza di simboli (messaggi) emessi dalla sorgente, per impegnare meno banda possibile quando andremo a spedire. Si deve considerare che ogni bit in un file compresso è essenziale per permettere di poter recuperare il contenuto compresso

2. **codifica di canale**, che ha quasi uno scopo opposto rispetto alla *codifica di sorgente*, infatti ha come obiettivo quello di contrastare il rumore e per farlo aggiunge ridondanza al messaggio (da qui il discorso sull'obiettivo opposto)

Si cerca quindi di comprimere il più possibile nella prima fase, quella di *codifica di sorgente* e di ridondare il meno possibile nella seconda, quella di *codifica di segnale*.
Per capire meglio quanto detto diamo alcune formalità.

Definizione 1. *Una **codifica** è una funzione cod che prende i simboli della sorgente $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ e ad ogni simbolo s_i gli assegna una stringa formata coi caratteri di un certo alfabeto Γ, l'**alfabeto della codifica**. Le stringhe di Γ^* sono tutte quelle costruite sull'alfabeto Γ di lunghezza arbitraria e finita, compresa la stringa vuota ε, che posso quindi formare coi simboli di Γ. Quindi ad ogni $s_i \in S$ assegno un $\gamma_i \in \Gamma^*$, avendo che:*

$$cod : S \to \Gamma^*$$

generalmente si ha che:

$$|\Gamma| < |\Sigma|$$

e quindi i simboli di Σ sono mappati da cod in sequenze di simboli di Γ, a meno che non si ritenga accettabile il fatto che due o più simboli di Σ vengano mappati nello stesso simbolo di Γ.
Più avanti nel corso vedremo casi in cui $|\Gamma| > |\Sigma|$

Si hanno quindi i simboli $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ che escono con probabilità $(p_1, p_2, \dots, p_q)$ e che vengono codificati con le stringhe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$. Le varie γ_i sono dette **codeword**. Chiamando $l_i = |\gamma_i|$ la lunghezza di tali stringhe si ha che tali stringhe hanno associati i vari $l_1, l_2, \dots, l_q$.
L'obiettivo quindi della *codifica di sorgente* è quello di minimizzare la lunghezza media L delle stringhe, avendo quindi una media pesata (pesata sulle probabilità):

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l_i$$

Tenendo conto delle probabilità, per minimizzare L, si deve, avendo a che fare con termini che sono tutti > 0 (avendo supposto che non si hanno probabilità nulla e avendo che una codeword pari alla stringa vuota ha poco senso), fare in modo che i termini siano tutti il più piccolo possibile. Dato che le probabilità sono date mentre la codifica la sto costruendo, calcolando le codeword e di conseguenza le loro lunghezze, devo fare in modo che se la probabilità è grande la lunghezza deve essere piccola. Se invece la probabilità è piccola posso permettermi una lunghezza più grande. Parto quindi dai simboli con probabilità più grande e inizio a usare codeword più piccole possibili, usando via via quelle più lunghe.
Un'idea simile è usata nel *codice Morse* dove le lettere meno comuni hanno le sequenze più lunghe di punti, linee e spazi (avendo una codifica ternaria). La lettera più comune, la "e", ha infatti solo con un punto, la codifica più breve mentre le meno comuni hanno sequenze multiple di punti, linee e spazi che le separano (e gli spazi contano nella lunghezza di queste codeword).
Noi non sappiamo in anticipo che messaggi verranno prodotti dalla sorgente e quindi le codeword vanno studiate passo a passo, valutando i simboli più probabili per associare le codeword più brevi e i meno probabili per le codeword più lunghe.
Analizziamo meglio i codici, le codeword. Possono essere:

1. *a lunghezza fissa*, ovvero si ha che $l_1 = l_2 = \cdots = L_q$
2. *a lunghezza variabile*, avendo che ogni codeword può avere lunghezza diversa

Ne segue quindi che il discorso di minimizzare L ha senso solo in presenza di *codeword a lunghezza variabile* (potendo decidere per ogni simbolo che

codeword associare), avendo la **codifica a lunghezza variabile**.
Con *codeword a lunghezza fissa* avrei tutte le l_i uguali e quindi avrei, avendo $l_i = l, \forall i$:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l_i \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l = l \cdot \sum_{i=1}^{q} p_i = l \cdot 1 = l$$

avendo, come facilmente intuibile, che la lunghezza media è la lunghezza fissa stessa. Si hanno codifiche a lunghezza fissa, come banalmente numeri a 64bit etc... in tal caso si parla di **codici a blocchi**.
Usando codifiche a lunghezza fissa si hanno anche esempi interessanti come quello del *codice pesato*, detto **codice pesato 01247**. Il nome deriva dal fatto che si possono codificare le cifre da 0 a 9 (da 1 a 9 con poi lo 0 dopo il 9) sotto forma di stringhe di 5 bit usando i pesi 0,1,2,4,7 associati a ciascun bit. Vediamo la tabella con la codifica di questo codice:

	0	1	2	4	7
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	0	0	1
8	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1

Si nota che ogni codeword ha sempre 3 bit pari a 0 e due bit pari a 1, avendo un **codice 2-su-5**. Banalmente i pesi si associano ai numeri 0,1,2,4,7 in modo tale che essi, sommati, formino il numero voluto (ad esempio per 1 avrò i pesi su 0 e 1, per 9 su 2 e 7 etc...). L'unico caso è il caso dello 0, che non può essere ottenuto come somma di due pesi (spesso si hanno nei codici casi speciali da gestire a parte). Per lo 0 viene quindi presa una codeword non usata per altri numeri e quindi l'unica scelta possibile è avere i pesi su 4 e 7 (visto che farebbe 11).
Su un totale ci 5 bit, avendo due bit a 1 e tre bit a 0, posso avere un numero di codeword pari a:

$$n = \binom{5}{2} = 10$$

avendo che i 5 bit sono associati ai 5 elementi dove 1 segnala che "sto usando quel peso", prendendo quindi i sottoinsiemi di due elementi a partire da un

insieme di cinque elementi, ovvero "in quanti modi posso formare sottoinsiemi che contengono due elementi a partire da un insieme di cinque elementi" o detto altrimenti "quanti sono i modi in cui posso disporre due uni all'interno di una stringa di cardinalità cinque".
In un linguaggio di programmazione privo di una struttura dati dedicata posso simulare un insieme di questo tipo tramite un vettore di bit (con 1 se l'elemento associato all'indice c'è).
*Il codice a barre è detto **codice 39** ed è un **codice 3-su-9**.*
In merito alla **decodifica** si ha che anch'essa sarà di due tipi:

1. **decodifica di canale**, vedendo se c'è stato un errore di trasmissione ed eventualmente correggendolo in automatico se il codice mi consente di farlo

2. **ulteriore decodifica** che non è esattamente una *codifica di sorgente* ma quanto una *trasformazione*, dove le *codeword* vengono trasformate nel formato leggibile dal **ricevente**

3.1 Codici per individuare errori

Ci concentriamo ora sulla *codifica di canale* ignorando per ora la *codifica di sorgente*, avendo come obiettivo l'aggiunta di ridondanza a simboli, che si suppongono già codificati con codeword, in modo tale che in queste codeword, spedite nel canale dove eventualmente si possono avere modifiche causate dal rumore, vengano eventualmente riconosciuti (ed eventualmente corretti) errori in fase di *decodifica*.
Parlando di codici per individuare errori *solitamente, nei discorsi, si ha che* $|\Gamma| < |\Sigma|$ Qualora il ricevente con la sua decodifica si accorga che è successo qualcosa ma non si è in grado di correggere quel qualcosa si hanno i cosiddetti **codici per individuare gli errori (*error detection codes*)**. Nel caso in cui il ricevente con la sua decodifica si accorga dell'errore ci si chiede anche se può correggerlo autonomamente senza chiedere che la sorgente spedisca nuovamente il messaggio. Non sempre questa cosa si può fare ma quanto accade si parla di **codici a correzione d'errore (*error correction codes*)**.

3.1.1 Controllo di parità semplice

Vediamo come capire se un messaggio ricevuto è valido.
Si supponga di spedire un pacchetto di n bit (ma potrebbe essere qualsiasi altra cosa ma per praticità prendiamo un bit) nel canale e che da esso esca un certo pacchetto sempre di n bit (per il rumore potrebbe non essere lo stesso).

Definizione 2. *Definiamo il* ***controllo di parità****.*
Avendo una sequenza di n bits in cui si ha $n-1$ bits, dette ***cifre di messaggio*** *di* ***messaggio vero****, che chiameremo* ***msg*** *e un bit che è la* ***cifra di controllo****, che chiameremo* ***check****. Le cifre di messaggio si indicano con $\circ$ mentre la cifra di controllo con $\times$ e quindi il messaggio è del tipo:*

$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\cdots$	$\circ$	$\times$

avendo $n-1$ $\circ$ e un solo $\times$ (che potrebbe anche non essere in fondo, basta avere coscienza della posizione nel pacchetto, concordando la cosa tra mittente e ricevente).
Si ha che:

- *chi spedisce ha le cifre di messaggio e deve calcolare la cifra di controllo*
- *chi riceve controlla che la cifra di controllo sia coerente con le cifre di messaggio*

*Nell'****error detection code*** *il ricevente è solo in grado di capire che la sequenza non è valida ma per farlo bisogna assumere di avere limitazioni nella sequenza di n bit che è entrata nel canale. Questa limitazione è che gli n bit entranti nel canale siano una* ***codeword valida****, avendo che, preso un sottoinsieme M di tutto l'insieme di n bit, ovvero $M \subseteq \{0,1\}^n$, M è un insieme di codeword valide. Quindi solo un messaggio appartenente a M può entrare nel canale. Fatta questa premessa, quando esce un messaggio, ho che, a causa del rumore, questo messaggio viene rovinato, non avendo più un messaggio valido (cosa che viene capita dal ricevente). Purtroppo può succedere che il rumore trasformi un messaggio valido in un altro messaggio valido ma non considereremo questa opzione per ora.*
Nel ***controllo di parità semplice*** *il pacchetto di n bit, come visto è formato da $n-1$ bit di messaggio e un bit di controllo, la* ***check digit****. Si procede quindi, ricordando che siamo in un caso binario, a contare il numero di 1 nei primi $n-1$ bit e se questo è dispari setto il bit di check a 1 e si nota che così il numero di 1 nel pacchetto intero di n bit diventa pari, avendo la cosiddetta* ***parità pari*** *(ovvero ogni sequenza valida ha un numero pari di 1). Controllando il numero di 1 il ricevente capisce se il rumore ha modificato il messaggio anche se non può capire cosa è successo (avendo quindi che il* controllo di parità semplice *è solo un* error detecting code *e non un* error correcting code*). Non potendo fare nulla, in caso di errore identificato, il ricevente può solo chiedere al mittente di inviare nuovamente il messaggio. Qualora il rumore modificasse il messaggio in modo tale che si abbia comunque*

un numero pari di 1 *si rientrerebbe nella casistica sopra descritta in cui il rumore forma ancora un messaggio valido. Questa cosa può succedere se, nel caso binario, il rumore modifica un numero pari di cifre e quindi il* controllo di parità semplice *funziona solo se viene modificato un* numero dispari di cifre.

Vediamo quindi meglio come calcolare la **check digit**.
Si rinominiamo gli n bit come:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1}\, y$$

quindi con y *check digit*.
Si ha che, con $\oplus$ *xor*:

$$y = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{n-1}$$

Ricordando che:

a	b	$a \wedge b$	$a \oplus b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

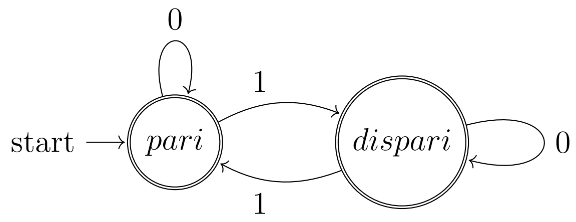
quindi vale 1 sse i due bit in input sono diversi ma questo non ci aiuta su $n-1$ input. Altrimenti si ha che vale 1 sse il numero di 1 in input è dispari e questo ci aiuta su $n-1$ input infatti la generalizzazione dello *xor* a più di due input è detta **funzione di parità**. Un altro punto di vista per considerare lo *xor* è quello della **somma a modulo 2** usando la notazione:

$$y = \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bmod 2$$

avendo che faccio prima la somma e poi il modulo 2 mi dice 0 se è pari e 1 se è dispari.
Si ha inoltre una relazione interessante tra le formule scritte usando solo $\oplus$ e $\wedge$ nella cosiddetta **forma algebrica normale (*ANF*)**. Queste formule booleane possono essere trasformate in formule aritmetiche con *modulo 2*, quindi in $\mathbb{Z}_2$ dicendo che lo *xor* equivale alla *formula modulo due* e l'*and* al *prodotto modulo due* (la cosa vale in entrambi i versi).
La funzione di parità è così usata che in tutti i microprocessori, fin dagli anni settanta, si ha un *flag di parità* tra i flag della CPU, che viene settato come

appena visto a seconda dei bit caricati su un registro particolare (a volte detto *accumulatore*). Tale calcolo è facilmente mappabile in un circuito, avendo che lo *xor* gode della proprietà associativa (avendo un circuito che fa un albero di porte *xor*).

Posso anche simulare lo *xor* con un **automa a stati finiti**, con due stati "pari" e "dispari", con il "pari" stato iniziale (diciamo che input vuoto è pari):



Questo metodo ha senso se il canale è pochissimo rumoroso, avendo pochissima probabilità di avere la modifica di un bit e ancora meno di due (due modifiche si ricorda che non verrebbero rilevate essendo pari), così poca da poter ipotizzare che non avvengano mai due errori (e se mai dovesse succedere bisognerà valutare l'impatto del problema e le conseguenze). Stiamo assumendo quindi che la **probabilità d'errore** può essere **trascurabile** infatti canali di buona qualità dovrebbero sbagliare non più di un bit su un milione, per canali più affidabili anche uno su un miliardo. Possiamo quindi trascurare che possano accadere due errori e dire che il **controllo di parità** va bene.
Parliamo ora meglio di **ridondanza**, definendola formalmente.

Definizione 3. *La **ridondanza** R è definita come:*

$$R = \frac{\textit{il numero totale di simboli/cifre spediti}}{\textit{numero di simboli/cifre che sono effettivamente parte del messaggio}}$$

Nel caso del controllo di parità *i simboli che vogliamo spedire sono n bit a fronte di $n-1$ bit di vero messaggio. Si ha quindi:*

$$R = \frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

Mettendo in evidenza che la ridondanza è sempre $R \geq 1$, visto che a numeratore abbiamo almeno una cifra in più (quella della check digit*) e che quindi è sicuramente maggiore del denominatore. In realtà per avere $R = 1$ dovrei avere numeratore e denominatore uguali che non ha molto senso parlando di ridondanza, quindi nei casi* interessanti *si ha che $R > 1$. Guardando la formula la cosa è confermata da $1 + \frac{1}{n-1}$ con $\frac{1}{n-1}$ che viene detto **eccesso di ridondanza**.*

Definizione 4. *Possiamo **generalizzare** la definizione di **ridondanza**, indicando $tot = msg + check$:*

$$R = \frac{msg + check}{msg} = \frac{tot}{msg}$$

avendo:

- *msg numero di simboli/cifre di messaggio*
- *$check$ numero di cifre di controllo*

Ma allora (avendo $check < msg$ per avere qualcosa di sensato):

$$R = \frac{msg + check}{msg} = 1 + \frac{check}{msg}$$

*che è la forma "generale" della ridondanza. Si ha che $\frac{check}{msg}$ è **eccesso di ridondanza**.*

Si può dire di non avere necessità di "proteggere" di più il bit di parità in quanto, per la macchina, conta come tutti gli altri. Tutti vanno "protetti" nello stesso modo.
*Come ho la **parità pari** potrei avere la **parità dispari**, dove i messaggi validi hanno un numero dispari di 1. I vari ragionamenti sono analoghi, essendo tutto uguale dal punto di vista matematico, avendo un isomorfismo tra le due tecniche. La scelta tra i due dipende dai casi è dalla scelta di cosa rappresentiamo con 0 e 1 (pensiamo con 0 che rappresenta assenza di segnale, in questo caso meglio usare la parità dispari, mentre se 0 e 1 rappresentassero diverse quantità di Volt andrebbe bene la parità pari).*
Nel corso si userà comunque solo la *parità pari*.

3.1.2 Il rumore bianco

Introduciamo ora un primo *modello di rumore*, il **modello del rumore bianco**.

Definizione 5. *Un **modello di rumore** è un modello matematico che descrive cosa succede nel canale quando il rumore rovina i bit.*

Definizione 6. *Il **modello del rumore bianco** consiste nell'avere il messaggio con i bit $x_1 x_2 \cdots x_n$ (con magari x_n come controllo di parità ma dato che "i bit non sono colorati" la cosa non ci interessa davvero) e avere una certa probabilità p. Si hanno due condizioni:*

1. *si ha che $p \in (0,1)$ che è la probabilità che avvenga un errore in ogni posizione $i \in [1,n]$ del messaggio. Si ha quindi che la probabilità p è uguale in tutte le posizioni*

2. *le posizioni sono tutte indipendenti, ovvero il fatto che magari si ha un errore nella posizione i non influisce sulle altre. Avendo quindi l'eventi casuale E_i con:*

$$E_i = \text{è avvenuto un errore in } i$$

allora:

$$E_i \text{ ed } E_j \text{ sono indipendenti, } \forall i \neq j$$

Le due proprietà sopra elencate rendono molto semplice il modello.
Questo però non è molto realistico, basti pensare al rumore dovuto ad uno sbalzo di corrente, dove da un bit in poi e per diversi bit si avranno alte probabilità d'errore. Quando l'errore influisce su una certa porzione di bit si dice che si ha un ***burst di errori*** *(che non può essere gestito con le tecniche per il rumore bianco, anche se si riesce con qualche workaround).*
Si è visto che $p \in (0,1)$ infatti:

- *se si avesse $p = 0$ si avrebbe che ogni bit arriverebbe sempre corretto, ma questo può avvenire solo in un mondo utopico e non in quello reale/fisico. Non esiste un canale reale non affetto da errori, quindi si ha $p \neq 0$*

- *se si avesse $p = 1$ si avrebbe che ogni bit del messaggio arriverebbe errato ma questa non sarebbe una brutta situazione, anzi sarebbe ottima infatti mi basterebbe avere una porta logica not della linea di trasmissione per riottenere il messaggio corretto, ottenendo un canale $p = 0$ d'errore. Anche questo però è irrealistico quindi $p \neq 1$*

Supponiamo ora che $p > \frac{1}{2}$ quindi ho più probabilità che un bit arrivi sbagliato che giusto. Anche in questo caso una porta logica not alla fine della linea di trasmissione per ottenere un canale con $1-p$ come probabilità d'errore. Quindi anche questo non ha molto senso quindi si considera che:

$$p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Manca solo da valutare $p = \frac{1}{2}$.
Con $p = \frac{1}{2}$ si ha che il bit di output è completamente causale e indipendente

da cosa sia stato spedito. È come se il canale generasse n bit casuali con probabilità uniforme ($\frac{1}{2}$), avendo un cosiddetto ***canale completamente rumoroso****. Dal punto di vista pratico sarebbe interessante un tale canale, per altri punti di vista (come quello della crittografia), avendo infatti un* ***generatore di bit completamente casuali****. Purtroppo questo non si può fare quindi si assume $p \neq \frac{1}{2}$.*

Cerchiano di capire quale sia la probabilità che avvengano k errori con $0 \leq k \leq n$ (quindi da nessun errore a tutti gli n bit errati), che indichiamo con:

$$p[\text{ k errori }]$$

Valutiamo i vari casi:

- partiamo con 1 errore, quindi $k = 1$, avendo $p[\text{ 1 errori }]$.
  Questo significa che per il messaggio di n bit si immagina un vettore di bit associato con 0 e 1 come "bandierine" che indicano se è avvenuto un errore o no in una certa posizione. Quindi se in un certa posizione ho 0 diciamo che significa che non ho un errore di trasmissione mentre se ho 1 ho un errore. Il messaggio di n bit diventa quindi una sorta di *maschera* che con gli 1 mi dice dove è avvenuto l'errore. Se suppongo che ne è avvenuto uno solo avrò un solo 1 e bisogna calcolare la probabilità che questo avvenga.
  Supponga che l'errore sia al primissimo bit, quindi in posizione $i = 1$, avendo quindi, per il discorso delle "bandierine" che $msg = 10000\dots0$ e quindi si ha, avendo che la probabilità che avvenga la trasmissione avvenga correttamente è $1 - p$ (cosa che avviene $n - 1$ volte), mentre p che avvenga sbagliata (cosa che avviene una sola volta):

  $$p[\text{ 1 errori }] = p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = p \cdot (1-p)^{n-1}$$

  Posso fare $\cdot$ in quanto si è supposta l'*indipendenza* (non avendo intersezioni tra gli eventi).
  Ma questo non sta considerando tutto ma solo la prima posizione. Completando il calcolo avendo di volta in volta in somma la probabilità di un errore nella posizione i ho che:

  $$p[\text{ 1 errori }] = p^1 \cdot (1-p)^{n-1} + (1-p)^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-2} + \cdots$$

  ma questo conto si può semplificare, avendo sempre gli stessi termini che si ripetono:

  $$p[\text{ 1 errori }] = n \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

Infatti so che $p \cdot (1-p)^{n-1}$ è la probabilità di avere un errore in una certa posizione fissata. Mi chiedo dove posso mettere questa posizione in tutti i modi possibili nel pacchetto di n bit e ho che, avendo un solo errore, ho n modi per posizionarlo, ciascuno con probabilità $p \cdot (1-p)^{n-1}$

- passiamo a due errori, avendo $p[\text{ 2 errori }]$.
  Ho un ragionamento analogo. Parto supponendo di avere i due errori nelle prime due posizioni del messaggio/pacchetto, avendo quindi 1 nelle prime due posizioni della maschera. Abbiamo comunque già visto che poi il ragionamento si generalizza per qualsiasi posizione, in questo caso coppie (anche non consecutive) di posizioni. Si ha che, ipotizzando che le prime due siano errate:

  $$p[\text{ 2 errori }] = p^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-2} = p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

  Ma anche qui dobbiamo vedere la probabilità per qualsiasi coppia, facendo variare le due posizioni d'errore in tutti i modi possibili ma questo è come prendere un qualsiasi sottoinsieme di due elementi a partire da un insieme di n elementi ma questo altro non è che il calcolo che si fa tramite il coefficiente binomiale, avendo quindi:

  $$p[\text{ 2 errori }] = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

- analogamente a quanto fatto per due errori potrei fare con tre, quattro, etc...

- possiamo generalizzare con k errori, avendo $p[\text{ k errori }]$.
  Si hanno quindi k uni da disporre in tutti i modi possibili nel vettore di n bit. Si ha quindi:

  $$p[\text{ k errori }] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

  E quindi posso valutare la cosa nei due casi estremi:

  - $k = 0$, avendo 0 errori. Ho un solo modo per mettere zero 1 nella maschera di bit (da nessuna parte) e infatti (avendo poi tutti gli n bit la stessa probabilità di uscire corretti):

    $$p[\text{ 0 errori }] = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^n = (1-p)^n$$

- $k = n$, avendo n errori[1]. Ho un solo modo per mettere tutti 1 nella maschera di bit (ovunque) e infatti (avendo poi tutti gli n bit la stessa probabilità di uscire errati):

$$p[\text{ n errori }] = \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot 1 = p^n$$

Si nota che i due casi estremi sono "speculari".

In questo elenco puntato si è quindi ragionato sulle celle della maschera di bit associata al pacchetto e non del pacchetto in se, anche se spesso risulti ambiguo.

Consideriamo ora nuovamente $p[\text{ 1 errore }]$, si ha che, dalla generalizzazione è:

$$p[\text{ 1 errore }] = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

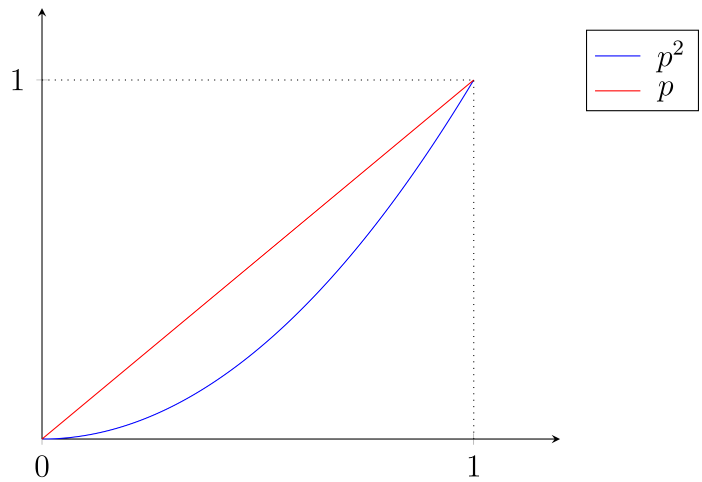
Introduciamo un'approssimazione interessante dell'analisi matematica che vale per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|X| < 1$, ovvero $-1 < x < 1$:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha \cdot x$$

Ovvero $1 + \alpha \cdot x$ sono i primi due termini dello sviluppo in serie di $(1+x)^\alpha$. Tratto quindi la formula per un errore in base a questa approssimazione:

$$p[\text{ 1 errore }] = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \simeq n \cdot p \cdot [1 - p \cdot (n-1)] = n \cdot p - n^2 \cdot p^2 + n \cdot p^2$$

Ma so che $p \in (0,1)$ e quindi $p^2 < p$, infatti:



[1]Su dispense del prof grafico con $n = 8$, $p = 0.1$ e k che varia tra 0 e 8

ma quindi, sempre approssimando (avendo quindi già due approssimazioni):

$$p[\text{ 1 errore }] = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \simeq n \cdot p - n^2 \cdot p^2 + n \cdot p^2 \simeq n \cdot p$$

Quindi:

$$p[\text{ 1 errore }] \simeq n \cdot p$$

Analogamente ragiono per due errori:

$$p[\text{ 2 errori }] = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \simeq \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot [1-p \cdot (n-2)] = \binom{n}{2} \cdot (p^2 - n \cdot p^3 + 2p^3)$$

Ma anche qui si ha che $p \in (0,1)$ e quindi $p^3 < p^2$, e quindi si ha:

$$p[\text{ 2 errori }] \simeq \binom{n}{2} \cdot p^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2$$

In generale, per k errori, con gli stessi passaggi:

$$p[\text{ k errori }] \simeq \binom{n}{k} \cdot p^k$$

I conti diventano molto più semplici.
Si è detto che se la probabilità di due errori è piccola si può decidere di trascurarla (usando poi solo il *controllo di parità semplice*). Da queste approssimazioni vediamo che la probabilità di un errori è $\simeq n \cdot p$ mentre per due $\simeq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2$. Se ipotizziamo $p \sim 10^{-6}$, quindi uno su un milione, si ha che $p^2 = 10^{-12}$ quindi assolutamente trascurabile. Si segnala comunque che questa non è una pratica standard. Normalmente si hanno, ad esempio, **low density parity codes (LDPC)** dove si sparano a caso vari controlli di qualità nell'ottica di mantenere le proprietà di correzione degli errori usando meno controlli possibile, avendo, tornando alla ridondanza $R = 1 + \frac{check}{msg}$, che si vuole usare il minor numero di cifre di controllo per abbassare l'*eccesso di ridondanza*, abbassando la ridondanza stessa, avvicinandosi quindi a 1^+ (ci si avvicina da destra ovviamente). Riducendo l'*eccesso di ridondanza* si ha che ogni cifra di controllo *copre/protegge* il maggior numero ci simboli/cifre del messaggio. *A parità di simboli inviati si vuole quindi ridurre il numero di cifre di controllo.*
Approfondiamo e usiamo quindi il *modello del rumore bianco* per vedere qual è a probabilità che il ricevente non riesca a capire che c'è stato un errore utilizzando il *controllo di parità semplice*.
Ricordiamo che il messaggio è della forma:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} y$$

con y *controllo di parità semplice* calcolato come:

$$y = \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i$$

Un numero dispari di errore mi segnala che ci sono stati problemi, usando la *parità pari* (i pacchetti inseriti nel canale hanno un numero pari di 1). Vogliamo quindi la probabilità che il controllo di parità fallisca, ovvero:

$$p[\text{ controllo } \bigoplus \text{ fallisce }]$$

ma questo è uguale alla probabilità che avvenga un numero pari di errori (**zero escluso**, ovviamente):

$$p[\text{ controllo } \bigoplus \text{ fallisce }] = p[\text{ numero pari di errori }] = p[\text{ 2 errori }] + p[\text{ 4 errori }] + \cdots$$

Diciamo che, per comodità:

$$1 = (1-p) + p = [(1-p) + p]^n$$

Ma so che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, quindi:

$$1 = [(1-p) + p]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$$

ma questa è $\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k = p[\text{ k errori }]$ (infatti la somma di tutte le probabilità è appunto 1), quindi:

$$1 = [(1-p) + p]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = \sum_{k=0}^{n} p[\text{ k errori }]$$

D'altro canto posso anche dire che, sempre applicando l'espansione di $(a+b)^n$, scomponendo però $(-p)^k$ in $(-1)^k \cdot p^k$ (dove $(-1)^k$ vale 1 per k pari e -1 per k dispari), avendo cambiato il segno nella formula iniziale e avendo ora $[(1-p)-p]^n$. Si ha quindi:

$$(1 - 2 \cdot p)^n = [(1-p) - p]^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Ma quindi ho (avendo quindi che nel primo caso se sommo con l'espansione di 1 raddoppio il valore mentre nel secondo lo annullo):

$$(1 - 2 \cdot p)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & \text{sse } k \text{ è pari} \\ -\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & \text{sse } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi se k è dispari le espansioni di 1 e $(1-2\cdot p)^n$ sono uguali ma di segno opposto mentre se k è pari sono uguali con lo stesso segno. Ma quindi questa somma delle due espansioni mi lascia col doppio dei soli termini con k pari che ci aiuta volendo calcolare proprio le probabilità con un numero di errori pari. Si ha quindi, dividendo già per due avendo il discorso del doppio:

$$\frac{1+(1-2\cdot p)^n}{2} = \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\cdot t} \cdot p^{2t} \cdot (1-p)^{n-2t}$$

La somma va quindi da 0 alla parte intera di $\frac{n}{2}$. Nel coefficiente binomiale ho $2\cdot t$ che è una quantità sicuramente pari. In generale è come se avessi $k = 2\cdot t$ ciclando solo sui k pari. Ho quindi ottenuto:

$$p[\text{ 0 errori }] + p[\text{ 2 errori }] + p[\text{ 4 errori }] + \cdots$$

Non vogliamo però $t = 0$ quindi:

$$p[\text{ controllo } \bigoplus \text{ fallisce }] = p[\text{ numero pari di errori }] = \frac{1+(1-2\cdot p)^n}{2} - p[\text{ 0 errori }]$$

$$= \frac{1+(1-2\cdot p)^n}{2} - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-0} = \frac{1+(1-2\cdot p)^n}{2} - (1-p)^n$$

E quindi:

$$p[\text{ controllo } \bigoplus \text{ fallisce }] = p[\text{ numero pari di errori }] = \frac{1+(1-2\cdot p)^n}{2} - (1-p)^n$$

D'altro canto potrei anche calcolare $p[\text{ numero dispari di errori }]$:

$$p[\text{ numero dispari di errori }] = 1 - p[\text{ numero pari di errori }]$$

(*o anche modificando la sommatoria per ciclare sui k dispari*).
Facendo qualche conto[2] si ottiene che:

$$p[\text{ numero dispari di errori }] = 1 - (p[\text{ numero pari di errori }] + p[\text{ 0 errori }])$$

ovvero:

$$p[\text{ numero dispari di errori }] = \frac{1-(1-2\cdot p)^n}{2}$$

In generale il numero dispari di errori è meno interessante.

[2] i calcoli per il numero dispari di errore sono materiale extra sulle dispense del docente

3.1.3 Gestione dei burst

Come abbiamo introdotto con il solo *controllo di parità* e con il *rumore bianco* non si possono gestire i **burst di errori**. Vediamo quindi un modo semplice per gestirli.
Si supponga di voler spedire dei messaggi formati da lettere, ad esempio:

c	i	a	o

Posiamo di rappresentare ogni lettera tramite l'**ASCII standard** a 7 bit:

char	bit
c	1000011
i	1001001
a	1000001
o	1001111

Si supponga di avere dei burst di errori di lunghezza L e per semplicità assumo L di lunghezza pari alle singole word, quindi $L = 7$. Per gestire il burst spedisco prima i 7 bit della prima lettera poi quelli della seconda etc...
Infine spedisco un intero pacchetto di bit di controllo di 7 bit dove ogni bit viene calcolato controllando quella posizione di bit in tutti i pacchetti precedenti, sempre tramite lo *xor*. Nel caso d'esempio si ha quindi, con x per indicare il **check** (se nella colonna sopra ho un numero pari di 1 metto 0 altrimenti 1):

c	1000011
i	1001001
a	1000001
o	1001111
x	0000100

Suppongo un burst che rovini dalla posizione 2 alla 4 incluse (avendo che quindi molto probabilmente non ci torneranno i conti facendo il check su $x[2, 4] = 000$).
Ovviamente anche qui un numero pari di errori inganna il sistema avendo comunque un *controllo di parità semplice* e anche in caso d'errore il ricevente non sa comunque dove sia avvenuto e quindi fa **detection** ma non può fare **correction**.

3.1.4 Codici pesati

Abbiamo già parlato del **codice 01247** vediamo ora un codice pesato più interessante e utilizzato.

Definizione 7. *Definiamo questo* ***codice pesato*** *come un codice per cui si hanno alcune cifre di messaggio* $msg = m_1 m_2 \cdots m_n c$ *alle quali associamo dei pesi che dipendono dalla posizione in cui si trovano le varie cifre. In particolare si ha peso:*

- 1 *per la* ***check digit*** c
- 2 *per* m_n
- *si prosegue sempre aumentando di 1 per le altre cifre (andando a ritroso)*
- n *per* m_2
- $n+1$ *per* m_1

Questo si fa perché la cifra di controllo è calcolata per far ottenere:

$$m_1 \cdot (n+1) + m_2 \cdot n + \cdots + m_n \cdot 2 + c \cdot 1 = 0$$

ma ovviamente questo non sembra possibile e infatti i conti sono fatti in **modulo numero primo**, avendo per esempio, se scegliamo come numero prima 37:

$$m_1 \cdot (n+1) + m_2 \cdot n + \cdots + m_n \cdot 2 + c \cdot 1 \equiv 0 \mod 37$$

La scelta di 37 non è causale, infatti volendo:

- rappresentare le 21 lettere dell'alfabeto inglese
- rappresentare dieci cifre da 0 a 9
- un simbolo per lo spazio

e quindi siamo a 32 simboli e ci serve un numero primo ≥ 31 e quindi va bene 37.
Vogliamo un numero primo perché se vogliamo fare i conti con le congruenze è più semplice farle in *modulo numero primo*.
Lavoriamo quindi nella classe dei resti:

$$[0]_{37}, [1]_{37}, \ldots, [36]_{37}$$

e in questo modo se facciamo le varie operazioni è tutto uguale al solito fino a 36 (cosa che non succede per le classi dei resti in modulo non numero primo). La classe dei resti in modulo numero primo è un **campo** mentre se non fosse primo si avrebbe un **anello**. In un campo se $x \cdot y = 0$ o che $x = 0$ oppure $y = 0$ (cosa che non succede negli anelli). Inoltre in un campo ho che se $x \cdot y = z$ allora $x = z \cdot y^{-1}$ (in un anello non per tutti gli y esiste un y^{-1} mentre in un campo sì).
Facendo dipendere il calcolo del peso della **check digit** da tutti gli altri pesi perché, così facendo, sopratutto nelle comunicazioni di tipo **seriale** (dove si spedisce una cifra alla volta), ci si accorge subito se una cifra è andata persa oppure se si è aggiunta cifra o se due cifre si sono scambiate (cosa comunque difficile in un sistema di comunicazione elettronico ma è utile in altre situazioni, sopratutto di conti "a mano").
Si supponga di avere delle cifre b e a, la prima con peso $k+1$ e la seconda con peso k, avendo una scrittura del tipo $cifra(peso)$:

$$b(k+1) + a(k)$$

Ipotizziamo di scambiare a e b (ora a pesa $k+1$ e b pesa k), avendo:

$$a(k+1) + b(k)$$

Ma facendo la differenza si nota che non è nulla:

$$[b(k+1) + a(k)] - [a(k+1) + b(k)] \neq 0$$

infatti ho:

$$b \cdot k + b + a \cdot k - a \cdot k - a - b \cdot k = b - a$$

ma $b - a = 0$ sse $b = a$ e quindi l'unico caso in cui non ci si accorge dello scambio è avere lo scambio di due cifre uguali che non fa cambiare il risultato. Questa idea viene usata anche nei codici a barre. Vediamo quindi un algoritmo per calcolare la cifra di controllo:

Algorithm 1 Algoritmo di calcolo dei pesi per codice pesato

```
function CheckCalc
    sum ← 0
    ssum ← 0
    while not EOF do
        read sym
        sum ← sum + sym (mod 37)
        ssum ← ssum + sum (mod 37)
    temp ← ssum + sum (mod 37)
    c ← 37 − temp (mod 37)
    return c
```

Dove:

- *sum* tiene conto della somma numerica della nostro calcolo, accumulando i vari termini
- *ssum* che è una *somma delle somme* e tiene conto implicitamente dei vari pesi che crescono spostandoci da destra a sinistra come visto sopra. Si accumulano i termini e i loro pesi

I mod37 *nel ciclo sono in realtà superflui ma conviene farli per non far diventare i numeri troppo grossi. Le ultime due operazioni servono a risolvere alcune problematiche che non vediamo qui.*
Vediamo una più chiara simulazione.

Esempio 1. *Avendo, simulando per un messaggio wxyzc, con c check digit:*

msg	sum	ssum
w	w	w
x	$w+x$	$2\cdot w+x$
y	$w+x+y$	$3\cdot w+2\cdot x+y$
z	$w+x+y+z$	$4\cdot w+3\cdot x+2\cdot y+z$
c	$w+x+y+z+c$	$5\cdot w+4\cdot x+3\cdot y+2\cdot z+c$

Arrivato alla fine voglio calcolare c in modo che:

$$5\cdot w+4\cdot x+3\cdot y+2\cdot z+c\equiv 0 \mod 37$$

Il mittente ha un messaggio e ci calcola la **check digit**. Chi riceve fa lo stesso calcolo e alla fine controlla la **check digit**. Un altro modo per il ricevente è quello di fare solo l'ultimo calcolo anziché farli tutti step by step. Introduciamo un particolare tipo di codice, quello **ISBN (*International Standard BookNumber*)** dei libri, che sono legati, per il codice a barre, allo standard europeo **EAN13** (negli USA si usa lo standard **UPC**). In questo codice si hanno 10 cifre (con al più il carattere X) che un identificano in modo univoco ad un libro. Nel dettaglio:

- la prima cifra rappresenta lo stato in cui è stampato il libro. Questo ha problemi non avendo solo 9 stati che producono libri
- le successive 2 cifre sono per l'editore, anche questo è un problema in quanto alcuni stati hanno più di 100 case editrice
- le successive 6 sono il numero del libro

- l'ultima cifra è il checksum, la check digit

In realtà ho trattini dopo la prima cifra, dopo la quinta e dopo la nona ma non contano nulla ai fini del calcolo ma sono aiutati solo per facilitare la leggibilità dello stesso.
A causa dei problemi sopra descritti i codici ISBN vengono assegnati ormai con libertà dalle case editrici, usando il primo codice libero.
ISBN è un codice pesato dove i conti sono fatti in mod 11 (il più piccolo numero primo più grande di 10). Potrei avere come risultato 10 avendo $\bmod 11$ ma in quel caso uso X come checksum, come ultima cifra.

Esempio 2. *Prendiamo l'ISBN:*

$$0\text{-}1315\text{-}2447\text{-}X$$

e vogliamo verificare che sia effettivamente X. Si ha (con $\equiv$ indico i conti $\bmod 11$*):*

msg	sum	ssum
0	0	0
1	1	1
3	4	5
5	10	$20 \equiv 9$
2	$12 \equiv 1$	$21 \equiv 10$
4	5	$15 \equiv 4$
4	9	$13 \equiv 2$
7	$16 \equiv 5$	7
$X \equiv 10$	$15 \equiv 4$	$11 \equiv 0$

Avendo che effettivamente la somma $\bmod 11$ *fa 0 e quindi è verificato. Avrei inoltre, per l'algoritmo, controllando la check digit:*

$$temp = 7 + 5 = 12 \equiv 1$$

$$c = 11 - 1 = 10 \equiv X$$

3.2 Codici per correggere errori

In questo caso il ricevente non solo deve capire dove è l'errore ma deve anche correggerlo.

3.2.1 Codici rettangolari

Il modo più semplice per correggere errori è usare i **codici a correzione rettangolari**.
In questo caso il codice viene organizzato in modo logico in forma di rettangolo, ovviamente solo in modo logico/astratto. Indichiamo con $\circ$ i bit di messaggio e con x le check digit. In questa prima soluzione penso ai codici come se fossero a forma di rettangolo, con $m-1$ righe e $n-1$ colonne, con extra una colonna di check digit e una riga extra di check digit. Contando la riga di check digit e la colonna di check digit arriviamo a m righe e n colonne.

$$\begin{array}{cccccc}
\circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \text{x} \\
\circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \text{x} \\
\circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \text{x} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \circ & \text{x} \\
\circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \text{x} \\
\text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & (\text{x})
\end{array}$$

L'ultima check digit in fondo a destra è superflua, anche se a volte è lo xor di tutte le cifre di controllo, richiedendo che abbia numero pari di 1.
I codici rettangolari riescono a correggere un errore, uno e uno solo ma ovunque avvenga.
La check digit della prima riga fa la parità della prima riga, analogamente la seconda lo fa per la seconda riga etc…
Faccio un discorso analogo sulle colonne (la colonna 1 ha la check digit come prima cifra della riga di check digit etc…).
La check digit mi dice sempre se ho cifre pari tra cifre di messaggio e check digit.
Tramite la check digit a fine riga capisco che in una riga si ha un errore, e posso controllare lo stesso per la colonna. Identifico quindi il punto preciso in cui è avvenuto l'errore e semplicemente lo inverto, essendo binario.
Identificare l'errore singolo è dato dal fatto che solo una riga e solo una colonna avranno la rispettiva check digit "rotta" (nella colonna di check digit identifico la riga dell'errore mentre nella riga di check digit identifico la colonna dell'errore) e quindi posso riconoscere il preciso elemento che è errato.
Da questo discorso si capisce che la check digit in fondo a destra è in realtà inutile.
Ovviamente questo è garantito funzionare solo per un errore in quanto due errori potrebbero avere in comune riga o colonna e non saprei più capire dove siano gli errori. Potrebbe funzionare per più di un errore ma non sempre causa ambiguità e quindi questo metodo è **garantito per uno e un solo**

errore, ovunque si trovi.
Studiamo quindi la ridondanza, che ricordiamo essere in generale:

$$R = \frac{msg + check}{msg} = 1 + \frac{check}{msg}$$

Per il codice rettangolare si ha quindi:

$$R_{\square} = \frac{m \cdot n}{(n-1) \cdot (m-1)} = 1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot (m-1)}$$

Con quindi $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot (m-1)}$ che è il nostro *eccesso di ridondanza* e si ha che è ≥ 0, quindi in generale:

$$R_{\square} \geq 1$$

Ricordando che "i bit non sono colorati" potrei avere errori anche nelle check digit. Supponendo però che si ha al massimo un errore e supponendo di non avere, in quanto inutile, la check digit in basso a destra, si ha che al più trovo "rotta" o una riga (se ho errore un errore nella colonna di check digit) o su una colonna (se ho errore un errore nella riga di check digit), capendo così che ho "rotta" una check digit, sapendo anche quale.

Esempio 3. *Se devo spedire 24 bit posso rappresentarli in vari modi, secondo vari rettangoli (contando anche la check digit in basso a destra):*

- *una riga per 24 colonne (più la riga di controllo), con quindi 26 check digit*
- *2 righe per 12 colonne (più la riga di controllo), con quindi 15 check digit*
- *3 righe per 8 colonne (più la riga di controllo), con quindi 12 check digit*
- *4 righe per 6 colonne (più la riga di controllo), con quindi 11 check digit*
- *le simmetriche di quelle dette sopra*

Man mano che il numero di righe tende a quello di colonne (posto che, come nell'esempio precedente, non sempre può diventare uguale) si ha che le cifre di controllo diminuiscono. Tornando quindi alla formula della ridondanza vediamo che al diminuire delle check digit diminuisce l'eccesso di ridondanza $\frac{check}{msg}$ e quindi la ridondanza tende ad avvicinarsi a 1. Quindi per scegliere n e m si cerca di fare si che siano il più uguali possibili, avendo meno cifre di controllo. Formalizzando quanto appena detto posso vedere la ridondanza la posso vedere come una funzione:

$$f(n, m)$$

avendo che $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)\cdot(m-1)}$ è quanto fatto dalla funzione. Si può quindi cercare il punto minimo di questa funzione trovando che è in $m = n$. Si può anche ipotizzare di poter aggiungere una cifra di messaggio per poter avere una rappresentazione con $n = m$, ma ovviamente dipende da caso a caso. Questo bit aggiuntivo a seconda del caso sarebbe 0 o 1. Si nota che aumentare il messaggio aumenta msg riducendo, a parità di check digit, $\frac{check}{msg}$, aiutando ad arrivare ad una ridondanza prossima a 1. **Non sempre ho modo di aggiungere tale bit**.
Il caso migliore è quindi con $n = m$ e si ha quindi, avendo un quadrato, il calcolo più preciso per la ridondanza:

$$R_{\square} = \frac{n^2}{(n-1)^2} = 1 + \frac{2}{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}$$

che è la ridondanza migliore che si può ottenere con i codici rettangolari.

