Fondamenti Logico Matematici dell'Informatica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.

Capitolo 2

Dimostrazioni come Algoritmi

Parliamo in primis del **paradigma dimostrazioni = algoritmi**.
Prendiamo come *linguaggio di specifica* un **linguaggio del prim'ordine con identità**.

Si riportano alcune definizioni utili in *logica matematica* tratte da Wikipedia:

Definizione 1. *Definiamo* ***linguaggio del primo ordine*** *come un linguaggio formale che serve per gestire meccanicamente enunciati e ragionamenti che coinvolgono i connettivi logici, le relazioni e i quantificatori* $\forall$ *e* $\exists$.
Si ha che "del primo ordine" indica che c'è un insieme di riferimento e i quantificatori possano riguardare solo gli elementi di tale insieme e non i sottoinsiemi (posso dire "per tutti gli elementi" ma non "per tutti i sottoinsiemi"). Tale linguaggio è caratterizzato da:

- *un* ***alfabeto di simboli*** *per variabili, costanti, predicati, funzioni, connettivi, quantificatori o punteggiatura*
- *un* ***insieme di termini*** *per denotare gli elementi dell'insieme in analisi*
- *un* ***insieme di formule ben formate (FBF)*** *ovvero un insieme di stringhe composte di simboli dell'alfabeto che vengono considerate sintatticamente corrette*

Definizione 2. *Definiamo* ***sistema assiomatico*** *come un insieme di assiomi che possono essere usati per dimostrare teoremi. Una teoria matematica consiste quindi in una assiomatica e tutti i teoremi che ne derivano.*

Definizione 3. *Definiamo un sistema formale come una formalizzazione rigorosa e completa della nozione di sistema assiomatico costituito da:*

- *un alfabeto*
- *una grammatica che specifica quali sequenze finite dei simboli dell'alfabeto corrispondono ad una FBF. La grammatica deve essere ricorsiva, nel senso che deve esistere un algoritmo per decidere se una sequenza di simboli è o meno una formula ben formata*
- *un sottoinsieme delle FBF che sono gli assiomi. L'insieme degli assiomi è ricorsivo*
- *le regole di inferenze che associano formule ben formate ad n-uple di formule ben formate*

Definizione 4. *Definiamo gli* ***assiomi di Peano*** *come un gruppo di assiomi ideati al fine di definire assiomaticamente l'insieme dei numeri naturali:*

- *esiste un numero naturale: 0 (alternativamente 1 se si vuole escludere 0):*
$$0/1 \in \mathbb{N}$$
- *ogni naturale ha un naturale come successore. Ho quindi una funzione "successore" tale che:*
$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
- *numeri diversi hanno successori diversi, ovvero:*
$$x \neq y \to S(x) \neq S(y)$$
- *0 (o alternativamente 1) non è il successore di alcun naturale, ovvero:*
$$S(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}$$
- *ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali. Ovvero dato $U \subseteq \mathbb{N}$ tale che:*
  - $0 \in U$
  - $x \in U \to S(x) \in U$

allora:

$$U = \mathbb{N}$$

Tale assioma è detto ***assioma dell'induzione*** *o* ***principio di induzione***

Definizione 5. *In una teoria del primo ordine si chiama* ***chiusura universale*** *di una formula ben formata $A(x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1, \ldots, x_n$ variabili libere, la formula:*

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_n \ A(x_1, \ldots, x_n)$$

ottenuta premettendo un quantificatore universale su ogni variabile libera.

Definizione 6. *Definiamo, in logica matematica,* ***aritmetica di Peano (PA)*** *come una teoria del primo ordine che ha come assiomi propri una versione degli* ***assiomi di Peano*** *espressi nel linguaggio del primo ordine. Si ha quindi che il linguaggio di PA è il linguaggio dell'aritmetica del primo ordine con i seguenti simboli:*

- *vari simboli per le variabili: x, y, z, x_1 etc...*
- *costanti individuali: 0 etc...*
- *simboli per funzioni unarie: S*
- *simboli per funzioni binarie $+$, $\times$ ($+(x, y)$ si indica anche con $x + y$ e analogamente si fa per $\times$)*
- *simboli per relazioni unarie: $=$*
- *simboli per connettivi logici, quantificatori e parentesi*

Gli assiomi di PA sono costituiti da:

- *gli assiomi logici*
- *gli assiomi per l'uguaglianza*
- *i seguenti assiomi propri (che "traducono" nella logica di Peano gli assiomi di Peano):*
  - $\forall x \neg (S(x) = 0)$
  - $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
  - $\forall x (x + 0 = x)$

- $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x (x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y (x \times S(y) = (x \times y) + x)$

Agli assiomi propri si aggiunge anche il seguente assioma proprio:

$$(\phi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x(\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \phi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow \forall x \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

*per ogni FBF $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ di cui $x, x_1, \ldots, x_n$ sono variabili libere. Questo è uno schema di assiomi detto **schema di induzione** e si ha un assioma per ogni FBF ϕ*

Definizione 7. *Definiamo, in logica classica, il **principio del terzo escluso** che stabilisce che una proposizione e la sua negazione hanno valore opposto, non avendo una "terza opzione". In logica classica è una **tautologia**.*

Definizione 8. *Un termine è un **termine chiuso** sse non contiene delle variabili individuali.*

Definizione 9. *Una **formula chiusa** è una formula costruita nel linguaggio dei predicati in cui o non compaiono variabili o tutte le variabili presenti sono vincolate a un quantificatore e sono dunque variabili legate.*

Esempio 1. *Vediamo qualche esempio:*

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N}\ t.c.\ mcd(x, y, z)$$

ovvero z è l'mcd di x e y.
Un altro esempio:

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}\ t.c.\ fatt(x, y)$$

ovvero y è il fattoriale di z.

Formule come quelle dell'esempio possono essere lette come **specifiche del problema di trovare un algoritmo totalmente corretto** che calcoli il risultato di tale problema per ogni input valido. Questa lettura non è implicita nella logica classica, dove non è richiesto di stabilire come viene prodotto il risultato. Si ha quindi a che fare con una lettura di un problema algoritmico di interesse per un informatico.
Le **dimostrazioni** di questa tipologia di formule, nell'ambito dell'**aritmetica di Peano (*PA*)**, sono quindi interpretabili come gli algoritmi che calcolano le funzioni specificate.
Come *vantaggi* di questa "atteggiamento" si ha che:

- l'attenzione si concentra su costruire la dimostrazione, sui passi dimostrativi, e non sulla stesura del codice
- i passi elementari della dimostrazione sono automatici
- la correttezza della dimostrazione è verificabile in modo automatico
- l'estrazione/sintesi dell'algoritmo dalla dimostrazione è diretta. Una volta che si ha la dimostrazione corretta si può estrarre direttamente l'algoritmo. Tale algoritmo è totalmente corretto rispetto alla specifica

La difficoltà si trasferisce dall'ambito convenzionale della programmazione e codifica dell'algoritmo in se alla costruzione dimostrazione e dei passi dimostrativi.
Si hanno quindi anche degli *svantaggi*, abbastanza problematici:

- l'algoritmo ottenuto non è ottimale rispetto al problema. Rispetto a questo bisognerebbe capire come incorporare "più semantica" del problema da risolvere nella dimostrazione stessa
- il formalismo e il linguaggio delle dimostrazioni sono "lontani" da quelli usati usualmente nella pratica informatica

Non tutte le dimostrazioni sono direttamente interpretabili come algoritmi. Per vedere questa cosa prendiamo un esempio famoso di formula da dimostrare in analisi.

Esempio 2 (esempio di Troelstra)**.** *Esistono due numeri irrazionali n e m tali che n^m è razionale. In termini di formula del primo ordine si ha quindi:*

$$\exists n, m \in \{\mathbb{R}/\mathbb{Q}\} \ t.c. \ n^m \in \mathbb{Q}$$

Cerchiamo di capire se:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \ o \ \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

Vediamo quindi i due casi (sono solo due per il principio del terzo escluso):

1. *assumo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ e pongo $n = m = \sqrt{2}$ avendo trovato due numeri irrazionali n e m tali per cui $n^m \in \mathbb{Q}$*

2. assumo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ *e pongo* $n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *e* $m = \sqrt{2}$*. Ne segue che:*

$$n^m = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

e quindi ho due numeri irrazionali n *e* m *tali per cui* $n^m \in \mathbb{Q}$

Non possiamo essere soddisfatti di questa dimostrazione. Non veniamo a conoscenza, tramite la dimostrazione, che $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *sia o meno razionale. Non possiamo capirlo in quanto assumo il terzo escluso e quindi non so quale dei due casi sia valido, non abbiamo un "esiste" costruttivo (*$\exists n, m \in \{\mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$*) in quanto non sappiamo se* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *è razionale o meno. Nonostante ciò al dimostrazione sta perfettamente "in piedi" ma non esibisce* n *e* m *in quanto non determina se* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$*.*

Quanto successo nell'esempio di Troelstra non può succedere in un **sistema costruttivo**.

Definizione 10. *Definiamo **sistema costruttivo** un sistema dove si hanno come requisiti minimali:*

- $S \vdash A \vee B \to S \vdash A$ *oppure* $S \vdash B$ *quindi se nel sistema dimostro* $A \vee B$ *allora nel sistema dimostro* A *o dimostro* B*, con* A *e* B *formule chiuse. Questa è la **disjunction property (DP)***
- $S \vdash \exists x A(x) \to S \vdash A(t)$ *quindi se ho dimostrato un esistenziale allora deve esistere un termine chiuso* t *per cui dimostro* $A(t)$ *nel sistema. Questa è la **explicitly definibility property (EDP)**, detta anche **existence/witness property***

La logica classica quindi **non è un sistema costruttivo** perché in logica classica riesco sempre a dimostrare $A \vee \neg A$ mentre nell'esempio di Troelstra si nota come non si possa dimostrare né A né $\neg A$. Quindi da una dimostrazione classica di $A \vee \neg A$ io non tiro fuori una dimostrazione classica di A oppure una dimostrazione classica di $\neg A$ quindi non vale la DP. Inoltre non vale nemmeno la EDP, ho dimostrato l'esistenza di n e m (che sono termini chiusi) ma non ho trovato se vale la proprietà che siano irrazionali. La logica classica quindi non è una logica costruttiva.

2.1 Interpretazione BHK

Passiamo quindi ad una semantica informale che per ogni costante logica associa una condizione per la sua *costruibilità*. Questa è **l'interpretazione Brouwer-Heyting-Kreisel (*BHK*)**.

Definizione 11. *Presa una costruzione π per questa semantica proposizionale si ha che:*

- $\pi(A \wedge B) = \pi'(A)$ *e* $\pi''(B)$ *ovvero una costruzione di $A \wedge B$ è uguale ad un'altra costruzione di A* **e** *un'altra ancora di B*
- $\pi(A \vee B) = \pi'(A)$ *o* $\pi''(B)$ *ovvero una costruzione di $A \vee B$ è uguale ad un'altra costruzione di A* ***o*** *un'altra ancora di B*
- $\pi(A \to B)$ *è una funzione (o un funzionale, ovvero un insieme di funzioni) f che associa ad ogni costruzione $\pi'(A)$ una costruzione $\pi''(B)$ tale che $\pi'' = f(\pi')$. Quindi f associa costruzioni di A a costruzioni di B*
- $\pi(\neg A)$ *è una costruzione π' di $A \to \bot$*

Lato semantica predicativa si ha che, dato un dominio D per la variabile x:

- $\pi(\exists x A(x)) = \langle c, \pi' \rangle |\, c \in D$ *e* $\pi'(A(c))$ *quindi è uguale ad una coppia $\langle c, \pi' \rangle$ tale che c appartiene al dominio e π' è una costruzione effettiva di $A(c)$*
- $\pi(\forall x A(x)) =$ *è una funzione f che associa ad ogni elemento $c \in D$ una costruzione $\pi'(A(c))$ tale che $\pi' = f(c)$*

Questa semantica "naive" ha alcune problematiche/aporie:

- la BHK non specifica la costruzione di una formula atomica
- la BHK non dimostra il falso infatti nella costruzione di $\neg$ associamo la costruzione del $\neg A$ a quella dell'implicazione, che è una costruzione che associa costruzioni di A e costruzioni di B e quindi nessuna costruzione potrebbe avere il falso

Bisognerà quindi chiarire alcune restrizioni dell'interpretazione BHK.
Si hanno varie semantiche per il costruttivismo che hanno "precisato" la BHK:

- la semantica della **realizzabilità ricorsiva** di Kleene
- la semantica dell'**interpretazione dialettica** di Gödel
- la semantica delle **prove possibili** di Prawitz
- la semantica dei **problemi finiti** di Medvedev

Queste 4 semantiche sono coerenti con la BHK e quindi sono **semantiche del costruttivismo**.
Passiamo ora ad una definizione formale.

Definizione 12. *Definiamo come **sistema costruttivo** un sistema S:*

$$S = T + L$$

dove:

- *T è una teoria con assiomi di forma particolare*
- *L è una logica intuizionistica, che prendiamo come punto di partenza per il costruttivismo, con le sue estensioni*

Non sempre comunque date T e L si ha che S è un sistema costruttivo.

Un esempio di sistema costruttivo è dato dall'**aritmetica intuizionistica**, ovvero la PA interpretata all'interno della logica intuizionistica. Altri esempi sono le **teorie con assiomi di Harrop**, teorie con assiomi $\forall\exists$ con matrice positiva priva di quantificatori e con minimo modello di Herbrandt etc...
Le clausole di Horn usate i Prolog hanno un modello minimo di Herbrandt e hanno assiomi $\forall\exists$ con matrice positiva priva di quantificatori dove $\exists$ viene eliminato attraverso skolemizzazione e il $\forall$ è implicito nelle regole del programma in quanto tutte le X, Y etc... si intendono quantificati universalmente.
Quindi la parte assiomatica di una teoria non basta a rendere costruttivo il sistema anche se la logica è costruttiva. Tuttavia se si restringono le assiomatizzazioni con formule del primo ordine di tipo particolare si possono ottenere sistemi costruttivi in cui vale come minimo la *DP* e la *EDP*.

2.2 Deduzione naturale

Vediamo un accenno della **deduzione naturale** ovvero di un **calcolo diretto** (quindi differente dal calcolo indiretto dei tableaux). Nella deduzione naturale si ha, per ogni connettivo, una **regola di introduzione** i e una **regola di eliminazione** e. Ad esempio se ho A e B come premesse posso introdurre l'and con la regola di introduzione dell'and:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} i\wedge$$

Se invece ho $A \land B$ come premessa posso usare la regola di eliminazione dell'and, producendo:

$$\frac{A \land B}{A} e\land \text{ oppure } \frac{A \land B}{B} e\land$$

Avendo quindi due regole di eliminazione per l'and.
Passiamo all'or. Ho due regole di introduzione:

$$\frac{A}{A \lor B} i\lor \text{ oppure } \frac{B}{A \lor B} i\lor$$

L'eliminazione della or è complessa e verrà trattata più avanti ma è della forma:

$$\frac{A \lor B \quad C \quad C}{C} e\lor$$

Dove si ha che se se ho $A \lor B$ come premessa e assumendo A ho C ma anche assumendo B ho C posso eliminare l'or e ottenere C.
Passiamo all'implicazione. Se ho come assunzione A e da B riesco a dimostrare B allora posso introdurre l'implicazione:

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} i\to$$

Per l'eliminazione ho che, tramite **modus ponens**:

$$\frac{A \to B \quad A}{B} e\to$$

Abbiamo poi la **regola del falso** che dice che dal falso segue qualsiasi cosa:

$$\frac{\bot}{B} \bot$$

e la regola dell'eliminazione della negazione che dice che se assumo $\neg A$ e ottengo il falso significa che si è ottenuta una contraddizione e quindi elimino il $\neg$:

$$\frac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \bot\end{matrix}}{A} e\neg$$

Passiamo al $\forall$. Se ho dedotto $A(p)$ per p generico posso introdurre il $\forall$:

$$\frac{A(p)}{\forall x A(x)} i\forall$$

Se ho come assunzione $\forall x A(x)$ posso dedurre un qualsiasi $A(t)$:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)} e\forall$$

Possiamo fare l'equivalente per l'$\exists$, dove se esiste $A(t)$ posso dedurre l'esistenza di un certo x per cui vale $A(x)$:

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)} i\exists$$

L'eliminazione dell'esiste è complessa e verrà trattata più avanti ma è della forma:

$$\frac{\exists x A(x) \quad \overset{[A(p)]}{C}}{C} e\exists$$

Dove assumendo $\exists x A(x)$, assumendo $A(p)$ con p generico e riuscendo ad ottenere C da quest'ultima assunzione con una serie di restrizioni posso ottenere C eliminando $\exists$.
Una dimostrazione in deduzione naturale è modulare alle logiche che si vogliono usare:

- nelle dimostrazioni in logica classica utilizzo tutte le regole della deduzione naturale appena introdotte
- nelle dimostrazioni in logica intuizionistica non devo usare la regola di eliminazione della negazione
- nelle dimostrazioni in logica minimale non devo usare la regola di eliminazione della negazione e nemmeno la regola che dal falso segue qualsiasi cosa

Possiamo quindi caratterizzare queste tre logiche e nelle ultime due, quella intuizionistica e quella minimale, si può dimostrare che valgono DP e EDP mentre non posso dire lo stesso per la logica classica. Si ha inoltre che:

$$\text{logica minimale} \subseteq \text{logica intuizionistica} \subseteq \text{logica classica}$$

Discorso diverso vale per le teorie, ovvero per i sistemi, dove l'assiomatizzazione può fare la differenza portando anche fuori dalla costruttività (se ad esempio assumo come assioma che $\forall x A(x) \vee \neg A(x)$ e gli aggiungo la logica intuizionistica ottengo la logica classica che non è costruttiva).
Una teoria specifica è l'aritmetica di Peano dove si hanno i seguenti assiomi:

- $\forall x \neg(S(x) = 0)$

- $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \to x = y)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$

Dove si ha la regola d'identità che in realtà sono due, ovvero $id1$ e $id2$:

$$\frac{}{x = x}id1 \text{ e } \frac{x = y \quad A(x)}{A(y)}id2$$

Dove si ha anche il principio/regola d'induzione:

$$\frac{A(0) \quad \overset{[A(j)]}{\overset{\cdots}{A(S(j))}}}{A(t)}ind$$

Dove se dimostro $A(0)$ e assunto $A(j)$ dimostro il successore di $A(j)$ allora posso dedurre $A(t), \forall t$.

Esempio 3. *Vediamo ora un esempio con degli assiomi specifici, costruttivi:*

- $pari(0)$
- $\forall x(pari(x) \to \neg pari(S(x)))$
- $\forall x(\neg pari(x) \to pari(S(x)))$

Quindi si ha che se x è apri non lo è il successore e se x non è pari lo è il successore. Assumiamo inoltre che 0 sia pari.
Scritta così potrebbe essere riscritta "1:1" in Prolog.
Cerchiamo quindi di dimostrare che che:

$$\forall x(pari(x) \lor \neg pari(x))$$

che si può pensare si un terzo escluso e quindi valga sempre. Questa formula, a livello di specifica, va letta come una funzione "per ogni numero naturale costruisce $pari(x)$ o $\neg pari(x)$" quindi costruisce o la parte sinistra o la parte destra. Quindi la formula si può leggere come la specifica di algoritmo che per ogni naturale mi dice se vale la parte sinistra o la parte destra dell'or e quindi è un algoritmo di decisione effettivo che per ogni naturale ti dice se è pari o non è pari. Questa è un'interpretazione diversa da quella classica.

Posso quindi fare una dimostrazione per induzione.
*Il **caso base** è, chiamando pari p, assunto per assioma* $p(0)$ *e usando l'introduzione dell'or:*

$$\frac{p(0)}{p(0) \vee \neg p(0)} i\vee$$

*Passo al **caso passo**.*
Assumo per ipotesi induttiva $p(j) \vee \neg p(j)$ *e assumiamo* $\forall x(p(x) \vee \neg p(S(x)))$ *che è un altro degli assiomi. Procedo eliminando il* $\forall$*:*

$$\frac{\forall x(p(x) \vee \neg p(S(x)))}{p(j), p(j) \to \neg p(S(j))} e\forall$$

procedo quindi eliminando l'implicazione:

$$\frac{p(j), p(j) \to \neg p(S(j))}{\neg p(S(j))} e \to$$

e continuo inserendo l'or:

$$\frac{\neg p(S(j))}{p(S(j)) \vee \neg p(S(j))} i\vee$$

Analogamente faccio per l'altro assioma $\forall x(\neg p(x) \vee p(S(x)))$*:*

$$\frac{\forall x(\neg p(S(x)) \vee p(S(x)))}{\neg p(j), \neg p(j) \to p(S(j))} e\forall$$

$$\frac{\neg p(j), \neg p(j) \to p(S(j))}{p(S(j))} e \to$$

$$\frac{p(S(j))}{p(S(j)) \vee \neg p(S(j))} i\vee$$

Partendo quindi da $p(j) \vee \neg p(j)$ *posso fare l'eliminazione dell'or ottenendo il **caso passo**:*

$$\frac{p(j) \vee \neg p(j)}{p(S(j)) \vee \neg p(S(j))} e\vee$$

e quindi posso concludere il passo induttivo:

$$\frac{p(0) \vee \neg p(0) \quad p(S(j)) \vee \neg p(S(j))}{\forall x(p(x) \vee \neg p(x))} ind$$

concludendo al dimostrazione costruttiva.
Posso quindi dire che, essendo 0 pari, 1 è dispari e quindi 2 è pari, 3 dispari etc... in pratica è un ciclo che parte dal caso base e poi decide per qualsiasi numero naturale. Possiamo quindi estrarre un algoritmo iterativo (potrei anche estrarne uno ricorsivo) da questa dimostrazione. Tale algoritmo è visualizzabile nell'implementazione C nel listing 1.

Listing 1 Codice C dell'algoritmo di calcolo pari creato dalla dimostrazione

```c
#include <stdio.h>

void A1(int* fdv){
  *fdv = 0;
}
void A2(int* j, int* fdv){
  *fdv = 1;
  *j = *j + 1;
}
void A3(int* j, int* fdv){
  *fdv = 0;
  *j = *j + 1;
}
void base(int* f){
  A1(&*f);
}
void passo(int* j, int ff1, int* ff2){
  if (ff1 == 0){
    A2(&*j, &*ff2);
  }else{
    A3(&*j, &*ff2);
  }
}

int main(){
  int x, j, ff;
  scanf("%d", &x);
  j = 0;
  base(&ff);
  while(j <= x - 1){
    passo(&j, ff, &ff);
  }
  if (ff == 0){
    printf("%d è pari\n", x);
  }else{
    printf("%d è dispari\n", x);
  }
  return 0;
}
```

Come detto algoritmi così sintetizzati non sono algoritmi ottimali e l'esempio del pari o dispari è evidente. Normalmente si avrebbe infatti:

Listing 2 Codice C dell'algoritmo di calcolo pari ottimale

```c
#include <stdio.h>
int main(){
  int x;
  scanf("%d", &x);
  if ((x % 2) == 0){
    printf("%d è pari\n", x);
  }else{
    printf("%d è dispari\n", x);
  }
  return 0;
}
```

E quindi si ha un limite nella costruzione dell'algoritmo anche se il primo sappiamo essere corretto (avendo applicato la deduzione naturale e l'induzione, ho la garanzia che in quella assiomatizzazione il programma sia totalmente corretto) mentre di quest'ultimo dovremmo dimostrare la correttezza. Nel primo programma la componente funzionale della dimostrazione è data dalle varie funzioni che si richiamano. L'algoritmo per ogni istanza calcola se vale la parte sinistra o destra della disgiunzione in modo uniforme. Le funzioni si deducono automaticamente dalla prova costruttiva. Niente di tutto ciò è asseribile sull'algoritmo ottimo.
Parlando invece di Prolog avrei una situazione diversa. In Prolog ogni computazione è un'*istanza di dimostrazione* che varia di caso in caso e quindi non si ha una dimostrazione generale. Possiamo dire che un programma Prolog non rappresenta l'algoritmo che risolve il problema specificato per ogni dato di input. Si ha quindi un diverso modello di calcolo/computazione.

Capitolo 3

Logica Intuizionistica

3.1 Logica Intuizionistica Proposizionale

La **logica intuizionistica proposizionale** è il primo paradigma che trattiamo di **logica costruttiva**, dove appunto valgono la **DP** e la **EDP**, che sono i due requisiti minimali per dire che una logica è costruttiva. L'intuizionismo proposizionale è il paradigma minimale di logica costruttiva.

