

Teoria dell'Informazione e Crittografia

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

1	Introduzione	3
2	Introduzione agli argomenti del corso	4
3	Teoria dell'informazione	5
3.1	Codici per individuare errori	10
3.1.1	Controllo di parità semplice	10
3.1.2	Il rumore bianco	14
3.1.3	Gestione dei burst	22
3.1.4	Codici pesati	23
3.2	Codici per correggere errori	26
3.2.1	Codici rettangolari	27
3.2.2	Codici triangolari	29
3.2.3	Codici cubici	31
3.2.4	Codici di Hamming	33
3.3	Codifica di Sorgente	46
3.3.1	Codici a Blocchi Accorciati	59
3.3.2	Disuguaglianza di McMillan	60
3.3.3	Codici di Huffman	62
3.4	L'informazione	74
3.4.1	Robustezza codici di Huffman	79
3.5	Codifica di Shannon-Fano	88
3.6	Canali di Comunicazione	92
3.6.1	Canali particolari	94
3.6.2	Canale Binario Simmetrico	94
3.6.3	Entropie del Canale	98
3.6.4	Mutua Informazione	101
3.6.5	Capacità del Canale	104
3.7	Secondo Teorema di Shannon	107

4	Crittografia	111
4.1	Cifrari Storici	115
4.1.1	Cifrario di Cesare	115
4.1.2	Crittosistema di Hill	116
4.1.3	Crittosistema di Playfair	117
4.1.4	Cifrario di Vigenère	119
4.1.5	Sicurezza dei Crittosistemi Storici	120
4.1.6	Crittoanalisi per Crittosistemi Storici	121
4.2	Crittosistemi Standard	123
4.2.1	DES	124
4.2.2	AES	127

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlcgold/Appunti>.

Capitolo 2

Introduzione agli argomenti del corso

Si ha una sorgente che emette messaggi e li vuole mandare tramite un canale di comunicazione, che contiene del rumore che agisce sui messaggi e li rovina. Il destinatario per capire che il messaggio è rovinato ha varie tecniche. Una prima cosa che potrebbe fare è chiedere di rimandare il messaggio ma sarebbe meglio correggere *in loco* e si hanno algoritmi per farlo (tra cui lo **schema di Hamming** usando il modello del **rumore bianco**).

Un'altra tematica è la codifica stessa del sorgente, comprimendo flussi di dati, senza perdere informazioni.

Si parlerà anche dei canali di comunicazione, delle capacità e dei **teoremi di Shannon**.

Si vedranno poi le basi della crittografia, i crittosistemi storici, vari standard etc. . .

Capitolo 3

Teoria dell'informazione

Si hanno due sottoparti principali:

- **teoria dei codici**, per individuare e correggere gli errori. Si studia il canale di trasmissione cercando di contrastare il rumore che c'è nel canale
- **teoria dell'informazione**, in cui il focus è la sorgente delle informazioni

Vediamo il classico schemino della teoria dell'informazione:

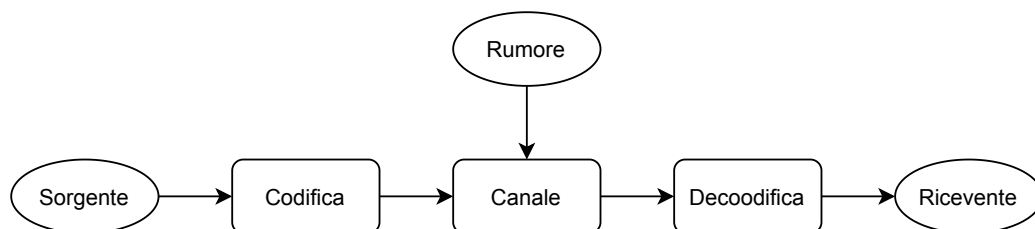


Figura 3.1: Schema di un sistema generale di comunicazione tipico della teoria dell'informazione

Avendo:

- la **sorgente** che produce segnali, dei simboli, che potrebbero essere continui (come la corrente), anche se noi li assumeremo come simboli di un alfabeto finito, avendo quindi una **sorgente discreta**
- i simboli, per poter essere spediti all'interno di un canale, vanno codificati, avendo una parte di **codifica**

- una volta codificati i simboli vanno nel **canale di trasmissione**, dove si ha del **rumore**. Tale *rumore* prende un simbolo di quelli inseriti e lo cambia
- dal canale esce o il simbolo che è entrato o il simbolo modificato dal rumore e, tipicamente, non è immediatamente utilizzabile ma deve passare per una fase di **decodifica**
- il simbolo decodificato arriva al **destinatario**

Si hanno alcune assunzioni sulla sorgente:

- è **discreta**, i simboli emessi appartengono ad un alfabeto finito. Normalmente tali simboli sono $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$
- i simboli vengono emessi uno alla volta ad ogni **colpo di clock**. Non si ha mai che in un colpo di clock non escano simboli o che ne escano più di uno solo
- la sorgente è **senza memoria** (*memoryless*), avendo che i simboli già usciti non influenzano per nulla il simbolo che sta per uscire. Ogni simbolo che esce non tiene conto del passato, è *come se fosse il primo*
- è **probabilistica e randomizzata**. Si ha quindi che i simboli $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ escono con le probabilità (p_1, p_2, \dots, p_q) . Deve valere che, ovviamente, che $p_i \in [0, 1], \forall i = 1, \dots, q$. Si ha inoltre che le varie probabilità, nel loro insieme, devono formare una distribuzione di probabilità, avendo che:

$$\sum_{i=1}^q p_i = 1$$

Potrei avere simboli con probabilità nulla di comparire ma nella pratica non è qualcosa di sensato. La sorgente la costruisco o da zero (e a quel punto un simbolo con probabilità nulla non lo metterei) o ho una sorgente che devo studiare (e qui potrei avere simboli con probabilità bassissime se non nulle, in tal caso bisognerebbe rivalutare l'assunzione dei simboli di quella sorgente). Possiamo quindi meglio dire che $p_i \in (0, 1], \forall i = 1, \dots, q$.

D'altro canto vedo se posso avere probabilità pari a 1 per un simbolo ma in tal caso avrei solo quello e non sarebbe interessante. Si ha quindi che:

$$p_i \in (0, 1), \forall i = 1, \dots, q$$

$$\sum_{i=1}^q p_i = 1$$

Le sorgenti che emettono i simboli secondo uno schema prefissato, deterministico, sono poco interessanti, avendo un comportamento banale

Il concetto di *spedire in un canale* può anche essere generalizzato in altre “idee”, come il disco su cui salvo dei dati e il tempo per cui li salvo.

La parte di *codifica e decodifica* può essere approfondita. Nello schema in figura 3.1 ci si è infatti concentrati sul canale, avendo che la codifica serve a fare in modo che il simbolo trasmesso vada bene per essere trasmesso nel canale. La **codifica** è a sua volta suddivisa in due parti:

1. **codifica di sorgente**, che ha come obiettivo rappresentare nel modo più efficiente e compatto i simboli emessi dalla *sorgente*. Si vuole quindi comprimere la sequenza di simboli (messaggi) emessi dalla sorgente, per impegnare meno banda possibile quando andremo a spedire. Si deve considerare che ogni bit in un file compresso è essenziale per permettere di poter recuperare il contenuto compresso
2. **codifica di canale**, che ha quasi uno scopo opposto rispetto alla *codifica di sorgente*, infatti ha come obiettivo quello di contrastare il rumore e per farlo aggiunge ridondanza al messaggio (da qui il discorso sull'obiettivo opposto)

Si cerca quindi di comprimere il più possibile nella prima fase, quella di *codifica di sorgente* e di ridondare il meno possibile nella seconda, quella di *codifica di segnale*.

Per capire meglio quanto detto diamo alcune formalità.

Definizione 1. Una **codifica** è una funzione *cod* che prende i simboli della sorgente $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ e ad ogni simbolo s_i gli assegna una stringa formata coi caratteri di un certo alfabeto Γ , l'**alfabeto della codifica**. Le stringhe di Γ^* sono tutte quelle costruite sull'alfabeto Γ di lunghezza arbitraria e finita, compresa la stringa vuota ε , che posso quindi formare coi simboli di Γ . Quindi ad ogni $s_i \in S$ assegno un $\gamma_i \in \text{Gamma}^*$, avendo che:

$$\text{cod} : S \rightarrow \Gamma^*$$

generalmente si ha che:

$$|\Gamma| < |\Sigma|$$

e quindi i simboli di Σ sono mappati da cod in sequenze di simboli di Γ , a meno che non si ritenga accettabile il fatto che due o più simboli di Σ vengano mappati nello stesso simbolo di Γ .

Più avanti nel corso vedremo casi in cui $|\Gamma| > |\Sigma|$

Si hanno quindi i simboli $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ che escono con probabilità (p_1, p_2, \dots, p_q) e che vengono codificati con le stringhe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$. Le varie γ_i sono dette **codeword**. Chiamando $l_i = |\gamma_i|$ la lunghezza di tali stringhe si ha che tali stringhe hanno associati i vari l_1, l_2, \dots, l_q .

L'obiettivo quindi della *codifica di sorgente* è quello di minimizzare la lunghezza media L delle stringhe, avendo quindi una media pesata (pesata sulle probabilità):

$$L = \sum_{i=1}^q p_i \cdot l_i$$

Tenendo conto delle probabilità, per minimizzare L , si deve, avendo a che fare con termini che sono tutti > 0 (avendo supposto che non si hanno probabilità nulla e avendo che una codeword pari alla stringa vuota ha poco senso), fare in modo che i termini siano tutti il più piccolo possibile. Dato che le probabilità sono date mentre la codifica la sto costruendo, calcolando le codeword e di conseguenza le loro lunghezze, devo fare in modo che se la probabilità è grande la lunghezza deve essere piccola. Se invece la probabilità è piccola posso permettermi una lunghezza più grande. Parto quindi dai simboli con probabilità più grande e inizio a usare codeword più piccole possibili, usando via via quelle più lunghe.

Un'idea simile è usata nel *codice Morse* dove le lettere meno comuni hanno le sequenze più lunghe di punti, linee e spazi (avendo una codifica ternaria). La lettera più comune, la "e", ha infatti solo con un punto, la codifica più breve mentre le meno comuni hanno sequenze multiple di punti, linee e spazi che le separano (e gli spazi contano nella lunghezza di queste codeword).

Noi non sappiamo in anticipo che messaggi verranno prodotti dalla sorgente e quindi le codeword vanno studiate passo a passo, valutando i simboli più probabili per associare le codeword più brevi e i meno probabili per le codeword più lunghe.

Analizziamo meglio i codici, le codeword. Possono essere:

1. *a lunghezza fissa*, ovvero si ha che $l_1 = l_2 = \dots = L_q$
2. *a lunghezza variabile*, avendo che ogni codeword può avere lunghezza diversa

Ne segue quindi che il discorso di minimizzare L ha senso solo in presenza di *codeword a lunghezza variabile* (potendo decidere per ogni simbolo che

codeword associare), avendo la **codifica a lunghezza variabile**.

Con *codeword a lunghezza fissa* avrei tutte le l_i uguali e quindi avrei, avendo $l_i = l, \forall i$:

$$L = \sum_{i=1}^q p_i \cdot l_i \sum_{i=1}^q p_i \cdot l = l \cdot \sum_{i=1}^q p_i = l \cdot 1 = l$$

avendo, come facilmente intuibile, che la lunghezza media è la lunghezza fissa stessa. Si hanno codifiche a lunghezza fissa, come banalmente numeri a 64bit etc. . . in tal caso si parla di **codici a blocchi**.

Usando codifiche a lunghezza fissa si hanno anche esempi interessanti come quello del *codice pesato*, detto **codice pesato 01247**. Il nome deriva dal fatto che si possono codificare le cifre da 0 a 9 (da 1 a 9 con poi lo 0 dopo il 9) sotto forma di stringhe di 5 bit usando i pesi 0,1,2,4,7 associati a ciascun bit. Vediamo la tabella con la codifica di questo codice:

	0	1	2	4	7
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	0	0	1
8	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1

Si nota che ogni codeword ha sempre 3 bit pari a 0 e due bit pari a 1, avendo un **codice 2-su-5**. Banalmente i pesi si associano ai numeri 0,1,2,4,7 in modo tale che essi, sommati, formino il numero voluto (ad esempio per 1 avrò i pesi su 0 e 1, per 9 su 2 e 7 etc. . .). L'unico caso è il caso dello 0, che non può essere ottenuto come somma di due pesi (spesso si hanno nei codici casi speciali da gestire a parte). Per lo 0 viene quindi presa una codeword non usata per altri numeri e quindi l'unica scelta possibile è avere i pesi su 4 e 7 (visto che farebbe 11).

Su un totale di 5 bit, avendo due bit a 1 e tre bit a 0, posso avere un numero di codeword pari a:

$$n = \binom{5}{2} = 10$$

avendo che i 5 bit sono associati ai 5 elementi dove 1 segnala che “sto usando quel peso”, prendendo quindi i sottoinsiemi di due elementi a partire da un

insieme di cinque elementi, ovvero “in quanti modi posso formare sottoinsiemi che contengono due elementi a partire da un insieme di cinque elementi” o detto altrimenti “quanti sono i modi in cui posso disporre due uni all'interno di una stringa di cardinalità cinque”.

In un linguaggio di programmazione privo di una struttura dati dedicata posso simulare un insieme di questo tipo tramite un vettore di bit (con 1 se l'elemento associato all'indice c'è).

*Il codice a barre è detto **codice 39** ed è un **codice 3-su-9**.*

In merito alla **decodifica** si ha che anch'essa sarà di due tipi:

1. **decodifica di canale**, vedendo e c'è stato un errore di trasmissione ed eventualmente correggendolo in automatico se il codice mi consente di farlo
2. **ulteriore decodifica** che non è esattamente una *codifica di sorgente* ma quanto una *trasformazione*, dove le *codeword* vengono trasformate nel formato leggibile dal **ricevente**

3.1 Codici per individuare errori

Ci concentriamo ora sulla *codifica di canale* ignorando per ora la *codifica di sorgente*, avendo come obiettivo l'aggiunta di ridondanza a simboli, che si suppongono già codificati con codeword, in modo tale che in queste codeword, spedite nel canale dove eventualmente si possono avere modifiche causate dal rumore, vengano eventualmente riconosciuti (ed eventualmente corretti) errori in fase di *decodifica*.

Parlando di codici per individuare errori solitamente, nei disorsi, si ha che $|\Gamma| < |\Sigma|$ Qualora il ricevente con la sua decodifica si accorga che è successo qualcosa ma non si è in grado di correggere quel qualcosa si hanno i cosiddetti **codici per individuare gli errori (*error detection codes*)**. Nel caso in cui il ricevente con la sua decodifica si accorga dell'errore ci si chiede anche se può correggerlo autonomamente senza chiedere che la sorgente spedisca nuovamente il messaggio. Non sempre questa cosa si può fare ma quanto accade si parla di **codici a correzione d'errore (*error correction codes*)**.

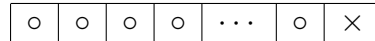
3.1.1 Controllo di parità semplice

Vediamo come capire se un messaggio ricevuto è valido.

Si supponga di spedire un pacchetto di n bit (ma potrebbe essere qualsiasi altra cosa ma per praticità prendiamo un bit) nel canale e che da esso esca un certo pacchetto sempre di n bit (per il rumore potrebbe non essere lo stesso).

Definizione 2. Definiamo il **controllo di parità**.

Avendo una sequenza di n bits in cui si ha $n - 1$ bits, dette **cifre di messaggio di messaggio vero**, che chiameremo **msg** e un bit che è la **cifra di controllo**, che chiameremo **check**. Le cifre di messaggio si indicano con \circ mentre la cifra di controllo con \times e quindi il messaggio è del tipo:



avendo $n - 1$ \circ e un solo \times (che potrebbe anche non essere in fondo, basta avere coscienza della posizione nel pacchetto, concordando la cosa tra mittente e ricevente).

Si ha che:

- chi spedisce ha le cifre di messaggio e deve calcolare la cifra di controllo
- chi riceve controlla che la cifra di controllo sia coerente con le cifre di messaggio

Nell'**error detection code** il ricevente è solo in grado di capire che la sequenza non è valida ma per farlo bisogna assumere di avere limitazioni nella sequenza di n bit che è entrata nel canale. Questa limitazione è che gli n bit entranti nel canale siano una **codeword valida**, avendo che, preso un sottoinsieme M di tutto l'insieme di n bit, ovvero $M \subseteq \{0,1\}^n$, M è un insieme di codeword valide. Quindi solo un messaggio appartenente a M può entrare nel canale. Fatta questa premessa, quando esce un messaggio, ho che, a causa del rumore, questo messaggio viene rovinato, non avendo più un messaggio valido (cosa che viene capita dal ricevente). Purtroppo può succedere che il rumore trasformi un messaggio valido in un altro messaggio valido ma non considereremo questa opzione per ora.

Nel **controllo di parità semplice** il pacchetto di n bit, come visto è formato da $n - 1$ bit di messaggio e un bit di controllo, la **check digit**. Si procede quindi, ricordando che siamo in un caso binario, a contare il numero di 1 nei primi $n - 1$ bit e se questo è dispari setto il bit di check a 1 e si nota che così il numero di 1 nel pacchetto intero di n bit diventa pari, avendo la cosiddetta **parità pari** (ovvero ogni sequenza valida ha un numero pari di 1). Controllando il numero di 1 il ricevente capisce se il rumore ha modificato il messaggio anche se non può capire cosa è successo (avendo quindi che il controllo di parità semplice è solo un error detecting code e non un error correcting code). Non potendo fare nulla, in caso di errore identificato, il ricevente può solo chiedere al mittente di inviare nuovamente il messaggio. Qualora il rumore modificasse il messaggio in modo tale che si abbia comunque

un numero pari di 1 si rientrerebbe nella casistica sopra descritta in cui il rumore forma ancora un messaggio valido. Questa cosa può succedere se, nel caso binario, il rumore modifica un numero pari di cifre e quindi il controllo di parità semplice funziona solo se viene modificato un numero dispari di cifre.

Vediamo quindi meglio come calcolare la **check digit**.
Si rinominiamo gli n bit come:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} y$$

quindi con y *check digit*.
Si ha che, con \oplus *xor*:

$$y = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{n-1}$$

Ricordando che:

a	b	$a \wedge b$	$a \oplus b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

quindi vale 1 se i due bit in input sono diversi ma questo non ci aiuta su $n-1$ input. Altrimenti si ha che vale 1 se il numero di 1 in input è dispari e questo ci aiuta su $n-1$ input infatti la generalizzazione dello *xor* a più di due input è detta **funzione di parità**. Un altro punto di vista per considerare lo *xor* è quello della **somma a modulo 2** usando la notazione:

$$y = \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bmod 2$$

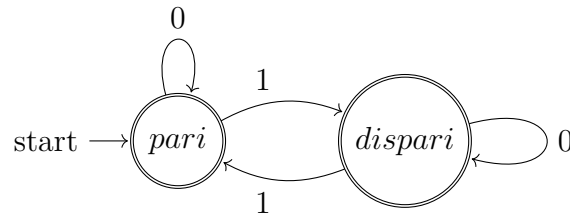
avendo che faccio prima la somma e poi il modulo 2 mi dice 0 se è pari e 1 se è dispari.