3.2.2 Codici triangolari

Vediamo quindi i **codici a correzione triangolari**, dove la rappresentazione è appunto triangolare (a occhio una sorta di matrice triangolare).
In questo caso si ha un triangolo con un cateto di lunghezza n, ad esempio (con $n = 5$):

$$\begin{matrix} \circ & \circ & \circ & \circ & x \\ \circ & \circ & \circ & x & \\ \circ & \circ & x & & \\ \circ & x & & & \\ x & & & & \end{matrix}$$

Ho quindi n check digit. Si ha poi che le cifre di messaggio sono (per la **formula di Gauss**):

$$msg = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

(in altre parole il numero elementi nelle diagonali che ho nella matrice meno l'ultima).
Ho inoltre che il numero di cifre totali è:

$$tot = msg + check = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

che altro non è che la sommatoria fatta per calcolare *msg* ma con un'iterazione in più:

$$tot = msg + check = \sum_{i=1}^{n} i$$

Le check digit vengono calcolate dal mittente in base alle cifre sulla riga e sulla colonna della check digit. Quindi, ad esempio, per calcolare la check digit in grassetto di:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \mathrm{x} \\ \circ & \circ & \circ & \mathrm{x} & \\ \circ & \circ & \mathbf{x} & & \\ \circ & \mathrm{x} & & & \\ \mathrm{x} & & & & \end{array}$$

La calcola tramite le cifre di messaggio in verde:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & \textcolor{green}{\circ} & \circ & \mathrm{x} \\ \circ & \circ & \textcolor{green}{\circ} & \mathrm{x} & \\ \textcolor{green}{\circ} & \textcolor{green}{\circ} & \mathbf{x} & & \\ \circ & \mathrm{x} & & & \\ \mathrm{x} & & & & \end{array}$$

Si nota che il bit di parità della prima riga è calcolato solo tramite la prima riga mentre il bit di parità dell'ultima riga viene calcolato solo tramite la prima colonna.
Il ricevente, per capire dove è il bit errato, verifica in quali check digit è coinvolto, che sono due check digit, e incrociando scopro quale sia il simbolo errato. Vedendo in pratica si supponga errato il bit in rosso:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \mathrm{x} \\ \circ & \circ & \textcolor{red}{\circ} & \mathrm{x} & \\ \circ & \circ & \mathrm{x} & & \\ \circ & \mathrm{x} & & & \\ \mathrm{x} & & & & \end{array}$$

Esso è coinvolto nelle seguenti cifre di parità in grassetto, calcolate, oltre che grazie alla cifra in rosso anche da quelle in verde:

$$\begin{array}{ccccc}
\circ & \circ & \color{green}{\circ} & \color{green}{\circ} & \mathrm{x} \\
\color{green}{\circ} & \color{green}{\circ} & \color{red}{\circ} & \mathbf{x} & \\
\color{green}{\circ} & \color{green}{\circ} & \mathbf{x} & & \\
\circ & \mathrm{x} & & & \\
\mathrm{x} & & & &
\end{array}$$

Mentre le altre cifre di parità saranno corrette. Il destinatario può quindi scoprire quale sia il bit che è stato modificato per poterlo poi correggere.
Passiamo quindi alla ridondanza del codice triangolare. Si ha che:

$$R_{\triangle} = \frac{tot}{msg} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n-1+2)}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$$

Confronto questa ridondanza con quella dei migliori codici rettangolari, ovvero quella dei codici quadrati, dove vedo che si ha un termine positivo in più nei codici quadrati, ovvero $\frac{1}{(n-1)^2}$, che essendo positivo può solo aumentare la ridondanza. Si ha quindi che:

$$R_{\triangle} < R_{\square}$$

e quindi i codici triangolari sono migliori di quelli rettangolari, anche dei migliori tra quelli rettangolari (quelli quadrati), e hanno una sola check digit per riga e una sola per colonna.
L'unico limite per avere un codice triangolare è quello di avere un messaggio di n cifre che permette l'espressione $\frac{(n-1)\cdot n}{2}$, ovvero che sia rappresentabile da un triangolo (per fare tornare i conti posso comunque aggiungere uno 0, per esempio), avendo n lunghezza del cateto.

3.2.3 Codici cubici

Per cercare di abbassare ancora meno la ridondanza cerchiamo la disposizione geometrica più conveniente. Si è provato quindi ad aumentare le dimensioni dello spazio in cui ci troviamo, pensando ad un cubo, ipotizzando di avere una cifra di controllo (posta in basso a destra per il piano) che controlla tutto un piano (contando che ho piani per ognuna delle tre dimensioni). Si ha quindi un bit di parità per ogni piano (che è ciò che rappresenta le cifre di messaggio) con cui posso tagliare il cubo. Nel complesso si ha quindi un intero spigolo del cubo che rappresenta le check digit che sono rappresentati da i piani in

	Quadrato		Triangolare		Cubico	
	messaggio	controllo	messaggio	controllo	messaggio	controllo
n	$(n-1)^2$	$2n-1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n	n^3-3n+2	$3n-2$
2	1	3	1	2	4	4
3	4	5	3	3	20	7
4	9	7	6	4	54	10
5	16	9	10	5	112	13
6	25	11	15	6	200	16
7	36	13	21	7	324	19
8	49	15	28	8	490	22
9	64	17	36	9	704	25
10	81	19	45	10	972	28

Tabella 3.1: Esempio di tabella di confronto tra codici quadrati, triangolari e cubici

una certa direzione. In totale posso sezionare in tre direzioni avendo quindi 3 spigoli di check digit che "proteggono" tutte le cifre di messaggio contenute nel cubo (che ha lato $n-1$ più la check digit).

In maniera approssimata, su circa n^3 posizioni si hanno $3(n-1)+1 = 3n-2$ check digit. Si ha quindi che la ridondanza è:

$$R_{\square} = \frac{(n-1)^3 + 3n - 2}{(n-1)^3} = 1 + \frac{3n-2}{(n-1)^3} \simeq 1 + \frac{3}{n^2}$$

Posso pensare quindi pensare di aumentare ancora le dimensioni, considerando cubi a quattro dimensioni (e non mi serve disegnarlo visto che devo solo "pensarlo"), avendo:

- $(n-1)^4$ cifre di messaggio
- $4(n-1)+1 = 4n-3$ check digit

ottenendo la seguente ridondanza:

$$R_{\square\textit{4-dim}} = 1 + \frac{4n-3}{(n-1)^4} \simeq 1 + \frac{4}{n^3}$$

(*dove praticamente si è ignorato il* -3 *nella formula della check digit*).
Posso pensare di andare quindi in k dimensioni, avendo:

- $(n-1)^k$ cifre di messaggio
- $k(n-1)+1 = kn-k+1$ check digit

ottenendo la seguente ridondanza, con k che è fissato e quindi costante:

$$R_{\square k\text{-}dim} = 1 + \frac{kn - k + 1}{(n-1)^k} \simeq 1 + \frac{k}{n^{k-1}}$$

Possiamo così, facendo crescere k e l'eccesso di ridondanza, ottenere una figura sempre migliore.
Ma anche se la ridondanza è sempre migliore vedo che a denominatore dell'eccesso di ridondanza $\frac{k}{n^{k-1}}$ trovo un polinomio elevato alla dimensione meno uno. Vedremo che nei **codici di Hamming**, per correggere un errore, il *gap* è esponenziale al variare delle dimensioni. Inoltre il *codice di Hamming* è **ottimale**.

3.2.4 Codici di Hamming

Hamming si pone di trovare un codice per correggere un errore nel modello del rumore bianco, avendo che sia però un **codice ottimale**, *ovvero che a parità di cifre inviate deve usare il minimo numero di check digit.* Ho sempre un pacchetto di n bit che sono di due tipi:

1. k bit di cifre di messaggio *msg*
2. m bit di check digit *check*

Per calcolare le check digit usa delle equazioni di controlli di parità, con una cifra di messaggio che nel complesso serve a calcolare più di una check digit (come nei codici legati alle figure numeriche). Si avranno quindi m equazioni di parità del tipo, avendo $c_1, \ldots, c_n$ cifre di parità e $x_i, \cdots x_n$ cifre di messaggio:

$$c_i = x_j \oplus x_k \oplus x_w \cdots$$

Tutte queste equazioni devono essere **linearmente indipendenti**, in modo che ogni check digit abbia informazioni differenti. Supponiamo infatti:

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7$$

$$c_2 = x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9$$

Ma in realtà c_i è una della x_j della formula infatti:

$$c_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

e quindi:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = c_1$$

Scriviamo quindi:

$$c_1 \to x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

$$c_2 \to x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 = 0$$

In generale le equazioni mi danno 0 se il numero di 1 è pari.
In ogni formula si assume di avere una sola cifra di messaggio.
Faccio poi lo $\oplus$ tra c_1 e c_2 bit a bit, ottenendo (avendo tipo x_5 da entrambe le parti si semplifica):

$$c \to x_1 \oplus x_2 \oplus x_8 \oplus x_9 = 0$$

Si supponga ora di avere una $c_3 = c$ ma avrei uno spreco di fatica in quanto le informazioni delle prime due sarebbero uguali alla terza, avendo infatti *dipendenza lineare*.
Ricordiamo che:

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n$$

con $\mathbb{R}^n$ che è uno **spazio vettoriale**.
Fare **combinazioni lineari** in questo caso prevede la somma come il $\oplus$. Rappresento le equazioni di parità dell'esempio sopra come un vettore di $\{0,1\}^n$:

$$(1,1,0,0,1,0,1,0,0)$$

$$(0,0,0,0,1,0,1,1,1)$$

e facendo lo *xor* (che è la somma mod, 2 bit a bit) ottengo:

$$(1,1,0,0,0,0,0,1,1)$$

Si ha ora il prodotto scalare in $\{0,1\}^n$:

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Quindi nel nostro caso:

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}, a_1, a_2 \in \{0,1\}, \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \{0,1\}^n$$

Quindi 0 mi dice di non considerare il vettore e uno di considerarlo, indicando il sottoinsieme di elementi da sommare. Si ha che $\{0,1\}^n$ rispetto alla somma come definita e al prodotto scalare come definito è uno **spazio vettoriale**.
Quindi, tornando a Hamming, possiamo capire, grazie a questi ragionamenti, l'indipendenza lineare tra le equazioni di parità. Con m bit di controllo si cerca di capire quante condizioni d'errore si riesce a rappresentare. Con m

cifre di controllo si hanno 2^m possibili combinazioni/configurazioni. Ogni configurazione mi deve identificare un errore diverso per poter fare anche correzione. Mi serve però anche una configurazione che indichi il *non avere errori*. Si ha quindi che si hanno:

- $2^m - 1$ condizioni di errore
- una condizione di non errore

Gli errori possono avvenire ovunque, anche nelle check digit, ma con al massimo un errore (o nella prima posizione o nella seconda etc...). Si hanno quindi n possibili condizioni d'errore. Si ha quindi che:

$$2^m \geq n + 1$$

ovvero le configurazioni che posso fare con m cifre di controllo deve indicarmi le n possibili condizioni d'errore più una per l'assenza di errore. Nel caso dei codici di Hamming "propriamente detti" si avrebbe:

$$2^m = n + 1$$

usando tutte le combinazioni in quanto il $>$ implicherebbe che sto "sprecando" qualche configurazione delle cifre di controllo. **Non sempre posso usare "="**.
Posso quindi capire quante siano le cifre di controllo.

Esempio 4. *Si supponga di voler spedire $k = 4$ cifre di messaggio. Ci chiediamo di calcolare m:*

$$2^m \geq n + 1$$

ma quindi, avendo $n = m + k$:

$$2^m \geq m + k + 1$$

Mi serve quindi l'm più piccolo possibile che risolva la disequazione con $k = 4$:

$$2^m \geq m + 5$$

Non si ha però una soluzione analitica ma 2^m cresce più velocemente di $m+5$ ($m = 0$ non ha senso ma lo si mette, si hanno comunque tecniche anche per non partire da 1):

m	2^m	$m + 5$
0	1	5
1	2	6
2	4	7
3	8	8

quindi $m = 3$ è il più piccolo valore che risolve, risolvendo per di più con $=$ e non $\geq$. Per 4 bit di messaggio mi servono 3 cifre di controllo. Ho quindi $n = 7$.

In generale per correggere un errore devo sapere in che posizione è, sapendo l'indice da 1 a n indicante tale posizione nel pacchetto. Il metodo che lo calcola può restituire 0, indicante che non si ha errore.
Faccio una tabella con posizione/binario, ad esempio per l'esempio precedente

pos	bin
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111
	$c_3c_2c_1$

Ho che i bit hanno m cifre, e ho $c_3c_2c_1$ (si parte da destra) come le cifre di parità ottenute dalle tre colonne di binari.
Ipotizzo un errore in posizione 5. Ho che, mettendo le x_i dove si ha 1:

$$c_1 \rightarrow x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

ma ho problemi con x_5, avendo l'equazione pari a 1.

$$c_2 \rightarrow x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

dove non ho problemi con x_5.

$$c_3 \rightarrow x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

ma ho problemi con x_5, avendo l'equazione pari a 1.
Si ha quindi che:

$$c_1 \rightarrow x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 1$$

$$c_2 \rightarrow x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

$$c_3 \rightarrow x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 1$$

Che quindi mi mostra dopo l'uguale la posizione in cui è avvenuto l'errore. I bit letti dal basso verso l'alto sono 101 e questo è detto **sindrome**, che

quindi nei codici di Hamming è la posizione dell'errore in codice binario.
Se la *sindrome* è 0 non ho errori (è come se avessi 000 nella prima riga della tabella).
Il ricevente è sistemato ma manca il mittente che deve calcolare gli m bit di controllo e spedire. Usando la tecnica di usare nelle equazioni le x_i relative agli 1 mi genera equazioni linearmente indipendenti.
Manca capire dove mettere la check digit. Le cifre di controllo vengono messe nelle posizioni in cui si ha un 1 solo, ovvero 001, 010 e 100, in modo che c_1 è solo nella prima equazione, c_2 nella seconda e c_3 nella terza, non dovendo risolvere in realtà il sistema lineare. Si quindi, nell'esempio sopra:

$$c_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

$$c_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

$$c_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

ottenendo quindi il pacchetto.

$$pacchetto = c_1c_2m_1c_3m_2m_3m_4$$

e quindi:

$$c_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0$$

$$c_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0$$

$$c_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0$$

ma isolando le c_i, sommando da entrambe le parti dell'equazione:

$$c_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4$$

$$c_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4$$

$$c_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$$

Si noti che le posizioni delle cifre di controllo c_i sono potenze di 2 $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ e all'aumentare delle cifre della grandezza si ha crescita logaritmica delle check digit, che quindi controllano un numero esponenziale di cifre di messaggio.

Esempio 5. *Scelgo un messaggio di 4 bit:*

$$msg = 1011$$

quindi:

$$pacchetto = c_1c_21c_3011$$

So che, per le formule sopra (ma lo posso vedere anche col discorso di avere periodicità nella tabella di bit, pensando a come li scrivi quando fai le tabelle di verità):

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = 1$$

$$c_3 = 0$$

quindi:

$$pacchetto = 0110011$$

che viene inviato ma al destinatario arriva:

$$pacchetto = 0110111$$

quindi con il bit in $i = 5$ errato. Si rifanno i conti e si ottiene, calcolando la sindrome:

$$s_1 = 1$$

verificata vedendo i bit dispari.

$$s_2 = 0$$

verificata vedendo a coppie alternate ma saltando il primo bit (che sarebbe la coppia di 0 se avessi 000 in cima alla tabella, torna quindi comodo partire dal fondo della tabella per fare questi ragionamenti).

$$s_3 = 1$$

verificata vedendo gli ultimi 4 bit.
Avendo sindrome $s = s_3s_2s_1 = 101$ che indica proprio la posizione 5.
Vediamo invece se arriva:

$$pacchetto = 0010011$$

quindi con il bit in $i = 2$ errato (e sarebbe una check digit). Si ha che:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 0$$

Avendo sindrome $s = s_3s_2s_1 = 010$ che indica proprio la posizione 2.
Supponiamo ora che arrivi senza errori:

$$pacchetto = 0110011$$

Si ha:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$s_3 = 0$$

I pacchetti di 7 bit che producono sindrome nulla sono quindi $2^4 = 16$*, avendo che posso fare* 2^4 *modi diversi di avere i 4 bit di messaggio ma ciascuno ha una sola tripla, 000, di check digit che mi dice che il pacchetto è valido.* Generalizzeremo poi questa cosa, ovvero che si hanno:

- n bit di pacchetto
- $\log_2 n$ check digit
- $n - \log_2 n$ cifre di messaggio
- $2^{n-\log_2 n}$ combinazioni possibili delle cifre di messaggio per avere un pacchetto senza errori

Avere due errori rende impossibile capire dove siano, rendendo impossibile la correzione.

Esempio 6. *Riprendendo l'esempio sopra si ipotizzi arrivi:*

$$pacchetto = 0010111$$

con errori in 2 e 5.
Si ha per la sindrome:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 1$$

Si avrebbe posizione in 111 *ovvero 7 (e non è un caso sia 5+2 ma la cosa non ci aiuterebbe a capire dove sia l'errore), a riprova che non si riesce ad identificare due errori. Non solo, si identifica un posto corretto come errato e lo corregge, introducendo un ulteriore errore.*

La probabilità di avere due errori è comunque a $\frac{1}{2^{4096}}$ e quindi è 0, "è la stessa probabilità che un tornado assembli i pezzi sparsi di un aereo al punto di farlo funzionare".
I codici di Hamming con $=$ e non $\geq$ sono quelli tali per cui:

$$n = 2^m - 1$$

Sul file di esercizi nella pagina del corso esempio con $m = 4$ a *pagina 12, potrebbe esserci un errore di conto sulla ridondanza.* Guardare anche per spunti teorici.
Studiamo anche la ridondanza. Ricordando $2^m \geq n+1$ e nei codici "migliori" $2^m = n+1$ possiamo dire $2^m \simeq n$ e quindi $m \simeq \log_2 n$ (e con questo m posso riscrivere $k = n - \log_2 n$). Ne segue che:

$$R = 1 + \frac{check}{msg} = 1 + \frac{m}{k} = 1 + \frac{\log_2 n}{n - \log_2 n} \simeq 1 + \frac{\log_2 n}{n}$$

(*facendo un'approssimazione molto "spinta"*).
Sul file di esercizi nella pagina del corso esempio con $m = 2$ a pagina 13, occhio che non è $\frac{2}{3}$ ma $\frac{2}{1}$ nella ridondanza. Guardare anche per spunti teorici (manca la parte di esercizio in se calcolando la sindrome).
Vediamo quindi l'interpretazione geometrica del codice di Hamming, ricordando che n bit entrano nel canale ed escono n bit $\in \{0,1\}^n$. Il messaggio M è quindi $M \subseteq \{0,1\}$. Cerchiamo di capire come assegnare che un messaggio sia valido o meno.
Posso vedere $\{0,1\}^n$ come uno **spazio vettoriale** dove i vettori sono $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \forall x_i \in \{0,1\}$ ovvero $x_i \in \mathbb{Z}_2$. Due vettori in questo spazio, per definizione di spazio vettoriale, possono essere sommati. Preso anche $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \forall y_i \in \{0,1\}$ la somma altro non è che lo *xor* componente per componente $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots)$.
Preso uno scalare $a \in \mathbb{Z}_2$ ho che $a\vec{x} = (ax_1, ax_2 \dots)$ con il prodotto scalare che è praticamente l'*and*. Si ha che:

$$a\vec{x} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } a = 0 \\ \vec{x} & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

Vediamo i messaggi come **vertici di un n-cubo** ma non tutti i messaggi sono validi. Ci serve un modo per capire quali sono validi per rendere difficile che un errore mi porti da un messaggio valido ad un altro.

Definizione 8. *Definiamo* ***distanza di Hamming*** *come il numero di posizioni in cui due vettori $\vec{x}$, $\vec{y}$ differiscono, cioè per cui $x_1 \neq y_i$. Questa è una vera e propria distanza in $\{0,1\}^n$. Tale distanza si indica con:*

$$d(\vec{x}, \vec{y})$$

con:

$$d : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$$

Si hanno tre proprietà:

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ *sse* $\vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
- $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$, ***diseguaglianza triangolare***

*e quindi la **distanza di Hamming** è una **metrica** per lo spazio* $\{0,1\}^n$. *Spesso* $d(\vec{x}, \vec{y})$ *si indica con* $d_h(\vec{x}, \vec{y})$.

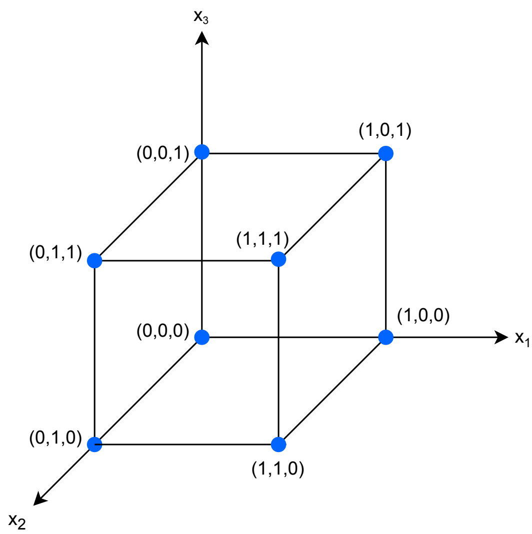
Definizione 9. *Definiamo **peso di Hamming** come il numero di bit uguali a 1 e lo si indica con:*

$$w_j(\vec{x})$$

Avendo che:

$$w_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_1 = d_h(\vec{x}, \vec{0})$$

Esempio 7. *Prendiamo* $n = 3$.
Disegnano supponiamo di avere qualcosa del tipo:



Prendo i vertici (x_1, x_2, x_3)*:*

- $(0, 0, 0)$
- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$

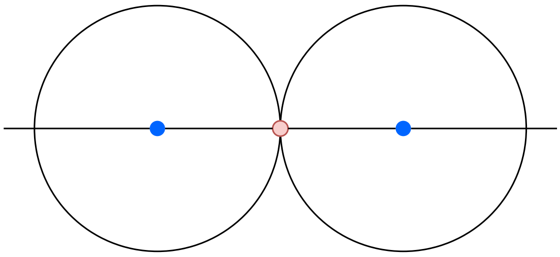
- $(1, 1, 0)$
- $(0, 1, 1)$
- $(1, 0, 1)$
- $(1, 1, 1)$

Questi sono i nostri messaggi.
Oltre $n = 3$ ***farei lo stesso ma non saprei disegnarlo, avrei*** n ***lati che partono dall'origine appoggiati agli*** n ***assi****.*
Suppongo di spedire 010 *e che si abbia un errore che porti a* 110 *e sul cubo si nota che ci ha fatto spostare lungo un lato.*
Suppongo che da 010 *si arrivi a* 100*, con due errori, si nota che ho due lati visitati sul cubo.*
Scegliamo quindi come messaggi validi punti che sono abbastanza distanti tra loro. Sicuramente quelli che si ottengono con un solo cambiamento non sono validi, parto quindi dal messaggio valido e impongo che tutti quelli che sono a ***distanza 1*** *(parlando di* ***distanza di Hamming****) sul cubo, ovvero tutti quelli che raggiungo con un solo lato, non siano validi.*
Essendo in $\{0, 1\}^n$ ***in realtà esistono solo i vertici del cubo, i lati servono solo per capire meglio.***

Generalizziamo meglio.
Se ho la distanza di Hamming e varie caratteristiche del codice ho che:

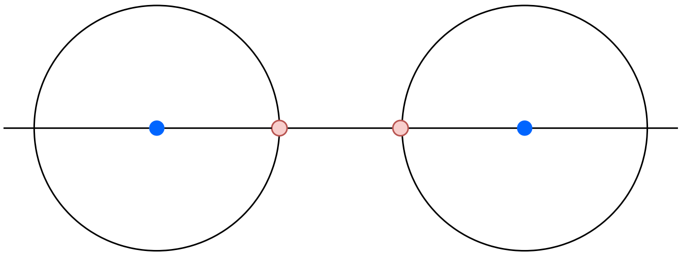
- se ho due codeword valide che hanno distanza 1 allora il codice ha capacità di **0 detection e 0 correction** in quanto potrei passare con un solo errore ad un messaggio valido
- se ho due codeword valide che hanno distanza 2 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 2) allora il codice ha capacità di **1 detection e 0 correction** in potrei avere più codeword valide a distanza di 1 da quella errata e quindi non saprei come fare correzione, non sapendo dove si trovi il bit errato. In ogni caso un errore viene sempre riconosciuto, anche se non può essere corretto. Se ho due errori potrei finire nuovamente in una codeword valida ma si sta assumendo che avendo scelto questo codice si sappia che la probabilità che avvengano due errori sia pressoché nulla. Il *controllo di parità semplice* è di questo tipologia.

Graficamente avrei una cosa del tipo, avendo in blu le codeword valide e in rosso quelle non valide:



Notando come non sarei in grado di capire a che codeword valida ricondurmi.

- se ho due codeword valide che hanno distanza 3 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 3) allora il codice ha capacità di **2 detection e 1 correction**, riuscendo a correggere un errore. Se avessi due errori riconoscerei come codeword valida una a distanza 1 da quella errata che però non è quella giusta, introducendo un nuovo errore. I *codici di Hamming* sono di questo tipo. Graficamente avrei una cosa del tipo, avendo in blu le codeword valide e in rosso quelle non valide:



Notando che con un solo errore sarei in grado di capire a che codeword ricondurmi

- se ho due codeword valide che hanno distanza 4 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 4) allora il codice ha capacità di **3 detection e 1 correction**, riuscendo a correggere un errore. Se avessi due errori riconoscerei avrei più codeword valide alla stessa distanza. Se avessi tre errori varrebbe quanto detto nel caso di distanza 2

- se ho due codeword valide che hanno distanza 5 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 5) allora il codice ha capacità di **4 detection e 2 correction**, per gli stessi discorsi fatti avendo distanza 3

Si nota quindi che al crescere della distanza di Hamming minima tra due codeword cresce la capacità di detection e correction.
Possiamo ipotizzare che la codeword valida venga avvolta da una sfera di raggio pari a r avendo che r sia tale per cui le sfere di due codeword valide non si sovrappongano. Possiamo notare che in base alle osservazioni fatte sopra r è il valore della capacità di detection.
Una sfera centrata nel punto $\vec{x}$ di raggio r è l'insieme dei punti $\vec{y} \in \{0,1\}^n$ tale che la distanza da $\vec{x}$ è minore di r, ovvero:

$$S(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \{0,1\}^n | \, d_h(\vec{x}, \vec{y}) \leq r\}$$

Si noti che in $\{0,1\}^n$ somma e sottrazione bit a bit portano allo stesso risultato.
Possiamo dire che:

$$output = input + errore$$

dove *errore* è un vettore rappresentante l'errore (avendo 1 dove ho l'errore).
Quindi:

$$errore = output - input$$

Esempio 8. *Tornando all'esempio sopra ipotizzo entri* 011 *ed esca* 111*, avendo quindi* $d_h = 1$.
Sommo i due vettori:

$$011 \oplus 111 = 100$$

Avendo che 100 *è l'errore.*

3.2.4.1 Interpretazione Geometrica di $2^m \geq n + 1$

Si vuole costruire un codice che consenta di correggere un errore, per poi confrontarlo con il codice di Hamming.
Ci servono quindi codeword valide ad almeno distanza 3, prendendo messaggi validi e circondarli di sfere di raggio 1 tali che non si abbiano sovrapposizioni con altre sfere.
Si ha $\{0,1\}^n$ come spazio vettoriale dove si hanno 2^n elementi/vettori.
In generale se prendo il volume dello spazio e lo divido per il volume di una sfera ho il numero di sfere che posso metterci:

$$\frac{V_{spazio}}{V_{sfera}} \geq \text{numero massimo di sfere}$$

Pongo k uguale al numero di bit dei messaggi validi (non pari a n ma prendo quindi una porzione di messaggio rappresentante il messaggio valido, ai quali poi aggiungerei le m check digit).
Rivedo quindi la formula, sapendo che il volume dello spazio è il numero di vettori di quello spazio, che le sfere abbiano raggio 1, avendo che hanno volume $n+1$ (il vettore rappresentante originale più un vettore per ogni possibile vettore ottenuto da quello originale con un solo errore, avendo quindi $\binom{n}{1}$ più il messaggio valido, ovvero $n+1$):

$$\frac{2^n}{n+1} \geq 2^k$$

sapendo che $n = k + m$ si ha che:

$$\frac{2^{k+m}}{n+1} \geq 2^k$$

$$\frac{2^k 2^m}{n+1} \geq 2^k$$

$$2^m \geq n+1$$

Arrivando allo stesso risultato di Hamming.
Se volessi sfere di raggio maggiore di 1, prendendo per esempio con codeword distanti almeno 5 e raggio pari a 2. Avendo raggio pari a 2 avrei il centro della sfera, tutti i punti distanti 1, ovvero potendo cambiare un bit n, e tutti i punti distanti 2 (avendo due cambiamenti di bit), ovvero:

$$V_{sfera} = 1 + n + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{2^n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

sapendo che $n = k + m$ si ha che:

$$\frac{2^{k+m}}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

$$\frac{2^k 2^m}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

$$2^m \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

Avendo una generica sfera di raggio r avrei:

$$V_{sfera} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

*Nella realtà, con messaggi molto grandi, si usano i cosiddetti **low density parity codes**, che consiste, per proteggere il pacchetto di n bit, nel trovare il minor numero di equazioni di parità atte a proteggere il messaggio (meno equazioni implica meno circuiti e quindi meno costo). Si procede per euristiche per capire quante e quali.*

3.3 Codifica di Sorgente

Finora si è parlato di **codifica di canale**, passiamo quindi ad approfondire la **codifica di sorgente**, cercando anche in questo caso il codice ottimale (con la lunghezza media minima).
Avendo magari una distribuzione non uniforme per la distribuzione dei caratteri non ha senso usare una **codice a blocchi** ma si usa un **codice a lunghezza variabile** (*riguardare quanto detto nella prima sezione di questi appunti*).
Ci si propone quindi di minimizzare, parlando di codici a lunghezza variabile:

$$L = \sum_{i=1}^{1} p_i l_i$$

Bisogna prima fare un discorso sull'univocità dei codici.

Esempio 9. *si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 4 simboli s_i:*

- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 11$
- $s_4 \to 00$

Suppongo che il ricevente riceva 0011*. Cerco di capire che sequenza ha ricevuto. Deve calcolare una:*

$$cod^{-1} : \Gamma^* \to S$$

Ma ci sono delle ambiguità. Potrebbe essere:

- $s_4 s_3$
- $s_1 s_1 s_3$

Non è quindi in grado di trovare una sequenza di simboli univoca.
Ne segue che il codice ***non è univocamente decodificabile****.*

Si richiede quindi che la funzione *cod*, quindi il nostro codice, **deve essere univocamente decodificabile**.
Un algoritmo che riconosce che un codice è univocamente decodificabile non è banale.

Esempio 10. *Si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 4 simboli* s_i*:*

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 011$
- $s_4 \rightarrow 111$

Si dimostra che questo codice è ***univocamente decodificabile****, esistendo un'unica possibile divisione in codeword di ogni stringa che riceve il ricevente.*
Suppongo che il ricevente riceva:

$$0111111111$$

Ma anche solo all'inizio potrei avere sia s_1 *che* s_2 *che* s_3 *ma una volta che è finito posso partire dal fondo raggruppando gli* 1 *tre a tre e mi accorgo che ho un solo modo:*

$$0\ 111\ 111\ 111$$

$$s_1 s_4 s_4 s_4$$

Bisogna quindi aspettare la fine della trasmissione*.*

Lato elettronico per fare questa operazione uso un **contatore elettronico**.
D'altro canto aspettare la fine non è "comodo" e si vorrebbe analizzare i simboli man mano che arrivano.
Si definiscono quindi due categorie di codici a lunghezza variabile:

- **non univocamente decodificabili**
- **univocamente decodificabili**

e suddividiamo gli univocamente decodificabili in:

- **istantaneo**, dove appena arriva una codeword il ricevente sa che è arrivata completamente e che è unica
- **non istantaneo**

Esempio 11. *Trasformiamo l'ultimo esempio in un codice istantaneo. Si hanno:*

- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 011$
- $s_4 \to 111$

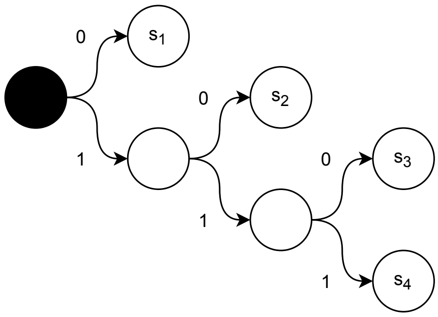
ma non andrebbero bene (per il problema dell'inizio del messaggio). D'altro canto:

- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 10$
- $s_3 \to 110$
- $s_4 \to 111$

ottenuto con la reverse delle stringhe, è un codice istantaneo con codeword di lunghezza pari a quelle precedenti.
Posso facilmente vedere che qualsiasi cosa arrivi posso capire che codeword è, appena l'intera codeword viene letta. Non devo aspettare l'intero messaggio ma al più due simboli.

Nell'esempio abbiamo usato gli 0 come *end of codeword*, infatti questo codice è detto **comma code**, avendo che il decodificatore vede che le codeword, tranne l'ultima, terminano per 0. Quindi o arriva uno zero terminando la codeword o arrivano 3 uni che terminano il messaggio.
Potrei inoltre vedere la decodifica come un albero di decodifica, in quanto ogni volta che arriva un simbolo posso escludere certe codeword.

Vediamo l'esempio relativo all'esempio precedente:

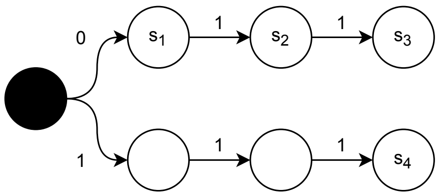


Avendo che ogni cammino dalla radice ad una foglia è una codeword con la foglia etichettata con il simbolo relativo alla codeword. Si ha quindi un sottoalbero per ogni simbolo di Γ (quindi dalla radice escono $|\Gamma|$ archi) e da ogni nodo interno esce un numero di archi minore o uguale al numero di simboli. Il ricevente sfrutta l'albero di decodifica.
Posso anche usare l'albero per costruire il codice istantaneo.
Inoltre dato che un codice istantaneo è associato ad un albero di codifica non succede mai che una codeword sia prefissa di un'altra (e lo si vede non prendo avere due foglie associate a due codeword una prefissa dell'altra).

Esempio 12. *Vediamo l'albero di decodifica di un codice non istantaneo.*
Si hanno:

- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 011$
- $s_4 \to 111$

Si ha:



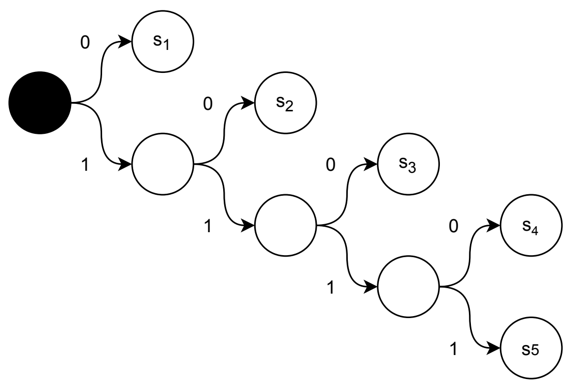
Avendo foglie che sono prefisse di altre.

Se devo costruire un codice istantaneo posso quindi usare un **comma code** o costruire un albero di decodifica che sia il più possibile simile ad un albero completo.

Esempio 13. *Si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 5 simboli* s_i*:*

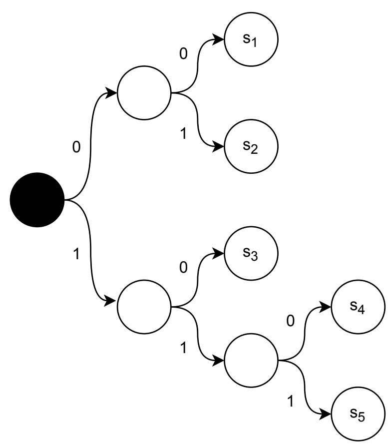
- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 10$
- $s_3 \to 110$
- $s_4 \to 1110$
- $s_4 \to 1111$

Si ha quindi:



(e si nota come si possa generalizzare l'albero per un comma code).

Esempio 14. *Avendo l'albero:*



Riconosco il codice:

- $s_1 \to 00$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 10$
- $s_4 \to 110$
- $s_5 \to 111$

Esempio 15. *Avendo il codice 1:*

- $s_1 \to 0$
- $s_2 \to 10$
- $s_3 \to 110$
- $s_4 \to 1110$
- $s_5 \to 11110$

e il codice 2:

- $s_1 \to 00$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 10$
- $s_4 \to 110$
- $s_5 \to 111$

assegno ad entrambi le probabilità:

- $p_1 \to 0.9$
- $p_2 \to 0.025$
- $p_3 \to 0.025$
- $p_4 \to 0.025$
- $p_5 \to 0.025$

Ho che, per il primo codice:

$$L_1 = 0.9 \cdot 1 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 3 + 0.025 \cdot 4 + 0.025 \cdot 4 = 1.225$$

Avendo che mediamente per rappresentare un simbolo della sorgente mi servono 1.225 *bit.*
Passo al secondo codice:

$$L_2 = 0.9 \cdot 2 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 3 + 0.025 \cdot 3 = 2.05$$

Avendo che mediamente per rappresentare un simbolo della sorgente mi servono 2.05 *bit.*
Ne segue, avendo $L_1 < L_2$, per questa sorgente con queste probabilità è meglio il primo codice, il comma code.
Se avessi avuto probabilità uniforme ($p_i = 0.2$) avrei avuto:

$$L_1 = 2.8$$

$$L_2 = 2.4$$

Essendo meglio il secondo codice.

Definizione 10. *Si definisce **codice r-ario** un codice con r simboli con cui si ottengono le codeword.*
Un codice che parte da $\Gamma = \{0, 1\}$ è un codice binario.

Ad un certo punto Kraft scopre un teorema che contiene una disuguaglianza che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un codice istantaneo con certe lunghezze $l_1, l_2, \ldots, l_n$ date.

Teorema 1 (disuguaglianza di Kraft)**.** *Si ha che **esiste** un **codice istantaneo r-ario** per una sorgente S di q simboli, con codeword di lunghezza $l_1, l_2, \ldots, l_q$, sse:*

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

In onore di Kraft si ha che:

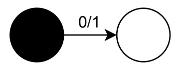
$$K = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \text{ e quindi } K \leq 1$$

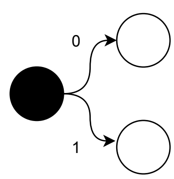
Non si sta vedendo come sono fatte le codeword ma solo se può esistere un certo codice istantaneo. Sapendo che esiste poi bisogna costruire le codeword ma il teorema non dice nulla in merito.
La condizione necessaria e sufficiente è quindi una caratterizzazione dell'esistenza del codice istantaneo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare i due versi del sse:

1. per ogni codice istantaneo r-ario di q simboli con lunghezze $l_1, l_2, \ldots, l_q$ si ha che $K \leq 1$
2. se $K \leq 1$ allora esiste un codice istantaneo con lunghezze $l_1, l_2, \ldots, l_q$

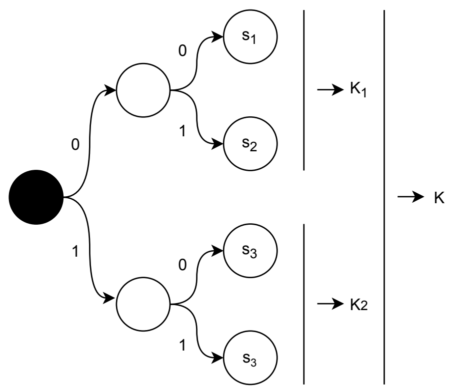
Dimostriamo la **prima parte**.
Prendo il codice e lo rappresento sull'albero di decodifica (dove ogni nodo ha al più r archi uscenti). Ricorsivamente un albero o è vuoto o è un nodo che punta ad altri nodi.
Parto con $r = 2$, avendo codeword binarie su $\{0, 1\}$ e di conseguenza alberi binari di decodifica. Procedo quindi con una dimostrazione per induzione sulla profondità dell'albero:

- **base**: profondità pari a 1. Si hanno due casi:
  1. la radice punta ad una foglia. In questo caso:
  $$K = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \leq 1$$
  

  2. punta a due foglie (una per ogni simbolo). In questo caso:
  $$K = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} = 1 \leq 1$$
  

- **passo induttivo**: assunto che il teorema è vero per ogni albero di profondità $n - 1$ dimostriamo che il teorema vale anche per gli alberi di profondità n. In realtà così non ci va bene in quanto i sottoalberi dovrebbero avere entrambi profondità $n - 1$ (cosa non vera come visto negli esempi precedenti, ad esempio "l'*albero a pettine*" del comma code). Cambiamo quindi dicendo che assunto

che il teorema è vero per ogni albero di profondità $< n$ dimostriamo che il teorema vale anche per gli alberi di profondità n.
Considero i due sottoalberi come alberi a se stanti:



Dico che $K_1 \leq 1$ per il primo sottoalbero e $K_2 \leq 1$ per il secondo sottoalbero.
Calcolo ora K di tutto l'albero ma devo capire come si rapporta a K_1 e K_2. Si ha che se attacco il primo sottoalbero alla nuova radice per costruire l'albero globale ho che attacco ad ogni codeword un simbolo, che quindi si allungano di 1:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i+1}} \leq 1$$

ma altro non è che:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

ma allora:

$$\frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1 = \frac{1}{r} \cdot K_1$$

Faccio lo stesso per K_2 e quindi, avendo $r = 2$:

$$K = \frac{1}{2} \cdot K_1 + \frac{1}{2} \cdot K_2$$

ma sto sommando due quantità $\leq \frac{1}{2}$ (avendo $K_1 \leq 1$ e $K_2 \leq 1$) e quindi:

$$K \leq 1$$

Qualora si avesse $r > 2$ si ha:

- **base**, si hanno alberi r-ari, con $\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$, di probabilità 1. Tutti questi alberi hanno s foglie e $r-s$ non foglie. Quindi, essendo tutti gli l_i uguali a 1 essendo a profondità uno:

  $$K = \sum \frac{1}{r^{l_i}} = \sum \frac{1}{r} = \frac{s}{r} \leq 1$$

  $\frac{s}{r} \leq 1$ in quanto $s \leq r$

- **passo induttivo** si ha un albero r-ario a profondità n con un certo numero di sottoalberi s e un certo numero di sottoalberi vuoti, di cardinalità $r-s$, a profondità $< n$. Per tutti i $K_1, K_2, \dots K_s$ ho che $K_i \leq 1$ e quindi ottengo K aggiungendo un simbolo alle codeword dei sottoalberi non vuoto (quelli vuoti contribuiscono con 0 alla sommatoria):

  $$K = \frac{1}{r}K_1 + \frac{1}{r}K_2 + \dots + \frac{1}{r}K_s$$

  Ma per lo stesso ragionamento del caso binario, essendo ogni $K_1 \leq 1$ e quindi ogni componente della sommatoria è $\leq \frac{1}{r}$:

  $$K = \frac{1}{r}K_1 + \frac{1}{r}K_2 + \dots + \frac{1}{r}K_s \leq \frac{s}{r} \leq 1$$

Vediamo la **seconda parte** della dimostrazione.
Se $K \leq 1$ dobbiamo dimostrare che esiste un codice istantaneo con lunghezze $L_1, \dots, l_q$.
Sappiamo che:

$$K = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Vediamo un esempio per capire come vedere diversamente la diseguaglianza:

Esempio 16. *se avessi $r = 2$, con quindi codeword binarie, e lunghezze 2,2,3,3,4 (con quindi $q = 5$). Si ha che:*

$$K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Ma quindi:

$$K = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Avendo ora 2,2,1 come numeratori.

Indico con t_j il numero di codeword di lunghezza j. Si hanno quindi, per l'esempio precedente:

- $t_1 = 0$
- $t_2 = 2$
- $t_3 = 2$
- $t_4 = 1$

Riscrivo quindi K:

$$K = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} = \sum_{j=1}^{l} \frac{t_j}{r^j}$$

con $l = \max\{l_1, \ldots, l_q\}$ (per l'esempio sopra $l = 4$).
Si ha quindi che:

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{t_j}{r^j} \leq 1$$

Ma posso dire che, per arrivare ad isolare i t_j senza alterare la diseguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{l} r^l \cdot \frac{t_j}{r^j} \leq 1 \cdot r^l$$

ma quindi ho che:

$$\sum_{j=1}^{l} t_j \cdot r^{l-j} \leq 1 \cdot r^l$$

Si ha che:

$$\sum_{j=1}^{l} t_j \cdot r^{l-j} = t_1 \cdot r^{l-1} + \cdots + t_{l-1} \cdot r + t_l \leq r^l$$

Ma quindi:

$$t_l \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \cdots - t_{l-1} \cdot r$$

ma so anche che:

$$0 \leq t_l$$

e quindi:

$$0 \leq t_l \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \cdots - t_{l-1} \cdot r$$

e quindi:

$$0 \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \cdots - t_{l-1} \cdot r$$

porto quindi t_{l-1} a sinistra e divido per r, ottenendo:

$$t_{l-1} \leq r^{l-1} - t_1 \cdot r^{l-1} - \cdots t_{l-2} \cdot r$$

lo faccio per tutti i t_j partendo da t_{l-2} e arrivando a:

$$t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$$

sapendo per di più che:

$$0 \leq t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$$

e poi, con un altro step, si arriva a:

$$0 \leq t_1 \leq r$$

Risalgo quindi partendo dalle codeword più corte. Cerco t_1 codeword di lunghezza 1, avendo a disposizione l'alfabeto Γ r-ario. Per farlo prendo i primi t_1 simboli e dico che sono le stringhe di lunghezza 1. Posso farlo perché $t_1 \leq r$ e mi avanzano $r - t_1$ simboli dell'alfabeto.
Passo alle codeword di lunghezza 2, me ne servono t_2. Queste codeword sono due simboli concatenati in modo che il primo simbolo non si stato utilizzato per t_1 (altrimenti creerei prefissi), quindi prendo un simbolo dai $r - t_1$ simboli dell'alfabeto. Il secondo simbolo posso mettere un qualsiasi simbolo di Γ, avendo r possibili scelte. In totale ho quindi un numero di combinazioni pari a:

$$(r - t_1) \cdot r = r^2 - t_1 \cdot r$$

e ho abbastanza combinazioni avendo che $t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$ per i conti precedenti.
Le codeword le scelgo come voglio, ci sono tantissimi modi possibili.
Mi avanzano quindi $r^2 - t_1 \cdot r - t_2$.
Creo le codeword di lunghezza 3 dove i primi due simboli non devono essere una combinazione usata per quelle di lunghezza 2, facendo poi gli stessi discorsi fatti sopra.
Avanzo così per tutte le lunghezze di codeword avendo che posso costruire almeno un codice istantaneo, dimostrando la validità del teorema. □

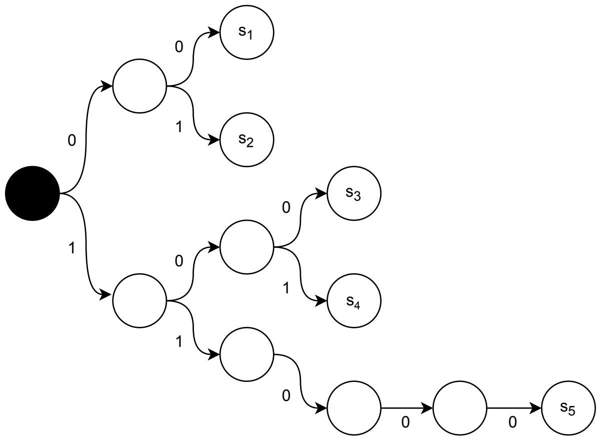
Esempio 17. *Riprendiamo l'esempio di sopra.*
Si ha che:

$$K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Ma quindi:

$$K = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \leq 1$$

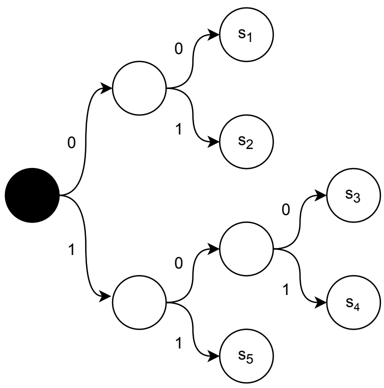
Se volessi le codeword costruisco l'albero di decodifica:



Avendo:

- $s_1 \to 00$
- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 100$
- $s_4 \to 101$
- $s_5 \to 1100$

Ma vedo che ho nodi interni inutili (tipo i due nodi che portano a s_5). Butto via quindi i nodi con un solo ramo in uscita:



ottenendo:

- $s_1 \to 00$

- $s_2 \to 01$
- $s_3 \to 100$
- $s_4 \to 101$
- $s_5 \to 11$

e quindi:

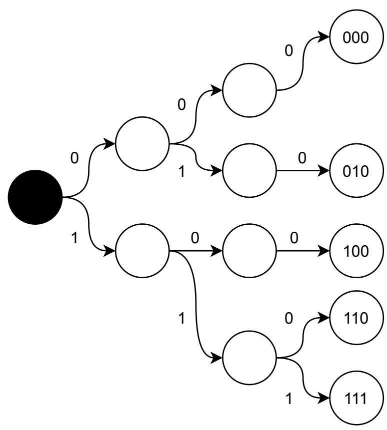
$$K = \frac{3}{2^2} + \frac{2}{2^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \leq 1$$

Quindi un nodo interno che solo un figlio mi fa allungare le lunghezze delle codeword facendo sommare valori più piccoli. Se ho solo nodi interni con due figli si può dimostrare per induzione che $K = 1$ (nel caso base ho $K = 1$ e in quello induttivo vedo che ho $K_i = 1$ per ogni sottoalbero, avendo poi che $K = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$).
Per tutti i codici istantanei vale che $K \leq 1$.