3.1.1 Sintassi

Iniziamo a parlare dell'intuizionismo proposizionale e già a livello di linguaggio si ha una differenza tra la logica classica e quella intuizionistica.
Il linguaggio della logica proposizione intuizionistica comprende i seguenti *simboli*:

- variabili proposizionali A, B, C, etc...
- connettivi $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e $\rightarrow$. Il $\neg$ è l'unico connettivo unario mentre gli altri sono connettici binari
- simboli ausiliari come "(" e ")" utili a stabilire precedenze tra connettivi

Una formula ben formata intuizionistica è definita così:

1. ogni variabile proposizionale appartiene alle FBF
2. se A e B sono FBF allora:
   - $\neg A$
   - $A \vee B$

   - $A \wedge B$
   - $A \to B$

   appartengono alle FBF

3. nient'altro appartiene alle FBF

E fin qui non si hanno differenze con la logica classica.
La differenza rispetto alla logica classica si riscontra nel fatto che i 4 connettivi intuizionistici sono tra loro **completamente indipendenti**. In logica classica invece potrei anche solo usare $\neg$ e $\vee$ in quanto gli altri due si possono ricavare da questi due (tramite leggi di De Morgan etc...). In logica classica $\neg$ e $\vee$ formano un insieme minimale di operatori. In logica intuizionistica non ho nulla del genere, non posso ridurre nessun connettivo ad un altro. D'altro canto anche Prolog riduceva pesantemente il linguaggio, basandosi sulla logica classica e sulle clausole di Horn anche se si può aprire una discussione in merito al fatto che comunque la riduzione del linguaggio delle clausole di Horn in Prolog comunque garantisce l'algoritmicità delle dimostrazioni e la loro costruttività. Le clausole di Horn sono infatti una restrizione del linguaggio classico e non tutte le formule di logica classica sono esprimibili in termini di clausole di Horn e questa è la motivazione per cui il Prolog di fatto computa.
La logica classica pura non è costruttiva in quanto dimostro $A \vee \neg A$ anche se non è detto che poi siamo in grado di dimostrare A o di dimostrare $\neg A$. Il principio del terzo escluso fa "saltare" la costruttività della logica classica, "saltando" la proprietà della disgiunzione DP.
Da un punto di vista formale quindi la logica intuizionistica ha l'alfabeto della logica classica, la definizione di FBF della logica classica ma non si hanno le equivalenze classiche che permettevano la riduzione del numero di connettivi.
Le precedenze sui connettivi sono le stesse di quella logica classica e la modifica delle precedenze avviene con lo stesso uso delle parentesi della logica classica. Si ricorda che $\neg$ ha la precedenza su $\wedge$ che ha precedenza su $\vee$ che ha precedenza su $\to$.
Con il simbolo $\vdash$ indichiamo la **dimostrabilità**. Quindi la scrittura $\vdash A$, con $A \in FBF$, indica che la formula A è dimostrabile nella logica intuizionistica (in teoria bisognerebbe specificare la logica a pedice di $\vdash$ ma se omesso, salvo diversamente specificato, si parla di logica intuizionistica).
Passiamo quindi a presentare un **sistema deduttivo** per dimostrare formule nella logica intuizionistica.
Partiamo con un sistema deduttivo molto semplice.
L'apparato deduttivo maneggerà due tipi di formule, che indichiamo come

formule segnate dai simboli T e F. Data una qualsiasi FBF A allora TA e FA sono formule segnate con T e F.
Definiamo per ogni connettivo **T-regole** e **F-regole**. Suppongo che S sia un arbitrario insieme di formule segnate, con / che specifica che la regola si divide in due parti, con S_T specifico che tengo di S solo le formule segnate con T (sto facendo una *restrizione*):

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\vee$	$\frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}T\vee$	$\frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}F\vee$
$\rightarrow$	$\frac{S,T(A\rightarrow B)}{S,FA/S,TB}T\rightarrow$	$\frac{S,F(A\rightarrow B)}{S,TA,FB}F\rightarrow$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$

Senza le due restrizioni di S a S_T otterrei i tableaux della logica classica proposizionale. Quindi passare all'apparato deduttivo della logica intuizionistica non è complesso.
Usando queste regole una **dimostrazione** è una sequenze di applicazione di queste regole che comincia sempre con FX dove X è la formula che voglio dimostrare e deve terminare con una configurazione, ovvero un insieme di sotto-dimostrazioni, che contiene una coppia complementare, ovvero una formula segnata T e la stessa formula segnata F. La logica intuizionistica (come quella classica) è **decidibile** quindi con un numero finito di passi riesco sempre a stabilire se una formula è dimostrabile o meno nella logica intuizionistica. Questo accade in quanto la lunghezza della formula è sempre finita, non si ha possibilità di generare formule infinite, e le regole vanno a destrutturare le formule ottenendo sempre formule di complessità minore ad ogni applicazione di regola e quindi prima o poi si arriva alle formule atomiche, finendo il processo in quanto non si hanno ovviamente regole di destrutturazione.
Nella logica intuizionistica, a differenza di quella classica, non tutti gli ordini di applicazione delle regole portano ad un tableau chiuso, ovvero ad una dimostrazione della formula, anche se la formula è dimostrabile. Esistono strategia di soluzione che non vanno a buon fine e questo è dovuto all'ordine dell'applicazione delle regole e alla concorrenza tra l'applicazione di due regole. Le uniche regole che però hanno questo problema sono le due con restrizione. Non tutti (a priori rispetto all'ordine di applicazione delle regole) i tableaux quindi sono chiusi, a differenza della logica classica. Mi basta

un tableau chiuso (se ottengo più branch per una regola devono comunque chiudere tutti) per dimostrare che una formula è dimostrabile mentre per dire che non lo è mi serve che tutti i possibili tableaux non siano chiusi. Si ricorda che non è necessaria una formula atomica con F e T per chiudere un tableau ma una qualsiasi FBF con F e T.

Esempio 4. *Vediamo che il principio del terzo escluso nell'intuizionismo non è dimostrabile.*
Prendo:

$$A \vee \neg A$$

e chiediamoci se è dimostrabile nella logica intuizionistica.
So che non lo è quindi mi aspetto di non trovare un tableau chiuso, ovvero che termina con tutti i rami che contengono una formula segnata T e la stessa segnata F. Tale formula può essere diversa ramo per ramo anche se non succederà in questo caso avendo solo A.
Parto segnando F la formula:

$$F(A \vee \neg A)$$

Applico la F di $\vee$:

$$\frac{F(A \vee \neg A)}{FA, F(\neg A)}$$

Applico ora l'unica regola che posso applicare, essendo A atomica, ovvero la F di $\neg$ (con praticamente $S = FA$ e quindi $S_T = \emptyset$):

$$\frac{FA, F(\neg A)}{TA}$$

Questo tableau non è un tableau chiuso e quindi la formula non è dimostrabile nella logica intuizionistica, come volevasi dimostrare.

Esempio 5. *Vediamo un'altro esempio.*
Prendiamo la legge di De Morgan:

$$\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Parto con la dimostrazione:

$$F(\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B))$$

Procedo con l'implicazione:

$$\frac{F(\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B))}{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Qui entra il problema della strategia. In questa situazione potrei applicare il T *di* $\neg$ *o l'*F *di* $\wedge$*. Nella mia testa, o nel prover, devo comunque ricordare che ad un certo punto avevo la scelta, in modo da poter fare backtracking qualora non si chiuda il tableaux. Si ricorda che questo non poteva avvenire in logica classica. Lo segnalo con un asterisco:*

$$*T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Procedo prima con il T *di* $\neg$*:*

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Ma anche qui ho più scelte (l'F *di* $\vee$ *e l'*F *di* $\wedge$*), me lo segno con due asterischi:*

$$**F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Scelgo la F *di* $\vee$ *perché non crea branch:*

$$\frac{F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{FA, FB, F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Procedo con la F *di* $\wedge$*, creando due branch:*

$$\frac{FA, FB, F((\neg A) \wedge (\neg B))}{FA, FB, F(\neg A)/FA, FB, F(\neg B)}$$

Ma:

$$\frac{FA, FB, F(\neg A)/FA, FB, F(\neg B)}{TA/TB}$$

e quindi il tableau non è chiuso. Effettuo il backtracking cominciando dal primo asterisco. Torno alla formula e rimuovo l'asterisco:

$$T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Applico quindi la F *di* $\wedge$*:*

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)}$$

Studiamo i due branch in parallelo ma devo mettere un asterisco, potendo fare sia T *che* F *di* $\neg$*:*

$$*T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)$$

Conviene fare il F di $\neg$ perché conserviamo l'altra parte di formula:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)}{T(\neg(A \vee B)), TA/T(\neg(A \vee B)), TB}$$

Procedo con la T di $\neg$:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), TA/T(\neg(A \vee B)), TB}{F(A \vee B), TA/F(A \vee B), TB}$$

e quindi, con l'F di $\vee$:

$$\frac{F(A \vee B), TA/F(A \vee B), TB}{FA, FB, TA/FA, FB, TB}$$

Nel primo branch ho FA e TA e quindi ho una formula con sia F che T, ovvero A. Discorso analogo nel secondo con B e quindi il tableau è chiuso. Quindi questa legge di De Morgan è dimostrabile in logica proposizione intuizionistica. Mi basta una percorso che porta ad un tableau chiuso (e volendo qui si potrebbe vedere che è anche l'unica facendo gli altri percorsi mancanti).
Si può vedere, facendo i conti che l'altra formula di De Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \to (\neg A) \vee (\neg B)$$

non è dimostrabile, non arrivando mai ad un tableau chiuso. Non ho mai una strategia vincente quindi la formula non è dimostrabile nella logica intuizionistica. Dietro a questo comportamento si ha un motivo semantico che vedremo.

Esempio 6. *Tramite i tableaux si vede che la* legge della doppia negazione*:*

$$\neg\neg A \to A$$

non è dimostrabile (per di più avendo un solo cammino) in logica intuizionistica.

Si vedrà che la legge del terzo escluso o la legge della negazione, se aggiunti (ne basta uno dei due) alla logica intuizionistica la trasformano nella logica classica e viceversa, se nella logica classica non dimostro il terzo escluso o la doppia negazione ottengo la logica intuizionistica.

Esempio 7. *Tramite i tableaux si vede che la legge della conversa della* legge della doppia negazione*:*

$$A \to \neg\neg A$$

è dimostrabile (per di più avendo un solo cammino) in logica intuizionistica. Si può quindi vedere come valendo un solo verso dell'implicazione (non vale la legge della doppia negazione) non può valere l'equivalenza $A \iff \neg\neg A$ in logica intuizionistica.

Il backtracking ha conseguenze nella complessità dell'algoritmo di decisione della logica proposizionale intuizionistica che è stato dimostrato da Stackman avere complessità spaziale pari a:

$$O(n + \log n)$$

Il backtracking si può iterare a seconda dell'ordine delle regole.
Non posso dire nell'intuizionismo che vale A sse non vale $\neg\neg A$. Infatti il sse altro non è che:

$$A \iff \neg\neg A$$

e quindi dovrei avere sia che:

$$A \to \neg\neg A$$

$$\neg\neg A \to A$$

ma abbiamo solo la prima valida.

Esempio 8. *Ci chiediamo se la formula:*

$$A \to B$$

equivale, come in logica classica, a:

$$\neg A \lor B$$

ovvero:

$$A \to B \iff \neg A \lor B$$

Già da subito possiamo dire che non vale in quanto si avrebbe dipendenza tra connettivi, cosa che abbiamo detto non esistere in logica intuizionistica. Vediamo se sono dimostrabili i due versi:

$$(A \to B) \to (\neg A \lor B)$$

$$(\neg A \lor B) \to (A \to B)$$

Facendo i passaggi si dimostra che la prima formula non è dimostrabile e quindi già sappiamo che non vale il sse. Comunque possiamo fare i conti e veder che il secondo verso è dimostrabile in logica intuizionistica.

Vediamo un trucco per le strategia: *se si ha una formula la cui regola restringe S a S_T, se ho formule complesse segnate T, mi conviene aspettare ad applicare queste T e applicare la F delle regole che restringono, ovvero quelle di $\neg$ e $\rightarrow$.*
Abbiamo quindi descritto un genuino sistema di decisione con però un piccolo problema per il quale serve un esempio.

Esempio 9. *Proviamo a vedere se la formula della doppia negazione del principio del terzo escluso è dimostrabile nella logica intuizionistica. Studiamo quindi la formula:*

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

Si ha quindi:

$$F(\neg\neg(A \vee \neg A))$$

E quindi:

$$\frac{F(\neg\neg(A \vee \neg A))}{T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Da cui segue:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A)}$$

Proseguendo:

$$\frac{F(A \vee \neg A)}{FA, F(\neg A)}$$

E infine:

$$\frac{FA, F(\neg A)}{TA}$$

Coi soliti passaggi si arriverebbe (si noti il condizionale) a dire che non è dimostrabile arrivando nell'unico percorso possibile ad un tableau non chiuso. Anche Fitting arriva a questa conclusione

Ma per capire meglio il problema serve un teorema.

Teorema 1 (Teorema di Kolmogorov-Glivenko)**.** *Se una formula A è dimostrabile in logica classica allora e solo allora essa è dimostrabile in logica intuizionistica la doppia negazione di tale formula. Questo vale a livello proposizionale (a livello predicativo se cose si complicano particolarmente).*

Ma questo stona rispetto all'esempio appena fatto. Il terzo escluso è dimostrabile in logica classica e quindi ci aspetteremmo che la sua doppia negazione sia dimostrabile in logica intuizionistica, contraddicendo, con l'esempio, il teorema.

Esempio 10. *Proviamo a rivedere i conti:*

$$F(\neg\neg(A \vee \neg A))$$

E quindi:

$$\frac{F(\neg\neg(A \vee \neg A))}{T(\neg(A \vee \neg A))}$$

da cui segue:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A)}$$

applicando però T di $\neg$ mi premuro di riscrivere la formula a cui ho applicato la regola, ottenendo al posto del risultato precedente:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}$$

questo complica molto il calcolo ma si dimostrerà che comunque ripetere le formule non rende il calcolo infinito.
Ora avrei più scelte quindi lo segnalo con il solito asterisco:

$$*F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))$$

Proseguo in primis con l'F dell'or:

$$\frac{F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}{FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Anche qui ho più scelte, lo segnalo:

$$**FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))$$

Proseguo con F di $\neg$:

$$\frac{FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}{TA, T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Proseguo con T di $\neg$:

$$\frac{TA, T(\neg(A \vee \neg A))}{TA, F(A \vee \neg A)}$$

E quindi:

$$\frac{TA, F(A \vee \neg A)}{TA, FA, F(\neg A)}$$

Avendo TA e FA mi posso fermare avendo chiuso il tableau (si nota che risolvere il $\neg$ avrebbe portato ad avere TA, TA non chiudendo il tableau). Si è quindi dimostrato che la formula è dimostrabile, confermando quanto detto nel teorema di di Kolmogorov-Glivenko.

Ripetere ogni volta una regola, come fatto al secondo passaggio dell'esempio precedente, però renderebbe il tableau ingestibile e renderebbe il calcolo semi-decidibile, perché se la formula non è dimostrabile posso andare avanti all'infinito a ripetere le formule, comportando un serio problema. Si nota inoltre che abbiamo subito scelto il percorso che portava alla chiusura ma ci sono stati due punti in cui abbiamo scelto una regola rispetto ad un'altra. La seconda scelta nella formula con $*$ avrebbe portato ad un tableau non chiuso (e si vedeva quasi ad occhio che lo avrebbe fatto). Anche in merito alla formula con $**$ si nota che avrebbe portato ad un tableau che non chiudeva. Possiamo dire che la regola di poter riusare le formule a cui applichi la regola riportandola nel tableau è una sorta di **meta-regola**. L'aggiunta di questa meta-regola è un calcolo completo rispetto alla logica proposizionale intuizionistica, ovvero tutte le formule intuizionistiche dimostrabili hanno un tableau chiuso.
Le uniche formule che eventualmente richiedono al ripetizione, ovvero l'uso di questa meta-regola, sono le formule T di $\neg$ e T di $\rightarrow$. Possiamo quindi riformulare quelle due regole.
Per il $\rightarrow$:

$$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA, T(A \rightarrow B)/S, TB} T \rightarrow$$

notando che nella seconda parte non devo ripetere la formula.
Per il $\neg$:

$$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA, T(\neg A)} T\neg$$

Con le regole così modificate (queste due modificate più tutte le altre non modificate) abbiamo un **calcolo completo e corretto** per la logica proposizionale intuizionistica. Non ci sono quindi formule dimostrabili intuizionisticamente per cui non esiste un tableau chiuso con le regole descritte. D'ora in poi per i due casi useremo sempre le due nuove regole modificate anche se potenzialmente non è sempre necessario. Se ottengo un tableau chiuso senza ripetizione lo ottengo anche con ma se lo ottengo con la ripetizione non per forza lo ottengo senza. Volendo posso ricordarmi della ripetizione usando un "placeholder" senza dover riscrivere ogni volta la formula intera per segnalare che in caso non riesca a chiudere il tableau senza la ripetizione posso usare la ripetizione.
Esplicitare i due casi in cui può servire la ripetizione della formula è un grande aiuto dal punto di vista computazionale, essendo solo due casi.
*In logica classica predicativa si ha una situazione analoga per quanto riguarda l'istanziazione dei parametri, con la T di $\forall$ e la F di $\exists$ (*controllare appunti di fondamenti dell'informatica*).*
La logica classica proposizionale non richiederebbe mai un artificio simile a

quello della meta-regola, così come non richiede backtracking perché vale la **proprietà di Chruch-Rosser** che ci assicura che se un tableau deve chiudere chiuderà qualsiasi percorso si scelga.
Ricordiamo che $\neg\neg A \to A$ non è dimostrabile intuizionisticamente ma sappiamo che vale classicamente essendo una tautologia classica. Ma allora, per il teorema di Kolmogorov-Glivenko la formula:

$$\neg\neg(\neg\neg A \to A)$$

è dimostrabile in logica intuizionistica e si può verificare coi soliti passaggi (usando per di più una sola volta una ripetizione, nonostante potenzialmente se ne creino di più durante la dimostrazione).

3.1.2 Semantica e Modelli di Kripke

Abbiamo parlato finora di **sintassi**, parliamo ora della **semantica**, in termini di **modelli di Kripke**, per capire cosa significano *vero* ($\top$) e *falso* ($\perp$) in logica intuizionistica. La nozione di verità in logica intuizionistica è molto diversa da quella della logica classica, dove ogni proposizione è semplicemente vera o falsa sulla base delle tabelle di verità dei vari connettivi. La logica intuizionistica non ha tale semantica perché assegna significati ai connettivi in modo diverso dalla logica classica ma si basa appunto sui *modelli di Kripke*.
Kripke, prima dei modelli per l'intuizionismo, aveva chiuso un problema per i modelli delle **logiche modali**, logiche dove si hanno gli operatori di "necessario" e "possibile" associati alle formule che erano divise in 5 logiche, S1, S2, S3, S4 e S5, ciascuna con semantiche diverse, anche dal punto di vista del formalismo (non avendo una semantica che uniformasse queste 5). Kripke, da giovane, ottenne una semantica unificatrice di queste 5 logiche modali, risolvendo questo problema aperto. Dopo la risoluzione di questo problema Kripke si è appunto dedicato alla logica intuizionistica anche se i suoi studi in merito (*paper disponibile su Elearning*) hanno avuto un'accoglienza "tiepida" in quanto si era in piena Guerra Fredda e gli studi sul costruttivismo e sull'intuizionismo erano prevalentemente bandiera dell'est, con Kolmogorov etc..., mentre Kripke era statunitense, e quindi la Russia contrastava tali studi se svolti da studiosi non dell'est (pubblicando solo in russo per di più con una rivista negli USA che traduceva, in modo però non integrale facendo riassunti, tali articoli). Un'altra accusa era stata in merito al fatto che Kripke usava strumenti di logica classica per parlare della semantica della logica intuizionistica. Alla fine erano due motivazioni ideologiche e non tecniche.

Modelli di Kripke in Intuizionismo Proposizionale

Definizione 13. *Definiamo* ***modello di Kripke*** *per la logica intuizionistica proposizionale come una tripla:*

$$K = (G, R, \vDash)$$

dove si hanno:

- *G insieme, finito o infinito, che Kripke chiama* ***stati di conoscenza****. Lo possiamo considerare come un* ***insieme discreto*** *di stati di conoscenza*
- *R relazione riflessiva e transitiva definita su G*
- *$\vDash$ ovvero una relazione tra elementi di G e formule ben formate della logica intuizionistica. Tale relazione è detta* ***forcing*** *ovvero "essere vero intuizionisticamente".*
  Formalmente diciamo che, dato $\Gamma \in G$ e $A \in FBF$ (nella logica intuizionistica), " Γ verifica A" si scrive: $\Gamma \vDash A$. Quindi nello stato di conoscenza Γ appartenente all'insieme di tutti gli stati di conoscenza G la formula A è vera. *Se dico che, fissato $\Delta \in G$, A è* falsa *in Δ allora scrivo $\Delta \nvDash A$, avendo che " Δ non verifica A", quindi A non è vera in Δ*

Dobbiamo quindi caratterizzare la logica intuizionistica su questo modello. Si richiede che se $\Gamma \in G$ rende vera $A \in FBF$ e $\Delta \in G$ è tale che Γ è in relazione R con Δ allora anche Δ deve verificare A, ovvero, formalmente:

$$\Gamma \vDash A \wedge \Gamma R \Delta \implies \Delta R A$$

Questo vale $\forall \Delta$ tale che $\Gamma R \Delta$. Possiamo leggere quanto scritto anche nel seguente modo: *una formula, quando è vera in uno stato di conoscenza $\Gamma \in G$ deve essere vera in tutti gli stati di conoscenza $\Delta \in G$ che si possono raggiungere da* Γ, questo perché la relazione R è di tipo riflessivo e transitivo. Tali stati vengono detti **stati compatibili**, in questo caso con Γ. $\Gamma R \Delta$ si legge con "Γ è in relazione con Δ" o anche "Δ è accessibile da Γ" (soprattutto in logica modale è detta **relazione di accessibilità**).
Una volta che una formula è vera in uno stato di conoscenza rimarrà vero in tutti gli stati di conoscenza che seguono. Questo è un **requisito molto forte**, una volta che una formula diventa vera diventa vera per sempre, in tutti i branch dell'albero a partire dal nodo in cui diventa vera. È quindi vera in tutti gli stati di conoscenza compatibili a quello in cui diventa vera.

Se una formula è vera nella radice dell'albero rimarrà sempre vera, visto che, avendo praticamente a che fare con un particolare **diagramma di Hasse**, dalla radice "vedo" tutti gli altri nodi.
La critica che viene fatta a questa teoria è che non si prevede la **falsificabilità** di una formula.
Dobbiamo quindi definire cosa significhino (e l'ordine non è causale in quanto le prime due ricalcano molto la definizione classica), con $\Gamma \in G$ e $A, B \in FBF$:

- $\Gamma \vDash (A \vee B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \vee B$).
- $\Gamma \vDash (A \wedge B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \wedge B$)
- $\Gamma \vDash \neg A$
- $\Gamma \vDash (A \to B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \to B$)

Si ha quindi che, con $\Gamma \in G$ e $A, B \in FBF$:

- $\Gamma \vDash (A \vee B)$ sse $\Gamma \vDash A$ **o** $\Gamma \vDash B$
- $\Gamma \vDash (A \wedge B)$ sse $\Gamma \vDash A$ **e** $\Gamma \vDash B$
- $\Gamma \vDash \neg A$ sse $\Delta \nvDash A,\ \forall \Delta \in G$ t.c. $\Gamma R \Delta$. Si nota che è necessario anche che $\Gamma \nvDash A$ in quanto la relazione R è riflessiva e quindi $\Gamma R \Gamma$
- $\Gamma \vDash (A \to B)$ sse **o** $\Delta \nvDash A$ **o** $\Delta \vDash B, \forall \Delta \in G$ t.c. $\Gamma R \Delta$. La definizione non mi dice che in tutti i Δ è falso A o in tutti i Δ è vero B ma può capitare che in alcuni sia falso A, in alcuni vero B. Mi basta che, per essere vera l'implicazione, in ogni Δ deve essere o falsa A o vera B

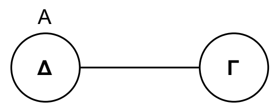
Si nota che per i primi due non si ha una grande differenza rispetto alla logica classica. Posso prendere un modello di Kripke in cui G contiene un solo elemento, che chiamiamo Γ, e ottenere la logica classica, che è quindi caratterizzata da modelli di Kripke con un solo stato di conoscenza. Quindi $\wedge$ e $\vee$ che si riferiscono allo stesso stato di conoscenza Γ sono simili alla definizione classica di vero per $\wedge$ e $\vee$. Si vede che per negazione e implicazione non vale un discorso simile, in quanto non si prende più un solo stato di conoscenza ma tutti gli stati di conoscenza che sono in relazione con Γ. Questa è una delle **caratterizzazioni** forti di un connettivo nella logica intuizionistica.

Un'altra critica volta a Kripke è stata che, fissato un qualsiasi elemento di G in esso una formula o è vera o falsa *classicamente*, ed è stato accusato di aver fatto una teoria dei modelli per una logica costruttiva, ovvero l'intuizionismo, su base classica (cosa inaccettabile per gli intuizionisti ortodossi).
Abbiamo quindi dato la semantica della logica intuizionistica.
Vediamo ora vari esempi di formule non dimostrabili intuizionisticamente, che quindi non hanno un tableau chiuso intuizionista, e per le quali deve quindi esistere un **contromodello**, ovvero un modello di Kripke che falsifica tali formule.