Si ha inoltre una relazione interessante tra le formule scritte usando solo \oplus e \wedge nella cosiddetta **forma algebrica normale (ANF)**. Queste formule booleane possono essere trasformate in formule aritmetiche con *modulo 2*, quindi in \mathbb{Z}_2 dicendo che lo *xor* equivale alla *formula modulo due* e l'*and* al *prodotto modulo due* (la cosa vale in entrambi i versi).

La funzione di parità è così usata che in tutti i microprocessori, fin dagli anni settanta, si ha un *flag di parità* tra i flag della CPU, che viene settato come

appena visto a seconda dei bit caricati su un registro particolare (a volte detto *accumulator*). Tale calcolo è facilmente mappabile in un circuito, avendo che lo *xor* gode della proprietà associativa (avendo un circuito che fa un albero di porte *xor*).

Posso anche simulare lo *xor* con un **automa a stati finiti**, con due stati “pari” e “dispari”, con il “pari” stato iniziale (diciamo che input vuoto è pari):



Questo metodo ha senso se il canale è pochissimo rumoroso, avendo pochissima probabilità di avere la modifica di un bit e ancora meno di due (due modifiche si ricorda che non verrebbero rilevate essendo pari), così poca da poter ipotizzare che non avvengano mai due errori (e se mai dovesse succedere bisognerà valutare l'impatto del problema e le conseguenze). Stiamo assumendo quindi che la **probabilità d'errore** può essere **trascurabile** infatti canali di buona qualità dovrebbero sbagliare non più di un bit su un milione, per canali più affidabili anche uno su un miliardo. Possiamo quindi trascurare che possano accadere due errori e dire che il **controllo di parità** va bene.

Parliamo ora meglio di **ridondanza**, definendola formalmente.

Definizione 3. La **ridondanza** R è definita come:

$$R = \frac{\text{il numero totale di simboli/cifre spediti}}{\text{numero di simboli/cifre che sono effettivamente parte del messaggio}}$$

Nel caso del controllo di parità i simboli che vogliamo spedire sono n bit a fronte di $n - 1$ bit di vero messaggio. Si ha quindi:

$$R = \frac{n}{n-1} = \frac{(n-1) + 1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

Mettendo in evidenza che la ridondanza è sempre $R \geq 1$, visto che a numeratore abbiamo almeno una cifra in più (quella della check digit) e che quindi è sicuramente maggiore del denominatore. In realtà per avere $R = 1$ dovrei avere numeratore e denominatore uguali che non ha molto senso parlando di ridondanza, quindi nei casi interessanti si ha che $R > 1$. Guardando la formula la cosa è confermata da $1 + \frac{1}{n-1}$ con $\frac{1}{n-1}$ che viene detto **eccesso di ridondanza**.

Definizione 4. Possiamo **generalizzare** la definizione di **ridondanza**, indicando $\text{tot} = \text{msg} + \text{check}$:

$$R = \frac{\text{msg} + \text{check}}{\text{msg}} = \frac{\text{tot}}{\text{msg}}$$

avendo:

- msg numero di simboli/cifre di messaggio
- check numero di cifre di controllo

Ma allora (avendo $\text{check} < \text{msg}$ per avere qualcosa di sensato):

$$R = \frac{\text{msg} + \text{check}}{\text{msg}} = 1 + \frac{\text{check}}{\text{msg}}$$

che è la forma “generale” della ridondanza. Si ha che $\frac{\text{check}}{\text{msg}}$ è **eccesso di ridondanza**.

Si può dire di non avere necessità di “proteggere” di più il bit di parità in quanto, per la macchina, conta come tutti gli altri. Tutti vanno “protetti” nello stesso modo.

Come ho la **parità pari** potrei avere la **parità dispari**, dove i messaggi validi hanno un numero dispari di 1. I vari ragionamenti sono analoghi, essendo tutto uguale dal punto di vista matematico, avendo un isomorfismo tra le due tecniche. La scelta tra i due dipende dai casi è dalla celta di cosa rappresentiamo con 0 e 1 (pensiamo con 0 che rappresenta assenza di segnale, in questo caso meglio usare la parità dispari, mentre se 0 e 1 rappresentassero diverse quantità di Volt andrebbe bene la parità pari).

Nel corso si userà comunque solo la **parità pari**.

3.1.2 Il rumore bianco

Introduciamo ora un primo *modello di rumore*, il **modello del rumore bianco**.

Definizione 5. Un **modello di rumore** è un modello matematico che descrive cosa succede nel canale quando il rumore rovina i bit.

Definizione 6. Il **modello del rumore bianco** consiste nell'avere il messaggio con i bit $x_1 x_2 \dots x_n$ (con magari x_n come controllo di parità ma dato che “i bit non sono colorati” la cosa non ci interessa davvero) e avere una certa probabilità p . Si hanno due condizioni:

1. si ha che $p \in (0, 1)$ che è la probabilità che avvenga un errore in ogni posizione $i \in [1, n]$ del messaggio. Si ha quindi che la probabilità p è uguale in tutte le posizioni
2. le posizioni sono tutte indipendenti, ovvero il fatto che magari si ha un errore nella posizione i non influisce sulle altre. Avendo quindi l'evento casuale E_i con:

$$E_i = \text{è avvenuto un errore in } i$$

allora:

$$E_i \text{ ed } E_j \text{ sono indipendenti, } \forall i \neq j$$

Le due proprietà sopra elencate rendono molto semplice il modello.

Questo però non è molto realistico, basti pensare al rumore dovuto ad uno sbalzo di corrente, dove da un bit in poi e per diversi bit si avranno alte probabilità d'errore. Quando l'errore influisce su una certa porzione di bit si dice che si ha un **burst di errori** (che non può essere gestito con le tecniche per il rumore bianco, anche se si riesce con qualche workaround).

Si è visto che $p \in (0, 1)$ infatti:

- se si avesse $p = 0$ si avrebbe che ogni bit arriverebbe sempre corretto, ma questo può avvenire solo in un mondo utopico e non in quello reale/fisico. Non esiste un canale reale non affetto da errori, quindi si ha $p \neq 0$
- se si avesse $p = 1$ si avrebbe che ogni bit del messaggio arriverebbe errato ma questa non sarebbe una brutta situazione, anzi sarebbe ottima infatti mi basterebbe avere una porta logica not della linea di trasmissione per riottenere il messaggio corretto, ottenendo un canale $p = 0$ d'errore. Anche questo però è irrealistico quindi $p \neq 1$

Supponiamo ora che $p > \frac{1}{2}$ quindi ho più probabilità che un bit arrivi sbagliato che giusto. Anche in questo caso una porta logica not alla fine della linea di trasmissione per ottenere un canale con $1 - p$ come probabilità d'errore. Quindi anche questo non ha molto senso quindi si considera che:

$$p \in (0, \frac{1}{2})$$

Manca solo da valutare $p = \frac{1}{2}$.

Con $p = \frac{1}{2}$ si ha che il bit di output è completamente causale e indipendente

da cosa sia stato spedito. È come se il canale generasse n bit casuali con probabilità uniforme ($\frac{1}{2}$), avendo un cosiddetto **canale completamente rumoroso**. Dal punto di vista pratico sarebbe interessante un tale canale, per altri punti di vista (come quello della crittografia), avendo infatti un **generatore di bit completamente casuali**. Purtroppo questo non si può fare quindi si assume $p \neq \frac{1}{2}$.

Cerchiamo di capire quale sia la probabilità che avvengano k errori con $0 \leq k \leq n$ (quindi da nessun errore a tutti gli n bit errati), che indichiamo con:

$$p[k \text{ errori}]$$

Valutiamo i vari casi:

- partiamo con 1 errore, quindi $k = 1$, avendo $p[1 \text{ errori}]$. Questo significa che per il messaggio di n bit si immagina un vettore di bit associato con 0 e 1 come “bandierine” che indicano se è avvenuto un errore o no in una certa posizione. Quindi se in una certa posizione ho 0 diciamo che significa che non ho un errore di trasmissione mentre se ho 1 ho un errore. Il messaggio di n bit diventa quindi una sorta di *maschera* che con gli 1 mi dice dove è avvenuto l'errore. Se suppongo che ne è avvenuto uno solo avrò un solo 1 e bisogna calcolare la probabilità che questo avvenga. Supponga che l'errore sia al primissimo bit, quindi in posizione $i = 1$, avendo quindi, per il discorso delle “bandierine” che $msg = 10000 \dots 0$ e quindi si ha, avendo che la probabilità che avvenga la trasmissione avvenga correttamente è $1 - p$ (cosa che avviene $n - 1$ volte), mentre p che avvenga sbagliata (cosa che avviene una sola volta):

$$p[1 \text{ errori}] = p^1 \cdot (1 - p)^{n-1} = p \cdot (1 - p)^{n-1}$$

Posso fare · in quanto si è supposta l'indipendenza (non avendo intersezioni tra gli eventi).

Ma questo non sta considerando tutto ma solo la prima posizione. Completando il calcolo avendo di volta in volta in somma la probabilità di un errore nella posizione i ho che:

$$p[1 \text{ errori}] = p^1 \cdot (1 - p)^{n-1} + (1 - p)^1 \cdot p^1 \cdot (1 - p)^{n-2} + \dots$$

ma questo conto si può semplificare, avendo sempre gli stessi termini che si ripetono:

$$p[1 \text{ errori}] = n \cdot p^1 \cdot (1 - p)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1}$$

Infatti so che $p \cdot (1 - p)^{n-1}$ è la probabilità di avere un errore in una certa posizione fissata. Mi chiedo dove posso mettere questa posizione in tutti i modi possibili nel pacchetto di n bit e ho che, avendo un solo errore, ho n modi per posizionarlo, ciascuno con probabilità $p \cdot (1 - p)^{n-1}$

- passiamo a due errori, avendo $p[2 \text{ errori}]$.
Ho un ragionamento analogo. Parto supponendo di avere i due errori nelle prime due posizioni del messaggio/pacchetto, avendo quindi 1 nelle prime due posizioni della maschera. Abbiamo comunque già visto che poi il ragionamento si generalizza per qualsiasi posizione, in questo caso coppie (anche non consecutive) di posizioni. Si ha che, ipotizzando che le prime due siano errate:

$$p[2 \text{ errori}] = p^1 \cdot p^1 \cdot (1 - p)^{n-2} = p^2 \cdot (1 - p)^{n-2}$$

Ma anche qui dobbiamo vedere la probabilità per qualsiasi coppia, facendo variare le due posizioni d'errore in tutti i modi possibili ma questo è come prendere un qualsiasi sottoinsieme di due elementi a partire da un insieme di n elementi ma questo altro non è che il calcolo che si fa tramite il coefficiente binomiale, avendo quindi:

$$p[2 \text{ errori}] = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{n-2}$$

- analogamente a quanto fatto per due errori potrei fare con tre, quattro, etc. . .
- possiamo generalizzare con k errori, avendo $p[k \text{ errori}]$.
Si hanno quindi k uni da disporre in tutti i modi possibili nel vettore di n bit. Si ha quindi:

$$p[k \text{ errori}] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

E quindi posso valutare la cosa nei due casi estremi:

- $k = 0$, avendo 0 errori. Ho un solo modo per mettere zero 1 nella maschera di bit (da nessuna parte) e infatti (avendo poi tutti gli n bit la stessa probabilità di uscire corretti):

$$p[0 \text{ errori}] = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - p)^n = (1 - p)^n$$

- $k = n$, avendo n errori¹. Ho un solo modo per mettere tutti 1 nella maschera di bit (ovunque) e infatti (avendo poi tutti gli n bit la stessa probabilità di uscire errati):

$$p[\text{ n errori }] = \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot 1 = p^n$$

Si nota che i due casi estremi sono “speculari”.

In questo elenco puntato si è quindi ragionato sulle celle della maschera di bit associata al pacchetto e non del pacchetto in se, anche se spesso risulti ambiguo.

Consideriamo ora nuovamente $p[1 \text{ errore}]$, si ha che, dalla generalizzazione è:

$$p[1 \text{ errore}] = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

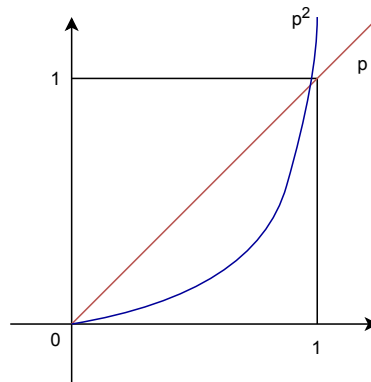
Introduciamo un'approssimazione interessante dell'analisi matematica che vale per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|X| < 1$, ovvero $-1 < x < 1$:

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha \cdot x$$

Ovvero $1 + \alpha \cdot x$ sono i primi due termini dello sviluppo in serie di $(1+x)^\alpha$. Tratto quindi la formula per un errore in base a questa approssimazione:

$$p[1 \text{ errore}] = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \simeq n \cdot p \cdot [1 - p \cdot (n-1)] = n \cdot p - n^2 \cdot p^2 + n \cdot p^2$$

Ma so che $p \in (0, 1)$ e quindi $p^2 < p$, infatti (*grafico approssimativo*):



¹Su dispense del prof grafico con $n = 8$, $p = 0.1$ e k che varia tra 0 e 8

ma quindi, sempre approssimando (avendo quindi già due approssimazioni):

$$p[1 \text{ errore}] = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \simeq n \cdot p - n^2 \cdot p^2 + n \cdot p^2 \simeq n \cdot p$$

Quindi:

$$p[1 \text{ errore}] \simeq n \cdot p$$

Analogamente ragiono per due errori:

$$p[2 \text{ errori}] = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \simeq \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot [1-p \cdot (n-2)] = \binom{n}{2} \cdot (p^2 - n \cdot p^3 + 2p^3)$$

Ma anche qui si ha che $p \in (0, 1)$ e quindi $p^3 < p$, e quindi si ha:

$$p[2 \text{ errori}] \simeq \binom{n}{2} \cdot p^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2$$

In generale, per k errori, con gli stessi passaggi:

$$p[k \text{ errori}] \simeq \binom{n}{k} \cdot p^k$$

I conti diventano molto più semplici.

Si è detto che se la probabilità di due errori è piccola si può decidere di trascurarla (usando poi solo il *controllo di parità semplice*). Da queste approssimazioni vediamo che la probabilità di un errore è $\simeq n \cdot p$ mentre per due $\simeq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2$. Se ipotizziamo $p \sim 10^{-6}$, quindi uno su un milione, si ha che $p^2 = 10^{-12}$ quindi assolutamente trascurabile. Si segnala comunque che questa non è una pratica standard. Normalmente si hanno, ad esempio, **low density parity codes (LDPC)** dove si sparano a caso vari controlli di qualità nell'ottica di mantenere le proprietà di correzione degli errori usando meno controlli possibile, avendo, tornando alla ridondanza $R = 1 + \frac{\text{check}}{\text{msg}}$, che si vuole usare il minor numero di cifre di controllo per abbassare l'*eccesso di ridondanza*, abbassando la ridondanza stessa, avvicinandosi quindi a 1^+ (ci si avvicina da destra ovviamente). Riducendo l'*eccesso di ridondanza* si ha che ogni cifra di controllo *copre/protegge* il maggior numero di simboli/cifre del messaggio. *A parità di simboli inviati si vuole quindi ridurre il numero di cifre di controllo.*

Approfondiamo e usiamo quindi il *modello del rumore bianco* per vedere qual è la probabilità che il ricevente non riesca a capire che c'è stato un errore utilizzando il *controllo di parità semplice*.

Ricordiamo che il messaggio è della forma:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} y$$

con y controllo di parità semplice calcolato come:

$$y = \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i$$

Un numero dispari di errore mi segnala che ci sono stati problemi, usando la *parità pari* (i pacchetti inseriti nel canale hanno un numero pari di 1). Vogliamo quindi la probabilità che il controllo di parità fallisca, ovvero:

$$p[\text{controllo } \bigoplus \text{ fallisce}]$$

ma questo è uguale alla probabilità che avvenga un numero pari di errori (**zero escluso**, ovviamente):

$$p[\text{controllo } \bigoplus \text{ fallisce}] = p[\text{numero pari di errori}] = p[2 \text{ errori}] + p[4 \text{ errori}] + \dots$$

Diciamo che, per comodità:

$$1 = (1 - p) + p = [(1 - p) + p]^n$$

Ma so che $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, quindi:

$$1 = [(1 - p) + p]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k$$

ma questa è $\binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k = p[k \text{ errori}]$ (infatti la somma di tutte le probabilità è appunto 1), quindi:

$$1 = [(1 - p) + p]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k = \sum_{k=0}^n p[k \text{ errori}]$$

D'altro canto posso anche dire che, sempre applicando l'espansione di $(a+b)^n$, scomponendo però $(-p)^k$ in $(-1)^k \cdot p^k$ (dove $(-1)^k$ vale 1 per k pari e -1 per k dispari). Si ha quindi:

$$(1 - 2 \cdot p)^n = [(1 - p) - p]^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Ma quindi ho:

$$(1 - 2 \cdot p)^n = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} & \text{sse } k \text{ è pari} \\ -\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} & \text{sse } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi se k è dispari le espansioni di 1 e $(1 - 2 \cdot p)^n$ sono uguali ma di segno opposto mentre se k è pari sono uguali con lo stesso segno. Ma quindi questa somma delle due espansioni mi lascia col doppio dei soli termini con k pari che ci aiuta volendo calcolare proprio le probabilità con un numero di errori pari. Si ha quindi, dividendo già per due avendo il discorso del doppio:

$$\frac{1 + (1 - 2 \cdot p)^n}{2} = \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2 \cdot t} \cdot p^{2t} \cdot (1 - p)^{n-2t}$$

La somma va quindi da 0 alla parte intera di $\frac{n}{2}$. Nel coefficiente binomiale ho $2 \cdot r$ che è una quantità sicuramente pari. In generale è come se avessi $k = 2 \cdot t$ ciclando solo sui k pari. Ho quindi ottenuto:

$$p[0 \text{ errori}] + p[2 \text{ errori}] + p[4 \text{ errori}] + \dots$$

Non vogliamo però $t = 0$ quindi:

$$\begin{aligned} p[\text{controllo } \bigoplus \text{ fallisce}] &= p[\text{numero pari di errori}] = \frac{1 + (1 - 2 \cdot p)^n}{2} - p[0 \text{ errori}] \\ &= \frac{1 + (1 - 2 \cdot p)^n}{2} - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0} = \frac{1 + (1 - 2 \cdot p)^n}{2} - (1 - p)^n \end{aligned}$$

E quindi:

$$p[\text{controllo } \bigoplus \text{ fallisce}] = p[\text{numero pari di errori}] = \frac{1 + (1 - 2 \cdot p)^n}{2} - (1 - p)^n$$

D'altro canto potrei anche calcolare $p[\text{numero dispari di errori}]$:

$$p[\text{numero dispari di errori}] = 1 - p[\text{numero pari di errori}]$$

(o anche modificando la sommatoria per ciclare sui k dispari).