3.3.1 Codici a Blocchi Accorciati

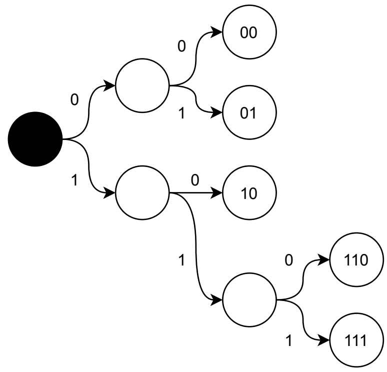
Si vuole costruire un codice binario per un certo q.

Esempio 18. *Ipotizzo $r = 2$ e $q = 5$. Potrei avere tutte le 8 codeword di 3 bit ma ne scelgo solo* 5. *Tengo* $000, 010, 100, 110, 111$*, avendo rimosso* $001, 011, 101$. *Queste 5 formano un codice a blocchi, istantaneo. Potrebbe non essere efficiente, non avendo $K = 1$. Se costruissi l'albero avrei:*



Che ha $K \neq 1$.

Potrei rimuovere archi inutili, ottenendo:



Ottenendo:

- *00*
- *01*
- *10*
- *110*
- *111*

Che non è più a blocchi ma è istantaneo con $K = 1$ *(ogni nodo interno ha infatti esattamente due figli).*

Si sta parlando appunto di **codici a blocchi accorciati**.
Su file esercizi esempio con codice non binario.

3.3.2 Disuguaglianza di McMillan

Teorema 2 (Disuguaglianza di McMillan)**.** *Data una sorgente* $S = \{s_1, \ldots, s_q\}$ *si ha che una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un codice r-ario univocamente decodificabile con codeword di lunghezze* $l_1, l \ldots, l_q$ *è che valga:*

$$K = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_1}} \leq 1$$

Quindi è uguale alla disuguaglianza di Kraft semplicemente sostituendo "codici istantanei" con "codice univocamente decodificabile".

Dimostrazione. Anche in questo caso si hanno i due versi della dimostrazione.
La **prima parte** è dimostrare che dato un codice r-ario per S univocamente decodificabile allora $K \leq 1$ e per tale codice le lunghezze sono $l_1, l \ldots, l_q$. Il "dato" è in realtà un "per ogni".
Non posso più ragionare sulla profondità dell'albero non avendo più corrispondenza biunivoca con alberi dove le codeword sono le foglie. In questo caso avrei nodi interni che sono codeword, non posso quindi usare la stessa tecnica di dimostrazione.
Per dimostrarlo prendo K e un numero $n \in \mathbb{N}$, tale che $n > 1$. Calcolo K^n, avendo:

$$K^n = \left(\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \right)^n$$

Ottenendo qualcosa di davvero difficile da studiare. Ma posso scrivere:

$$K^n = \sum_{t=n}^{n \cdot l} \frac{n_t}{r^t}$$

con $l = \max\{l_1, \ldots, l_q\}$ e con n_t che è il numero di elementi di K^n con t come esponente e r^t come denominatore. Si ha che n_t è anche il numero di codeword di lunghezza t. Ma dato che il codice è univocamente decodificabile si deve avere che:

$$n_t \leq r^t$$

infatti devo avere al massimo r^t sequenze affinché il codice sia univocamente decodificabile, essendo tutte le sequenze di t simboli che posso formare usando un alfabeto di r simboli. ma allora:

$$\frac{n_t}{r^t} \leq 1$$

Ma allora si può dire, maggiorando, che:

$$K^n = \sum_{t=n}^{n \cdot l} \frac{n_t}{r^t} \leq \sum_{t=n}^{n \cdot l} 1 = n \cdot l - n + 1 = n \cdot l - (n-1)$$

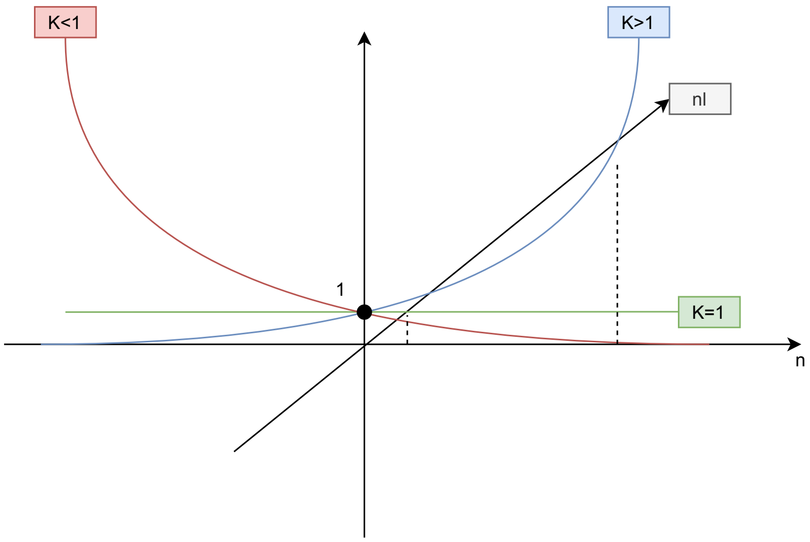
Ma $(n-1) > 0$ e quindi:

$$= n \cdot l - (n-1) < n \cdot l$$

E quindi:

$$K^n < n \cdot l$$

Questo si risolve graficamente (**grafico molto approssimato**):



Se $K > 1$ ad un certo punto la curva supera $n \cdot l$. Per $K < 1$ sicuramente ho punti per cui è $K^n < n \cdot l$ e quindi si arriva a dire che:

$$K^n < n \cdot l \implies K \leq 1$$

dimostrando la tesi.
La **seconda parte** è che se $K \leq 1$ allora esiste un codice r-ario per S univocamente decodificabile con lunghezze $l_1, l \ldots, l_q$. Per Kraft, avendo $K \leq 1$ esiste un codice istantaneo per S, r-ario, con tali lunghezze. Ma **un codice istantaneo è univocamente decodificabile**, avendo quindi dimostrato la tesi. $\square$

Ma avendo che i codici univocamente decodificabili sono meno utili di quelli istantanei vengono trascurati, considerando che dovrei fare la "stessa fatica".
Abbiamo visto comunque che non si hanno indicazioni in merito a come fare le codeword e abbiamo anche trascurato finora l'uso delle probabilità.

3.3.3 Codici di Huffman

I codici di Huffman sono ottimali, ovvero raggiungono il minimo valore possibile della lunghezza media L:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l_i$$

Teorema 3. *In input abbiamo quindi il codice S, con $s_i, \dots s_q$, con probabilità $p_1, \dots, p_q$. Il codice di Huffman ci restituisce in output sia le lunghezze l_i che le codeword γ_i.*
Bisogna prima fare qualche ragionamento.
Si supponga di avere i simboli in ordine di probabilità, avendo:

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_q$$

ma quindi si ha che:

$$l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_q$$

perché altrimenti non avrei il codice ottimale.

Dimostrazione. Si supponga infatti di avere $p_m > p_n$ e $l_m > l_n$ (violo l'ordine delle lunghezze). Studio quindi il contributo dei due simboli, s_m e s_n:

$$p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n$$

Scambio in modo che p_m riceva la codeword lunga l_n, quella con lunghezza minore:

$$p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m$$

Faccio la differenza:

$$(p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m) - (p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n)$$
$$= p_m \cdot (l_n - l_m) - p_n \cdot (l_n - l_m)$$
$$= (p_m - p_n) \cdot (l_n - l_m)$$

Ma abbiamo che $p_m > p_n$ e quindi $(p_m - p_n) > 0$ e per lo stesso ragionamento, avendo $l_m > l_n$, $(l_n - l_m) < 0$. Si ha quindi che:

$$(p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m) - (p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n) < 0$$

e quindi:

$$p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m < p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n$$

perdendo quindi l'ottimalità del codice (sarebbe un assurdo). □

Deve quindi valere:

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_q$$

e

$$l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_q$$

Si ha quindi un algoritmo greedy per ottimizzare la lunghezza media. Non sappiamo se si ha un matroide ma si vedrà che tale algoritmo porta all'ottimo. Vediamo in primis un esempio.

Esempio 19. *Vediamo un esempio di questo algoritmo:*
Presa una sorgente con 5 *simboli con le annesse probabilità (sono già ordinati):*

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$
- s_4 *con* $p_4 = 0.1$
- s_5 *con* $p_5 = 0.1$

Si assuma $r = 2$.
Prendo i due simboli meno probabili e li unisco creando un nuovo simbolo "fittizio" con probabilità pari alla somma dei due (nel nostro caso quindi $0.1 + 0.1 = 0.2$*). Si ha quindi, mantenendo sempre l'ordine (metto il simbolo combinato in coda a parità di probabilità):*

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$

Avendo ora una nuova sorgente di 4 simboli (quindi ipoteticamente più semplice da codificare di quella da 5*).*
Itero facendo la stessa cosa:

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$
- $s_{3,4,5}$ *con* $p_{3,4,5} = 0.4$
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$

Avendo ora 3 simboli. Proseguo:

- $s_{2,3,4,5}$ *con* $p_{2,3,4,5} = 0.6$
- s_1 *con* $p_1 = 0.4$

Che è facile da codificare, associando 0 e 1 (l'ordine è opzionale):

- $s_{2,3,4,5}$ *con* $p_{2,3,4,5} = 0.6$*: 0*

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 1*

Costruisco quindi la sorgente a 3 (usando 0 come prefisso di tutti i nuovi):

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 1*
- $s_{3,4,5}$ *con* $p_{3,4,5} = 0.4$*: 00*
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$*: 01 (infatti 10 non andrebbe bene avendo 1 come prefisso)*

proseguo (usando 00 come prefisso di tutti i nuovi):

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 1*
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$*: 01*
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$*: 000*
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$*: 001*

termino con lo stesso ragionamento (avendo ora 001 come prefisso):

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 1*
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$*: 01*
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$*: 000*
- s_4 *con* $p_4 = 0.1$*: 0010*
- s_5 *con* $p_5 = 0.1$*: 0011*

Che ha:

$$L = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.1 \cdot 4 = 2.2 \frac{bit}{simbolo}$$

Se invece metto i nuovi simboli più in alto possibile avrei:

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$

e quindi:

- $s_{2,3}$ *con* $p_{2,3} = 0.4$
- s_1 *con* $p_1 = 0.4$
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$

e quindi:

- $s_{1,4,5}$ *con* $p_{1,4,5} = 0.6$
- $s_{2,3}$ *con* $p_{2,3} = 0.4$

Procedendo come nel caso precedente sopra si avrebbe:

- $s_{1,4,5}$ *con* $p_{1,4,5} = 0.6$*: 0*
- $s_{2,3}$ *con* $p_{2,3} = 0.4$*: 1*

e quindi:

- $s_{2,3}$ *con* $p_{2,3} = 0.4$*: 1*
- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 00*
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$*: 01*

e quindi:

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 00*
- $s_{4,5}$ *con* $p_{4,5} = 0.2$*: 01*
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$*: 10*
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$*: 11*

e infine:

- s_1 *con* $p_1 = 0.4$*: 00*
- s_2 *con* $p_2 = 0.2$*: 10*
- s_3 *con* $p_3 = 0.2$*: 11*
- s_4 *con* $p_4 = 0.1$*: 010*
- s_5 *con* $p_5 = 0.1$*: 011*

Che ha:

$$L = 0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.1 \cdot 3 = 2.2 \frac{bit}{simbolo}$$

che è uguale a prima.

Questo algoritmo greedy funziona, producendo l'ottimo, quando sottostante al problema si ha un matroide.

Teorema 4. *Si può dimostrare che non cambia nulla, in termini di lunghezza media, mettendo il nuovo simbolo il più in alto/basso possibile, a parità di probabilità.*
Si può anche dimostrare che se metto il simbolo combinato in basso aumenta la varianza tra le codeword (avendo codeword di lunghezza più "distante") mentre mettendoli più in alto possibile si diminuisce la varianza. Si ricorda che la varianza è:

$$V = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot (l_i - L)^2$$

Esempi sul file di esercizi.
Solitamente comunque si preferisce abbassare la varianza tenendo quindi il nuovo simbolo più in alto possibile.

Teorema 5. *Il codice di Huffman è ottimo, avendo la minor lunghezza media. In altri termini produce codici istantanei ottimali.*

Dimostrazione. Si procede per assurdo.
Si ricorda che le lunghezza vengono conosciute solo a fine algoritmo di calcolo. Supponiamo, data una sorgente S con q simboli $s_1, \ldots, s_q$, con $p_1, \ldots, p_q$, che $l_1, \ldots, l_q$ siano le lunghezze di Huffman, avendo quindi in corrispondenza L_H, lunghezza di Huffman, come:

$$L_H = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l_i$$

Se non fosse ottimo avremmo un altro codice con una migliore lunghezza media L', tale che $L' < L_H$. Entrambi sono codici istantanei con associati i due alberi di decodifica. Prendo quindi i due simboli meno probabili (che sono anche i più lunghi) per il codice di Huffman: s_q e s_{q-1}. Si potrebbe dimostrare che la lunghezza delle due codeword più lunghe è uguale. Questi due simboli sono presi, a parità di probabilità, in modo che condividano il nodo genitore nell'albero. Si ha che $l_q = l_{q-1}$, condividendo il genitore e non avendo nodi "sprecati" nell'albero di decodifica.

Collasso questi due nodi e il genitore in un solo simbolo fittizio che tiene conto di entrambi i simboli. In pratica faccio uno dei "passi in avanti" dell'algoritmo sopra specificato per il calcolo dei codici di Huffman. La lunghezza decresce di una certa quantità x. Si ha in partenza che $p_{q-1} \cdot l_{q-1} + p_q \cdot l_q = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q)$. Il nuovo simbolo avrà:

$$(l_q - 1) \cdot (p_{q-1} + p_q) = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q) - (p_{q-1} + p_q)$$

ovvero la stessa quantità di prima meno $(p_{q-1} + p_q)$. Quindi dalla lunghezza media tiro via questa quantità, ovvero $x = (p_{q-1} + p_q)$.
Se vogliamo minimizzare la lunghezza media il simbolo con p_i più alta ha l_i più bassa (come dimostrato precedentemente).
Faccio lo stesso ragionamento nell'altro codice (che suppongo per assurdo migliore di quello di Huffman e quindi essendo ottimale vale lo stesso rapporto tra p_i e l_i), prendendo s'_q e s'_{q-1} (che sono quelli con probabilità minore, lunghezza maggiore nel secondo codice e lunghezza uguale), fondendoli in un nuovo simbolo fittizio, facendo gli stessi ragionamento fatto per il codice di Huffman. Si ha in partenza che $p_{q-1} \cdot l_{q-1} + p_q \cdot l_q = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q)$. Il nuovo simbolo avrà:

$$(l_q - 1) \cdot (p_{q-1} + p_q) = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q) - (p_{q-1} + p_q)$$

La riduzione della lunghezza quindi è la stessa che nel caso di Huffman $L_H - x$ e $L' - x$.
Si stanno "collassando" gli stessi simboli e le lunghezze medie decrescono della stessa quantità.
Ad un certo punto da entrambe le parti si arriva ad avere due simboli. Nell'albero si avranno quindi la radice e due simboli fittizi. Per il secondo codice si avrà comunque una sorgente con due figli e basta.
Per Huffman so che ho due codeword di lunghezza 1 (un ramo con 0 e uno con 1) e quindi $L_h = 1$ ma sotto questo valore non posso andare, non posso codificare due codeword che mi portino ad una lunghezza media < 1 per il secondo codice che quindi ha lunghezza media pari a 1. Si è dimostrato che l'assurdo è impossibile e quindi l'algoritmo di Huffman produce codici ottimali. □

3.3.3.1 Codici di Huffman r-ari

Vediamo ora i codici di Huffman per $r > 2$.

Esempio 20. *Vogliamo un codice r-ario con $r = 4$ e quindi $\Gamma = \{0, 1, 2, 3\}$ con una sorgente di $q = 8$ simboli. Si hanno le seguenti probabilità:*

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_6 = 0.05$
- $p_7 = 0.02$

In questo caso non fondo gli ultimi due simboli ma gli ultimi 4. Al primo passo ottengo:

- $p_{4,5,6,7} = 0.25$
- $p_0 = 0.20$
- $p_1 = 0.28$
- $p_2 = 0.15$
- $p_3 = 0.10$

e poi:

- $p_{0,1,2,3} = 0.75$
- $p_{4,5,6,7} = 0.25$

Associo 0 e 1:

- $p_{0,1,2,3} = 0.75$*: 0*
- $p_{4,5,6,7} = 0.25$*: 1*

ricostruisco usando tutti e 4 i simboli:

- $p_{4,5,6,7} = 0.25$*: 1*
- $p_0 = 0.20$*: 00*
- $p_1 = 0.28$*: 01*

- $p_2 = 0.15$: *02*
- $p_3 = 0.10$: *03*

e infine:

- $p_0 = 0.22$: *00*
- $p_1 = 0.20$: *01*
- $p_2 = 0.28$: *02*
- $p_3 = 0.15$: *03*
- $p_4 = 0.10$: *10*
- $p_5 = 0.08$: *11*
- $p_6 = 0.05$: *12*
- $p_7 = 0.02$: *13*

Ma questo non è ottimale, *infatti potrei dire che* 13 *è 2 e che* 12 *è* 3 *che non sono prefissi, per esempio. Questo succede perché nell'ultimo step ho usato solo 0 e 1 e non tutti i simboli possibili della sorgente, perdendo diverse codeword. Voglio quindi arrivare all'ultimo step con esattamente 4 simboli. Per farlo aggiungo simboli fittizi alla sorgente in modo che raccogliendo a botte di r si arrivi alla fine con r simboli.*
Si ha ad esempio:

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_6 = 0.05$
- $p_7 = 0.02$
- $p_8 = 0$

- $p_9 = 0$

Al primo passo ottengo:

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_{6,7,8,9} = 0.07$

e poi:

- $p_{3,4,5,6,7,8,9} = 0.40$
- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$

associo quindi i simboli:

- $p_{3,4,5,6,7,8,9} = 0.40$*: 0*
- $p_0 = 0.22$*: 1*
- $p_1 = 0.20$*: 2*
- $p_2 = 0.28$*: 3*

avendo:

- $p_0 = 0.22$*: 1*
- $p_1 = 0.20$*: 2*
- $p_2 = 0.28$*: 3*
- $p_3 = 0.15$*: 00*
- $p_4 = 0.10$*: 01*

- $p_5 = 0.08$*: 02*
- $p_{6,7,8,9} = 0.07$*: 03*

e quindi:

- $p_0 = 0.22$*: 1*
- $p_1 = 0.20$*: 2*
- $p_2 = 0.28$*: 3*
- $p_3 = 0.15$*: 00*
- $p_4 = 0.10$*: 01*
- $p_5 = 0.08$*: 02*
- $p_6 = 0.05$*: 030*
- $p_7 = 0.02$*: 031*
- $p_8 = 0$*: 032*
- $p_9 = 0$*: 033*

Ma le ultime due non mi servono:

- $p_0 = 0.22$*: 1*
- $p_1 = 0.20$*: 2*
- $p_2 = 0.28$*: 3*
- $p_3 = 0.15$*: 00*
- $p_4 = 0.10$*: 01*
- $p_5 = 0.08$*: 02*
- $p_6 = 0.05$*: 030*
- $p_7 = 0.02$*: 031*

Che è ottimale.
Si può calcolare che:

$$L = 1.47 \ \ simboli \ \ quaternari$$

Si dimostra che si ottengono con questo processo codici ottimali e si dimostra in modo analogo al caso binario con $r = 2$ (avendo che si ragiona non con due figli ma con r figli).
Capiamo meglio quanti simboli fittizi con probabilità nulla vanno aggiunti. Avendo q simboli mi serve un numero, che sia il minore possibile, q' di simboli tale che $q' \geq q$. Devo quindi aggiungere $q' - q$ simboli fittizi con probabilità 0. In ogni passo tolgo r simboli e ne aggiungo 1, quindi ne tolgo $r - 1$. Partendo da q' diventano poi $q' - (r - 1)$ e poi $q' - (r - 1) - (r - 1)$ e così via. Alla fine voglio che ne restino r. Partendo dal fondo ho $r + (r - 1)$ poi $(r + 2 \cdot (r - 1))$ etc... Si ha quindi che, per un certo k:

$$q' = k \cdot (r - 1) + r$$

Ma posso riscrivere q' e togliere il numero k di passi (avendo che $k+1$ diventa il quoziente e 1 il resto):

$$q' = (k + 1) \cdot (r - 1) + 1 \to q' \equiv 1 \bmod (r - 1)$$

Quindi devo trovare il più piccolo $q' \geq q$ tale che q' è congruo a $1 \bmod (r - 1)$. Al massimo dovrò mettere $r - 1$ simboli fittizi.

Si ricorda che:

$$a \equiv b \bmod n \iff \exists z \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a - b = z \cdot n$$

Esempio 21. *Nell'esempio sopra avevamo $q = 8$ e $r = 4$. Mi serve $q' \geq 8$ tale che q' è congruo a $1 \bmod 3$. I primi numeri congrui a $1 \bmod 3$ sono:*

$$\{1, 4, 7, 10\}$$

e il più piccolo ≥ 8 è 10 e quindi $q' = 10$ e quindi $q' - q = 2$.

Per $r = 2$ facendo i conti si vede che arrivo sempre ad avere sempre e solo due simboli nell'ultimo passaggio.
Si nota che posso codificare le cifre quaternarie tramite quelle binarie, $0 \to 00$, $1 \to 01$, $2 \to 10$ e $3 \to 11$, passando da uno a due simboli, raddoppiando quindi anche le lunghezze delle codeword e il doppio della lunghezza media, raggiungendo però un codice non ottimale (applicando direttamente l'algoritmo di Huffman con $r = 2$ si può dimostrare si ottiene un codice migliore, avendo codeword di lunghezza due e tre e non due e quattro).
Finora le sorgenti funzionavano che ad ogni colpo di clock uscisse un simbolo, con probabilità associata, ignorando quanto successo prima. Si ha quindi che queste sorgenti sono **memoryless**.

Algorithm 2 Pseudocodice dell'algoritmo di Huffman, con S insieme dei simboli, F che associa una frequenza ad ogni simbolo, Q coda di priorità. Il codice non è stato trattato in aula ma mi sembrava interessante averlo.

```
function HUFFMAN(S = {s_1, s_2, ..., s_n}, F)
    Q ← ∅
    inserire tutti gli s_i in Q
    for i ← 1 to |S| do
        alloca un nodo n
        left[n] ← x ← extract_min(Q)
        right[n] ← y ← extract_min(Q)
        F(n) ← F(x) + F(z)
        Q.insert(n)
```

Definizione 11. *Definiamo una* ***sorgente con memoria****.*
Si supponga di avere una memoria di ordine j. Si ha che il simbolo s_i esce con probabilità:

$$p(s_i|s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ij})$$

in pratica la probabilità di un simbolo è condizionata dai j simboli usciti precedentemente. Questa è una sorgente con memoria.
Il loro studio avviene tramite ***processi di Markov*** *e* ***matrici****.*
Si cerca una distribuzione di probabilità, espressa tramite vettore, π tale che $\pi = M\pi$, con M matrice. Si vuole quindi che ciascun simbolo esce con la probabilità indicata nel vettore π in modo che sia un ***punto fisso****.*
Spiegazione superficiale in quanto la tematica non viene approfondita.

L'algoritmo di Huffman si può adattare alle sorgenti con memoria.

3.4 L'informazione

Si ha sempre una sorgente S senza memoria con i simboli s_i a cui sono associate le probabilità p_i. Cerchiamo di capire quanta informazione ci dà un simbolo:

$$I(s_i) = ?$$

L'informazione dipende soprattutto dal destinatario, da quanto è in grado di comprendere tale informazione. Cambiare ricevente cambia tale valore.
Si arriverà a capire quanto si può comprimere un messaggio tramite la quantità di informazione ma studiando solo dal punto di vista del messaggio ignorando il ricevente.

Studiamo il rapporto tra p_i e $I(s_i)$. Shannon dice che eventi più rari forniscono una maggior quantità di informazione, essendo inversamente proporzionale:

$$I(s_i) = \frac{1}{p_i}$$

Si vuole anche che da due sottosistemi che producono due quantità di informazioni $I(A)$ e $I(B)$ si possa ottenere l'informazione totale del sistema C. Si vuole che valga l'additività:

$$I(C) = I(A) + I(B)$$

In realtà possiamo dire che che I prende in input la probabilità stessa, avendo:

$$I(p_i) = \frac{1}{p_i}$$

Se ho a che fare con due eventi indipendenti ho che:

$$I(p_i \cdot p_j) = \frac{1}{p_i \cdot p_j}$$

ma ho che $I(p_i) = \frac{1}{p_i}$ e $I(p_j) = \frac{1}{p_j}$ e quindi vorrei $I(p_i \cdot p_j) = I(p_i) + I(p_j)$ ma:

$$I(p_i) + I(p_j) = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_j} = \frac{p_i + p_j}{p_i \cdot p_j} \neq \frac{1}{p_i \cdot p_j}$$

e quindi non va bene, non valendo l'additività.
Ma l'additività la hanno potenze e logaritmi, quindi si dice che:

$$I(p_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Ma quindi:

$$I(p_i \cdot p_j) = \log_2 \frac{1}{p_i \cdot p_j} = \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \cdot \frac{1}{p_j}\right) = \log_2 \frac{1}{p_i} + \log_2 \frac{1}{p_j} = I(p_i) + I(p_j)$$

Dal punto di vista assiomatico chiediamo che la quantità di informazione goda di queste proprietà, avendo $I : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$:

- $I(p) > 0$
- $I(p_1 \cdot p_2) = I(p_1) + I(p_2)$ se gli eventi sono indipendenti, valendo l'additività
- $I(p)$ è una funzione continua, per non avere situazioni scomode

Già solo con queste proprietà se ne ricavano altre:

- $I(p^n) = n \cdot I(p), \forall n \in \mathbb{N}$ e si potrebbe dimostrare per induzione. $I(p^1) = 1 \cdot I(p)$ e
$$I(p^n) = I(p^{n-1} \cdot p) = I(p^{n-1}) + I(p) = I(p) + (n-1) \cdot I(p) = n \cdot I(p)$$
- $y = p^n \to p = y^{\frac{1}{n}}$ e quindi:
$$I(y) = I(p^n) = n \cdot I(p) = n \cdot I(y^{\frac{1}{n}})$$
e quindi:
$$I(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} I(y)$$
- $I(y^{\frac{m}{n}}) = I((y^{\frac{1}{n}})^m) = m \cdot I(y^{\frac{1}{m}}) = \frac{m}{n} I(y)$

Teorema 6. *La funzione $I(p_i)$ è unica, ovvero è l'unica funzione che soddisfa le prime tre proprietà.*

Dimostrazione. Ipotizzo che esista g tale che $g(p^n) = n \cdot g(p)$. Si ha che $I(p) = c \cdot \log_2 \frac{1}{p}$ per un certo c costante (per l'eventuale cambio base). Si ha che, avendo $I(p^n) = c \cdot \log_2 \frac{1}{p^n}$, la differenza tra le funzioni è:

$$g(p^n) - c \log_2 \frac{1}{p^n} = n \cdot \left[g(p) - c \cdot \log_2 \frac{1}{p} \right]$$

Mi scelgo un valore sensato per c. Pongo, per un certo $p_0 \neq 0, 1$ (per evitare problemi):

$$c = \frac{g(p_0)}{\log_2 \frac{1}{p_0}}$$

in modo da ottenere, sostituendo nella sottrazione di prima, quando si ha $p = p_0$, ignorando traslazioni delle funzioni nel grafico:

$$g(p^n) - c \log_2 \frac{1}{p^n} = n \cdot \left[g(p) - \frac{g(p_0)}{\log_2 \frac{1}{p_0}} \cdot \log_2 \frac{1}{p} \right] = n \cdot (g(p) - g(p_0)) = 0$$

e quindi:

$$g(p_0) = I(p_0)$$

Si ha che (per capire in che situazione della figura 3.2 mi trovo):

$$\forall z \exists n \text{ t.c. } z = p_0^n$$

Allora, avendo $p_0^n = z$ riscrivo la differenza, sapendo che è nulla per che siano uguali in p_0 le sovrappongo $p = p_0$:

$$g(z) - c \cdot \log_2 \frac{1}{z} = 0 \implies g(z) = c \cdot \log_2 \frac{1}{z} = I(z)$$

dimostrando che:

$$g(z) = I(z)$$

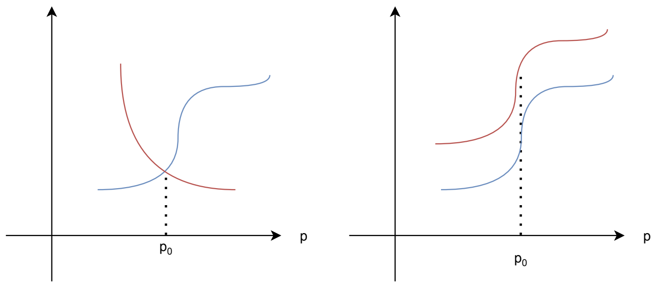


Figura 3.2: Grafici usati nella dimostrazione, il primo è se le funzioni sono diverse ma uguali in p_0, il secondo se sono solo traslate ma volendo che siano uguali in p_0 le sovrappongo.

$\square$

L'unità di misura dell'informazione varia a seconda della base del logaritmo. Si ha che $\log_2$ è l'unità di misura se ho a che fare con i bit (anche se all'inizio 0 e 1 erano detti *binit*). Misuro quindi in *bit*.
Se ho $\log_e = \ln$ misuro in *nat*.
Se ho $\log_{10}$ misuro in *Hartley*.
La sorgente s quindi emette il simbolo s_i con p_i e produce una quantità di informazione pari a:

$$I(p_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

e questo per ogni simbolo.
Si ha anche la quantità di informazione media della sorgente, facendo la media pesata con le probabilità. Questa è detta **entropia** H:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot I(p_i) = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

spesso si usa H_b con b pari alla base del logaritmo, quindi:

$$H_2(S) = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot I(p_i) = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Con H_2 funzione che ha in input tutte le probabilità:

$$H(p_1, \dots, p_q)$$

che per praticità indichiamo con, per S sorgente:

$$H(S)$$

Un altro modo di indicarla è (spesso per motivi tipografici):

$$H_2(S) = -\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \log_2 p_i$$

Sempre dietro H si ha uno scopo tipografico, non si usa E in quanto sarebbe ambiguo con *energia*. Si è pensato ad usare la η ma era comunque scomodo da usare in documenti dattiloscritti, prima che Knuth arrivasse con TEX/LATEX.
La storia dietro il nome "entropia" era stato anche trattato con Von Neumann, in quanto Shannon temeva fosse un termine errato, vedendo che fosse simile all'entropia della termodinamica ma non essendo sicuro della cosa.
Vediamo un *esperimento mentale*, detto **esperimento del diavoletto di Maxwell**, per dimostrare come l'entropia di Shannon e quella della termodinamica siano effettivamente collegate tra loro. Si immagina di avere un contenitore da cui non può uscire nulla e nemmeno in cui può entrare nulla. Tale contenitore contiene un gas con una certa quantità di calore. Tale contenitore è diviso in due con a metà uno sportello che si apre e chiude. Il gas è formato da molecole che si muovono e si scontrano tra loro e contro le pareti. Il calore è legato alla velocità di queste molecole. Lo sportello è azionato da un "diavoletto" che riesce a vedere le particelle e di misurarne la velocità. Quando vede una particella veloce la manda da una parte del contenitore se lenta dall'altra (aprendo e chiudendo lo sportello), dividendo così particelle lente e veloci nelle due sezioni del contenitore. Dopo un po' di tempo tutte le particelle veloci sono da una parte e le lente dall'altra, avendo una metà più calda (dove sono quelle veloci) e una più fredda. Il diavoletto ha quindi lavorato per andare contro il secondo principio della termodinamica, che imporrebbe un miscuglio uniforme tra particelle lenti e veloci. Ma questo principio sarebbe inviolabile quindi siamo di fronte ad un paradosso. La soluzione al paradosso è il rapporto tra le due entropie, quella di Shannon della teoria dell'informazione e quella della termodinamica. Il diavoletto ha lavorato contro il secondo principio della termodinamica ma per capire se una particella è veloce ne ha fatto una misurazione e ne ha ricavato un'informazione sulla misura. Tale misurazione è il risultato di un

evento statistico, a seconda della particella ho velocità alta/bassa etc... con una certa probabilità. A tali probabilità si associa l'entropia di Shannon e facendo i conti si scopre che comunque il sistema è chiuso e che il diavoletto non sta facendo un lavoro impossibile (i dettagli del discorso non vengono trattati).
Quindi la sorgente, ad ogni colpo di clock, emette un simbolo con una certa quantità di informazione.
Un altro modo per vedere che l'entropia è una sorta di media è prendere la sorgente S e considerare messaggi di lunghezza n. Voglio avere $n \cdot p_i$ volte s_i, avendo:

$$P = p_1^{n \cdot p_1} \cdot p_1^{n \cdot p_2} \cdot \ldots \cdot p_q^{n \cdot p_q} = (p_1^{p_1} \cdots p_q^{p_q})^n$$

ma allora:

$$\log_2 \frac{1}{P} = log_2 \left[\frac{1}{p_1^{p_1} \cdots p_q^{p_q}} \right]^n = n \sum_{i=1}^{q} \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)^{p_i} = n \cdot \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = n \cdot H_2(S)$$

3.4.1 Robustezza codici di Huffman

Sia data una sorgente S con simboli s_i e probabilità p_i (potrei anche non sapere che simboli emette la sorgente S, come se fosse una *black box*). Le probabilità in realtà non si conoscono. Si supponga di poter osservare solo i simboli emessi dalla sorgente senza sapere nulla di come è fatta. Non conosco quindi le probabilità vere ma posso solo stimarle. Chiamo p'_i tali stime. Ci si chiede quanto cambia la lunghezza media del codice istantaneo applicando Huffman con le p'_i. Si ha quindi:

$$L' = \sum_{i=1}^{q} p'_i l_i$$

anziché:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i l_i$$

Cercando di capire quanto si discostano L e L'.
Presi gli errori e_i commessi per stimare p'_i ho che:

$$p'_i = p_i + e_i$$

Si segnala che e_i può essere positivo, negativo o nullo.
Sia $p_1, \ldots, p_q$ che $p'_1, \ldots, p'_q$ sono distribuzioni di probabilità e quindi $\sum_{i=1}^{q} p_i =$

1.
Quindi:

$$\sum_i p'_i = \sum_i (p_i + e_i) = \sum_{i=1}^{q} p_i + \sum_{i=1}^{q} e_i = 1 + \sum_{i=1}^{q} e_i = 1$$

dato che $\sum_i p'_i = 1$. Ne segue quindi per forza vale che:

$$\sum_i e_i = 0$$

e quindi la media degli errori è:

$$\overline{e} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} e_i = 0$$

e che la varianza degli errori vale

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} e_i^2$$

Per la lunghezza media ho che:

$$L' = \sum_{i=1}^{q} p'_i \cdot l_i = \sum_{i=1}^{q} p_i \cdot l_i + \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot l_i = L + \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot l_i$$

Quindi la variazione tra le lunghezze medie ottenute con Huffman usando p'_i e P_i è:

$$\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot l_i$$

Voglio quindi minimizzare $\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot l_i$. Cerchiamo quindi gli $e_1, \dots e_q$ tali per cui la funzione:

$$f(e_1, \dots e_q) = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot l_i$$

è minima.
Cerco quindi i punti stazionari tramite le derivate parziali rispetto alle variabili e_i per poi porle a 0. Vogliamo che la media dei valori assunti da e_i sia nulla e che la varianza σ^2 assuma un valore fissato imponendo i seguenti vincoli:

$$\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} e_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{q} e_i = 0$$

e:

$$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} e_i^2 - \sigma^2 = 0$$

Per risolvere questo problema di ottimizzazione vincolata utilizziamo i **moltiplicatori di Lagrange**. Abbiamo due vincoli e quindi usiamo due moltiplicatori: μ e λ: La funzione su cui calcolare i punti stazionari diventa:

$$\mathcal{L}(e_1,\ldots,e_q) = \sum_{i=1}^{q} e_i l_i - \lambda \sum_{i=1}^{q} e_i - \mu \left(\sum_{i=1}^{q} e_i^2 - \sigma^2 \right)$$

Calcolo quindi le derivate parziali rispetto a e_i e le pongo nulle:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

e sommando queste equazioni ho:

$$\sum_{i=1}^{q} l_i - \lambda q - \frac{2\mu}{q} \sum_{i=1}^{q} e_i = 0$$

e avendo che $\sum_{i=1}^{q} e_i = 0$ ottengo:

$$\sum_{i=1}^{q} l_i - \lambda q = 0$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} l_i$$

Cerchiamo quindi il valore di μ. Ricordando che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

sommo le equazioni moltiplicando la prima per e_1, la seconda per e_2 etc. . .:

$$\sum_{i=1}^{q} e_i l_i - \lambda \sum_{i=1}^{q} e_i - \frac{2\mu}{q} \sum_{i=1}^{q} e_i^2 = 0$$

e avendo che $\sum_{i=1}^{q} e_i = 0$ ottengo:

$$\sum_{i=1}^{q} e_i l_i - 2\mu\sigma^2 = 0$$

da cui:

$$\mu = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{q} e_i l_i$$

Ricordando che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

sommo le equazioni moltiplicando la prima per l_1, la seconda per l_2 etc...:

$$\sum_{i=1}^{q} l_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{q} l_i - \frac{2\mu}{q}\sum_{i=1}^{q} e_i l_i = 0$$

Sostituisco λ e μ:

$$\sum_{i=1}^{q} l_i^2 - \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^{q} l_i\right)^2 - \frac{1}{2q\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{q} e_i l_i\right)^2 = 0$$

Ma allora:

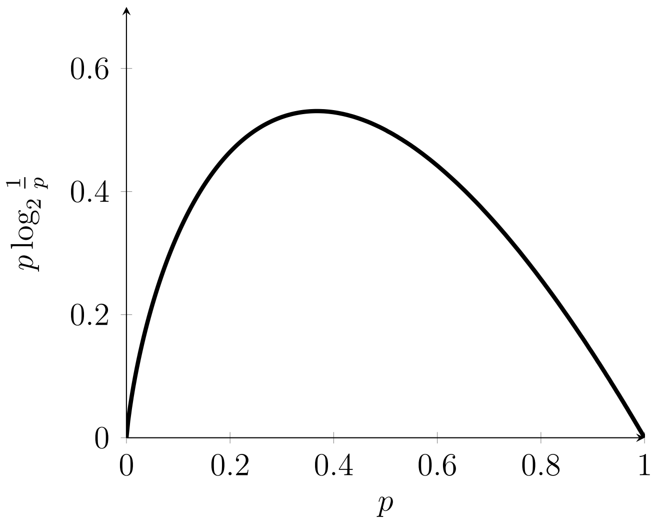
$$\left(\sum_{i=1}^{q} e_i l_i\right)^2 = \sigma^2\left[q\sum_{i=1}^{q} l_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{q} l_i\right)^2\right] =$$

$$\sigma^2 q^2\left[\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} l_i^2 - \left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} l_i\right)^2\right] = \sigma^2 q^2 \cdot v$$

con v varianza delle l_i.
Dato che q^2 e σ^2 sono fissate abbiamo trovato che il quadrato della variazione tra le lunghezze medie, ovvero il quadrato di $f(e_1, \dots, e_q)$ che volevamo minimizzare, è direttamente proporzionale alle lunghezze delle codeword. Quindi si minimizza mettendo in alto il nuovo simbolo in quanto si minimizza la varianza rendendo più **robusto** il codice, ovvero meno sensibile ad errori sulle probabilità (perlomeno ragionando in ottica di lunghezza media).
Quando esce il simbolo s_i abbiamo quindi $I(p_i) = \log_r \frac{1}{p_i}$, con tipicamente $r = 2$, misurando la quantità di informazione in bit.
Studiamo ora proprietà di $H_2(S)$, che può essere studiata come una funzione. Si nota in primis che $p = 0$ è escluso (avendo una discontinuità del terzo tipo) e $p = 1$ incluso. Avendo:

$$H_2(S) = \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = H_2(p_1, \dots, p_q)$$

che graficamente è:

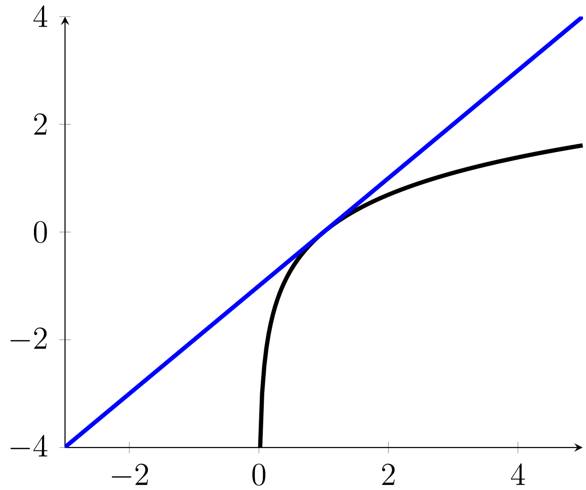


Ma questo è scomodo quindi riscrivo $\frac{1}{p}$ in modo che anche l'origine sia inclusa.
Sappiamo quindi che:

$$H_S(S) \geq 0$$

e vale 0 sse $H_2(p_1, \ldots, p_q) = 0$ e quindi una certa $p_i = 0$ e quindi tutte le altre p_j sono anch'esse nulle. Cerchiamo ora il massimo.
Usiamo la **disuguaglianza di Gibbs**.

Teorema 7 (Disuguaglianza di Gibbs)**.** *Disegniamo il logaritmo naturale (anche se vale per ogni base) e una retta r che è tangente alla funzione in* 1*:*



Si scopre quindi che:

$$\ln(x) \leq x - 1$$

e vale l'uguaglianza sse $x = 1$.
Prendo quindi due distribuzioni $x_1, \dots, x_q$ e $y_1, \dots, y_q$. La disuguaglianza di Gibbs afferma quindi che:

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \log_2 \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \leq 0$$

Dimostrazione. Dimostriamo questa disuguaglianza. Ho che, tramite cambio base:

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \log_2 \left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{\log_2} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \leq \frac{1}{\log_2} \sum_{i=1}^{q} x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - 1\right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{q} y_i - x_i$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^{q} y_i - \sum_{i=1}^{q} x_i\right) = \frac{1}{\ln 2}(1-1) = 0$$

e quindi vale la disuguaglianza di Gibbs.
L'unica volta che abbiamo maggiorato abbiamo usato $\ln x \leq x - 1$ che ci dice che vale 0 sse $x = 1$ e quindi vale l'uguaglianza sse $\frac{y_i}{x_i} = 1$, quindi se le due distribuzioni coincidono, con $x_i = y_i, \forall i$. □

Cerco quindi il massimo dell'entropia. Dimostro che:

$$\max H_2(p_1, \dots, p_q) = \log_2 q$$

Per farlo uso Gibbs:

$$H_2(S) - \log_2 q = \left(\sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}\right) - log_2 q$$

ma voglio includere tutto nella sommatoria, lo moltiplico per una sommatoria che fa 1:

$$= \left(\sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}\right) - log_2 q \sum_{i=1}^{q} p_i$$

ora lo posso includere

$$= \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{q} p_i log_2 q$$

e quindi:

$$= \sum_{i=1}^{q} log_2 \frac{1}{p_i} - log_2 q$$

e quindi:

$$= \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i \cdot q} = \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{\frac{1}{q}}{p_i}$$

Dove posso riconoscere Gibbs, con $\frac{1}{q}$ che è una distribuzione uniforme e p_i è l'altra distribuzione. Quindi:

$$H_2(S) - \log_2 q = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{q} \leq 0$$

possiamo dire che:

$$H_2(S) \leq \log_2 q$$

Inoltre vale 0 sse $p_i = \frac{1}{q}, \forall i$, quindi se ho una distribuzione è uniforme, con quindi $\log_2 q$ come massimo.
Un'applicazione di questo calcolo è la relazione tra entropia e lunghezza media di un codice e quindi con la codifica di sorgente.
Si prende una sorgente con q simboli s_i, con probabilità p_i. Si supponga di avere codeword l_i per un codice istantaneo. Ho la disuguaglianza di Kraft, con $K \leq 1$:

$$K = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Definisco, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$:

$$Q_i = \frac{r^{-l_i}}{K}$$

I vari Q_i sono $\in [0,1]$ e quindi le posso considerare singolarmente come probabilità. Vedo che:

$$\sum_{i=1}^{q} Q_i = \sum_{i} \frac{r^{-l_i}}{K} = \frac{1}{K} \sum_{i} r^{-l_i} = \frac{1}{K} K = 1$$

e quindi sono una distribuzione di probabilità.
Uso quindi Gibbs:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{Q_i}{p_i} \leq 0$$

Ho che, spezzando il logaritmo:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{Q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{q} p_i \left(\log_2 \frac{1}{p_i} - \log_2 \frac{1}{Q_i} \right)$$

$$= H_2(S) - \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{Q_i} \leq 0$$

Ma quindi:

$$H_2(S) \leq \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{Q_i} = \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{K}{r^{-l_i}} = \sum_{i=1}^{q} p_i \left(\log_2 K - \log_2 r^{-l_i}\right)$$

$$= \log_2 K \sum_{i=1}^{q} p_i + \sum_{i=1}^{q} p_i l_i \log_2 r$$

$$= \log_2 K + \log_2 r \sum_{i=1}^{q} p_i l_i = \log_2 K + L(log_2 r) \leq L \log_2 r$$

in quanto $\log_2 K \leq 0$ (essendo $K \leq 1$ per Kraft).
Quindi:

$$H_2(S) \leq L \log_2 r$$

E $\log_2 r$ è una costante che fa cambiare la base del logaritmo:

$$\frac{H_2(S)}{log_2 r} \leq L$$

ma quindi:

$$H_r(S) \leq L$$

Quindi partendo da una sorgente in cui si ipotizza un codice istantaneo possiamo dire che la lunghezza media deve essere maggiore uguale dell'entropia della sorgente su base r-aria, dove r è il numero di simboli dell'alfabeto di codifica. Il fatto che la lunghezza media non può essere minore dell'entropia (quindi della quantità media di informazione) si può interpretare dicendo che la quantità media di informazione associata al messaggio è quella che non posso rappresentare in modo più compatto, mi da un limite. La sorgente quindi, ogni volta che emette un simbolo, emette mediamente una certa quantità d'informazione e quindi ogni messaggio ha una quantità di informazione che è la somma di quelle di ciascun simbolo. La quantità di informazione del messaggio è quella che non posso rappresentare in maniera più compatta con un codice istantaneo. Ho una sorta di limite e se codificassi con una lunghezza media più bassa perderei informazione. Posso vedere il codice istantaneo come una compressione dei dati senza perdita di informazione, a meno di ulteriori compressioni.
Se avessi sorgenti con memoria avrei che si avrebbero vincoli che abbassano l'entropia.