Esempio 11. *Cominciamo dalla non dimostrabilità del terzo escluso:*

$$\nvDash A \vee \neg A$$

Dobbiamo mostrare un modello di Kripke che rende falsa questa formula. Disegno il modello di Kripke:



Dove si hanno due nodi, Γ e Δ, e in cui se una FBF non viene indicata per un nodo significa che è falsa, mentre se viene segnata, come A per Δ, significa che è vera.
Possiamo leggere il modello come: "in Γ sono false tutte le formule ben formate, in Δ sono false tutte le formule ben formate escluso A che è vero".
Abbiamo quindi $\Delta \vDash A$ e $\Gamma \nvDash A$.
Voglio sapere se:

$$\Gamma \vDash A \vee \neg A$$

Quindi mi serve che $\Gamma \vDash A$ oppure $\Gamma \vDash \neg A$. Ho che $\Gamma \nvDash A$ non avendo l'etichetta A. Studio ora $\Gamma \vDash \neg A$. Mi serve che:

$$\Delta \nvDash A, \ \forall \Delta \in G \ t.c. \ \Gamma R \Delta$$

Ma so che $\Delta \vDash A$ e quindi anche $\Gamma \vDash \neg A$ non è vera. Ne segue che, non essendo vero né $\Gamma \vDash A$ né $\Gamma \vDash \neg A$:

$$\Gamma \nvDash A \vee \neg A$$

Avendo che la non dimostrabilità del terzo escluso, dimostrata coi tableaux, corrisponde alla non veridicità del terzo escluso, dimostrata ora coi modelli di Kripke, avendo un modello che rende falsa la formula, che è appunto un

contromodello *(che per di più questo è il modello di Kripke "standard" usato per il terzo escluso).*
Ipotizzando di essere in logica classica con un modello di Kripke ad un solo stato non potrei giungere a tale conclusione infatti il terzo escluso vale in logica classica. Non potrei prendere il modello a fatto ma ne prenderei uno con solo Γ senza alcuna formula valida in Γ, verificando $A \vee \neg A$ in quanto in Γ è verificato $\neg A$ non avendo altri nodi per la regola del $\neg$ di Kripke (come invece si ha in logica intuizionistica).

Teorema 2 (Teorema di completezza e validità)**.** *La non dimostrabilità corrisponde alla non veridicità. In altri termini tutto ciò che si fa sintatticamente ha il suo corrispondente semantico per cui tutte le formule per cui esiste un tableau chiuso hanno un modello di Kripke che le rende vere e le formule che non hanno un tableau chiuso hanno un modello di Kripke che le rende false.*

Esempio 12. *Vediamo se intuizionisticamente se:*

$$\Gamma \nvDash \neg\neg A \to A$$

Sappiamo già che non ha un tableau chiuso. Usiamo lo stesso modello dell'esempio precedente:

Mi serve che:

$$\Delta \nvDash \neg\neg A \ \boldsymbol{o} \ \Delta \vDash A, \ \ \forall \Delta \in G \ t.c. \ \Gamma R \Delta$$

Ma $\Delta \vDash A$ in quanto A non vale in Γ e R è riflessiva, $\Gamma \nvDash A$. Ragiono ora su $\Delta \nvDash \neg\neg A$. Si ha però che $\Gamma \vDash \neg\neg A$, esistendo un Δ che rende vero A (facendo i passaggi con la doppia negazione si arriva a voler cercare questo, devo avere che $\Gamma \nvDash \neg A$ e quindi che esiste almeno un Δ che verifica A), e quindi abbiamo dimostrato che:

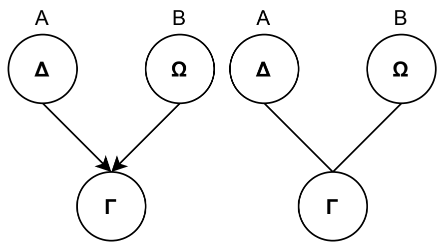
$$\Gamma \nvDash \neg\neg A \to A$$

Avendo un contro modello che verifica l'antecedente e non il conseguente dell'implicazione.

Esempio 13. *Dimostriamo che intuizionisticamente:*

$$\Gamma \nvDash \neg\neg(A \vee B) \to \neg\neg A \vee \neg\neg B$$

Il tableau di questa formula non è chiuso.
Vediamo che esiste un contromodello (le due rappresentazioni sono equivalenti(???)):



Si ha quindi che Γ *è in relazione* R *con se stesso, con* Δ*, che a sua volta è in relazione solo con se stessa, e con* Ω*, che è in relazione solo con se stessa.*
Partiamo con $\Gamma \vDash \neg\neg(A \vee B)$ *che significa che esiste un nodo accessibile da* Γ *in cui* $A \vee B$ *è vera. Questo è vero perché in* $\Delta \vDash A$ *e* $\Omega \vDash B$ *(ne basta uno dei due).*
Ora devo dimostrare che $\Gamma \nvDash \neg\neg A \vee \neg\neg B$ *per avere che è un contromodello.*
Devo quindi avere che $\Gamma \nvDash \neg\neg A$ *e* $\Gamma \nvDash \neg\neg B$ *in tutti i nodi accessibili da* Γ*.*
E vedo che in Δ *non vale* B *e in* Ω *non vale* A*, avendo quindi trovato il contromodello non potendo valere l'implicazione.*

3.1.3 Deduzione Naturale

Introduciamo ora un nuovo calcolo, quello della **deduzione naturale**, introdotto da Gentzen negli anni '30 e perfezionato da Prawitz (perfezionamento che tratteremo).
La deduzione naturale è un calcolo che è funzionale alla logica classica, alla logica intuizionistica e alla logica minimale, con semplici variazioni nell'uso delle regole.
La deduzione naturale è un calcolo la cui nozione di dimostrazione è molto diversa dal calcolo a tableaux, che è un calcolo per refutazione (ovvero quando vogliamo dimostrare una formula la segniamo F e cerchiamo di ottenere una configurazione chiusa ovvero una contraddizione), essendo quindi un calcolo **indiretto e goal-oriented** ma che non permette di vedere come è fatta la costruzione di una certa formula ma che dimostra che averla segnata F porta ad avere un tableau chiuso. Di contro la deduzione naturale utilizza, per dimostrare una formula, un metodo diretto che, a partire da certe assunzioni, costruisce la formula. Quindi l'ultimo passo di una dimostrazione in deduzione naturale è la formula che si vuole dimostrare.

Con la scrittura

$$\begin{matrix}\pi\\ A\end{matrix}$$

Diciamo che si è dimostrata la formula A attraverso π, dove π è un insieme finito di passi, con eventuali assunzioni e applicazioni delle regole della deduzione naturale.
Dire che A è dimostrabile:

$$\vdash \begin{matrix}\pi\\ A\end{matrix}$$

Significa dire che esiste una sequenza finita di applicazioni di regole e assunzioni π che termina con A e quindi, non avendo alcuna formula a sinistra di $\vdash$ si ha che la dimostrazione di A non dipende da alcuna formula e che in π le eventuali assunzioni verranno chiuse, quindi sparendo, rispetto alla deduzione di A nei vari passi. Quindi $\vdash \begin{smallmatrix}\pi\\ A\end{smallmatrix}$ è il **frame** nel quale ci si muoverà.
La deduzione naturale comprende:

- le **regole di introduzione**
- le **regole di eliminazione**

Date $A, B \in FBF$ si hanno:

connettivo	introduzione	eliminazione
$\wedge$	$\dfrac{A,B}{A\wedge B}i\wedge$	$\dfrac{A\wedge B}{A}e\wedge \quad \dfrac{A\wedge B}{B}e\wedge$
$\vee$	$\dfrac{A}{A\vee B}i\vee \quad \dfrac{B}{A\vee B}i\vee$	$\dfrac{A\vee B, \begin{smallmatrix}\cancel{A}\\ \pi'\\ C\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\cancel{B}\\ \pi''\\ C\end{smallmatrix}}{C}e\vee$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{smallmatrix}\cancel{A}\\ \pi\\ B\end{smallmatrix}}{A\rightarrow B}i\rightarrow$	$\dfrac{A,A\rightarrow B}{B}e\rightarrow$

Per l'eliminazione dell'or si ha che Prawitz ottiene questo risultato facendo:

$$\begin{matrix}A\\ \pi'\\ C\end{matrix} \text{ e } \begin{matrix}B\\ \pi''\\ C\end{matrix}$$

Ovvero se esiste una dimostrazione di C che dipende solo da A o B sono libero di dedurre C tramite eliminazione dell'or **dimenticando**, specificata con $\cancel{A}$ e $\cancel{B}$, le assunzioni che ho separatemene di A e di B, avendo $A \vee B$ come assunzione:

$$\frac{A \vee B, \begin{smallmatrix}\cancel{A}\\ \pi'\\ C\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\cancel{B}\\ \pi''\\ C\end{smallmatrix}}{C}e\vee$$

tengo solo in considerazione la dimostrazione di $A \vee B$, quindi la scrittura corretta è, qualora non sia quindi un'assunzione:

$$\frac{\overset{\pi}{A\vee B},\ \overset{\overset{\cancel{A}}{\pi'}}{C},\ \overset{\overset{\cancel{B}}{\pi''}}{C}}{C}e\vee$$

C è una nuova formula che non è necessariamente contenuta in A o B. Se non si riesce a trovare questa C non si può fare l'eliminazione dell'or.
Per l'inserimento dell'implicazione si suppone di fare un'assunzione A. Se dopo un numero finito di applicazioni di regole π otteno B allora posso introdurre l'implicazione $A \to B$. Si dice che la regola "scarica" l'assunzione A e quindi indichiamo $\cancel{A}$. Quando scrivo poi l'implicazione ho comunque che la dimostrazione non dipende più da A perché è già compresa in $A \to B$.
La regole di eliminazione dell'implicazione è detta **modus ponens**.
In merito all'implicazione ho che se ho un conseguente posso anche derivare un'implicazione con qualsiasi antecedente, senza scaricare nulla:

$$\frac{{}^1\cancel{A},{}^2 B}{}i\wedge$$

$$\frac{A \wedge B}{\wedge}$$

$$\frac{B}{A \to B}i \to \text{scaricando solo 1}$$

È quindi una semplificazione della regola di introduzione dell'implicazione.
Queste regole sono valide sia per la logica classica che per quella intuizionistica che per quella modale.
Dopo le regole dei tre connettivi binari abbiamo quelle per la costante del *falso*:

	introduzione	eliminazione
$\perp$	$\frac{A,\neg A}{\perp}i\perp$	$\frac{\perp}{B}e\perp$

L'eliminazione del falso mi ricorda che dal falso segue qualsiasi cosa.
La regola dell'eliminazione del $\perp$ non si può usare in logica minimale.
Possiamo quindi passare al connettivo unario della negazione:

	introduzione	eliminazione
$\neg$	$\frac{\overset{\overset{\cancel{A}}{\pi}}{\perp}}{\neg A}i\neg$	$\frac{\overset{\overset{\cancel{\neg A}}{\pi}}{\perp}}{A}e\neg$

La regola dell'introduzione del $\neg$ non si può usare in logica minimale.
La regola dell'eliminazione del $\neg$ non si può usare in logica intuizionistica.
Questo calcolo, per $\neg$, è "sovrabbondante" rispetto alle regole in quanto potrei riscrivere $\neg A$ come $A \to \bot$ ed eliminare le regole del $\neg$. Per di più con questa implicazione Prawitz ha chiuso un problema aperto che Gentzen, usando solo il $\neg$, non era riuscito a chiudere, ovvero il **teorema di normalizzazione in logica intuizionistica con il calcolo della deduzione naturale**, dimostrando che tutte le dimostrazioni in deduzione naturale possono essere normalizzate, ovvero ridotte ad una forma *normale*.
Gentzen ha chiamato questo calcolo deduzione naturale perché era fermamente convinto che questo fosse il modo di ragionare in matematica in modo "naturale".
Vediamo quindi come costruire dimostrazioni in deduzione naturale, in una certa logica. Anche in questo caso sintassi e semantica devono essere coerenti, ovvero formule valide nella logica data devono essere dimostrabili con la deduzione naturale e formule non valide non devono essere dimostrabili in nessun modo.
La prima difficoltà riguarda il come far partire la dimostrazione e questo è il motivo per cui tutti i prover automatici per la deduzione naturale sono stati un fallimento (mentre coi tableaux sappiamo sempre da dove partire).

Definizione 14. *Una dimostrazione $\vdash A$ di una formula A, in deduzione naturale, è una sequenza finita di applicazioni di regole, π, della deduzione naturale che termina con la formula A e in cui eventuali assunzioni devono essere state tutte "scaricate", essendo quindi chiusa rispetto alle assunzioni:*

$$\begin{array}{c} \pi \\ A \end{array}$$

Se A è dimostrabile da un insieme di formule $A_1, \dots A_n$ di premesse allora in π possono rimanere assunte $A_1, \dots A_n$. Questo si indica con:

$$A_1, \dots A_n \vdash A$$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 14. *Il primo esempio è quello del terzo escluso in logica classica (vedendo anche perché non vale in logica intuizionistica).*
Con $\vdash_{CL}$ indichiamo che una cosa è dimostrabile in logica classica. Vogliamo quindi dimostrare che:

$$\vdash_{CL} A \vee \neg A$$

Numeriamo le assunzioni, per poter indicare accanto alla regola che scarica l'assunzione il suo numero:

1. A

2. $\neg(A \lor \neg A)$

Procedo quindi:

$$\frac{{}^{1}A}{A \lor \neg A} i\lor$$

Potremmo pensare di aver finito, avendo ottenuto la formula, ma non è così. Dobbiamo infatti scaricare l'assunzione A. Assumo quindi un'altra assunzione, la 2 e procedo:

$$\frac{{}^{2}\neg(A \lor \neg A), A \lor \neg A}{\bot} i\bot$$

Ma dal falso posso dire che segue qualsiasi cosa in logica classica e quindi, iniziando a scaricare l'assunzione 1:

$$\frac{\bot}{\neg A} i\neg$$

Quindi, nel complesso ho:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{} i\lor$$

$$\frac{{}^{2}\neg(A \lor \neg A), A \lor \neg A}{} i\bot$$

$$\frac{\bot}{\neg A} i\neg$$

Devo ancora scaricare la 2. Continuo:

$$\frac{\neg A}{A \lor \neg A} i\lor$$

Ma devo ancora scaricare la 2. Assumo quindi nuovamente la 2:

$$\frac{{}^{2}\neg(A \lor \neg A), A \lor \neg A}{\bot} i\bot$$

E quindi:

$$\frac{\bot}{\neg\neg(A \lor \neg A)} i\neg$$

che scarica 2, avendo complessivamente:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{}\,i\neg$$

$$\frac{\neg A}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\,i\neg$$

Ma sono arrivato alla doppia negazione del principio del terzo escluso e non al terzo escluso. Finora ho usato solo regole valide anche in logica intuizionistica, che indico con INT e quindi la doppia negazione del terzo escluso è dimostrabile in logica intuizionistica, avendo scaricato tutte le assunzioni e avendo usato regole valide in quella logica:

$$\vdash_{INT} \neg\neg(A \vee \neg A)$$

Ovviamente la doppia negazione del terzo escluso vale anche in logica classica per lo stesso ragionamento.
Voglio però arrivare al terzo escluso in logica classica. Per scaricare la 2 posso fare eliminazione del false (che non vale in logica intuizionistica ma solo in logica classica):

$$\frac{\bot}{A \vee \neg A}\,e\bot$$

che consuma la 2:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{}\,i\neg$$

$$\frac{\neg A}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{A \vee \neg A}\,e\bot$$

arrivando quindi a:

$$\vdash_{CL} A \vee \neg A$$

Che non è dimostrabile in logica intuizionistica (come già si sapeva).

Esempio 15. *Vediamo una delle formule di De Morgan:*

$$\vdash_{INT} \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$$

Come assunzioni ho:

1. $\neg(A \vee B)$
2. A
3. B

Parto dal basso, sapendo che vorrei ottenere:

$$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B} i \to \quad \text{(scaricando 1)}$$

Vediamo i passaggi i passaggi "risalendo", procedendo, come si dice, "per necessità" (ricostruendo ogni volta ciò che mi serve risalendo nella dimostrazione, ricostruendola a ritroso):

$$\frac{{}^{2}\cancel{A}}{} i\vee \, , \; \frac{{}^{3}\cancel{B}}{} i\vee$$

$$\frac{A \vee B, {}^{1}\cancel{\neg(A \vee B)}}{} i\bot, \; \frac{A \vee B, {}^{1}\cancel{\neg(A \vee B)}}{} i\bot$$

$$\frac{\bot}{} i\neg \text{(scaricando 2)}, \; \frac{\bot}{} i\neg \text{ (scaricando 3)}$$

$$\frac{\neg A, \neg B}{} i\wedge$$

$$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B} i \to \quad \text{(scaricando 1)}$$

Chiudendo la dimostrazione avendo scaricato tutto ed essendo arrivati alla formula voluta. L'unico passo "strano", era capire che $\neg A/B$ era in contraddizione con A/B, portando all'introduzione dell'or e poi del $\bot$.
Vediamo un'altra dimostrazione della stessa:

$$\vdash_{INT} \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$$

Assumo:

1. A

2. $\neg(A \vee B)$

3. B

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\text{Ho } \pi_1 =$$
$$\frac{^1\cancel{A}}{}i\vee$$
$$\frac{A \vee B, ^2\cancel{\neg(A \vee B)}}{}i\bot$$
$$\frac{\bot}{\neg A}i\neg\text{(scaricando 1)}$$
$$\text{rifaccio anche con B, avendo} \pi_2 =$$
$$\frac{^3\cancel{B}}{}i\vee$$
$$\frac{A \vee B, ^2\cancel{\neg(A \vee B)}}{}i\bot$$
$$\frac{\bot}{\neg B}i\neg\text{(scaricando 3)}$$
$$\text{sono nella situazione}$$
$$\frac{\pi_1, p_2}{}i\wedge$$
$$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B}i \to \text{(scaricando 2)}$$

(i passaggi di π_1 e π_2 li avrei potuti scrivere uno accanto all'altro).
Quindi, avendo usato solo regole valide per la logica intuizionistica:

$$\vdash_{INT} \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$$

Passiamo alla dimostrazione della conversa:

$$\vdash_{INT} \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$$

Sappiamo già che il tableau non chiude.
Assumo:

1. $\neg A \wedge \neg B$

2. $A \vee B$

3. A

4. B

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{{}^{1}\cancel{1\neg A \land \neg B}}{}e \land\,, \quad \frac{{}^{1}\cancel{1\neg A \land \neg B}}{}e\land$$

$$\frac{\neg A,{}^{3}\cancel{A}}{}i\bot, \quad \frac{\neg B,{}^{4}\cancel{B}}{}i\bot$$

$$\frac{\bot,\bot,{}^{2}\cancel{A \lor B}}{}e \lor \text{ (scaricando 3 e 4)}$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\text{(scaricando 2)}$$

$$\frac{\neg(a \lor B)}{\neg A \land \neg B \to \neg(A \lor B)}i \to \text{ (scaricando 1)}$$

Ho quindi dimostrato, nel complesso, un'equivalenza avendo entrambi i versi dell'implicazione (e per entrambi i versi si ha un tableau chiuso), sia in logica classica che intuizionistica.

Esempio 16. *Proviamo a dimostrare l'altra formula di De Morgan:*

$$\vdash_{INT} \neg(A \land B) \to \neg A \lor \neg B$$

Il tableau della formula non chiude quindi arriveremo a dire che:

$$\nvdash_{INT} \neg(A \land B) \to \neg A \lor \neg B$$

Siano date le seguenti assunzioni:

1. A

2. B

3. $\neg(A \land B)$

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{^1\cancel{A},^2 B}{}i\wedge$$

$$\frac{A \wedge B,^3 \cancel{\neg(A \wedge B)}}{}i,\bot$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 1)}$$

$$\frac{\neg A}{}i\vee$$

$$\frac{\neg A \vee \neg B}{}i \rightarrow \textit{(scaricando 3)}$$

$$\underline{\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B}$$

Ma non si è scaricato B e quindi non è una dimostrazione, né classica né intuizionistica.
Vediamo se la conversa vale intuizionisticamente:

$$\vdash_{INT} \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

Assumo:

1. $\neg A \vee \neg B$, *ovvero assumo l'antecedente*
2. $\neg A$
3. $\neg B$
4. $A \wedge B$

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{^4\cancel{A \wedge B}}{}e\wedge, \quad \frac{^4\cancel{A \wedge B}}{}e\wedge$$

$$\frac{A,^2 \cancel{\neg A}}{}i\bot, \quad \frac{B,^3 \cancel{\neg B}}{}i\bot$$

$$\frac{\bot,^1 \cancel{\neg A \vee \neg B}}{}e\vee \textit{ (scaricando 2 e 3)}$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 4)}$$

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)}i \rightarrow \textit{(scaricando 1)}$$

Quindi, avendo usato solo regole valide per la logica intuizionistica:

$$\vdash_{INT} \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$$

Quindi "mezza" De Morgan vale in logica intuizionistica.

Durante la lezione 6, parte 2, altri esempi di dimostrazione:

- $\vdash_{INT} (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
- $\vdash_{INT} (\neg A \vee \neg B) \to (B \to \neg A)$
- $\vdash_{INT} (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)$, detta **scambio degli antecedenti**
- $\nvdash_{INT} ((A \to B) \to A) \to A$, detta **legge di Peirce**, che vale solo in logica classica
- $\nvdash_{INT} (A \to B) \iff (\neg B \to \neg A)$, detta **legge di contrapposizione**, che ricorda il **teorema di deduzione della logica classica** che legava dimostrabilità e implicazione, avendo a livello proposizionale che se con ipotesi A dimostro B, $A \vdash B$ allora $A \to B$. Classicamente si ha anche che $\vdash \neg B \to \neg A$ se $A \vdash B$ e si noti che è il procedimento di una *dimostrazione per assurdo*, secondo la logica classica. Vale in logica classica ma il $\leftarrow$ non vale in logica intuizionistica. **Non posso dimostrare direttamente per assurdo in logica intuizionistica** ma si usano dei "meta-sistemi"
- $\vdash_{INT} ((((A \to B) \to A) \to A) \to B) \to B$

Se la formula è un'implicazione si assume spesso l'antecedente che poi si scarica all'ultimo passo.
Non si hanno comunque strategie deterministiche.
Si è notato come non ci sia un metodo preciso per ottenere la strategia e per di più la strategia non è unica potenzialmente. Nel primo esempio si parte dall'alto, nel secondo dal basso.
Per capire se esiste una dimostrazione faccio prima la prova coi tableaux, che se chiude mi garantisce l'esistenza di una dimostrazione.
L'idea di partire a dimostrare sapendo a quali connettivi bisogna arrivare si adatta molto bene anche al **calcolo dei sequenti** di Gentzen (sono un calcolo diretto), dove si parte sempre dal basso, risalendo "per necessità", fino ad arrivare agli assiomi caratteristici della logica in uso e del calcolo dei sequenti. Si hanno meccanismi di traduzione da tableaux intuizionistici a

sequenti e da sequenti a deduzione logica (*argomento non approfondito*). I sequenti sono "mediani" nel paradigma del goal-oriented.
Anche in deduzione naturale, in modo analogo alla matematica, si possono usare i **lemmi**.

Esempio 17. *Dimostriamo:*

$$\vdash_{INT} \neg\neg(A \wedge B) \to \neg\neg A \wedge \neg\neg B$$

Si assume:

1. $\neg A$
2. $\neg\neg(A \wedge B)$
3. $\neg B$

Di ha quindi la dimostrazione:

$$\frac{{}^{1}\cancel{\neg A}}{\quad}\, i\vee\,, \quad \frac{{}^{3}\cancel{\neg B}}{\quad}\, i\vee$$

$$\frac{\neg A \vee \neg B}{\quad}\,\textit{regola derivata}, \quad \frac{\neg A \vee \neg B}{\quad}\,\textit{regola derivata}$$

$$\frac{\neg(A \wedge B),^{2}\, \cancel{\neg\neg(A \wedge B)}}{\quad}\, i\bot, \quad \frac{\neg(A \wedge B),^{2}\, \cancel{\neg\neg(A \wedge B)}}{\quad}\, i\bot$$

$$\frac{\bot}{\quad}\, i\neg\,\textit{(scaricando 1)}, \quad \frac{\bot}{\quad}\, i\neg\,\textit{(scaricando 3)}$$

$$\frac{\neg\neg A, \neg\neg B}{\quad}\, i\wedge$$

$$\frac{\neg\neg A \wedge \neg\neg B}{\neg\neg(A \wedge B) \to \neg\neg a \wedge \neg\neg B}\, i \to \textit{(scaricando 2)}$$

con la doppia barra indico una regola derivata da un precedente lemma (nel nostro caso dalla legge/teorema di De Morgan) che quindi chiamiamo lemma di De Morgan, non dovendo quindi dimostrare nuovamente la cosa, riducendo la "complessità" della dimostrazione.

Comunque non si hanno strategie deterministiche per iniziare una dimostrazione, si hanno comunque suggerimenti in base alla formula, ad esempio se ho una cosa del tipo $A \to B$ si parte spesso, ma non sempre, assumendo A per poi cercare di scaricarla. Bisogna sempre prima guardare bene la formula che si deve dimostrare, ragionando su sottoformule etc. . .

3.1.4 Ottimizzazione dei Tableaux

Parliamo ora di **ottimizzazione dei tableaux intuizionistici**.

Esempio 18. *Riprendiamo il tableau di Fitting per la doppia negazione del terzo escluso:*

$$F\neg\neg(A \vee \neg A)$$

che ricordiamo dimostrabile in logica intuizionistica per il teorema di Kolmogorov-Glivenko.
Riprendiamo il tableau di Fitting:

$$\cfrac{F\neg\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{T\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{FA \vee \neg A}{\cfrac{FA, F\neg A}{TA}}}}$$

Che sembra non chiudere.
Si ricorda però che, sempre Fitting, risolve la questione ripetendo una formula:

$$\cfrac{F\neg\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{T\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{FA \vee \neg A, T\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{FA, F\neg A, T\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{TA, T\neg(A \vee \neg A)}{\cfrac{TA, FA \vee \neg A}{TA, FA, F\neg A}}}}}}$$

che chiude.
Si è usato il fatto che si è usata, come regola per il T di $\neg$:

$$\frac{S, T\neg A}{S, FA, T\neg A}$$

Nell'esempio ci si è rifatti al concetto di **realizzabilità**.