Facendo qualche conto² si ottiene che:

$$p[\text{numero dispari di errori}] = 1 - (p[\text{numero pari di errori}] + p[0 \text{ errori}])$$

ovvero:

$$p[\text{numero dispari di errori}] = \frac{1 - (1 - 2 \cdot p)^n}{2}$$

In generale il numero dispari di errori è meno interessante.

²i calcoli per il numero dispari di errore sono materiale extra sulle dispense del docente

3.1.3 Gestione dei burst

Come abbiamo introdotto con il solo *controllo di parità* e con il *rumore bianco* non si possono gestire i **burst di errori**. Vediamo quindi un modo semplice per gestirli.

Si supponga di voler spedire dei messaggi formati da lettere, ad esempio:

c	i	a	o
---	---	---	---

Posiamo di rappresentare ogni lettera tramite l'**ASCII standard** a 7 bit:

char	bit
c	1000011
i	1001001
a	1000001
o	1001111

Si supponga di avere dei burst di errori di lunghezza L e per semplicità assumo L di lunghezza pari alle singole word, quindi $L = 7$. Per gestire il burst spedisco prima i 7 bit della prima lettera poi quelli della seconda etc. . . Infine spedisco un intero pacchetto di bit di controllo di 7 bit dove ogni bit viene calcolato controllando quella posizione di bit in tutti i pacchetti precedenti, sempre tramite lo *xor*. Nel caso d'esempio si ha quindi, con x per indicare il **check** (se nella colonna sopra ho un numero apri di 1 metto 0 altrimenti 1):

c	1000011
i	1001001
a	1000001
o	1001111
x	0000100

Suppongo un burst che rovini dalla posizione 2 alla 4 incluse (avendo che quindi molto probabilmente non ci torneranno i conti facendo il check su $x[2, 4] = 000$).

Ovviamente anche qui un numero pari di errori inganna il sistema avendo comunque un *controllo di parità semplice* e anche in caso d'errore il ricevente non sa comunque dove sia avvenuto e quindi fa **detection** ma non può fare **correction**.

3.1.4 Codici pesati

Abbiamo già parlato del **codice 01247** vediamo ora un codice pesato più interessante e utilizzato.

Definizione 7. Definiamo questo **codice pesato** come un codice per cui si hanno alcune cifre di messaggio $msg = m_1m_2 \cdots m_nc$ alle quali associamo dei pesi che dipendono dalla posizione in cui si trovano le varie cifre. In particolare si ha peso:

- 1 per la **check digit** c
- 2 per m_n
- si prosegue sempre aumentando di 1 per le altre cifre
- n per m_2
- $n + 1$ per m_1

Questo si fa perché la cifra di controllo è calcolata per far ottenere:

$$m_1 \cdot (n + 1) + m_2 \cdot n + \cdots + m_n \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

ma ovviamente questo non sembra possibile e infatti i conti sono fatti in **modulo numero primo**, avendo per esempio, se scegliamo come numero prima 37:

$$m_1 \cdot (n + 1) + m_2 \cdot n + \cdots + m_n \cdot 1 + c \cdot 1 \equiv 0 \pmod{37}$$

La scelta di 37 non è causale, infatti volendo:

- rappresentare le 21 lettere dell'alfabeto inglese
- rappresentare dieci cifre da 0 a 9
- un simbolo per lo spazio

e quindi siamo a 32 simboli e ci serve un numero primo ≥ 31 e quindi va bene 37.

Vogliamo un numero primo perché se vogliamo fare i conti con le congruenze è più semplice farle in *modulo numero primo*.

Lavoriamo quindi nella classe dei resti:

$$[0]_{37}, [1]_{37}, \dots, [36]_{37}$$

e in questo modo se facciamo le varie operazioni è tutto uguale al solito fino a 36 (cosa che non succede per le classi dei resti in modulo non numero primo). La classe dei resti in modulo numero primo è un **campo** mentre se non fosse primo si avrebbe un **anello**. In un campo se $x \cdot y = 0$ o che $x = 0$ oppure $y = 0$ (cosa che non succede negli anelli). Inoltre in un campo ho che se $x \cdot y = z$ allora $x = z \cdot y^{-1}$ (in un anello non per tutti gli y esiste un y^{-1} mentre in un campo sì).

Facendo dipendere il calcolo del peso della **check digit** da tutti gli altri pesi perché, così facendo, soprattutto nelle comunicazioni di tipo **seriale** (dove si spedisce una cifra alla volta), ci si accorge subito se una cifra è andata persa oppure se si è aggiunta cifra o se due cifre si sono scambiate (cosa comunque difficile in un sistema di comunicazione elettronico ma è utile in altre situazioni, soprattutto di conti “a mano”).

Si supponga di avere delle cifre b e a , la prima con peso $k + 1$ e la seconda con peso k , avendo una scrittura del tipo *cifra(peso)*:

$$b(k + 1) + a(k)$$

Ipotizziamo di scambiare a e b (ora a pesa $k + 1$ e b pesa k), avendo:

$$a(k + 1) + b(k)$$

Ma facendo la differenza si nota che non è nulla:

$$[b(k + 1) + a(k)] - [a(k + 1) + b(k)] \neq 0$$

infatti ho:

$$b \cdot k + b + a \cdot k - a \cdot k - a - b \cdot k = b - a$$

ma $b - a = 0$ sse $b = a$ e quindi l'unico caso in cui non ci si accorge dello scambio è avere lo scambio di due cifre uguali che non fa cambiare il risultato. Questa idea viene usata anche nei codici a barre. Vediamo quindi un algoritmo per calcolare la cifra di controllo:

Algorithm 1 Algoritmo di calcolo dei pesi per codice pesato

```

function CHECKCALC
   $sum \leftarrow 0$ 
   $ssum \leftarrow 0$ 
  while not EOF do
    read  $sym$ 
     $sum \leftarrow sum + sym \pmod{37}$ 
     $ssum \leftarrow ssum + sum \pmod{37}$ 
   $temp \leftarrow ssum + sum \pmod{37}$ 
   $c \leftarrow 37 - temp \pmod{37}$ 
  return  $c$ 

```

Dove:

- *sum* tiene conto della somma numerica della nostro calcolo, accumulando i vari termini
- *ssum* che è una *somma delle somme* e tiene conto implicitamente dei vari persi che crescono spostandoci da destra a sinistra come visto sopra. Si accumulano i termini e i loro pesi

I mod37 nel ciclo sono in realtà superflui ma conviene farli per non far diventare i numeri troppo grossi. Le ultime due operazioni servono a risolvere alcune problematiche che non vediamo qui.

Vediamo una più chiara simulazione.

Esempio 1. Avendo, simulando per un messaggio $wxyzc$, con c check digit:

msg	sum	ssum
w	w	w
x	$w + x$	$2 \cdot w + x$
y	$w + x + y$	$3 \cdot w + 2 \cdot x + y$
z	$w + x + y + z$	$4 \cdot w + 3 \cdot x + 2 \cdot y + z$
c	$w + x + y + z + c$	$5 \cdot w + 4 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z + c$

Arrivato alla fine voglio calcolare c in modo che:

$$5 \cdot w + 4 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z + c \equiv 0 \pmod{37}$$

Il mittente ha un messaggio e ci calcola la **check digit**. Chi riceve fa lo stesso calcolo e alla fine controlla la **check digit**. Un altro modo per il ricevente è quello di fare solo l'ultimo calcolo se farli tutti step by step.

Introduciamo un particolare tipo di codice, quello **ISBN** (***International Standard BookNumber***) dei libri, che sono legati, per il codice a barre, allo standard europeo **EAN13** (negli USA si usa lo standard **UPC**). In questo codice si hanno 10 cifre (con al più il carattere X) che un identificano in modo univoco ad un libro. Nel dettaglio:

- la prima cifra rappresenta lo stato in cui è stampato il libro. Questo ha problemi non avendo solo 9 stati che producono libri
- le successive 2 cifre sono le prime due per l'editore, anche questo è un problema in quanto alcuni stati hanno più di 100 case editrici
- le successive 6 sono il numero del libro

- l'ultima cifra è il checksum, la check digit

In realtà ho trattini dopo la prima cifra, dopo la quinta e dopo la nona ma non contano nulla ai fini del calcolo ma sono aiutati solo per facilitare la leggibilità dello stesso.

A causa dei problemi sopra descritti i codici ISBN vengono assegnati ormai con libertà dalle case editrici, usando il primo codice libero.

ISBN è un codice pesato dove i conti sono fatti in mod 11 (il più piccolo numero primo più grande di 10). Potrei avere come risultato 10 avendo mod 11 ma in quel caso uso X come checksum, come ultima cifra.

Esempio 2. Prendiamo l'ISBN:

0-1315-2447- x

e vogliamo verificare che sia effettivamente X . Si ha (con \equiv indico i conti mod 11):

msg	sum	ssum
0	0	0
1	1	1
3	4	5
5	10	$20 \equiv 9$
2	$12 \equiv 1$	$21 \equiv 10$
4	5	$15 \equiv 4$
4	9	$13 \equiv 2$
7	$16 \equiv 5$	7
$X \equiv 10$	$15 \equiv 4$	$11 \equiv 0$

Avendo che effettivamente la somma mod 11 fa 0 e quindi è verificato. Avrei inoltre, per l'algoritmo, controllando la check digit:

$$temp = 7 + 5 = 12 \equiv 1$$

$$c = 11 - 1 = 10 \equiv X$$

3.2 Codici per correggere errori

In questo caso il ricevente non solo deve capire dove è l'errore ma deve anche correggerlo.

3.2.1 Codici rettangolari

Il modo più semplice per correggere errori è usare i **codici a correzione rettangolari**.

In questo caso il codice viene organizzato in modo logico in forma di rettangolo, ovviamente solo in modo logico/astratto. Indichiamo con \circ i bit di messaggio e con x le check digit. In questa prima soluzione penso ai codici come se fossero a forma di rettangolo, con $m - 1$ righe e $n - 1$ colonne, con extra una colonna di check digit e una riga extra di check digit. Contando la riga di check digit e la colonna di check digit arriviamo a m righe e n colonne.

\circ	\circ	\circ	\dots	\circ	x
\circ	\circ	\circ	\dots	\circ	x
\circ	\circ	\circ	\dots	\circ	x
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\circ	x
\circ	\circ	\circ	\dots	\circ	x
x	x	x	x	x	(x)

L'ultima check digit in fondo a destra è superflua, anche se a volte è lo xor di tutte le cifre di controllo, richiedendo che abbia numero pari di 1.

I codici rettangolari riescono a correggere un errore, uno e uno solo ma ovunque avvenga.

La check digit della prima riga fa la parità della prima riga, analogamente la seconda lo fa per la seconda riga etc. . .

Faccio un discorso analogo sulle colonne (la colonna 1 ha la check digit come prima cifra della riga di check digit etc. . .).

La check digit mi dice sempre se ho cifre pari tra cifre di messaggio e check digit.

Tramite la check digit a fine riga capisco che in una riga si ha un errore, e posso controllare lo stesso per la colonna. Identifico quindi il punto preciso in cui è avvenuto l'errore e semplicemente lo inverte, essendo binario.

Identificare l'errore singolo è dato dal fatto che solo una riga e solo una colonna avranno la rispettiva check digit "rotta" (nella colonna di check digit identifico la riga dell'errore mentre nella riga di check digit identifico la colonna dell'errore) e quindi posso riconoscere il preciso elemento che è errato. Da questo discorso si capisce che la check digit in fondo a destra è in realtà inutile.

Ovviamente questo è garantito funzionare solo per un errore in quanto due errori potrebbero avere in comune riga o colonna e non saprei più capire dove siano gli errori. Potrebbe funzionare per più di un errore ma non sempre causa ambiguità e quindi questo metodo è **garantito per uno e un solo**

errore, ovunque si trovi.

Studiamo quindi la ridondanza, che ricordiamo essere in generale:

$$R = \frac{msg + check}{msg} = 1 + \frac{check}{msg}$$

Per il codice rettangolare si ha quindi:

$$R_{\square} = \frac{m \cdot n}{(n-1) \cdot (m-1)} = 1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot (m-1)}$$

Con quindi $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot (m-1)}$ che è il nostro *eccesso di ridondanza* e si ha che è ≥ 0 , quindi in generale:

$$R_{\square} \geq 1$$

Ricordando che “i bit non sono colorati” potrei avere errori anche nelle check digit. Supponendo però che si ha al massimo un errore e supponendo di non avere, in quanto inutile, la check digit in basso a destra, si ha che al più trovo “rotta” o una riga (se ho errore un errore nella colonna di check digit) o su una colonna (se ho errore un errore nella riga di check digit), capendo così che ho “rotta” una check digit, sapendo anche quale.

Esempio 3. *Se devo spedire 24 bit posso rappresentarli in vari modi, secondo vari rettangoli (contando anche la check digit in basso a destra):*

- una riga per 24 colonne (più la riga di controllo), con quindi 26 check digit
- 2 righe per 12 colonne (più la riga di controllo), con quindi 15 check digit
- 3 righe per 8 colonne (più la riga di controllo), con quindi 12 check digit
- 4 righe per 6 colonne (più la riga di controllo), con quindi 11 check digit
- le simmetriche di quelle dette sopra

Man mano che il numero di righe tende a quello di colonne (posto che, come nell'esempio precedente, non sempre può diventare uguale) si ha che le cifre di controllo diminuiscono. Tornando quindi alla formula della ridondanza vediamo che al diminuire delle check digit diminuisce l'eccesso di ridondanza $\frac{check}{msg}$ e quindi la ridondanza tende ad avvicinarsi a 1. Quindi per

scegliere n e m si cerca di fare sì che siano il più uguali possibili, avendo meno cifre di controllo. Formalizzando quanto appena detto posso vedere la ridondanza la posso vedere come una funzione:

$$f(n, m)$$

avendo che $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot (m-1)}$ è quanto fatto dalla funzione. Si può quindi cercare il punto minimo di questa funzione trovando che è in $m = n$. Si può anche ipotizzare di poter aggiungere una cifra di messaggio per poter avere una rappresentazione con $n = m$, ma ovviamente dipende da caso a caso. Questo bit aggiuntivo a seconda del caso sarebbe 0 o 1. Si nota che aumentare il messaggio aumenta msg riducendo, a parità di check digit, $\frac{check}{msg}$, aiutando ad arrivare ad una ridondanza prossima a 1. **Non sempre ho modo di aggiungere tale bit.**

Il caso migliore è quindi con $n = m$ e si ha quindi, avendo un quadrato, il calcolo più preciso per la ridondanza:

$$R_{\square} = \frac{n^2}{(n-1)^2} = 1 + \frac{2}{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}$$

che è la ridondanza migliore che si può ottenere con i codici rettangolari.

3.2.2 Codici triangolari

Vediamo quindi i **codici a correzione triangolari**, dove la rappresentazione è appunto triangolare (a occhio una sorta di matrice triangolare).

In questo caso si ha un triangolo con un cateto di lunghezza n , ad esempio (con $n = 4$):

```

○ ○ ○ ○ x
○ ○ ○ x
○ ○ x
○ x
x

```

Ho quindi n check digit (*parte in dubbio*). Si ha infatti che le n cifre di messaggio sono (per la **formula di Gauss**):

$$msg = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

(in altre parole il numero di diagonalì che ho nella matrice meno uno).

Ho inoltre che il numero di cifre totali è:

$$tot = msg + check = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

che altro non è che la sommatoria fatta per calcolare msg ma con un'iterazione in più:

$$tot = msg + check = \sum_{i=1}^n i$$

Le check digit vengono calcolate dal mittente in base alle cifre sulla riga e sulla colonna della check digit. Quindi, ad esempio, per calcolare la check digit in grassetto di:

```

○ ○ ○ ○ X
○ ○ ○ X
○ ○ X
○ X
X

```

La calcola tramite le cifre di messaggio in verde:

```

○ ○ ○ ○ X
○ ○ ○ X
○ ○ X
○ X
X

```

Si nota che il bit di parità della prima riga è calcolato solo tramite la prima riga mentre il bit di parità dell'ultima riga viene calcolato solo tramite la prima colonna.

Il ricevente, per capire dove è il bit errato, verifica in quali check digit è coinvolto, che sono due check digit, e incrociando scopro quale sia il simbolo errato. Vedendo in pratica si supponga errato il bit in rosso:

```

○ ○ ○ ○ X
○ ○ ○ X
○ ○ X
○ X
X

```

Esso è coinvolto nelle seguenti cifre di parità in grassetto, calcolate, oltre che grazie alla cifra in rosso anche da quelle in verde:

○	○	○	○	x
○	○	○	x	
○	○	x		
○	x			
x				

Mentre le altre cifre di parità saranno corrette. Il destinatario può quindi scoprire quale sia il bit che è stato modificato per poterlo poi correggere. Passiamo quindi alla ridondanza del codice triangolare. Si ha che:

$$R_{\Delta} = \frac{tot}{msg} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n-1+2)}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$$

Confronto questa ridondanza con quella dei migliori codici rettangolari, ovvero quella dei codici quadrati, dove vedo che si ha un termine positivo in più nei codici quadrati, ovvero $\frac{1}{(n-1)^2}$, che essendo positivo può solo aumentare la ridondanza. Si ha quindi che:

$$R_{\Delta} < R_{\square}$$

e quindi i codici triangolari sono migliori di quelli rettangolari, anche dei migliori tra quelli rettangolari (quelli quadrati), e hanno una sola check digit per riga e una sola per colonna.

L'unico limite per avere un codice triangolare è quello di avere un messaggio di n cifre che permette l'espressione $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$, ovvero che sia rappresentabile da un triangolo (per fare tornare i conti posso comunque aggiungere uno 0, per esempio), avendo n lunghezza del cateto.

3.2.3 Codici cubici

Per cercare di abbassare ancora meno la ridondanza cerchiamo la disposizione geometrica più conveniente. Si è provato quindi ad aumentare le dimensioni dello spazio in cui ci troviamo, pensando ad un cubo, ipotizzando di avere una cifra di controllo (posta in basso a destra per il piano) che controlla tutto un piano (contando che ho piani per ognuna delle tre dimensioni). Si ha quindi un bit di parità per ogni piano (che è ciò che rappresenta le cifre di messaggio) con cui posso tagliare il cubo. Nel complesso si ha quindi un intero spigolo del cubo che rappresenta le check digit che sono rappresentati da i piani in

	Quadrato		Triangolare		Cubico	
n	messaggio $(n-1)^2$	controllo $2n-1$	messaggio $\frac{n(n-1)}{2}$	controllo n	messaggio n^3-3n+2	controllo $3n-2$
2	1	3	1	2	4	4
3	4	5	3	3	20	7
4	9	7	6	4	54	10
5	16	9	10	5	112	13
6	25	11	15	6	200	16
7	36	13	21	7	324	19
8	49	15	28	8	490	22
9	64	17	36	9	704	25
10	81	19	45	10	972	28

Tabella 3.1: Esempio di tabella di confronto tra codici quadrati, triangolari e cubici

una certa direzione. In totale posso sezionare in tre direzioni avendo quindi 3 spigoli di check digit che “proteggono” tutte le cifre di messaggio contenute nel cubo (che ha lato $n-1$ più la check digit).