Immagino ora una sorgente con due simboli s_1 e s_2, con $p_1 + p_2 = 1$ e quindi $p_1 = 1 - p_2$ e quindi mi basta la probabilità di uno solo dei due simboli che chiamo p. Posso dire che:

$$H_2(S) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

Questa tipologia di sorgente è una **sorgente Bernoulliana** che è del tipo, con la derivata che si annulla in $\frac{p}{2}$:

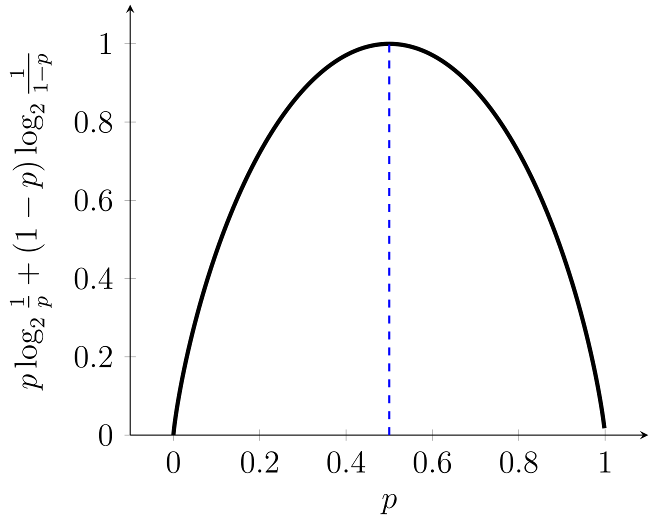


Figura 3.3: Grafico dell'entropia della sorgente Bernoulliana

in questo caso $p = 1$ sarebbe escluso ma lo completo dicendo che vale 0 in $p = 1$ tramite una sostituzione. Stesso discorso per $p = 0$.
Il valore massimo è appunto $p = \frac{1}{2}$ e quindi si ha che:

$$H_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Si vuole rappresentare la sequenza di simboli in modo efficiente, ovvero con lunghezza media minima. Vogliamo quindi la rappresentazione più compatta possibile, pensando al codice istantaneo dal punto di vista della compressione senza perdita di informazione, avendo che il ricevente può risalire alla sequenza di simboli inviata e compressa.
Parlando di codifica di sorgente si ha un simbolo per ogni colpo di clock. Possiamo pensare ad un codice istantaneo per comprimere le sequenze di simboli emesse dalla sorgente, compressione senza perdita di informazione, avendo

compressione lossless, con il ricevente che riceve e capisce perfettamente la sequenza di partenza. La compressione dipende dalla ridondanza. *Si hanno altri tipi di compressione, **lossy**, vedisi MP3 o MPEG, dove la compressione ha perdita di informazione.*
Un metodo di compressione ottimale comprime fino a raggiungere l'entropia della sorgente, non lasciando nulla di "inutile", garantendo però la ricostruzione. Con compressione si ha un codice istantaneo e dobbiamo dire al destinatario quale sia l'albero di decodifica.
Grazie a McMillan sappiamo che la disuguaglianza di Kraft vale anche per i codici univocamente decodificabili. Tutto quanto detto tramite Gibbs riottengo ancora:

$$H_r(S) \leq L$$

che quindi vale per tutti i codici univocamente decodificabili.

3.5 Codifica di Shannon-Fano

Shannon e Fano si chiedono se la quantità di informazione r-aria, con quindi alfabeto r-ario, è minore uguale della lunghezza del simbolo, avendo sempre simboli s_i, con p_i e l_i:

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i$$

Vogliamo che l_i sia il più piccolo ovvero l'unico compreso in:

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_r \frac{1}{p_i} + 1$$

Questo intervallo ha ampiezza 1 e contiene un solo intero.
Calcolo gli l_i in modo che rispettino questo principio. Tali lunghezze sono le **lunghezze di Shannon-Fano**.
Ragioniamo sulle lunghezze e vediamo se si ha un codice istantaneo con quelle lunghezze. Facendo:

$$r^{\log_r \frac{1}{p_i}} \leq r^{l_i} < r^{\log_r \frac{1}{p_i}+1}$$

ma allora:

$$\frac{1}{p_i} \leq r^{l_i} < r^{\log_r \frac{1}{p_i}} r$$

che è:

$$\frac{1}{p_i} \leq r^{l_i} < \frac{1}{p_i} r$$

Faccio il reciproco:

$$p_i \geq \frac{1}{r^{l_i}} > \frac{p_i}{r}$$

Ora sommo tutti questi l_i:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \geq \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{r^{l_i}} > \sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{r}$$

ma quindi è:

$$1 \geq K > \frac{1}{r}$$

Anche se in realtà mi basta la prima parte:

$$1 \geq K$$

Si ha quindi un codice istantaneo con le lunghezze di Shannon-Fano.
Potrei dire lo stesso per un codice univocamente decodificabile ma conviene ovviamente un codice istantaneo.
Passo ad "ottimizzare" le singole lunghezze e non la media delle stesse.
Ci si chiede ora se si ottiene una lunghezza media ottimale, "sfidando" Huffman, che solo all'ultimo ottiene le codeword che ottimizzano la lunghezza media, facendo un ragionamento che comprende tutte le probabilità facendo la scelta migliore per l'intera sorgente.
Con la codifica di Shannon-Fano si ha che ogni lunghezza dipende dalla singola probabilità e sfrutta un algoritmo più performante di quello di Huffman ma si ottiene un **codice non ottimale** e vedremo di quanto ci si discosta.
Per ottenere le codeword poi parto dalle lunghezze di Shannon-Fano e ragiono sugli alberi di decodifica, costruendone uno per scegliere le codeword. Ci si può anche chiedere quali sono le lunghezze che consentono di dare un nome univoco a ciascun evento che si possa verificare, astraendo dalle sorgenti e arrivando al nocciolo dell'essenza dell'informazione.
Ripartiamo dalle lunghezze di Shannon-Fano:

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_r \frac{1}{p_i} + 1$$

Voglio ottenere dei limiti per la lunghezza media, ricordando che:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i l_i$$

ricostruisco quindi la disequazione delle lunghezze per ottenere i limiti della lunghezza media.

Moltiplico per p_i:

$$p_i \log_r \frac{1}{p_i} \leq p_i l_i < p_i \log_r \frac{1}{p_i} + p_i$$

e sommo tutto:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \log_r \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{q} p_i l_i < \sum_{i=1}^{q} p_i \log_r \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{q} p_i$$

Ma è:

$$H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$$

Avendo ottenuto i limiti superiore e inferiore (anche se quello inferiore già si sapeva, visto che $H_r(S) \leq L$ valeva per tutti i codici univocamente decodificabili e per quelli istantanei). I codici di Huffman hanno lunghezza media minore, essendo ottimali, di quelli di Shannon-Fano. Vedo quindi che Shannon-Fano dista di 1 dall'ottimo ma non sempre è così buono. Vediamo un esempio con due simboli:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2^j} \text{ e } p_2 = \frac{1}{2^j}$$

per $j \geq 2$ fissato.
Si ha che il secondo simbolo esce raramente.
Calcolo le lunghezze di Shannon-Fano:

$$\log_2 \frac{1}{p_2} \leq l_2 \rightarrow \log_2 2^j \leq l_2 \rightarrow j \leq l_2 \rightarrow l_2 = j$$

$$\log_2 \frac{1}{p_1} \leq l_1 \rightarrow \log_2 \frac{2^j}{2^j - 1} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{2^j - 1}\right) \leq \log_2 2 = 1 \leq l_1$$

In quanto $\frac{1}{2^j-1} \leq 1$. Si ha quindi che:

$$l_1 = 1$$

Si noti che Huffman darebbe lunghezza 1 ad entrambe mentre Shannon-Fano 1 e j e quindi sono ben lontane da essere ottime, anche se la lunghezza media dista al più 1 da quella ottima (questo per l'intervento nel conto delle probabilità di uscita dei simboli). Posso comunque poi accorciare gli alberi con nodi interni inutili, soprattutto con alfabeto binario. Quindi pur non essendo ottimo è comunque accettabile.
Possiamo dire che si ha una tendenza verso l'ottimo con la codifica di Shannon-Fano.

Definizione 12. *Definisco l'n-sima estensione S^n di una sorgente S, con $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, Per $n = 1$ l'estensione coincide con n. Per $n > 1$ immagino di avere n copie della sorgente che lavorano in parallelo in modo sincrono, quindi con un colpo di clock unico per tutte. La prima sorgente emette s_{i1}, la seconda s_{i2} e l'ultima s_{in}. L'n-esima estensione considera questi s_{ij} come un vettore, considerando le n copie come una singola sorgente S^n che ha come alfabeto i simboli $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, con $\sigma_i = \{s_{i1}, \dots, s_{in}\}$ (ovvero una n-upla si simboli usciti dalle singole sorgenti), con ogni s_{ij} che può essere uno tra q simboli, con quindi $m = q^n$ (che sono le possibili combinazioni di simboli). Le singole sorgenti sono indipendenti.*
Ho che:

$$Prob[\sigma_i] = p_{i1} \cdot p_{i2} \cdot \dots p_{in}$$

Questa probabilità e q^n sono due problematiche, più è grande l'estensione e più simboli si dovrà costruire (con limiti anche macchina). Se ho probabilità piccole come p_{ij} moltiplicandoli diventano ancora più piccoli.
Si ha quindi un codice istantaneo con q^n simboli che sono n-uple di simboli della sorgente di partenza, che in ogni σ_i possono essere mescolati.
Ogni singolo S ha un $H_r(S)$ quindi si ha che, valendo l'additività per l'entropia:

$$H_r(S^n) = n \cdot H_r(S)$$

Teorema 8 (Primo teorema di Shannon, noiseless coding theorem)**.** *Avendo:*

$$H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$$

Si ha che vale qualunque sia la sorgente e qualunque sia il codice istantaneo. In particolare, per $n \geq 1$ vale anche per l'n-esima estensione:

$$H_r(S^n) \leq L_n < H_r(S^n) + 1$$

Con L_n lunghezza media del codice per S^n. Si ha quindi che:

$$n \cdot H_r(S) \leq L_n < n \cdot H_r(S) + 1$$

Divido per n, ottenendo la formula del ***primo teorema di Shannon****:*

$$H_r(S) \leq \frac{L_n}{n} < H_r(S) + \frac{1}{n}$$

Si era partiti quindi da un intervallo di ampiezza 1 per arrivare ad uno di ampiezza $\frac{1}{n}$, avendo lo stesso estremo di partenza mentre l'estremo di fine muta, in modo tale che l'ampiezza dell'intervallo decresce all'aumentare di n. Al crescere di n quindi tale quantità viene schiacciata verso l'ottimo (a mo'

dei due carabinieri).
D'altro canto $\frac{L_n}{n}$ *è la lunghezza media di un codice istantaneo che codifica la sorgente* S_n*, che ha come simboli delle n-uple. La codeword codifica tutta l'n-upla e tutte le codeword hanno lunghezza media* L_n *e quindi in media servono* L_n *bit, nel caso binario, per rappresentare la n-upla. Ogni singola componente della n-upla ha quindi lunghezza* $\frac{L_n}{n}$*. So che, avendo* $\sigma_i = \{s_{i1}, \dots, s_{in}\}$*, ogni* s_{ij} *ha lunghezza media* $\frac{L_n}{n}$*. Quindi ha senso confrontare* $H_r(S) \leq \frac{L_n}{n} < H_r(S) + \frac{1}{n}$ *con* $H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$*. Confrontando quindi, tramite la formula del primo teorema di Shannon, si giunge a dire che se al posto di codificare la sorgente codifico le n-esime estensioni della sorgente per n crescente allora ottengo una codifica per l'n-esima estensione che è migliore di quella che avevo codificando i singoli simboli della sorgente. È migliore perché ho un intervallo per la lunghezza media di ampiezza* $\frac{1}{n}$*, che quindi al crescere di n diventa sempre più piccolo, tendendo all'ottimo.*
Il teorema ha validità teorica e interesse storico ma in pratica dovrei costruire S^n*, con tanti simboli dei quali alcuni potrebbero avere probabilità talmente bassa da essere difficile da rappresentare a livello macchina.*

3.6 Canali di Comunicazione

Prima di parlare del **secondo teorema di Shannon** dobbiamo approfondire il canale, in forma di modello matematico.
In input al canale ho simboli di un alfabeto A, ovvero $a_1, a_2, \dots, a_q$. Dal canale escono simboli di un alfabeto B potenzialmente diverso, $b_1, \dots, b_s$. Il rumore può cambiare un simbolo e quindi il canale viene modellato con probabilità condizionate tra simbolo in entrata e simbolo in uscita:

$$P(b_j|a_i)$$

Per queste probabilità usiamo una matrice M con q righe, una per ogni simbolo di A, e s colonne, una per ogni simbolo di B, con:

$$M_{ij} = P(b_j|a_i)$$

Quindi un canale è:

$$C = (A, B, rumore)$$

con

- A alfabeto dei simboli a_i che entrano nel canale, di cardinalità q
- B alfabeto dei simboli b_i che escono dal canale, che possono anche essere di cardinalità maggiore a quelli che entrano, avendo cardinalità s

- *rumore*, che data una certa P si ha che ogni simbolo di input ha una probabilità di diventare un simbolo in output. Sono probabilità condizionate, $P(b_j|a_i)$. Si ha quindi una matrice con una riga per ogni a_i e una colonna per ogni b_j con queste probabilità condizionate come elementi. Quindi con *rumore* si intende tale matrice

Studiamo meglio la matrice. Diciamo che entra il simbolo a_i e abbiamo che il canale "non dimentica nulla", quindi deve uscire un simbolo b_j (che per di più esce solo se qualcosa è entrato nel canale). Si ha quindi che:

$$\sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) = 1, \forall i$$

avendo quindi a che fare con una **matrice stocastica**. Sulle colonne non succede in quanto potrei avere un simbolo che esce solo se è entrato un simbolo preciso, non esaurendo tutte le possibilità.
L'utente ha i simboli a_i e decide come inserirli nel canale ciascuno con una certa $P(a_i)$, avendo la distribuzione di probabilità:

$$\{P(a_i)\}_{i=1}^{q}$$

Dobbiamo quindi calcolare $P(b_j)$. Per uscire b_j si ha che o entra un simbolo a_1 che viene trasformato in b_j, con $P(b_j|a_1)$ oppure un a_2, con $P(b_j|a_2)$, e così via, fino a a_q, con $P(b_j|a_q)$. Se moltiplico queste probabilità condizionate per la probabilità che ci sia in input il simbolo e sommo tali termini ottengo tutti i modi possibili in cui può uscire b_j:

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^{q} P(a_i) \cdot P(b_j|a_i),\ \forall j$$

E, prese tutte le equazioni per ogni j, si parla di **equazioni di canale**, che ci dicono la distribuzione di probabilità in uscita, se sommo il valore per tutti i j ottengo 1:

$$\sum_{j=1}^{s} P(b_j) = 1$$

Le probabilità $P(b_j|a_i)$, contenute nella matrice di canale, sono **probabilità in avanti**, ponendosi dal punto di vista del mittente. Posso studiare anche le $P(a_i|b_j)$, ponendosi dal punto di vista del ricevente che si chiede, dato un output, cosa è entrato nel canale, avendo **probabilità all'indietro**. Queste due probabilità sono legate dal teorema di Bayes, che sviluppo tramite le equazioni di canale:

$$P(a_i|b_j) = \frac{P(b_j|a_i)P(a_i)}{P(b_j)} = \frac{P(b_j|a_i)P(a_i)}{\sum_{i=1}^{q} P(a_i) \cdot P(b_j|a_i)}, \forall i, j$$

Ma quindi alla fine ho la frazione tra un solo termine e tutti i termini ma ci garantisce anche deve essere stato inserito un a_i per avere un b_j.

3.6.1 Canali particolari

Si hanno due canali particolari, "estremi":

1. **canale senza rumore**, dove inserito un simbolo di esce sempre lo stesso simbolo. Ho sempre che un input comporta uno e un solo output, sempre. Potrebbe essere che i due alfabeti sono comunque diversi non avendo per forza lo stesso simbolo (entra c ed esce c) ma potrei avere un altro simbolo (se entra c esce v) ma questo deve accadere sempre, avendo determinismo. Lato equazioni di canale si ha che la probabilità di uscita di un b_j è la stessa che ha il corrispettivo a_i di essere in input. Nella matrice di canale quindi ho un solo 1 per riga, che corrisponde al b_j che esce, e 0 altrimenti. Resta comunque una matrice stocastica, anche se ho un solo 1 per ogni riga
2. **canale completamente rumoroso**, dove inserito un simbolo a_i può uscire un b_j qualsiasi che non dipende da a_i. Il canale dimentica a_i e spara a caso un b_j. Nella matrice di canale, stocastica, in ogni riga si ha una distribuzione uniforme, avendo ogni valore pari a $\frac{1}{s}$

Questi canali sono casi estremi teorici, non è possibile costruirli. Per forza c'è rumore in natura e quindi il primo è impossibile, anche se ci si può avvicinare. Il secondo farebbe comodo per generare numeri casuali ma un canale così privo di determinismo non è costruibile, anche se usando il **rumore di fondo dell'universo** o i **tempi di decadimento** forniscono risultati quasi prossimi.

3.6.2 Canale Binario Simmetrico

Un altro canale particolare è il **canale binario simmetrico (*CBS*)**. Un CBS è un canale binario in entrata, ovvero che ha due soli simboli in input, $a = 0$ e $a = 1$, e binario in uscita, $b = 0$ o $b = 1$. Entra un bit ed esce un bit. Dato 0 può uscire 1 o 0 e dato 1 può uscire 0 o 1. Si hanno quindi:

- $P_{0,0} = P(b = 0|a = 0)$
- $P_{0,1} = P(b = 0|a = 1)$
- $P_{1,0} = P(b = 1|a = 0)$
- $P_{1,1} = P(b = 1|a = 1)$

Ho quindi una matrice del tipo, con a sulle righe e b sulle colonne:

$$\begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix}$$

Avendo una matrice simmetrica, che si comporta uguale indipendentemente dal bit di ingresso. Se entra 0 ed esce 0 o entra 1 ed esce 1 abbiamo una trasmissione corretta, altrimenti abbiamo un errore di trasmissione. Simmetrico significa che la probabilità di una trasmissione corretta è uguale nei due casi, la chiamo P, e quella di avere una trasmissione errata è uguale nei due casi, la chiamo Q. La matrice diventa quindi:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}$$

Dato che, quando inserisco 0, o ricevo 0 o 1 (vale anche avendo 1 in input) allora, avendo comunque la matrice stocastica:

$$P + Q = 1$$

e quindi:

$$Q = 1 - P$$

Ma allora:

$$\begin{bmatrix} P & 1-P \\ 1-P & P \end{bmatrix}$$

Mi basta quindi solo il valore di P per avere tutte le informazioni di un CBS. In un CBS ho quindi due simboli possibili in input e quindi, per praticità chiamo:

$$p(a = 0) = p$$

$$p(a = 1) = 1 - p$$

Ho quindi, lato equazioni di canale, che:

$$p(b = 0) = p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)$$

$$p(b = 1) = p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P$$

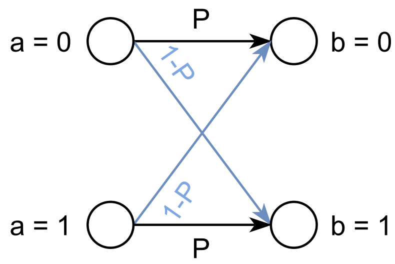


Figura 3.4: Rappresentazione di un canale binario simmetrico

Se avessi $P = 1$ e $Q = 0$ (ma anche $Q = 1$ e $P = 0$, avendo che sempre si ha deterministicamente il cambio di bit) avrei un **CBS senza rumore**. Se avessi $P = \frac{1}{2}$ e $Q = \frac{1}{2}$ avrei un **CBS completamente rumoroso**. Vedo anche le probabilità all'indietro, calcolabili con tutto quello di cui abbiamo appena discusso:

$$P(a = 0|b = 0) = \frac{P(b = 0|a = 0) \cdot P(a = 0)}{p(b = 0)} = \frac{P \cdot p}{p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)}$$

Vediamo quindi i due casi particolari (facilmente verificabili sostituendo):

- CBS senza rumore:
$$P(a = 0|b = 0) = 1$$
- CBS completamente rumoroso:
$$P(a = 0|b = 0) = p$$

$$P(a = 1|b = 0) = \frac{P(b = 0|a = 1) \cdot P(a = 1)}{p(b = 0)} = \frac{(1 - P) \cdot (1 - p)}{p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)}$$

Si hanno poi:

- CBS senza rumore:
$$P(a = 1|b = 0) = 0$$
- CBS completamente rumoroso:
$$P(a = 1|b = 0) = 1 - p$$

$$P(a = 0|b = 1) = \frac{P(b = 1|a = 0) \cdot P(a = 0)}{p(b = 1)} = \frac{(1 - P) \cdot p}{p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P}$$

E poi ancora:

- CBS senza rumore:

$$P(a = 1|b = 0) = 0$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 1|b = 0) = 1 - p$$

$$P(a = 1|b = 1) = \frac{P(b = 1|a = 1) \cdot P(a = 1)}{p(b = 1)} = \frac{P \cdot (1 - p)}{p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P}$$

E infine:

- CBS senza rumore:

$$P(a = 1|b = 1) = 1$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 1|b = 1) = p$$

Esempio 22. *Supponendo di avere un CBS con $P = \frac{9}{10}$, avendo che 9 volte su 10 il bit arriva corretto. Si ha quindi $Q = \frac{1}{10}$, avendo progettato un "buon canale", anche se, senza sapere $p(a_i)$, il massimo che posso fare è supporli uniformi. L'utente però potrebbe non usarlo per probabilità uniforme, ad esempio qui suppongo un utente che inserisce secondo:*

$$P(a = 0) = p = \frac{19}{20}$$

$$P(a = 1) = 1 - p = \frac{1}{20}$$

Il ricevente vede uscire $b = 0$ e vuole sapere se è entrato $a = 0$:

$$P(a = 0|b = 0) = \frac{171}{172}$$

che sembra ragionevole. Si ha anche, ovviamente:

$$P(a = 1|b = 0) = \frac{1}{172}$$

Avendo che:

$$P(a = 0|b = 0) > P(a = 1|b = 0)$$

Si ha poi:

$$P(a = 0|b = 1) = \frac{19}{28}$$

$$P(a = 1|b = 1) = \frac{9}{28}$$

Avendo che:

$$P(a = 0|b = 1) > P(a = 1|b = 1)$$

Ma allora se vede $b = 1$ dice che comunque è più probabile $a = 0$, non capendo quando sia entrato $a = 1$.

Nell'esempio si è visto che le probabilità dipendono comunque dall'uso dell'utente, che sceglie le $p(a_i)$, che se scelte male portano a situazioni strane come quelle dell'esempio. Nell'esempio si è creato un bias che porta sempre a scegliere $a = 0$,avendo che $p(a = 0) >> p(a = 1)$. Questo succede in quanto, guardando le equazioni sopra descritte, si ha, con questa scelta, $p > P$ e $p > Q$ (avendo indicato $p(a = 0)$ con p).

3.6.3 Entropie del Canale

Dato un canale con $a_i \in A$ in input e $b_j \in B$ in output, con le varie probabilità associate. Normalmente ho la sorgente A di q simboli, dove i vari $P(a_i)$ sono una distribuzione di probabilità. Mettendosi nei panni di un osservatore che vede solo l'output si ha una "sorgente" B, di s simboli, dove i vari $P(b_j)$ sono una distribuzione di probabilità. La vedo come sorgente perché il canale è una *black box*, se invece potessi vedere dentro vedrei che B non sarebbe una sorgente, con le probabilità $P(b_j)$ che non sono native ma derivate da quelle dei simboli a_i e dalle $P(b_j|a_i)$, tramite le equazioni di canale.
Si hanno molte entropie.
Posso dare l'entropia della sorgente A:

$$H_r(A) = \sum_{i=1}^{q} P(a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)}$$

Vedo B come sorgente e quindi:

$$H_r(B) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)}$$

Ho anche, ponendomi dal punto di chi vede sia A che B, la quantità di informazione media emessa dalla sorgente in input dato un simbolo in output:

$$H_r(A|b_j) = \sum_{i=1}^{q} P(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Questa è una sorta di **entropia tecnica** che serve a calcolare quella di A dato B:

$$H_r(A|B) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j) \cdot H_r(A|b_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{q} P(b_j) \cdot p(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{q} P(a_i, b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Questa è detta **equivocazione** e studia la quantità di informazione media sull'input avendo in uscita un qualsiasi simbolo di B, essendo dal punto di vista del ricevente che studia la quanittà di informazione immessa nel canale. Si noti che si rompe quella sorta di simmetria nella formula dell'entropia (tra il P e il denominatore della frazione).
Un'altra entropia interessante è:

$$H_r(B|a_i) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Questa serve per l'altra entropia famosa che è:

$$H_r(B|A) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Anche questa è detta **equivocazione** ed è la quantità di informazione media sull'output avendo inserito un qualsiasi simbolo di A nel canale, essendo dal punto di vista del mittente che inserisce un simbolo qualsiasi nel canale.
Infine ho anche l'entropia congiunta:

$$H_R(A, B) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j, a_i)}$$

Dove sono nel punto di vista di un osservatore esterno che vede input, canale e output, qualunque sia il simbolo che entri nel canale e qualunque sia quello

che esca dal canale.
Suppongo che A e B siano indipendenti, ovvero che il canale è *completamente rumoroso*. Ma allora:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j)$$

E sostituendo:

$$H_r(A,B) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i) \cdot P(b_j) \log_r \frac{1}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \left[\log_r \frac{1}{P(a_i)} + \log_r \frac{1}{P(b_j)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)}$$

Posso scambiare le sommatorie e portare fuori le cose che non dipendono più dalle singole sommatorie, isolando ciò che riguarda A e ciò che riguarda B, ottenendo:

$$= \sum_{j=1}^{s} p(b_j) \sum_{i=1}^{q} p(a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^{q} p(a_i) \sum_{j=1}^{s} p(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)}$$

$$= H_r(A) \sum_{j=1}^{s} P(b_j) + H_r(B) \sum_{i=1}^{q} P(A_i) = H_r(A) + H_r(B)$$

Quindi:

$$H_r(A,B) = H_r(A) + H_r(B)$$

Avendo che le due sommatorie fanno 1.
E quindi se sono indipendenti la quantità di informazione congiunta è la somma delle due singole quantità di informazione, avendo che la quantità di informazione è additiva.
Si cerca una relazione tra la quantità di informazione in output e quella in input, ipotizzando che un po' vada persa nel canale causi rumore. Sicuramente al più in output avrò la stessa quantità di informazione.
Normalmente non si ha un canale completamente rumoroso quindi il simbolo in output dipende da quello in input, avendo A e B non indipendenti ma si ha:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j | a_i)$$

usando le probabilità in avanti che ho già a disposizione. Si ottiene quindi:

$$H_r(A, B) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \left[\frac{1}{P(a_i)} \cdot \frac{1}{P(b_j|a_i)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Per la proprietà marginale so che:

$$\sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) = P(a_i)$$

So anche che la seconda somma è l'equivocazione.
Ma allora:

$$H_r(A, B) = \sum_{i=1}^{s} P(a_i) \cdot \log \frac{1}{P(a_i)} + H_r(B|A)$$

Quindi in generale si ha, avendo che il primo termine della somma è l'entropia di A:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B|A)$$

In caso fossero indipendenti avrei:

$$H_r(B|A) = H_r(B)$$

Ritrovando anche, qualora A e B fossero indipendenti:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B)$$

3.6.4 Mutua Informazione

Definizione 13. *Definiamo* ***mutua informazione*** *come la differenza di quantità di informazione data dal conoscere o non conoscere il simbolo in output dal canale:*

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{1}{P(a_i)} - \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Ma quindi, per le proprietà dei logaritmi:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i|b_j)}{P(a_i)}$$

Moltiplico sopra e sotto per $P(b_j)$:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i|b_j) \cdot P(b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

ma allora:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

E quindi:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(b_j|a_i) \cdot P(a_i)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

e infine:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)} = I(b_j; a_i)$$

Avendo che la mutua informazione quindi non dipende dall'ordine.
Se considero il caso particolare in cui a_i e b_j sono indipendenti allora:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j)$$

Allora:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i) \cdot P(b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)} = 0$$

Per ora si parla di un solo simbolo in input e uno solo in output.
Estendo la definizione alle medie:

$$I(A; b_j) = \sum_{i=1}^{q} P(a_i|b_j) \cdot I(a_i; b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{P(a_i|b_j)}{P(a_i)}$$

E poi, per B:

$$I(a_i; B) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) \cdot I(a_i; b_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) \cdot \log_r \frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)}$$

*e, come ultimo, la **mutua informazione del sistema**:*

$$I(A; B) = \sum_{i=1}^{q} P(a_i) I(a_i; B)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)} = I(B; A)$$

Teorema 9. *Si può dimostrare che:*

- $I(A; B) \geq 0$, *per Gibbs*
- $I(A; B) = 0$ *sse* A *e* B *sono indipendenti*
- $I(A; B) = I(B; A)$

La quantità di informazione trasmessa nel canale, per una distribuzione $P(a_i)$ fissata è proprio la mutua informazione del sistema. Infatti, tralasciando la r dell'entropia in quanto irrilevante:

$$I(A; B) = H(A) + H(B) - H(A, B)$$

e si sa che:

$$I(A; B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \geq 0$$

Inoltre sappiamo che:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B|A)$$

$$H_r(A, B) = H_r(B) + H_r(A|B)$$

Uso una delle due per sostituire:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) \geq 0$$

oppure:

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A) \geq 0$$

Ma so quindi che (l'entropia è comunque ≥ 0):

$$0 \leq H(A|B) \leq H(A)$$

e che:

$$0 \leq H(B|A) \leq H(B)$$

Scopro quindi che:

$$H(A, B) \leq H(A) + H(B)$$

e vale l'uguaglianza sse A e B sono indipendenti, avendo un canale completamente rumoroso.
Tra tutte queste formule abbiamo come importanti:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) \geq 0$$

che ci dice che la mutua informazione del sistema corrisponde a quella trasmessa meno l'equivocazione, che altro non è che la quantità di informazione persa causa rumore (*non si dimostra la cosa*). Avere $I(A;B) \geq 0$ è data dal fatto che il rumore non mi può mandare in negativo, "togliendo più dell'informazione presente".
L'altra formula essenziale:

$$H(A,B) \leq H(A) + H(B)$$

Avendo che al più la massima informazione è la somma di quella di A e di quella di B, valore massimo che si ottiene solo se sono indipendenti. Negli altri casi si ha l'intervento del rumore, vedendo uscire meno quantità di informazione di quella entrata.

3.6.5 Capacità del Canale

Abbiamo detto che la quantità di informazione trasmessa nel canale, per una distribuzione $P(a_i)$ fissata è proprio la mutua informazione del sistema. Ma sappiamo che una scelta errata della distribuzione comporta cose inaspettate ed errate. Si vuole evitare che l'utente faccia scelte inopportune e si vorrebbe che la quantità di informazione trasmissibile dal canale non dipenda dalla scelta dell'utente, la *capacità del canale* non deve dipendere da $P(a_i)$.

Definizione 14. *Si definisce, informalmente, la* ***capacità del canale*** C *come la massima quantità di informazione trasmissibile dal canale (ovvero la mutua informazione del sistema) al variare di tutte le possibili* $P(a_i)$*:*

$$C = \max_{P(a_i)} I(A;B)$$

Questa definizione è corretta matematicamente ma non aiuta dal punto di vista pratico, dovendo calcolare tutte le:

$$I(A;B) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

al variare dei $P(a_i)$.
Si sono quindi ricercate delle *restrizioni* ragionevoli.
La principale di queste deriva dal fatto che:

$$I(A;B) = H_r(B) - H_r(B|A)$$

Ma allora:

$$I(A;B) = H_r(B) - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{s} P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

$$= H_r(B) - \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s} p(a_i) \cdot P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$
$$= H_r(B) - \sum_{i=1}^{q} p(a_i) \cdot \sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Quindi nella matrice di canale mi fisso su una riga, per a_i, e calcolo coi valori della riga, variando per b_j.
Si è quindi pensato ad un **canale uniforme**, dove gli elementi di ogni riga della matrice sono sempre gli stessi, al più di una permutazione. Ogni riga è quindi una permutazione della prima riga. Posso ovviamente avere righe uguali. Con un canale uniforme chiamo:

$$w = \sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

per una certa riga e quindi, per un canale uniforme:

$$I(A;B) = H_r(B) - \sum_{i=1}^{q} P(a_i) \cdot w$$

Ma w non dipende da i:

$$I(A;B) = H_r(B) - w \cdot \sum_{i=1}^{q} p(a_i)$$

Ma quindi, avendo $\sum_{i=1}^{q} P(a_i) = 1$:

$$I(A;B) = H_r(B) - w$$

Fare:

$$C = \max_{P(a_i)} I(A;B)$$

equivale quindi a:

$$C = \max_{P(a_i)} \{H_r(B) - w\}$$

ma w è costante:

$$C = \max_{P(a_i)} \{H_r(B)\} - w$$

Vediamo se esistono tali canali uniformi.
Torniamo al CBS. Guardando la matrice vedo che la seconda riga è una permutazione della prima e quindi il CBS è un canale uniforme.

Prendiamo ora l'n-esima estensione di un CBS, CBS^n, per $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. In un CBS^n ho n copie del CBS che trasmettono un bit con una certa probabilità di trasmissione corretta, uguale per tutte. Con un CBS^n posso trasmettere un pacchetto di n bit, dove ogni bit ha la stessa probabilità di trasmissione corretta P ed errata $Q = 1 - P$. Ogni bit è trasmesso indipendentemente dagli altri, un errore su un bit non influisce sulla trasmissione degli altri. Questo ci riporta al **rumore bianco**, infatti CBS^n è il canale che si usa nel modello del canale bianco. La matrice di CBS^n, per un certo n, è uniforme, avendo quindi un canale uniforme.
Abbiamo quindi già due canali uniformi: CBS e CBS^n. Ha senso quindi studiare tali canali uniformi.
Calcolo ora la mutua informazione e la capacità del CBS.
Parto calcolando w e scelgo di usare la prima riga, $[P \;\; Q]$:

$$w = P \log_2 \frac{1}{P} + Q \log_2 \frac{1}{Q}$$

e quindi, essendo $Q = 1 - P$:

$$w = P \log_2 \frac{1}{P} + (1 - P) \log_2 \frac{1}{1 - P}$$

oppure, avendo $P = 1 - Q$:

$$w = (1 - Q) \log_2 \frac{1}{1 - Q} + Q \log_2 \frac{1}{Q}$$

Ricordo che, vedere anche la figura 3.3:

$$H_2(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

Ma allora, avendo qui $P = p$:

- $w = H_2(P)$
- $w = H_2(Q)$

E mi basta sapere o P o Q avendo che sono legati. Per un CBS però P è un numero e basta, e anche Q quindi:

$$C = \max\{H_2(B) - h_2(P)\} = \max\{H_2(B)\} - H_2(P)$$

$$C = \max\{H_2(B) - h_2(Q)\} = \max\{H_2(B)\} - H_2(Q)$$

In un CBS la distribuzione in input dipende solo da p, ricordando la figura 3.4, e quindi:

$$C = \max_p \{H_2(B)\} - H_2(P)$$

$$C = \max_p \{H_2(B)\} - H_2(Q)$$

Si ha che B corrisponde all'output, ovvero la sorgente che vede il destinatario ed è comunque Bernoulliana e quindi è anche lei come la figura 3.3. Se chiamo x la possibilità che esca 0 e $1-x$ che esca 1. Posso operare però solo su p e il massimo di $H_2(B)$ è $\frac{x}{2}$ ma allora, per le equazioni di canale:

$$x = p \cdot P + (1-p) \cdot (1-P)$$

$$= p \cdot P + 1 - P - p + p \cdot P$$

$$= 1 - P - p + 2 \cdot p \cdot P$$

$$= 1 - P - p \cdot (1 - 2 \cdot P)$$

Cerco un p che dia $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = x$$

$$= p(1 - 2 \cdot P) = \frac{1}{2} - P = \frac{1 - 2 \cdot P}{2}$$

Ma allora, dividendo il primo e l'ultimo termine:

$$p = \frac{1}{2}$$

Ma ho supposto (per poter fare la divisione e ottenere p):

$$1 - 2 \cdot P \neq 0 \to P \neq \frac{1}{2}$$

che è ragionevole perché sarebbe un canale completamente rumoroso. Assumo quindi un CBS non completamente rumoroso.
Posso infine dire che la **capacità del CBS** è:

$$C = 1 - H_2(P)$$

$$C = 1 - H_2(Q)$$

In quanto il valore massimo dell'entropia della Bernoulliana è 1 e la si ottiene quando la probabilità di uscita vale $\frac{1}{2}$, che vale quando anche la probabilità di inserire un valore è $\frac{1}{2}$. Si noti che $H_2(P)$ e $H_2(Q)$, una volta fissato il CBS, sono costanti, calcolate con l'entropia della Bernoulliana. Il massimo della

sorgente Bernoulliana B è invece 1 e lo si ottiene quando la probabilità di uscita di 0 dalla sorgente B vale $\frac{1}{2}$ e la si ottiene quando anche la probabilità di inserire 0 in A è $\frac{1}{2}$ (in entrambi i casi ho $\frac{1}{2}$ anche per 1).
Passando a CBS^n, che è formata da n copie di un CBS che lavorano in parallelo in modo indipendente e con lo stesso P e la stessa Q, ho che la quantità di informazione è additiva. Si ha quindi la capacità di un CBS^n:

$$C = n \cdot (1 - H_2(P))$$

$$C = n \cdot (1 - H_2(Q))$$

3.7 Secondo Teorema di Shannon

La dimostrazione del teorema non viene fatta a lezione.
Questo teorema è forndamentale nella teoria dell'informazione.
Con questo teorema si usa praticamente tutto quanto spiegato in questo capitolo.
Si useranno alcuni passaggi matematici.
In primis la seguente maggiorazione, avendo $H(\cdot)$ funzione entropia per una sorgente Bernoulliana:

$$\sum_{k=0}^{\lambda \cdot n} \leq 2^{n \cdot H(\lambda)}, \ \ 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \lambda \cdot n \in \mathbb{N}$$

Si ha poi il seguente teorema:

Teorema 10 (Legge Debole dei Grandi Numeri)**.** *Date $x_1, \dots X_n$ variabili casuali indipendenti, con stessa distribuzione, media μ e varianza σ^2 si ha che $\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere e $\forall \delta > 0$, $\exists n_0$ tale che, $\forall n > n_0$:*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \delta$$

Ovvero, detto altrimenti:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) < \delta$$

Avendo che la media dei valori X_i può essere portata, con alte probabilità, vicino quanto si vuole a μ, che altro non è che il valore atteso. Si dice infatti che la media di tali valori dista da μ per un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Ogni bit inviato forma l'insieme delle variabili casuali che descrivono i risultati dei nostri n "esperimenti" indipendenti e uguali. per il teorema posso portare il valore medio di tale sequenza di esperimenti vicino al μ di ogni esperimento (non con certezza ma con probabilità prossima quanto si vuole a 1).
Ci si aspetta quindi un errore medio pari a $n \cdot Q$ nella spedizione di n cifre da un CBS^n ma per tale teorema lo porteremo prossimo quanto si vuole a Q, a patto di avere n grande (spedendo quindi grandi sequenze di bit).
Il secondo teorema di Shannon, a differenza del primo, riguarda i **canali rumorosi**.

Teorema 11 (Secondo Teorema di Shannon)**.** *Dato un canale rumoroso, con una certa capacità C, è possibile trasmettere informazioni avvicinandosi arbitrariamente alla capacità del canale e contemporaneamente mantenendo arbitrariamente bassa la probabilità d'errore, ovvero la probabilità che il ricevente sbagli a decodificare. Si mantiene quindi l'affidabilità del canale, appunto la probabilità di ricevere correttamente i messaggi, prossima a 1.*

Su elearning dettagli della dimostrazione. Quanto detto in seguito è solo qualche commento non richiesto all'orale.
La struttura della dimostrazione parte da un a definizione:

Definizione 15. *Definiamo* ***regola di decisione*** *come una funzione che usa il decodificatore per capire quale simbolo è stato spedito a partire dal simbolo ricevuto:*

$$d : B \to A$$

Si da per scontato che possa avvenire un errore. Si ha una matrice con le probabilità all'indietro che mi dice le probabilità di avere un a_i avendo ricevuto b_j. Le colonne di tale matrici sommano 1 e hanno appunto le **probabilità all'indietro** $P(b_j|a_i)$ e si usa una **regola di massima verosomiglianza**. Potrei anche avere equiprobabilità studiando tali regole che quindi non sono uniche.
Si parla poi di **probabilità d'errore**, ovvero la probabilità che il ricevente sbagli a decodificare, ovvero ricevuto b_j non si capisca il giusto a_i.
Il teorema poi si dimostra usando CBS^n e assumendo rumore bianco, ma anche per altri tipi di canale, che comportano conti più complessi.
Si suppone $Q < \frac{1}{2}$ anche perché se no avrei o un canale completamente rumoroso, con =, o che "sbaglia" più di metà delle volte ma quindi, essendo Bernoulliano, ha comunque $Q < \frac{1}{2}$.
Con A assumo solo i messaggi validi:

$$A \subset \{0, 1\}$$

Mentre B sono tutti i possibili:

$$B \subseteq \{0, 1\}$$

Inoltre, per il CBS^n:

$$P(a_i) = \frac{1}{m}$$

e quindi:

$$I(a_i) = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{m}} = \log_2 m$$

E si ha poi:

$$n \cdot C = n \cdot (1 - H_2(Q))$$

Per il teorema, dato $\varepsilon_1 > 0$:

$$I(a_i) = \log_2 n = n \cdot (C - \varepsilon_1)$$

$$= n \cdot C - n \cdot \varepsilon_1$$

che dipende da n. Ma allora:

$$m = 2^{n \cdot (C - \varepsilon_1)} = \frac{2^{n \cdot C}}{2^{n \cdot \varepsilon_1}}$$

Si scelgono poi casualmente i messaggi.
Ipotizzo una sfera per la correzione di raggio, in fase di invio per a_i, per $\varepsilon_2 > 0$:

$$r = n \cdot Q + \varepsilon_2$$

in modo che il destinatario, che anche lui ha una sfera per la correzione d'errore e sceglie il simbolo più vicino al centro, che è il più probabile, che equivale ad usare la massima verosimiglianza. Qualora però tale simbolo non fosse univoco si avrebbe errore, avendo errore nella decisione (che è l'errore della probabilità d'errore). Nemmeno provo a valutare altri simboli equidistanti. Si calcola quindi la probabilità di commettere tale errore e si continua con il ragionamento del teorema.
Shannon fa quindi una media di tutti i messaggi validi, ovvero su tutte le codifiche casuali, facendo poi vari ragionamenti geometrici e applicando i due costrutti matematici posti ad inizio sezione e la cosiddetta **disuguaglianza di Fano**.

Definizione 16. *Si definisce la* ***disuguaglianza di Fano*** *come:*

$$H(A|B) \leq H(P_E) + P_E \log(q - 1)$$

*Avendo la **probabilità d'errore**:*

$$P_E = \sum_{B, A\setminus\{a^*\}} P(a,b)$$

e:

$$\overline{P_E} = 1 - P_E = \sum_{B} P(a^*, b)$$

***Note extra su file del docente**.*

3.7.1 Inverso del Secondo Teorema di Shannon

Si cerca di dimostrare anche **l'inverso del secondo teorema di Shannon**, mettendo nel canale più informazione di quella che è trasmissibile dal canale. Si arriva a dire che, forzando il canale, la probabilità di errore non può arrivare a 0, restando ad un valore comunque positivo, sbagliando quindi a decodificare.

Teorema 12 (Inverso Secondo Teorema di Shannon)**.** *La probabilità d'errore non può essere resa arbitrariamente piccola nel caso in cui si superi la capacità del canale, non potendo usare, con $\varepsilon > 0$:*

$$M = 2^{n\cdot(C+\varepsilon)}$$

con M messaggi validi equiprobabili, che soddisfano quindi i requisiti del secondo teorema di Shannon.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo supponendo di poter violare il vincolo. La quantità di informazione trasmessa, ovvero la mutua informazione del sistema, è minore o uguale, obbligatoriamente, alla capacità di un CBS^n, avendo:

$$H(A) - H(A|B) \leq n \cdot C$$

dato che la capacità del CBS^n è, per definizione, il valore massimo di tale quantità. Si ha quindi che la probabilità di scegliere un messaggio valido è pari a:

$$P_{valido} = \frac{1}{M}$$

e quindi:

$$H(A) = \sum P_{valido} \log(M) = \sum \frac{1}{M} \log(M) = \log(M) = n \cdot (C + \varepsilon)$$

Ma allora si ha che:

$$n \cdot (C + \varepsilon) - n \cdot C = n \cdot \varepsilon \leq H(A|B)$$

e, per la *disuguaglianza di Fano*:

$$n \cdot \varepsilon \leq H(A|B) \leq H(P_E) + P_E \log(M-1)$$

Sapendo ora che:

- $H(P_E) \leq 1$
- $M - 1 < M$
- $\log(M-1) < \log(M)$

Si ha che vale:

$$n\varepsilon \leq 1 + P_E \cdot n(C+\varepsilon)$$

e quindi si ha che:

$$P_E \geq \frac{n \cdot \varepsilon - 1}{n \cdot (C+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon - \frac{1}{n}}{C+\varepsilon}$$

e, avendo:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varepsilon - \frac{1}{n}}{C+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C+\varepsilon} > 0$$

Possiamo dire che P_E non arriva mai a 0 ma ad una quantità, $\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}$, positiva, implicando che la probabilità d'errore non può essere resa arbitrariamente piccola superando la capacità del canale. □

Il secondo teorema comunque ci dice che esiste il codice ma non ci dice come è fatto ma si è visto che usando la codifica casuale spesso si ottiene qualcosa di funzionante. **Ha comunque più valenza teorica che pratica**.