Definizione 15. *Preso un nodo Γ di un modello di Kripke per la logica intuizionistica diremo che Γ **realizza** TA sse Γ forza A, ovvero sse:*

$$\Gamma \models A$$

*Inoltre si ha che Γ **realizza** FA sse in Γ **non è vera** A, ovvero sse:*

$$\Gamma \not\models A$$

*Abbiamo quindi legato il segno T/F al **forcing intuizionista**. Le regole devono quindi mantenere la realizzabilità.*

Vediamo, sempre pensando all'esempio, cosa significhi mantenere la realizzabilità parlando di $T\neg A$. Si ha che, intuizionisticamente:

$$\Gamma \models \neg A$$

Ma nell'intuizionismo significa che:

$$\forall \Delta \text{ t.c } \Gamma R \Delta, \Delta \not\models A$$

Se diciamo che una formula realizzata prima di applicare una regola deve essere realizzata anche dopo tale applicazione si ha che, avendo:

$$\frac{S, T\neg A}{S, FA, T\neg A}$$

FA può essere eliminata, quindi restringendo S a S_C non è più garantito che sia realizzato FA ovvero che sia forzata A. Dato che questo deve avvenire $\forall\Delta$ mi "porto dietro" $T\neg A$ in modo che in ogni punto del tableau sia realizzabile la formula $\neg A$ (ma questo succede solo se ripeto il T).
Non sempre bisogna ripetere la T, ad esempio:

$$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB}$$

che passando da una T a due T non crea problemi anche se restringo a S_T, avendo un Γ che realizza TA e TB allora ho che forza $A \wedge B$.
Vale lo stesso discorso anche avendo:

$$\frac{S, T(A \vee B)}{S, TA / S, TB}$$

garantendo o da un alto o dall'altro la realizzabilità di $A \vee B$. Infatti se è realizzato TA ho un Γ che forza A e che automaticamente forza $A \vee B$.

Viceversa con TB ho un Γ che forza B e che automaticamente forza $A \vee B$.
Abbiamo un'altra regola che obbliga a ripete:

$$\frac{S, T(A \to B)}{S, FA, T(A \to B)/S, TB}$$

Dove, avendo che FA può essere "tagliato" da una restrizione S_T nel primo branch, conservo anche la formula (non avendo F nel secondo branch non devo ripetere).
Vediamo un calcolo che, "modulo backtracking", non necessiterà della ripetizione delle formule, avendo già tutta la sua semantica all'interno del calcolo.
Si parla quindi di **semantic tableau**, avendo che i tableaux "mimano" la semantica della logica di riferimento. Più semantica incorporariamo nelle regole stesse e migliore sarà il calcolo dal punto di vista dell'efficienza.
Quanto detto viene bene con il T di $\neg$.
Aggiungiamo a T e F il segno F_C che significa **falso certo**:

	T-regola	F-regola	F_C-regola
$\wedge$	$T\wedge = \frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}$	$F\wedge = \frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}$	$F_C\wedge = \frac{S,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}$
$\vee$	$T\vee = \frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}$	$F\vee = \frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}$	$F_C\vee = \frac{S,F_C(A\vee B)}{S,F_CA,F_CB}$
$\to$	$T \to = \frac{S,T(A\to B)}{S,FA,T(A\to B)/S,TB}$	$F \to = \frac{S,F(A\to B)}{S_C,TA,FB}$	$F_C \to = \frac{S,F_C(A\to B)}{S_C,TA,F_CB}$
$\neg$	$T\neg = \frac{S,T(\neg A)}{S,F_CA}$	$F\neg = \frac{S,F(\neg A)}{S_C,TA}$	$F_C\neg = \frac{S,F_C(\neg A)}{S_C,TA}$

Il nuovo segno è dato in quanto la semantica del $\neg$ ci dice che, avendo il forcing di $\neg A$, A deve rimanere falso in ogni nodo del modello di Kripke e quindi è un falso che deve permanere sempre in tutto il tableau.
S_C è definito come l'insieme S meno l'insieme delle formule segnate con F (detto FC_J):

$$S_C = S - \{FC_j\}$$

Notiamo, in prima istanza, come da formule F_C otteniamo sempre formule F_C o T, stabilizzando il tableau.
Nell'implicazione di F_C notiamo ancora però la presenza di TA che porterebbe a fare lo stesso ragionamento di replicazione della formula dell'implicazione ma questo è uno step successivo di ottimizzazione.
Un tableau in questo nuovo calcolo è chiuso secondo le regole dei normali tableaux ma anche se ho TA, F_CA.

Esempio 19. *Riprendiamo la doppia negazione del terzo escluso con questo nuovo calcolo:*

$$\frac{\frac{\frac{\frac{F\neg\neg(A \vee \neg A)}{T\neg(A \vee \neg A)}}{F_C(A \vee \neg A)}}{F_C A, F_C \neg A}}{F_C A, TA}$$

e quindi il tableau è chiuso, anche senza aver ripetuto il $T\neg$.

F_C **è stato proposto da Moscato a Fitting ed è stato accolto nello studio dell'intuizionismo**.
Si è quindi incorporato più semantica nel calcolo infatti:

$$\Gamma \models F_C A \iff \Gamma \models \neg A$$

avendo che la semantica del $\neg$ viene incorporata dal segno F_C, avendo che Γ realizza $F_C A$ sse realizza $\neg A$. Abbiamo fatto quindi un primo step di ottimizzazione.
Dal punto di vista del "proof teoretico" il segno F_C riesce a evitare duplicazioni della formula $\neg A$, a livello intuizionista, che sarebbero sempre necessarie per chiudere il tableau.

Esempio 20. *Ripariamo dalla doppia negazione del terzo escluso:*

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

Si ha, con il nuovo calcolo:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{F\neg\neg(A \vee \neg A)}{T\neg(A \vee \neg A)}}{F_c(A \vee \neg A)}}{F_C A, F_C \neg A}}{F_C A, TA}$$

Avendo che il tableau chiude (senza il ragionamento di Fitting di ripetere le formule).

Il discorso può essere generalizzato dicendo che, ogni volta che si vuole applicare il teorema di Kolmogorov-Glivenko, ragionando come Fitting avrò sempre bisogno di ripetere formule, avendo in partenza una doppia negazione (dovendo fare comunque un $F\neg$ e un $T\neg$ come prime mosse, se non uso F_C). Quindi, avendo una formula valida classicamente, per dimostrare intuizionisticamente la doppia negazione, posso usare F_C evitando la ripetizione di formule, a meno di avere poi nella formula dei $T \rightarrow$. Si ha quindi un **trattamento ottimale** del $T\neg$ ma manca quello di $T \rightarrow$.
Moscato, coi vari collaboratori, ha lavorato anni per trovare una soluzione soddisfacente, quindi un calcolo corretto e completo, che rimuovesse anche la ripetizione del $T \rightarrow$. Si sono quindi chiesti se, a livello proposizionale, esistesse una soluzione al problema. Si arriverà a dire che c'è una soluzione a livello proposizionale ma non a livello predicativo (il $T\forall$ richiede sempre e comunque la ripetizione) e nemmeno a livello di logica classica (lato predicativo si ha ripetizione sia per $T\forall$ che per $T\exists$). Nella logica classica, lato proposizionale, vale quindi la regola di Chruch-Rosser e quindi non sarà mai necessario ripetere una formula mentre in logica intuizionistica questo non vale e quindi bisogna pensare a delle strategie per evitarlo. Il calcolo puro di Fitting prevede per forza ripetizioni per $\neg$ e $T \rightarrow$ ma in questo nuovo calcolo con F_C ho solo ripetizioni per $T \rightarrow$.
Presentiamo quindi un ulteriore calcolo che rimuova anche questa ripetizione. Questo nuovo calcolo proviene da un'idea di Dyckhoff, che aveva ragionato sulla deduzione naturale e sul calcolo dei sequenti di Gentzen. Dyckhoff aveva studiato cosa succede a livello di deduzione naturale quando si assumono nuovamente certe formule, costruendo un calcolo in cui non succede. Moscato e Miglioli, studiando il lavoro di Dyckhoff, hanno cercato di applicare le stesse regole al calcolo a tableaux ottimizzato.
L'idea è di studiare in modo approfondito come è fatto l'antecedente dell'implicazione e non dare una sola regola per il $T \rightarrow$ ma dare tante regole a seconda della forma dell'antecedente dell'implicazione.
Si va quindi ad analizzare la formula del tipo:

$$T\ A \rightarrow B$$

Si studia l'antecedente A. Si hanno quindi vari casi:

- A è atomica o negata, che indico con AN (per dire A e Negata)
- A è una disgiunzione, quindi del tipo $A = C \vee D$
- A è una congiunzione, quindi del tipo $A = C \wedge D$
- A è un'implicazione, quindi del tipo $A \rightarrow B$

Si da quindi una regola ad hoc per ciascuna tipologia di antecedente. Si hanno quindi quattro formule.
Facciamo qualche considerazione preliminare. In primis si nota come il calcolo venga ancora più complicato, complicando il lavoro di un prover, anche se questo è trascurabile dal punto di vista computazionale. Una seconda osservazione è che non si riesce a trovare un modo per importare nel calcolo la semantica dell'implicazione, come per il caso di $T\neg$, che importava la semantica della negazione intuizionistica nel calcolo. Questa infatti è un'idea più *sintattica* e sostituisce una formula con un suo equivalente intuizionista, che abbia nell'antecedente una complessità implicazionale sempre più bassa, fino ad arrivare a formule atomiche o negate per poter applicare la regola di base, avendo che la regola per le atomiche e le negate non prevede ripetizioni di formule. Si ha quindi una "trasformazione di formule". Si ottiene un calcolo privo di ripetizioni, *anche se può darsi che esista una soluzione più semantica e meno sintattica del problema di questo tipo di calcolo, magari cercando un nuovo segno ad hoc.*
Vediamo quindi queste 4 regole che sostituiscono la precedente regola per $T \rightarrow$:

Antecedente Ant	$\mathbf{T} \rightarrow$
$Ant = A$ o $Ant = \neg A$	$\frac{S,T A\rightarrow B}{S,F A/S,T B} T \rightarrow AN$
$Ant = A \wedge B$	$\frac{S,T (A\wedge B)\rightarrow C}{S,T (A\rightarrow (B\rightarrow C))} T \rightarrow \wedge$
$Ant = A \vee B$	$\frac{S,T (A\vee B)\rightarrow C}{S,T A\rightarrow C,T B\rightarrow C} T \rightarrow \vee$
$Ant = A \rightarrow B$	$\frac{S,T (A\rightarrow B)\rightarrow C}{S,F A\rightarrow B,T B\rightarrow C/S,T C} T \rightarrow\rightarrow$

Si nota che la complessità logica di B non ha importanza. In tutti i casi si ottengono complessità implicazionali minori, avendo antecedenti sempre meno complessi logicamente nella risultante rispetto alla premessa.
Questo nuovo calcolo, con questa nuova regola per $T \rightarrow$ è **corretto, completo e senza ripetizioni**.
A livello di prover questo risultato permette di non dover creare liste aggiuntive di formule da ripetere (considerando che Fitting nemmeno limitava la cosa a $T\neg$ e $T \rightarrow$).

Esempio 21. *Studiamo:*

$$\vdash_{INT} ((\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$\cfrac{F((\neg A \lor \neg\neg A) \to A) \to A}{T(\neg A \lor \neg\neg A) \to A, FA}F \to$$

$$\cfrac{T(\neg A \lor \neg\neg A) \to A, FA}{T\neg A \to A, T\neg\neg A \to A, FA}T \to \lor$$

$$\cfrac{T\neg A \to A, T\neg\neg A \to A, FA}{T\neg A \to A, F\neg\neg A, FA / T\neg A \to A, TA, FA}T \to AN$$

$$\cfrac{T\neg A \to A, F\neg\neg A, FA / T\neg A \to A, TA, FA}{T\neg A \to A, T\neg A}F\neg \textit{(chiude branch destro)}$$

$$\cfrac{T\neg A \to A, T\neg A}{T\neg A \to A, F_C A}T\neg$$

$$\cfrac{T\neg A \to A, F_C A}{F\neg A, F_C A / TA, F_C A}T \to AN$$

$$\cfrac{F\neg A, F_C A / TA, F_C A}{TA, F_C A}F\neg \textit{(chiude branch destro)}$$

Avendo che il tableau chiude, senza ripetizioni.
Si nota che avendo $T\neg A \to A, T\neg\neg A \to A, FA$ si osserva che è prodotto da un antecedente in $\lor$ con due negate. Si hanno quindi ora due antecedenti entrambi con due negate, sotto T, che mi riportano alla regola per il $T \to$ delle atomiche e delle negate.

Dimostreremo che questo calcolo è corretto e completo.
Il prover PITP è basato su questo calcolo con ulteriori strategie di ottimizzazione.
Possiamo quindi vedere la dimostrazione del teorema di Kolmogorov-Glivenko, che riscriviamo per comodità, tramite il calcolo a tableaux con F_C e la non ripetizione di $T\neg$ e $T \to$.

Teorema 3 (Teorema di Kolmogorov-Glivenko)**.** *Se una formula A è dimostrabile in logica classica allora e solo allora è dimostrabile in logica intuizionistica la doppia negazione di tale formula, a livello proposizionale. Formalmente si ha quindi:*

$$\vdash_{CL} A \iff \vdash_{INT} \neg\neg A$$

Quindi tutte le tesi classiche sono dimostrabili, se doppiamente negate, in logica intuizionistica.

Dimostrazione. Per fare la dimostrazione si introduce una nuova regola:

$$\cfrac{S, TA \to B}{S, F_C A / S_C, TB}\overline{T \to}$$

che chiamiamo appunto $T \rightarrow$ soprassegnato. Questa regola è corretta dal punto di vista del calcolo intuizionistica e possiamo usarla quando vogliamo. La sua peculiarità rispetto all'originale $T \rightarrow$ è che nel branch a sinistra ho $F_C A$ quindi non si avrà mai il taglio della stessa applicando regole intuizionistiche. Nel branch di destra si ha TB che già non verrebbe mai tagliata ama, per correttezza e non per completezza, si restringe S a S_C.
Ricordiamo che la vecchia regola era, dove si ripeteva la formula a causa di FA nel branch di sinistra e non si restringeva S in quello di destra:

$$\frac{S, TA \rightarrow B}{S, FA, TA \rightarrow B / S, TB} T \rightarrow$$

La $\overline{T \rightarrow}$ è una versione corretta ma non completa di $T \rightarrow$. L'uso della prima quindi comporta un calcolo corretto ma non completo, mentre la seconda sia corretto che completo.
Ora a noi basta avere una formula corretta, cosa che rende possibile il poterla applicare ogni volta che voglio.
Parto quindi dal tableau intuizionista di $\neg\neg A$:

$$\frac{F\neg\neg A}{} F\neg$$

$$\frac{T\neg A}{F_C A} T\neg$$

Avendo che da questo momento in poi il tableau intuizionista diventa equivalente a quello classico, con solo i segni T e F_C. Dobbiamo dimostrarlo per casi, a seconda della natura di A:

- A è una formula atomica quindi se chiude classicamente $F_C A$ chiude anche intuizionisticamente
- A è del tipo $B \vee C$, avendo che $F_C(B \vee C)$ produce/deduce $F_C B, F_C C$
- A è del tipo $B \wedge C$, avendo che $F_C(B \wedge C)$ produce/deduce $F_C B / F_C C$
- A è del tipo $\neg B$, avendo che $F_C \neg B$ produce/deduce TB
- A è del tipo $B \rightarrow C$, avendo che $F_C(B \rightarrow C)$ produce/deduce $TB, F_C C$

Analizzo l'ultimo caso, avendo $TB, F_C C$. Questo è l'unico caso in cui potrei avere ancora formule che vengono tagliate con le regole intuizionistiche, in

caso di implicazione ma posso evitare la cosa. Infatti, se TB fosse anch'essa un'implicazione, potrei usare il $\overline{T \rightarrow}$ e ottenere formule che non verranno mai tagliate dall'applicazione di regole intuizionistiche, avendo che il tableau classico e quello intuizionistico coincidono. Ne segue che se quello classico chiude allora chiude anche quello intuizionistico. Il trucco sta nel $F_C A$ nel branch sinistro del risultante della regola del $\overline{T \rightarrow}$, vale a dire rafforzare, scrivendo F_C invece di F della'antecedente dell'implicazione e quindi ottenendo da una formula certa, $TA \rightarrow B$ due formule certe, una per branch, $F_C A$ e TB. Per questo logica classica e logica intuizionistica qui coincidono. Da un T prodotto da un F_C vengono quindi fuori solo formule certe con al nuova regola del $\overline{T \rightarrow}$.
Si è arrivati a tutto questo discorso dicendo che bisogna chiudere il tableau per $F_C A$ e da quel punto in poi il tableau classico e quello intuizionista coincidono. Qualsiasi sia il tipo di A (specificando nel caso dell'implicazione l'uso di $\overline{T \rightarrow}$) ottengo qualcosa che non è più "tagliabile" usando regole intuizionistiche e quindi, partendo da $F\neg\neg A$ e arrivando ad $F_C A$, anche qualora A non sia atomica, arrivo ad un punto in cui le due logiche coincidono, **dimostrando il teorema**, non avendo più regole intuizionistiche che possono tagliare.
Si arriva a dire che, in questa situazione, l'S classico e l'S_C intuizionistico coincidono.
Essendo corretta la regola del $\overline{T \rightarrow}$ la posso usare nella dimostrazione del teorema. La regola non è completa perché esistono tesi intuizionistiche, dimostrabili intuizionisticamente, che non possono essere dimostrate usando la regola, che porterebbe ad un tableau che non chiude. □

3.2 Logica Intuizionistica Predicativa

Per parlare di logica predicativa intuizionistica abbiamo bisogno di specificare il suo **alfabeto**, formato da:

1. un insieme di **variabili individuali** che indichiamo con x, y, z etc...

2. un insieme di **costanti individuali**, detti anche **parametri** in certi contesti, che indichiamo con a, b, c etc...

3. un insieme di **funzioni**, con la loro arietà (che ricordiamo essere il numero degli argomenti o operandi che richiede), che indichiamo con f, g, h etc...

4. un insieme di **predicati**, con la loro arietà, che indichiamo con P, Q, R etc...

5. un insieme di **costanti logiche proposizionali** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

6. un insieme di **quantificatori**, ovvero quello **esistenziale** $\exists$ e quello **universale** $\forall$

7. un insieme di **simboli ausiliari**, come, ad esempio, "(" e ")"

Gli insiemi 1,5,6 e 7 sono generali per tutti i linguaggi intuizionistici. I punti 2,3 e 4 sono detti **tipo di similarità** o **segnatura** dello specifico linguaggio. Specificando quindi costanti individuali, funzioni e predicati vado a specificare un particolare *linguaggio del primo ordine.*
Rispetto all'alfabeto per il linguaggio del primo ordine della logica classica non si riscontrano differenze con quello intuizionistico, i due alfabeti coincidono (come del resto coincidevano anche gli alfabeti dei linguaggi proposizionali).
Anche le altre definizioni, ovvero quelle di **termine** e di **formula ben formata**, coincidono tra logica predicativa classica e logica predicativa intuizionistica.

Definizione 16. *Definisco **termine**, in logica predicativa intuizionistica. Si ha che:*

1. *ogni costante individuale è un termine*

2. *ogni variabile individuale è un termine*

3. *se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e f è una funzione di arietà n allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine*

*Si ha che 1 e 2 sono i **casi base** mentre 3 è la **clausola induttiva**.*

In un parallelo con il mondo della programmazione posso pensare ad un **tipo**, ad esempio `int`. Ho che:

```
x+1
```

è una funzione binaria che somma ad una variabile x, che suppongo di tipo `int`, una costante 1, comunque di tipo `int`.
Si ha che, in programmazione, `x+1` è un'**espressione**, che è appunto in programmazione il corrispettivo di **termine** nella logica.
Ogni linguaggio di programmazione ha una sua sintassi, definita tramite **carte sintattiche**, esempio in figura 3.1, usate per definire una grammatica deterministica in un linguaggio di programmazione. Quindi dal punto di vista della carta sintattica un'espressione è:

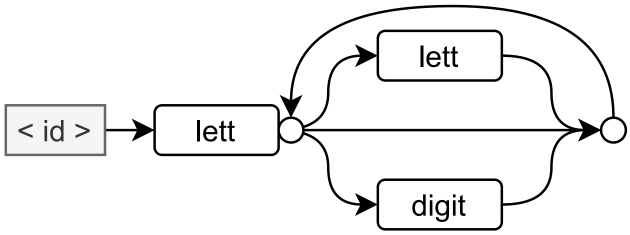


Figura 3.1: Esempio di carta sintattica in C, per un identificatore. Si legge "un identificatore C *id* comincia sempre con una lettera alfabetica *lett*, seguita da una lettera alfabetica *lett* o da una cifra *digit*, il tutto iterato". A esempio `A10` è un identificatore, `1AB` no.

- una costante
- una variabile
- un simbolo di funzione applicato a n espressioni se il simbolo di funzione ha arietà n

Torniamo a parlare di logica predicativa.

Definizione 17. *Definiamo **termine chiuso** come un termine che non contiene variabili.*

Esempio 22. *Ad esempio:*

- $f(x, 1)$*, con* f *di arietà 2, è un termine ma non è un termine chiuso, avendo* x*, che è una variabile, come argomento*
- $g(4, 7)$*, con* g *di arietà 2, è un termine ed è un termine chiuso, avendo solo costanti come argomento*
- $g(f(x, 2), 4)$*, con* g *ed* f *di arietà 2, è un termine, avendo una funzione ed una costante come parametri ed entrambi sono termini. Non è però un termine chiuso dato che* $f(x, 2)$ *non è un termine chiuso*

Definizione 18. *Definiamo le **formule ben formate** del primo ordine. Si ha che:*

1. *se* P *è un **predicato**, di arietà* n *(cosa che potremmo indicare con* P^n*) e* $t_1, \dots, t_n$ *sono **termini**, allora* $P(t_1, \dots, t_n) \in FBF$*.* $P(t_1, \dots, t_n)$ *è detta **formula atomica***

2. *se* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in FBF$ *allora:*

   - $\neg\mathcal{A} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \in FBF$

   Si noti che $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$*, scritte così in corsivo per evidenziare questo aspetto, non fanno parte del linguaggio appena definito, non sono termini etc... ma sono* ***meta-variabili che variano su formule ben formate****, ovvero sono simboli di arbitrarie formule ben formate*

3. *se* x *è una* ***variabile individuale*** *e* P *è un* ***predicato*** *del linguaggio, allora:*

   - $\forall x P(x) \in FBF$
   - $\exists x P(x) \in FBF$

   Quindi i due quantificatori possono quantificare solo su variabili individuali (a livello di logica predicativa, ovvero di logica del primo ordine, una cosa del tipo $\forall P(P(x))$ *non è ammessa)*

Fin qui si potrebbe dire "nulla di nuovo", in quanto tutto quello che è appena stato detto vale in logica intuizionistica come in logica classica. In realtà qualche differenza potrei già farla. A livello di logica classica proposizionale potrei usare un insieme minimale di operatori con solo $\neg$ e $\vee$ mentre in logica intuizionistica non potrei.
Dal punto di vista dei quantificatori in logica classica potrei definire $\forall$ come $\neg\exists\neg$ e $\exists$ come $\neg\forall\neg$, quindi me ne basterebbe uno dei due. In logica intuizionistica questo non vale e i due quantificatori sono del tutto indipendenti e non definibili, non valendo l'equivalenza classica.
Tra le due logiche quindi non si ha una differenza sintattica (al più che in logica classica potrei togliere qualche connettore e un quantificatore) ma si ha una differenza semantica (che spiega perché in logica intuizionistica non posso trascurare connettivi e quantificatori).
Si avranno **modelli di Kripke** per la logica predicativa intuizionistica.

Definizione 19. *Si definisce* ***variabile libera*** *una variabile non legata ad un quantificatore.*

Definizione 20. *Definiamo* ***formula ben formata chiusa*** *quando ogni variabile della FBF compare nell'ambito di un quantificatore o esistenziale o universale. In altri termini una FBF è chiusa se non contiene variabili libere.*
Una FBF non chiusa si dice anche ***FBF aperta****.*

Esempio 23. *Ad esempio:*

- $\forall x \exists y P(x, y)$ *è una FBF chiusa*
- $\forall x(P(x, y) \wedge Q(x))$ *è una FBF ma non è una FBF chiusa a causa di* y
- $\forall x(Q(x) \wedge \exists y(P(x, y)))$ *è una FBF chiusa*
- $\forall x Q(x) \wedge \exists y(P(x, y))$ *è una FBF ma non è una FBF chiusa perché la* x *del secondo termine dell'and non ha più un quantificatore (bisogna guardare le parentesi)*

Tendenzialmente studieremo formule ben formate chiuse (in quanto vedremo che ogni FBF chiusa è $\top$ e $\perp$ fissata un'interpretazione, che dobbiamo ancora definire per la logica intuizionistica, mentre una FBF aperta, per essere valutata, richiede una esemplificazione / un'istanziazione della *variabile libera*).