In maniera approssimata, su circa n^3 posizioni si hanno $3(n-1)+1 = 3n-2$ check digit. Si ha quindi che la ridondanza è:

$$R_{\square} = \frac{(n-1)^3 + 3n - 2}{(n-1)^3} = 1 + \frac{3n-2}{(n-1)^3} \simeq 1 + \frac{3}{n^2}$$

Posso pensare quindi pensare di aumentare ancora le dimensioni, considerando cubi a quattro dimensioni (e non mi serve disegnarlo visto che devo solo “pensarlo”), avendo:

- $(n-1)^4$ cifre di messaggio
- $4(n-1)+1 = 4n-3$ check digit

ottenendo la seguente ridondanza:

$$R_{\square 4-dim} = 1 + \frac{4n-3}{(n-1)^4} \simeq 1 + \frac{4}{n^3}$$

(dove praticamente si è ignorato il -3 nella formula della check digit).

Posso pensare di andare quindi in k dimensioni, avendo:

- $(n-1)^k$ cifre di messaggio
- $k(n-1)+1 = kn-k+1$ check digit

ottenendo la seguente ridondanza, con k che è fissato e quindi costante:

$$R_{\text{per } k\text{-dim}} = 1 + \frac{kn - k + 1}{(n - 1)^k} \simeq 1 + \frac{k}{n^{k-1}}$$

Possiamo così, facendo crescere k e l'eccesso di ridondanza, ottenere una figura sempre migliore.

Ma anche se la ridondanza è sempre migliore vedo che a denominatore dell'eccesso di ridondanza $\frac{k}{n^{k-1}}$ trovo un polinomio elevato alla dimensione meno uno. Vedremo che nei **codici di Hamming**, per correggere un errore, il *gap* è esponenziale al variare delle dimensioni. Inoltre il *codice di Hamming* è **ottimale**.

3.2.4 Codici di Hamming

Hamming si pone di trovare un codice per correggere un errore nel modello del rumore bianco, avendo che sia però un **codice ottimale**, *ovvero che a parità di cifre inviate deve usare il minimo numero di check digit*. Ho sempre un pacchetto di n bit che sono di due tipi:

1. k bit di cifre di messaggio *msg*
2. m bit di check digit *check*

Per calcolare le check digit usa delle equazioni di controlli di parità, con una cifra di messaggio che nel complesso serve a calcolare più di una check digit (come nei codici legati alle figure numeriche). Si avranno quindi m equazioni di parità del tipo, avendo c_1, \dots, c_n cifre di parità e x_i, \dots, x_n cifre di messaggio:

$$c_i = x_j \oplus x_k \oplus x_w \dots$$

Tutte queste equazioni devono essere **linearmente indipendenti**, in modo che ogni check digit abbia informazioni differenti. Supponiamo infatti:

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7$$

$$c_2 = x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9$$

Ma in realtà c_i è una delle x_j della formula infatti:

$$c_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

e quindi:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = c_1$$

Scriviamo quindi:

$$c_1 \rightarrow x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

$$c_2 \rightarrow x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 = 0$$

In generale le equazioni mi danno 0 se il numero di 1 è pari.

In ogni formula si assume di avere una sola cifra di messaggio.

Faccio poi lo \oplus tra c_1 e c_2 bit a bit, ottenendo (avendo tipo x_5 da entrambe le parti si semplifica):

$$c \rightarrow x_1 \oplus x_2 \oplus x_8 \oplus x_9 = 0$$

Si supponga ora di avere una $c_3 = c$ ma avrei uno spreco di fatica in quanto le informazioni delle prime due sarebbero uguali alla terza, avendo infatti *dipendenza lineare*.

Ricordiamo che:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$$

con \mathbb{R}^n che è uno **spazio vettoriale**.

Fare **combinazioni lineari** in questo caso prevede la somma come il \oplus . Rappresento le equazioni di parità dell'esempio sopra come un vettore di $\{0, 1\}^n$:

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$$

e facendo lo *xor* (che è la somma mod, 2 bit a bit) ottengo:

$$(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

Si ha ora il prodotto scalare in $\{0, 1\}^n$:

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Quindi nel nostro caso:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2, a_1, a_2 \in \{0, 1\}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \{0, 1\}^n$$

Quindi 0 mi dice di non considerare il vettore e uno di considerarlo, indicando il sottoinsieme di elementi da sommare. Si ha che $\{0, 1\}^n$ rispetto alla somma come definita e al prodotto scalare come definito è uno **spazio vettoriale**.

Quindi, tornando a Hamming, possiamo capire, grazie a questi ragionamenti, l'indipendenza lineare tra le equazioni di parità. Con m bit di controllo si cerca di capire quante condizioni d'errore si riesce a rappresentare. Con m

cifre di controllo si hanno 2^m possibili combinazioni/configurazioni. Ogni configurazione mi deve identificare un errore diverso per poter fare anche correzione. Mi serve però anche una configurazione che indichi il *non avere errori*. Si ha quindi che si hanno:

- $2^m - 1$ condizioni di errore
- una condizione di non errore

Gli errori possono avvenire ovunque, anche nelle check digit, ma con al massimo un errore (o nella prima posizione o nella seconda etc...). Si hanno quindi n possibili condizioni d'errore. Si ha quindi che:

$$2^m \geq n + 1$$

ovvero le configurazioni che posso fare con m cifre di controllo deve indicarmi le n possibili condizioni d'errore più una per l'assenza di errore. Nel caso dei codici di Hamming "propriamente detti" si avrebbe:

$$2^m = n + 1$$

usando tutte le combinazioni in quanto il $>$ implicherebbe che sto "sprecando" qualche configurazione delle cifre di controllo. **Non sempre posso usare "="**.

Posso quindi capire quante siano le cifre di controllo.

Esempio 4. Si supponga di voler spedire $k = 4$ cifre di messaggio. Ci chiediamo di calcolare m :

$$2^m \geq n + 1$$

ma quindi, avendo $n = m + k$:

$$2^m \geq m + k + 1$$

Mi serve quindi l' m più piccolo possibile che risolva la disequazione con $k = 5$:

$$2^m \geq m + 5$$

Non si ha però una soluzione analitica ma 2^m cresce più velocemente di $m + 5$ ($m = 0$ non ha senso ma lo si mette, si hanno comunque tecniche anche per non partire da 1):

m	2^m	$m + 5$
0	1	5
1	2	6
2	4	7
3	8	8

quindi $m = 3$ è il più piccolo valore che risolve, risolvendo per di più con $= e non \geq$. Per 4 bit di messaggio mi servono 3 cifre di controllo. Ho quindi $n = 7$.

In generale per correggere un errore devo sapere in che posizione è, sapendo l'indice da 1 a n indicante tale posizione nel pacchetto. Il metodo che lo calcola può restituire 0, indicante che non si ha errore.

Faccio una tabella con posizione/binario, ad esempio per l'esempio precedente

pos	bin
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111
<hr/>	
	$c_3 c_2 c_1$

Ho che i bit hanno m cifre, e ho $c_3 c_2 c_1$ (si parte da destra) come le cifre di parità ottenute dalle tre colonne di binari.

Ipotizzo un errore in posizione 5. Ho che, mettendo le x_i dove si ha 1:

$$c_1 \rightarrow x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

ma ho problemi con x_5 , avendo l'equazione pari a 1.

$$c_2 \rightarrow x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

dove non ho problemi con x_5 .

$$c_3 \rightarrow x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

ma ho problemi con x_5 , avendo l'equazione pari a 1.

Si ha quindi che:

$$c_1 \rightarrow x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 1$$

$$c_2 \rightarrow x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

$$c_3 \rightarrow x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 1$$

Che quindi mi mostra dopo l'uguale la posizione in cui è avvenuto l'errore. I bit letti dal basso verso l'alto sono 101 e questo è detto **sindrome**, che

quindi nei codici di Hamming è la posizione dell'errore in codice binario. Se la *sindrome* è 0 non ho errori (è come se avessi 000 nella prima riga della tabella).

Il ricevente è sistemato ma manca il mittente che deve calcolare gli m bit di controllo e spedire. Usando la tecnica di usare nelle equazioni le x_i relative agli 1 mi genera equazioni linearmente indipendenti.

Manca capire dove mettere la check digit. Le cifre di controllo vengono messe nelle posizioni in cui si ha un 1 solo, ovvero 001, 010 e 100, in modo che c_1 è solo nella prima equazione, c_2 nella seconda e c_3 nella terza, non dovendo risolvere in realtà il sistema lineare. Si quindi, nell'esempio sopra:

$$c_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$$

$$c_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

$$c_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$$

ottenendo quindi il pacchetto.

$$pacchetto = c_1 c_2 m_1 c_3 m_2 m_3 m_4$$

e quindi:

$$c_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0$$

$$c_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0$$

$$c_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0$$

ma isolando le c_i , sommando da entrambe le parti dell'equazione:

$$c_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4$$

$$c_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4$$

$$c_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$$

Si noti che le posizioni delle cifre di controllo c_i sono potenze di 2 $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ e all'aumentare delle cifre della grandezza si ha crescita logaritmica delle check digit, che quindi controllano un numero esponenziale di cifre di messaggio.

Esempio 5. *Scelgo un messaggio di 4 bit:*

$$msg = 1011$$

quindi:

$$pacchetto = c_1 c_2 1 c_3 011$$

So che, per le formule sopra (ma lo posso vedere anche col discorso di avere periodicità nella tabella di bit, pensando a come li scrivi quando fai le tabelle di verità):

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = 1$$

$$c_3 = 0$$

quindi:

$$\text{pacchetto} = 0110011$$

che viene inviato ma al destinatario arriva:

$$\text{pacchetto} = 0110111$$

quindi con il bit in $i = 5$ errato. Si rifanno i conti e si ottiene, calcolando la sindrome:

$$s_1 = 1$$

verificata vedendo i bit dispari.

$$s_2 = 0$$

verificata vedendo a coppie alternate ma saltando il primo bit (che sarebbe la coppia di 0 se avessi 000 in cima alla tabella, torna quindi comodo partire dal fondo della tabella per fare questi ragionamenti).

$$s_3 = 1$$

verificata vedendo gli ultimi 4 bit.

Avendo sindrome $s = s_3s_2s_1 = 101$ che indica proprio la posizione 5.

Vediamo invece se arriva:

$$\text{pacchetto} = 0010011$$

quindi con il bit in $i = 2$ errato (e sarebbe una check digit). Si ha che:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 0$$

Avendo sindrome $s = s_3s_2s_1 = 010$ che indica proprio la posizione 2.

Supponiamo ora che arrivi senza errori:

$$\text{pacchetto} = 0110011$$

Si ha:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$s_3 = 0$$

I pacchetti di 7 bit che producono sindrome nulla sono quindi $2^4 = 16$, avendo che posso fare 2^4 modi diversi di avere i 4 bit di messaggio ma ciascuno ha una sola tripla, 000, di check digit che mi dice che il pacchetto è valido. Generalizzeremo poi questa cosa, ovvero che si hanno:

- n bit di pacchetto
- $\log_2 n$ check digit
- $n - \log_2 n$ cifre di messaggio
- $2^{n - \log_2 n}$ combinazioni possibili delle cifre di messaggio per avere un pacchetto senza errori

Avere due errori rende impossibile capire dove siano, rendendo impossibile la correzione.

Esempio 6. Riprendendo l'esempio sopra si ipotizzi arrivi:

$$\text{pacchetto} = 0010111$$

con errori in 2 e 5.

Si ha per la sindrome:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 1$$

Si avrebbe posizione in 111 ovvero 7 (e non è un caso sia $5+2$ ma la cosa non ci aiuterebbe a capire dove sia l'errore), a riprova che non si riesce ad identificare due errori. Non solo, si identifica un posto corretto come errato e lo corregge, introducendo un ulteriore errore.

La probabilità di avere due errori è comunque a $\frac{1}{2^{4096}}$ e quindi è 0, “è la stessa probabilità che un tornado assembli i pezzi sparsi di un aereo al punto di farlo funzionare”.

I codici di Hamming con $=$ e non \geq sono quelli tali per cui:

$$n = 2^m - 1$$

Sul file di esercizi nella pagina del corso esempio con $m = 4$ a pagina 12, potrebbe esserci un errore di conto sulla ridondanza. Guardare anche per spunti teorici.

Studiamo anche la ridondanza. Ricordando $2^m \geq n + 1$ e nei codici “migliori” $2^m = n + 1$ possiamo dire $2^m \simeq n$ e quindi $m \simeq \log_2 n$ (e con questo m posso riscrivere $k = n - \log_2 n$). Ne segue che:

$$R = 1 + \frac{\text{check}}{\text{msg}} = 1 + \frac{m}{k} = 1 + \frac{\log_2 n}{n - \log_2 n} \simeq 1 + \frac{\log_2 n}{n}$$

(facendo un'approssimazione molto “spinta”).

Sul file di esercizi nella pagina del corso esempio con $m = 2$ a pagina 13, occhio che non è $\frac{2}{3}$ ma $\frac{2}{1}$ nella ridondanza. Guardare anche per spunti teorici (manca la parte di esercizio in se calcolando la sindrome).

Vediamo quindi l'interpretazione geometrica del codice di Hamming, ricordando che n bit entrano nel canale ed escono n bit $\in \{0, 1\}^n$. Il messaggio M è quindi $M \subseteq \{0, 1\}$. Cerchiamo di capire come assegnare che un messaggio sia valido o meno.

Posso vedere $\{0, 1\}^n$ come uno **spazio vettoriale** dove i vettori sono $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\forall x_i \in \{0, 1\}$ ovvero $x_i \in \mathbb{Z}_2$. Due vettori in questo spazio, per definizione di spazio vettoriale, possono essere sommati. Preso anche $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\forall y_i \in \{0, 1\}$ la somma altro non è che lo *xor* componente per componente $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots)$.

Preso uno scalare $a \in \mathbb{Z}_2$ ho che $a\vec{x} = (ax_1, ax_2, \dots)$ con il prodotto scalare che è praticamente l'*and*. Si ha che:

$$a\vec{x} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } a = 0 \\ \vec{x} & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

Vediamo i messaggi come **vertici di un n-cubo** ma non tutti i messaggi sono validi. Ci serve un modo per capire quali sono validi per rendere difficile che un errore mi porti da un messaggio valido ad un altro.

Definizione 8. Definiamo **distanza di Hamming** come il numero di posizioni in cui due vettori \vec{x}, \vec{y} differiscono, cioè per cui $x_i \neq y_i$. Questa è una vera e propria distanza in $\{0, 1\}^n$. Tale distanza si indica con:

$$d(\vec{x}, \vec{y})$$

con:

$$d : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Si hanno tre proprietà:

- $d(\vec{x}, \vec{y})$ sse $\vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
- $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$, **diseguaglianza triangolare**

e quindi la **distanza di Hamming** è una **metrica** per lo spazio $\{0, 1\}^n$.
Spesso $d(\vec{x}, \vec{y})$ si indica con $d_h(\vec{x}, \vec{y})$.

Definizione 9. Definiamo **peso di Hamming** come il numero di bit uguali a 1 e lo si indica con:

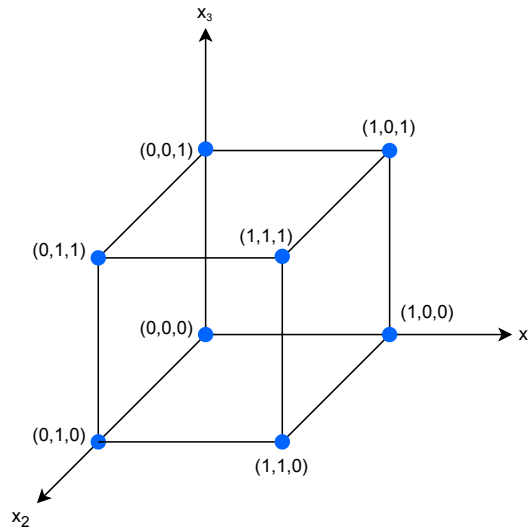
$$w_j(\vec{x})$$

Avendo che:

$$w_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i = d_h(\vec{x}, \vec{0})$$

Esempio 7. Prendiamo $n = 3$.

Disegniamo supponiamo di avere qualcosa del tipo:



Prendo i vertici (x_1, x_2, x_3) :

- $(0, 0, 0)$
- $(1, 0, 0)$
- $(0, 1, 0)$
- $(0, 0, 1)$

- (1, 1, 0)
- (0, 1, 1)
- (1, 0, 1)
- (1, 1, 1)

Questi sono i nostri messaggi.

Oltre $n = 3$ farei lo stesso ma non saprei disegnarlo, avrei n lati che partono dall'origine appoggiati agli n assi.

Suppongo di spedire 010 e che si abbia un errore che porti a 110 e sul cubo si nota che ci ha fatto spostare lungo un lato.

Suppongo che da 010 si arrivi a 100, con due errori, si nota che ho due lati visitati sul cubo.

Scegliamo quindi come messaggi validi punti che sono abbastanza distanti tra loro. Sicuramente quelli che si ottengono con un solo cambiamento non sono validi, parto quindi dal messaggio valido e impongo che tutti quelli che sono a **distanza 1** (parlando di **distanza di Hamming**) sul cubo, ovvero tutti quelli che raggiungo con un solo lato, non siano validi.

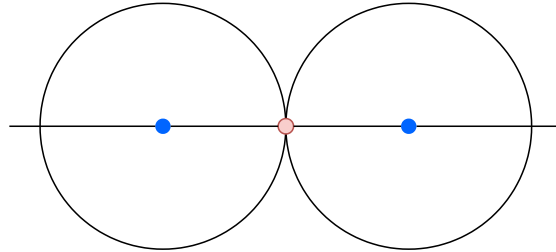
Essendo in $\{0, 1\}^n$ in realtà esistono solo i vertici del cubo, i lati servono solo per capire meglio.

Generalizziamo meglio.

Se ho la distanza di Hamming e varie caratteristiche del codice ho che:

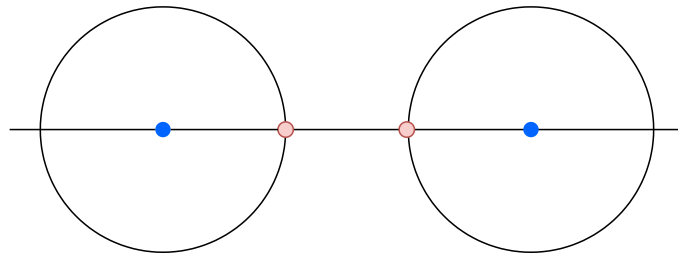
- se ho due codeword valide che hanno distanza 1 allora il codice ha capacità di **0 detection e 0 correction** in quanto potrei passare con un solo errore ad un messaggio valido
- se ho due codeword valide che hanno distanza 2 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 2) allora il codice ha capacità di **1 detection e 0 correction** in potrei avere più codeword valide a distanza di 1 da quella errata e quindi non saprei come fare correzione, non sapendo dove si trovi il bit errato. In ogni caso un errore viene sempre riconosciuto, anche se non può essere corretto. Se ho due errori potrei finire nuovamente in una codeword valida ma si sta assumendo che avendo scelto questo codice si sappia che la probabilità che avvengano due errori sia pressoché nulla. Il *controllo di parità semplice* è di questo tipologia.