Capitolo 4

Crittografia

Lo scopo della **crittografia** è quello di memorizzare, trasmettere ed elaborare informazioni, in presenza di agenti ostili, che voglio leggere e modificare tali informazioni. La crittografia non è la **steganografia**, che consiste nel nascondere un messaggio dentro dati multimediali, occupandosi quindi di impronte digitali etc. . .
Con la crittografia non nascondo l'esistenza del messaggio ma lo codifico in modo che un esterno non possa farci nulla. Tendenzialmente basta la crittografia.
La crittografia è quindi una codifica, che si aggiunge alla codifica di sorgente e alla codifica di canale, che limita la comprensione del contenuto al mittente e al destinatario.
Ormai la crittografia è una scienza che comprende tante tematiche. Si hanno quindi anche questioni di **complessità computazionale**, per cifrare e decifrare (mittente e ricevente devono metterci pochissimo a cifrare e decifrare mentre gli altri migliaia di anni). Si fruttano anche la **teoria dei numeri** e l'**algebra**, con monoidi, campi, anelli etc. . .
Le applicazioni della crittografia variano dallo storage ai DRM, dalle criptovalute alla homomophic encryption, ovvero computazione fatta su dati cifrati, dal cloud computing alla trasmissione sicura di dati sensibili e al secure secret sharing, dove ogni partecipante ha una parte del segreto e servono almeno k partecipanti per ricostruirlo, con meno partecipanti non si ha nemmeno una vaga idea dello stesso.
Lo schema standard sono **Alice** e **Bob** che si scambiano un messaggio e **Eve** che cerca di intercettare il messaggio, "origliando". Alice e Bob comunicano su un canale pubblico. Eve può leggere e/o scrivere sul canale, nel caso semplice solo leggere. Mandare il messaggio msg in chiaro, in plain text, viene sicuramente intercettato. Alice quindi codifica il messaggio ma anche così facendo, senza ulteriori specifiche, Bob non sa come leggere il messaggio.

Bisogna quindi far dipendere la codifica da una chiave k conosciuta solo da Alice e Bob. Alice calcola il c, ciphertext, come il risultato della cifratura con k e lo spedisce a Bob. Bob quindi, conoscendo la chiave può riottenere il messaggio originale, tramite una funzione $msg = D_k(c)$. Eve non sapendo k non può fare nulla: $??? = D_?(c)$. Per Bob quindi decifrare è facile per Eve quasi impossibile.
In realtà la crittografia, che prevede lo studio e la progettazione di crittosistemi sicuri, era chiamata **criptologia**. La **crittoanalisi** studia invece come "rompere" i crittosistemi, portando ad uno studio "evolutivo" dei sistemi. Quindi sia crittografia che crittoanalisi sono importanti, anche perché Eve potrebbe essere la "parte buona", come la polizia che intercetta i terroristi. Servono quindi entrambi gli aspetti.
La criptologia era spesso definita l'unione di crittografia e crittoanalisi.
Parlando dell'**attaccante** Eve bisogna stabilire delle assunzioni, dando un modello. Si ha quindi che:

- se Eve non può né leggere né scrivere il canale è sicuro. È una situazione non realistica, avendo che normalmente si comunica via radio attraverso l'aria o via cavo
- se Eve può leggere ma non scrivere si hanno solo **attacchi passivi**, ovvero leggere i messaggi e trarne vantaggio, ed è la situazione più comune. Non si hanno **impersonificazioni**, ovvero far finta di essere uno dei due estremi della comunicazione, far finta di essere Bob o Alice
- se Eve può scrivere ma non leggere si ha che può disturbare la comunicazione, avendo che ogni canale ha, come visto, una capacità massima e se la superiamo, per il secondo teorema di Shannon, provochiamo errori di decodifica. Eve può quindi cercare di saturare il canale ma non riesce a trarre vantaggio dal messaggio, non potendolo leggere
- se Eve può leggere e scrivere si ha che può fare **attacchi attivi** e **impersonificazioni**. È la situazione ovviamente più pericolosa

Si ha che:

- Alice vuole mandare il plaintext m
- Alice codifica m tramite una funzione $E(\cdot)$, ottenendo un ciphertext, $c = E(m)$
- Alice spedisce c

- Bob decodifica c tramite $D(\cdot)$, $m = D(c)$

Alice e Bob devono quindi accordarsi prima sulle due funzioni, magari, a sua volta, in un canale non sicuro. Le due funzioni E e D devono essere mantenute segrete. Alice e Bob, più precisamente, si accordano sull'algoritmo di cifratura e di conseguenza di decifratura. Già alla fine del 1800 Kerkhoff enuncia il suo principio:

mantenere segrete le funzioni è difficile mentre mantenere segreta una piccola informazione come la chiave è più semplice.

L'algoritmo quindi può anche essere pubblico ma senza la chiave non te ne fai nulla. Inoltre cambiare chiave è più semplice che cambiare algoritmo.
Nella modernità gli algoritmi sono spesso opensource, garantendo ancora più sicurezza tramite la community che lavora sull'algoritmo, evidenziando falle e problematiche (cosa che garantisce anche una certa visibilità).
Le chiavi sono piccole, ad esempio 128, 192 o 256 bit per AES. Sono quindi più facili da tenere nascoste rispetto ad intere procedure.
Se Eve scopre la chiave segreta rompe il crittosistema, e ogni messaggio diventa praticamente in chiaro. In tal caso si parla di **rotture totali**. Un'altra situazione è che Eve abbia varie copie c (perché "spia") e m (visto che magari dopo un po' diventa pubblico), venendo a conoscenza magari della relazione tra c e m, si parla in caso di **rottura parziale**. Un messaggio cifrato può restare pubblico per un tot di tempo prima che il rischio di essere decifrato diventi troppo alto. Questo tempo varia a seconda dell'algoritmo, della chiave e dei possibili avversari (se si parla di NSA auguri). Un'altra variabile nel discorso è quanto il messaggio deve rimanere effettivamente segreto. Si ha inoltre una serie di assunzioni non dimostrate e uno potrebbe trovare un modo per risolvere problemi che si credono difficili. Un'altro aspetto è la **legge di Moore**, avendo che le macchine con cui si decifra evolvono e si potenziano ogni circa 18 mesi. Si potrebbero anche avere nuovi algoritmi etc... e magari un'informazione sicura ora non lo sarà tra 100 anni, quando magari si avranno computer quantistici a pieno regime (e quindi serviranno altri algoritmi di cifratura). Spesso si usano due algoritmi in modo che, a medio termine, se un algoritmo viene rotto si usa l'altro.

Definizione 17. *Definiamo formalmente un* ***crittosistema*** *come una quintupla:*

$$(PT, CT, K, E(\cdot), D(\cdot))$$

Dove:

1. *PT, spazio dei plaintext, ovvero lo spazio di tutti i possibili testi in chiaro. Solitamente sono stringhe binarie quindi è un insieme $\{0,1\}^*$ o comunque un certo Σ^* (nei cifrari storici e basta)*

2. *CT, spazio dei ciphertext, mi piacerebbe fosse anch'esso* $\{0,1\}^*$
3. *K, spazio delle chiavi, detto* ***keyspace****, ovvero i possibili valori che può assumere la chiave segreta. Il keyspace non deve essere troppo piccolo perché l'attaccante potrebbe usare il bruteforce*
4. *funzione di cifratura* $E : PT \times K \rightarrow CT$
5. *funzione di decifratura* $D : CT \times K \rightarrow PT$

Spesso si indicano $E_k(\cdot)$ anziché $E(\cdot, k)$ ed equivalente per D.
Scegliendo $k \in K$ scelgo una coppia E_k D_k.
Si noti che:

$$CT = \cup_{k \in K} E_k(PT)$$

Si ha che:

$$\forall m \forall k,\ D_k(E_k(m)) = m$$

Anche se non è vero in assoluto. Nei crittosistemi simmetrici si usa la stessa chiave per cifrare e decifrare, anche se in realtà si usa, per decifrare, una chiave ***ottenibile*** *(e non per forza la stessa) facilmente da quella usata per cifrare.* Nell'equazione quindi si assume che la chiave sia proprio la stessa.
Si ha che $\forall m$ e $\forall k$ $c = E_k(m)$ deve essere facile da computare ma deve essere (estremamente) difficile trovare m conoscendo solo $c = E_k(m)$. Deve essere facile computare m conoscendo c e k ma deve essere (estremamente) difficile trovare K sapendo solo $c = E_k(m)$ e m.

Facile e (estremamente) difficile sono in termini di complessità computazionale (computati o meno in tempo polinomiale da una DTM). Per altri modelli uso la **TM probabilistica** ma mai la NDTM, perché risolve in tempo polinomiale problemi che in pratica non sappiamo realmente risolvere in tempo polinomiale.

Una macchina che effettua un attacco bruteforce capisce di aver trovato la giusta chiave a seconda di vari aspetti. Dipende da cosa viene cifrato. Ad esempio parlando di file lo si capisce guardando i primi byte, i metadati, e se sono consistenti con il formato che ci si aspetta si è arrivati alla giusta decodifica. Se si parla di un semplice file di testo o si guarda se ci sono parole riconoscibili tramite un dizionario o guardare l'entropia del messaggio ottenuto, visto che i messaggi in linguaggio naturale sono molto ridondanti, avendo quindi ridondanza bassa. Se la decifratura non va a buon fine ottengo un risultato pseudo casuale, simile al risultato di una cifratura. L'entropia

basta anche solo di un pezzo.
Fare i controlli dopo una cifratura non è un grosso problema, sono calcoli veloci. Quindi aumentando lo spazio delle chiavi si aumenta la complessità, visto che il singolo controllo non è difficile.

4.1 Cifrari Storici

Partiamo con qualche accenno storico per capire il discorso.

4.1.1 Cifrario di Cesare

Tra **cifrari storici** abbiamo il **cifrario di Cesare**, che è un crittosistema simmetrico molto debole (ma in un periodo dove ben pochi sapevano anche solo leggere andava più che bene). Il messaggio, si narra, era scritto sulla testa di uno schiavo dopo averlo rasato, aspettando che poi crescessero i capelli prima di mandarlo al destinatario. Si hanno:

- $\Sigma = \{A, B, \ldots, Z\}$
- $PT = CT = \Sigma^*$
- $K = \{1, 2, \ldots, 25\}$
- ogni lettera è cifrata e decifrata indipendentemente

Nella cifratura, fissata k, si ottiene c avanzando di k posizioni ogni lettera nell'alfabeto. Per decifrare si "torna indietro" di k posizioni sull'alfabeto, eventualmente iniziando da capo, in modo circolare. Per questo $k = 0$ non ha senso e si parte da $k = 1$.
Avanzare di 25 posizioni equivale a tornare indietro di una. Il problema è quindi il keyspace piccolissimo (e Olivio disse che Cesare usasse sempre $k = 3$).
Il cifrario di Cesare è un esempio di **crittosistema per sostituzione monoalfabetica**, in quanto ogni lettera, fissato k, è sempre sostituita con la stessa (e anche questo è un problema di sicurezza).
Si hanno altre caratteristiche interessanti:

- decifrare con k equivale a cifrare con $26 - k$
- $D_k E_k = E_0 D_0$
- posso riordinare passi di cifratura e decifratura ottenere lo stesso risultato

4.1.2 Crittosistema di Hill

Un altro sistema storico è il **crittosistema di Hill**. In questo caso non si ha più sostituzione monoalfabetica e fa uso dell'algebra lineare. Resta comunque poco sicuro evidenziando una "bad practice", ovvero fa tutto tramite operazioni lineari. È un crittosistema simmetrico con la chiave di decifratura che è la matrice inversa di quella di cifratura (non uso la stessa chiave quindi). Fare l'inversa di una matrice è un **problema facile** e quindi è comunque un crittosistema simmetrico.
Si hanno come chiavi i numeri da 0 a 25 che rappresentano le lettere dell'alfabeto (la a è 0 etc...). Ogni operazione è fatta in mod 26. Si sceglie un intero $d \geq 2$ e si cifrano blocchi di d lettere. Si cifra un blocco alla volta e non una lettera alla volta. La chiave di cifratura è una matrice quadrata M, con valori da 0 a 25, tale che, se $\det(M) \neq 0$ allora la matrice è invertibile e l'inversa ha valori tra 0 e 25. Ad esempio:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \to M^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$$

Per vedere se la matrice è invertibile si guarda il determinante.
La chiave per decifrare non è quindi la chiave per cifrare ma si ottiene facilmente da essa.
I d numeri (che rappresentano le lettere) si mettono un vettore e si sceglie quindi la matrice che funge da chiave per cifrare.
Si avrà che $PT = CT$. Divido il testo m in l blocchi P_i di d lettere e se la lunghezza di m non è un multiplo di d si aggiungono a m lettere fittizie che siano riconoscibili come tali (anche se questa cosa può anche aiutare l'attaccante).
Si avrà quindi:

$$m = P_1 P_2 \dots P_l$$

Si ha quindi che ogni blocco viene cifrato a parte:

$$C_i = M \cdot P_i, \ \ \forall i = 1, 2, \dots, l$$

Moltiplicando la matrice per il vettore ottengo un altro vettore, coi numeri che corrispondono le lettere del blocco cifrate.
e infine si concatenano i C_i per ottenere il testo cifrato:

$$c = C_1 C_2 \dots C_l$$

Esempio 23. *Si ha* $m = HELP$ *e* $d = 2$. *Come chiavi uso:*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \to M^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$$

Si hanno quindi:

$$P_1 = \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Ma allora (ricordando le operazioni mod 26*):*

$$C_1 = M \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_2 = M \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$c = C_1 C_2 = HIAT$$

Vediamo quindi se questo crittosistema è sicuro. Supponiamo che Eve sa o scopre quanto valga d (magari provandone tante, non è una cosa costosa computazionalmente) ma non sa quanto vale M. Suppongo che veda passare c e che scopra m, magari perché dopo un tot di tempo m diventi pubblico o perché ha fatto attività di intelligence. A questo punto Eve conosce anche i blocchi e i vettori corrispondenti a m. Si ha quindi un semplice sistema di equazioni e se è fortunata ottenendo una matrice invertibile allora può riottenere la chiave M tramite semplici operazioni algebriche. Questo attacco è ancora più semplice se Eve può scegliere il testo in chiaro, qualora l'algoritmo di cifratura sia pubblico.
Se ottiene una matrice non invertibile si ha che ha ottenuto alcuni blocchi dipendenti ma comunque potrebbe ricostruire una parte di matrice e, prima o poi, magari scoprendo un altro pezzo del testo in chiaro, può scoprire l'intera chiave M.
Il grosso problema è quindi che la cifratura è un'operazione lineare, essendo fatta moltiplicando una matrice per un vettore. Si è quindi visto come un crittosistema con operazioni lineari sia da evitare.

4.1.3 Crittosistema di Playfair

Nel 1854 si è pensato al **crittosistema di Playfair** che nella versione base prevede addirittura una chiave fissa, ovvero una matrice 5×5 di lettere (non potendo cifrare la j visto che in inglese si hanno 26 lettere). Il testo è diviso in blocchi di due lettere ma non posso avere blocchi con due lettere uguali all'interno.

Si ha che la chiave è:

$$k = \begin{bmatrix} s & y & d & w & z \\ r & i & p & u & l \\ h & c & a & x & f \\ t & n & o & g & e \\ b & k & m & q & v \end{bmatrix}$$

Lo studio viene poi fatto in base a come sono le due lettere nella matrice, se nella stessa riga/colonna muovendosi ciclicamente nella riga e nella colonna (prendendo le due lettere a destra/sotto). Se non sono nella stessa riga/colonna si identifica il sottorettangolo con le due lettere come estremi prendendo poi gli altri due estremi. La decifratura si fa con le operazioni nell'ordine inverso.
Il problema grave è che la chiave è sempre la stessa. Per costruire altre chiavi si parte da una frase, si tolgono le ripetizioni e si completa la sequenza ottenuta con le lettere mancanti, in ordine alfabetico. Questo comporta un inizio spesso di senso compiuto e una fine composta spesso dalle ultime lettere dell'alfabeto (per il modo in cui la matrice viene creata a partire da una frase, all'inizio la frase non viene quasi toccata ma alla fine si aggiungono le ultime lettere dell'alfabeto, spesso poco frequenti).

Esempio 24. *Parto da:*

$$course\ on\ cryptography$$

rimuovo le ripetizioni:

$$coursenyptgah$$

completo con le lettere mancanti tranne "j":

$$coursenyptgahbdfiklmqvwxz$$

Avrei la matrice:

$$k = \begin{bmatrix} c & o & u & r & s \\ e & n & y & p & t \\ g & a & h & b & d \\ f & i & k & l & m \\ q & v & q & x & z \end{bmatrix}$$

Ottenendo qualcosa di facile da analizzare.

È un sistema quindi polialfabetico ma le sostituzioni dei blocchi sono sempre le stesse.

4.1.4 Cifrario di Vigenère

In realtà, nel 1586, fu creato il **cifrario di Vigenère**, che è stato ritenuto sicuro per secoli.
Funziona circa come il cifrario di Cesare ma diventa abbastanza robusto in quanto la chiave cambia dopo ogni cifratura di ogni lettera del plain. Per cifrare e decifrare si usa una tabella contenente tutte le possibili cifrature di Cesare. In altri termini si ha una tabella quadrata di righe e colonne pari al numero delle lettere dell'alfabeto. La prima riga è nell'ordine giusto, la secondo ruotata di 1 (si parte da "b" e si arriva ad "a ") e così via.
Come chiave si sceglie una parola che viene ripetuta fino a ottenere la stessa lunghezza del testo in chiaro.
Si prende la coppia (m_i, k_i) e si usano queste come coordinate (la prima colonna e la prima riga sono l'alfabeto in ordine coretto e si usano come coordinate) per prendere una lettera dalla tabella sopra costruita. Per decifrare si fa l'ordine opposto, partendo da (c_i, k_i), sfruttando la colonna che inizia con c_i cercando la cella contente k_i per ottenere la coordinata sulle righe.
Questo sistema è stato considerato sicuro al 100% per secoli.
Si ha quindi che la i-esima lettera di m è cifrata con il cifrario Cesare dove la chiave è l'i-esima lettera di k. Se la lunghezza di k è l (prima delle ripetizione) allora la lettera di m in posizione i, $i + l$, $i + 2 \cdot l$ etc... sono cifrate sempre con lo stesso carattere di k, quindi con la stessa chiave. Suppongo però di conoscere la lunghezza della chiave e scrivo il testo cifrato in una matrice, di k colonne, in modo che i caratteri cifrati dallo stesso carattere sono sulla stessa colonna. Posso quindi fare un'analisi delle frequenze su ogni colonna e trovare la chiave di ogni colonna. Si rompe quindi il crittosistema anche se il numero di possibili chiavi di per n lettere è 26^n (già solo per $n = 5$ parliamo di $26^5 = 11881376$) essendo quindi un numero abbastanza grande per rendere infattibile un bruteforce (a meno di usare un computer, cosa non fattibile fino a qualche decennio fa). Bisogna comunque sapere la lunghezza della chiave.
Nel 1860 Kasiski dice che se la chiave è lunga n allora potrebbe capitare, se m ha certe regolarità, che la stessa parola potrebbe venire cifrata con la stessa sequenza di chiavi. Si ottengono così, nel ciphertext, ripetizioni lunghe n di lettere (anche se comunque potrebbe essere un caso). Si può quindi pensare che la chiave sia lunga quanto un divisore della distanza tra queste ripetizioni (e per senso logico si estraggono un paio di valori possibili). Si può quindi passare all'analisi delle frequenze essendo comunque risolto facilmente, in certi casi, lo step di trovare la lunghezza della chiave.
Può convenire, in questo caso, fare sovracifrature, ovvero cifrare i testi cifrati etc...

4.1.5 Hardware per Cifrari Storici

Fino alla prima guerra mondiale anche crittosistemi deboli andavano bene causa analfabetismo. Il crittosistema veniva fatto a mano, si cifrava a mano e si trasmetteva in qualche modo. Non si potevano quindi fare troppe operazioni, dovendo farlo a mano e spesso in guerra. Inoltre essendo fatto da un umano doveva essere semplice per ridurre errori umani, che dovevano seguire le istruzioni per cifrare.
In tempo di pace, all'inizio del 1900 si sono diffuse macchine meccaniche di calcolo (prima enormi e poi sempre più piccole grazie alla corrente elettrica). Si è quindi automatizzata la cifratura permettendo crittosistemi arbitrariamente complessi (non essendoci più l'umano) con centinaia di operazioni anche perché le macchine vengono usate anche per la crittoanalisi. Tali macchine vengono create con obiettivi pacifici per usi aziendali (per segreti aziendali, per la Borsa etc...) e non bellici. Il mondo però aziendale ha sdegnato questi macchinari che sono stati "rispolverati" in ambito bellico, soprattutto durante la seconda guerra mondiale.
Tali macchinari utilizzano dei rotori (in sequenza il precedente al termine fa scattare il successivo etc...). Ogni rotore è diviso in celle e ogni cella contiene una lettera. Ogni rotore effettua una sostituzione monoalfabetica e ogni lettera di m è cifrata usando tutti i rotori. La chiave è rappresentata quindi dalla posizione dei rotori. Ogni volta che si cifra una lettera il rotore più veloce scatta cambiando chiave. Con 26 lettere dopo 26^3 lettere si ripresenta una ripetizione per la stessa lettera, rompendo ogni analisi statistica. Il metodo per inserire il messaggio deve comunque essere semplice. Si deve anche avere un modo comodo per vedere il messaggio cifrato.
Si passa quindi da macchine meccaniche a macchine elettro-meccaniche, con collegamenti elettrici (26, uno per lettera) nei rotori, avendo che ogni rotore implementa una permutazione fissata, cambiando sempre una lettera in un'altra. Ad ogni rotazione cambia la coppia di lettere, ogni volta si ha quindi una permutazione diversa.
Immagini utili su slide.
Si fa quindi una sostituzione polialfabetica con chiavi lunghissime, avendo che la chiave iniziale è la posizione causale dei rotori all'inizio, da cui si ottengono le varie chiavi derivate, dopo 26^n posizioni per n rotori. Ogni analisi statistica è destinata a fallire.
La **macchina Enigma** è ancora più complessa. Grande poco più di una macchina da scrivere ha gli stessi tasti, in modo che si possa inserire facilmente m. Si hanno di base 3 rotori (ma poi sono aumentati), con per di più possibilità di cambiarli con altri rotori. Si sceglieva la posizione iniziale dei rotori e dopo ogni lettera si accendeva una lampadina corrispondente alla

lettera cifrata. Faceva parte della chiave iniziale anche uno **scambiatore**, che costituiva una ulteriore permutazione fissa (**immagini su slide**). La cifratura faceva inoltre due giri sui rotori. La macchina andava a batteria e durava un'intera giornata.
Decifrare a mano era letteralmente impossibile. I polacchi hanno iniziato per primi a lavorare a come funzionassero le macchine Enigma per capire come intercettare i nazisti. Anche gli inglesi le hanno studiate, capendo come annullare l'effetto degli scambiatori, che per di più obbligavano una lettera a non essere mai cifrata con se stessa.
Non si poteva comunque lavorare a mano e quindi Alan Turing costruì i macchinari per decifrare. Tali macchinari erano delle **bombe logiche** e facevano attacchi bruteforce (facendo molto casino a livello di rumore sonoro per di più) tentando più chiavi in contemporanea, sapendo testo in chiaro e testo cifrato. Se la chiave non andava bene scattava alla seguente producendo appunto un suono simile al ticchettio di una bomba.
In merito si torna al discorso di quanto tempo può restare cifrato un messaggio e avendo dietro gli Alleati che pagavano per costruire macchine per decifrare tale tempo era alla fine poco.
C'era anche il macchinario detto **Colossus**, con la stessa potenza di un Pentium 4, dedicato solo a studiare il keyspace.

4.1.6 Crittoanalisi per Crittosistemi Storici

Si possono in generale avere quattro scenari di attacco, in ordine di vantaggio crescente per Eve:

1. Eve conosce solo c e vuole ottenere m. È una situazione tanto complicata per l'attaccante quanto rara. Si parla di **cryptotext only**

2. Eve conosce alcune coppie c_i, m_i. Eve quindi studia i nuovi c che arrivano e cerca di calcolare il corrispondente m. Si parla di **known plaintext**

3. Eve può scegliere i testi in chiaro e computare i corrispondenti c. Eve quindi cerca di computare m all'arrivo di un nuovo c. Durante la seconda guerra mondiale succedeva quando i tedeschi usavano per un giorno sempre la stessa chiave. È, modernamente, lo scenario classico della crittografia a chiave pubblica e si parla di **chosen plaintext**

4. Eve può decifrare ogni testo, scelto in modo adattivo, per un certo periodo di tempo. A questo Eve può più facilmente scoprire m all'arrivo di un c. Si parla di **chosen ciphertext**

Si hanno quindi, in una piccola *tassonometria* dei sistemi:

- crittosistemi a chiave pubblica
- crittosistemi simmetrici che usano due operazioni fondamentali:
    1. **trasposizione**, usando la chiave segreta come permutazione, all'aumentare della lunghezza dei blocchi permutati possono essere sicuri ma aumenta anche la complessità di calcolo. Si fa una sorta di anagramma. Questi crittosistemi non sono tendenzialmente sicuri
    2. **sostituzione**, come in Cesare. A loro volta si parla di sostituzioni **monoalfabetiche** o **polialfabetiche**, avendo che una stessa lettera può essere cifrata in modo diverso. Quest'ultima differenza è comunque molto relativa all'alfabeto in uso (si pensi ad Hill che diventa monoalfabetico nell'alfabeto dei blocchi, un blocco uguale diventa sempre lo stesso altro blocco). Monoalfabetici non sono sicuri ma nemmeno polialfabetici a meno di sostituzioni complesse

  Quindi un crittosistema simmetrico è una applicazione sequenziale di trasposizioni e sostituzioni a seconda di una chiave

Il crittosistema deve essere sicuro ma anche "semplice" da usare per l'utente. In un crittosistema per sostituzione monoalfabetico non si ha sicurezza in quanto non si nascondono le proprietà statistiche delle lettere del testo in chiaro in linguaggio naturale (in inglese, ad esempio, la lettera "e" compare più spesso delle altre etc...). Mi basterebbe quindi, statisticamente, sfruttare tali percentuali, cercando la lettera più frequente nel ciphertext per supporre poi che sia la "e" etc... Si hanno inoltre coppie (ma anche sulle terne) di lettere ad alta frequenza e questo rendere ancora più debole il crittosistema. Per tutte queste statistiche si hanno tabelle dedicate. Si può cercare di falsare questi dati scrivendo testi su misura (con frasi non convenzionali, ovviamente l'assenza di spazi etc...) ma è abbastanza difficile ottenere un risultato accettabile, se non impossibile (bastano pochi tentativi per capire la corrispondenza tra caratteri o tuple di caratteri). Questo succede appunto perché anche cambiando la lettera non cambiano le frequenze della lingua

sottostante (e anche se questa non si conosce non sono così tante da rendere difficile andare a tentativi, inoltre lingue simili hanno percentuali simili per i caratteri). Si può cercare di rendere complicata la lingua usando lingue complesse e poco usate ma anche questa operazione è difficile abbia successo (un esempio di uso erano gli americani nella seconda guerra mondiale che usavano l'indiano Navajo)
Per risolvere il problema si sono usate varie possibilità. Ad esempio inserire lettere extra rispetto al testo per falsare le frequenze, in modo che ogni lettera abbia una frequenza simile alle altre.
Una tecnica che funziona molto bene è quella delle **omofone**. Si supponga in uso l'alfabeto inglese. Sappiamo che "e" è la lettera più frequente. Supponiamo quindi di usare un alfabeto $\Gamma = \{0, \dots, 99\}$ e se una lettera appare il 12% delle volte uso 12 numeri da Γ e ogni volta che ne vedo una scelgo uno di questi 12 numeri a caso. Si ottiene quindi una **cifratura randomizzata**. La scelta può anche essere fatta con cura per appiattire le frequenze delle omofone. Con le omofone la crittoanalisi diventa complessa.
Se ogni volta scelgo a caso uno degli omofoni significa che lo stesso testo, cifrato due volte in tempi diversi, porta a due ciphertext diversi. Lo stesso testo in chiaro ha quindi sempre in ciphertext diverso ma questo non ha problemi in fase di decifratura, nel momento in cui conosco le omofone. La decifratura resta deterministica ma la cifratura diventa comunque più robusta.

4.2 Crittosistemi Standard

Nei tempi moderni, in ambito bancario, si è cercato ad un modo sicuro per trasportare tra banche i registri con le cifre rappresentati i soldi. Ovviamente tali registri devono essere sicuri.
Fino agli anni settanta ogni banca usava il proprio crittosistema, venduti da aziende con annesso hardware. Se due banche dovevano comunicare dovevano scegliere lo stesso.
Si inizia a pensare ad un crittosistema standard buono per usi civili, come quelli bancari, ma anche non così buono per fini militari. Parte una "gara" per fare questo crittosistema standard. Negli USA c'era IBM che nel 1977 sviluppa **DES**, grazie ad un gruppo di ricerca tra cui Feistel. All'inizio il crittosistema creato fu **Lucifer**, che venne però considerato eccessivo, rallentando inutilmente onerosi i calcoli per l'hardware dell'epoca (oltre alla volontà di indebolirlo per scopi civili da parte del governo). L'NSA aveva avuto da dire anche sulle **s-box** di DES, ovvero le parti non lineari, in quanto a conoscenza di sistemi non pubblici in grado di romperle. DES usa chiavi a 56 bit, che a breve sarebbero diventate poche.

Si fa quindi una nuova "gara" che viene vinta da Daeman e Rijmen che creano **AES**, con chiave da 128, 192 e 256 bit. AES verrà rotto dai computer quantistici, è solo questione di tempo. Abbandoneremo quindi molti crittosistemi attuali ma se ne hanno altri che resistono ai computer quantistici.

4.2.1 DES

Non chiesti all'orale i dettagli, su slide ci sono le matrici e le varie tabelle.
La chiave è lunga 56 bit avendo quindi un keyspace di 2^{56}, che ora come ora sono pochi. Questi 56 bit hanno un bit di parità ogni 7, in modo che ogni byte sia dispari, che è un pasticcio inutile. Sono quindi 56 bit più 8 di parità, che sono dipendenti.
DES fa iterazioni con una *round function* su blocchi di 64 bit di m per ottenere un c di 54 bit. Ad ogni iterazione usa una chiave derivata diversa calcolata dai 56 bit della chiave iniziale. Si ha che il calcolo delle chiavi derivate è:

- si riceve il pacchetto di 64 bit di m
- applico la permutazione iniziale, accedendo ai singoli bit della chiave e ai singoli bit di m. La permutazione è una matrice 8×8
- le prime quattro righe le chiamo C_0 e sono 28 bit e le altre quattro D_0
- calcolo da C_{n-1} e D_{n-1}, per $1 \leq n \leq 16$, i C_n e i D_n, applicando due rotazioni verso sinistra a C_{n-1} e D_{n-1} (**esempio su slide**)
- si fa una **selezione permutata** per C_n e D_n per $1 \leq n \leq 16$, chiamando K_n il risultato. Si hanno quindi 16 chiavi derivate. Ogni K_i ha 48 bit (matrice 8×6)

Per la cifratura (che si ricorda avere chiave di 56 bit):

- si divide m in blocchi di 64 bit che viene cifrato separatamente. Ogni blocco cifrato lo chiamo w
- a partire da w si applica una permutazione iniziale, ovvero una matrice 8×8, chiamando L_0 e R_0 le prime e le seconde 4 righe (ciascuno è di 32 bit), avendo che $w = L_0R_0$. Si usano i nomi L e R perché sono a sinistra e destra della struttura di Feistel

- calcolo da L_{n-1} e R_{n-1}, per $1 \leq n \leq 16$, i L_n e i R_n tramite:

$$L_n = R_{n-1}$$

$$R_n = L_{n-1} \oplus f(R_{n_1}, K_n)$$

  Questi due conti sono detti **round function** e si usa, nel secondo, una chiave derivata. La funzione f prende in input un input di 32 bit e uno, la chiave, di 48 bit e restituisce un risultato a 32 bit

- c si ottiene applicando l'inversa della permutazione iniziale al blocco $R_{16}L_{16}$

Quindi la cifratura è un'iterazione in cui si applicano le permutazioni usando i vari principi di confusione etc. . . di Shannon.
Si ha quindi una **cifratura a blocchi**.
La cifratura era computazionalmente pensata per essere fatta su hardware specifico.
Si noti che la permutazione iniziale della fase di cifratura non aggiunge alcuna sicurezza al crittosistema, in quanto la tabella della permutazione iniziale è fissa (**tabella presente nelle slide**). In AES vedremo che si userà la chiave anche per la prima e l'ultima permutazione.
Per decifrare:

- preso c, di 64 bit, si applica la permutazione iniziale ottenendo $L_{16}R_{16}$

- si ricostruiscono L_0 e R_0, iterativamente tramite:

$$R_{n-1} = L_n$$

$$L_{n-1} = R_n \oplus f(L_n, k_n)$$

  per risalire la struttura di Feistel. Queste due equazioni sono l'inversa della round function. Le K_n ovviamente le applico a partire dalla 16 fino alla 0.
  Chiamo $w' = L_0R_0$

- applicando w' all'inversa della permutazione iniziale si ottiene w

Vediamo ora meglio al funzione f. Si ha:

- **input:** un blocco L_n di 32 bit e una chiave/blocco di 48 bit K_n

- **output:** un blocco di 32 bit

Si procede così:

- si prende L_n e lo si espande a 48 bit usando come permutazione una matrice 8×6 con numeri ripetuti
- su questo blocco si fa uno xor bit a bit con K_n. Chiamo B il risultato, di 48 bit
- divido B in 8 blocchi di 6 bit. Ogni blocco viene ridotto a 4 bit, B', usando una tabella s-box s_i. Per B_1 produco B'_1 con s_1 etc.... Tali s_i sono fisse. Per fare ciò si prendono il primo e l'ultimo bit di B, che quindi insieme sono un $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. I 4 bit centrali sono un numero $y \in \{0, \dots, 15\}$. Si ha che x e y sono riga e colonna che useremo in s_i. Quindi B'_i è il numero espresso in binario del valore contenuto in s_i alla riga x e la colonna y.
  Esempio su slide.
  A tale b' si applica un'ulteriore permutazione prima di restituire il risultato

Quest'ultima parte è la parte *non lineare*, in quanto si usano matrici di sostituzione (le s-box), dove le sostituzioni non sono lineari. Le s-box sono fisse e sono la parte cruciale. Inizialmente IBM aveva proposto alcune tabelle ma l'NSA, a cui IBM ha chiesto consulenza, ha fatto sostituire tali tabelle, senza che l'NSA disse il perché. Si temeva che ci fosse dell'interesse un questa modifica, viste le modalità della stessa, ma in realtà si è scoperto che NSA non aveva secondi fini. Quelle nuove tabelle non erano *backdoor* ed erano più sicure nei confronti di nuovi attacchi, la crittoanalisi lineare e la crittoanalisi differenziale, rispetto alle tabelle iniziali (probabilmente l'NSA già lo sapeva, 20 anni prima). Ovviamente sono tutte supposizioni.
Vediamo quindi le proprietà del DES.
Tra i pro:

- è veloce usando hardware dedicato per prendere i singoli bit. Le operazioni sono veloci e le matrici sono fissate (cosa che permette un accesso ancora più veloce). Si usano addirittura delle **lookup table**, fissate, con tutti i valori pre-calcolabili
- la crittoanalisi di crittosistemi deve lavorare su sistemi non lineari complessi, risoluzione dei quali tendenzialmente è un problema NP-complete. Si è provato a che a semplificare tutte le equazioni ma non si sono raggiunti risultati
- grazie a NSA il DES resiste a crittoanalisi lineare e differenziale

Tra i contro, motivi per i quali non è più sicuro:

- la chiave è lunga solo 56 bit
- si può costruire hardware specifico che lavori sul keyspace di 2^{56} bit. Tali macchine sono dette *DES Cracking Machine*. Tale macchina parallela, con 1800 processori, trovava nel 1998 la chiave in circa due giorni. Ai giorni nostri si ha addirittura hardware programmabile a livello consumer
- l'hardware dedicato a rompere DES, secondo diverse stime, non era così costoso, a fine anni '70 era sui 20 milioni di dollari, a fine anni '90 comunque 250000 dollari (a causa della legge di Moore). Rompere il crittosistema non costava più dei guadagni in caso di rottura in diversi casi

A fine anni '90 si è capito che DES non andasse più bene. A metà anni '90 parte una competizione per cambiare sistema ma questa richiede anni. Nel frattempo si è usato **triple-DES (*3DES*)** come alternativa a DES. In 3DES si usano due chiavi k_1 e k_2 da 56 bit ciascuna e si procede così:

- si cifra w (il blocco in chiaro) con k_1, ottenendo c_1
- si decifra c_1 con k_2 ottenendo c_2
- si cifra c_2 con k_1, ottenendo c

Usando quindi la **cifratura EDE (*encryption-decryption-encryption*)**. Questo sistema è compatibile con l'hardware certificato per DES. Quindi certificare 3DES non era complicato, dovendo chiamare DES 3 volte con due chiavi.
Per 3DES c'era anche la versione con 3 chiavi.

4.2.2 AES

Nella competizione i sistemi non open non furono accettati, questo perché gli esperti devono studiarne la sicurezza.
La competizione fu vinta da Rijndael (letto come se fosse "rain doll"), un sistema creato da due Belgi, Daeman e Rijmen (da qui il nome del sistema). Rijndael è quindi il nuovo standard, detto **AES**, a partire dal 2002.
Il sistema cifra blocchi da 128 bit e si hanno chiavi tipicamente di 128, 192 e 256 bit (AES-128, AES-192, AES-256). Si potrebbero usare altre chiavi.
A differenza di DES lavora su byte e non sui bit essendo quindi più efficiente e in grado di lavorare su più tipologie di hardware, di vario prezzo.

L'implementazione software è molto semplice. Nello standard sono descritti i tradeoff tra dimensione della memoria e efficienza dell'algoritmo, usando anche qui delle lookup table.
Studiamo solo AES-128 ma le altre versioni sono quasi identiche, al più della generazione delle chiavi derivate e il numero di iterazioni durante la cifratura.
L'algoritmo non accede ai singoli bit e organizza i 16 byte in una matrice 4×4 da leggere per colonne.
All'inizio la matrice contiene i 16 byte del blocco plaintext w (prima colonna da w_0 a w_3, seconda da w_4 a w_7 etc...) e alla fine quelli di c. Tale matrice è detta **matrice di stato**.
Le chiavi derivate vengono chiamate **round key**. In generale, per la cifratura:

- si prende w e lo si mette nella matrice di stato
- si fa uno xor tra la matrice di stato e la round key
- si fanno 9 round in cui:
  - si fa la sostituzione dei byte della matrice di stato con una s-box, operazione detta *SubBytes*. È l'unica parte non lineare ed è veramente "ridotta all'osso". È una trasformazione invertibile e si opera su ogni byte della matrice e si sostituisce ogni byte con sempre la stessa s-box, fissata nello standard. Tale s-box è una matrice 16×16 che permette sostituzioni di bytes. Tale s-box è facilmente calcolabile, infatti preso il byte b la sostituzione è in realtà un semplice conto. Se $b \neq 0$ metto $b = b^{-1}$. Quindi il risultato è $A \cdot b + c$, con A matrice fissata di bit. Ma questa è una operazione lineare. La parte non lineare è in $b = b^{-1}$. Posso rappresentare il byte $b = b_7 \dots b_0$ come vettore di bit, come per $A \cdot b + c$, ma anche come $GF(2^8)$, ovvero un **campo di Galois**, quindi come un polinomio in x, dove i b_i sono i coefficienti (b_0 è il termine noto). Fare l'inverso è trovare il polinomio che moltiplicato per quello che rappresenta b da come risultato 00000001. Tutto questo avviene "modulo" un polinomio fissato irriducibile. Si divide il polinomio in analisi per quello fissato e si ottiene un quoziente e un resto. Tale resto è un polinomio di grado inferiore a quello di quello fissato. Si usa quindi un polinomio fissato di grado 8. In pratica volendo

potrei fare i conti anziché usare la s-box ma questo ha pochissimi casi d'uso

   - si ruotano le righe, operazione detta *ShiftRows*. In questa operazione si ruotano verso a sinistra le righe della matrice. Si ruota di i posizioni per la i-esima riga (quindi la prima resta uguale, avendo $i = 0$)
   - si fanno operazioni sulle colonne, operazioni dette *MixColumns*. In questa operazione si mettono i byte della colonna e si moltiplicano per una matrice 4×4, fissata anch'essa nello standard. Il risultato è la nuova colonna. Tale conto è facile con hardware a 32 bit e in caso di hardware inferiore bisogna iterare più volte il conto
   - si applica la *addRoundKey*, ovvero lo xor bitwise con la chiave derivata, come per DES. Su una macchina a 32 bit lo xor viene facile in 4 mosse, facendo lo xor di 4 byte per volta. Se si hanno meno bit devo farlo in più mosse.

- si fa un ultimo round senza *MixColumns*
- lo stato ora raggiunto è c

In generale, nei vari passaggi, quando si parla di moltiplicazioni si ha che esse sono fatte sui bytes. Quando si parla di somme si parla di xor. Lavorando con $GF(2^8)$ si ha infatti a che fare con un campo, con somma e prodotto..
Passiamo alla generazione delle chiavi derivate.
Per AES-128 dobbiamo generare 11 chiavi, avendo "11 step" di esecuzione. Ogni chiave è di 16 byte. L'algoritmo è pensato per architetture a 32 bit quindi con word da 4 byte ma ovviamente può essere fatto con architetture di bit inferiori, ripensando il calcolo. 11 chiavi da word di 4 byte comportano che servono 44 byte che vengono salvati in un array $w[0..43]$. In input l'algoritmo prende la chiave da 16 bytes e la mette nell'array $key[0..15]$. Si usa poi un array di costanti *Rcon* che presenta un certa regolarità (**vedere slide**).
In generale si ha:

- un ciclo for che calcolo da $w[0]$ a $w[3]$. Le prime 4 word corrispondono alla chiave
- un ciclo per gli altri valori di w. Gli altri valori di w si calcolano a partire dal precedente in modo lineare con uno xor. La parte non lineare viene ottenuta dal fatto che una volta su 4 si fa una piccola modifica, facendo una rotazione a sinistra (di una posizione tramite `RotWord`) e facendo una sostituzione

Algorithm 3 Algoritmo di generazione delle chiavi derivate

function $\textsc{GenerateKey}(key, Rcon)$
  for $i = 0$ **to** 3 **do**
    $w[i] = (key[4i], key[4i+1], key[4i+2], key[4i+3])$
  for $i = 4$ **to** 43 **do**
    $temp = w[i-1]$
    if $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ **then**
      $temp = SubWord(RotWord(temp)) \oplus Rcon\left[\frac{i}{4}\right]$
    $w[i] = w[i-4] \oplus temp$
  return $(w[0], \ldots, w[43])$

Passiamo quindi alla decifratura.
In questa fase si applicano all'inverso delle operazioni della cifratura, eseguite anche in ordine inverso. Si hanno quindi, in ordine:

- lo stato iniziale è il testo cifrato
- si fa una `AddRoundKey`
- da round che va da 9 a 1 si fanno:
  - `InvShiftRows`, che ruota a destra di i posizioni per l'i-esima riga (che in realtà è uguale a fare ulteriori rotazioni a sinistra)
  - `InvSubBytes`, che usa l'inversa della trasformazione `SubBytes`, che nella realtà si riduce all'uso dell'inversa della s-box presente nello standard
  - `AddRoundKey`, che è l'inversa di se stessa facendo lo xor bit a bit (per cui non ho una `InvAddRoundKey`)
  - `InvMixColumns`, che è l'inverso del mapping fatto da `MixColumn`, moltiplicando per l'inversa della matrice standard usata nell'operazione standard
- si eseguono ancora una volta `InvShiftRows`, `InvSubBytes` e `AddRoundKey`
- si pone w come lo stato raggiunto

Fino ad ora AES ha resistito a tutti gli attacchi noti. Versioni ridotte di AES sono state rotte ma lo standard no. Questo nonostante la s-box sia l'unica parte non lineare. In AES si adotta la **wide trail strategy** come fondamento teorico, dove si dispongono sotto diagramma le operazioni fatte, e si ha che servirebbero troppi tentativi per fare crittoanalisi lineare o differenziale su AES. Quindi nonostante la minima parte lineare è resistente a tali attacchi.