3.2.1 Deduzione Naturale Predicativa

Passiamo ora alla deduzione naturale in ottica logica predicativa.
Vediamo quindi l'estensione delle regole della deduzione naturale al caso predicativo. A livello predicativo in realtà le regole sono le stesse della logica classica in quanto basta la regola dell'eliminazione del $\neg$ a livello proposizionale per caratterizzare anche la logica intuizionistica predicativa.
Anche in questo caso si hanno le regole di eliminazione e le regole di introduzione, dato un predicato P e a costante:

quantificatore	introduzione	eliminazione
$\exists$	$\dfrac{P(a)}{\exists x P(x)} i\exists$	$\dfrac{\overset{\pi}{\exists x P(x)}, \ \overset{\cancel{P(a)}}{\overset{\pi_1}{C}}}{C} e\exists$
$\forall$	$\dfrac{\overset{\pi}{P(a)}}{\forall x P(x)} i\forall$	$\dfrac{\forall x P(x)}{P(a)} e\forall$

Per l'introduzione di $\forall$ non faccio ipotesi sul valore della costante a e se ho una dimostrazione che porta a $P(a)$, dove non faccio appunto ipotesi su a, allora posso introdurre il $\forall$. Mi serve quindi una dimostrazione di $P(a)$ con a non fissato. Si ha che a in questo caso è quindi una sorta di *parametro* (questo vale anche nell'eliminazione del $\forall$, mentre nell'introduzione di $\exists$ è una costante specifica, in quanto basta averne una). Ad esempio posso dire che da "pari 4" posso dedurre che "esiste un x che è pari" ma non che "tutti gli x sono pari", in quanto l'a dell'introduzione del $\forall$ non deve essere specificato ma deve provenire da una dimostrazione di $P(a)$ in cui a non è mai stato particolarizzato.
In merito all'eliminazione di $\exists$ si suppone di aver ottenuto $\exists x P(x)$ tramite una dimostrazione π. Si assume quindi $P(x)$ dove a non deve essere mai occorso in nessun punto di π e non dove occorrere in nessun punto di C che si ottiene tramite π_1. In tal caso posso eliminare $\exists$ e ottenere C, che è indipendente dal valore di a in $P(a)$. Ad esempio posso dire "esiste un numero primo e pari", assumo un $Pari(a)$, e deduco un C che non contiene a, ad esempio $C = 2$, allora posso eliminare $\exists$ e concludere con 2 come risultante. Il punto è che a priori, da un esiste, non so quale sia il termine esistente ma se faccio tutto il ragionamento sopra posso dire che C è tale termine e andare avanti nella dimostrazione.
Le *regole critiche* sono l'introduzione di $\forall$, che è pesante come significato dovendo dire che vale per ogni, e l'eliminazione dell'esiste, che è pesante come significato in quanto dal dire che esiste qualcosa si estrae quel qualcosa, arrivando ad un $C \in FBF$. Le altre due regole sono più "leggere".
Con queste quattro regole si ha un **calcolo corretto e completo** per la logica classica se si ha l'eliminazione del $\neg$ e per la logica intuizionistica se non si ha tale regola. Quindi questo calcolo, che ricordiamo essere di Prawitz è molto flessibile e modulare rispetto alle varie logiche.
Tutte le altre regole proposizionali si usano come già visto.
La nozione di dimostrazione in deduzione naturale è invariata. Se scrivo $\vdash_{INT} A$ intendo dire che è dimostrabile una formula predicativa A in logica intuizionistica, esistendo una sequenza finita di applicazioni di regole di deduzione naturale predicativa intuizionistica che termina con la formula A. Se ho assunzioni che non voglio scaricare posso dare la nozione più generale di dimostrazione di una formula predicativa A a partire da un insieme di assunzioni Γ:

$$\Gamma \vdash_{INT} A$$

Vediamo qualche esempio di deduzione naturale predicativa.

Esempio 24. *Partiamo con un esempio famoso, di una formula non dimostrabile, nemmeno classicamente. Questo esempio segnala come l'uso scor-*

retto dell'introduzione del $\forall$ può portare a dimostrazioni errate. Prendiamo quindi:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \to \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

Ovvero avrei la "distribuzione" del $\forall$ sull'or che non ha senso. Sarebbe come dire "ogni numero è pari o dispari quindi o ogni numero è pari o ogni numero è dispari".
Applichiamo le regole per vedere se è dimostrabile, sapendo che non dovrà esserlo.
Si hanno le seguenti assunzioni:

1. $\forall x(A(x) \vee B(x))$
2. $A(a)$
3. $B(a)$

E la dimostrazione:

$$\frac{{}^{1}\forall x(A(x) \vee B(x))}{A(a) \vee B(a)} e\forall$$

In parallelo vorrei avere:

$$\frac{{}^{2}A(a)}{}i\forall, \quad \frac{{}^{3}B(a)}{}i\forall$$

$$\frac{\forall x A(x)}{}i\vee, \quad \frac{\forall x B(x)}{}i\vee$$

$$\frac{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{}, \quad \frac{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{}$$

Unendo i due percorsi:

$$\frac{A(a) \vee B(a), \forall x A(x) \vee \forall x B(x), \forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}$$

Non chiaro ipotetico ultimo passaggio, a priori del passaggio "illegale".
Ma questo non posso farlo perché per l'introduzione di $\forall$ non posso partire da assunzioni. Quindi questa formula non è nemmeno dimostrabile classicamente, come è intuitivo dire. Quindi:

$$\nvdash_{CL} \forall x(A(x) \vee B(x)) \to \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

Potenzialmente potrei avere altri metodi ma possiamo dire che, in questo caso, non si arriverebbe mai a conclusione.

Si può dimostrare che l'$\exists$ si distribuisce sull'or (fatto su quaderno).
Vediamo ora un altro esempio.

Esempio 25. *Vediamo un esempio di formula dimostrabile solo classicamente:*

$$\exists x A(x) \iff \neg \forall x \neg A(x)$$

Vedremo che uno dei due sensi è dimostrabile anche intuizionisticamente.
Parto con:

$$\exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$$

Si hanno le assunzioni:

1. $\exists x A(x)$
2. $\forall x \neg A(x)$
3. $A(a)$

e la seguente applicazione di regole:

$$\frac{^2\cancel{\forall x \neg A(x)}}{}e\forall$$

$$\frac{^3\cancel{A(a)}, \neg A(a)}{}i\bot$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\text{(scaricando 2)}$$

$$\frac{^1\cancel{\exists x A(x)}, \neg \forall x \neg A(x)}{}e\exists\text{(scaricando 3)}$$

$$\frac{\neg \forall x \neg A(x)}{}i \rightarrow \text{(scaricando 1)}$$

$$\exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$$

Quindi la formula è dimostrabile intuizionisticamente, non avendo assunzioni non scaricate. Come strategia si è seguita quella simile alla logica proposizionale, cercando di arrivare all'introduzione finale dell'implica che scaricasse la prima assunzione.
Vedo l'altro verso:

$$\exists x A(x) \leftarrow \neg \forall x \neg A(x)$$

ovvero:

$$\neg \forall x \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

Si ragiona sapendo che la dimostrazione è possibile solo classicamente.
Si hanno le assunzioni:

1. $\neg\forall\neg x A(x)$
2. $\neg A(a)$

e la seguente applicazione di regole:

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg A(a)}}{}i\forall$$

$$\frac{{}^{1}\neg\forall\neg x A(x), \forall x\neg A(x)}{}i\bot$$

$$\frac{\bot}{}e\neg\text{(scaricando 2)}$$

$$\frac{A(a)}{}i\exists$$

$$\frac{\exists x A(x)}{}i\to\text{(scaricando 1)}$$

$$\neg\forall x\neg A(x)\to\exists x A(x)$$

L'introduzione del $\neg$ è solo presente in logica classica e non in logica intuizionistica.
Come prima si potrebbe pensare che non va bene perché introduco il $\forall$ da un'assunzione, ma l'assunzione poi viene scaricata, siamo quindi "al limite" dell'accettabile.
Si ha comunque che la formula è dimostrabile solo classicamente per l'introduzione del $\neg$.
Cerchiamo ora un'altra dimostrazione senza quell'introduzione di $\forall$ "al limite" (anche se la dimostrazione sopra sarebbe accettata in esame).
Si hanno le assunzioni:

1. $\neg\forall\neg x A(x)$
2. $\neg\exists x A(x)$

Si usa il lemma per cui da $\neg\exists x A(x)$ derivo $\forall x\neg A(x)$.

Si ha quindi la seguente applicazione di regole:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{^{2}\cancel{\neg\exists x A(x)}}{}\text{(regola derivata)}}{^{1}\cancel{\neg\forall\neg x A(x)}, \forall x \neg A(x)} i\bot}{\bot} i\neg\text{(scaricando 2)}}{\exists x A(x)} i \rightarrow \text{(scaricando 1)}}{\neg\forall x \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)}$$

Si ha comunque che la formula è dimostrabile solo classicamente e non intuizionisticamente, per l'introduzione del $\neg$, al più comunque di riuscire dimostrare, classicamente il lemma:

$$\vdash_{CL} \neg\exists x A(x) \rightarrow \forall x \neg A(x)$$

Vediamo tale dimostrazione.
Si assume:

1. $A(a)$
2. $\neg\exists A(x)$

Avendo quindi la seguente applicazione di regole:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{^{1}\cancel{A(a)}}{^{2}\cancel{\neg\exists A(x)}, \exists x A(x)} i\exists}{\bot} i\bot}{\neg A(a)} i\neg\text{(scaricando 1)}}{\forall x \neg A(x)} i\forall}{\neg\exists x A(x) \rightarrow \forall x \neg A(x)} i \rightarrow \text{(scaricando 2)}$$

Avendo che la formula è dimostrabile classicamente.
Posso fare l'introduzione di $\forall$ perché $\neg A(a)$ è derivata e a compare solo in una formula derivata.

Del resto quest'ultima dimostrazione sarebbe valida anche intuizionisticamente se ci servisse. Quindi si ha che:

$$\vdash_{INT} \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

Chiamo il seguente teorema anche se non ho idea di cosa sia veramente (se un teorema o altro).

Teorema 4. *Nell'intuizionismo non è mai dimostrabile che da una formula negata si arrivi ad un esistenziale "puro".*

3.2.2 Semantica

Definizione 21. *Un* ***modello di Kripke*** *per la logica intuizionistica predicativa è definito come una quadrupla:*

$$K = \langle G, R, \vDash, P \rangle$$

dove P è "nuovo" rispetto a quanto detto per la logica intuizionistica proposizionale, infatti si hanno:

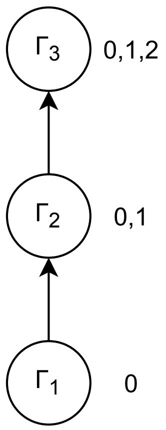
- *G è un insieme di stati di conoscenza*
- *R è una relazione riflessiva e transitiva*
- *$\vDash$ è il forcing che lega elementi di G a formule*
- *P è una* funzione monotona strettamente crescente *che associa ad ogni elemento di G l'insieme dei parametri o delle costanti individuali. P infatti sta per "parametri"*

Per la monotonia crescente stretta di P si ha che;

$$P(\Gamma_i) \subset P(\Gamma_j), \; con\; j \geq i \;\; e\; \Gamma_j R \Gamma_i$$

Ovvero passando da un nodo di G, Γ_i, ad un suo successivo, Γ_j, che è in relazione R per il modello di Kripke, si deve avere che l'insieme dei parametri del successivo cresce rispetto all'insieme dei parametri del nodo in considerazione. L'ordine dei parametri è sempre crescente, in modo monotono. R ricordiamo essere un ordine parziale.
Andando avanti nell'albero che rappresenta il modello di Kripke l'insieme dei parametri cresce in modo monotono.

Esempio 26. *Vediamo un esempio di modello di Kripke che rappresenta quanto detto:*



Avendo quindi che:

- $P(\Gamma_0) = \{0\}$
- $P(\Gamma_1) = \{0, 1\}$
- $P(\Gamma_2) = \{0, 1, 2\}$

Avendo rispettata la monotonia.
Se avessi avuto, ad esempio, con rispettivo modello di Kripke:

- $P(\Gamma_0) = \{0\}$
- $P(\Gamma_1) = \{1\}$
- $P(\Gamma_2) = \{3, 1\}$

Non avrei avuto una situazione valida.
Ovviamente una situazione del tipo:

- $P(\Gamma_0) = \{0\}$
- $P(\Gamma_1) = \{0, 1\}$
- $P(\Gamma_2) = \{0, 1, 3\}$

è valida, non avendo indicazioni sulla natura dei parametri ma solo sul fatto che devono aumentare in numero. Quindi è valida anche una situazione del tipo:

- $P(\Gamma_0) = \{0\}$
- $P(\Gamma_1) = \{0, 1\}$
- $P(\Gamma_2) = \{0, 1, 3, 5, 9\}$

Ovviamente gli elementi dei nodi precedenti devono essere presenti anche nei nodi successivi, insieme però ad un numero arbitrario di nuovi elementi.

Vediamo ora il significato di "vero" per le formule predicative della logica intuizionistica in un modello di Kripke, come appena specificato. Vediamo quini i due casi, quello per $\exists$ e quello per $\forall$.
Non si considerano formule aperte, A è sempre chiusa.

Definizione 22. *Si dice che, dato un nodo Γ di un modello di Kripke K per la logica predicativa intuizionistica, si ha che, per l'operatore esistenziale:*

$$\Gamma \vDash \exists x A(x) \iff \exists\, a \in P(\Gamma) \ t.c. \ \Gamma \vDash A(a)$$

Quindi nel nodo Γ è vera la formula $\exists x A(x)$ sse esiste un certo parametro a nell'insieme dei parametri di Γ tale per cui $A(a)$ è vero in Γ. Non ci interessiamo di tutti i vari Γ' in relazione R con Γ quindi la definizione di "essere vero" per un esistenziale intuizionista coincide con la definizione classica della verità di un esistenziale, considerando un unico nodo del modello. Questa definizione sembra in contraddizione con la definizione della ***proprietà dell'esplicita definibilità*** *della logica intuizionistica, che dice che se si dimostra intuizionisticamente la formula $\exists x A(x)$ allora deve esistere un termine chiuso t per cui si riesca a dimostrare $A(t)$ in logica intuizionistica. Questo però vedremo non accade, non avendo questa contraddizione.*

Definizione 23. *Si dice che, dato un nodo Γ di un modello di Kripke K per la logica predicativa intuizionistica, si ha che, per l'operatore universale:*

$$\Gamma \vDash \forall x A(x) \iff \forall \Gamma' \ t.c. \ \Gamma' R \Gamma \ e \ \forall a \ t.c \ a \in P(\Gamma') \ si \ ha \ \Gamma' \vDash A(a)$$

Quindi, per vedere che la formula $\forall x A(x)$ sia vera in un nodo Γ, bisogna vedere tutti i nodi di K in relazione R con Γ e bisogna vedere tutti i parametri di questi nodi, verificando che in tutti questi nodi, per tutti i parametri, sia vera $A(a)$.
Si ha in questo caso un'enorme differenza con la logica classica, dove non si ha questa "stratificazione" degli stati di conoscenza, avendo qui che $A(a)$ deve essere vero per tutti i parametri e in tutti i nodi accessibili da Γ.
Dimostrare un $\forall$ è quindi molto oneroso dovendo praticamente dire che è la formula è valida in tutti i modelli di Kripke.

Grazie a queste due definizioni sappiamo valutare in Γ la formula ben formata predicativa A, ovvero:

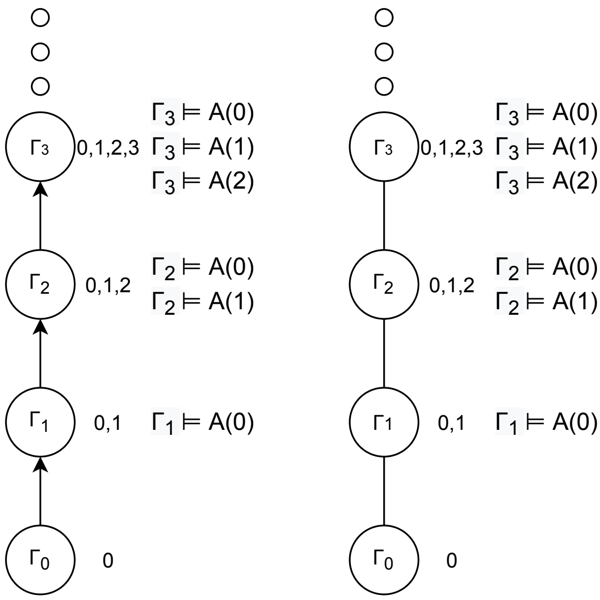
$$\Gamma \vDash A$$

Sapendo come valutare la formula, fissato un Γ che appartiene ad un modello predicativo di Kripke della logica intuizionistica.
Se ha fosse stata aperta si dovrebbe studiare anche l'assegnamento alle variabili libere e includere tale assegnamento nella definizione di verità. Questo non viene approfondito nel corso.
Vediamo quindi qualche esempio.

Esempio 27. *Prendiamo la formula:*

$$\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

Se fosse dimostrabile in logica intuizionistica significa che è valida, non esistendo contromodelli. In caso non fosse dimostrabile si avrebbe almeno un modello di Kripke che non la rende vera.
Una formula di questo tipo, a livello proposizionale senza $\forall$ ed $\exists$, terrebbe in considerazione il teorema di Kolmogorov-Glivenko, dicendo che se una formula è valida classicamente la sua doppia negazione lo è intuizionisticamente. Ma purtroppo questo teorema non si trasferisce automaticamente in logica predicativa, anche se il terzo escluso predicativo, presente nella nostra formula, $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ è valido il logica classica.
Vediamo che la formula non è dimostrabile intuizionisticamente, esistendo un nodo Γ che non rende vera la doppia negazione del terzo escluso predicativo. Costruiamo il seguente modello infinito (il prof usa archi non orientati ma metto entrambe le versioni):



Si hanno quindi i nodi, infiniti con ogni nodo associato ad un numero naturale sempre crescente, così specificati:

- Γ_0 *contiene il parametro* $\{0\}$ *e non rende vera nessuna formula*
- Γ_1 *contiene i parametri* $\{0, 1\}$ *e rende vera* $A(0)$
- Γ_2 *contiene i parametri* $\{0, 1, 2\}$ *e rende vera* $A(0)$ *e* $A(1)$
- Γ_3 *contiene i parametri* $\{0, 1, 2, 3\}$ *e rende vera* $A(0)$, $A(1)$ *e* $A(2)$
- *etc...*

Vediamo in primis se la funzione P *è strettamente monotona crescente. Si ha che:*

- $P(\Gamma_0) = \{0\}$
- $P(\Gamma_1) = \{0, 1\}$
- $P(\Gamma_2) = \{0, 1, 2\}$
- $P(\Gamma_3) = \{0, 1, 2, 3\}$
- *etc...*

e quindi la funzione che associa i parametri ai nodi è strettamente monotona crescente.
Vediamo ora la funzione di forcing, che deve rispettare il fatto che se una formula è vera in un Γ *allora è vera anche i* Γ_i *successivi. Si ha che:*

- *in* Γ_0 *non è vero nulla*
- *in* Γ_1 *è vera* $A(0)$ *ma è falsa* $A(1)$
- *in* Γ_2 *sono vere* $A(0)$ *e* $A(1)$ *ma è falsa* $A(2)$
- *in* Γ_3 *sono vere* $A(0)$, $A(1)$ *e* $A(2)$ *ma è falsa* $A(3)$
- *etc...*

Quindi viene rispettato il fatto che se la formula è vera in un nodo viene rimane vera anche in tutti quelli successivi.
Possiamo quindi dire, per le due considerazioni appena fatte, che questo è effettivamente un modello di Kripke per la logica predicativa intuizionistica.
Vediamo ora questo è un contromodello (e lo possiamo fare solo dopo aver dimostrato che è effettivamente un modello di Kripke valido per la logica predicativa intuizionista) per la formula in analisi, dicendo che Γ_0 *non rende vera la formula in questione che quindi non può essere valida e dimostrabile.*
La doppia negazione significa trovare almeno uno stato in cui è vera la formula quindi devo trovare, da Γ_0*, uno stato in cui è vera* $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.
Per avere che la formula sia valida in Γ_0 *dovrei avere che in tutti i nodi successivi deve essere vero* $A(\cdot)$ *per i parametri di quei nodi o* $\neg A(\cdot)$ *per i parametri di quei nodi.*
In Γ_0 $A(0)$ *non è vera. Per essere vero* $\neg A(0)$ *dovrei avere che in tutti i nodi successivi deve essere falso* $A(0)$ *ma già in* Γ_1 *è vera. Quindi* Γ_0 *non può essere il nodo che stiamo cercando. Per lo stesso ragionamento nessuno dei nodi può esserlo, avendo che in uno stato la formula è vera per i parametri del nodo precedente e non per il nuovo parametro introdotto, sempre tenendo conto che il modello è infinito. Questo accadrebbe anche aggiungendo nuovi stati sempre con la logica per la quale in un certo stato la formula è vera per i parametri del nodo precedente e non per il nuovo parametro introdotto.*
Si è giunti quindi a dire che in Γ_0 *la formula* $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ *non vale. Dato che basta un solo contromodello posso dire che la formula non è valida per la logica predicativa intuizionistica.*
Se il modello fosse finito il ragionamento fatto non funzionerebbe nell'ultimo nodo, con la formula che sarebbe verificata nell'ultimo nodo (basti pensare al fatto che se ci fermassimo in Γ_3 *avrei la formula verificata).*
Quindi il teorema di Kolmogorov-Glivenko, così come lo abbiamo dato, non è estendibile dal proposizionale al predicativo.
Spiegazione più dettagliata a pagina 49 del Fitting.

Abbiamo visto come non si possa usare il teorema di Kolmogorov-Glivenko ma esiste un metodo per tradurre formule valide classicamente in formule valide intuizionisticamente.

Definizione 24. *Definiamo il* ***metodo di traduzione*** τ *come il metodo che dice:*

- $\tau(A) = \neg\neg A$, *con* A *atomica*
- $\tau(A \wedge B) = \tau(A) \wedge \tau(B)$
- $\tau(A \rightarrow B) = \tau(A) \rightarrow \tau(B)$
- $\tau(\forall x A(x)) = \forall x \tau(A(x))$
- $\tau(A \vee B) = \neg(\neg\tau(A) \wedge \neg\tau(B))$
- $\tau(\exists x A(x)) = \neg\forall x \neg\tau(A(x))$

Si noti come le due traduzioni "strane" sono le ultime due, su $\vee$ *e* $\exists$*, dovendo rispettare per la prima la* ***proprietà di disgiunzione*** *e per la seconda la* ***proprietà dell'esplicita definibilità****.*
Il $\neg$ *resta primitivo e non si traduce. Quindi si ha:*

$$\tau(\neg A) = \neg\tau(A)$$

Teorema 5. *Si ha quindi il* ***teorema della traduzione negativa della logica predicativa classica nella logica predicativa intuizionistica*** *e si dimostra che:*

$$\vdash_{CL} A \iff \vdash_{INT} \tau(A)$$

Questo teorema, nonché il calcolo sopra definito di τ*, è stato ideato da Gödel.*

Questo teorema è l'equivalente predicativo del teorema di Kolmogorov-Glivenko del caso proposizionale.

Esempio 28. *Vediamo la traduzione di* $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ *dal classico all'intuizionistico per vedere che non porta, come dimostrato nell'esempio precedente, alla doppia negazione della stessa.*
Vediamo quindi:

$$\tau(\forall x(A(x) \vee \neg A(x)))$$

che è, per la traduzione del $\forall$*:*

$$\forall x \tau(A(x) \vee \neg A(x))$$

che diventa, per la traduzione di $\vee$*:*

$$\forall x \neg(\neg\tau(A(x)) \wedge \neg\tau(\neg A(x)))$$

che diventa, per la traduzione delle formule atomiche (ricordando che non si ha la traduzione di $\neg$ che resta primitiva):

$$\forall x \neg(\neg\neg\neg A(x) \wedge \neg\neg\neg\neg A(x))$$

che è dimostrabile intuizionisticamente per il teorema appena descritto, avendo applicato le regole di traduzione. Tale formula è dimostrabile in deduzione naturale e tramite, vedremo più avanti, il calcolo a tableau. Per tale formula, ovviamente, non si trovano contromodelli di Kripke.
Si noti come sia ben diversa dalla semplice doppia negazione della formula, come accadeva nel caso proposizionale.

3.2.3 Tableaux

Passiamo quindi allo studio dei tableaux nel caso della logica intuizionistica predicativa.
Si studiano quindi le T regole e le F regole dei due quantificatori, dato S insieme di formule ben formate, secondo Fitting:

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\dfrac{S, T\,\exists x A(x)}{S, T A(a)}$ (con a nuovo)	$\dfrac{S, F\,\exists x A(x)}{S, F A(a)}$
$\forall$	$\dfrac{S, T\,\forall x A(x)}{S, T A(a)}$	$\dfrac{S, F\,\forall x A(x)}{S_T, F A(a)}$ (con a nuovo)

Quindi nel $T\,\exists$ si ha che a non deve essere mai apparsa prima nel tableau. Le due T-regole sono le medesime della logica classica, anche se la semantica dei due quantificatori ben diversa.
Questo è un calcolo corretto e completo per la logica predicativa intuizionistica, tramite tableaux, secondo Fitting.
Ovviamente tutte le formule dimostrabili il deduzione naturale, anche in questo caso, devono essere dimostrabili coi tableaux, e viceversa le formule non dimostrabili in deduzione naturale non devono esserlo coi tableaux.
In intuizionismo tutte le definizioni di dimostrazione a tableaux chiuso e branching fatte nel caso proposizionale si traspongono nel predicativo. Quindi anche in questo caso si parte con la formula segnata F e si deve arrivare ad un tableau chiuso per dimostrarlo. Se nessun tableaux è chiuso, anche in questo caso, la formula non è dimostrabile.
La logica predicativa intuizionistica, così come quella classica, è semi-decidibile e quindi non si ha un algoritmo di dimostrazione come per la logica proposizionale classica o intuizionistica, dove un tableau finisce sempre. A livello predicativo questo non succede avendo solo un metodo di semi-decisione che ci dice che se una formula è valida posso dimostrarla ma se non è valida il meccanismo per stabilire che non è dimostrabile può non terminare mai. Nel 1936 Churh ha dimostrato che basta avere un simbolo di funzione binaria e un simbolo di predicato binario per costruire una formula indecidibile. Questa è una conseguenza del teorema di incompletezza di Gödel per l'aritmetica di Peano.