Graficamente avrei una cosa del tipo, avendo in blu le codeword valide e in rosso quelle non valide:



Notando come non sarei in grado di capire a che codeword valida ricondurmi.

- se ho due codeword valide che hanno distanza 3 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 3) allora il codice ha capacità di **2 detection e 1 correction**, riuscendo a correggere un errore. Se avessi due errori riconoscerei come codeword valida una a distanza 1 da quella errata che però non è quella giusta, introducendo un nuovo errore. I *codici di Hamming* sono di questo tipo. Graficamente avrei una cosa del tipo, avendo in blu le codeword valide e in rosso quelle non valide:



Notando che con un solo errore sarei in grado di capire a che codeword ricondurmi

- se ho due codeword valide che hanno distanza 4 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 4) allora il codice ha capacità di **3 detection e 1 correction**, riuscendo a correggere un errore. Se avessi due errori riconoscerei avrei più codeword valide alla stessa distanza. Se avessi tre errori varrebbe quanto detto nel caso di distanza 2

- se ho due codeword valide che hanno distanza 5 (e non esistono due codeword valide con distanza minore di 5) allora il codice ha capacità di **4 detection e 2 correction**, per gli stessi discorsi fatti avendo distanza 3

Si nota quindi che al crescere della distanza di Hamming minima tra due codeword cresce la capacità di detection e correction.

Possiamo ipotizzare che la codeword valida venga avvolta da una sfera di raggio pari a r avendo che r sia tale per cui le sfere di due codeword valide non si sovrappongano. Possiamo notare che in base alle osservazioni fatte sopra r è il valore della capacità di detection.

Una sfera centrata nel punto \vec{x} di raggio r è l'insieme dei punti $\vec{y} \in \{0, 1\}^n$ tale che la distanza da \vec{x} è minore di r , ovvero:

$$S(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \{0, 1\}^n \mid d_h(\vec{x}, \vec{y}) \leq r\}$$

Si noti che in $\{0, 1\}^n$ somma e sottrazione bit a bit portano allo stesso risultato.

Possiamo dire che:

$$output = input + errore$$

dove *errore* è un vettore rappresentante l'errore (avendo 1 dove ho l'errore). Quindi:

$$errore = output - input$$

Esempio 8. Tornando all'esempio sopra ipotizzo entri 011 ed esca 111, avendo quindi $d_h = 1$.

Sommo i due vettori:

$$011 \oplus 111 = 100$$

Avendo che 100 è l'errore.

Esempio 9. Si vuole costruire un codice che consenta di correggere un errore, per poi confrontarlo con il codice di Hamming.

Ci servono quindi codeword valide ad almeno distanza 3, prendendo messaggi validi e circondarli di sfere di raggio 1 tali che non si abbiano sovrapposizioni con altre sfere.

Si ha $\{0, 1\}^n$ come spazio vettoriale dove si hanno 2^n elementi/vettori.

In generale se prendo il volume dello spazio e lo divido per il volume di una sfera ho il numero di sfere che posso metterci:

$$\frac{V_{spazio}}{V_{sfera}} \geq \text{numero massimo di sfere}$$

Pongo k uguale al numero di bit dei messaggi validi (non pari a n ma prendo quindi una porzione di messaggio rappresentante il messaggio valido, ai quali poi aggiungerei le m check digit).

Rivedo quindi la formula, sapendo che il volume dello spazio è il numero di vettori di quello spazio, che le sfere abbiano raggio 1, avendo che hanno volume $n + 1$ (il vettore rappresentante originale più un vettore per ogni possibile vettore ottenuto da quello originale con un solo errore, avendo quindi $\binom{n}{1}$ più il messaggio valido, ovvero $n + 1$):

$$\frac{2^n}{n + 1} \geq 2^k$$

sapendo che $n = k + m$ si ha che:

$$\frac{2^{k+m}}{n + 1} \geq 2^k$$

$$\frac{2^k 2^m}{n + 1} \geq 2^k$$

$$2^m \geq n + 1$$

Arrivando allo stesso risultato di Hamming.

Se volessi sfere di raggio maggiore di 1, prendendo per esempio con codeword distanti almeno 5 e raggio pari a 2. Avendo raggio pari a 2 avrei il centro della sfera, tutti i punti distanti 1, ovvero potendo cambiare due bit n , e tutti i punti distanti due (avendo due cambiamenti di bit), ovvero:

$$V_{sfera} = 1 + n + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{2^n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

sapendo che $n = k + m$ si ha che:

$$\frac{2^{k+m}}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

$$\frac{2^k 2^m}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2}} \geq 2^k$$

$$2^m \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

Avendo una generica sfera di raggio r avrei:

$$V_{sfera} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{r} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Nella realtà, con messaggi molto grandi, si usano i cosiddetti **low density parity codes**, che consiste, per proteggere il pacchetto di n bit, nel trovare il minor numero di equazioni di parità atte a proteggere il messaggio (meno equazioni implica meno circuiti e quindi meno costo). Si procede per euristiche per capire quante e quali.

3.3 Codifica di Sorgente

Finora si è parlato di **codifica di canale**, passiamo quindi ad approfondire la **codifica di sorgente**, cercando anche in questo caso il codice ottimale (con la lunghezza media minima).

Avendo magari una distribuzione non uniforme per la distribuzione dei caratteri non ha senso usare una **codice a blocchi** ma si usa un **codice a lunghezza variabile** (riguardare quanto detto nella prima sezione di questi appunti).

Ci si propone quindi di minimizzare, parlando di codici a lunghezza variabile:

$$L = \sum_{i=1}^1 p_i l_i$$

Bisogna prima fare un discorso sull'univocità dei codici.

Esempio 10. si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 4 simboli s_i :

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 11$
- $s_4 \rightarrow 00$

Suppongo che il ricevente riceva 0011. Cerco di capire che sequenza ha ricevuto. Deve calcolare una:

$$cod^{-1} : \Gamma^* \rightarrow S$$

Ma ci sono delle ambiguità. Potrebbe essere;

- $s_4 s_3$
- $s_1 s_1 s_3$

*Non è quindi in grado di trovare una sequenza di simboli univoca.
Ne segue che il codice **non è univocamente decodificabile**.*

Si richiede quindi che la funzione *cod*, quindi il nostro codice, **deve essere univocamente decodificabile**.

Un algoritmo che riconosce che un codice è univocamente decodificabile non è banale.

Esempio 11. *Si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 4 simboli s_i :*

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 011$
- $s_4 \rightarrow 111$

*Si dimostra che questo codice è **univocamente decodificabile**, esistendo un'unica possibile divisione in codeword di ogni stringa che riceve il ricevente. Suppongo che il ricevente riceva:*

0111111111

Ma anche solo all'inizio potrei avere sia s_1 che s_2 che s_3 ma una volta che è finito posso partire dal fondo raggruppando gli 1 tre a tre e mi accorgo che ho un solo modo:

0 111 111 111

$s_1 s_4 s_4 s_4$

Bisogna quindi aspettare la fine della trasmissione.

Lato elettronico per fare questa operazione uso un **contatore elettronico**.

D'altro canto aspettare la fine non è “comodo” e si vorrebbe analizzare i simboli man mano che arrivano.

Si definiscono quindi due categorie di codici a lunghezza variabile:

- **non univocamente decodificabili**
- **univocamente decodificabili**

e suddividiamo gli univocamente decodificabili in:

- **istantaneo**, dove appena arriva una codeword il ricevente sa che è arrivata completamente e che è unica
- **non istantaneo**

Esempio 12. *Trasformiamo l'ultimo esempio in un codice istantaneo. Si hanno:*

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 011$
- $s_4 \rightarrow 111$

ma non andrebbero bene (per il problema dell'inizio del messaggio). D'altro canto:

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 10$
- $s_3 \rightarrow 110$
- $s_4 \rightarrow 111$

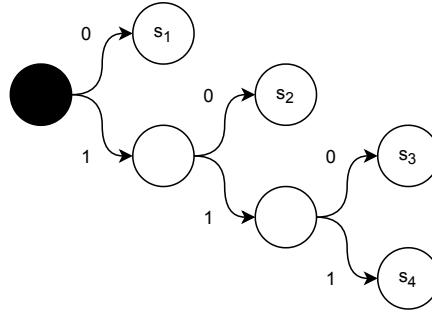
ottenuto con la reverse delle stringhe, è un codice istantaneo con codeword di lunghezza pari a quelle precedenti.

Posso facilmente vedere che qualsiasi cosa arrivi posso capire che codeword è, appena l'intera codeword viene letta. Non devo aspettare l'intero messaggio ma al più due simboli.

Nell'esempio abbiamo usato gli 0 come *end of codeword*, infatti questo codice è detto **comma code**, avendo che il decodificatore vede che le codeword, tranne l'ultima, terminano per 0. Quindi o arriva uno zero terminando la codeword o arrivano 3 uni che terminano il messaggio.

Potrei inoltre vedere la decodifica come un albero di decodifica, in quanto ogni volta che arriva un simbolo posso escludere certe codeword.

Vediamo l'esempio relativo all'esempio precedente:



Avendo che ogni cammino dalla radice ad una foglia è una codeword con la foglia etichettata con il simbolo relativo alla codeword. Si ha quindi un sottoalbero per ogni simbolo di Γ (quindi dalla radice escono $|\Gamma|$ archi) e da ogni nodo interno esce un numero di archi minore o uguale al numero di simboli. Il ricevente sfrutta l'albero di decodifica.

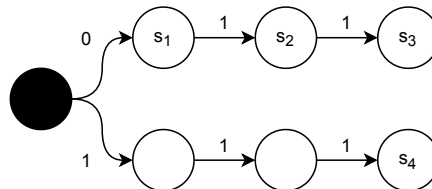
Posso anche usare l'albero per costruire il codice istantaneo.

Inoltre dato che un codice istantaneo è associato ad un albero di codifica non succede mai che una codeword sia prefissa di un'altra (e lo si vede non prendo avere due foglie associate a due codeword una prefissa dell'altra).

Esempio 13. Vediamo l'albero di decodifica di un codice non istantaneo. Si hanno:

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 011$
- $s_4 \rightarrow 111$

Si ha:



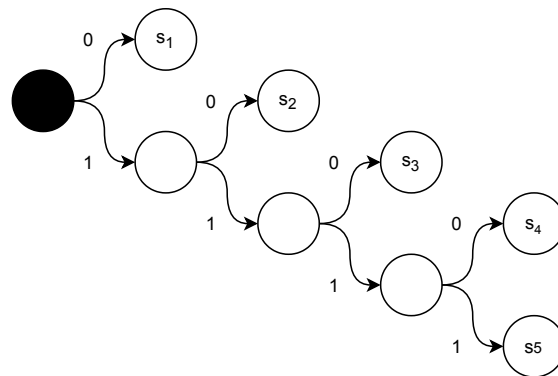
Avendo foglie che sono prefisse di altre.

Se devo costruire un codice istantaneo posso quindi usare un **comma code** o costruire un albero di decodifica che sia il più possibile simile ad un albero completo.

Esempio 14. Si supponga di avere le seguenti codeword binarie per 5 simboli s_i :

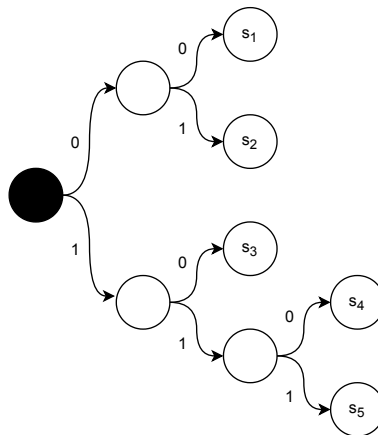
- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 10$
- $s_3 \rightarrow 110$
- $s_4 \rightarrow 1110$
- $s_5 \rightarrow 11110$

Si ha quindi:



(e si nota come si possa generalizzare l'albero per un comma code).

Esempio 15. Avendo l'albero:



Riconosco il codice:

- $s_1 \rightarrow 00$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 10$
- $s_4 \rightarrow 110$
- $s_5 \rightarrow 111$

Esempio 16. *Avendo il codice 1:*

- $s_1 \rightarrow 0$
- $s_2 \rightarrow 10$
- $s_3 \rightarrow 110$
- $s_4 \rightarrow 1110$
- $s_5 \rightarrow 11110$

e il codice 2:

- $s_1 \rightarrow 00$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 10$
- $s_4 \rightarrow 110$
- $s_5 \rightarrow 111$

assegno ad entrambi le probabilità:

- $p_1 \rightarrow 0.9$
- $p_2 \rightarrow 0.025$
- $p_3 \rightarrow 0.025$
- $p_4 \rightarrow 0.025$
- $p_5 \rightarrow 0.025$

Ho che, per il primo codice:

$$L_1 = 0.9 \cdot 1 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 3 + 0.025 \cdot 4 + 0.025 \cdot 4 = 1.225$$

Avendo che mediamente per rappresentare un simbolo della sorgente mi servono 1.225 bit.

Passo al secondo codice:

$$L_2 = 0.9 \cdot 2 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 2 + 0.025 \cdot 3 + 0.025 \cdot 3 = 2.05$$

Avendo che mediamente per rappresentare un simbolo della sorgente mi servono 2.05 bit.

Ne segue, avendo $L_1 < L_2$, per questa sorgente con queste probabilità è meglio il primo codice, il comma code.

Se avessi avuto probabilità uniforme ($p_i = 0.2$) avrei avuto:

$$L_1 = 2.8$$

$$L_2 = 2.4$$

Essendo meglio il secondo codice.

Definizione 10. Si definisce **codice r-ario** un codice con r simboli con cui si ottengono le codeword.

Un codice che parte da $\Gamma = \{0, 1\}$ è un codice binario.

Ad un certo punto Kraft scopre un teorema che contiene una disuguaglianza che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un codice istantaneo con certe lunghezze l_1, l_2, \dots, l_n date.

Teorema 1 (disuguaglianza di Kraft). Si ha che **esiste un codice istantaneo r-ario** per una sorgente S di q simboli, con codeword di lunghezza l_1, l_2, \dots, l_q , sse:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

In onore di Kraft si ha che:

$$K = \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \text{ e quindi } K \leq 1$$

Non si sta vedendo come sono fatte le codeword ma solo se può esistere un certo codice istantaneo. Sapendo che esiste poi bisogna costruire le codeword ma il teorema non dice nulla in merito. La condizione necessaria e sufficiente è quindi una caratterizzazione dell'esistenza del codice istantaneo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare i due versi del sse:

1. per ogni codice istantaneo r -ario di q simboli con lunghezze l_1, l_2, \dots, l_q si ha che $K \leq 1$
2. se $K \leq 1$ allora esiste un codice istantaneo con lunghezze l_1, l_2, \dots, l_q

Dimostriamo la **prima parte**.

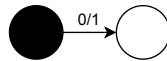
Prendo il codice e lo rappresento sull'albero di decodifica (dove ogni nodo ha al più r archi uscenti). Ricorsivamente un albero o è vuoto o è un nodo che punta ad altri nodi.

Parto con $r = 2$, avendo codeword binarie su $\{0, 1\}$ e di conseguenza alberi binari di decodifica. Procedo quindi con una dimostrazione per induzione sulla profondità dell'albero:

- **base:** profondità pari a 1. Si hanno due casi:

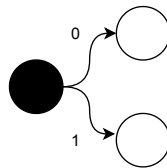
1. la radice o punta ad una foglia. In questo caso:

$$K = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \leq 1$$



2. punta a due foglie (una per ogni simbolo). In questo caso:

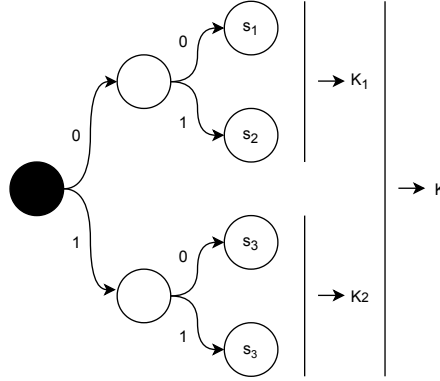
$$K = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} = 1 \leq 1$$



- **passo induttivi:** assunto che il teorema è vero per ogni albero di profondità $n - 1$ dimostriamo che il teorema vale anche per gli alberi di profondità n . In realtà così non ci va bene in quanto i sottoalberi dovrebbero avere entrambi profondità $n - 1$ (cosa non vera come visto negli esempi precedenti, ad esempio “l'albero a pettine” del comma code). Cambiamo quindi dicendo che assunto

che il teorema è vero per ogni albero di profondità $< n$ dimostriamo che il teorema vale anche per gli alberi di profondità n .

Considero i due sottoalberi come alberi a se stanti:



Dico che $K_1 \leq 1$ per il primo sottoalbero e $K_2 \leq 1$ per il secondo sottoalbero.

Calcolo ora K di tutto l'albero ma devo capire come si rapporta a K_1 e K_2 . Si ha che se attacco il primo sottoalbero alla nuova radice per costruire l'albero globale ho che attacco ad ogni codeword un simbolo, che quindi si allungano di 1:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i+1}} \leq 1$$

ma altro non è che:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

ma allora:

$$\frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1 = \frac{1}{r} \cdot K_1$$

Faccio lo stesso per K_2 e quindi, avendo $r = 2$:

$$K = \frac{1}{2} \cdot K_1 + \frac{1}{2} \cdot K_2$$

ma sto sommando due quantità $\leq \frac{1}{2}$ (avendo $K_1 \leq 1$ e $K_2 \leq 1$) e quindi:

$$K \leq 1$$

Qualora si avesse $r > 2$ si ha:

- **base**, si hanno alberi r -ari, con $\Gamma = \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$, di probabilità 1. Tutti questi alberi hanno s foglie e $s-r$ non foglie. Quindi, essendo tutti gli l_i uguali a 1 essendo a profondità uno:

$$K = \sum \frac{1}{r^{l_1}} = \sum \frac{1}{r} = \frac{s}{r} \leq 1$$

$\frac{s}{r} \leq 1$ in quanto $s < r$

- **passo induttivo** si ha un albero r -ario a profondità n con un certo numero di sottoalberi s e un certo numero di sottoalberi vuoti, di cardinalità $s-r$, a profondità $n-1$. Per tutti i K_1, K_2, \dots, K_s ho che $K_i \leq 1$ e quindi ottengo K aggiungendo un simbolo alle codeword dei sottoalberi non vuoto (quelli vuoti contribuiscono con 0 alla sommatoria):

$$K = \frac{1}{r}K_1 + \frac{1}{r}K_2 + \dots + \frac{1}{r}K_s$$

Ma per lo stesso ragionamento del caso binario, essendo ogni $K_1 < 1$ e quindi ogni componente della sommatoria è $\leq \frac{1}{r}$:

$$K = \frac{1}{r}K_1 + \frac{1}{r}K_2 + \dots + \frac{1}{r}K_s \leq \frac{s}{r} \leq 1$$

Vediamo la **seconda parte** della dimostrazione.

Se $K \leq 1$ dobbiamo dimostrare che esiste un codice istantaneo con lunghezze L_1, \dots, L_q .