4.2.3 Modi di Operazioni

I primi **modi di operazioni** sono stati descritti per la prima volta con DES ma possono essere applicati a tutti i cifrari.
Lo scenario è che si ha una sequenza di testi in chiaro $m_1, m_2, \ldots$, una chiave iniziale k e una sequenza di testi cifrati da produrre $c_1, c_2, \ldots$. Si hanno vari modi per farlo:

- **ECB**, che deriva dal nome *Electronic CodeBook* che è il modo più veloce e meno sicuro. Si prende m_1 e lo si cifra in c_1 con k, poi prendo m_2 e lo cifro con k e così via. Uso sempre la stessa chiave cifrando in modo indipendente. Se il canale è rumoroso tale indipendenza consente di perdere solo i blocchi cifrati mandati durante la fase di rumore e non gli altri, essendo indipendenti. Un altro aspetto positivo e che posso cifrare in parallelo. Di contro se cifro lo stesso messaggio in chiaro con la stessa chiave mi esce sempre lo stesso testo cifrato e questo è un grave limite se si devono cifrare molte copie dello stesso messaggio. Uso E_k per cifrare e D_k per decifrare

- **CBC**, che deriva da *Cipher Block Chaining*, dove il testo in chiaro m_1 viene disturbato da un certo c_0 scelto a priori. Prodotto c_1 esso sarà usato per "disturbare", tramite uno xor, la cifratura di m_2 e così via. Per ognuno si usa comunque la stessa k:

  $$c_1 = E_k(c_0 \oplus m_1)$$

  $$c_2 = E_k(c_1 \oplus m_2)$$

  $$\ldots$$

  Nel dettaglio per c_0 si usa un valore di inizializzazione che non è considerato parte della chiave e sarebbe meglio cambiasse ad ogni cifratura. Alice e Bob devono accordarsi anche su c_0.
  CBC è molto più sicuro di ECB. Provare tutte le combinazioni per risalire al risultato dello xor è troppo complesso, rendendo sicuro il sistema. Un difetto di CBC, ma in generale di tutti i

sistemi che fanno chaining, è che se il ricevente si perde un blocco cifrato causa rumore si perde ogni cifratura successiva, visto che la decifratura parte da c_0 e c_1 per m_1 per poi andare a catena su tutti gli altri (usando c_1 e c_2 per m_2 etc...). CBC va usato quindi su canali affidabili ed è solo ad uso seriale e non parallelo. Uso E_k per cifrare e D_k per decifrare

- **OFB**, che deriva da *Output FeedBack*, sfrutta l'idea per cui l'output è abbastanza causale da poter essere usato come numero pseudocasuale. Si semplifica al massimo il processo di cifratura, decidendo in modo causale quali bit negare usando lo xor e ottenendo il testo cifrato:
$$c_i = (m_i \oplus z_i)$$
con z_i "chiave" di un keystream, dove:
$$z_i = E_k(z_{i-1})$$
In pratica le z_i sono circa dei numeri pseudocasuali.
Come vantaggio si ha che lo xor è implementata in ogni processore e la parte più pesante è la generazione del keystream (cosa che può essere fatto però prima di quando servono, generandone un po' a priori). Sarebbe meglio non riusare le stesse chiavi più volte (anche perché scoperta z_i si potrebbe risalire a tutti i z_i successivi). Il vantaggio è che il rumore rovina solo una singola decifratura visto che dipende solo da z_i, essendo il keystream quello che non deve essere perso (keystream che si ha in locale). Si usa quindi in canali molto rumorose (sonde spaziali etc...). Questo metodo è comunque poco usato e tra i problemi si ha la perdita di sincronizzazione tra Alice e Bob sulla chiave z_i da usare, cosa che comporta seri problemi. Si ha però l'attacco *bit flipping* dove Eve altera il messaggio cifrato, danneggiando la decifratura che si basa sullo xor, danneggiando in pratica anche il testo in chiaro. Si noti che non si usa D_k

- **CFB**, che deriva da *Cipher FeedBack*, dove si uniscono OFB e CBC. Si ha quindi:
$$z_i = E_k(c_{i-1})$$
$$c_i = m_i \oplus z_i$$
Con c_0 scelto a priori.
Avendo che le chiavi del keystream vengono calcolate dal messaggio cifrato precedente. Nella decifratura si procede al contrario

partendo da c_0 e c_i per m_1 etc.... Si hanno quindi i contro del chaining visti sopra in caso di rumore mentre come pro si ha che l'ultimo blocco può essere usato come verifica che il messaggio non sia alternato, visto che dipende da tutti i precedenti, verificando l'integrità usandolo come *Message Authentication Code*.
Si hanno anche varianti come **s-bit CFB** dove si ha anche una rotazione di s bit, solitamente $s = 8$ pari 1 byte (pensandolo quasi come un cifrario a blocchi) dopo l'uso di E_k. Anche CFB e varianti sono poco usati e funzionano solo in modo seriale e non parallelo. Si noti che non si usa D_k

- **CTR**, che deriva da *Counter Mode*. Proposto per il DES si basa sull'idea che si genera un keystream usando un contatore, inizializzato a $cont_0$:

  $$z_i = E_k(cont_0 + i)$$

  Per poi fare:

  $$c_i = m_i \oplus z_i$$

  Anche qui per decifrare si usano c_i e la chiave incrementata di i per m_i.
  Anche qui si ha il problema di OFB non dovendo perdere la sincronizzazione sul valore del contatore. CTR poò essere usato in parallelo. Si noti che non si usa D_k

Si segnala che se un crittosistema funziona bene posso usare l'output come generatore di numeri pseudocasuali, grazie alle operazioni svolte per ottenere il testo cifrato.
Tutti questi sistemi usano un crittosistema come *black box*.

4.2.4 Cifrari a Blocchi e a Flusso

Per ora si sono visti ai **cifrari a blocco**, DES e AES, dove si divide m in blocchi (dovendo in caso aggiungere caratteri fittizi per avere la costruzione di blocchi, facendo padding, con valori pseudocasuali ma riconoscibili) e si cifra ogni blocco.
Coi **cifrari a flusso** si lavora sulla cifratura di grandi dati, bit a bit o byte a byte. Serve quindi qualcosa di semplice per cifrare e decifrare e la cosa spesso si traduce col fare un semplice xor. Si ha quindi una semplice cifratura con xor mentre lo sforzo computazionale è nella costruzione della chiave generata. Due esempi di cifrari a flusso sono **Vigenere** e **One time Pad**.

Un discorso del genere è simile a quello fatto con OFB (che però usava un cifrario a blocchi), che quindi può essere visto come cifrario a flusso.
I cifrari a blocchi sono comunque più usati e sono ispirati alle **reti di permutazione e sostituzione (*Substitution-Permutation Networks, SPN*)** che applicano i principi di confusione e diffusione di Shannon (che ha teorizzato le SPN). La struttura di Feistel può essere vista come una variante delle SPN.

4.2.4.1 Principi di Confusione e Diffusione

I **principi di confusione e diffusione** di Shannon sono stati introdotti negli anni '40 con lo scopo di rendere l'analisi statistica dei testi cifrati molto complessa, rendendoli non correlati al testo in chiaro.
Con la **diffusione** la struttura statistica del testo cifratura viene distribuita su tutto il testo, in modo che ogni simbolo ha effetto su molti simboli. Ogni simbolo è quindi determinato da molti simboli. Questa si ottiene con una permutazione seguita da una funzione non lineare.
La **confusione** comporta che modifiche del testo in chiaro e della chiave dovrebbero portare a modifiche imprevedibili al testo cifrato. Questa cosa si ottiene con una sostituzione complessa (le s-box).
Questi principi si applicano ad ogni round e si applicano in modo incrementale all'output ottenuto allo step prima, ottenendo un **effetto valanga**. Alla fine si ottiene una correlazione minima e un piccolo cambiamento di m o k produce modifiche significative in c (per questo posso pensare ad un crittosistema come un generatore di numeri pseudocasuali).

4.2.4.2 Substitution-Permutation Networks

Parliamo quindi delle **Substitution-Permutation Networks (*SPN*)**.
Si hanno due permutazioni, avendo che w e c sono di $l \cdot m$ bits:

- $\pi_S : \{0,1\}^l \rightarrow \{0,1\}^l$, sono le sostituzioni con le s-box praticamente. Questa è la *substitution*
- $\pi_P : \{1,\dots,l \cdot m\} \rightarrow \{1,\dots,l \cdot m\}$. Questa è la *permutation*

Si ha che w può essere visto come una concatenazione di m blocchi $w_{(0)}||\dots||w_{(m)}$, ciascuno di l bits. Data una chiave $k \in \{0,1\}^{l \cdot m}$ si calcolano le chiavi derivate:

$$k^1, k^2, \dots, k^{N_r+1}$$

Calcolo quindi una chiave in più del numero dei round N_r.
Avendo che la rete fa N_r rounds, dove in ognuno, tranne l'ultimo, si fanno m sostituzioni, dopo aver fatto lo xor con la chiave derivata, con π_S e una permutazione con π_P. Il tutto complica la vita dell'attaccante anche se si evitano complicazioni non necessarie. Applicare come prima e ultima operazione lo xor, come si vede nello pseudocodice, è detto **whitening**.

Algorithm 4 Algoritmo per calcolo cifratura con SPN

```
function SPN(w, π_S, π_P, (k^1, k^2, ..., k^{N_r+1}))
    w^0 = w
    for r = 1 to N_r − 1 do
        u^r ← w^{r−1} ⊕ k^r
        for i = 1 to m do
            v^r_(i) = π_S(u^r_(i))
            w^r = (v^r_{π_P(1)}, ... v^r_{π_P(l·m)})
    u^{N_r} = w^{N_r−1} ⊕ k^{N_r}
    for i = 1 to m do
        v^{N_r}_(i) = π_S(u^{N_r}_(i))
    c = v^{N_r} ⊕ k^{N_r+1}
```

4.2.4.3 Struttura di Feistel

Possiamo quindi parlare della **struttura di Feistel**.
Feistel cercava una cifratura ovviamente reversibile. Si usa un **decoder** da n a 2^n bit e poi un **encoder** da 2^n a n bit, per cifrare il testo in chiaro di n bit. Tra il decoder e l'encoder si ha una struttura/permutazione che permette una sostituzione monoalfabetica di 2^n simboli, ovviamente questa non è fisicamente realizzabile con un circuito elettronico.
Si spezza quindi la permutazione in blocchi realizzabili in hardware che può essere usato in serie o parallelo, con un'idea simile ad una SPN. Feistel per approssimare la cifratura usa quindi piccoli moduli, alternando sostituzioni e permutazioni come detto da Shannon.
Si prende quindi un testo in chiaro m, di $2 \cdot w$ bit, e la chiave k, da cui genero le k^i, con $i \in [1, n]$, chiavi derivate. Divido m in L_0 e R_0 che poi vengono trasformati in L_iR_i, con $i \in [1, n]$ (si noti la natura del DES).
Si ha quindi la sostituzione, con F round function come nel DES (o meglio quella del DES è come questa):

$$L_i = L_{i-1} \oplus F(R_{i-1}, k^i)$$

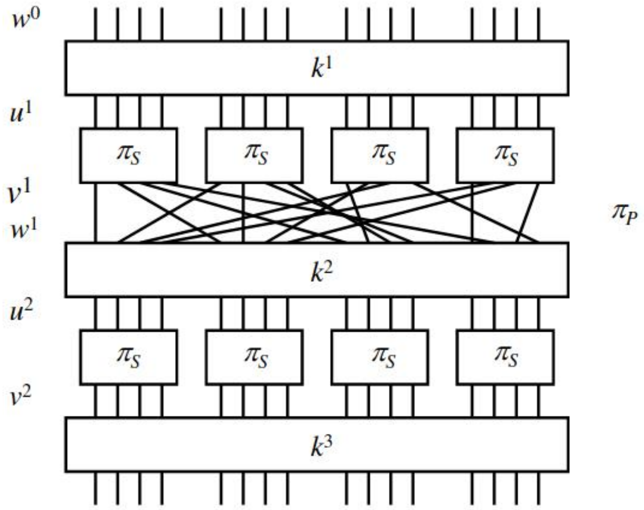


Figura 4.1: Schema di una SPN. Fino al blocco k^2 escluso si ha il primo e unico round.

per poi la permutazione:

$$L_i = R_{i-1}$$

$$R_i = L_{i-1} \oplus F(R_{i-1}, k^i)$$

Dopo tutti i round si cancella l'effetto dell'ultima permutazione che non aggiunge sicurezza (in alternativa tale round può essere modificato). Si ottiene infine c
La struttura di Feistel comporta che è più sicuro, ma più lento, all'aumentare della grandezza di chiavi, blocchi, numero di round o all'aumentare della complessità di F o del sistema di generazione di chiavi derivate etc. . . .
La sfida non è solo la sicurezza ma anche l'efficienza.
Per decifrare con la struttura di Feistel applico al contrario le inverse delle operazioni di cifratura. Il diagramma di una struttura di Feisel è simmetrico (per questo annullo l'ultima operazione in fase di cifratura) tra cifratura e decifratura (al più dell'ordine dell'uso delle chiavi). Questa simmetria aiuta lato hardware.

4.2.4.4 Crittoanalisi Lineare

La **crittoanalisi lineare** si basa sull'idea di approssimare la trasformazione da m a c attraverso una funzione lineare. Si ha quindi un'approssimazione parlando di base di funzioni non lineari. Si cercano relazioni statistiche tra bit di m e u^j, livello che precede le ultime applicazioni di s-box. Si procede

a tentativi con lo xor ottenendo combinazioni di bit candidati per l'ultimo livello, vedendo se poi vale la relazione statistica. Si cercano quindi di indovinare alcuni bit della chiave di partenza "risalendo" sulla SPN. Servono tanti tentativi, con tante coppie (c, m) per provare ad indovinare alcuni bit della chiave derivata. Conoscendo delle coppie (c, m) si conoscono i valori dei bit coinvolti di c in questa relazione statistica e lo stesso vale per m. Si cercano quindi le combinazioni della chiave derivata, l'ultima della SPN per intenderci, e si fa lo *xor* delle possibili combinazioni con i bit che si conoscono di c. Si ottengono quindi dei candidati di combinazioni di bit per l'ultimo livello della SPN (nella figura 4.1 chiamato v^2). Si conoscono poi le π_S del crittosistema e quindi ne faccio l'inversione, trovando i candidati per i bit di u^2, sempre nella figura 4.1. Per questi candidati studio la relazione statistica, se vale si è trovato un candidato per quei bit della chiave. Provando per tutte le coppie (c, m) rafforzo la validità di un certo candidato, prendendo poi quelli più validi. Si sono trovati possibili valori di pochi bit dell'ultima chiave derivata. Applico all'inverso l'algoritmo di generazione delle chiavi per cercare di indovinare alcuni bit della chiave di partenza. È tutto molto complesso, soprattutto se la chiave è di tanti bit, e "incerto", con scarse probabilità di successo.
Si applicano teoremi per eventi indipendenti e eventi dipendenti. Si ha un teorema per lo studio delle relazioni statistiche che studia se gli eventi causali sono tra loro indipendenti e tale teorema si usa anche per eventi casuali dipendenti (e se funziona va bene).
Cambiare la chiave di cifratura spesso riduce le chance di questo attacco.
Possiamo quindi parlare della sicurezza del DES.
Per la **crittoanalisi differenziale**, oltre a servire tante coppie (c, m) servono anche tanti m cifrati con la stessa chiave. Si studiano non solo le relazioni statistiche ma proprio lo *xor* tra i testi in chiaro, vedendo come le differenze si propaghino nella SPN. Si fa poi uno studio analogo a quello della crittoanalisi lineare, studiando però relazioni statistiche tra bit di due testi in chiaro e tra due semilavorati della SPN.
Coppersmith, nel 1994, studiando le s-box di DES disse: *nessun bit di output di nessuna s-box dovrebbe essere troppo vicino all'output di una funzione lineare. In particolare, se selezioniamo qualsiasi bit di uscita e qualsiasi sottoinsieme dei sei bit di ingresso, la frazione di ingressi per cui questo bit di uscita è uguale a xor di questi bit di ingresso non dovrebbe essere vicina a 0 o 1, ma piuttosto dovrebbe essere vicina a* $\frac{1}{2}$.
Si hanno anche tipi di attacchi che riguardano le implementazioni dei crittosistemi e non la loro matematica. Sono detti **side channel attack**. Si hanno anche i **timing attack** basati sul fatto che cifrare e decifrare richiede tempo diverso per diversi input. Oppure attaccando sensori al circuito per vedere

quanta corrente serve per lavorare sui vari input. Nel 1999 si è trovato con un timing attack il peso di Hamming sul DES. Ci sono stati timing attack in grado di capire i vari pesi.
Si ha anche un attacco di crittoanalisi lineare cercando di costruire buone approssimazioni per ottenere infine l'ultima chiave. Studiando l'hardware crittografico durante il funzionamento del sistema si possono inoltre aggiungere rumori etc..., magari anche scoprendo debolezze.
Bisogna quindi approfondire le s-box, la parte non lineare dei crittosistemi visti. Per DES erano fatte a mano.
Ci sono in generale 3 modi, dal più vecchio che nuovo:

- prendere s-box grandi e più grandi sono meglio è. Tali s-box vengono poi scelte a caso. Questa soluzione è molto grezza
- scegliere s-box a caso ma facendo test statistici tenendo le migliori. Soluzione migliore ma non ancora soddisfacente
- usare criteri matematici, come misure di non linearità, disuguaglianze per non linearità etc... Questi teoremi mitigano molti degli attacchi citati. AES usa questi criteri, con il discorso della *wide trail strategy*

Parlando dei **cifrari a flusso** si ha che vengono usati quando si hanno tantissimi dati da cifrare, come ad esempio flussi video. La decifratura deve avvenire su device mainstream poco potenti, come magari una TV.
La cifratura deve essere quindi "leggera" e si cifra ogni bit/byte facendo lo xor con la chiave derivata, prodotta da un generatore di numeri casuali, **Pseudo-Random Number Generator (*PRNG*)**. Il PRNG produce la chiave derivata, di un bit/byte, che viene appunto poi usata in xor con il plaintext.
I crittosistemi a flusso sono molto più performanti di quelli a blocchi e sono più brevi da scrivere in codice ma come contro non si possono usare le stesse chiave, in quanto la stessa chiave porta allo stesso messaggio cifrato, indebolendo il sistema, creando relazioni tra testi in chiaro e cifrati. In generale la sicurezza è data dalla qualità del PRNG. In generale:

- la keystream deve avere un grande periodo, per rendere difficile la crittoanalisi. Per questo si riusano "mix" degli stati interni etc...
- la keystream deve approssimare al meglio possibile una sequenza randomica, per non provare ad approssimare One Time Pad
- la chiave/seed del PRNG deve essere lunga almeno 128bit per evitare attacchi bruteforce

Il seed è condiviso da Alice e Bob, in quanto a parità di seed si ha determinismo.
Un cifrario a blocchi in modalità OFB si comporta come un cifrario a flusso.

4.2.4.5 Linear Feedback Shift Registers

Un tema importante sono i **registri a scorrimento**, **Linear Feedback Shift Registers (*LFSR*)**.
Sono stati creati per creare un keystream in modo più veloce di quello di un cifrario a blocchi.
Bisogna generare un keystream $z_1, z_2, \ldots$, potenzialmente infinito ma non periodico. Si parte da n bit k_i. L'idea è quella di fare delle operazioni xor con k_1 e k_2, da prendere a seconda di una certa maschera (se ho associato 0 non lo considero se 1 si), per generare gli altri k_i. Nel dettaglio:

- è dato l'alfabeto $L = \{0, 1\}$ ed è dato $c_0, \ldots c_{m-1} \in \mathbb{Z}_2$, con m costante
- si parte con una sequenze $k_1, \ldots k_m$
- si pone $z_i = k_i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$
- $\forall i \geq 1$ si calcola z_{i+m} usando la ricorrenza lineare di grado m, avendo che z_{i+m} dipende dagli m termini precedenti:

$$z_{i+m} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j Z_{i+j} \bmod 2 = \bigoplus_{j=0}^{m-1} (c_j \wedge z_{i+j})$$

Si ha che scegliere $(k_1, \ldots, k_m)$ tutti uguali a 0 comporta la creazione di sequenze di soli 0 quindi bisogna evitarlo.
Con $m = 4$, ad esempio, posso produrre periodo 15, poco, e quindi il discorso del periodo va approfondito, scegliendo $(c_0, \ldots, c_{m-1})$ in modo che ogni scelta di $(k_1, \ldots, k_m)$ abbia periodo lungo.
Esempio su slide.
Si nota, dal punto di vista della sicurezza, l'uso di equazioni lineare per generare il keystream con LFSR, che quindi vengono usati solo come parte di tool più complessi.
Per la linearità si supponga che Eve conosca $2m$ chiavi derivate, $z_1, \ldots z_{2m}$ e che conosca m. Può capire come sono state calcolate le chiavi della seconda

metà:

$$(z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_{2m}) = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \cdot \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m & z_{m+1} & \cdots & z_{2m-1} \end{bmatrix}$$

e se la matrice fosse invertibile risalirei a $(c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$ e purtroppo "by design", per costruzione, tale matrice è sempre invertibile. Si fa quindi:

$$(c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) = (z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_{2m}) \cdot \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m & z_{m+1} & \cdots & z_{2m-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

4.2.4.6 RC4

RC4 è il cifrario a flusso più sicuro pensato. Creato nel 1987, uno dei primi, dalla RSA. All'inizio però tale cifrario è stato mantenuto segreto. È stato pubblicato in modo anonimo nel 1994 tramite *reverse engineering*.
RC4 è usato in **SSL/TSL** (*Secure Sockets Layer / Transport Layer Security*), usati nello standard della comunicazione web. È stato usato anche in **WEP** (*Wired Equivalent Privacy*), usato nello standard 802.11 (*wireless LANs*).
Come funzionamento si ha la cifratura di un byte alla volta tramite permutazioni casuali, ottenendo un periodo di keystream di 10^{100}. Mediamente richiede 8-16 operazioni macchina per produrre ogni byte di c.
Si usa uno stato S di 256 byte, che, in ogni momento, contiene le permutazioni. Si usa una chiave k, lunga da 1 a 256 bytes, per inizializzare S. Tale chiave non viene poi più usata.
Vediamo l'inizializzazione:

- si mettono in S i numeri da 0 a 255
- si crea un vettore temporaneo T con i numeri da 0 a 255
- si ripete k in T tutte le volte necessarie a riempire T (una sola se k è di 256 bytes). Quindi si ha:

  for $i = 0$ **to** 255 **do**
  $S[i] \leftarrow i$
  $T[i] \leftarrow k[i \bmod \mathit{keylength}]$

- si scambia ogni posizione di S con una posizione determinata da T, tramite una funzione `swap`. Si ha quindi:

$j \leftarrow 0$
for $i = 0$ **to** 255 **do**
$\quad j \leftarrow (j + S[i] + T[i]) \mod 256$
$\quad swap(S[i], S[j])$

L'inizializzazione sono quindi due piccoli cicli for.
Una volta generato S si passa a generare il keystream:

- si parte da $S[0]$ per arrivare a $S[255]$. Una volta finito si riparte da capo (cosa ottenuta tramite il modulo)
- ad ogni iterazione l'elemento $S[i]$ è scambiato, tramite una funzione `swap`, con un altro $S[j]$, con j che dipende dallo stato corrente. Questo aggiunge pseudocasualità
- si sommano, modulo 256, $S[i]$ e $S[j]$ per ottenere la posizione t, facendo quindi accesso indiretto, dell'elemento z generato, con z byte di chiave derivata

Anche per la generazione del keystream si ha quindi un codice piccolo, avendo un ciclo infinito che dura fino a che serve cifrare i bytes.

Per il keystream si ha quindi:

Algorithm 5 Calcolo keystream con RC4

$i \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
while $\top$ **do**
  $i \leftarrow (i+1) \bmod 256$
  $j \leftarrow (j + S[i]) \bmod 256$
  $swap(S[i], S[j])$
  $t \leftarrow (S[i] + S[j]) \bmod 256$
  $z = S[t]$

La cifratura e la decifratura sono semplici:

$$c_i = m_i \oplus z$$

$$m_i = c_i \oplus z$$

Nonostante questo non si conoscono ancora attacchi efficaci data una chiave lunga abbastanza, almeno 128 bit.
L'attacco fatto a WEP nel 2001 dipendeva da come era stato implementato RC4 in WEP e non dall'algoritmo in sé.

4.2.5 Sicurezza di Shannon

Si è usato spesso lo xor bit a bit che garantisce sicurezza ma Shannon si è chiesto se il calcolo della chiave fosse questione di pura potenza di calcolo. Shannon si chiede se esistono crittosistemi sicuri **incondizionatamente**, ovvero a priori rispetto all'hardware disponibile dall'attaccante. Vediamo quindi l'analisi di Shannon.
Si parte dal solito schema con Alice che comunica con Bob, tramite un canale, e con Eve che "ascolta". Formalmente si ha:

- X una variabile casuale con valori nell'insieme dei plaintext PT
- Y una variabile casuale con valori nell'insieme dei testi cifrati CT
- Alice sceglie, casualmente, $x \in PT$, la cifra e ottiene $y \in CT$. Tale y viene spedito a Bob. Eve vede y che per lei è totalmente casuale
- si assume che Alice sceglie x in modo uniforme, per semplicità

- Eve conosce la distribuzione di probabilità su X, ovvero conosce $P(X = x)$
- se Eve legge y può anche conoscere $P(X = x|Y = y)$ (aumenta la possibilità di avere alcuni testi in chiaro etc...)

Shannon dice che il crittosistema è sicuro incondizionatamente se Eve, osservando y, non impara nulla sulla distribuzione di probabilità dei testi in chiaro, ovvero se:

$$P(X = x) = P(X = x|Y = y)$$

Ma questo implica che l'entropia di X è uguale ell'equivocazione:

$$H(X) = H(X|Y)$$

Ma quindi la mutua informazione di sistema è:

$$I(X;Y) = 0$$

e quindi X e Y sono **indipendenti** e Eve non ottiene alcuna informazione da y. Eve vede solo rumore.
Ma per essere indipendenti significa che il canale è completamente rumoroso e y è scelto a caso senza partire da x e quindi sembra assurdo parlando di crittosistemi.

4.2.5.1 OneTimePad e Cifrario di Vernam

Shannon ha invece continuato lo studio e scopre che esiste un crittosistema teorico completamente sicuro anche se con un'approssimazione pratica molto efficace nota dal 1918, ovvero il **cifrario di Vernam**. La nuova versione di tale cifrario viene chiamata **One Time Pad**, avendo che il "taccuino", traducendo Pad, contiene il keystream (e sia Alice che Bob devono avere tale "taccuino" e questo è un problema). La chiave non va riutilizzata, da qui one Time.
Alice cifra con la chiave del suo taccuino e Bob decifra di conseguenza, entrambi distruggendo le pagine del taccuino con le chiavi usate.
La differenza tra One Time Pad e il cifrario di Vernam è che, in quest'ultimo, non si usa una chiave usa e getta ma si può ripetere dopo un periodo molto lungo. L'analisi quindi non è più impossibile ma molto difficile, è una buona approssimazione.
In One Time Pad, si prende la chiave k e si fa lo xor bit a bit. Il più sicuro di tutti fa un'operazione lineare banale:

$$E_k(x) = x \oplus k$$

$$D_k(y) = y \oplus k$$

Il trucco è che la chiave k, lunga quanto il messaggio m, è davvero casuale e non pseudocasuale (in Vernam ovviamente non è possibile la cosa ma la ripetizione dopo un lungo periodo è una buona approssimazione).
Servono tanti bit casuali quanti la lunghezza del messaggio. La produzione di tali bit, in due copie, una per Alice e una per Bob, è estremamente dispendiosa.
Ovviamente prima Alice e Bob devono essersi accordati in modo sicuro sul "taccuino" e anche questo può essere complesso.

Teorema 13. *Tale crittosistema è incondizionatamente sicuro.*

Dimostrazione. Si assumono PT e CT su alfabeti binari.
Si ha la proprietà tale per cui:

$$\forall x, \forall y \ \ \exists k \text{ unico t.c. } E_k(x) = y$$

quindi dati x e y si ha una sola k valida. Si ha anche la proprietà che:

$$\forall y, \forall k \ \ \exists x \text{ t.c. } E_k(x) = y$$

quindi sapendo solo y posso solo sapere che tale messaggio cifrato può derivare da un qualunque x, scegliendo k in modo appropriato.
Si ha quindi che è incondizionatamente sicuro non sapendo come scegliere.
Il tutto salta se la chiave è più corta. Si assume:

$$|k| < |x| = |y|$$

nel dettaglio:

$$|k| = |x| - 1 = n - 1$$

Avendo $|k| < |x|$ dobbiamo usare nuovamente alcuni bit di k.
Quando Eve non ha ancora visto c sa che Alice può scegliere qualunque x con probabilità $P(X = x) = \frac{1}{2^n}$, avendo che, osservato y, Eve si chiede i valori di k usati per ottenere x e vede che tali valori di k sono al più 2^{n-1}. Quindi si ha:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{1}{2^{n-1}} \neq P(X = x)$$

venendo meno la definizione di sicurezza incondizionata. □

In One Time Pad non si ha un seed di generazione quindi mentre in Vernam serve.
One Time Pad è stato davvero usato tra Casa Bianca e Cremlino durante la

Guerra Fredda.
In ogni caso One Time Pad necessita di una quantità di chiavi molto grande, che vanno scambiate prima in modo protetto. One Time Pad si usa solo con canali con larghezza di banda molto bassa, quando la sicurezza e la privacy sono la prima preoccupazione.

4.2.6 Numeri Pseudocasuali

Si è visto come molti algoritmi si basano su bit casuali.
Sorgenti casuali sono "rare" in natura e produrre hardware dedicato è costoso. Si usano quindi generatori pseudocasuali, i già citati PRNG, che partono da un seed iniziale, causale e più piccolo possibile, per generare numeri che sembrano casuali ad un osservatore esterno, che non sa nemmeno dire se una sequenza è causale o pseudocasuale. Nessun algoritmo, eseguibile in tempo polinomiale sui una TM deterministica, può capire se una sequenza è causale o pseudocasuale in tempo polinomiale. Non si ha quindi una soluzione "facile" e la cosa non è in dubbio. L'attaccante però potrebbe avere una **TM probabilistica**, che può spesso risolvere problemi "difficili", semplificando la soluzione del problema.
Dobbiamo quindi generare sequenze di bit pseudocasuali indistinguibili da quella casuali avendo a disposizione una TM probabilistica.
Il seed lo si vuole il più corto possibile ma poi si genera una sequenza di bit più lunga, parlando di "allungare il seed", anche se comunque si tratta solo di una serie di conti a partire dal seed, unica fonte di casualità.

Definizione 18. *Definiamo il concetto di **indistinguibilità**, dal punto di vista computazionale, come il fatto che l'osservatore non ha abbastanza potenza computazionale per capire se la stringa in analisi sia casuale o meno. La perfezione si raggiungerebbe qualora il problema di distinguere o meno una sequenza causale fosse un problema intrattabile, non essendoci un algoritmo efficiente, ovvero polinomiale su una TM, dedicato.*

La potenza computazionale dell'avversario comunque non è per forza limitata, come detto, a macchine deterministiche ma potrebbe usare anche approcci probabilistici.

Definizione 19. *Una **Probabilistic Turing Machine (PTM)** è una TM tale che, nell'applicazione della funzione di transizione tra stati, si hanno più stati possibili prossimi, come nelle NDTM, però la scelta cade solo su uno in modo casuale. Si ha quindi una sorta di secondo nastro con bit casuali, inizializzato all'inizio della computazione ogni volta in modo indipendente dalle precedenti computazioni, che mi dice quale stato successivo scegliere.*

Per molti problemi non si sa se esiste un algoritmo deterministico polinomiale ma potrebbe esserci un algoritmo probabilistico con probabilità d'errore minore di $\frac{1}{2}$ e quindi basta fare più esecuzioni in parallelo (ma anche in serie a seconda dell'hardware), esecuzioni che sono indipendenti tra loro per il concetto di PTM. Ogni esecuzione a sua volta avrà probabilità d'errore minore di $\frac{1}{2}$. La probabilità che tutte restituiscano una risposta sbagliata si ottiene moltiplicando le varie probabilità, essendo tutte le esecuzioni indipendenti, ottenendo che è minore di $\frac{1}{2^n}$, con n numero di esecuzioni. Possiamo dire che $\frac{1}{2^n}$ è una quantità davvero piccola come probabilità, anche con n non troppo grande (si ricordi la citazione per cui $\frac{1}{2^{4096}}$ è stata definita come la probabilità che un tornado ricostruisca un aereo distrutto in un campo e che 4096 computazioni non sono così tante).
Si è discusso, nel tempo, del fatto anche un'azione naturale che sembra causale lo è solo per i limiti dell'osservatore.
Nell'aspetto microscopico della natura, parlando di **meccanica quantistica**, dove la casualità gioca un ruolo essenziale, con una particella che, nel momento in cui si trova nel mondo quantistico ha uno su infiniti stati mentre nel mondo macroscopico uno su due. Si ha quindi che *decade* negli stati classici 0 e 1. Ogni volta che faccio un'osservazione si decade ad uno stato classico e questo non è eliminabile, avendo che la **casualità** esista effettivamente in natura.
Supponiamo quindi Eve abbia un PTM con, ovviamente, algoritmi probabilistici.

Definizione 20. *Un **PRNG** è un algoritmo, che può essere eseguito in tempo polinomiale su una TM deterministica, che calcola una funzione:*

$$G : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{l(k)}, \;\; l(k) > k$$

con k numero di bit input.
La funzione è tale che:

- *per ogni algoritmo $D \in PPT$, dove D sta per **distinguisher** e PPT per **Polynomial Probabilistic Time**, eseguito dall'attaccante, tale algoritmo restituisce 0 se pensa che la sequenza non sia casuale, 1 altrimenti. Questi algoritmi possono essere eseguiti in tempo polinomiale su una PTM. Esistono in realtà classi di complessità per le PTM ma non si approfondiscono in questo contesto*
- *vale per tutti i polinomi $p(\cdot)$*
- *vale per tutti gli interi k sufficientemente grandi. Si ragiona quindi in modo asintotico e più grande è k meglio è*

si ha, usando $\leftarrow$ per dire "preso a caso" e chiamando:

- $\alpha = P[x \leftarrow \{0,1\}^k; r \leftarrow G(x) : D(r) = 1]$*, avendo la probabilità, preso a caso x, sequenza di k bit veramente causale, dato in pasto x a G che produce in output $l(k)$ bit assegnati a r, che a sua volta viene dato in pasto al* ***distinguisher*** *che restituisce 1, riconoscendo r come sequenza casuale (sbagliando non essendo causale ma generata da G)*
- $\beta = P[r \leftarrow \{0,1\}^{l(k)}; D(r) = 1]$*, avendo la probabilità che, preso a caso r, sequenza di $l(k)$ bit veramente causale, dato in pasto tale r al* ***distinguisher*** *D che, in tempo probabilistico polinomiale, restituisce 1, riconoscendo r come sequenza casuale (azzeccando, essendo r davvero casuale)*

si ha:

$$|\alpha - \beta| < \frac{1}{p(k)}$$

quindi la distanza tra le distribuzioni di probabilità è minore di un $\frac{1}{p(k)}$, con k però che cresce, avendo che $p(k)$ è in realtà una successione, con $p(\cdot)$ polinomio positivo che assume valori crescenti e quindi $\frac{1}{p(k)}$ decresce al crescere di k. Al crescere di k la distanza tra le due probabilità va a 0 con velocità pari all'inverso del polinomio $p(k)$ (quindi non velocemente come con un esponenziale, fattore che porterebbe a dover "chiedere troppo" al PRNG, dovendo creare sequenze pseudocasuali davvero molto causali). Se il PRNG riesce a portare a poco quella differenza significa che abbiamo un buon algoritmo. Se le due probabilità sono distanti 0 si ha che il ***distinguisher*** *non è in grado di capire se si ha a che fare con una sequenza casuale o meno, dando la stessa risposta sia sulla sequenza generata da G che su quella davvero casuale.*
La distanza tra le due probabilità è quindi la "capacità di barare" di G, la capacità di ingannare qualunque ***distinguisher*** *D.*

4.2.6.1 Linear Congruential Generator

Vediamo quindi un esempio di PRNG, ovvero il **Linear Congruential Generator (*LCG*)**, usato per tanti anni ma ormai riconosciuto come non adatto all'uso in applicazioni etc... mentre non ha mai trovato, fortunatamente, spazio in crittografia.
Proposto nel 1951 da Lehmer è formato solo da equazioni lineari.

Definizione 21. *Definiamo formalmente il LCG.*
Presi accuratamente tre interi a, b e m tali che:

$$0 \leq a, \quad b < m$$

dato un seed intero s tale che:

$$0 \leq s < m$$

si ha il LCG definito come il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_0 = s \\ x_i = (ax_{i-1} + b) \bmod m, \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

La scelta di a, b e m è critica per trovare una sequenza non facile da predire. Questo generatore non allunga la sequenza di bit input ma non è il problema più grave. Il vero problema è che nella sequenza generata si hanno relazioni lineari e quindi se Eve trova quattro valori x_0, x_1, x_2, x_3, prodotti dal PRNG, può calcolare a, b e m, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 \equiv (ax_0 + b) \bmod m \\ x_2 \equiv (ax_1 + b) \bmod m \\ x_3 \equiv (ax_2 + b) \bmod m \end{cases}$$

Immaginando di plottare i valori di questo generatore come punti tridimensionali, si nota che si dispongono come piani, mostrando la linearità e quindi la conseguente debolezza.

4.2.6.2 Costruzione di un PRNG

La definizione di PRNG non ci dice però come teoricamente dovrebbe essere un buon generatore ma non ci dice come calcolarlo effettivamente. Si sono create quindi varie batterie di test per testare i generatori di numeri casuali, anche definiti dal NIST(National Institute of Standard and Technology) degli USA. Tra i test si può vedere quanti zeri e uni ci sono nella sequenza di bit generata, che devono essere circa uniformemente distribuiti. Un altro test è vedere 00, 01, 10 e 11 anch'essi dovrebbero essere circa uniformemente distribuiti e così via aumentando le cifre. Un altro test è plottare tramite coordinate di punti e vedere che si deve avere una distribuzione dei punti uniforme (e si hanno vari test simili riempiendo un rettangolo o la superficie di una sfera). Si verifica non ci siano pattern ripetuti. I vari test appena detti vengono anche fatti prendendo, ad esempio, un bit ogni due etc.... Si hanno potenzialmente infiniti test (e quindi bisogna sceglierne una parte).
Il problema è quindi costruire una funzione G tale che:

$$G : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{l(k)}, \ \ l(k) > k$$

Tale funzione deve essere tale che allunga l'input, pur soddisfacendo i vincoli dati in definizione.
Il primo problema pratico è capire quanto deve essere più lungo l'output. Un secondo problema è capire se bisogna fare una funzione diversa per ogni valore possibile di $l(k)$. In merito al secondo problema fortunatamente non dobbiamo preoccuparci, in quanto, se si ha un PRNG H che allunga di 1 e soddisfa tutti i vincoli della definizione:

$$H : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{k+1}$$

possiamo costruire un altro G, del tipo:

$$G : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{l(k)},\ \ l(k) > k$$

La costruzione avviene in modo iterativo. Preso l'input x_0, di k bit, lo si allunga di quanto si vuole, dandolo in pasto a G. Avendo che anche H, che allunga di 1, prende in input una sequenza di k bit (e quindi posso dargli in pasto x_0) si ha:

- $x_1\sigma_1 = H(x_0)$, avendo che σ_1 è un singolo bit
- $x_2\sigma_2 = H(x_1)$, avendo che σ_2 è un singolo bit
- ...
- $x_{l(k)}\sigma_{l(k)} = H(x_{l(k)-1})$, avendo che $\sigma_{l(k)}$ è un singolo bit

Avendo quindi:

$$x_i \in \{0,1\}^k \text{ e } \sigma_i \in \{0,1\},\ \ \forall i \in \{1, 2, \dots, l(k)\}$$

In output di G si tiene quindi:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l(k)})$$

avendo quindi l'output allungato a $l(k)$ bit.
Questa costruzione è garantita formalmente e matematicamente da un teorema (che non viene visto).
Ma dobbiamo capire come costruire H. Vediamo una costruzione interessante di H, dove si usano le **funzioni one-way**, ovvero funzioni a "senso unico". Una funzione one-way, che poi verranno meglio definite, in modo informale è definibile come una funzione f facile da calcolare ma difficilissima da invertire, è un problema computazionalmente intrattabile, essendo praticamente una *permutazione*. Le **funzioni di hash** sono one-way.

Quindi data f one-way e y, che è detta *impronta*, è difficile calcolare x tale che:

$$f(x) = y$$

Un caso particolare di funzione one-way è una **funzione biunivoca**, che, presi n bit in input, restituiscono una sorta di permutazione di quei bit in output, producendo un'altra sequenza di n bit.
Se si ha che la funzione non è una permutazione, avendo magari dominio più grande del codominio (come nelle funzioni hash) allora posso avere più x che produrrebbero y tramite $f(x)$. Con una funzione one-way è difficile trovare anche uno solo di questi x.
Un altro concetto necessario al calcolo di H è quello di **hard-core bit**.
Se una funzione è difficile da invertire, essendo difficile calcolare x tale che $f(x) = y$, allora sarà difficile trovare i bit che compongono x. Magari non sempre tutti i bit di x sono difficili da trovare, per esempio il bit meno significativo potrebbe essere facile da trovare. I bit difficili da calcolare, che ovviamente non possono essere nessuno, sono detti appunto **hard-core bit**.
Si hanno quindi funzioni one-way e almeno alcuni bit dell'input che sono hard-core.
Vediamo quanti possono essere tali hard-code bit. Non può essere di certo uno solo, perché costruirei due input, con i due valori possibili di quel bit, e calcolo la f e vedo per quale dei due ottengo l'output giusto capendo quindi quale valore assume quel bit (che non è quindi hard-core). Stesso discorso se si suppone siano solo 2, avendo 4 possibili input.
Non posso quindi avere un numero **piccolo e costante** di bit hard-core.
Nemmeno un numero logaritmico sulla lunghezza dell'input andrebbe bene in quanto si potrebbe usare il brute-force. Dato quindi $x \in \{0,1\}^n$ i bit hard-core devono essere più di $\log_2 n$, ad esempio $\frac{n}{4}$, altrimenti possiamo prima calcolare il valore di tutti gli altri bit e poi provare tutte le possibili combinazioni dell'hard-core fino a quando non troviamo la combinazione corretta.
Una quantità maggiore di $\log_2 n$ significa una quantità lineare (o funzioni particolari tra quelle logaritmiche e quelle lineari), come appunto $\frac{n}{4}$, ma non più di lineare avendo che su n bit posso al più avere n hard-core bit. In pratica si ha una certa frazione degli n bit in input.
Bisogna introdurre un'altra definizione, quella di **predicato hard-core**.

Definizione 22. *Si definisce **predicato hard-core** un predicato B che prende in input l'input della funzione e dice qual'è il valore di un hard-core bit.*
Il predicato è facile da calcolare in quanto conosce l'input.
Quindi, data $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ funzione one-way (in particolare una permutazione one-way) che quindi prende n bit in input e restituisce n bit in output, il predicato B, calcolabile in tempo polinomiale da una TM

deterministica, è:

$$B : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

che quindi prende n bit in input e restituisce 1 bit.
B è un predicato hard-core per f (un predicato) se:

$$\forall \textit{ algoritmo } A \in PPT \land \forall \textit{ polinomio } p(\cdot) \textit{ si ha che } \exists n_{A,p} \textit{ t.c}$$

$$\forall n \geq n_{A,p}, P[x \leftarrow \{0,1\}^n; b \leftarrow A(f(x)) : b = B(x)] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$$

Avendo quindi che per ogni algoritmo A eseguibile dall'avversario su una PTM e per ogni polinomio p esiste un numero $n_{A,p}$ (dipendente da A e p) tale per cui per tutti gli n maggiori di quella soglia, avendo quindi un discorso asintotico, vale che si ha una probabilità che è minore di $\frac{1}{2}$ sommata ad una quantità che tende a 0 velocemente quanto l'inverso di un qualunque polinomio passato (quindi non troppo velocemente). Nel dettaglio si parla della probabilità per cui, presa a caso una sequenza x di n bit, calcolata in modo facile computazionalmente $f(x)$, si assegna a b il valore di tale calcolo di $f(x)$ dato in pasto all'algoritmo A dell'avversario. La probabilità che b sia davvero il risultato del predicato hard-core, ovvero $B(x)$, deve essere minore di $\frac{1}{2}+\frac{1}{p(n)}$. L'$\frac{1}{2}$ c'è in quanto si ha a che fare con un evento bernoulliano, avendo due risposte possibili, e quindi l'avversario deve azzeccare con probabilità che non supera $\frac{1}{2}$ per più di una quantità che tende a 0. In altri termini non può azzeccare con probabilità maggior di quella che avrebbe andando a caso, avendo solo due alternative. Quindi se $\frac{1}{p(n)}$ non tende a 0 significa che qualcosa si è capito in merito a come calcolare b.

Avendo definito f one-way e B predicato hard-core, possiamo costruire il PRNG H, con $H : \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}^{k+1}$, in questo modo:

$$H(x) = f(x)||B(x)$$

avendo che x e $f(x)$ sono di k bit mentre $B(x)$ di un bit. La simbologia $||$ indica la concatenazione e quindi $H(x)$ ha $k+1$ bit. Quindi aggiungo un bit difficile da calcolare per l'attaccante ad una sequenza difficile da invertire. L'output di H è quindi difficile da predire (e la cosa è sostenuta da un teorema che non vediamo).
Bisogna capire in pratica che f funzione/permutazione one-way scegliere (avendo poi che B dipende da essa). Questa scelta è molto complessa e per di più non è nemmeno mai stato dimostrato che esistano tali funzioni ma si hanno diverse candidate ma non si ha ancora la dimostrazione matematica. Vediamo quindi un caso speciale, una particolare costruzione, di Blum e Micali.

Dato g un generatore, fissato un numero primo p, di $\mathbb{Z}_p^*$, che è sempre un **gruppo ciclico** (che quindi ha un generatore), e $y = g^z \bmod p$ si ha che il bit più significativo dell'input z, ovvero $msb(z)$, è un predicato hard-core per la **esponenziazione modulare** (è questo che hanno dimostrato Blum e Micali) e quindi possiamo costruire un PRNG dalla esponenziazione modulare (che sarebbe nel dettaglio $y = g^z \bmod p$):

$$H(z) = g^z \bmod p || msb(z)$$

Si ha che $g^z \bmod p$ non solo è una funzione one-way ma anche una permutazione one-way, permettendo di riottenere gli elementi di $\mathbb{Z}_p^*$ in un ordine diverso, un ordine imprevedibile. È una tipica permutazione usata in crittografia.
Ovviamente essendo g un generatore di $\mathbb{Z}_p^*$ si ha che $g \in \mathbb{Z}_p^*$.
Calcolare $g^z \bmod p$ può essere fatto in modo efficiente tramite l'algoritmo **square and multiply** mentre calcolare z partendo da y, g e p è molto difficile, non avendo algoritmi polinomiali rispetto alla dimensione dei valori in memoria, il numero di bit necessari per rappresentare $\mathbb{Z}_p^*$, che è il più **grosso gruppo moltiplicativo** contenuto in $\mathbb{Z}_p$. Si ricorda che gli elementi in $\mathbb{Z}_p^*$ possono assumere valore tra 1 e $p - 1$, non 0, che non ha un inverso essendo un gruppo moltiplicativo. Possiamo quindi dire che la dimensione dei valori in memoria è $\log_2 p$, ovvero il numero di bit necessari a rappresentare p. Riuscire a calcolare z partendo da y, g e p è molto difficile e tale problema è detto **problema del logaritmo discreto**, avendo che calcolare z corrisponde a calcolare $\log_g y$ in un campo finito (da qui discreto). Non si hanno neanche algoritmi probabilistici per il problema del logaritmo discreto ma non si ha alcuna dimostrazione che non esista un algoritmo polinomiale. In base a questa assunzione di complessità sul calcolo del logaritmo discreto si tratta l'esponenziazione modulare come una funzione one-way.
Si conoscono pochissime altre funzioni candidate one-way, ancora meno che siano permutazioni one-way, dovendo poi dimostrare che un certo bit sia hard-core bit per tale funzione/permutazione.
Si ha però un teorema che viene in aiuto in questa situazione, un metodo generale per calcolare, in modo semplice anche se la dimostrazione è molto complessa, degli predicati hard-core associati a permutazioni one-way.
Serve prima una definizione

Definizione 23. *Prese due sequenze di n bit $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ si ha che il prodotto interno modulo 2 tra le sequenze, $\langle x, y \rangle$, è definito tramite:*

$$\langle x, y \rangle =^{def} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \bmod 2 = \bigoplus_{i=1}^{n} (x_i \wedge y_i)$$

Era stato già visto coi registri a scorrimento*.*

Teorema 14 (Teorema di Goldreich–Levin)**.** *Data $f(x)$ una permutazione one-way sull'input x possiamo estendere la permutazione ad una funzione g di due argomenti, x e y, concatenando y al valore di $f(x)$:*

$$g(x, y) = f(x)||y$$

avendo $|x| = |y| = n$.
Una volta fatto questo si ha che la funzione, che è un predicato, $B(x, y)$ definita:

$$B(x, y) =^{def} \langle x, y\rangle$$

è, sempre, un predicato hard-core della funzione g, estensione di una qualunque permutazione one-way f. Si noti che g ottenuta come appena detto è a sua volta una permutazione one-way.