Vediamo quindi qualche esempio.

Esempio 29. *Iniziamo con il terzo escluso predicativo:*

$$\nvdash_{INT} \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

Si ha quindi:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}{F(A(a) \vee \neg A(a))}F\forall}{FA(a), F\neg A(a)}F\vee}{TA(a)}F\neg$$

Avendo che il tableau non chiude e non avendo possibilità di backtracking.
In logica classica $F\neg$ *non avrebbe ristretto a* S_T *e quindi il tableau sarebbe stato chiuso.*

Esempio 30. *Vediamo la doppia negazione del terzo escluso predicativo:*

$$\nvdash_{INT} \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}{T\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}F\neg}{F\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}T\neg}{F(A(a) \vee \neg A(a))}F\forall}{FA(a), F\neg A(a)}F\vee}{TA(a)}F\neg$$

Avendo che il tableau non chiude e non avendo possibilità di backtracking.
In logica classica $F\neg$ *non avrebbe ristretto a* S_T *e quindi il tableau sarebbe stato chiuso.*
Però ricordiamo che con il $T\neg$ *di Fitting potrebbe essere necessario ripetere la formula. Chiamo quindi:*

$$\alpha = T\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

e quindi si ha:

$$\begin{array}{c}
\underline{F\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}\,F\neg \\[1em]
\underline{T\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}\,T\neg \\[1em]
\underline{\alpha, F\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}
\end{array}$$

A questo punto potrei sviluppare α ma come visto sarebbe inutile. Sviluppo quindi $F\forall$:

$$\begin{array}{c}
\underline{\alpha, F\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}\,F\forall \\[1em]
\underline{\alpha, F(A(a) \vee \neg A(a))}\,F\vee \\[1em]
\underline{\alpha, FA(a), F\neg A(a)}
\end{array}$$

Potrei fare α (che è un T) ma avrei poi una restrizione che taglierebbe le due F. L'unica strategia rimanente è fare $F\neg$:

$$\begin{array}{c}
\underline{\alpha, FA(a), F\neg A(a)}\,F\neg \\[1em]
\underline{\alpha, TA(a)} \\[1em]
\underline{F\forall x(A(x \vee \neg A(x))), TA(a)}\,F\forall \\[1em]
\underline{F(A(b) \vee \neg A(b)), TA(a)}\,F\vee \\[1em]
FA(b), F\neg A(b), TA(a)
\end{array}$$

Dove nel penultimo passaggio non posso usare la stessa a di $TA(a)$. Si ha quindi che comunque il tableau non chiude, avendo $TA(a)$ e $FA(b)$.

Entrambi questi esempi sono coerenti con quanto visto con la deduzione naturale.
Vediamo anche una formula dimostrabile, anche perché è più semplice usare i tableaux che la deduzione naturale, quindi in caso prima verifico coi tableaux e poi con la deduzione naturale.

Esempio 31. *Vediamo:*

$$\vdash_{INT} \neg\exists x A(x) \iff \forall x \neg A(x)$$

Partiamo con:

$$\vdash_{INT} \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

Avendo:

$$\cfrac{F(\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x))}{\underline{T\neg\exists x A(x), F\forall x \neg A(x)}}\, F\to$$

Ma qui ci serve una strategia che rispetti il fatto che nelle regole predicative non devo avere a giù usate.
*Proseguo con F∀ per le regole di restrizione e che impone il parametro nuovo. Segnalo comunque il backtracking *:*

$$\cfrac{*T\neg\exists x A(x), F\forall x \neg A(x)}{\underline{T\neg\exists x A(x), F\neg A(a)}}\, F\forall$$

*Scelgo quindi di fare il F¬, segnalando il backtracking **, perché genera qualcosa che non verrà mai cancellato nel tableau:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{**T\neg\exists x A(x), F\neg A(a)}{T\neg\exists x A(x), TA(a)}\, F\neg}{F\exists x A(x), TA(a)}\, T\neg}{FA(a), TA(a)}\, F\exists$$

Avendo che il tableau chiude, senza bisogno di backtracking (si noti per di più che quella fatta è la scelta migliore, forse l'unica che fa chiudere il tableau). Verifico ora la conversa:

$$\vdash_{INT} \forall x \neg A(x) \to \neg\exists x A(x)$$

Si ha quindi:

$$\cfrac{F(\forall x \neg A(x) \to \neg\exists x A(x))}{\underline{T\forall x \neg A(x), F\neg\exists x A(x)}}\, F\to$$

*Scelgo quindi di fare il $F\neg$, segnalando il backtracking *, perché avere poi $T\exists$ che introduce a mentre il $T\forall$ non lo richiede nuovo:*

$$\cfrac{\cfrac{*T\forall x \neg A(x), F\neg\exists x A(x)}{T\forall x\neg A(x), T\exists x A(x)}F\neg}{}$$

Scelgo ora di fare $T\exists$ per ottenere il nuovo a:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{**T\forall x\neg A(x), T\exists x A(x)}{T\forall x \neg A(x), TA(a)}T\exists}{T\neg A(a), TA(a)}T\forall}{FA(a), TA(A)}T\neg$$

Avendo che il tableau chiude, senza bisogno di backtracking.

Questo è quindi il calcolo "puro" di Fitting. Vedremo poi le ottimizzazioni come nel caso dei tableaux proposizionali, fatte da Moscato e dai suoi colleghi (mentre Dyckhoff sul predicativo intuizionista ci mise 10 anni per i sequenti).

3.2.4 Tableaux Estesi

Il prossimo passo è quindi quello di aggiungere il terzo segno anche al caso predicativo, ottimizzando poi il $T\to$, dovendo comprendere, tra gli antecedenti dell'implicazione, un possibile $\forall$ o un possibile $\exists$ (ricordando che il $T\to$ si divide in vari casi a seconda dell'antecedente).
Su Moodle c'è anche un paper sulla differenza di $F\exists$ nel calcolo classico e nel calcolo intuizionista, che non richiede duplicazione nel caso intuizionista a differenza di quello classico.
Vediamo quindi l'estensione del calcolo con le eventuali ripetizioni, estensione che è abbastanza "naturale":

quantificatore	T-regola	F-regola
$\exists$	$\frac{S,T\,\exists x A(x)}{S,TA(a)}$ (con a nuovo)	$\frac{S,F\,\exists x A(x)}{S,FA(a)}$
$\forall$	$\frac{S,T\,\forall x A(x)}{S,TA(a),T\,\forall x A(x)}$	$\frac{S,F\,\forall x A(x)}{S_C,FA(a)}$ (con a nuovo)

Il $T\forall$ e il $T\exists$ valgono anche a livello di logica classica. Nella $F\forall$ si restringe S a S_C, ovvero a contenere solo T formule e F_C formule, variando solo

la restrizione rispetto a Fitting, dove si aveva S ristretto a S_T. In merito a $F\exists$ nel caso classico si avrebbe la ripetizione di $F\,\exists x A(x)$ mentre nel caso intuizionistico no, imponendo che a sia un a qualsiasi ma “una volta sola”, non avendo la ripetizione.
Nel caso di Fitting le differenze con il caso classico non erano esplicitate non essendo esplicitate le ripetizioni.
A livello classico $F\,\exists x A(x)$ è realizzata quando $A(a)$ è $\perp$ per ogni a, per questo in logica classica si ripete. In logica intuizionistica non ripeto, per un vincolo semantico dell'esistenziale a livello intuizionistico, essendo l'esistenziale locale dal punto di vista semantico ad un unico nodo del modello di Kripke si che fissata a non posso riusare $F\,\exists x A(x)$.
Solo l'$F\forall$ restringe a S_C.
Manca però l'uso del segno F_C per completare il calcolo:

quantificatore	F_C-regola
$\exists$	$\dfrac{S, F_C\,\exists x A(x)}{S, F_C A(a), F_C\,\exists x A(x)}$
$\forall$	$\dfrac{S, F_C\,\forall x A(x)}{S_C, F A(a), F_C\,\forall x A(x)}$(con a nuovo)

Si noti come nell'$F_C\forall$ si passi da una formula F_C ad una formula F che potrebbe essere tagliata da altre regole e quindi, per garantire il segno certo F_C, bisogna ripetere la formula $F_C\,\forall x A(x)$. Scrivere $F_C A(a)$ non sarebbe corretto secondo la semantica della logica intuizionistica. Non si ha lo stesso vantaggio del caso proposizione usando F_C, indebolendo al formula destrutturata, avendo $FA(a)$ che non si può rafforzare con F_C venendo a mancare le dimostrazioni di correttezza del calcolo in caso, e ripetendo la formula strutturata.
Invece in $F_C\exists$ ripeto la formula posso anche mettere $F_C A(a)$, potendolo ripetere per ogni costante, $F_C A(b)$, $F_C A(c)$ etc... Non viene quindi indebolita la formula e si possono creare tutte le varianti per le costanti che servono. Si nota la differenza di realizzabilità di $F_C\exists$ rispetto a $F\exists$ in quanto il segno F_C è il $\neg$ e quindi è un $T\neg$, che va a prendere tutti i livelli del modello di Kripke, dicendo, con $T\neg A$ che de A deve essere falso in tutti i nodi, avendo quindi F_C, contrapposto a F che significa falso in un solo nodo.
Restano da analizzare le due regole del $T \rightarrow$ con antecedente un esistenziale e un universale.

quantificatore	$T\to$regola
$\exists$	$\dfrac{S,T\,\exists xA(x)\to B}{S,T(\forall x(A(x)\to B))}$
$\forall$	$\dfrac{S,T\,\forall xA(x)\to B}{S,F\,\forall xA(x),T\,\forall xA(x)\to B/S,TB}$

Si noti come nel caso universale bisogna dividere il tableau di due, avendo un $T\to$ e nel primo caso, avendo F dell'antecedente devo anche ripetere l'intera formula. In questo caso non si hanno grandi vantaggi a differenza del proposizionale. Non si può fare nulla di più sul caso universale.
Il caso esistenziale porta invece un vantaggio in quanto avendo un'implicazione con un esistenziale la si trasforma in un'implicazione di un quantificatore universale su tutta la formula, diminuendo la complessità dell'antecedente, avvicinandoci al caso delle formule atomiche. L'implicazione ora in se non ha più un quantificatore per l'antecedente, in quanto ora riguarda solo l'intera formula. Si è ottenuto un vantaggio computazionale.
Ho quindi un **calcolo corretto e completo per la logica intuizionistica predicativa** ma bisogna dimostrarlo.
Vediamo quindi in primis che sia **corretto**. Prendo quindi una formula predicativa non dimostrabile intuizionisticamente e vedo che lo sia anche con il calcolo a tableaux esteso, non avendo alcun tableaux che chiuda. Si ha un risultato teorico, il **lemma di Lindembuam** (*potrebbe essere errato il nome del lemma*), che dice che non si ottiene mai il tableau chiuso, anche senza dover "provare" con tutte le costanti (che sarebbe un conto infinito e inutile).

Esempio 32. *Usiamo quindi, ad esempio, la formula della doppia negazione del principio del terzo escluso predicativo:*

$$\nvdash_{INT} \neg\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$$

di cui sa già esistere il contromodello.
Vediamo quindi il calcolo:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))}{T\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))}F\neg}{F_C\forall x(A(x)\vee\neg A(x))}T\neg}{*F(A(a)\vee\neg A(a)),F_C\forall x(A(x)\vee\neg A(x))}F_C\forall$$

Se applicassi $F_C\forall$ tornerei alla stessa formula (si elimina l'F ma si reintroduce la stessa formula) quindi applico $F\vee$ e posso anche togliere la notazione del backtracking in quanto sarei in un loop che non porterebbe ad altri risultati fino che non si sceglie di fare $F\vee$:

$$\dfrac{F(A(a) \vee \neg A(a)), F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}{\underline{FA(a), F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)), F\neg A(a)}}F\vee$$

Se faccio $F\neg$ elimino $FA(a)$ mentre se faccio $F_C\forall$ elimino sia $FA(a)$ che $F\neg A(a)$. Avrei infatti:

$$\dfrac{\dfrac{FA(a), F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)), F\neg A(a)}{F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)), TA(a)}F\neg}{FA(b) \vee \neg A(b), F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)), TA(a)}F_C\forall$$

con la risoluzione dell'or che porterebbe comunque a non poter chiudere avendo a e b. Inutile dire cosa succede se faccio subito $F_C\forall$ visto che si cancella tutto e avendo che sicuro non chiuderà mai il tableau.
Non avendo tableaux che chiudono si conferma la non dimostrabilità della formula in logica intuizionistica predicativa.

Si potrebbe vedere che in tutti i casi le formule intuizionistiche predicative non dimostrabili lo restano anche con questo nuovo calcolo esteso.

Esempio 33. *Vediamo anche un esempio di formula dimostrabile:*

$$\vdash_{INT} \exists x \neg A(x) \to \neg\forall x A(x)$$

Si ha:

$$\dfrac{F\exists x \neg A(x) \to \neg\forall x A(x)}{\underline{*T\exists x \neg A(x), F\neg\forall x A(x)}}F \to$$

Scelgo di fare $F\neg$ che tanto non taglia la T.

$$\dfrac{*T\exists x \neg A(x), F\neg\forall x A(x)}{\underline{**T\exists x \neg A(x), T\forall x A(x)}}F\neg$$

Scelgo di applicare il $T\exists$.

$$\cfrac{**\,T\exists x\neg A(x), T\forall x A(x)}{\underline{***T\neg A(a), T\forall x A(x)}}\,T\exists$$

Scelgo di applicare il $T\neg$:

$$\cfrac{\cfrac{***T\neg A(a), T\forall x A(x)}{F_C A(a), T\forall x A(x)}\,T\neg}{\underline{F_C A(a), TA(a)}}\,T\forall$$

Avendo che il tableau chiude.
*Si può vedere che altre scelte avrebbero portato il tableau a non chiudere mentre ci sono altri percorsi che avrebbero comunque chiuso (ad esempio facendo l'altra scelta in **).*

3.2.5 Teoremi di Completezza e Validità

Argomento accennato a lezione, "bigino" su Moodle.
Parliamo quindi dei **teoremi di completezza e validità della logica predicativa intuizionistica**, nella versione del calcolo, quella senza duplicazioni proposizionali. Le dimostrazioni dei due teoremi sono lunghe e complesse e quindi vengono solo accennate.

Definizione 25. *Un insieme S di formule segnate è detto* ***insieme consistente*** *se non vi è alcun tableau che chiude per S, qualsiasi siano i backtracking fatti.*
Se S quindi contiene una formula non dimostrabile A si dice che S è consistente, in quanto nessun tableau chiuderà mai.

Definizione 26. *Dato un insieme S di formule segnate si definisce un insieme, detto* ***insieme di riferimento*** *π, come l'insieme dei parametri che compaiono in S.*

Teorema 6 (Teorema di Validità)**.** *Data una formula A, per cui esiste un tableau chiuso per FA, allora la formula A è valida nella logica predicativa intuizionistica.*
In altri termini le regole del calcolo a tableaux preservano la verità e che se una

formula, segnata F, ha un tableau chiuso allora alla fine avrò configurazioni che contengono TA e FA. Essendo perciò partiti con FA si arriva ad una contraddizione e quindi vale che la formula è vera (è quello che abbiamo sempre fatto e questo è il teorema dietro a questo).

Dimostrazione. Si ricorda che una formula segnata T è realizzabile quando esiste un nodo del modello di Kripke in cui la formula è vera. Una formula segnata F è realizzabile quando nel nodo in analisi la formula non è vera e la formula segnata F_C è realizzabile quando per ogni nodo accessibile da quello di partenza non è vera la formula.
Osservando che se una configurazione è realizzabile prima dell'applicazione di una regola del calcolo, lo sarà anche la configurazione ottenuta dopo l'applicazione della regola stessa, e quindi in un nodo del modello di Kripke che realizzava la configurazione di partenza.
Supponiamo di avere un tableau chiuso per FA. Si ha quindi che FA non è realizzabile e quindi A è forzata in tutti i modelli di Kripke. □

Lemma 1. *Se un insieme I di formule segnate è consistente si ha che esiste un modello di Kripke K_I e si ha che esiste un nodo g di K_I che realizza I.*
In altri termini insiemi di formule segnate consistenti hanno sempre un modello di Kripke che le realizza.
Questo lemma è legato al fatto che si parla di semantic tableaux.
La dimostrazione di tale lemma si fa in modo molto complesso.

Lemma 2. *Per ogni insieme I consistente di formule segnate, per ogni modello di Kripke K_I, per ogni nodo S di K_I, per ogni formula H di ogni saturato S^* di S si ha che H è realizzata in S.*
La dimostrazione di tale lemma si fa in modo molto complesso, per induzione.

Definizione 27. *Si definiscono i **saturati** come insiemi di formule, in questo caso segnate, che si ottengono applicando alle formule stesse le regole di inferenza.*

Teorema 7 (Teorema di Completezza)**.** *Se una data formula A è valida nella logica predicativa intuizionistica allora esiste un tableau chiuso per FA.*
In altri termini si può trovare un tableau che chiude per FA e quindi FA non sarà mai realizzabile.

Dimostrazione. Dato un insieme di formule segnate S consistente, che contiene una formula H, definiamo un insieme R come una estensione consistente di H in S. Si ha che R è un insieme contiene una delle formule ottenute applicando la regola dei tableau ad H per cui:

$$(S - \{H\}) \cup R$$

sia consistente. Tale riduzione quindi deve essere consistente. Dove non c'è branching è fuori discussione che la riduzione porti ad una configurazione consistente, ovvero ad un S' consistete. Quando H è invece una formula per la quale la regola in suo comporta branching si che bisogna scegliere il percorso che mantiene la consistenza nella nuova configurazione di formule. Lo stesso vale per tutte le formule che contengono variabili o riduzioni di variabili.
Si hanno quindi due passi:

- **passo A**: *costruzione dei saturati e di un nodo del modello di Kripke.*
  Le regole che non restringono S a S_C sono quelle che creano il nodo del modello attraverso i saturati. Il comportamento del calcolo quindi corrisponde alla costruzione del modello che si cerca per un insieme consistente. Detto in termini più semplici le formule che non restringono restano nello stesso nodo e arrivando in quel nodo del modello le formule atomiche andranno a forzare tutte quelle segnate T.
  In questo passo si ha che H_j è formato da, con $A, B \in FBF$:
    - $TA \wedge B$
    - $TA \vee B$
    - $T\neg A$
    - $(TA \vee B) \rightarrow C$
    - $(TA \wedge B) \rightarrow C$
    - $(T\exists x A(x)) \rightarrow B$
    - $(T\forall x A(x)) \rightarrow B$
    - $FA \wedge B$
    - $FA \vee B$
    - $F_C A \vee B$

  Ovvero tutte regole che non restringono mai S a S_C.
  Si ha che la riduzione di H_j al passo i, indicata con:
  $$R(H_j, i)$$
  è un'estensione consistente di H_j dove l'estensione consistente è la scelta delle formule che si ottengono applicando alla formula stessa la regola specifica e scegliendo poi la parte consistente in

caso di branching.
Vediamo i casi di branching.
Se H_j è $TA \to B$, con A atomica o negata, e TB è un'estensione consistente di H_j allora si ha che:

$$R(H_j, i) = \{TB\}$$

Se H_j è $T(A \to B) \to C$ e TC è un'estensione consistente di H_j allora si ha che:

$$R(H_j, i) = \{TC\}$$

Per il teorema di completezza e l'uso dei saturati si sceglie quindi la parte con TB nel primo esempio e e TC nel secondo. Il teorema di completezza comporta quindi una possibile strategia, che porta a formule di complessità minore etc. . .

- **passo B**: *costruzione nodi successori del modello di Kripke.*
  Le regole che restringono S a S_C (ma non solo come vedremo) sono quelle che creano i nodi successori. Detto in termini più semplici le formule che restringono S a S_C costruiscono nodi successori rispetto alla radice del modello e in quei nuovi nodi saranno realizzate le formule T e F_C.
  Si costruisce l'insieme dei nodi successori semplici S' avendo A come:

  - $F\neg B$
  - $F_C\neg B$
  - $FB \to C$
  - $F_CB \to C$
  - $F_CB \wedge C$
  - $F\forall xB(x)$
  - $F_C\forall xB(x)$

  Questo gruppo di formule altro non è che il gruppo delle formule le cui regole restringono S a S_C. S' è ottenuto da S sostituendo A con una delle sue estensioni consistenti in S e cancellando tutte le formule segnate F.
  Nel caso di $A = F\exists xB(x)$, dove S non restringe a S_C, si ha che S' è ottenuto da S sostituendo A con $FB(t)$, per ogni parametro t. Tale formula è quindi realizzata nei nodi successori. Si creano quindi tanti S' quanti sono i parametri contenuti nell'insieme dei

parametri di S, insieme che può crescere durante il processo. Si ricordi che tale regola richiede ripetizione nel caso classico ma non nel caso intuizionistico. La formula quindi non viene ripetuta ma si ha una sorta di ripetizione per ogni parametro nella dimostrazione del teorema di completezza.
Si hanno altre costruzioni necessarie per arrivare alla completezza che non vengono qui elencate

Si costruisce quindi il modello di Kripke corrispondente a un insieme di formule segnate consistente I:

$$K_I = \langle G_i, R, \vDash \rangle$$

tale che:

- gli elementi di G_I corrispondono ad opportuni insiemi S consistenti (essendo I consistente non potrei fare altrimenti) ottenuti nel *passo A* e nel *passo B*
- per ogni nodo di K_I, l'insieme dei parametri sarà determinato dal *passo A* e dal *passo B*
- in ogni nodo di K_I forziamo in esso tutte le formule atomiche segnate T di S

Usando quindi i due lemmi visti sopra possiamo dimostrare effettivamente il teorema di completezza, ovvero che se una formula A è valida intuizionisticamente, esiste un tableau chiuso per FA.
I dettagli della dimostrazione vengono trascurati.
Si supponga per assurdo che non esista tale tableau chiuso, avendo quindi che $\{FA\}$ è consistente. Si ha però che, allora per quanto visto, $\{FA\}$ è realizzabile (essendo consistete), ma questo è un assurdo perché la formula A è valida e quindi non può esistere un modello che realizza FA, dimostrando così il teorema. $\square$

Capitolo 4

Logica di Kuroda

Kuroda è un ricercatore giapponese che si è chiesto quale fosse la logica che, a livello **predicativo**, dimostrasse che se una formula predicativa vale in logica classica allora valga la sua doppia negazione. Quindi data A formula ben formata predicativa si è chiesto quale logica "?" fosse del tipo:

$$\vdash_? \neg\neg A \iff \vdash_{CL} A$$

Sappiamo già che tale logica non è quella intuizionistica in quanto la relazione varrebbe solo nel caso proposizionale, con il teorema di Kolmogorov-Glivenko, e non in quello predicativo dove valeva però $\vdash_{INT} \tau(A) \iff \vdash_{CL} A$, con $\tau(A)$ traduzione negativa di A, scoperta, tra gli altri, da Gödel.
Kuroda volle andare oltre, non accontentandosi della traduzione negativa nel caso predicativo.
Tale nuova logica è detta appunto **logica di Kuroda**, indicata con K, avendo quindi, nel caso predicativo:

$$\vdash_K \neg\neg A \iff \vdash_{CL} A$$

Questa logica altro non è che la logica intuizionistica a cui viene aggiunto l'assioma (non dimostrabile intuizionisticamente):

$$\forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x A(x)$$

Questa nuova logica contiene quindi l'intuizionismo e tutte le formule dimostrabili intuizionisticamente lo sono anche in questa nuova logica. L'aggiunta dell'assioma non comporta però il "collasso" nella logica classica di quella intuizionistica e quindi la logica di Kuroda si pone "a metà" tra la logica classica e quella intuizionistica, avendo quindi la seguente "catena" con i vari *contenuti stretti*:

$$INT \subset K \subset CL$$

La logica di Kuroda, dal punto di vista semantico, è caratterizzata da **modelli di Kripke** per l'intuizionismo con un requisito in più, ovvero quello di avere **stati finali**. Questo non significa comunque che tali modelli di Kripke siano per forza finiti ma si hanno stati, solo quelli finali appunto, in cui le formule si comportano come se fossimo in logica classica (e anche qui si coglie la natura "intermedia" di questa nuova logica). Questo fatto è dovuto che non si hanno stati in relazione con quelli finali (o meglio l'unico stato in relazione con uno stato finale è se stesso, visto che la relazione in un modello di Kripke è riflessiva). In logica classica le formule vanno a considerare solo uno stato del modello di Kripke, dove una formula è vera o falsa, senza la necessità di coinvolgere altri stati. Si ricordi che la logica classica può essere caratterizzata da modelli di Kripke con un solo stato e quindi ogni formula è vera o falsa.
Con la logica di Kuroda si ha che negli stati finali quindi le formule si comportano come in logica classica e quindi anche la formula $\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, ovvero la la negazione del terzo escluso predicativo, è dimostrabile nella logica di Kuroda:

$$\vdash_K \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

Aggiungere l'assioma $\forall x\neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x A(x)$ e avere dimostrabile $\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ sono ciascuno da solo sufficiente a caratterizzare la logica di Kuroda, avendo che essa può essere quindi anche definita come l'intuizionismo più la negazione del terzo escluso predicativo. Tutto ciò verrà dimostrato semanticamente. Se avessi un calcolo alla Hilbert, ovvero ad assiomi, basterebbe prendere gli assiomi dell'intuizionismo e una delle due formule "extra" appena citate per ottenere la logica di Kuroda.
In generale però abbiamo sempre dato la sintassi non tramite calcoli alla Hilbert ma coi tableaux quindi si caratterizza anche la logica di Kuroda in termini di calcolo a tableaux, facendo modifiche al calcolo a tableaux intuizionista, che viene "rilassato". Si otterrà però un calcolo meno deterministico di quello per la logica predicativa intuizionistica.
In primis, per allontanarsi dalla logica intuizionistica e avvicinarsi a quella classica, sempre in ottica di calcolo a tableaux ottimizzato con il segno F_C, si ha una regola per $F_C\forall$, che viene chiamata $\overline{F_C\forall}$:

$$\frac{S, F_C\,\forall x A(x)}{S_C, F_C A(a)}\overline{F_C\forall} \text{ (con a nuovo)}$$

Questa regola è corretta ma ci si chiede anche se sia completa.
Si noti in primis che si può dimostrare l'assioma caratteristico della logica di

Kuroda:

$$\dfrac{F\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}{T\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}F\neg$$

$$\dfrac{T\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))}{F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)}T\neg$$

$$\dfrac{F_C\forall x(A(x) \vee \neg A(x)}{F_C A(a) \vee \neg A(a)}\overline{F_C\forall}$$

$$\dfrac{F_C A(a) \vee \neg A(a)}{F_C A(a), F_C\neg A(a)}$$

$$\dfrac{F_C A(a), F_C\neg A(a)}{F_C A(a), TA(a)}F_C\neg$$

e quindi il tableau chiude ma Miglioli e Moscato hanno notato che sostituire il $F_C\forall$ intuizionista con il $\overline{F_C\forall}$ non basta per il teorema di completezza. La regola era comunque fondamentale e accettata ma non era sufficiente, serviva altro.
Per capire questo fatto serve un teorema della logica di Kuroda (*di cui non viene fatta la dimostrazione*).