Sappiamo che:

$$K = \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Vediamo un esempio per capire come vedere diversamente la disuguaglianza:

Esempio 17. se avessi $r = 2$, con quindi codeword binarie, e lunghezze $2, 2, 3, 3, 4$ (con quindi $q = 5$). Si ha che:

$$K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Ma quindi:

$$K = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Avendo ora $2, 2, 1$ come numeratori.

Indico con t_j il numero di codeword di lunghezza j . Si hanno quindi, per l'esempio precedente:

- $t_1 = 0$
- $t_2 = 2$
- $t_3 = 2$
- $t_4 = 1$

Riscrivo quindi K :

$$K = \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} = \sum_{j=1}^l \frac{t_j}{r^j}$$

con $l = \max\{l_1, \dots, l_q\}$ (per l'esempio sopra $l = 4$).

Si ha quindi che:

$$\sum_{j=1}^l \frac{t_j}{r^j} \leq 1$$

Ma posso dire che, per arrivare ad isolare i t_j senza alterare la disuguaglianza:

$$r^l \cdot \sum_{j=1}^l \frac{t_j}{r^j} \leq 1 \cdot r^l$$

ma quindi ho che:

$$r^l \cdot \sum_{j=1}^l t_j \cdot r^{l-j} \leq 1 \cdot r^l$$

Si ha che:

$$\sum_{j=1}^l t_j \cdot r^{l-j} = t_1 \cdot r^{l-1} + \dots + t_{l-1} \cdot r + t_l \leq r^l$$

Ma quindi:

$$t_l \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \dots - t_{l-1} \cdot r$$

ma so anche che:

$$0 \leq t_l$$

e quindi:

$$0 \leq t_l \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \dots - t_{l-1} \cdot r$$

e quindi:

$$0 \leq r^l - t_1 \cdot r^{l-1} - \dots - t_{l-1} \cdot r$$

porto quindi t_{l-1} a sinistra e divido per r , ottenendo:

$$t_{l-1} \leq r^{l-1} - t_1 \cdot r^{l-1} - \dots - t_{l-2} \cdot r$$

lo faccio per tutti i t_j partendo da t_{l-2} e arrivando a:

$$t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$$

sapendo per di più che:

$$0 \leq t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$$

e poi a:

$$0 \leq t_1 \leq r$$

Risalgo quindi partendo dalle codeword più corte. Cerco t_1 codeword di lunghezza 1, avendo a disposizione l'alfabeto Γ r -ario. Per farlo prendo i primi t_1 simboli e dico che sono le stringhe di lunghezza 1. Posso farlo perché $t_1 \leq r$ e mi avanzano $r - t_1$ simboli dell'alfabeto.

Passo alle codeword di lunghezza 2, me ne servono t_2 . Queste codeword sono due simboli concatenati in modo che il primo simbolo non si stato utilizzato per t_1 (altrimenti creerei prefissi), quindi prendo un simbolo dai $r - t_1$ simboli dell'alfabeto. Il secondo simbolo posso mettere un qualsiasi simbolo di Γ , avendo r possibili scelte. In totale ho quindi un numero di combinazioni pari a:

$$(r - t_1) \cdot r = r^2 - t_1 \cdot r$$

e ho abbastanza combinazioni avendo che $t_2 \leq r^2 - t_1 \cdot r$ per i conti precedenti. Le codeword le scelgo come voglio, ci sono tantissimi modi possibili.

Mi avanzano quindi $r^2 - t_1 \cdot r - t_2$.

Creo le codeword di lunghezza 3 dove i primi due simboli non devono essere una combinazione usata per quelle di lunghezza 2, facendo poi gli stessi discorsi fatti sopra.

Avanzo così per tutte le lunghezze di codeword avendo che posso costruire almeno un codice istantaneo, dimostrando la validità del teorema. \square

Esempio 18. *Riprendiamo l'esempio di sopra.*

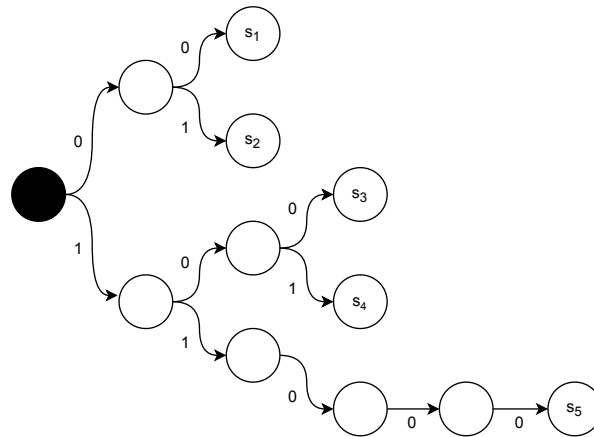
Si ha che:

$$K = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

Ma quindi:

$$K = \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \leq 1$$

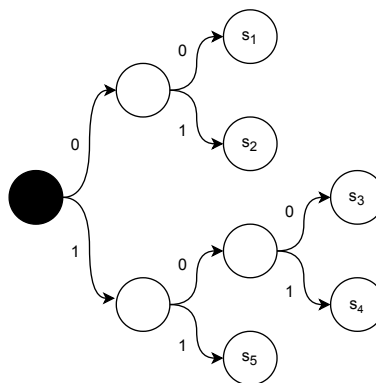
Se volessi le codeword costruisco l'albero di decodifica:



Avendo:

- $s_1 \rightarrow 00$
- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 100$
- $s_4 \rightarrow 101$
- $s_5 \rightarrow 1100$

Ma vedo che ho nodi interni inutili (tipo i due nodi che portano a s_5). Butto via quindi i nodi con un solo ramo in uscita:



ottenendo:

- $s_1 \rightarrow 00$

- $s_2 \rightarrow 01$
- $s_3 \rightarrow 100$
- $s_4 \rightarrow 101$
- $s_5 \rightarrow 11$

e quindi:

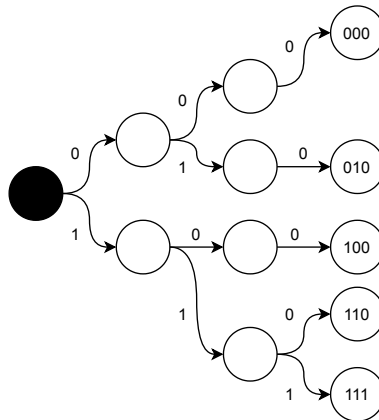
$$K = \frac{3}{2^2} + \frac{2}{2^3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \leq 1$$

Quindi un nodo interno che solo un figlio mi fa allungare le lunghezze delle codeword facendo sommare valori più piccoli. Se ho solo nodi interni con due figli si può dimostrare per induzione che $K = 1$ (nel caso base ho $K = 1$ e in quello induttivo vedo che ho $K_i = 1$ per ogni sottoalbero, avendo poi che $K = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$). Per tutti i codici istantanei vale che $K \leq 1$.

3.3.1 Codici a Blocchi Accorciati

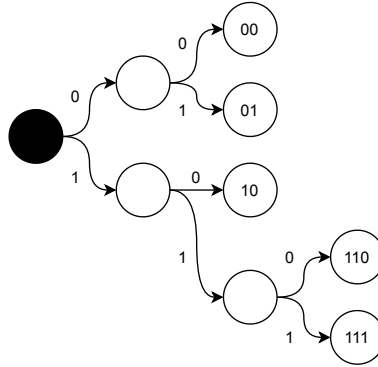
Si vuole costruire un codice binario per un certo q .

Esempio 19. Ipotizzo $r = 2$ e $q = 5$. Potrei avere tutte le 8 codeword di 3 bit ma ne scelgo solo 5. Tengo 000, 010, 100, 110, 111, avendo rimosso 001, 011, 101. Queste 5 formano un codice a blocchi, istantaneo. Potrebbe non essere efficiente, non avendo $K = 1$. Se costruissi l'albero avrei:



Che ha $K \neq 1$.

Potrei rimuovere archi inutili, ottenendo:



Ottenendo:

- 00
- 01
- 10
- 110
- 111

Che non è più a blocchi ma è istantaneo con $K = 1$ (ogni nodo interno ha infatti esattamente due figli).

Si sta parlando appunto di **codici a blocchi accorciati**.
Su file esercizi esempio con codice non binario.

3.3.2 Disuguaglianza di McMillan

Teorema 2 (Disuguaglianza di McMillan). *Data una sorgente $S = \{s_1, \dots, s_q\}$ si ha che una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un codice r -ario univocamente decodificabile con codeword di lunghezze l_1, l_2, \dots, l_q è che valga:*

$$K = \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \leq 1$$

Quindi è uguale alla disuguaglianza di Kraft semplicemente sostituendo “codici istantanei” con “codice univocamente decodificabile”.

Dimostrazione. Anche in questo caso si hanno i due versi della dimostrazione.

La **prima parte** è dimostrare che dato un codice r -ario per S univocamente decodificabile allora $K \leq 1$ e per tale codice le lunghezze sono l_1, l_2, \dots, l_q . Il “dato” è in realtà un “per ogni”.

Non posso più ragionare sulla profondità dell'albero non avendo più corrispondenza biunivoca con alberi dove le codeword sono le foglie. In questo caso avrei nodi interni che sono codeword, non posso quindi usare la stessa tecnica di dimostrazione.

Per dimostrarlo prendo K e un numero $n \in \mathbb{N}$, tale che $n > 1$. Calcolo K^n , avendo:

$$K^n = \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l_i}} \right)^n$$

Ottenendo qualcosa di davvero difficile da studiare. Ma posso scrivere:

$$K^n = \sum_{t=n}^{n \cdot l} \frac{n_t}{r^t}$$

indicando con n_t il numero di termini con t (??? risentire) e con $l = \max\{l_1, \dots, l_q\}$. Si ha che n_t è anche il numero di codeword di lunghezza t . Ma dato che il codice è univocamente decodificabile si ha che:

$$n_t \leq r^t$$

ma allora:

$$\frac{n_t}{r^t} \leq 1$$

Ma allora si può dire, maggiorando, che:

$$K^n = \sum_{t=n}^{n \cdot l} \frac{n_t}{r^t} \leq \sum_{t=n}^{n \cdot l} 1 = n \cdot l - n + 1 = n \cdot l - (n - 1)$$

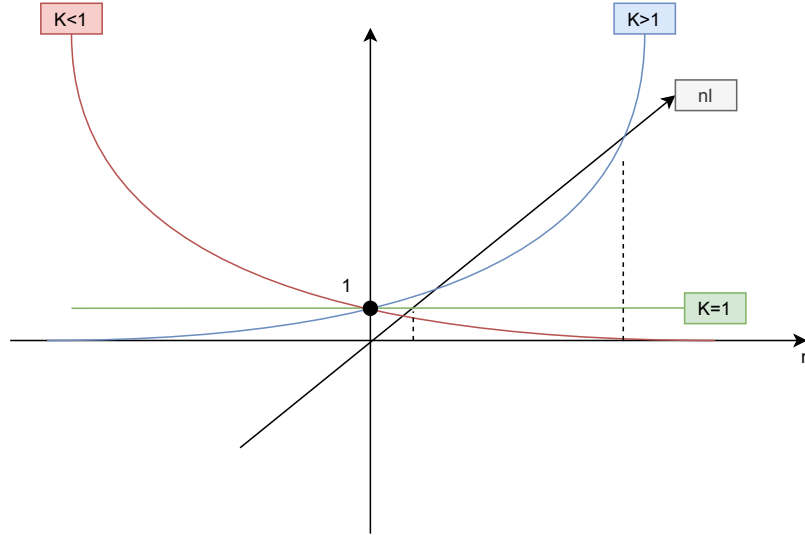
Ma $(n - 1) > 0$ e quindi:

$$= n \cdot l - (n - 1) < n \cdot l$$

E quindi:

$$K^n < n \cdot l$$

Questo si risolve graficamente (**grafico molto approssimato**):



Se $K > 1$ ad un certo punto la curva supera $n \cdot l$. Per $K < 1$ sicuramente ho punti per cui è $< n \cdot l$ e quindi si arriva a dire che:

$$K^n < n \cdot l \implies K \leq 1$$

dimostrando la tesi.

La **seconda parte** è che se $K \leq 1$ allora esiste un codice r -ario per S univocamente decodificabile con lunghezze l_1, l_2, \dots, l_q . Per Kraft, avendo $K \leq 1$ esiste un codice istantaneo per S , r -ario, con tali lunghezze. Ma **un codice istantaneo è univocamente decodificabile**, avendo quindi dimostrato la tesi. \square

Ma avendo che i codici univocamente decodificabili sono meno utili di quelli istantanei vengono trascurati, considerando che dovrei fare la “stessa fatica”.

Abbiamo visto comunque che non si hanno indicazioni in merito a come fare le codeword e abbiamo anche trascurato finora l’uso delle probabilità.

3.3.3 Codici di Huffman

I codici di Huffman sono ottimali, ovvero raggiungono il minimo valore possibile della lunghezza media L :

$$L = \sum_{i=1}^q p_i \cdot l_i$$

Teorema 3. *In input abbiamo quindi il codice S , con s_1, \dots, s_q , con probabilità p_1, \dots, p_q . Il codice di Huffman ci restituisce in output sia le lunghezze l_i che le codeword γ_i .*

Bisogna prima fare qualche ragionamento.

Si supponga di avere i simboli in ordine di probabilità, avendo:

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_q$$

ma quindi si ha che:

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_q$$

perché altrimenti non avrei il codice ottimale.

Dimostrazione. Si supponga infatti di avere $p_m > p_n$ e $l_m > l_n$. Studio quindi il contributo dei due simboli:

$$p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n$$

Scambio in modo che p_m riceva la codeword l_n :

$$p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m$$

Faccio la differenza:

$$\begin{aligned} & (p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m) - (p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n) \\ &= p_m \cdot (l_n - l_m) - p_n \cdot (l_n - l_m) \\ &= (p_m - p_n) \cdot (l_n - l_m) \end{aligned}$$

Ma abbiamo che $p_m > p_n$ e quindi $(p_m - p_n) > 0$ e per lo stesso ragionamento, avendo $l_m > l_n$, $(l_n - l_m) < 0$. Si ha quindi che:

$$(p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m) - (p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n) < 0$$

e quindi:

$$p_m \cdot l_n + p_n \cdot l_m < p_m \cdot l_m + p_n \cdot l_n$$

perdendo quindi l'ottimalità del codice. □

Deve quindi valere:

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_q$$

e

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_q$$

Si ha quindi un algoritmo greedy per ottimizzare la lunghezza media. Non sappiamo se si ha un matroide ma si vedrà che tale algoritmo porta all'ottimo. Vediamo in primis un esempio.

Esempio 20. Vediamo un esempio di questo algoritmo:

Presa una sorgente con 5 simboli con le annesse probabilità (sono già ordinati):

- s_1 con $p_1 = 0.4$
- s_2 con $p_2 = 0.2$
- s_3 con $p_3 = 0.2$
- s_4 con $p_4 = 0.1$
- s_5 con $p_5 = 0.1$

Si assuma $r = 2$.

Prendo i due simboli meno probabili e li unisco creando un nuovo simbolo “fittizio” con probabilità pari alla somma dei due (nel nostro caso quindi $0.1 + 0.1 = 0.2$). Si ha quindi, mantenendo sempre l'ordine (metto il simbolo combinato in coda a parità di probabilità):

- s_1 con $p_1 = 0.4$
- s_2 con $p_2 = 0.2$
- s_3 con $p_3 = 0.2$
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$

Avendo ora una nuova sorgente di 4 simboli (quindi ipoteticamente più semplice da codificare di quella da 5).

Itero facendo la stessa cosa:

- s_1 con $p_1 = 0.4$
- $s_{3,4,5}$ con $p_{3,4,5} = 0.4$
- s_2 con $p_2 = 0.2$

Avendo ora 3 simboli. Proseguo:

- $s_{2,3,4,5}$ con $p_{2,3,4,5} = 0.6$
- s_1 con $p_1 = 0.4$

Che è facile da codificare, associando 0 e 1 (l'ordine è opzionale):

- $s_{2,3,4,5}$ con $p_{2,3,4,5} = 0.6$: 0

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 1

Costruisco quindi la sorgente a 3 (usando 0 come prefisso di tutti i nuovi):

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 1
- $s_{3,4,5}$ con $p_{3,4,5} = 0.4$: 00
- s_2 con $p_2 = 0.2$: 01 (infatti 10 non andrebbe bene avendo 1 come prefisso)

proseguo (usando 00 come prefisso di tutti i nuovi):

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 1
- s_2 con $p_2 = 0.2$: 01
- s_3 con $p_3 = 0.2$: 000
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$: 001

termino con lo stesso ragionamento (avendo ora 001 come prefisso):

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 1
- s_2 con $p_2 = 0.2$: 01
- s_3 con $p_3 = 0.2$: 000
- s_4 con $p_4 = 0.1$: 0010
- s_5 con $p_5 = 0.1$: 0011

Che ha:

$$L = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.1 \cdot 4 = 2.2 \frac{\text{bit}}{\text{simbolo}}$$

Se invece metto i nuovi simboli più in alto possibile avrei:

- s_1 con $p_1 = 0.4$
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$
- s_2 con $p_2 = 0.2$
- s_3 con $p_3 = 0.2$

e quindi:

- $s_{2,3}$ con $p_{2,3} = 0.4$
- s_1 con $p_1 = 0.4$
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$

e quindi:

- $s_{1,4,5}$ con $p_{1,4,5} = 0.6$
- $s_{2,3}$ con $p_{2,3} = 0.4$

Procedendo come nel caso precedente sopra si avrebbe (**verificare i passaggi**):

- $s_{1,4,5}$ con $p_{1,4,5} = 0.6$: 0
- $s_{2,3}$ con $p_{2,3} = 0.4$: 1

e quindi:

- $s_{2,3}$ con $p_{2,3} = 0.4$: 1
- s_1 con $p_1 = 0.4$: 00
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$: 01

e quindi:

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 1
- $s_{4,5}$ con $p_{4,5} = 0.2$: 01
- s_2 con $p_2 = 0.2$: 000
- s_3 con $p_3 = 0.2$: 001

e infine:

- s_1 con $p_1 = 0.4$: 00
- s_2 con $p_2 = 0.2$: 10
- s_3 con $p_3 = 0.2$: 11
- s_4 con $p_4 = 0.1$: 010
- s_5 con $p_5 = 0.1$: 011

Che ha:

$$L = 0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.1 \cdot 3 = 2.2 \frac{\text{bit}}{\text{simbolo}}$$

che è uguale a prima.

Questo algoritmo greedy funziona, producendo l'ottimo, quando sottostante al problema si ha un matroide.

Teorema 4. Si può dimostrare che non cambia nulla, in termini di lunghezza media, mettendo il nuovo simbolo il più in alto/basso possibile, a parità di probabilità.

Si può anche dimostrare che se metto il simbolo combinato in basso aumenta la varianza tra le codeword (avendo codeword di lunghezza più “distante”) mentre mettendoli più in alto possibile si diminuisce la varianza. SI ricorda che la varianza è:

$$V = \sum_{i=1}^q p_i \cdot (l_i - L)^2$$

Esempi sul file di esercizi.

Solitamente comunque si preferisce abbassare la varianza tenendo quindi il nuovo simbolo più in alto possibile.

Teorema 5. Il codice di Huffman è ottimo, avendo la minor lunghezza media. In altri termini produce codici istantanei ottimali.