Interessante che Levin sia lo stesso che, in contemporanea a Cook e in modo indipendente, scoprì la NP-completezza.
Partendo quindi da una qualsiasi permutazione one-way f ho perlomeno risolto il problema di trovare il predicato hard-core.
Quindi, per il teorema di Goldreich–Levin, avendo a disposizione una permutazione one-way su $\{0, 1\}^n$ posso costruire il PRNG, che allunga di 1 il numero di bit in ingresso:

$$H : \{0, 1\}^{2n} \to \{0, 1\}^{2n+1}$$

avendo:

$$H(x, y) = g(x, y)||B(x, y) = f(x)||y||\langle x, y\rangle$$

L'unico svantaggio è che il numero di bit di ingresso deve essere pari ma tutte le funzioni booleane usate in crittografia hanno un numero pari di bit. Questo problema è quindi trascurabile. Usando poi la costruzione iterativa vista precedentemente posso costruire un PRNG G, con output lungo quanto voglio, partendo da H.

4.2.6.3 Dimostrazione di un PRNG

Questa costruzione è dimostrata funzionare ed è sorretta da teoremi che non vedremo.
Supponiamo ora di avere un algoritmo G che si sospetta essere un PRNG e vogliamo dimostrare che lo sia effettivamente.
Possiamo sottoporre il test ad una batteria infinita di test ma ovviamente non possono essere infiniti in quanto non potrei dimostrare che li supera tutti.

Anche in questo caso si ha un teorema che ci salva, ad opera, nel 1985, di Andrew Chi-Chih Yao, che anche lui, come spesso per chi studia problemi di crittografia, arriva dal mondo dello studio della complessità computazionale. Yao ha provato l'esistenza di un **test universale**, che libera dall'onere di calcolare le infinite relazioni statistiche in infiniti test.
Partiamo con una definizione.

Definizione 24. *Dato $G : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{l(k)}$ si ha che G è **impredicibile** sse, $\forall i \in \{1, 2, \dots, l(k)\}$, $\forall p(\cdot)$ polinomio e $\forall A \in PPT$ algoritmo, dell'avversario, probabilistico eseguito su una PTM, $\exists k_{A,p}$ tale che, $\forall k \geq k_{A,p}$ (avendo quindi una definizione asintotica):*

$$P[x \leftarrow \{0,1\}^k; (\sigma_1, \dots, \sigma_{l(k)}) = G(x); \hat{\sigma}_i \leftarrow A(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) : \sigma_i = \hat{\sigma}_i] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{p(k)}$$

Quindi si estrae una sequenza casuale x di k bit che viene data in input a G, candidato generatore che allunga a $l(k)$. Per ogni bit diamo in input all'avversario i primi $i-1$ bit prodotti e si studia se A è in grado di individuare il bit successivo. La probabilità di azzeccare tale bit, se si ha che G è valido come PRNG, non deve essere significamene più grande di $\frac{1}{2}$, ovvero della scelta causale avendo 2 scelte per il bit, o 0 o 1. La probabilità deve essere quindi minore uguale di $\frac{1}{2}$ più una quantità che tende a 0 al crescere di k, anche se non troppo velocemente, tendendo a 0 come l'inverso di un polinomio qualunque. Tutto questo deve valere per ogni algoritmo A dell'attaccante.
Informalmente G è impredicibile sse il problema di "indovinare" l'i-esimo bit della sequenza dati i primi $i-1$ bit è un problema computazionalmente intrattabile, dove "indovinare" significa "indovinare significativamente meglio rispetto al semplice lancio di una moneta".

Teorema 15 (Teorema di Yao)**.** *L'algoritmo G è un PRNG sse G è impredicibile.*
*In letteratura questo test universale è anche detto **next bit test**.*

4.2.6.4 Cifratura Ciclica

Finora però è stata vista la teoria, passiamo a vedere come si genera realmente una sequenza casuale di bit.
Nel 1982 Meyer e Matyas proposero uno schema che si basa sull'uso di un crittosistema simmetrico, in cui si fissa una **master key** che è il seme casuale, e si usa il testo in chiaro come "contatore". Si cifra ciclicamente ogni elemento con la chiave e si generano ogni volta nuovi bit, in una sequenza imprevedibile che supera il next bit test. In pratica, come visualizzabile in figura 4.2:

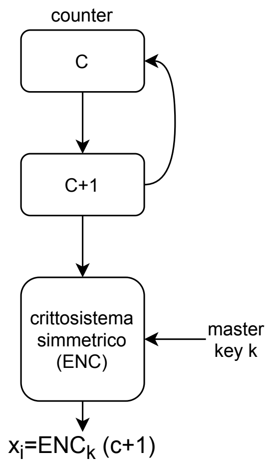


Figura 4.2: Schema di Meyer e Matyas

- si parte dal seed/master key che produce una sequenza di chiavi derivate
- si usa un contatore con periodo mod$n$
- il valore del contatore è usato o come chiave o come plaintext in un crittosistema simmetrico
- ogni volta che si usa il crittosistema simmetrico si incrementa il contatore

Per rafforzare ulteriormente questo schema possiamo usare una sequenza di input più complicata. Anche la modalità operativa OFB di un crittosistema simmetrico può essere usata per generare un keystream che è considerabile come l'output di un algoritmo PRNG.

4.2.6.5 ANSI X9.17

Vediamo ora uno dei più conosciuti PRNG conosciuti in crittografia, ovvero **ANSI X9.17**, che è appunto diventato standard e piene usato in PGP.
ANSI X9.17 usa 3DES ma è generalizzabile ad altro crittosistemi.
In input si hanno 2 elementi:

- DT_i, una rappresentazione a 64bit della data e dell'ora correnti. È aggiornato in ogni blocco pseudocasuale generato
- V_i, un seed a 64bit

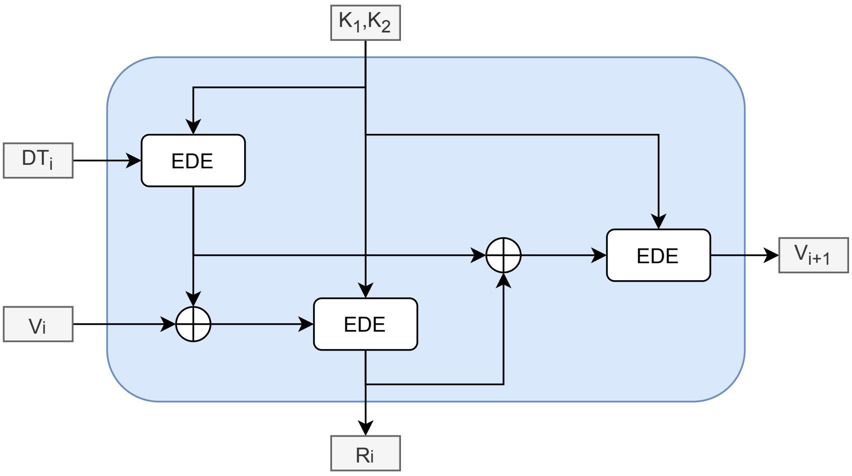
Come chiavi si hanno K_1 e K_2, entrambe di 64bit, anche se DES usa solo 56bit (scartando i bit di parità). Le chiavi sono usate nei tre moduli con 3DES, usato in modalità EDE (nell'ordine usando K_1, K_2, K_1):

$$encryption–decryption–encryption$$

Si hanno quindi due output:

- R_i, che è un blocco causale di 64bit
- V_{i+1} che è il valore aggiornato del seed

Si ha uno schema del tipo:



Si nota che:

$$R_i = EDE_{K_1,K_2}(V_i \oplus EDE_{K_1,K_2}(DT_i))$$

$$V_{i+1} = EDE_{K_1,K_2}(R_i \oplus EDE_{K_1,K_2}(DT_i))$$

Usando 3DES si può quindi che si usa una chiave di 112bit e che che si usano in totale 9 DES per cifrare e decifrare, con DT_i e V_i che cambiano dopo la produzione di ogni singolo valore di output. Usando 9 DES, quindi 9 cifrature, non si hanno performance particolarmente elevate, un generatore di qualità inferiore potrebbe essere più ufficiente. Usando 9 DES ANSI X9.17 è praticamente inviolabile, serve una quantità incredibile di informazioni per comprometterlo, anche perché la crittoanalisi sul singolo DES è comunque difficile, e anche se Eve venisse a sapere R_i non riesce a capire il valore successivo.

4.2.6.6 BBS Generator

Questo generatore viene giusto accennato a lezione.
Nel 1986 è stato poi proposto il **Blum, Blum and Shub (*BBS*) generator**, dai nomi dei tre crittografi che lo hanno studiato.
Questo generatore sfrutta i numeri primi.
Si prendano p e q, primi e grandi tali che:

$$p \equiv q \equiv 3 \mod 4$$

quindi facendo il resto della divisione di entrambi i numeri primi per 4 viene 3.
Sia $n = p \cdot q$ e s casuale tale che $GCD(s, n) = 1$, quindi invertibile modulo n. Si ha quindi che s non è multiplo di p o q.
Si genera quindi una sequenza di bit $B_1, B_2, \dots$ secondo il seguente algoritmo:
Avendo che $B_i = X_i \mod 2$ equivale a $B_i \leftarrow lsb(X_i)$.

Algorithm 6 Algoritmo del Blum, Blum and Shub generator

```
function BBS(s, p, q)
    n ← p · q
    X_0 ← s^2 mod n
    i ← 1
    while ⊤ do
        X_i ← X_{i−1}^2 mod n
        B_i = X_i mod 2
```

Si noti che X_0 è un valore in $\mathbb{Z}_n$, compreso tra 2 e $n - 1$.
La sicurezza si basa sulla difficoltà di fattorizzazione, anch'essa comunque non ancora dimostrata e si può provare che BBS supera il next bit test, non esistendo un algoritmo polinomiale che dati i primi k bit della sequenza di output, $B_i, \dots, B_k$ sia in grado di indovinare il $k+1$ bit, B_{k+1}, con probabilità significativamente maggiore di $\frac{1}{2}$.

4.3 Crittosistemi a Chiave Pubblica

Vediamo ora i **crittosistemi a chiave pubblica (*Public-Key Cryptsystems*)**.
Questi crittosistemi nascono nel 1975 da un problema dei crittosistemi simmetrici: Alice e Bob devono conoscere la stessa chiave segreta k.
La svolta nel 1975 è che l'agreement della chiave viene fatto su un canale pubblico, con paper pubblicato nel 1976.

Nel 1977 nasce RSA, dalle menti di Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, il crittosistema a chiave pubblica più famoso e usato, con paper pubblicato nel 1978.
Il problema finora riscontrato, con Alice e Bob che devono conoscere la stessa chiave segreta k, si materializza qualora non sia possibile usare un canale sicuro per scambiarsi la chiave, cosa abbastanza comune.
Per tutta la seconda metà degli anni sessanta si è studiata la complessità computazionale, studiando quanto sono complicate le operazioni che vengono svolte algoritmicamente, nascendo concetti come NP-completezza etc..., raccolti nel 1978 nel famoso testo di Garey e Johnson. Si studia quindi come alcune operazioni siano facili se si conosce una certa informazione segreta e difficili altrimenti (le funzioni one-way diventano facili da invertire se si conosce tale informazione). Ma resta il problema di Alice e Bob che devono scambiarsi tale informazione segreta, cosa che viene fatta su un canale pubblico dove Eve ascolta.
Si trova anche un modo per gestire efficientemente le chiavi, nel caso in cui Alice debba comunicare con più persone.
L'idea dietro la crittografia a chiave pubblica, idea del 1976/1977 di Diffie e Hellman, è usare algoritmi diversi per cifrare e decifrare, con quello per decifrare che resta segreto mentre quello per cifrare resta pubblico, si rende pubblica la chiave di cifratura. L'attaccante è quindi in una posizione di vantaggio rispetto ai crittosistemi simmetrici, tutti possono cifrare il messaggio ma solo il destinatario può decifrarlo.
Per capire meglio l'idea (e i problemi) vediamo un'analogia. Si supponga che Alice voglia mandare un messaggio a Bob. Tale messaggio viene mandato fisicamente, tramite una scatola chiusa a chiave. Alice dice a Bob che le deve mandare il messaggio e Bob manda la cassetta di sicurezza, con il lucchetto aperto di cui solo lui ha la chiave. Alice scrive il messaggio, lo mette nella cassetta e chiude il lucchetto, che ora solo Bob può riaprire, e lo rispedisce a Bob. Il problema è che Eve può intercettare la scatola aperta e sostituirla, impersonificando sia Alice che Bob a seconda del punto di vista. Eve potrebbe fare quello che vuole con la scatola sostituita, sostituendo il messaggio per Bob. Questo è un problema non risolto.
Alice non può essere sicura che il lucchetto quindi sia di Bob e quindi usa anche un suo lucchetto (e non quello di Bob) ma a questo punto sia Eve che Bob non possono più aprire. Bob quindi chiude anche il suo lucchetto e la rimanda ad Alice che toglie il suo e lo rimanda a Bob, che toglie il suo e legge il messaggio. Quindi sembra che basti mandare più volte il messaggio per risolvere il problema, complicando il protocollo di trasmissione, ma Eve può comunque inserirsi, rimandando a Alice la scatola con entrambi i lucchetti (col secondo suo e non di Bob), facendo una cosa simile anche con Bob per

non destare sospetti. Se Bob ha sospetti deve comunicarlo ad Alice. Eve sta facendo l'attacco **man in the middle**.
Formalizziamo quindi meglio il problema.
Bob sceglie 2 algoritmi/chiavi (gli algoritmi dipendono unicamente dalla chiave quindi posso usare i due termini in modo indistinto):

- E_B per cifrare
- D_B per decifrare

tali che, ovviamente:

$$\forall m \in PT,\ D_B(E_B(m)) = m$$

e devono essere tali per cui deve essere intrattabile ottenere D_B da E_B.
Bob rende pubblico E_B e tiene segreto D_B.
Se Alice vuole spedire m a Bob calcola $E_B(m)$, l'algoritmo è pubblico, e lo manda a Bob, che calcola $D_B(E_B(m)) = m$. Se Eve intercetta $E_B(m)$ deve risolvere un problema intrattabile per ottenere D_B. Il problema è che Alice, se parte di una grande comunità di utenti, deve conoscere tutti gli algoritmi di cifratura e questo è impraticabile, anche perché in caso di sospetti Bob comunica la cosa ad Alice.
Per risolvere il problema sia Alice che Bob hanno i propri algoritmi

- E_A, E_B per cifrare
- D_A, D_B per decifrare

tali che **commutino** gli algoritmi di cifratura e decifratura:

$$\forall m \in PT,\ E_A(E_B(m)) = E_B(E_A(m))$$

$$\forall m \in PT,\ D_A(D_B(m)) = D_B(D_A(m))$$

Ora non è necessario mettere pubblici i due E ma bisogna tenere segreti i due D.
Alice infatti calcola $E_A(m)$ e lo manda a Bob che calcola $E_B(E_A(m))$ e manda il risultato ad alice che calcola $D_A(E_B(E_A(m)))$ e rimanda il risultato a Bob. Bob quindi calcola $D_B(D_A(E_B(E_A(m))))$ ma questo è uguale a $D_A(D_B(E_B(E_A(m))))$ che equivale a $D_A(E_A(m))$ che equivale a m ($D_i(E_i(x))$ praticamente si semplificano).
Alice quindi usa solo E_A e D_A e in caso di sospetto gli basta cambiare questa coppia.
Anche in questo caso Alice seleziona un elemento di una famiglia di coppie di algoritmi di cifratura/decifratura, scegliendo una **chiave pubblica** k_{p_A} e la conseguente **chiave privata** k_{s_A}. Ovviamente si ha che:

- $\forall m \in PT,\ \ D_{k_{s_A}}(E_{k_{p_A}}(m)) = m$
- è intrattabile ottenere k_{s_A} da k_{p_A}
- in generale, l'uso previsto deve essere facile, mentre tutti gli usi imprevisti devono essere molto difficili

Guardando le due versioni del protocollo viste sopra (la prima è quella con il singolo invio e la seconda è quella con il doppio invio):

- nella prima versione k_{p_A} deve essere pubblica
- nella seconda versione k_{p_A} può essere pubblica

In entrambe k_{s_A} deve essere segreta.
Il canale che abbiamo descritto è criptato ma non autenticato. Bisogna capire, quando Alice riceve la chiave pubblica di Bob, come può essere sicura di non aver ricevuto invece la chiave di Eve.
Bisogna ora capire come implementare gli algoritmi di cifratura e decifratura, le "scatole segrete" e come generare le coppie di chiavi, quella pubblica e quella segreta.
Per la prima domanda si usano funzioni one-way, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, come già descritto precedentemente. Alice calcola praticamente $f(m)$ ma diventa difficile anche per Bob, non solo per Eve. Si aggiunge quindi che le funzioni one-way abbiamo una **trapdoor**, avendo che tali funzioni sono difficili da invertire senza conoscere tale trapdoor e facili altrimenti. Bob quindi può calcolare x tale che $f(x) = y$. Tale informazione segreta deve essere comunicata a Bob ma tale informazione viene rimescolata nella trasmissione.

Definizione 25. *Si ha che f, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, è one-way se:*

- *f può essere calcolata in tempo polinomiale da una macchina di Turing deterministica (cioè, è facile da calcolare)*
- *esistono due polinomi, rispetto a n numero di bit necessari a rappresentare l'input x, $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ tali che:*

  $$p(|x|) \leq |f(x)| \leq q(|x|)$$

  avendo che l'output di f non deve essere corto (il valore assoluto qui indica la lunghezza).
- *per ogni algoritmo A dell'avversario, eseguito in tempo polinomiale su una PTM, e per ogni polinomio $p(\cdot)$ esiste un numero*

naturale $n_{A,p}$ che segue lo schema, detto ***negligible trascurable*** *(lo sono anche tutti gli schemi simili già visti):*

$$\forall n \geq n_{A,p} \ P[x \leftarrow \{0,1\}^n; x' \leftarrow A(f(x)) : f(x) = f(x')] \leq \frac{1}{p(n)}$$

Il calcolo è difficile per la f non perché l'input è troppo corto ma per quanto detto nel secondo punto

Si ricorda che queste funzioni one-way non si ha certezza che esistano, non si riesce a dimostrare la loro esistenza. Se si avesse $P = NP$ sicuramente tali funzioni non esisterebbero (perché si risolverebbe polinomialmente lo studio di tutti i possibili alberi di computazione della NDTM per trovare l'inversa). D'altro canto se si dimostrasse l'esistenza di anche solo una funzione one-way si avrebbe $P \neq NP$, questa è la **contronominale** (e non l'inversa) dell'affermazione precedente. Da questa affermazione si coglie il problema di capire se esiste una funzione one-way. Si potrebbe comunque avere $P \neq NP$ senza avere che esista alcuna funzione one-way, avendo comunque che invertire una funzione one-way deve essere "quasi sempre" difficile. Quest'ultima è l'**inversa** della prima affermazione.
In crittografia si lavora inoltre su permutazioni one-way su $\{0,1\}^n$.
Dato che non si sa se $P \neq NP$ o $P = NP$ si assume che esista almeno una funzione one-way.
Un esempio di probabile funzione one-way è l'**esponenziazione modulare**, solitamente modulo p, con p numero primo. Si considera il campo $\mathbb{Z}_p$ e il gruppo moltiplicativo, il più grosso contenuto in $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$.
Si ha che $\mathbb{Z}_p^*$ è un gruppo ciclico:

$$\exists g \in \mathbb{Z}_p^* \text{ t.c. } \mathbb{Z}_p^* = \{g^0, g^1, \dots g^{p-2}\}$$

(avendo che ho $p-1$ elementi ma l'esponente parte da 0 si ha che l'esponente massimo è $p-2$). **Gli elementi calcolati tramite g^i si ottengono in ordine permutato**, cosa che rende il problema intrattabile da invertire. Si ha che g genera i vari valori ciclicamente.
L'esponenziazione modulare è quindi una funzione:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p^*$$

definito come:

$$f(z) = g^z \bmod p$$

Ogni esponenziazione modulare produce una permutazione one-way degli elementi di $\mathbb{Z}_p^*$.

Esempio 25. *Vediamo un esempio. Si ha che* $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e quindi:*

$$\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$$

Si ha che 2 *è un generatore di* $\mathbb{Z}_5^*$*:*

$$\mathbb{Z}_5^* = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} = \{1, 2, 4, 3\}$$

e quindi:

$$f(z) = 2^z \bmod 5$$

Nell'esempio si è usato $p = 5$ *mentre in crittografia solitamente* p *è un numero primo rappresentabile da almeno 1024 bit, quindi non piccolo.*

Data x si calcola $g^x \bmod p$ in tempo polinomiale e si assume $0 \leq x \leq p-2$ (per la "rotazione" del modulo). Fare mod p rende difficile invertire.
La grandezza dell'input è il numero di bit necessari a rappresentare $\mathbb{Z}_p^*$, quindi:

$$n = \log_2 p$$

Potrei pensare di fare, avendo $x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ come la rappresentazione binaria di x, rappresentazione del tipo:

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j$$

Avrei una cosa del tipo:

Algorithm 7 Primo tentativo non efficiente di calcolo esponenziazione modulare

```
function ModExp(p, g, x)
    result ← 1
    while x > 0 do
        result ← result · g mod p
        x ← x − 1
    return result
```

In pratica avrei che *result* contiene:

$$g^0, g^2, \ldots, g^x \bmod p$$

Ma avrei un numero di iterazioni esponenziale rispetto a n, infatti si avrebbe:

$$x \cong 2^n$$

C'è però un modo per calcolarlo in tempo polinomiale, passando la rappresentazione in binario di x. Posso fare quindi:

$$g^x = g^{\sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j} = \prod_{j=0}^{n-1} x_j 2^j = \prod_{j=0}^{n-1} (g^{2^j})^{x_j} \bmod p$$

Basta quindi calcolare g^{2^j} per i vari j, da 0 a -1, e moltiplicarli per $x_j = 1$ (solo quei conti per cui si ha $x_j = 1$ influiscono sul risultato) e questo si fa in tempo polinomiale. Questo algoritmo è detto **square-and-multiply**. Ragiono quindi tramite una maschera di bit prendendo solo i valori in corrispondenza di 1.
Conviene inoltre salvarsi i g^{2^j}. Vediamo lo pseudocodice:

Algorithm 8 Algoritmo square-and-multiply per esponenziazione modulare

```
function ModExp(p, g, x)
    result ← 1
    for j = n − 1 to 0 do
        result ← (result · result) mod p
        if x_j == 1 then
            result ← (result · g) mod p
    return result
```

Esempio su slide.
L'operazione inversa è detta **logaritmo discreto** e non si è ancora dimostrato essere facile. Sono dati, per questo problema, un numero primo p, un generatore g per $\mathbb{Z}_p^*$ e $y \in \mathbb{Z}_p^*$. Si calcola $x \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ tale che $g^x \equiv y \bmod p$. Tale calcolo è in tempo esponenziale sul numero di bit input, avendo $n = \log_2 p$. Elencare tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_p^*$ richiede quindi tempo $O(p) = O(2^n)$.
Si usa quindi l'esponenziazione modulare per nascondere il messaggio ma serve una trapdoor per permettere a Bob di estrarre il messaggio.
Vediamo ora un'altra funzione one-way, il **prodotto tra due numeri primi**, $n = p \cdot q$, con p e q primi. Ogni numero naturale ammette un'unica scomposizione in fattori primi, a meno dell'ordine degli stessi. Il prodotto ovviamente è in tempo polinomiale. L'inverso del prodotto $n = p \cdot q$, con p e q primi è detto **fattorizzazione**, che, dato n, consiste quindi nel capire p e q. I numeri sono espressi in binario. La dimensione dell'input di questo problema è il numero di bit necessari a rappresentare n, p e q. Diciamo inoltre che si ha un numero m tale che $m = \log_2 n$. Diverse istanze del problema sono abbastanza difficili, con numeri grandi, almeno 2048 bit, e che siano appunto

prodotto di esattamente due numeri primi, che possono essere scelti anche in modo accurato per avere la sicurezza migliore. Tali primi devono essere circa della stessa dimensione, 1024 bit ciascuno, ma con valori abbastanza diversi per non avere il risultato vicino a $\sqrt{n}$.
Non esiste un algoritmo polinomiale su n, per fattorizzare, neanche probabilistico. Il numero di bit di n è al più la somma dei bit necessari per i due numeri primi.
Esempio di RSA-768 su slide.
L'algoritmo naive prevede la divisione di N per tutti gli interi da 2 a $\sqrt{n}$ in tempo:

$$O(\sqrt{n}) = O(\sqrt{2^m}) = O(2^{\frac{m}{2}})$$

quindi esponenziale, anche se ovviamente basta trovare o p o q.

4.3.1 Protocollo Diffie-Hellman

Diffie ed Hellman nel 1976 pubblicano un paper su un protocollo molto semplice che sua solo canali pubblici.
Alice e Bob scelgono insieme una chiave segreta, avendo quindi un **key agreement protocol**. Scelgono sul canale pubblico un primo q, lavorando su $\mathbb{Z}_q^*$. Ovviamente lo sa anche Eve essendo un canale pubblico. Alice e Bob scelgono anche il generatore g, che sa anche Eve. Alice sceglie a caso x_A, $0 < x_A < q-1$ e lo tiene segreto (non 0 perché Eve lo sgamerebbe subito). Anche Bob sceglie a caso x_A, $0 < x_B < q-1$ e lo tiene segreto (non 0 perché Eve lo sgamerebbe subito). Si procede così:

- Alice calcola $g^{x_A} \bmod q$ e lo manda a Bob, ma anche ad Eve
- Bob calcola $g^{x_B} \bmod q$ e lo manda a Alice, ma anche ad Eve
- Alice calcola $(g^{x_B})^{x_A} = g^{x_A \cdot x_B} = k$, che Eve non vede
- Bob calcola $(g^{x_A})^{x_B} = g^{x_A \cdot x_B} = k$, che Eve non vede
- k è la chiave segreta

Eve conosce quindi q, g, g^{x_A} e g^{x_B}.
Eve non può conoscere k e per ottenere x_A e x_B da k dovrebbe calcolare un logaritmo discreto.
Eve potrebbe calcolare $g^{x_A \cdot x_B}$ partendo da g^{x_A} e g^{x_B} che conosce ma questo sembra anche lui un problema intrattabile, detto **problema di Diffie-Hellman**.
Esempio su slide.

4.3.2 Crittosistema di El Gamal

El Gamal, nel 1984, propose un crittosistema che si basa sulla difficoltà di calcolare k_s da k_p e di ottenere m da $c = E_{k_p}(m)$ per il problema del logaritmo discreto.
El Gamal sfruttò questo per porre le basi al sistema delle firme digitali.
Anche qui bisogna vedere come calcolare in primis la coppia di chiavi. Si procede così:

- si sceglie un primo a caso q, lavorando su $\mathbb{Z}_q^*$
- si sceglie il generatore g
- si sceglie un intero a, $0 < a < q-1$, e si calcola $g^a \mod p$. Si ha che a è la chiave segreta $k_s = a$
- la chiave pubblica è la tripla $k_p = (q, g, g^a)$

Eve per ottenere k_s da k_p dovrebbe calcolare $\log_g g^a$, ma è difficile.
Per cifrare si ha:

- Alice manda $m \in \mathbb{Z}_q^*$ a Bob. Se m è più lungo di $\log_2 q$ bit lo spezza in blocchi
- Alice prende la chiave pubblica di Bob $k_{p_B} = (q, g, g^a)$
- Alice sceglie un **random salt**, ovvero un l a caso, $0 < l < q-1$ per complicare la vita a Eve che avrebbe vita facile se si cifrano sempre messaggi lunghi uguali ma che non lo sono più causa l
- Alice calcola $\gamma = g^l \mod q$, in modo che Bob sappia estrarre l, e $\delta = m \cdot (g^a)^l \mod q$, ovvero il messaggio sporcato da l
- Alice manda a Bob il testo cifrato $c = (\gamma, \delta)$

Il testo cifrato è grande il doppio di m e questo può essere un problema di efficienza.
Per decifrare Bob usa $k_{s_B} = a$ per ottenere m facendo:

$$m = g^{-al} \cdot \delta = \gamma^{-a} \cdot \delta = \gamma^{q-1-a} \cdot \delta$$

L'ultimo step è possibile per la ciclicità.
Si noti che a è l'unica informazione segreta usata da Bob e che l sparisce nei conti.
Eve vede passare la chiave pubblica e il testo cifrato, sia γ che δ. Ma estrarre

l è un problema di logaritmo discreto, dovendo estrarre l da g^l e calcolare $(g^a)^l$ per poi calcolare $m = \delta \cdot (g^{al})^{-l} = \delta \cdot g^{-al}$.
Stesso discorso per calcolare g^{al} da g^a e g^l. Quindi anche El Gamal si basa sulle stesse assunzioni del protocollo di Diffie-Hellman.
Entrambe le soluzioni sono comunque meno efficienti dei crittosistemi simmetrici, che sono anche più robusti dal punto di vista della crittoanalisi, non basandosi su assunzioni matematiche non ancora dimostrate, anche se richiedono la trasmissione della chiave segreta su un canale privato.

4.3.3 Crittosistemi Ibridi

L'unione di crittosistemi a chiave pubblica e simmetrici si usano insieme in **crittosistemi ibridi**, dove magari si scambia la chiave per il crittosistema simmetrico tramite la chiave pubblica con Diffie-Hellman.

4.3.4 RSA

Vediamo il sistema inventato da Adi Shamir, Ron Rivest e Leonard Adleman, **RSA**, che è il più famoso algoritmo a chiave pubblica, il cui paper è stato pubblicato nel 1977/1978.
Tale algoritmo si basa sulla difficoltà della fattorizzazione.
Si prendono p e q primi (scelti tramite test di primalità che è polinomiale), circa di 1024 bit ma con valori molto diversi tra loro.
Si calcola $n = p \cdot q$ detto **modulo RSA**. Si calcola quindi il **quoziente di Eulero**:

$$\phi(n) = \phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p-1) \cdot (q-1)$$

Avendo che $\phi(n)$ è il numero di numeri compresi tra 1 e n che sono coprimi con n, ovvero i numeri invertibili in modulo n. È il numero di elementi più piccoli di n che sono coprimi con n (stesso discorso per il calcolo di ϕ con p e q). Mi dice la dimensione di $\mathbb{Z}_n^*$. Si ha che $\phi(n)$ è facile da calcolare conoscendo la fattorizzazione e p e q sono co-primi.
Quindi:

$$\phi(n) = |\{x : 1 \leq x \leq n \land GCD(x, n) = 1\}|$$

Si sceglie a caso d, con $1 < d < \phi(n)$, tale che:

$$GCD(d, \phi(n)) = 1$$

Avendo che d è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_{\phi(n)}$.
Uso poi l'**algoritmo di Euclide esteso** per ottenere e tale che:

$$e \cdot d \equiv 1 \bmod \phi(n)$$

ovvero:

$$e \equiv d^{-1} \bmod \phi(n)$$

Si ha quindi che:

- (n, e) è la chiave pubblica
- d è la chiave privata

Inoltre $p, q, \phi(n)$ devono restare segrete:

- da $\phi(n)$ con la chiave pubblica ottengo $d \equiv e^{-1} \bmod \phi(n)$
- se conosco p calcolo $q = \frac{n}{p}$ e poi $\phi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$ e infine d

Infine:

- per cifrare m, che se lungo più di n viene diviso in blocchi, faccio:

$$c = m^e \bmod n$$

- per decifrare c faccio:

$$c^d \bmod n = m$$

Si usa quindi un'esponenziazione modulare $m^e \bmod n$ ma qui Eve è interessata a m, che è la base e non l'esponente. In ogni caso si congiura sia una permutazione one-way.
La trapdoor è la chiave d anche se non è molto evidente.
La decifratura funziona perché:

$$c^d \bmod n \equiv (m^e)^d \equiv m^{e \cdot d} \bmod n$$

e dato che $e \cdot d \equiv 1 \bmod \phi(n)$ e per definizione di congruenza $\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$e \cdot d = 1 + k \cdot \phi(n)$$

ma scomponendo l'esponente si ha:

$$c^d \bmod n \equiv m^{1+k\cdot\phi(n)} \equiv m \cdot (m^{\phi(n)})^k \bmod n$$

e per il **teorema di Fermat** o per il **teorema di Eulero** si ha che $m^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$ e quindi:

$$c^d \bmod n \equiv m(1)^k \equiv m \cdot 1 = m \bmod n$$

Si ha che:

- teorema di Fermat è valido solo se $MCD(m, n) = 1$, cioè se m non è un multiplo di p o q
- anche se m un multiplo di p o q possiamo provare che la decrittazione funziona correttamente

Esempio su slide.
Calcolare $\phi(n)$ è facile conoscendo la fattorizzazione di n:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dove p varia su tutti i primi che dividono n. Se non si conosce è difficile e quindi rompere RSA equivale a fattorizzare n. Vediamo qualche altra proprietà di $\phi(n)$.
Dato $k \geq 1$ possiamo dire che:

$$\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Se avessimo $n = m \cdot s$ con $GCD(m, s) = 1$ allora $\phi(n) = \phi(m \cdot s) = \phi(m) \cdot \phi(s)$.
D'altro canto se $n = p \cdot q$, con p e q primi diversi si ha che:

$$\phi(n) = \phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p-1) \cdot (q-1)$$

e, se la fattorizzazione è del tipo $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, con p_i primi distinti e $k_i \geq 1$ per tutti gli i si avrebbe:

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1}) \cdots \phi(p_r^{k_r}) = p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Quindi se Eve conoscesse solo $\phi(n)$ non solo rompe RSA ma fattorizza anche n, sapendo:

$$n = p \cdot q \to \phi(n) = (p-1) \cdot (q-1) = p \cdot q - (p+q) + 1 = n - (p+q) + 1$$

e quindi può calcolare:

$$p + q = n - \phi(n) + 1$$

e quindi conoscendo sia la somma che il prodotto di P e q può risolvere:

$$x^2 - (p+1)x + p \cdot q = 0$$

Inoltre p e q non devono essere troppo vicini perché Eve cercherebbe intorno a $\sqrt{n}$.

Possiamo dire altro. Si assuma senza perdere generalità $p > q$. Se p e q fossero vicini si avrebbe $\frac{p-q}{2}$ piccolo e poco più grande di $\sqrt{n}$. Inoltre si avrebbe la seguente tautologia:

$$\frac{(p+q)^2}{4} - n = \frac{(p-q)^2}{4}$$

deducendo che $\frac{(p+q)^2}{4} - n$ è un **quadrato perfetto** e quindi si cercano gli interi $x > \sqrt{n}$ tali che $x^2 - n$ è un quadrato perfetto, y^2.
Si supponga si trovi tale y^2, da $x^2 - n = y^2$ si deduce:

$$n = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

e quindi:

- $p = x + y$
- $q = x - y$

Avendo trovato q e p.
Un altro problema è il valore di $\phi(n)$. Si assume $GCD(p-1, q-1)$ largo e si ha, con LCM **Least Common Multiple**:

$$u = LCM(p-1, q-1) = \frac{(p-1)(q-1)}{GCD(p-1, q-1)} = \frac{\phi(n)}{GCD(p-q, q-1)}$$

avendo che u è piccolo rispetto a $\phi(n)$.
Si noti che potrei usare $d' \equiv e^{-1} \mod u$ al posto di d per decifrare, questo grazie al **teorema di Eulero**. Dato che u è piccolo però può essere trovato via bruteforce e quindi è meglio che $p-1$ e $q-1$ abbiano divisori comuni grandi.
Una **pessima idea**, più relativa all'uso di RSA, è quella di usare lo stesso modulo n per un gruppo di utenti, a cui si vuole inviare il plaintext m. Ipotizziamo di avere due componenti di cifratura e_1 ed e_2, calcolando quindi due testi cifrati:

- $c_1 = m^{e_1} \mod n$
- $c_2 = m^{e_2} \mod n$

E qualora si avesse:

$$GCD(e_1, e_2) = 1$$

Eve userebbe l'**algoritmo esteso di Euclide** per calcolare r e s tali che: $r \cdot e_1 + s \cdot e_2 = 1$ per l'identità di Bezout.
Si può poi calcolare:

$$c_1^r \cdot c_2^s \equiv m^{r \cdot e_1} \cdot m^{s \cdot e_2} = m \mod n$$

ricordando che Eve vuole proprio trovare m. L'attaccante inoltre, sapendo e e n, può calcolare la radice e-esima di m^e per estrarre m, ma anche questo non si fa in tempo efficiente, non per e generico.
Un'altra **pessima idea** è usare lo stesso valore di e, magari pure piccolo, per valori di n diversi. Si ipotizzi infatti di mandare m a tre utenti, A, B e C, con i rispettivi moduli RSA n_A, n_B e n_C. Si ipotizzi $e = 3$ (un valore così piccolo magari dipende dal suo uso in un device poco potente) e si calcoli:

- $c_A = m^3 \bmod n_A$
- $c_B = m^3 \bmod n_B$
- $c_C = m^3 \bmod n_C$

Si deve risolvere quindi un sistema di equazioni.
Se n_A, n_B e n_C sono coprimi a coppie Eve usa il **teorema cinese del resto** e calcola x tale che:

$$\begin{cases} x \equiv c_A \bmod n_A \\ x \equiv c_B \bmod n_B \\ x \equiv c_C \bmod n_C \end{cases}$$

trovando l'unica soluzione x^*, compresa tra 0 e $N - 1$, con:

$$N = n_A \cdot n_B \cdot n_C$$

e avendo che m^3 è minore di n_A, n_B e n_C, con $m^3 < N$ si ha che:

$$x^* = m^3$$

e quindi Eve può calcolare la radice cubica di x^* per ottenere m, come indicato nel testo di Koblitz.
Nel testo di Salomaa si ha inoltre il seguente teorema.

Teorema 16. *Qualsiasi algoritmo che calcola la chiave segreta d può essere convertito in un algoritmo probabilistico per fattorizzare n*

Avendo prova ulteriore che rompere RSA si riduce a fattorizzare n.
I vari dettagli sono comunque non da approfondire per l'esame.

4.3.5 Randomized RSA

Si studia ora un modo molto robusto di usare RSA.
Si ipotizzi ora di voler cifrare one bit alla volta usando RSA. Si noti che per

ogni scelta della chiave pubblica (n, e) si hanno, volendo cifrare un singolo bit:

$$0^e \equiv 0 \mod n$$

$$1^e \equiv 1 \mod n$$

che portano ad avere $c = m$ e questo ovviamente non va bene.
Bisogna procedere diversamente. Si mette quindi il bit in un testo in chiaro e mettendo altri bit randomici insieme.
Si dimostra che il **least significant bit (*lsb*)** di m è un hard-core bit per l'esponenziazione modulare $m^e \mod n$ e quindi è difficile calcolare $lsb(m)$ a partire da $m^e \mod n$ senza conoscere d.
L'idea è quindi di mettere il bit di plaintext in $lsb(m)$ e scegliere a caso gli altri bit.
Ipotizzando di avere Alice che vuole spedire a Bob $b \in \{0, 1\}$:

- Alice prende la chiave pubblica di Bob, (n_B, e_B)
- Alice sceglie un intero a caso $x < \frac{n_B}{2}$, avendo quindi $2 \cdot x < n_B$ e quindi si ha l'*lsb* a 0 ma in quella posizione si mette il bit che si vuole cifrare
- Alice manda a Bob $y = (2 \cdot x)^{e_B} \mod n_B$

A questo punto:

- Bob riceve y
- Bob calcola $y^{d_B} \mod n_B = 2 \cdot x + b$
- Bob prende l'*lsb* come risultato

Si osservi che non si sa se gli altri bit di m (in particolare, quanti di essi e quali) siano bit hard-core per RSA.
Si ha quindi che per cifrare in modo molto sicuro m si può procedere cifrando ogni bit di m con randomized RSA. La crittoanalisi diventa infatti molto complessa, a costo di un metodo di cifratura molto inefficiente con m lungo.
Randomized RSA, a causa della sua inefficienza, è un sistema più teorico che pratico.

4.4 Firma Digitale

L'idea è che si vorrebbe usare un protocollo crittografico per firmare, come se fosse una firma autografa. Dato un documento in formato elettronico si vuole che esso sia firmato da Alice e che quindi tale firma sia valida per Bob.

Definizione 26. *Si definisce uno **schema di firma digitale** come la quintupla:*

$$(P, A, K, S, V)$$

con:

- *P insieme di tutti i possibili messaggi che si vuole firmare, di solito stringhe di bit arbitrarie*
- *A insieme di tutte le possibili firme dei messaggi. La firma di un messaggio è una versione rielaborata dello stesso messaggio*
- *K insieme di tutte le possibili chiavi*
- *$S = \{sig : P \times K \to A\}$ famiglia di tutti le funzioni di firma*
- *$V = \{ver : P \times A \times K \to \{\top, \bot\}\}$ famiglia di tutte le funzioni di verifica*

Anche in questo caso scegliendo una chiave $k \in K$ si selezionano due funzioni:

1. *$sig_k : P \to A$*
2. *$ver_k : P \times A \to \{\top, \bot\}$*

tali che, $\forall x \in p$ e $\forall y \in A$:

$$ver_k(x, y) = \top \iff y = sig_k(x)$$

*La coppia (x, y) è detta **messaggio firmato**.*

L'idea che sta al cuore è che la firma deve poterla generare solo chi conosce una certa informazione segreta. Solo Alice conosce tale informazione e solo Alice può aver prodotto la sua firma e la cosa però deve essere verificabile da tutti. Praticamente in parallelo coi crittosistemi si ha che la firma è come la decifratura, ovvero la parte privata, mentre la verifica come la cifratura, ovvero la parte pubblica. Anche se non si sta veramente cifrando e la verifica viene fatta infatti avendo a disposizione sia il messaggio che il messaggio firmato, non si sta quindi "nascondendo" il messaggio.
È interessante vedere le differenze rispetto ad una vera firma autografa, fatta a mano su un foglio. Con al firma digitale:

- la firma digitale y è separata dal documento elettronico x
- la firma non è sempre la stessa, infatti dipende dal documento ed è diversa per documenti diversi

La firma digitale autentica il mittente del messaggio quindi solo chi conosce una certa informazione segreta può aver prodotto la firma del messaggio. È quindi una forma di autenticazione.
Vediamo quindi il procedimento qualora Alice voglia mandare a Bob il messaggio M firmato:

- Alice sceglie una coppia di algoritmi (sig_k, ver_k), il primo privato e il secondo pubblico
- Alice calcola $\sigma = sig_k(m)$

A questo punto Bob deve verificare la firma di Alice:

- Bob considera la coppia (m, σ)
- Bob prende l'algoritmo pubblico ver_k
- Bob accetta la firma come valida sse $ver_k(m, \sigma) = \top$

Bob quindi può solo dire che l'ha firmato Alice, non che lo ha spedito Alice.
Vediamo ora il punto di vista di Eve. Potrebbero esserci due fini per rompere la firma digitale:

- **rompere lo schema globalmente**, trovando in qualche la chiave k di Alice e quindi la sua funzione sig_k. Questo è il fine ideale di Eve
- **falsificare l'identità**, ovvero, dopo aver osservato una serie di coppie (x_i, y_i), ovvero messaggi con le firme corrispondenti, quando arriva un nuovo messaggio Eve è in grado di produrre una firma valida (valida solo per quel messaggio, o per una classe di messaggi che condividono alcune somiglianze) fingendosi Alice, cosa che ovviamente succede anche con la rottura totale ma in quel caso succede per sempre, mentre qui solo per un messaggio con una certa firma

Anche la seconda tipologia di attacco, anche se più comune, è comunque difficile. Ovviamente il documento non può essere un PDF o simili, in quanto Eve corromperebbe il file ma deve essere una generica sequenza di byte.
Per la firma digitale si può usare qualsiasi crittosistema a chiave pubblica come schema per le firme, usandolo "al contrario" (sempre con il discorso che qui non si sta nascondendo nulla):

- si firma con la chiave privata e lo può fare solo chi conosce j

- si verifica con la chiave pubblica e lo possono fare tutti

In questo modo, possiamo autenticare il mittente di un messaggio utilizzando solo un sistema crittografico a chiave pubblica.
Si hanno quindi due scenari possibili:

1. Alice vuole mandare il messaggio m firmato ma non cifrato e quindi Eve può leggerlo. Alice ha quindi le solite E_A, pubblica, e D_A, privata. Calcola quindi $D_A(m)$ per firmare il messaggio e manda il risultato a Bob, che usa E_A (che è pubblico) e controlla che:
$$E_A(D_A(m)) = m$$
Bob accetta quindi la firma sse vale l'uguaglianza

2. Alice vuole mandare il messaggio m firmato e cifrato. Questo è il caso più comune. Alice anche qui ha E_A pubblico e D_A segreto ma anche Bob ha E_B pubblico e D_B segreto. Alice calcola quindi $D_A(E_B(m))$ e lo manda a Bob, avendo che $E_B(m)$ è la cifratura che solo Bob può decifrare. Bob in primis "rimuove" la firma di Alice tramite E_A e poi decifra con D_B, avendo nel complesso:
$$D_B(E_A(D_A(E_B(m)))) = m$$

Il problema è che E_A lo conosce anche Eve che può intercettare il messaggio, togliere D_A e mettere la sua firma tramite D_E, impersonificando Alice, ricordando che il canale non è autenticato (Bob non sa chi spedisce). Questo però si risolve facilmente invertendo l'ordine di firma e cifratura. Anziché prima cifrare e poi firmare si fa il contrario, facendo:
$$E_B(D_A(m))$$

Così solo Bob può estrarre il testo firmato e Eve non può sostituire con al sua firma.