Teorema 8. *Si ha che in logica di Kuroda è dimostrabile:*

$$(\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \to B \wedge \neg B) \to B \wedge \neg B$$

Con al sola formula $\overline{F_C\forall}$ non si riesce a dimostrare però la formula del teorema.
Si è pensato quindi di modificare il $T \to$ nel caso si abbia un $\forall$ ottenendo la regola detta $\overline{T \to \forall}$:

$$\dfrac{S, T\forall x A(x) \to B}{S, F\forall x A(x), F_C\neg\exists x(A(x) \to B)/S, TB}\overline{T \to \forall}$$

Questa regola farebbe chiudere il tableau per la formula del teorema ma anche questo non bastava per dimostrare il teorema di completezza della logica di Kuroda. Le due regole, $\overline{F_C\forall}$ e $\overline{T \to \forall}$, ancora non bastano.
Miglioli e Moscato hanno quindi istituito altre due nuove regole.
La prima è per il $T \to$, con A arbitraria e non solo atomica, esclusivamente per quando si ha S_C e non S. Questa regola è detta $CL - T \to$ ed è:

$$\dfrac{S_C, TA \to B}{S_C, F_C A/S_C, TB}CL - T \to$$

Questa regola testimonia che quando S contiene solo formule S_C è come se fossimo nella logica classica, potendo lavorare con T e F_C senza dover ripetere

formule.
Anche l'aggiunta di questa terza regola non è sufficiente per la completezza e infatti serve anche la seguente regola:

$$\frac{S}{S_C}AT$$

che permette di restringere S a S_C quando S contiene formule segnate F solo atomiche, da cui il nome della regola, chi viene detta AT, mentre può contenere comunque formule T e F_C di qualsiasi tipo, formule che restano ovviamente nella riduzione a S_C.
Queste ultime due formule, nel dettaglio, sono opera di Miglioli.
Quindi se prendo la logica intuizionistica e:

- sostituisco a $F_C\forall$ la regola $\overline{F_C\forall}$
- introduco la regola $CL - T \to$
- introduco la regola AT

ottengo una calcolo corretto e completo per la logica di Kuroda, dove tutte le altre regole sono identiche al calcolo a tableaux per la logica intuizionistica, comprese le varie regole per l'implicazione.
La regola $CL - T \to$ non richiede ripetizione di formule oltre la ripetizione di S_C, potendoci comportare come in logica classica (guardare teorema di Kolmogorov per la logica proposizionale).
La regola AT è più "fastidiosa" in quanto altamente **non deterministica** in quando non si sa quando applicarla per poter arrivare a chiudere il tableau, comportando un calcolo molto difficile da usare. Infatti in aggiunta alle regole di backtracking abbiamo anche la possibilità di applicare tale regola in qualsiasi punto del tableau, non scaturendo dai connettivi e dovendo quindi valutare l'opportunità strategica di applicarla o meno. La regola scaturisce unicamente dalla presenza eventuale in S di formule segnate F atomiche. Solitamente la regola AT si applica subito prima di applicare la regola $CL - T \to$ o comunque quando si vede in prospettiva si vede che si vorrà applicare $CL - T \to$, formula che ha la "comodità" di avere la formula A arbitraria (avendo come in logica classica che non si distingue se A sia atomica o meno).
La logica di Kuroda fa estendere al predicativo il teorema di Kolmogorov-Glivenko per questo è una logica molto interessante anche se **salta la costruttività** della logica, essendo quindi una **logica non costruttiva**.

Esempio 34. *Vediamo che nella logica di Kuroda vale:*

$$\vdash_K \forall\neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall a A(x)$$

Si ha che:

$$\cfrac{F\forall\neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall a A(x)}{\cfrac{*T\forall x\neg\neg A(x), F\neg\neg\forall x A(x)}{\cfrac{**T\forall x\neg\neg A(x), T\neg\forall x A(x)}{\underline{***T\forall x\neg\neg A(x), F_C\forall x A(x)}}\,T\neg}\,F\neg}\,F\to$$

e fino a qui si sono usate solo regole valide anche nell'intuizionismo. Si passa alle nuove regole per la logica di Kuroda:

$$\cfrac{***T\forall x\neg\neg A(x), F_C\forall x A(x)}{\cfrac{T\forall x\neg\neg A(x), F_C A(a)}{\cfrac{T\neg\neg A(A), F_C A(a)}{\cfrac{F_C\neg A(A), F_C A(a)}{TA(a), F_C A(a)}\,F_C\neg}\,T\neg}\,T\forall}\,overline F_C\forall$$

Avendo che il tableau chiude e questo è anche possibile grazie al calcolo con il segno F_C. Con solo il calcolo alla Fitting non si sarebbe comunque chiuso il tableau in maniera così "pulita", in quanto si sarebbe dovuto duplicare varie formule (vedisi gli ultimi due passaggi con l'uso di F_C).

Capitolo 5

Logiche Modali

Le **logiche modali** sono delle logiche in cui si hanno due operatori:

- l'**operatore di necessità**, indicato con $\Box$
- l'**operatore di possibilità**, indicato con $\Diamond$

Entrambi questi operatori si applicano a formule ben formate quindi la nozione di formula ben formata in logica modale si estende considerando formule ben formate anche, avendo $A \in FBF$:

- $\Box A$ (scritto a volte $L\,A$), da leggersi *necessario A*
- $\Diamond A$ (scritto a volte $M\,A$), da leggersi *possibile A*

Si hanno inoltre le varie formule formate con i connettivi classici, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\neg$. Ogni formula ben formata può essere quindi **modalizzata**, avendo la presenza del simbolo di *necessità* o *possibilità*.
Si parla di **base della logica modale** quando si definisce a quale logica appartengono le formule ben formate della logica modale in analisi. Si hanno logiche modali *basate* sulla **logica classica** (che vedremo) o anche, ad esempio, sulla **logica intuizionistica** (che non vedremo). Nel capitolo quindi $A, B, \ldots \in FBF_{CL}$ e tutte le proprietà della logica classica le si ritrovano anche nelle logiche modali basate sulla logica classica stessa. In primis si ritrova la **proprietà della riduzione dei connettivi**, per cui si possono usare anche solo i connettivi $\vee$ e $\neg$ per esprimere $\wedge$ e $\to$, formando questi due un **insieme minimale di operatori** che comporta un **linguaggio ridotto** (e si ricordi che non succede in logica intuizionistica) e che quindi si applica anche alle logiche modali basate sulla logica classica.
Si parlerà di **logiche modali proposizionali**, basate sulla logica classica. Si noti che le **logiche modali predicative** esistono ma sono molto complesse

e sono difficili da trattare (e non lo faremo).
Si usa il plurale **logiche** in quanto si hanno più logiche modali. Si ha che le logiche modali sono state classificate la Lewis in **cinque logiche modali fondamentali**: S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5.
Di queste analizzeremo il **sistema T**, che è intermedio tra S_3 e S_4, che useremo come base di partenza per costruire S_4. Studieremo poi il **sistema $\mathbf{S_4}$**, che sarà espanso in due logiche contenute in S_4 ma non in S_5, e il **sistema $\mathbf{S_5}$**.
I sistemi di logica modale sono tantissimi e sono studiate da secoli. La **logica temporale** è una particolare logica modale, studiata per la prima volta dal greco Diodoro, e ora usata in informatica nell'analisi di protocolli di rete, nel parallelismo, nei sistemi operativi, nelle pipeline, nel model checking etc. . ..
I vari operatori obbligano ad avere particolari semantiche correlate agli assiomi caratterizzanti ciascuna logica modale.
Nelle logiche modali il concetto di *vero* e *falso* non è solo legato alla verità della proposizione a cui l'operatore è legato. Quando si scrive $\Box A$, ad esempio, si ha che è vero dipende dalla verità di A ma anche dal fatto che A sia *necessaria*, avendo che A è sempre vero, essendo necessariamente vero. Se invece si ha, ad esempio, $\Diamond B$ bisogna dire che è vero non solo in dipendenza della verità di B ma anche dal fatto che B sia *possibile*, magari non essendo vero ora ma potendolo essere in un futuro. La verità di una FBF modalizzata va quindi valutata diversamente dalla logica classica, dove la cosa si fa tabulando le **tabelle di verità**, che è un processo sempre decidibile (anche se esponenziale sul numero di variabili della formula). A livello di logiche modali invece il valore di verità di una formula deve essere tabulato in modo diverso dalle tabelle di verità classiche. Lato **semantica delle logiche modali** si ha quindi un qualcosa di simile all'intuizionismo, infatti Kripke, prima della semantica per l'intuizionismo, aveva trovato una semantica unificante delle cinque logiche modali fondamentali di Lewis, sempre tramite i **modelli di Kripke**, nati appunto per dare questa **semantica unificata** per le cinque logiche, ciascuna con una sua particolare semantica, inconfrontabile l'una con l'altra. Kripke introduce infatti la cosiddetta **semantica dei mondi possibili** per queste logiche, che è una semantica in cui, fissato un insieme di stati di conoscenza G, fissata una relazione R con delle proprietà e fissata una relazione di *forcing*, che mette in relazione formule con elementi di G, al variare delle proprietà della relazione cattura completamente la semantica delle cinque logiche modali fondamentali. Si cerca il concetto di verità fissato G e fissato R. Questa è stata una scoperta sensazionale che ha dato vita a studi anche attuali.
Questo sistema è molto "flessibile", in quanto G può essere finito o infinito, continuo o discreto, con stati finali o meno etc. . . mentre R può essere solo

riflessiva, anche transitiva, anche simmetrica etc... Al variare di queste possibilità semantiche corrispondono diverse logiche modali.
Possiamo quindi dire, ad esempio, che $\Box A$ è vera quando A è vera in ogni mondo possibile, ovvero in ogni elemento di G. D'altro canto "in ogni mondo possibile" è qualcosa che va specificato. Un mondo è "possibile" rispetto ad un altro quando un elemento di G è in relazione secondo R con un altro elemento di G. Quindi al variare di R varia la veridicità di $\Box A$, in quanto la semantica dice che è sempre vera in tutti i mondi possibili, in tutti gli stati di G, ma tale nozione di "possibile" è definita da R, che quindi varia la nozione di "necessario". Per $\Diamond B$ si ha che esiste un mondo possibile in cui B è vero e quindi anche qui al variare di R varia la nozione di "mondo possibile", esistendo, dato $g \in G$, uno stato g' raggiungibile da g secondo R.

5.1 Linguaggio delle Logiche Modali

Vediamo quindi il **linguaggio delle logiche modali**.
Si prende, come anticipato, come base il **linguaggio della logica classica**, anche ridotto. Nelle logiche modali che vedremo inoltre si ha la seguente riscrittura possibile:

$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$$

Quindi potremmo dare logiche modali con il solo operatore di necessità. D'altro canto si ha anche che:

$$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$$

Quindi potremmo dare anche logiche modali con il solo operatore di possibilità. **Questo non vale in tutte le logiche modali ma vale in quelle che verranno trattate nel corso**.
Spesso per comodità si ha anche, in letteratura, la seguente notazione:

$$A \prec B \equiv \Box(A \to B)$$

Nelle logiche modali si ha inoltre la ripetizione degli operatori, avendo **iterazioni degli operatori**. Potrei avere, a seconda della logica:

$$\Box\Box A \to \Box A$$

oppure:

$$\Box A \to \Box\Box A$$

Ma anche:

$$\Diamond\Box A \to \Box A$$

oppure:

$$\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$$

E in alcune logiche potrebbero "appiattire" queste iterazioni. Tutte queste sfumature sintattiche corrispondono a logiche modali diverse.
Anche per le logiche modali cercheremo di produrre calcoli a tableaux ottimizzati, in aggiunta, anche in questo caso, a quelli prodotti da Fitting. Entrambi i calcoli sono corretti e completi.
Tutte le logiche che vedremo sono decidibili con un numero finito di passi.

5.2 Logica T

Introduciamo quindi la prima logica modale che normalmente si tratta, la **logica *T***.
Questa logica è fatta da:

- la logica classica, con tutte le sue proprietà
- l'assioma $\Box A \to A$
- l'assioma $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- la regola di inferenza che dice che se è dimostrabile A allora è dimostrabile $\Box A$, ovvero $\vdash A \implies \vdash \Box A$

Il primo assioma e la regola di inferenza non garantiscono che $A \to \Box A$ (questo in nessuna logica modale). In questa logica i modelli di Kripke sono del tipo:

$$K = \langle G, R, \vDash \rangle$$

con:

- G insieme di stati arbitrario
- R relazione riflessiva
- $\vDash$ relazione di forcing che lega una formula al suo stato

Con la dicitura:

$$g \vDash A$$

si intende che A è vera in G.
I "mondi possibili" per la logica T, fissato, un G è G stesso, avendo che R è solo riflessiva.

5.3 Logica S_4 e logiche derivate

La **logica modale $\mathbf{S_4}$** è formata da:

- logica T
- l'assioma $\Box A \to \Box\Box A$

Dal punto di vista semantico la logica modale S_4 è caratterizzata da ordini parziali senza ulteriori specificazioni. Quest'ultimo discorso ricorda la semantica della logica proposizionale intuizionistica, che in termini di modelli di Kripke è caratterizzata da una relazione R che è un ordine parziale, esattamente con in S_4. La logica intuizionistica e la logica modale S_4 sono legate quindi dall'avere la stessa semantica e, scoperto questo fatto, si è scatenata la ricerca per tradurre l'una nell'altra (e viceversa), anche ad opera di gente come Gödel e Tarski, che volevano modalizzare l'intuizionismo, traducendo i teoremi intuizionisti in teoremi di S_4. La traduzione da logica intuizionistica a logica a S_4 non ha presentato particolari difficoltà. Demodalizzare S_4 e ottenere l'intuizionismo è stato più complesso ma si è risolto recentemente, anche se in modo complicatissimo.
Partendo da S_4 possono anche ottenere la logica K_1, formata da:

- logica S_4
- l'assioma $\Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$

Dal punto di vista semantico la logica modale K_1 è caratterizzata da ordini parziali con stati finali, giocando" non più su R ma su G. Si ha che $S_4 \subset S_5$ mentre $K_1 \not\subset S_5$.
Partendo da S_4 possono anche ottenere la logica $K_{1.1}$, formata da:

- logica S_4
- l'assioma $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$

Dal punto di vista semantico la logica modale $K_{1.1}$ è caratterizzata da ordini parziali finiti, avendo G finito. Questa logica, nota anche come S_4Grz, ovvero S_4 Gregorčič (forse nome errato), ha che l'operatore di necessità può essere interpretato come "è dimostrabile e vero" nell'aritmetica di Peano. Quindi lo $\Box$ si interpreta come in questa logica come "è vero e necessario" nell'aritmetica di Peano.
Vale che:

$$S_4 \subset K_1 \subset K_{1.1}$$

e che:

$$T \subset S_4$$

5.3.1 Tableaux per S_4

Dal punto di vista dei tableaux di Fitting ritroviamo in primis le **T-regole** e le **F-regole** della logica classica per $\wedge, \vee, \rightarrow$ e $\neg$:

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\vee$	$\frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}T\vee$	$\frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}F\vee$
$\rightarrow$	$\frac{S,T(A\rightarrow B)}{S,FA/S,TB}T\rightarrow$	$\frac{S,F(A\rightarrow B)}{S,TA,FB}F\rightarrow$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$

Dobbiamo però vedere le regole anche per le formule modalizzate. Fitting caratterizzò solo $\Box$, sapendo di poter ricavare da esso $\Diamond$:

operatore	T-regola	F-regola
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,TA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_\Box,FA}F\Box$

Dove la restrizione $S_\Box$:

$$S_\Box = \{T\Box X | T\Box X \in S\}$$

Avendo che in $S_\Box$ tengo solo le formule di S che sono T "necessarie", ovvero che $T\,X$ della formula è vero in tutti i mondi possibili, ricordando che R è riflessiva e transitiva. Quindi $F(\Box A)$ mi dice che A non deve essere vero in almeno un mondo possibile. Semanticamente parlando $S_\Box$ è la restrizione dei mondi in cui so che non possono mancare le formule $T\Box$, che devono esserci per forza.

Esempio 35. *Vediamo quindi un esempio di formula dimostrabile:*

$$\vdash_{S_4} \neg\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)$$

Procediamo col calcolo a tableaux:

$$\dfrac{F\neg\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}{\dfrac{T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}{\dfrac{T(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}{\dfrac{*T\neg A, T\neg\Box\neg A}{\dfrac{**T\neg A, F\Box\neg A}{\dfrac{FA, F\Box\neg A}{F\neg A}F\Box}T\neg}T\neg}T\wedge}T\Box}F\neg$$

Avendo che il tableau non chiude. So però che la formula è dimostrabile in S_4 e sicuramente il calcolo di Fitting è completo.

Il punto è chiave che "blocca" l'esempio sopra è la $T\Box$, che va a demodalizzare A. Ma essendo $T\Box$ posso ripetere $T(\Box A)$, ricordando che il TA ottenuto deriva da un $T\Box$ e quindi quando faccio $F\Box$ non devo buttarlo di via. Per ottenere questo comportamento quindi ripeto la formula:

$$\frac{S, T(\Box A)}{T(\Box A), S, TA}T\Box$$

Anche in questo caso si ha quindi la **regola di ripetizione**, per l'operatore $\Box$, necessaria per avere un **calcolo completo**.

Esempio 36. *Riprendendo quindi l'esempio si ha che:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}{T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}F\neg}{*T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), T(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}T\Box}{**T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), T\neg A, T\neg\Box\neg A}T\wedge}{***T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), T\neg A, F\Box\neg A}T\neg}{****T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), FA, F\Box\neg A}T\neg}{*****T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), F\neg A}F\Box}{******T(\neg A \wedge \neg\Box\neg A), F\neg A}T\Box}{T\neg A, T\neg\Box\neg A, F\neg A}T\wedge$$

avendo che il tableau chiude, per la coppia complementare $T\neg A$ e $F\neg A$ (posso appunto fermarmi qui ma in caso lo sviluppo fino alle formule atomiche porterebbe allo stesso risultato), avendo ripetuto nel calcolo la formula del $T\Box$ (anche se, per comodità, solo la prima volta che viene usata e non anche la seconda).

5.3.2 Tableaux Ottimizzati per S_4

Moscato non era soddisfatto comunque della ripetizione e quindi ha sviluppato un calcolo a tableaux ottimizzato, corretto e completo, in modo analogo a quanto fatto nel caso intuizionista. Purtroppo però nelle logiche modali non è riuscito ad avere un risultato di "pari qualità", non riuscendo ad evitare del tutto le ripetizioni. Al variare della logica modale si hanno diversi "gradi di eliminazione" della necessità della ripetizione ma non è mai riuscito ad eliminarle del tutto. Questo fatto è probabilmente legato alla natura stessa delle logiche modali, molto più "sensibili" rispetto all'intuizionismo rispetto a piccole variazioni semantiche (basti pensare che nell'intuizionismo non interessava se G fosse finito o meno, o anche, nel caso proposizionale, se avesse stati finiti o meno, mentre nelle logiche modali comporta logiche diverse).
L'idea di Moscato è stato vedere se, esplicitando maggiormente all'interno del calcolo per S_4 la semantica della necessitazione, si potessero ottenere risultati migliori, magari senza ripetizioni (speranza comunque senza compimento

allo stato attuale, nessuno, nemmeno Dyckhoff e altri, ci è arrivato quindi probabilmente esiste un teorema limitativo dedicato).
Il ragionamento di Moscato parte dal fatto che, nei modelli di Kripke per S_4, la relazione R è riflessiva e transitiva, come nell'intuizionismo. Quindi $T\Box A$ significa:

Se $\Box A$ è vero in un nodo Γ di un modello di Kripke per S_4 allora A deve essere sempre vero in ogni nodo Δ che è correlato/connesso con Γ.

Guardando il calcolo a tableaux per Fitting si ha che da $T\Box A$ si estrae TA ma questo TA indica che A è vero in Γ e quindi l'informazione che questo TA venga da un $T\Box A$ viene persa nel tableau (e abbiamo visto che la soluzione *naive* al problema è fare la ripetizione di $T\Box A$, che "sopravvivrebbe" ad un futuro $F\Box$ che restringe a $S_\Box$). Solo questa regola per di più richiede la ripetizione.
Moscato quindi istituisce un segno apposta che testimoni che una formula provenga da una $T\Box$, applicando lo stesso concetto del caso intuizionista (anche se si vedrà con risultati meno ottimi). L'aggiunta del segno porta comunque a nuove regole a meno efficienza nel calcolo, rispetto a quello di Fitting che prevede al più una ripetizione.
Si ha quindi che ogni volta che si applica $T\Box$ a $T\Box A$ si deve garantire che TA sia presente in ogni riga del tableau. Si introduce quindi un segno che caratterizzi questo aspetto per evitare la ripetizione di formule $T\Box$. Ne risulta un calcolo che stabilisce implicitamente quali regole possono richiedere tale ripetizione e tale segno è detto T_C.

Definizione 28. *Dato quindi un insieme S di formule segnate coi tre segni:*

$$S = \{TA_1, \dots, TA_n, FB_1, \dots, TB_m, T_C C_1, \dots, T_C C_k\}$$

con il modello di Kripke K:

$$K = \langle G, R, \vDash \rangle$$

Si ha che S è realizzato in Γ, nodo del modello di Kripke, sse:

- $\forall h \in [1, n], \ \Gamma \vDash A_h$, *per le formule quindi segnate T*
- $\forall i \in [1, m], \ \Gamma \nvDash B_i$, *per le formule quindi segnate F*
- $\forall j \in [1, k], \ \Gamma \vDash \Box C_j$, *per le formule quindi segnate T_C*

Quindi il segno T_C testimonia che tutte le C_j sono formule necessitate quindi Γ deve rendere vere tali necessitazioni. Il segno T_C cattura la semantica del necessario all'interno del calcolo, che ora lavora coi tre segni.

Il C quindi sta per **certe**.
L'introduzione del segno T_C "scatta" con il $T\Box$ ma vediamo il calcolo completo, per praticità solo per un insieme minimale degli operatori:

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_CA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA}F\Box$

A cui si aggiunge anche:

connettivo	T_C-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,FA,T_C(\neg A)}T_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$

Avendo che in S_C manteniamo sia le formule $T\Box$ che le formule T_C di S, ovvero:

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_CY | T_CY \in S\}$$

Si nota quindi come nelle T_C regole si abbiamo alcune ripetizioni, nel caso di $T_C\neg$ e questo non sembra essere evitabile allo stato dell'arte attuale, avendo l'introduzione di una formula segnata F e quindi si deve testimoniare la provenienza da un $T_C\neg$, ripetendola.
In merito al $T_C\Box$ si ha che si ottiene T_CA, eliminando una necessitazione ma essendo T_C l'esplicitazione del necessario ci si connette all'assioma di S_4 che permette di compattare le necessitazioni.
In termini di chiusura del tableau T_C si comporta come T.
A livello di S_4 non si avrebbe alcun vantaggio nell'introdurre un eventuale ulteriore nuovo segno F_C.

Esempio 37. *Rivediamo l'esempio precedente con il nuovo calcolo, dimostrando:*

$$\vdash_{S_4} \neg\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)$$

Procediamo col calcolo a tableaux:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}{T\Box(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}F\neg}{T_C(\neg A \wedge \neg\Box\neg A)}T\Box}{*T_C\neg A, T_C\neg\Box\neg A}T_C\wedge}{**\,T_C\neg A, F\Box\neg A}T_C\neg}{T_C\neg A, F_\neg A}F\Box$$

Avendo che il tableau chiude, per di più anche senza la ripetizione del $T_C\neg$.