Dimostrazione. Si procede per assurdo.

Si ricorda che le lunghezze vengono conosciute solo a fine algoritmo di calcolo. Supponiamo, data una sorgente S con q simboli s_1, \dots, s_q , con p_1, \dots, p_q , che l_1, \dots, l_q siano le lunghezze di Huffman, avendo quindi in corrispondenza L_H , lunghezza di Huffman, come:

$$L_H = \sum_{i=1}^q p_i \cdot l_i$$

Se non fosse ottimo avremmo un altro codice con una migliore lunghezza media L' , tale che $L' < L_H$. Entrambi sono codici istantanei con associati i due alberi di decodifica. Prendo quindi i due simboli meno probabili (che sono anche i più lunghi) per il codice di Huffman: s_q e s_{q-1} . Si potrebbe dimostrare che la lunghezza delle due codeword più lunghe è uguale. Questi due simboli sono presi, a parità di probabilità, in modo che condividano il nodo genitore nell'albero. Si ha che $l_q = l_{q-1}$, condividendo il genitore e non avendo nodi “sprecati” nell'albero di decodifica.

Collasso questi due nodi e il genitore in un solo simbolo fittizio che tiene conto di entrambi i simboli. In pratica faccio uno dei “passi in avanti” dell’algoritmo sopra specificato per il calcolo dei codici di Huffman. La lunghezza decresce di una certa quantità x . Si ha in partenza che $p_{q-1} \cdot l_{q-1} + p_q \cdot l_q = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q)$. Il nuovo simbolo avrà:

$$(l_q - 1) \cdot (p_{q-1} + p_q) = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q) - (p_{q-1} + p_q)$$

ovvero la stessa quantità di prima meno $(p_{q-1} + p_q)$. Quindi dalla lunghezza media tiro via questa quantità, ovvero $x = (p_{q-1} + p_q)$.

Se vogliamo minimizzare la lunghezza media il simbolo con p_i più alta ha l_i più bassa (come dimostrato precedentemente).

Faccio lo stesso ragionamento nell’altro codice (che suppongo per assurdo migliore di quello di Huffman e quindi essendo ottimale vale lo stesso rapporto tra p_i e l_i), prendendo s'_q e s'_{q-1} (che sono quelli con probabilità minore, lunghezza maggiore nel secondo codice e lunghezza uguale), fondendoli in un nuovo simbolo fittizio, facendo gli stessi ragionamento fatto per il codice di Huffman. Si ha in partenza che $p_{q-1} \cdot l_{q-1} + p_q \cdot l_q = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q)$. Il nuovo simbolo avrà:

$$(l_q - 1) \cdot (p_{q-1} + p_q) = l_q \cdot (p_{q-1} + p_q) - (p_{q-1} + p_q)$$

La riduzione della lunghezza quindi è la stessa che nel caso di Huffman $L_H - x$ e $L' - x$.

Si stanno “collassando” gli stessi simboli e le lunghezze medie decrescono della stessa quantità.

Ad un certo punto da entrambe le parti si arriva ad avere due simboli. Nell’albero si avranno quindi la radice e due simboli fittizi. Per il secondo codice si avrà comunque una sorgente con due figli e basta.

Per Huffman so che ho due codeword di lunghezza 1 (un ramo con 0 e uno con 1) e quindi $L_h = 1$ ma sotto questo valore non posso andare, non posso codificare due codeword che mi portino ad una lunghezza media < 1 per il secondo codice che quindi ha lunghezza media pari a 1. Si è dimostrato che l’assurdo è impossibile e quindi l’algoritmo di Huffman produce codici ottimali. \square

Codici di Huffman r-ari

Vediamo ora i codici di Huffman per $r > 2$.

Esempio 21. Vogliamo un codice r -ario con $r = 4$ e quindi $\Gamma = \{0, 1, 2, 3\}$ con una sorgente di $q = 8$ simboli. Si hanno le seguenti probabilità:

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_6 = 0.05$
- $p_7 = 0.02$

In questo caso non fondo gli ultimi due simboli ma gli ultimi 4. Al primo passo ottengo:

- $p_{4,5,6,7} = 0.25$
- $p_0 = 0.20$
- $p_1 = 0.28$
- $p_2 = 0.15$
- $p_3 = 0.10$

e poi:

- $p_{0,1,2,3} = 0.75$
- $p_{4,5,6,7} = 0.25$

Associo 0 e 1:

- $p_{0,1,2,3} = 0.75$: 0
- $p_{4,5,6,7} = 0.25$: 1

ricostruisco usando tutti e 4 i simboli:

- $p_{4,5,6,7} = 0.25$: 1
- $p_0 = 0.20$: 00
- $p_1 = 0.28$: 01

- $p_2 = 0.15$: 02
- $p_3 = 0.10$: 03

e infine:

- $p_0 = 0.22$: 00
- $p_1 = 0.20$: 01
- $p_2 = 0.28$: 02
- $p_3 = 0.15$: 03
- $p_4 = 0.10$: 10
- $p_5 = 0.08$: 11
- $p_6 = 0.05$: 12
- $p_7 = 0.02$: 13

Ma questo non è ottimale, infatti potrei dire che 13 è 2 e che 12 è 3 che non sono prefissi, per esempio. Questo succede perché nell'ultimo step ho usato solo 0 e 1 e non tutti i simboli possibili della sorgente, perdendo diverse codeword. Voglio quindi arrivare all'ultimo step con esattamente 4 simboli. Per farlo aggiungo simboli fittizi alla sorgente in modo che raccogliendo a botte di r si arrivi alla fine con r simboli.

Si ha ad esempio:

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_6 = 0.05$
- $p_7 = 0.02$
- $p_8 = 0$

- $p_9 = 0$

Al primo passo ottengo:

- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$
- $p_3 = 0.15$
- $p_4 = 0.10$
- $p_5 = 0.08$
- $p_{6,7,8,9} = 0.07$

e poi:

- $p_{3,4,5,6,7,8,9} = 0.40$
- $p_0 = 0.22$
- $p_1 = 0.20$
- $p_2 = 0.28$

associa quindi i simboli:

- $p_{3,4,5,6,7,8,9} = 0.40$: 0
- $p_0 = 0.22$: 1
- $p_1 = 0.20$: 2
- $p_2 = 0.28$: 3

avendo:

- $p_0 = 0.22$: 1
- $p_1 = 0.20$: 2
- $p_2 = 0.28$: 3
- $p_3 = 0.15$: 00
- $p_4 = 0.10$: 01

- $p_5 = 0.08$: 02
- $p_{6,7,8,9} = 0.07$: 03

e quindi:

- $p_0 = 0.22$: 1
- $p_1 = 0.20$: 2
- $p_2 = 0.28$: 3
- $p_3 = 0.15$: 00
- $p_4 = 0.10$: 01
- $p_5 = 0.08$: 02
- $p_6 = 0.05$: 030
- $p_7 = 0.02$: 031
- $p_8 = 0$: 032
- $p_9 = 0$: 033

Ma le ultime due non mi servono:

- $p_0 = 0.22$: 1
- $p_1 = 0.20$: 2
- $p_2 = 0.28$: 3
- $p_3 = 0.15$: 00
- $p_4 = 0.10$: 01
- $p_5 = 0.08$: 02
- $p_6 = 0.05$: 030
- $p_7 = 0.02$: 031

Che è ottimale.

Si può calcolare che:

$$L = 1.47 \text{ simboli quaternari}$$

Si dimostra che si ottengono con questo processo codici ottimali e si dimostra in modo analogo al caso binario con $r = 2$ (avendo che si ragiona non con due figli ma con r figli).

Capiamo meglio quanti simboli fittizi con probabilità nulla vanno aggiunti. Avendo q simboli mi serve un numero, che sia il minore possibile, q' di simboli tale che $q' \geq q$. Devo quindi aggiungere $q' - q$ simboli fittizi con probabilità 0. In ogni passo tolgo r simboli e ne aggiungo 1, quindi ne tolgo $r - 1$. Partendo da q' diventano poi $q' - (r - 1)$ e poi $q' - (r - 1) - (r - 1)$ e così via. Alla fine voglio che ne restino r . Partendo dal fondo ho $r + (r - 1)$ poi $(r + 2 \cdot (r - 1))$ etc... Si ha quindi che, per un certo k :

$$q' = k \cdot (r - 1) + r$$

Ma posso togliere il numero K di passi:

$$q' = (k + 1) \cdot (r - 1) + 1 \rightarrow q' \equiv 1 \pmod{r - 1}$$

Quindi devo trovare il più piccolo $q' \geq q$ tale che q' è congruo a 1 mod $(r - 1)$. Al massimo dovrò mettere $r - 1$ simboli fittizi.

Si ricorda che:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff \exists z \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } a - b = z \cdot n$$

Esempio 22. Nell'esempio sopra avevamo $q = 8$ e $r = 4$. Mi serve $q' \geq 8$ tale che q' è congruo a 1 mod 3. I primi numeri congrui a 1 mod 3 sono:

$$\{1, 4, 7, 10\}$$

e il più piccolo ≥ 8 è 10 e quindi $q' = 10$ e quindi $q' - q = 2$.

Per $r = 2$ facendo i conti si vede che arrivo sempre ad avere sempre e solo due simboli nell'ultimo passaggio.

Si nota che posso codificare le cifre quaternarie tramite quelle binarie, $0 \rightarrow 00$, $1 \rightarrow 01$, $2 \rightarrow 10$ e $3 \rightarrow 11$, passando da uno a due simboli, raddoppiando quindi anche le lunghezze delle codeword e il doppio della lunghezza media, raggiungendo però un codice non ottimale (applicando direttamente l'algoritmo di Huffman con $r = 2$ si può dimostrare si ottiene un codice migliore, avendo codeword di lunghezza due e tre e non due e quattro).

Finora le sorgenti funzionavano che ad ogni colpo di clock uscisse un simbolo, con probabilità associata, ignorando quanto successo prima. Si ha quindi che queste sorgenti sono **memoryless**.

Algorithm 2 Pseudocodice dell'algoritmo di Huffman, con S insieme dei simboli, F che associa una frequenza ad ogni simbolo, Q coda di priorità. Il codice non è stato trattato in aula ma mi sembrava interessante averlo.

```

function HUFFMAN( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $F$ )
   $Q \leftarrow \emptyset$ 
  inserire tutti gli  $s_i$  in  $Q$ 
  for  $i \leftarrow 1$  to  $|S|$  do
    alloca un nodo  $n$ 
     $left[n] \leftarrow x \leftarrow \text{extract\_min}(Q)$ 
     $right[n] \leftarrow y \leftarrow \text{extract\_min}(Q)$ 
     $F(n) \leftarrow F(x) + F(y)$ 
     $Q.\text{insert}(n)$ 

```

Definizione 11. Definiamo una **sorgente con memoria**.

SU supponga di avere una memoria di ordine j . Si ha che il simbolo s_i esce con probabilità:

$$p(s_i | s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ij})$$

in pratica la probabilità di un simbolo è condizionata dai j simboli usciti precedentemente. Questa è una sorgente con memoria.

Il loro studio avviene tramite **processi di Markov** e **matrici**.

Si cerca una distribuzione di probabilità, espressa tramite vettore, π tale che $\pi = M\pi$, con M matrice. Si vuole quindi che ciascun simbolo esce con la probabilità indicata nel vettore π in modo che sia un **punto fisso** (???).

Spiegazione superficiale in quanto al tematica non viene approfondita.

L'algoritmo di Huffman si può adattare alle sorgenti con memoria.

3.4 L'informazione

Si ha sempre una sorgente S senza memoria con i simboli s_i a cui sono associate le probabilità p_i . Cerchiamo di capire quanta informazione ci dà un simbolo:

$$I(s_i) = ?$$

L'informazione dipende soprattutto dal destinatario, da quanto è in grado di comprendere tale informazione. Cambiare ricevente cambia tale valore.

Si arriverà a capire quanto si può comprimere un messaggio tramite la quantità di informazione ma studiando solo dal punto di vista del messaggio ignorando il ricevente.

Studiamo il rapporto tra p_i e $I(s_i)$. Shannon dice che eventi più rari forniscono una maggior quantità di informazione, essendo inversamente proporzionale:

$$I(s_i) = \frac{1}{p_i}$$

Si vuole anche che da due sottosistemi che producono due quantità di informazioni $I(A)$ e $I(B)$ si possa ottenere l'informazione totale del sistema C . Si vuole che valga l'additività:

$$I(C) = I(A) + I(B)$$

In realtà possiamo dire che I prende in input la probabilità stessa, avendo:

$$I(p_i) = \frac{1}{p_i}$$

Se ho a che fare con due eventi indipendenti ho che:

$$I(p_i \cdot p_j) = \frac{1}{p_i \cdot p_j}$$

ma ho che $I(p_i) = \frac{1}{p_i}$ e $I(p_j) = \frac{1}{p_j}$ e quindi vorrei:

$$I(p_i \cdot p_j) = \frac{1}{p_i \cdot p_j} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_j} = \frac{p_i + p_j}{p_i \cdot p_j} \neq \frac{1}{p_i \cdot p_j}$$

e quindi non va bene.

Ma l'additività la hanno potenze e logaritmi, quindi si dice che:

$$I(p_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Ma quindi:

$$I(p_i \cdot p_j) = \log_2 \frac{1}{p_i \cdot p_j} = \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \cdot \frac{1}{p_j} \right) = \log_2 \frac{1}{p_i} + \log_2 \frac{1}{p_j} = I(p_i) + I(p_j)$$

Dal punto di vista assiomatico chiediamo che la quantità di informazione goda di queste proprietà, avendo $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$:

- $I(p) > 0$
- $I(p_1 \cdot p_2) = I(p_1) + I(p_2)$ se gli eventi sono indipendenti, valendo l'additività

- $I(p)$ è una funzione continua, per non avere situazioni scomode

Già solo con queste proprietà se ne ricavano altre:

- $I(P^n) = n \cdot I(p), \forall n \in \mathbb{N}$ e si potrebbe dimostrare per induzione.
 $I(P^1) = 1 \cdot I(P)$ e

$$I(p^n) = I(p^{n-1} \cdot p) = I(P^{n-1}) + I(p) = I(p) + (n-1) \cdot I(p) = n \cdot I(p)$$

- $y = p^n \rightarrow p = y^{\frac{1}{n}}$ e quindi:

$$I(y) = I(p^n) = n \cdot I(p) = n \cdot I(y^{\frac{1}{n}})$$

e quindi:

$$I(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} I(y)$$

- $I(y^{\frac{m}{n}}) = I((y^{\frac{1}{n}})^m) = m \cdot I(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{m}{n} I(y)$

Teorema 6. *La funzione $I(p_i)$ è unica, ovvero è l'unica funzione che soddisfa le prime tre proprietà.*

Dimostrazione. Ipotizzo che esista g tale che $g(p^n) = n \cdot g(p)$. Si ha che $I(p) = c \cdot \log_2 \frac{1}{p}$ per un certo c costante. Si ha che, avendo $I(p^n) = c \cdot \log_2 \frac{1}{p^n}$:

$$g(p^n) - c \log_2 \frac{1}{p^n} = n \cdot [g(p) - c \cdot \log_2 \frac{1}{p}]$$

pongo, per un certo $p_0 \neq 0, 1$:

$$c = \frac{g(p_0)}{\log_2 \frac{1}{p_0}}$$

in modo da ottenere, sostituendo, con $p = p_0$, ignorando traslazioni delle funzioni nel grafico

$$g(p^n) - c \log_2 \frac{1}{p^n} = n \cdot [g(p) - c \cdot \log_2 \frac{1}{p}] = 0$$

infatti:

$$g(p_0) = I(p_0)$$

Si ha che:

$$\forall z \exists n \text{ t.c. } z = p_0^n$$

Allora:

$$g(z) - c \cdot \log_2 \frac{1}{z} = 0 \implies g(z) = c \cdot \log_2 \frac{1}{z} = I(z)$$

dimostrando che:

$$g(z) = I(z)$$

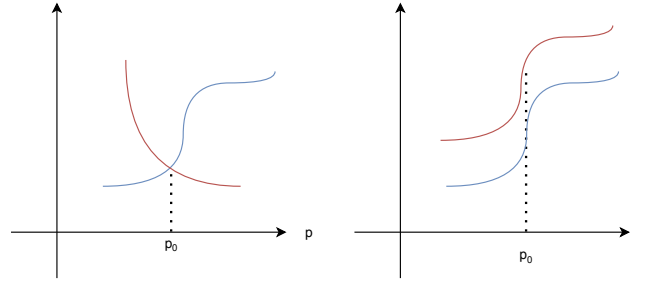


Figura 3.2: Grafici usati nella dimostrazione **da capire come**

□

L'unità di misura dell'informazione varia a seconda della base del logaritmo. Si ha che \log_2 è l'unità di misura se ho a che fare con i bit (anche se all'inizio 0 e 1 erano detti *binit*) Misuro quindi in *bit*.

Se ho $\log_e = \ln$ misuro in *nat*.

Se ho \log_{10} misuro in *Hartley*.

La sorgente s quindi emette il simbolo s_i con p_i e produce una quantità di informazione pari a:

$$I(p_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

e questo per ogni simbolo.

Si ha anche la quantità di informazione media della sorgente, facendo la media pesata con le probabilità. Questa è detta **entropia** H :

$$H(S) = \sum_{i=1}^q p_i \cdot I(p_i) = \sum_{i=1}^q p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

spesso si usa H_b con b pari alla base del logaritmo, quindi:

$$H_2(S) = \sum_{i=1}^q p_i \cdot I(p_i) = \sum_{i=1}^q p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Con H_2 funzione che ha in input tutte le probabilità:

$$H(p_1, \dots, p_q)$$

che per praticità indichiamo con, per S sorgente:

$$H(S)$$

Un altro modo di indicarla è (spesso per motivi tipografici):

$$H_2(S) = - \sum_{i=1}^q p_i \cdot \log_2 p_i$$

Sempre dietro H si ha uno scopo tipografico, non si usa E in quanto sarebbe ambiguo con *energia*. Si è pensato ad usare la η ma era comunque scomodo da usare in documenti dattiloscritti, prima che Knuth arrivasse con \TeX e \LaTeX .

La storia dietro il nome “entropia” era stato anche trattato con Von Neumann, in quanto Shannon temeva fosse un termine errato, vedendo che fosse simile all’entropia della termodinamica ma non essendo sicuro della cosa.