4.4.1 Schema di El Gamal

Ci sono stati storicamente due problemi nell'uso di crittosistemi a chiave pubblica per firmare:

1. sono inefficienti
2. in passato, negli anni '80, c'era anche il problema politico dell'uso di crittosistemi

Si è creata quindi la necessità di creare algoritmi di firma digitale non usabili come algoritmi di cifratura, evitando beghe politiche americane.
Lo **schema di El Gamal** è uno di questi. Lo schema è del 1985 ma una sua modifica, detta **Digital Signature Algorithm (*DSA*)**, è stata poi adottata come standard dal NIST.
Questo schema **non è deterministico** avendo più firme valide per ogni messaggio, avendo anche qui un **random salt**, e la sicurezza è garantita dall'assunzione di intrattabilità del logaritmo discreto.
Vediamo il funzionamento (leggermente più complesso, anche se simile al crittosistema di El Gamal):

- si prende un primo p
- si prende un generatore g di $\mathbb{Z}_p^*$
- i messaggi che si firmano solo elementi di $\mathbb{Z}_p^*$
- le firme sono coppie (γ, δ), con $\gamma \in \mathbb{Z}_p^*$ e $\delta \in \mathbb{Z}_{p-1}$, avendo la stessa inefficienza del crittosistema di El Gamal avendo che la firma è lunga il doppio del testo da firmare. Si noti che $p-1$ è il $\phi(p)$

Se Alice vuole firmare $m \in \mathbb{Z}_p^*$ (altrimenti bisogna spezzarlo in blocchi) genera la sua coppia di chiavi in questo modo:

- Alice sceglie una chiave segreta a, con $0 < a < p-1$
- Alice calcola $\beta = g^a \bmod p$
- la chiave pubblica diventa la tripla (p, g, β)

Per firmare m invece:

- Alice sceglie un random salt $k \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$, avendo che deve essere invertibile
- Alice calcola $\gamma = g^k \bmod p$, nascondendo il random salt, e $\delta = (m - a \cdot \gamma) \cdot k^{-1} \bmod p-1$
- la coppia (γ, δ) è la firma di m

Si noti che da $\delta = (m - a \cdot \gamma) \cdot k^{-1} \bmod p-1$ si estrae m:

$$m = a \cdot \gamma + k \cdot \delta \bmod p-1$$

A questo punto Bob accetta come valida la firma sse, ricordando che m non è nascosto:

$$\beta^\gamma \cdot \gamma^\delta \equiv g^{a \cdot \gamma} \cdot g^{k \cdot \delta} \equiv g^m \bmod p$$

Questo funzione perché si ha la congruenza $g^{a\cdot\gamma+k\cdot\delta} \equiv g^m \bmod p$ sse:

$$a\cdot\gamma + k\cdot\delta \equiv m \bmod p-1$$

quindi se sono congrui $p-1$, ovvero $\phi(p)$, e questo accade solo per γ e δ calcolati come descritto. Bob quindi può correttamente accettare o rifiutare una firma.
Eve, per costruire un messaggio e una firma valida per il messaggio, facendo **existential forgery**, senza conoscere a ha varie possibilità:

- Eve sceglie γ, avendo m e γ, e deve calcolare δ, dovendo calcolare il logaritmo discreto $\log_\gamma g^m\beta^{-\gamma}$, che è difficile
- Eve sceglie δ, avendo m e δ, e deve calcolare γ, tramite $\beta^\gamma\cdot\gamma^\delta \equiv g^m$, dove γ è sia una base che un esponente. Anche in questo caso non si conosce un algoritmo polinomiale
- Eve sceglie sia γ che δ, volendo calcolare un valore per m, cerca quindi un messaggio valido. Anche qui però si ha un logaritmo discreto, avendo $\log_g \beta^\gamma\cdot\gamma^\delta$

Sembra quindi tutto sicuro ma non è così, infatti c'è un attacco, dove Eve calcola γ, δ e m insieme:

- Eve scrive $\gamma = g^i\cdot\beta^j \bmod p$, con $0 \leq i,\ j \leq p-1$
- si calcola la verifica:

  $$g^m \equiv \beta^\gamma\cdot(g^i\cdot\beta^j)^\delta \bmod p$$

  ovvero:

  $$g^{m-i\cdot\delta} \equiv \beta^{\gamma+j\cdot\delta} \bmod p$$
- si impone $m - i\cdot\delta \equiv 0 \bmod p-1$ e $\gamma + j\cdot\delta \equiv 0 \bmod p-1$, avendo che vale la congruenza
- dati i e j, se si ha $GCD(j, p-1) = 1$ allora si trovano m, δ e γ che soddisfino:

  $$\gamma = g^i\cdot\beta^j \bmod p$$

  $$\delta = -\gamma\cdot j^{-1} \bmod p-1$$

  $$m = -\gamma\cdot i\cdot j^{-1} \bmod p-1$$
- si ha che (γ, δ) è una firma valida per m

4.5 Funzioni di Hash

Si cercano funzioni con input arbitrariamente lungo, output corto e one-way. Si produce quindi un codice univoco dell'input, con perdita di informazione per quindi non "poter tornare indietro". L'idea è quindi quella di firmare questo output, risolvendo i due problemi dello schema El Gamal. Si produce un **fingerprint** dell'input.
Il fingerprint è quindi piccolo e di **lunghezza fissata**:

- 128 bit per MD5
- 160 bit per SHA-1
- 256 bit per SHA-256

Si usano quindi per verificare anche l'integrità di dati trasmessi, avendo un **Message Authentication Code (*MEC*)**, avendo che cambiando un solo bit dell'input l'output è totalmente diverso.
Si usano anche che vengono usate nella firma digitale, dove anziché firmare m si firma il fingerprint $h(m)$, avendo una firma piccola e di lunghezza fissata.
La sicurezza delle impronte può essere violata tramite l'uso di **rainbow table**, servizi dove si calcolano continuamente hash salvando le coppie messaggio/impronta, fornendo la possibilità di fare query.

Definizione 27. *Una **famiglia di funzioni hash** è una quadrupla:*

$$(X, Y, K, H)$$

dove:

- *X è l'insieme dei possibili messaggi, finito o infinito*
- *Y è l'insieme dei possibili fingerprint, finito e molto più piccolo di X, se finito*
- *K è l'insieme dei possibili valori*
- *$H = \{h_k : X \to Y | k \in K\}$ è l'insieme delle funzioni hash*

*In realtà essendo l'output piccolo potrei avere delle **collisioni**.*
Si ha che se X è finito si ha che $|X| \geq |Y|$ o, normalmente, anche $|X| \geq 2 \cdot |Y|$ e in tal caso $h : X \to Y$ lavora come una funzione di compressione (anche se non bisogna confonderlo con algoritmi per avere zip etc...)
*Quindi le funzioni hash possono dipendere da una chiave, dicendo che sono **funzioni di hash keyed**, o meno, avendo **funzioni di hash unkeyed** (che noi vedremo).*

Si hanno varie categorie di problemi difficili da risolvere:

- **preimage**, con:
  - **input**: $h : X \to Y$, one-way, e $y \in Y$
  - **output**: $x \in X$ tale che $h(x) = y$
- **second preimage**, con:
  - **input**: $h : X \to Y$ e $x \in X$
  - **output**: $x' \in X$ tale che $h(x') = h(x)$ e $x' \neq x$

  essendo difficile sostituire un'impronta con un'altra
- **collision**, con:
  - **input**: $h : X \to Y$
  - **output**: $x, x' \in X$ tale che $h(x') = h(x)$ e $x' \neq x$

  ovvero deve essere difficile trovare due messaggi che collidano

Sono requisiti pesanti, anche se collision è più facile da rompere di second preimage, avendo che quest'ultimo è più vincolato, avendo già un $x \in X$.
Si è quindi studiato un algoritmo naive, per qualunque funzione di hash, che cerca le collisioni nel modo ovvio. Si hanno due parametri:

- la definizione della funzione di hash h
- il numero q di volte con cui interrogare h

Al crescere di q si trovano quindi più collisioni. È quindi un algoritmo probabilistico avendo in primis una scelta casuale di un sottoinsieme di q messaggi, detto X_0. Per ciascun messaggio calcola la fingerprint e lo salva in una lista, tramite la quale verifica se si hanno due valori uguali, per due messaggi diversi:

Algorithm 9 Pseudocodice dell'algoritmo naive di verifica collisioni hash

```
function FindCollision(h, q)
    choose random X_0 ⊆ X, t.c. |X_0| = q
    fingerprints ← [ ]
    for every x ∈ X_0 do
        y_x ← h(x)
        if y_x ∈ fingerprints then
            return (x, x')
        else
            push(fingerprints, y_x)
    return fail
```

La probabilità di successo segue un teorema.

Teorema 17. *Dato $M = |Y|$ la probabilità di successo è:*

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{M-1}{M}\right) \cdot \left(\frac{M-2}{M}\right) \cdots \left(\frac{M-q+1}{M}\right)$$

Dimostrazione. Sia dato $X_0 = \{x_1, \dots, x_1\}$. Allora, per i che va da 1 a q, si ha che E_i è l'evento $h(x_i) \notin \{h(x_1), \dots hx_{i-1}\}$.
Si ha quindi che $P(E_1) = 1$ e che la congiunta di tutti gli E_i, indipendenti, è:

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_q) = \left(\frac{M-1}{M}\right) \cdot \left(\frac{M-2}{M}\right) \cdots \left(\frac{M-q+1}{M}\right)$$

che è quindi la probabilità che non ci siano collisioni, avendo che $P(E_1)$ è un banale $\cdot 1$ e quindi lo cancello dal prodotto.
La probabilità di non avere collisioni è quindi:

$$P(NoCollision) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{M}\right) \cdots \left(1 - \frac{q-1}{M}\right) = \prod_{i=1}^{q-1} \left(1 - \frac{i}{M}\right)$$

Fissato quindi $x \in \mathbb{R}$ piccolo si ha che, per McLaurin:

$$1 - x \approx e^{-x}$$

e quindi:

$$P(NoCollision) \approx \prod_{i=1}^{q-1} e^{-\frac{i}{M}} = e^{-\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{q-1} i} = e^{-\frac{q\cdot(q-1)}{2\cdot M}}$$

con l'ultimo passaggio per la solita formula di Gauss.
Quindi si ha che:

$$P(AtLeastOneCollision) \approx 1 - e^{-\frac{q\cdot(q-1)}{2\cdot M}} = \varepsilon$$

ε avendo chiamato così prima tale probabilità.
Sistemiamo un poco i conti:

$$e^{-\frac{q\cdot(q-1)}{2\cdot M}} = 1 - \varepsilon$$

ma allora:

$$-\frac{q\cdot(q-1)}{2\cdot M} = \ln(1-\varepsilon)$$

e:

$$q^2 - q = 2 \cdot M \cdot \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$$

ignorando q a favore di q^2, avendo q molto grande, ottengo q con la radice:

$$q \approx \sqrt{2 \cdot M \cdot \ln \frac{1}{1-\varepsilon}}$$

che è una relazione che coinvolge numero di query q, numero di impronte m e probabilità di collisioni ε. Avendo che si ha quante query mi servono per avere una collisione con probabilità ε.
Solitamente si fissa $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ottenendo $q = 1.17 \cdot \sqrt{M}$. La radice è molto impattante nei conti. Si ha quindi che, ad esempio:

- $Y = \{0,1\}^{40}$ comporta $M = 10^6$, e quindi non essendo sicuro
- $Y = \{0,1\}^{128}$ comporta $M = 2^{64}$, avendo che è sicuro ma per poco tempo (ed era la scelta di MD5 ed è destinata alla fine del DES)
- $Y = \{0,1\}^{160}$ comporta $M = 2^{160}$, che è la scelta minima normalmente accettabile, ovvero il numero di bit del fingerprint di SHA-1 (anche se si hanno per lui attacchi specifici) quindi in realtà sarebbe meglio usare SHA-256

$\square$

Questo algoritmo porta al cosiddetto **attacco del compleanno** che deriva dal **paradosso del compleanno**, che non è in realtà un paradosso ma un risultato poco intuitivo:

Di quante persone abbiamo bisogno in una stanza per avere una probabilità pari a $\frac{1}{2}$ di trovare due persone che hanno lo stesso compleanno, in termini di stesso giorno e stesso mese?

Si ha quindi la funzione:

$$Birthday : People \to CalendarDays$$

Ottenendo, per $M = 365$, soli $q \simeq 23$, ovvero sole 23 persone.
La radice quadrata di M è infatti più piccola di quanto ci si aspetta e impatta nei conti.
Vediamo quindi come sono costruite le funzioni di hash, tramite le **funzioni**

di hash iterate.
Si ha una funzione di compressione, lossy:

$$compress : \{0,1\}^{m+t} \to \{0,1\}^m,\ t \geq 1$$

Si ha quindi una tecnica divisa in 3 fasi di calcolo, prendendo un input, spezzandolo e mescolandolo (hash significa “polpettone”):

1. pre-computazione per preparare l'input, dove data una stringa x in input, tale che $|x| \geq m+t+1$, si costruisce la stringa t tale che $|Y| = 0 \mod t$, lunga quindi un multiplo di t. Solitamente si fa aggiungendo caratteri tramite padding, usando $pad(x)$:

   $$y = x||pad(x)$$

   Infine y può essere diviso in r blocchi, lungo t bit.
   Questa fase dovrebbe assicurare che $f(x) = y$ sia iniettiva:

   $$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

   per evitare ci siano già qui collisioni. L'iniettività è facile da soddisfare, avendo:

   $$|y| = r \cdot t \geq |x|$$

   anche se si usa $\geq$ si tende a fare sempre questa operazione

2. computazione dove si itera l'uso della compressione. Si parte da un vettore di inizializzazione IV, che è una stringa di m bit e si fa

   $$z_0 = IV$$
   $$z_1 = compress(z_0||y_1)$$
   $$\dots$$
   $$z_r = compress(z_{r-1}||y_r)$$

   con z_r che è l'output

3. trasformazione dell'output, opzionale. Data $g : \{0,1\}^m \to \{0,1\}^l$, pubblica, si calcola:

   $$h(x) = g(z_r)$$

Posso formalmente dire che la funzione di hash iterata è costruita tramite:

$$h : \bigcup_{i=m+t+1}^{\infty} \{0,1\}^i \to \{0,1\}^l$$

4.5.1 Costruzione di Merkle-Damgård

Vediamo quindi un esempio che sui le funzioni di hash iterate.
Con questa costruzione possiamo dimostrare che se la funzione di compressione è resistente alle collisioni, anche la funzione hash risultante è resistente alle collisioni.
Si assume $|x| = n \geq m + t + 1$, con $t \geq 2$, e si divide x in k blocchi, lunghi $t - 1$ bit ciascuno:

$$x = x_1||x_2|| \cdots ||x_k$$

e quindi:

$$|x_k| = t - 1 - d, \;\; 0 \leq d \leq t - 2 \wedge k = \left\lceil \frac{n}{t-1} \right\rceil$$

e si calcola $h(x)$ tramite:

Algorithm 10 Pseudocodice della costtuzione di Merkle-Damgård

```
function MERKLE-DAMGÅRD(x)   ▷ compress : {0,1}^(m+t) → {0,1}^m, con t ≥ 2
    n ← |x|
    k ← ⌈n/(t−1)⌉
    d ← n − k · (t − 1)
    for i = 1 to k − 1 do
        y_1 ← x_i
    y_k ← x_k||0^d                                          ▷ padding
    y_(k+1) ← (t − 1)−bit binary representation of d
    z_1 ← 0^(m+1)||y_1
    g_1 ← compress(z_1)
    for i = 1 to k do
        z_(i+1) ← g_i||1||y_(i+1)
        g_(i+1) ← compress(z_(i+1))
    return g_(k+1)                                          ▷ h(x) ← g_(k+1)
```

Teorema 18. *Se compress è **collision-resistant** anche h è collision resistant.*

Abbiamo però usato $t \geq 2$ ma vediamo cosa succede se si accorcia con $t = 1$. Serve però una costruzione diversa e meno efficiente.
Si assume in questo caso $|x| = n \geq m + 2$ e:

$$compress : \{0,1\}^{m+1} \rightarrow \{0,1\}^m$$

Si procede codificando x come $f(x)$ in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 01 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Notando quindi che si allunga molto la stringa.
Infine si calcola $h(x)$ tramite:

Algorithm 11 Pseudocodice della costtuzione di Merkle-Damgård per $t = 1$

> **function** MERKLE-DAMGÅRD2(x)
> $n \leftarrow |x|$
> $y \leftarrow 11||f(x_1)||f(x_2)||\cdots||f(x_n)$
> $y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$
> $g_1 \leftarrow compress(0^m||y_1)$
>   **for** $i = 1$ **to** $k-1$ **do**
> $g_{i+1} \leftarrow compress(g_i||y_{i+1})$
>   **return** g_k $\triangleright$ $h(x) \leftarrow g_{k+1}$

Anche in questo caso si dimostra lo stesso teorema.

Teorema 19. *Se compress è* ***collision-resistant*** *anche h è collision resistant.*

Si ottiene quindi una funzione hash del tipo:

$$h : \bigcup_{i=m+2}^{\infty} \{0,1\}^i \rightarrow \{0,1\}^l$$

avendo $l = m$.

4.5.2 Funzioni Hash Usate

Abbiamo visto la teoria, passiamo alla pratica.
La prima funzione di hash proposta fu MD4, proposta da Rivest nel 1990, detta debole a causa delle poche iterazioni.
Pochi anni dopo si è quindi proposta una variante con costanti di inizializzazione diverse e più iterazioni (e quindi più sicura), chiamata MD5. In generale si conoscono tecniche per generare collisioni con le funzioni di compressione di MD4 e MD5 ma non nelle versioni complete dei due algoritmi. Il problema è che le fingerprint sono troppo corte, nel dettaglio MD5 ha fingerprint lunghe 128 bit, trovando collisioni con 2^{64} tentativi.
È partita quindi la ricerca di una ricerca di hash standard.
Nel 1993 il NIST proposte lo standard **Secure Hash Algorithm (*SHA*)**, per il quale servono purtroppo solo 2^{61} tentativi per generare collisioni, essendo quindi meno di quelli richiesti per l'attacco del compleanno, che richiede 2^{80} tentativi.

È stata poi prodotta SHA-1, che aumenta la sicurezza di SHA, dando vita alla prima famiglia delle funzioni SHA All'inizio SHA-1 indicava solo la nuova versione dell'algoritmo per poi passare ad indicare un'intera famiglia, la **famiglia 1 della SHA**. Le migliorie riguardavano le costanti di inizializzazione e alcuni aspetti tecnici. SHA-1 resisteva agli attacchi standard contro SHA.
Nel 2017 però si è scoperto come generare collisioni esplicite su SHA-1, due documenti PDF diversi producono lo stesso risultato, ma ben prima si è spinto sulla **famiglia 2 delle SHA**, tra cui SHA-224, SHA-256, SHA-384 e SHA-512 (solitamente usato anche ora), che erano state proposte nel 2001 dal NIST. Tutte queste sono funzioni di hash iterate con pochissimi dettagli di differenza, numero di iterazioni, numero di registri, costanti di inizializzazioni.
Questa seconda famiglia è stata progettata dall'NSA sulla base di Merkle-Damgård.
Siamo ora alla **famiglia 3 delle SHA**, SHA-3, con algoritmo **Keccak**, l'unico per ora di questa terza famiglia, che usa le **sponge function** (che non tratteremo ma che si basa su un adattamento dinamico dei passi di computazione) e non le funzioni hash iterate (si noti che Ethereum usa quest'ultima soluzione). SHA-3 è stato ufficializzato dal NIST nel 2012 dopo un concorso aperto nel 2007, vinto appunto dall'algoritmo Keccak. Si hanno, per SHA-3, le alternative alle varie SHA-256, SHA-512 etc... della famiglia 2.

4.5.3 SHA-1

Si hanno fingerprint, dette **message digest**, di 160 bit e si basa sulle funzioni di hash iterate. Lavora poi su word di 32 bit, scelta storica per le architetture dell'epoca.
Si basa sulle classiche operazioni bitwise, la somma intera modulo 2^{32} e la $rotl^s(X)$, ovvero le rotazioni a sinistra di s operazioni con $0 \leq s \leq 31$.
Chiamo m il messaggio di input, con il limite che $|m| \leq 2^{64} - 1$, comunque sarebbero 2.15 miliardi di gigabyte. Il limite è dovuto al padding, in cui si inserisce in fondo l, la rappresentazione in binario della lunghezza del messaggio, in 64 bit (da cui il limite).
In primis si fa il padding:

Algorithm 12 Algoritmo di padding di SHA-1

function SHA-1-PAD(m)
    $d \leftarrow (447 - |m|) \bmod 512$
    $l \leftarrow$ binary rappresentation of $|m|$ with $|l| = 64$
    $y \leftarrow m||1||0^d||l$

Se $|l| < 64$ si aggiungono 0 a sinistra fino anche $|l| = 64$. Inoltre si ha che $|m||1||0^d| = 448 \bmod 512$ e y ha lunghezza 0 mod 512. L'aggiunta di d zeri permette l'aggiunta poi di l.
Dopo il padding si divide y in n M_i blocchi lunghi 512 bit.
Si hanno poi 80 funzioni del tipo, con B, C, D, word a 32 bit:

$$f_i(B, C, D) = \begin{cases} (B \wedge C) \vee ((\neg B) \wedge D) & \text{se } 0 \leq i \leq 19 \\ B \oplus C \oplus D & \text{se } 20 \leq i \leq 39 \\ (B \wedge C) \vee (B \wedge D) \vee (C \wedge D) & \text{se } 40 \leq i \leq 59 \\ B \oplus C \oplus D & \text{se } 60 \leq i \leq 79 \end{cases}$$

Si hanno poi 80 costanti K_i, del tipo:

$$K_i = \begin{cases} 5A827999 & \text{se } 0 \leq i \leq 19 \\ 6ED9EBA1 & \text{se } 20 \leq i \leq 39 \\ 8F1BBCDC & \text{se } 40 \leq i \leq 59 \\ CA62C1D6 & \text{se } 60 \leq i \leq 79 \end{cases}$$

Si hanno 5 registri H_i a 32 bit che conterranno il risultato (come loro concatenazioni) e altri 5 registri, A, V, C, D, E, ausiliari.
Avendo quindi un algoritmo dove si noti che si hanno molte operazioni lineari.
La somiglianza coi crittosistemi simmetrici è evidente, non si ha una chiave derivata ma il resto è analogo.
Le implementazioni sono solitamente in C con un certo stato con anche delle piccole ottimizzazioni.

4.5.4 MD5

In questo caso si ha un fingerprint, detto anche qui **message digest**, di 128 bit. MD5 è più sicuro ma più lento di MD4. MD5 è anche lui efficiente su macchine a 32 bit. MD5 non è riconosciuto come standard ma è uno "standard de facto". Usa le stesse operazioni di SHA-1 e si denoti $m \in \{0, 1\}^b$ come messaggio di input. La lunghezza di m, appunto b, è arbitraria ma

Algorithm 13 Algoritmo SHA-1 (*non richiesto all'orale*)

function SHA-1(m)
  $y \leftarrow SHA-1-Pad(m)$
  $y \leftarrow M_1||M_2||\cdots M_n$
  initialize registers H_i
  for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $M_i \leftarrow w_1||w_2||\cdots w_{15}$
    for $t \leftarrow 16$ **to** 79 **do**
      $w_t \leftarrow rotl^1(w_{t-3} \oplus w_{t-8} \oplus w_{t-14} \oplus w_{t-16})$
    $A \ldots E \leftarrow H_0 \ldots H_4$
    for $t \leftarrow 0$ **to** 79 **do**
      $temp \leftarrow rotl^5(A) + f_t(B, C, D) + E + w_t + K_t$
      $E \leftarrow D$
      $D \leftarrow C$
      $C \leftarrow rotl^{30}(B)$
      $B \leftarrow A$
      $A \leftarrow temp$
    $H_0 \leftarrow H_0 + A$
    $H_1 \leftarrow H_1 + B$
    $H_2 \leftarrow H_2 + C$
    $H_3 \leftarrow H_3 + D$
    $H_4 \leftarrow H_4 + E$
  return $H_0||H_1||H_2||H_3||H_4$

anche qui $b \geq 2^{64}-1$ e si considera solo la rappresentazione binaria dei primi 64 bit più significativi di b.
In primis si fa il padding:

Algorithm 14 Algoritmo di padding di MD5

function MD5-PAD(m)
  $d \leftarrow (447 - |m|) \bmod 512$
  $l \leftarrow$ binary rappresentation of b
  $y \leftarrow m||1||0^d||l$

Se $|l| < 64$ si aggiungono 0 a sinistra fino anche $|l| = 64$. Sembra uguale a quello di SHA-1 ma in realtà le due word (64bit) che contengono b è concatenata in ordine inverso, prima la meno significativa e poi la più significativa. Nella singola word inoltre si parte dal byte meno significativo, il contrario rispetto a quello che fanno normalmente le architetture senza aggiunta di sicurezza. Nel byte invece il bit più significativo viene per primo. Per il resto valgono le osservazioni fatte per SHA-1 in merito al padding.
Anche qui y può essere un multiplo N di 16 word e y viene diviso in N blocchi M_i.
Anche qui si hanno delle funzioni ma solo 4, con X, Y, Z word a 32 bit:

$$F(X,Y,Z) = (Z \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$$

$$G(X,Y,Z) = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z)$$

$$H(X,Y,Z) = X \oplus Y \oplus Z$$

$$I(X,Y,Z) = Y \oplus (X \wedge \neg Z)$$

Si hanno poi 4 registri a 32 bit che conterranno il risultato finale, A, B, C, D e 4 registri ausiliari, sempre a 32 bit AA, BB, CC, DD.
Si ha poi un array $T[1:64]$ di 64 word tali che:

$$T[i] = \lceil 4294967296 \cdot |\sin(i)| \rceil$$

con i in radianti.
Si lavora su blocchi di 16 word che vengono messe in un buffer $X[0:15]$.
Ci si basa su 4 "round" per ogni blocco da 16 word, dove nei round si hanno varie rotazioni. Nei vari round cambia la funzione in uso all'interno. La concatenazione finale è $A||B||C||D$ che deve essere stampata dal meno significativo al più significativo per avere il risultato.
Su slide pseudocodice (ovviamente non da sapere).

4.6 DSA

Si assuma ora che Alice voglia firmare m con una crittosistema a chiave pubblica. Per quanto visto fino ad ora Alice potrebbe usare le funzioni di hash:

- Alice calcola $h(m)$
- Alice calcola $D_A(h(m))$
- Alice manda a Bob il documento firmato $(m, D_A(h(m)))$

Bob deve verificare la firma:

- Bob calcola $x = h(m)$
- Bob calcola $y = E_A(D_A(h(m)))$
- Bob accetta la firma come valida sse $x = y$

Mentre usando un **Message Authentication Code (*MAC*)** avrei:

- Alice manda a Bob la coppia $m, h(m) = (x, y)$
- Bob accetta m come valido sse $y = h(x)$, verificando che il messaggio non sia stato alterato

Inoltre per gestire le password si usano le impronte hash.
Vediamo ora **Digital Signature Algorithm (*DSA*)**, una trasformazione pratica di El Gamal, che è lo standard usato.
Proposto nel 1991 dall'NSA e poi diventato standard NIST (che dal 2001 dice di usare $L = 1024$).
Servono:

- un numero primo p di L bit, con $512 \leq L \leq 1024$, anche se si consiglia 1024, in modo da avere a che fare con il logaritmo discreto lavorando su $\mathbb{Z}_p^*$
- q un primo di 160 bit che divide $p - 1$
- $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ che è una radice q-esima di 1 modulo p. Si ha che l'ordine di α è q, avendo $\alpha^q \equiv 1 \bmod p$. Per calcolarlo si prende un generatore g di $\mathbb{Z}_p^*$ e si fa:

$$\alpha = g^{\frac{p-1}{q}} \bmod p$$

- lo spazio dei messaggi $P = \{0,1\}^*$
- lo spazio delle firme $A = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$, con ogni firma lunga 320 bit
- lo spazio delle chiavi $K = \{(p,q,\alpha,\beta) : \beta \equiv \alpha^a \bmod p\}$ con $0 \leq a \leq q-1$
- la chiave pubblica (p,q,α,β)
- la chiave privata a

Per firmare $m \in p$ Alice sceglie a caso r, $1 \leq r \leq q-1$ (meglio se $2 \leq r \leq q-1$), e calcola:

$$sig_l(m,r) = (\gamma,\delta)$$

tali che γ è il random salt:

$$\gamma = (a^r \bmod p) \bmod q$$

e che:

$$\delta = (SHA\text{-}1(m) + \alpha \cdot \gamma) \cdot r^{-1} \bmod q$$

Se o γ o δ sono uguali a 0 bisogna ricalcolarli entrambi.
Per verificare la firma, ovvero per vedere che $(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$ è valida per $m \in \{0,1\}^*$ si calcolano:

$$e_1 = SHA-1(m) \cdot \delta^{-1} \bmod q$$

$$e_2 = \gamma \cdot \delta^{-1} \bmod q$$

e si accetta, avendo $ver_k(x,(\gamma,\delta)) = \top$ sse:

$$(\alpha^{e_1} \cdot \beta^{e_2} \bmod p) \bmod q = \gamma$$

Dimostrare che questo criterio è corretto richiede alcuni calcoli delicati, modulo p e modulo q.

4.7 Public Key Infrastructures

Parliamo ora di **Public Key Infrastructures (*PKI*)**.
Un grande problema di crittografia a chiave pubblica è che il canale non è autenticato quindi chi riceve un messaggio non può essere sicuro dell'identità del mittente e chi invia un messaggio non può essere sicuro dell'identità del destinatario. Per mitigare il problema bisogna "fidarsi di qualcuno", le infrastrutture a chiave pubblica appunto.

Si ha una **Certification Authority (*CA*)** di cui Alice e Bob si fidano (se la CA imbrogliasse avrebbe un danno d'immagine e del resto non frega nulla alla CA di quello che dicono Bob e Alice). La CA è una **trust third party (*TTP*)**. La CA fornisce a Alice e Bob, sottoscritti alla CA tramite identificativi validi come la carta d'identità (dovendo dimostrare la propria identità), una coppia di chiavi pubbliche e private, mette tutte le chiavi pubbliche in un elenco pubblico, disponibile (ad esempio) su internet e quando Alice vuole la chiave pubblica di Bob, la cerca nell'elenco pubblico. Il problema è sempre che il canale non è autenticato quindi potrebbero esserci problemi nella comunicazione con la CA (problema mitigato da vari metodi, software etc...).
Nella realtà le CA sono magari i ministeri statali (o in Italia per esempio le Poste, controllate dallo stato) o grosse aziende (come TIM) o altri distributori certificati (che non hanno interesse a ingannare i clienti ma potrebbe non essere sempre così, con magari governi che spiano persone scomode etc...).
Fidarsi è quindi sempre molto delicato. CA e TTP in generale non piacciono in crittografia quindi solitamente, quando si fa un nuovo protocollo, si descrive come funzionerebbe con una TTP ma anche senza, che è la soluzione più difficile. Legato al problema è la tematica del "denaro digitale", dovendo evitare il *double spending* (e si passa alle tematiche blockchain etc...).
Il problema è che la CA diventa il collo di bottiglia delle comunicazioni, avendo un **single point of failure**. Si hanno varie soluzooni:

- La CA delega e autorizza altre CA e così si forma una gerarchia di CA, ovvero una PKI. Il problema, sopratutto qualora i singoli utenti contattino le CA, è mantenere le informazioni aggiornate ovvero quando un'informazione viene modificata in una CA, la modifica deve propagarsi rapidamente a tutte le altre CA. Questo deve essere veloce, magari in ottica di furto di chiave segreta etc...

- una seconda soluzione è che quando gli utenti sottoscrivono la CA ricevono un certificato, del tipo:

  $$sig_{CA}(Bob, E_B, initial\ \ date, final\ \ date)$$

  con:

  - qual è la chiave pubblica
  - chi è il proprietario della chiave pubblica
  - l'intervallo di tempo in cui il certificato è valido
  - informazioni aggiuntive

e per questo si ha il formato standard X.509 usato in TLS/SSL e HTTPS. Quando Alice ha bisogno della chiave pubblica di Bob, Bob può fornirle il certificato che ha ricevuto dalla CA. Il certificato è firmato dalla CA quindi:

- la chiave segreta della CA è molto difficile da contraffare
- la chiave pubblica di CA deve essere molto facile da trovare e quando la CA cambia le sue chiavi, deve farlo aggiornare le informazioni ovunque

Eve dovrebbe costruire un certificato del tipo:

$$sig_{CA}(Bob, E_E, initial\ \ date, final\ \ date)$$

Rompendo del tutto la firma digitale della CA

Se Bob ritiene che la sua chiave segreta sia stata compromessa, può revocare le sue chiavi e il certificato e in quel momento la CA inserisce il certificato corrispondente in un **Certificate Revocation List (*CRL*)**. Quando Alice riceve il certificato da Bob, deve controllare che tale certificato non sia nel CRL. Il CRL può essere pubblicato da CA o consegnato a ogni utente, come quando aggiorniamo le definizioni dei virus con il nostro software antivirus e questo va fatto ogni poco tempo, per non compromettere la sicurezza, ma nemmeno troppo spesso per problemi di prestazioni (???).
Un altro modello, per evitare il problema di fiducia nella CA, è il **Web of Trust**, adottato da PGP, che non richiede un'autorità centrale. L'idea è che ogni utente assegna un punteggio alle persone con cui comunica. Il punteggio può essere assegnato direttamente, oppure può essere calcolato come una combinazione dei punteggi di altri utenti. Si hanno quindi regole per calcolare i punteggi:

- se mi fido di A, che ha un punteggio alto, e A si fida di B, allora il punteggio di B aumenta
- se mi fido di A e A non si fida di B, il punteggio di B si abbassa
- di solito, il punteggio di B è calcolato come una combinazione lineare dei punteggi dati da tutte le persone che lo conoscono (e che io conosco)

Il problema è quindi il comportamento degli utenti.
Nell'ultima lezione sono stati fatti anche *Test di Primalità* e *Curve Ellittiche*, non richiesti in esame. Slide su Moodle.

Capitolo 5

Ripasso Concetti Utili

Vengono qui elencati alcuni concetti utili di algebra usati nella parte di crittografia.

5.1 Algebra

Definizione 28. *Un **gruppo** G, indicato con:*

$$(G, \bullet)$$

*è una **struttura algebrica** composta da:*

1. *un insieme G di elementi*
2. *un'operazione binaria $\bullet : G \times G \to G$*

L'operazione binaria deve essere tale che si rispettino le seguenti proprietà:

- ***chiusura**: se si hanno $a, b \in G$ allora $a \bullet b \in G$*
- ***associatività**: $\forall a, b, c \in G$ si ha che $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$*
- ***esistenza dell'identità**: $\exists e \in G$ tale che $\forall a \in G$ si ha $a \bullet e = e \bullet a = a$*
- ***esistenza dell'inverso**: $\forall a \in G$ $\exists a' \in G$ tale che $a \bullet a' = a' \bullet a = e$*

In crittografia mediamente si hanno due operazioni, somma e prodotto.

Teorema 20. *Se ho un gruppo basato sulla somma ho un gruppo **isomorfo** basato sul prodotto e viceversa. Questo per la definizione data di gruppo, con relazioni tra coppie di elementi dell'insieme.*

Come operazione di un gruppo posso avere anche cose più particolari come la composizione di permutazioni.
In crittografia si usano **gruppi finiti**, anche se abbastanza grandi, sufficientemente grandi da non poter osservare tutte le relazioni tra coppie di elementi di G, permettendo appunto funzioni one-way (per invertire servirebbe una sorta di visione globale).

Definizione 29. *Si definisce **ordine del gruppo** G come il numero di elementi di G.*

Definizione 30. *Un gruppo G è detto **commutativo**, o **abeliano**, se:*

$$\forall a, b \in G \text{ vale } a \bullet b = b \bullet a$$

Come notazione si ha:

- se usiamo la notazione additiva $(G, +, 0)$, l'inverso di a è indicato da $-a$
- se usiamo la notazione moltiplicativa $(G, \cdot, 1)$, l'inverso di a è indicato da a^{-1}

Definizione 31. *Dato un gruppo moltiplicativo $(G, \cdot, 1)$ si definisce così l'**esponenziazione**:*

$$\forall g \in G \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha:

$$\begin{cases} g^0 = 1 \\ g^n = g \cdot g^{n-1} \end{cases}$$

è quindi una definizione ricorsiva sull'esponente, avendo come caso base g^0 che produce l'identità.

Definizione 32. *Un gruppo G è detto **ciclico** se $\exists g \in G$ tale che:*

$$\forall a \in G \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a = g^n$$

*ovvero esiste almeno un g (il loro numero cresce ad aumentare dell'ordine di G), detto **generatore** di G, tale che $g^n = a$, ovvero tutti gli elementi del gruppo sono espressi da g^n, per un certo $n \in \mathbb{N}$. Essendo il gruppo finito ad un certo punto l'esponente raggiunge un valore massimo e quindi incrementandolo si riparte dall'n più piccolo per ottenere dopo un po' tutti gli $a \in G$.*

Teorema 21. *Un gruppo ciclico è sempre abeliano per le proprietà delle potenze.*

Definizione 33. *Un* ***anello*** *R, indicato con:*

$$(R, +, \cdot)$$

è una struttura algebrica composta da:

1. *un insieme R di elementi*
2. *un'operazione binaria $+ : R \times R \to R$ detta* ***somma***
3. *un'operazione binaria $\cdot : R \times R \to R$ detta* ***prodotto***

avendo soddisfatte le seguenti proprietà:

- *$(R, +)$, nel dettaglio $(R, +, 0)$ è un gruppo abeliano*
- ***chiusura del prodotto****: se si hanno $a, b \in R$ allora si ha $a \cdot b \in R$*
- ***associatività del prodotto****: $\forall a, b, c \in R$*
  si ha che $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- ***distributività****: $\forall a, b, c \in R$*
  si ha che $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  e si ha che $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Posso indicare l'anello R anche con:

$$(R, +, \cdot, 0, 1)$$

Definizione 34. *Un anello R è detto* ***commutativo****, o* ***abeliano****, se:*

$$\forall a, b \in R \text{ vale } a \cdot b = b \cdot a$$

Definizione 35. *Un* ***dominio integrale*** *è definito come un anello commutativo R che soddisfa le seguenti proprietà:*

- ***identità per il prodotto****: $\exists 1 \in R$ tale che*
  $\forall a in R, \ \ a \cdot 1 =$
  $c dot a = a$
- ***assenza di divisori dello zero****: se si hanno $a, b \in R$ e $a \cdot b = 0$*
  allora o $a = 0$ o $b = 0$

Definizione 36. *Un* ***campo*** F*, indicato con:*

$$(F, +, \cdot)$$

è un ***dominio integrale*** *che soddisfa la proprietà per cui ogni elemento ha un inverso moltiplicativo:*

$$\forall a \in F, a \neq 0, \exists a^{-1} \in F \ t.c. \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Posso indicare il campo F *anche con:*

$$(F, +, \cdot, 0, 1)$$

In crittografia si usano spesso i campi, e serve definire le altre operazioni classiche.

Definizione 37. *Dato un campo* F *si definisce così la* ***sottrazione****:*

$$\forall a, b \in F, \ \ a - b = a + (-b)$$

Definizione 38. *Dato un campo* F *si definisce così la* ***divisione****:*

$$\forall a, b \in F, \ \ \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

Definizione 39. *Dato un intero positivo* n *possiamo parlare di* ***aritmetica modulare****.*
Ogni $a \in \mathbb{Z}$ *quando diviso per* n *produce un* ***quoziente*** q *e un* ***resto/residuo*** r *tali che:*

$$a = qn + r$$

$$0 \leq r < n$$

$$q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$

Questo calcolo è realizzabile in modo efficiente dal punto di vista computazionale.
Si ha che:

$$a \bmod n$$

è il resto della divisione tra a *e* n*.*

Definizione 40. *Dati* $a, b \in \mathbb{Z}$*, con* $b \neq 0$*, si dice che* b *divide* a*, indicato con* $b|a$ *se* $\exists m \in \mathbb{Z}$ *tale che* $a = mb$*.*

Posso quindi definire delle **classi** di numeri tutte con lo stesso resto.

Definizione 41. *Due interi a e b sono detti **congrui modulo** n se $a \bmod n = b \bmod n$ e si scrive:*

$$a \equiv b \mod n$$

L'operazione mod *ha diverse proprietà:*

- $a \equiv b \mod n$ *sse* $n|(a-b)$
- $a \equiv b \mod n$ *sse* $b \equiv a \mod n$
- $a \equiv b \mod n$ *e* $b \equiv c \mod n$ *implicano* $a \equiv c \mod n$

*Si ha quindi una **relazione di congruenza**.*

Si ha quindi che $\bmod n$ mappa $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ che è etto **insieme delle classi di resto modulo** n.
Si hanno quindi le seguenti proprietà:

- $[(a \bmod n) + (b \bmod n)] \bmod n = (a+b) \bmod n$
- $[(a \bmod n) - (b \bmod n)] \bmod n = (a-b) \bmod n$
- $[(a \bmod n) \cdot (b \bmod n)] \bmod n = (a \cdot b) \bmod n$

da cui definire somma, sottrazione e prodotto in $\mathbb{Z}_n$.

Definizione 42. *Si definisce l'**esponenziazione modulare**, sulle classi di resti, come:*

$$\begin{cases} (a \bmod n)^0 = 1 \\ (a \bmod n)^k = a^k \bmod n \end{cases}$$

anche se ci sono (e si vedranno) modi più efficienti per calcolare la cosa.

Si ha quindi che gli elementi di $\mathbb{Z}_n$ sono le classi resto $[0]_n, [1]_n, \dots [n-1]_n$ con:

$$[r]_n = \{a \in \mathbb{Z} | a \equiv r \mod n\}$$

Si noti che un $\mathbb{Z}_n$ **non sempre è un campo**, esistendo i divisori dello 0, ma **sempre è un anello**. Rispetto alla somma si ha sempre l'inverso ma non è detto per il prodotto.

Definizione 43. *Si definiscono le regole di semplificazione in $\mathbb{Z}_n$:*

- *se* $(a+b) \equiv (a+c) \bmod n$ *allora* $b \equiv c \bmod n$*, potendo aggiungere* $-a$ *ad entrambi in membri*

- *se* $ab \equiv bc \mod n$ *e* $GCD(a, n) = 1$*, con GCD greatest common divisor, allora* $b \equiv c \mod n$*, potendo moltiplicare* a^{-1} *ad entrambi in membri*

- *dato* $a \in \mathbb{Z}_n$ *esiste* $a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ *sse* $GCD(a, n) = 1$*. Questa proprietà è importante in quanto, essendo* $\mathbb{Z}_n$ *un anello ci si chiede se esiste l'inverso di un valore a ed esso esiste sse il massimo comun divisore tra a e n fa 1, questo perché se si deve costruire un inverso x devo risolvere un'equazione del tipo:*

$$ax \equiv 1 \mod n$$

e quindi esiste soluzione sse $GCD(a, n)$ *divide 1 e quindi sse* $GCD(a, n) = 1$

Per calcolare il *greatest common divisor* si usa l'**algoritmo di Euclide**. Dati a, b due interi positivi si vuole calcolare $GCD(a, b)$. Si noti che:

- $GCD(a, b) = GCD(-a, b) = GCD(a, -b) = GCD(a, -b)$ e quindi ci basta calcolare $GCD(a, b)$ assumendo gli input positivi

- l'algoritmo sfrutta il la proprietà per cui:

$$GCD(a, b) = GCD(b, a \mod b)$$

avendo, per definizione:

$$GCD(a, 0) = a$$

Si ha quindi l'algoritmo, avendo a, b interi tali che $a > b > 0$: Tale algoritmo

Algorithm 15 Algoritmo di Euclide

```
function EUCLID(a,b)
    while b ≠ 0 do
        r ← a mod b
        a ← b
        b ← r
    return a
```

può essere verificato **totalmente**, ovvero termina per ogni input.

Teorema 22. *Tutti i **campi finiti** hanno ordine* p^n*, con p **numero primo** e* $n \geq 1$ *intero.*

Teorema 23. *Si ha che $\mathbb{Z}_n$ è un **campo** sse $n = p^m$, con p **numero primo** e $n \geq 1$ intero. Quindi i campi finiti sono solo e solamente tutti i vari $\mathbb{Z}_{p^n}$.*
*$\mathbb{Z}_{p^n}$ è spesso indicato con $GF(p^n)$, se $n \geq 2$ e $GF(p)$, se $n = 1$, dove GF sta per **Galois Field**. Per quanto detto GF quindi è anche usato per indicare i campi finiti.*
$\mathbb{Z}_2$ è il più piccolo campo finito e si ha che:

- *la somma è lo xor*
- *il prodotto è l'and*
- *possiamo prima trasformare le formule booleane in equazioni aritmetiche, semplificarle e poi trasformarle di nuovo in formule booleane*

Le operazioni tra $GF(p)$ e $GF(p^n)$ sono fatte in maniera diversa. Le operazioni di somma sono, nel primo caso, somme di valori $\bmod p$ ed equivalentemente per il prodotto, anch'essa $\bmod p$. Per $GF(p^n)$ gli elementi sono visti di solito come vettori di n elementi, con ogni elemento tra 0 e $p-1$. In questo caso la somma diventa somma tra vettori, componente per componente, sempre $\bmod p$ (se $p = 2$, avendo quindi bit, faccio lo xor). Per il prodotto si ha che gli elementi di $GF(p^n)$ si rappresentano come polinomi. Si fa quindi il prodotto tra polinomi. Si sceglie quindi un polinomio irriducibile e si divide il risultato del prodotto per tale polinomio (una scelta diversa di tale polinomio comporta una diversa rappresentazione di $GF(p^n)$, alcune più efficienti/opportune e altre meno) e si calcola il resto della divisione. Tale resto è il risultato del prodotto di due elementi in $GF(p^n)$.
Parlando di $GF(p)$ si ha che, dato $a \in \mathbb{Z}_p$ allora $\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ sse $GCD(a, p) = 1$.
Essendo campi finiti ogni elemento non nulla ha inverso e quindi $\forall a \in \mathbb{Z}_n$ si ha che $GCD(a, n) = 1$ sse $\exists p$ primo e $\exists k \geq 1$ tali che $n = p^k$.

Teorema 24. *Se, preso p primo, $\mathbb{Z}_p$ e $w \in \mathbb{Z}_p$, moltiplico tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_p$ per w ottengo una permutazione di $\mathbb{Z}_p$.*
Tale permutazione non è purtroppo one-way.

Definizione 44. *Si definisce la **semplificazione** in $\mathbb{Z}_p$ avendo che, se vale $ab \equiv ac \bmod p$ allora vale $b \equiv c \bmod p$*

Possiamo quindi avere l'**algoritmo di Euclide esteso** che, dato $b \in \mathbb{Z}_n$, se $GCD(b, m) = 1$ riesce a calcolare $b^{-1} \in \mathbb{Z}$ in modo molto efficiente.
Su slide bozze di pseudocodice non verificato.
Si ha anche un modo per calcolare altro, oltre $b^{-1} \in \mathbb{Z}$. Tale versione si

applica al caso più generale per cui $GCD(a, b) = r$ e si basa sulla **identità di Bezout** che enuncia, dato $r = GCD(a, b)$, che esistono sempre due numeri interi s e t (che possono anche avere segno opposto) tali per cui:

$$r = sa + tb$$

e l'algoritmo esteso con questa identità calcola, a partire da a e b, la tripla r, s, t.
Si ha che s e t sono i coefficienti di una combinazione lineare di a e b che da il valore di $r = GCD(a, b)$.
Su slide bozze di pseudocodice non verificato.

5.2 Probabilistic TM

La **Probabilistic Turing Machine** è un modello intermedio tra la DTM e la NDTM. Studiando l'albero di computazione, simile a quello delle NDTM, si associa ad ogni ramo una certa probabilità e ad ogni passo del calcolo, la macchina sceglie la configurazione successiva in base alle probabilità assegnate (mentre nelle NDTM si andava in tutte le configurazioni successive contemporaneamente).
Spesso quindi gli algoritmi probabilistici si comportano bene.
Si hanno quindi varie classi di complessità:

- **RP**, dove si accetta l'input se e solo se almeno la metà delle foglie lo accetta
- **BPP**, dove la probabilità di sbagliare è delimitata da una costante
- **ZPP**, dove se il calcolo si interrompe, la risposta è corretta; tuttavia, esiste una probabilità maggiore di 0 che l'algoritmo non si fermi

Per molti problemi esistono semplici algoritmi probabilistici, a volte più complessi.
In crittografia si assume che la potenza di calcolo di Eve sia quella di una PTM, solitamente di classe BPP.