Su slide formula, molto complessa e non trattata in aula, per cui è necessaria la ripetizione di $T_C\neg$.
In pratica per risolvere una duplicazione, $T\Box$, si è aumentata la complessità del calcolo pur mantenendo una possibile regola con ripetizione, $T_C\neg$. Ma avere esplicitamente un segno che testimonia $T\Box$ permette di ottimizzare il tutto.

5.3.3 Tableaux Ottimizzati per K_1

Il problema della ripetizione di $T_C\neg$ viene parzialmente risolto in K_1. Questo viene fatto riprendendo il segno F_C che testimonia la verità di $T_C\neg A$, che significa dire che A è falso in ogni nodo accessibile da Γ, con Γ che realizza $T_C\neg A$. Quindi il segno F_C mi dice che A deve rimanere falsa in tutti gli stati accessibili. Questo posso farlo perché K_1 è caratterizzato da modelli di Kripke con ordini parziali e stati finali, che è esattamente il significato di $F_C A$, ovvero A è falsa in tutti gli stati e avendo K_1 stati finali a quel punto si comporterà come il falso della logica classica e quindi il segno F_C può essere utile.

Definizione 29. *Dato quindi un insieme S di formule segnate coi quattro segni:*

$$S = \{TA_1, \dots, TA_n, FB_1, \dots, TB_m, T_C C_1, \dots, T_C C_k, F_C C_1, \dots, F_C D_l\}$$

con il modello di Kripke K, con stati finali:

$$K = \langle G, R, \vDash \rangle$$

Si ha che S è realizzato in Γ, nodo del modello di Kripke, sse:

- $\forall h \in [1, n],\ \Gamma \models A_h$, *per le formule quindi segnate T*
- $\forall i \in [1, m],\ \Gamma \not\models B_i$, *per le formule quindi segnate F*
- $\forall j \in [1, k],\ \Gamma \models \Box C_j$, *per le formule quindi segnate T_C*
- $\forall p \in [1, l],\ \Gamma \models \Box\neg D_p$, *per le formule quindi segnate F_C*

Si noti come ci sia un parallelismo con questa definizione e quella fatta per S_4. In K_1 tutte le formule dimostrabili in S_4 sono dimostrabili, visto che K_1 estende S_4. Il calcolo per K_1 può essere usato per S_4 con le opportune restrizioni.
Rispetto a S_4 si ha quindi che le T-regole e le F-regole sono identiche mentre si hanno:

connettivo	$\mathrm{T_C}$-regola	$\mathrm{F_C}$-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$	$\frac{S_C,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}F_C\wedge -f$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,F_CA}T_C\neg$	$\frac{S,F_C(\neg A)}{S,T_CA}F_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$	$\frac{S,F_C(\Box A)}{S_C,F_CA}F_C\Box$

Avendo che in S_C manteniamo sia le formule $T\Box$ che le formule T_C che quelle F_C di S, ovvero:

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_CY | T_CY \in S\} \cup \cup\{F_CZ | F_CZ \in S\}$$

Dove si nota che non si hanno ripetizioni. Questo calcolo è completo e corretto per K_1 e completo ma non corretto per S_4.
Si noti che per $F_C \wedge -f$ si è assunto di avere S_C e non S, infatti è l'$F_C\wedge$ applicata agli stati finali.
Si ha una **regola di fining** per passare da S a S_C, con $S_C \neq \emptyset$, in ottica di applicare $F_C \wedge -f$:

$$\frac{S}{S_C}TH,\ \ S_C \neq \emptyset$$

Questa regola è non deterministica e posso applicarla in qualsiasi punto del tableau, al più di non avere S_C vuoto. Se però si è nella situazione in cui non si può applicare la regola $F_C\wedge$ diventa:

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)}F_C\wedge$$

avendo, si noti, la ripetizione. Tale ripetizione si ha perché si produce un F prodotto da un F_C che può essere tagliato da $F_\Box$ ma quindi devo garantire di avere sempre la possibilità di poterla non tagliare.
Si hanno quindi due regole per $F_C\wedge$, a seconda di avere S o S_C. La regola di fining e la regola di $F_C\wedge$ in caso di S rendono il calcolo corretto e completo per K_1, infatti e non devo mai applicare la regola $F_C\wedge$ in caso di S ho un calcolo senza ripetizioni ma non completo, a meno di specificare le due regole.
Il calcolo non è comunque corretto per S_4 che non ha la limitazione di avere stati finali, dove il calcolo si comporta come in logica classica.
Su slide la dimostrazione dell'assioma caratteristico (in realtà un'altro assioma caratteristico analogo a quello presentato nel corso) di K_1, tradotto nel linguaggio minimale.

5.3.4 Tableaux Ottimizzati per $K_{1.1}$

Vediamo anche il calcolo a tableaux ottimizzato, coi 4 segni, per $K_{1.1}$. Si ricorda che in $K_{1.1}$, detta anche S_4Grz, l'operatore di necessità corrisponde all'operatore di dimostrabilità e di verità nell'aritmetica di Peano. Si ha quindi:

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_CA}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA,F_C(A\wedge\neg\Box A)}F\Box$

connettivo	$\mathrm{T_C}$-regola	$\mathrm{F_C}$-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A\wedge B)}{S,T_CA,T_CB}T_C\wedge$	$\frac{S_C,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}F_C\wedge -f$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,F_CA}T_C\neg$	$\frac{S,F_C(\neg A)}{S,T_CA}F_C\neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_CA}T_C\Box$	$\frac{S,F_C(\Box A)}{S_C,F_CA}F_C\Box$

Avendo sempre:

$$S_C = \{T\Box X|T\Box X \in A\} \cup \{T_CY|T_CY \in S\} \cup \cup\{F_CZ|F_CZ \in S\}$$

Anche qui valgono:

$$\frac{S}{S_C}TH, \;\; S_C \neq \emptyset$$

e:

$$\frac{S, F_C(A \wedge B)}{S_C, FA, F_C(A \wedge B)/S_C, FB, F_C(A \wedge B)} F_C \wedge$$

Analogamente a quanto visto in K_1.
In $K_{1.1}$ non solo si hanno stati finali ma anche un modello di Kripke finito, con quindi G finito. La differenza con K_1 si riscontra solo in $F\Box$, dove si deve prendere un pezzo dell'assioma caratteristico di $K_{1.1}$ e riportalo sotto segno F_C. Con tale aggiunta il calcolo è corretto e completo per $K_{1.1}$. Tutte le altre regole di K_1 sono mantenute in $K_{1.1}$.
Moscato si è chiesto se questa tecnica, quella di aggiungere un pezzo dell'assioma caratteristico sotto il segno opportuno, fosse un'euristica per trovare calcoli corretti e completi per logiche modali. Sarebbe come mischiare un calcolo a tableau con un calcolo ad assiomi alla Hilbert (anche perché effettivamente sono gli assiomi a caratterizzare le logiche modali). Purtroppo non ha trovato risposta ma in $K_{1.1}$ funziona. Questo sarebbe un risultato straordinario.
Su slide la dimostrazione dell'assioma caratteristico di $K_{1.1}$, tradotto nel linguaggio minimale.

5.3.5 Traduzione dell'intuizionismo in logica S_4

Argomento accennato a lezione, paper su Moodle.
Esiste un metodo, detto **metodo di McKinsey-Tarski**, sviluppato nel 1948, per il quale se una formula proposizionale è dimostrabile in logica intuizionistica allora la traduzione è dimostrabile in logica S_4.
Le due logiche condividono la medesima semantica, infatti entrambe le logiche si basano su una relazione R riflessiva e transitiva.
Si ha quindi il seguente teorema.

Teorema 9. *Se una formula è dimostrabile intuizionisticamente la sua traduzione $T(\cdot)$ è dimostrabile in S_4.*
Data una formula arbitraria A si ha quindi:

$$\vdash_{INT} A \iff \vdash_{S_4} T(A)$$

Vediamo quindi queste traduzioni, con At formula atomica e A e B formule arbitrarie:

- $T(At) \equiv \neg\Diamond\neg At$

- $T(A \vee B) \equiv T(A) \vee T(B)$
- $T(A \wedge B) \equiv T(A) \wedge T(B)$
- $T(A \rightarrow B) \equiv T(A) \implies T(B)$, *dove con* $\implies$ *indichiamo un'implicazione necessaria*
- $T(\neg A) \equiv \neg\Diamond T(A)$

Notando come nella maggior parte dei casi l'operatore si distribuisce nelle due traduzioni delle formule arbitrarie. Nella lista si è preso come primitivo il $\Diamond$ *e non lo* $\Box$*, come avevamo fatto di solito.*

Quindi, schematicamente:

- si prende un teorema dimostrabile della logica proposizionale intuizionistica
- si traduce il teorema in logica S_4
- si usa il calcolo a tableaux per S_4 e tale tableau deve chiudere

5.3.6 Traduzione dalla logica S_4 all'intuizionismo

Argomento accennato a lezione, paper su Moodle.
Vediamo quindi come arrivare al risultato opposto, ovvero se esiste una traduzione di S_4 all'intuizionismo tale che la formula ottenuta sia dimostrabile nell'intuizionismo.
Si parla di **demodalizzare** S_4 per arrivare all'intuizionismo.
Questo è stato un campo di ricerca aperto per molti anni, su cui ha fatto studi anche Moscato.
Nel 2006 David Fernandez ha proposto una traduzione polinomiale da S_4 alla logica intuizionistica, quindi non è più un campo aperto. Essendo una polinomiale si ha che le formule non aumentano di dimensione in maniera esponenziale, il risultato è quindi sensazionale anche dal punto di vista della complessità.
Il lavoro è molto complesso e criptico ma sembra essere stato accettato nella comunità scientifica.

5.4 Logica S_5

La **logica modale $\mathbf{S_5}$** è formata da:

- logica S_4
- l'assioma $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

Dal punto di vista semantico la logica modale S_5 è caratterizzata da modelli dove la relazione R è una relazione di equivalenza. Quindi tutti gli elementi di G sono in relazione di equivalenza.
Vale che:

$$S_4 \subset S_5$$

Si noti inoltre che:

$$K_1 \not\subset S_5, \;\; K_{1.1} \not\subset S_5$$

E in generale, parlando delle cinque logiche modali fondamentali si ha che:

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset S_5$$

5.4.1 Tableaux Ottimizzati per S_5

Vediamo ora il calcolo a tableaux per S_5, quello per il quale Moscato ha avuto più problemi in termini di ottimizzazione.
Le complicazioni del calcolo di S_5 derivano dal fatto che R è una relazione d'equivalenza, essendo quindi riflessiva, simmetrica e transitiva. Essendo una relazione di equivalenza ogni stato/mondo possibile è sempre raggiungibile da tutti gli altri. Tutti i mondi sono nella stessa classe di equivalenza e questo complica moltissimo il calcolo, potendomi sempre spostare da uno stato all'altro ma facendo molta attenzione rispetto alle formule vere e false. Si ricorda che S_5 contiene propriamente S_4 quindi tutte le formule dimostrabili in S_4 sono dimostrabili in S_5 ma non viceversa. S_5 comunque non contiene K_1 e $K_{1.1}$.
Si ha quindi, sempre per un insieme minimale di operatori:

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$\frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}T\wedge$	$\frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}F\wedge$
$\neg$	$\frac{S,T(\neg A)}{S,FA}T\neg$	$\frac{S,F(\neg A)}{S,TA}F\neg$
$\Box$	$\frac{S,T(\Box A)}{S,T_C A}T\Box$	$\frac{S,F(\Box A)}{S_C,FA,[S_u]}F\Box$

A cui si aggiunge il segno T_C, segno che testimonia la verità di una formula necessitata (avendo quindi la stessa semantica del T_C visto precedentemente nelle altre logiche modali trattate):

connettivo	T_C-regola
$\wedge$	$\frac{S,T_C(A \wedge B)}{S,T_C A,T_C B} T_C \wedge$
$\neg$	$\frac{S,T_C(\neg A)}{S,FA,T_C(\neg A)} T_C \neg$
$\Box$	$\frac{S,T_C(\Box A)}{S,T_C A} T_C \Box$

Con:

$$S_C = \{T\Box X | T\Box X \in A\} \cup \{T_C Y | T_C Y \in S\}$$

Si nota quindi come il punto chiave è $F\Box$, la vera differenza e unica con S_4. Vediamo il significato di $[S_u]$.
Innanzitutto si ha la **regola di jumping (*JP*)** usata per rappresentare semanticamente il passaggio da un mondo all'altro. Per tale regola si ha che:

$$\frac{S, [S_u]}{S_C, [S_{u'}], sB} JP, \text{ con } sB \in S_u$$

Tramite questa regola si ottiene S_c, un insieme $[S_{u'}]$ e una formula qualsiasi sB che apparteneva a $[S_u]$. Ovvero con la regola di jumping si tolgono da S tutte le formule T, che non siano necessitate, e F e da $[S_u]$ si ottiene $[S_{u'}]$ estraendo la formula sB. Si ha quindi:

$$[S_u] = S - S_C$$

ovvero è l'insieme che contiene solo le formule di S segnate T ed F.
Si ha poi:

$$[S_{u'}] = (S_u \cup \{S - S_C\}) - \{sB\}$$

Quindi quando si applica la regola di jumping si estrae da $[S_u]$ una formula segnata T o F, che chiamo sB, e chiamo l'insieme rimanente $[S_{u'}]$. Quando si salta da un mondo all'altro si conservano quindi le formule in S_C e delle T e delle F formule, ad ogni salto, si estrae una formula T o F arbitraria. Quindi la regola di jumping è altamente non deterministica, non dicendo che formula si estrae. Il non determinismo (nonché la complessità computazionale) del calcolo aumenta in maniera esponenziale perché applicando $F\Box$ devo provare tutte le singole formule che posso estrarre, una alla volta (facendo

ogni volta backtracking). La regola di jumping può essere applicata in qualsiasi punto del tableau in vista dell'applicazione di $F\Box$, che generalmente si applica "verso la fine". Questo è il motivo dell'insoddisfazione di Moscato ma questo probabilmente è insito in S_5 e nella sua semantica, causa relazione di equivalenza, e questo sembra confermato dai logici modalisti. Tali vincoli probabilmente non si possono eludere.
In $[S_u]$ in pratica metto formule che posso poi usare estraendole tramite regola di jumping.
Il calcolo è corretto e completo per S_5.
Non si ha il segno F_C perché non avrebbe dato alcun vantaggio.

Esempio 38. *Vediamo l'esempio dell'assioma caratteristico di S_5 espresso con l'insieme minimale degli operatori (*verificare*):*

$$\vdash_{S_5} \neg(\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg\Box A)$$

Si ha quindi:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg(\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg\Box A)}{T(\neg\Box A \wedge \neg\Box\neg\Box A)}F\neg}{*T\neg\Box A, F\neg\Box\neg\Box A}T\wedge}{**F\Box A, F\Box\neg\Box A}T\neg\textit{(applicato in parallelo)}}{[F\Box A], F\neg\Box A}F\Box}{[F\Box A], T\Box A}F\neg}{[F\Box A], T_C A}T\Box}{F\Box A, T_C A}JP}{FA, T_C A}F\Box}{}$$

Avendo che il tableau chiude.
Si noti che ho una sola regola in $[S_u]$ e questo semplifica l'esempio.

Si conclude con qualche nota finale sulle logiche modali.
Passare al predicativo è assai complesso anche perché "esiste necessariamente" e "necessariamente esiste" hanno significati diversi, avendo che l'esistenziale agisce anche sull'operatore modale.

In merito agli improve del calcolo si avrebbe anche lo studio di D'Agostino e Mondadori sulla logica KE che potrebbero essere adattati al calcolo di Moscato.
Per completezza altri metodi usati in logica modale sono:

- il metodo della matrici di Bibel
- il metodo usato in LWB (*Logics Work Bench*), un sistema che al variare delle logiche modali permette di costruire calcoli corretti e completi

La ricerca di un metodo di generazione di calcoli a tableaux corretti e completi per logiche modali è un campo di ricerca aperto.

Capitolo 6

Prover PITP

PITP (*Propositional Intuitionistic Theorem Prover*) è un **theorem prover**, sviluppato da Avellone (esperto in strategie di sviluppo), Fiorino (esperto in complessità computazionale) e Moscato, usato per mettere in pratica e verificare i tableaux ottimizzati della logica intuizionistica proposizionale, dimostrando la cura per i problemi di strategia e complessità dal punto di vista di ripetizioni (problema completamente risolto con il calcolo ottimizzato) e backtracking.
In aiuto si aveva una libreria di benchmark con varie formule proposizioni intuizionistiche, a complessità crescente, da dimostrare, usati in una sorta di competizione mondiale. Si avevano 10 minuti per far risolvere al prover un insieme di formule, su hardware standard e sistema operativo basato su Linux, puntando a risolverne il più possibile. Tale libreria di benchmark è chiamata **ILTP (*Intuitionistic Logic Theorem Prover*)**.
PITP è stato sviluppato in C++.
Le ottimizzazioni del prover si basano su:

- limitazione della profondità di calcolo
- limitazione del branching
- evitare backtracking

Il calcolo a tableaux ottimizzato usato è sempre quello di Miglioli, Moscato e Ornaghi, con anche le ottimizzazioni successive fatte per le implicazioni. Si hanno anche alcune regole aggiuntive.
Si ha, ad esempio, una sorta di "modus ponens":

$$\frac{A, TA, T(A \to B)}{S, TA, TB} T \to \ Atom, \text{ con } A \text{ atomica}$$

In generale si hanno spesso regole che introducono una nuova formula atomica p, aumentando la complessità del calcolo (sulla carta) ma anche l'efficienza (cosa che effettivamente succede).
Su slide tutte le regole del calcolo a tableaux usate (*anche se la maggior parte sono presenti negli appunti della parte di logica intuizionistica*).
Lo studio della complessità del calcolo a tableaux è anche da ricollegarsi agli studi di Hudelmaier.
Si usano 2 "keyword":

- duplication / contraction free (a seconda che si parli di tableaux o sequenti)
- PSPACE-completeness, essendo la decidibilità della logica intuizionistica in questa classe di complessità spaziale, come dimostrato da Statman nel 1979

La complessità spaziale è dovuta al fatto che ogni branch prodotto dalle regole del calcolo a tableaux deve essere visitato fino alla fine, si ha che il calcolo a tableaux infatti è *superesponenziale* in spazio.
Un altro punto è chiave è il solito backtracking della logica intuizionistica proposizionale, che contribuisce ad aumentare il non determinismo del calcolo e la sua complessità. Il problema del backtracking non può essere eliminato come conseguenza al fatto che la logica intuizionistica vive nella classe PSPACE.
Le strategie per la costruzione delle dimostrazioni intuizionistiche di risoluzione vengono inoltre migliorate. Non si ha comunque nulla di deterministico.
Le formule vengono divise in 6 gruppi/classi, rispetto al comportamento in fase di branching e backtracking:

- $C_1 = \{T(A \land B), F(A \lor B), F_C(A \lor B), T(\neg A), T(p \to A), T((A \land B) \to C), T((A \lor B) \to C)\}$, che si noti sono regole che non restringono mai S a S_C e non fanno branching
- $C_2 = \{T(A \lor B), F(A \land B)\}$, che si noti sono regole che non restringono mai S a S_C ma comportano branching
- $C_3 = \{F(\neg A), F(A \to B)\}$, che si noti sono regole che restringono S a S_C senza branching
- $C_4 = \{T((A \to B) \to C), T(\neg A \to B)\}$, che si noti sono regole che restringono S a S_C con branching ma restrizione in un solo branch

- $C_5 = \{F_C(A \to B), F_C(\neg A)\}$, che si noti che sono regole che non fanno branching ma restringono S a S_C che si cerca di applicare "il più tardi possibile"
- $C_6 = \{F_C(A \land B)\}$, che si noti è una regola che fa branching e restringe S a S_C in entrambi i branch

E la strategia consiste nell'applicare prima le regole delle classi con indice più piccolo, in caso di molteplicità di regole da poter applicare, come visibile in figura 6.1.
Ogni volta che restringo bisogna prevedere backtracking.
Per le ottimizzazioni si introducono le costanti di $\top$ e $\bot$ per dare valore alle variabili. Questo viene fatto per lo studio del modello di Kripke per una certa formula S, portando ad avere anche coincidenze con logica classica ed intuizionistica (e in tal caso meglio usare il calcolo della logica classica, dove basta chiudere un singolo branch). Si usano anche eventualmente permutazioni di formule, permutazioni che possono evitare a volte dei backtracking. Tutte queste tecniche sono per le tre ottimizzazioni elencate all'inizio, diminuendo la complessità delle formule quando possibile. **Vari esempi su slide**.
Su slide dettagli delle specifiche del software di benchmark ILTP e della macchina usata per la competizione. Sono indicati anche i vari partecipanti.
PITP ha avuto ottime prestazioni nella competizione (anche se non sono state fatte poi molte altre release). Con ottime si intende che per ora non è stato ancora superato.
Su elearning paper di PITP.

6.1 Sviluppi Futuri

Non si è mai provato a fare un'implementazione predicativa del prover, che è quindi un campo aperto anche se con forti difficoltà all'orizzonte. Un'altra aggiunta interessante sarebbe parallelizzare l'esecuzione e in merito sono stati fatti alcuni tentativi anche se non ci sono stati risultati sensazionali come attesi. Lo studio del perché non si abbiano ottimi vantaggi è ancora in corso. Addirittura dei campi aperti sono algoritmi quantistici ma anche di intelligenza artificiale, anche se studi nel mondo in merito ad entrambi non stanno portando a grandi risultati, avendo che PITP resta ancora il migliore, nonostante sia sequenziale e con tecniche tradizionali e di backtracking. Il problema del deep learning è che non si può dire nulla a priori su una formula intuizionistica. Un'altra idea di Moscato è usare un cluster di formule decidibili e uno di formule non decidibili.

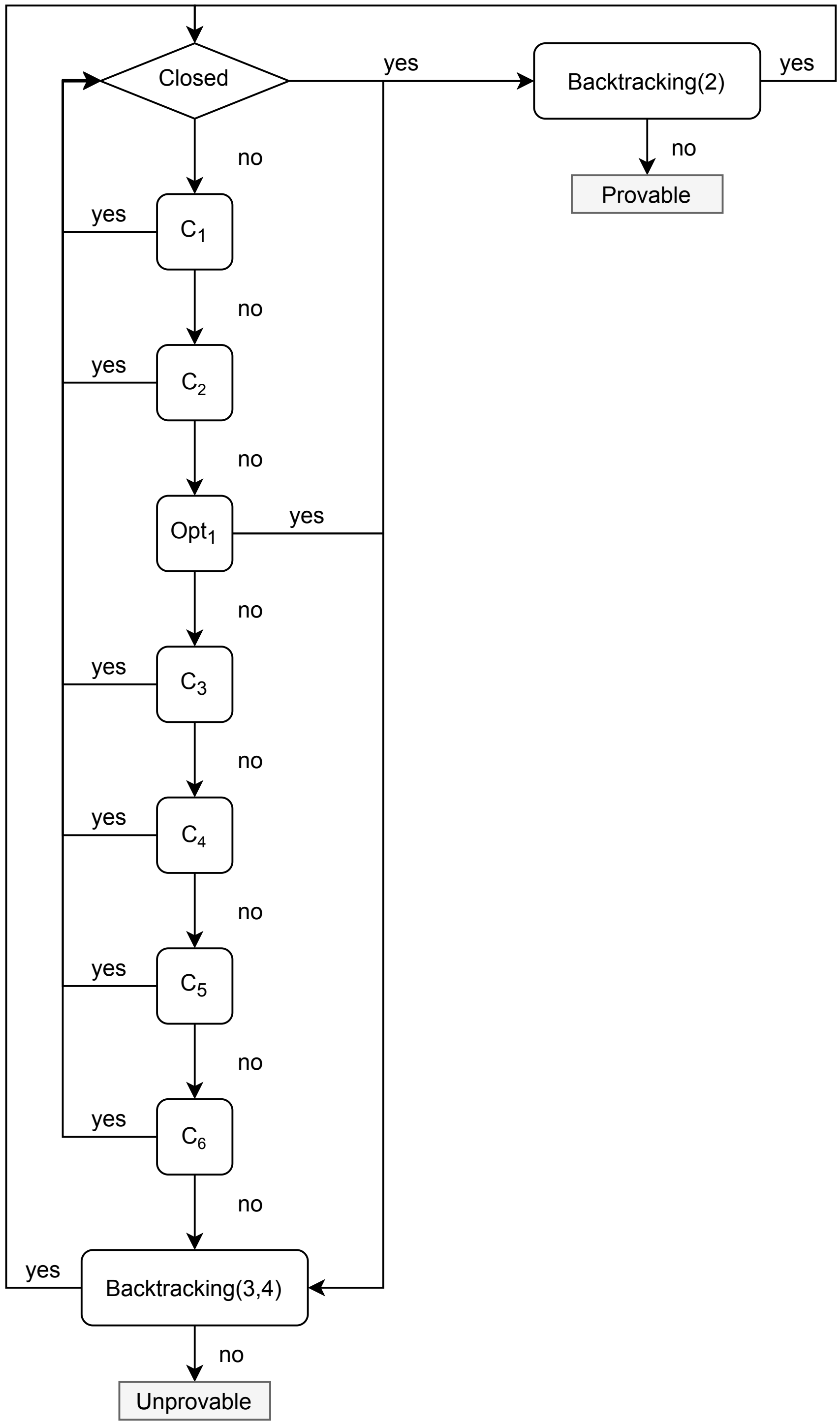


Figura 6.1: Flowchart di PITP. Si noti che Opt_2 è eseguito con C_2 e Opt_3 con $backtracking(3,4)$, avendo la ricerca di τ tale che $H = \tau(H')$ e $\tau = \tau^{-1}$. Se il tableau chiude la formula è dimostrabile.