Vediamo un *esperimento mentale*, detto **esperimento del diavoleto di Maxwell**, per dimostrare come l’entropia di Shannon e quella della termodinamica siano effettivamente collegate tra loro. Si immagina di avere un contenitore da cui non può uscire nulla e nemmeno in cui può entrare nulla. Tale contenitore contiene un gas con una certa quantità di calore. Tale contenitore è diviso in due con a metà uno sportello che si apre e chiude. Il gas è formato da molecole che si muovono e si scontrano tra loro e contro le pareti. Il calore è legato alla velocità di queste molecole. Lo sportello è azionato da un “diavoleto” che riesce a vedere le particelle e di misurarne la velocità. Quando vede una particella veloce la manda da una parte del contenitore se lenta dall’altra (aprendo e chiudendo lo sportello), dividendo così particelle lente e veloci nelle due sezioni del contenitore. Dopo un po’ di tempo tutte le particelle veloci sono da una parte e le lente dall’altra, avendo una metà più calda (dove sono quelle veloci) e uno più freddo. Il diavoleto ha quindi lavorato per andare contro il secondo principio della termodinamica, che imporrebbe un miscuglio uniforme tra particelle lente e veloci. Ma questo principio sarebbe inviolabile quindi siamo di fronte ad un paradosso. La soluzione al paradosso è il rapporto tra le due entropie, quella di Shannon della teoria dell’informazione e quella della termodinamica. Il diavoleto ha lavorato contro il secondo principio della termodinamica ma per capire se una particella è veloce ne ha fatto una misurazione e ne ha ricavato un’informazione sulla misura. Tale misurazione è il risultato di un evento statistico, a seconda della particella ho velocità alta/bassa etc... con una certa probabilità. A tali probabilità si associa l’entropia di Shannon e facendo i conti si scopre che comunque il sistema è chiuso e che il diavoleto non sta facendo un lavoro impossibile (i dettagli del discorso non vengono

trattati).

Quindi la sorgente, ad ogni colpo di clock, emette un simbolo con una certa quantità di informazione.

Un altro modo per vedere che l'entropia è una sorta di media è prendere la sorgente S e considerare messaggi di lunghezza n . Voglio avere $n \cdot p_i$ volte s_i , avendo:

$$P = p_1^{n \cdot p_1} \cdot p_1^{n \cdot p_2} \cdot \dots \cdot p_q^{n \cdot p_q} = (p_1^{p_1} \dots p_q^{p_q})^n$$

ma allora:

$$\log_{\frac{1}{P}} = \log_2 \left[\frac{1}{p_1^{p_1} \dots p_q^{p_q}} \right] = n \sum_{i=1}^q \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)^{p_i} = n \cdot \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = n \cdot H_2(S)$$

3.4.1 Robustezza codici di Huffman

Sia data una sorgente S con simboli s_i e probabilità p_i (potrei anche non sapere che simboli emette la sorgente S , come se fosse una *black box*). Le probabilità in realtà non si conoscono. Si supponga di poter osservare solo i simboli emessi dalla sorgente senza sapere nulla di come è fatta. Non conosco quindi le probabilità vere ma posso solo stimarle. Chiamo p'_i tali stime. Ci si chiede quanto cambia la lunghezza media del codice istantaneo applicando Huffman con le p'_i . Si ha quindi:

$$L' = \sum_{i=1}^q p'_i l_i$$

anziché:

$$L = \sum_{i=1}^q p_i l_i$$

Cercando di capire quanto si discostano L e L' .

Presi gli errori e_i commessi per stimare p'_i ho che:

$$p'_i = p_i + e_i$$

Si segnala che e_i può essere positivo, negativo o nullo.

Sia p_1, \dots, p_q che p'_1, \dots, p'_q sono distribuzioni di probabilità e quindi $\sum_{i=1}^q p_i = 1$.

Quindi:

$$\sum_i p'_i = \sum_i (p_i + e_i) = \sum_{i=1}^q p_i + \sum_{i=1}^q e_i = 1 + \sum_{i=1}^q e_i = 1$$

dato che $\sum_i p'_i = 1$. Ne segue quindi per forza vale che:

$$\sum_i e_i = 0$$

e quindi la media degli errori è:

$$\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q e_i = 0$$

e che la varianza degli errori vale

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q e_i^2$$

Per la lunghezza media ho che:

$$L' = \sum_{i=1}^q p'_i \cdot l_i = \sum_{i=1}^q p_i \cdot l_i = \sum_{i=1}^q e_i \cdot l_i = L + \sum_{i=1}^q e_i \cdot l_i$$

Quindi la variazione tra le lunghezze medie ottenute con Huffman usando p'_i e P_i è:

$$\sum_{i=1}^q e_i \cdot l_i$$

Voglio quindi minimizzare $\sum_{i=1}^q e_i \cdot l_i$. Cerchiamo quindi gli e_1, \dots, e_q tali per cui la funzione:

$$f(e_1, \dots, e_q) = \sum_{i=1}^q e_i \cdot l_i$$

è minima.

Cerco quindi i punti stazionari tramite le derivate parziali rispetto alle variabili e_i per poi porle a 0. Vogliamo che la media dei valori assunti da e_i sia nulla e che la varianza σ^2 assuma un valore fissato imponendo i seguenti vincoli:

$$\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q e_i = 0 \implies \sum_{i=1}^q e_i = 0$$

e:

$$\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q e_i^2 - \sigma^2 = 0$$

Per risolvere questo problema di ottimizzazione vincolata utilizziamo i **moltiplicatori di Lagrange**. Abbiamo due vincoli e quindi usiamo due moltiplicatori: μ e λ : La funzione a cui calcolare i punti stazionari diventa:

$$\mathcal{L}(e_1, \dots, e_q) = \sum_{i=1}^q e_i l_i - \lambda \sum_{i=1}^q e_i - \mu \left(\sum_{i=1}^q e_i^2 - \sigma^2 \right)$$

Calcolo quindi le derivate parziali rispetto a e_i e le pongo nulle:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

e sommando queste equazioni ho:

$$\sum_{i=1}^q l_i - \lambda q - \frac{2\mu}{q} \sum_{i=1}^q e_i = 0$$

e avendo che $\sum_{i=1}^q e_i = 0$ ottengo:

$$\sum_{i=1}^q l_i - \lambda q = 0$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q l_i$$

Cerchiamo quindi il valore di μ . Ricordando che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

sommo le equazioni moltiplicando la prima per e_1 , la seconda per e_2 etc. ...:

$$\sum_{i=1}^q e_i l_i - \lambda \sum_{i=1}^q e_i - \frac{2\mu}{q} \sum_{i=1}^q e_i^2 = 0$$

e avendo che $\sum_{i=1}^q e_i = 0$ ottengo:

$$\sum_{i=1}^q e_i l_i - 2\mu \sigma^2 = 0$$

da cui:

$$\mu = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^q e_i l_i$$

Ricordando che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = l_i - \lambda - \frac{2\mu}{q} e_i = 0$$

sommo le equazioni moltiplicando la prima per l_1 , la seconda per l_2 etc. . . :

$$\sum_{i=1}^q l_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^q l_i - \frac{2\mu}{q} \sum_{i=1}^q e_i l_i = 0$$

Sostituisco λ e μ :

$$\sum_{i=1}^q l_i^2 - \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^q l_i \right)^2 - \frac{1}{2q\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^q e_i l_i \right)^2 = 0$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^q e_i l_i \right)^2 &= \sigma^2 \left[q \sum_{i=1}^q l_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q l_i \right)^2 \right] = \\ \sigma^2 q^2 \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q l_i^2 - \left(\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q l_i \right)^2 \right] &= \sigma^2 q^2 \cdot v \end{aligned}$$

con v varianza delle l_i .

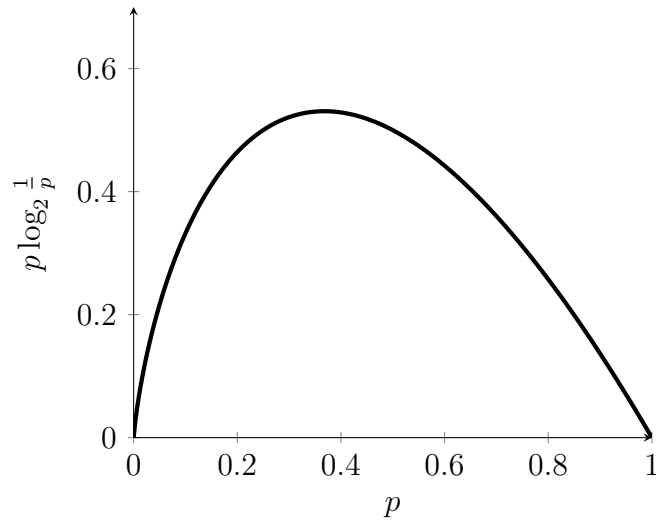
Dato che q^2 e σ^2 sono fissate abbiamo trovato che il quadrato della variazione tra le lunghezze medie, ovvero il quadrato di $f(e_1, \dots, e_q)$ che volevamo minimizzare, è direttamente proporzionale alle lunghezze delle codeword. Quindi si minimizza mettendo in alto il nuovo simbolo in quanto si minimizza la varianza rendendo più **robusto** il codice, ovvero meno sensibile ad errori sulle probabilità (perlomeno ragionando in ottica di lunghezza media).

Quando esce il simbolo s_i abbiamo quindi $I(p_i) = \log_r \frac{1}{p_i}$, con tipicamente $r = 2$, misurando la quantità di informazione in bit.

Studiamo ora proprietà di $H_2(S)$, che può essere studiata come una funzione. Si nota in primis che $p = 0$ è escluso (avendo una discontinuità del terzo tipo) e $p = 1$ incluso. Avendo:

$$H_2(S) = \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = H_2(p_1, \dots, p_q)$$

che graficamente è:



Ma questo è scomodo quindi riscrivo $\frac{1}{p}$ in modo che anche l'origine sia inclusa.

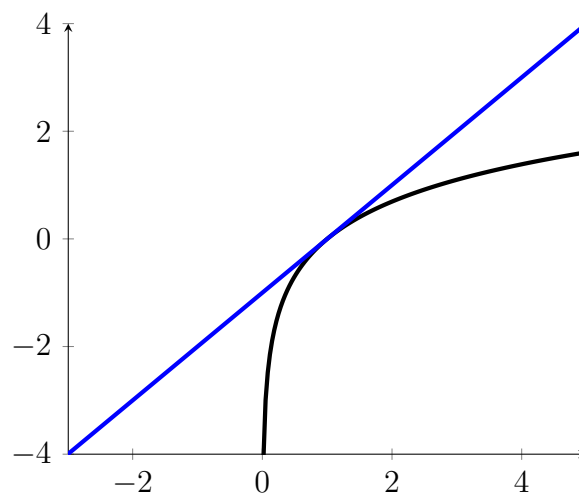
Sappiamo quindi che:

$$H_S(S) \geq 0$$

e vale 0 sse $H_2(p_1, \dots, p_q) = 0$ e quindi una certa $p_i = 0$ e quindi tutte le altre p_j sono anch'esse nulle. Cerchiamo ora il massimo.

Usiamo la **disuguaglianza di Gibbs**.

Teorema 7 (Disuguaglianza di Gibbs). *Disegnano il logaritmo naturale (anche se vale per ogni base) e una retta r che è tangente alla funzione in 1:*



Si scopre quindi che:

$$\ln(x) \leq x - 1$$

e vale l'uguaglianza sse $x = 1$.

Prendo quindi due distribuzioni x_1, \dots, x_q e y_1, \dots, y_q . La disuguaglianza afferma che:

$$\sum_{i=1}^q x_i \log_2 \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \leq 0$$

Dimostrazione. Dimostriamo questa disuguaglianza. Ho che, tramite cambio base:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q x_i \log_2 \left(\frac{y_i}{x_i} \right) &= \frac{1}{\log_2} \sum_{i=1}^q x_i \ln \left(\frac{y_i}{x_i} \right) \leq \frac{1}{\log_2} \sum_{i=1}^q x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - 1 \right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^q y_i - x_i \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^q y_i - \sum_{i=1}^q x_i \right) = \frac{1}{\ln 2} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

e quindi vale la disuguaglianza di Gibbs.

L'unica volta che abbiamo maggiorato abbiamo usato $\ln x \leq x - 1$ che ci dice che vale 0 sse $x = 1$ e quindi vale l'uguaglianza sse $\frac{y_i}{x_i} = 1$, quindi se le due distribuzioni coincidono, con $x_i = y_i, \forall i$. \square

Cerco quindi il massimo dell'entropia. Dimostro che:

$$\max H_2(p_1, \dots, p_q) = \log_2 q$$

Per farlo uso Gibbs:

$$H_2(S) - \log_2 q = \left(\sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \right) - \log_2 q$$

ma voglio includere tutto nella sommatoria, lo moltiplico per una sommatoria che fa 1:

$$= \left(\sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \right) - \log_2 \sum_{i=1}^q p_i$$

ora lo posso includere

$$= \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^q p_i \log_2 q$$

e quindi:

$$\sum_{i=1}^q \log_2 \frac{1}{p_i} - \log_2 q$$

e quindi:

$$= \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{p_i \cdot q} = \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{\frac{1}{q}}{p_i}$$

Dove posso riconoscere Gibbs, con $\frac{1}{q}$ che è una distribuzione uniforme e p_i è l'altra distribuzione. Quindi:

$$H_2(S) - \log_2 q = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^q \leq 0$$

possiamo dire che:

$$H_2(S) \leq \log_2 q$$

Inoltre vale 0 sse $p_i = \frac{1}{q}, \forall i$, quindi se ho una distribuzione è uniforme, con quindi $\log_2 q$ come massimo.

Un'applicazione di questo calcolo è la relazione tra entropia e lunghezza media di un codice e quindi con la codifica di sorgente.

Si prende una sorgente con q simboli s_i , con probabilità p_i . Si supponga di avere codeword l_i per un codice istantaneo. Ho la disuguaglianza di Kraft, con $K \leq 1$:

$$K = \sum_{i=1}^q r^{l_i} \leq 1$$

Definisco, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$:

$$Q_i = \frac{r^{-l_i}}{K}$$

I vari Q_i sono $\in [0, 1]$ e quindi le posso considerare singolarmente come probabilità. Vedo che:

$$\sum_{i=1}^q Q_i = \sum_i \frac{r^{-l_i}}{K} = \frac{1}{K} \sum_i r^{-l_i} = \frac{1}{K} K = 1$$

e quindi sono una distribuzione di probabilità.

Uso quindi Gibbs:

$$\sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{Q_i}{p_i} \leq 0$$

Ho che, spezzando il logaritmo:

$$\sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{Q_i}{p_i} = \sum_{i=1}^q p_i \left(\log_2 \frac{1}{p_i} - \log_2 \frac{1}{Q_i} \right)$$

$$= H_2(S) - \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{Q_i} \leq 0$$

Ma quindi:

$$\begin{aligned} H_2(S) &\leq \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{1}{Q_i} = \sum_{i=1}^q p_i \log_2 \frac{K}{r^{-l_i}} = \sum_{i=1}^q p_i (\log_2 K - \log_2 r^{-l_i}) \\ &= \log_2 K \sum_{i=1}^q p_i + \sum_{i=1}^q p_i l_i \log_2 r \\ &= \log_2 K + \log_2 r \sum_{i=1}^q p_i l_i \log_2 r = \log_2 K + L(\log_2 r) \leq L \log_2 r \end{aligned}$$

in quanto $\log_2 K \leq 0$ (essendo $K \leq 1$ per Kraft).

Quindi:

$$H(S) \leq L \log_2 r$$

E $\log_2 r$ è una costante che fa cambiare la base del logaritmo:

$$\frac{H_2(S)}{\log_2 r} \leq L$$

ma quindi:

$$H_r(S) \leq L$$

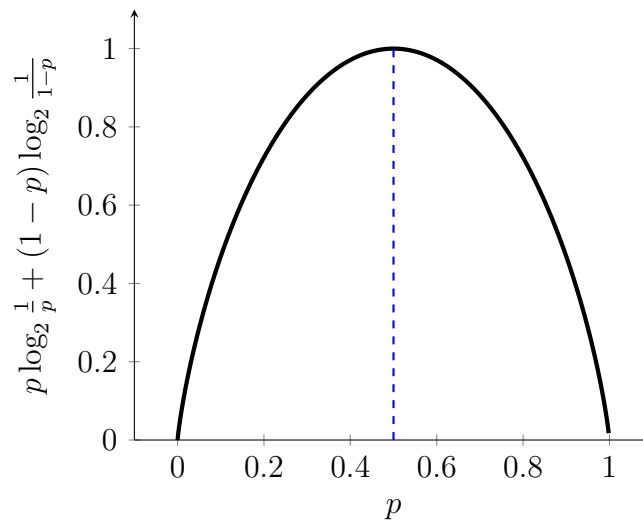
Quindi partendo da una sorgente in cui si ipotizza un codice istantaneo possiamo dire che la lunghezza media deve essere maggiore uguale dell'entropia della sorgente su base r -aria, dove r è il numero di simboli dell'alfabeto di codifica. Il fatto che la lunghezza media non può essere minore dell'entropia (quindi della quantità media di informazione) si può interpretare dicendo che la quantità media di informazione associata al messaggio è quella che non posso rappresentare in modo più compatto, mi da un limite. La sorgente quindi, ogni volta che emette un simbolo, emette mediamente una certa quantità di informazione e quindi ogni messaggio ha una quantità di informazione che è la somma di quelle di ciascun simbolo. La quantità di informazione del messaggio è quella che non posso rappresentare in maniera più compatta con un codice istantaneo. Ho una sorta di limite e se codificassi con una lunghezza media più bassa perderei informazione. Posso vedere il codice istantaneo come una compressione dei dati senza perdita di informazione, a meno di ulteriori compressioni.

Se avessi sorgenti con memoria avrei che si avrebbero vincoli che abbassano l'entropia.

Immagino ora una sorgente con due simboli s_1 e s_2 , con $p_1 + p_2 = 1$ e quindi $p_1 = 1 - p_2$ e quindi mi basta la probabilità di uno solo dei due simboli che chiamo p . Posso dire che:

$$H_2(S) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

Questa tipologia di sorgente è una **sorgente Bernoulliana** che è del tipo, con la derivata che si annulla in $\frac{p}{2}$:



in questo caso $p = 1$ sarebbe escluso ma lo completo dicendo che vale 0 in $p = 1$ tramite una sostituzione. Stesso discorso per $p = 0$. Il valore massimo è appunto $p = \frac{1}{2}$ e quindi si ha che:

$$H_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Si vuole rappresentare la sequenza di simboli in modo efficiente, ovvero con lunghezza media minima. Vogliamo quindi la rappresentazione più compatta possibile, pensando al codice istantaneo dal punto di vista della compressione senza perdita di informazione, avendo che il ricevente può risalire alla sequenza di simboli inviata e compressa.

Parlando di codifica di sorgente si ha un simbolo per ogni colpo di clock. Possiamo pensare ad un codice istantaneo per comprimere le sequenze di simboli emesse dalla sorgente, compressione senza perdita di informazione, **compressione lossless** con il ricevente che riceve e capisce perfettamente la sequenza di partenza. La compressione dipende dalla ridondanza. *Si hanno*

altri tipi di compressione, **lossy**, vedisi MP3 o MPEG, dove la compressione ha perdita di informazione.

Un metodo di compressione ottimale comprime fino a raggiungere l'entropia della sorgente, non lasciando nulla di "inutile", garantendo però la ricostruzione. Con compressione si ha un codice istantaneo e dobbiamo dire al destinatario quale sia l'albero di decodifica.

Grazie a McMillan sappiamo che la disuguaglianza di Kraft vale anche per i codici univocamente decodificabili. Tutto quanto detto tramite Gibbs riottengo ancora:

$$H_r(S) \leq L$$

che quindi vale per tutti i codici univocamente decodificabili.

3.5 Codifica di Shannon-Fano

Shannon e Fano si chiedono se la quantità di informazione r -aria, con quindi alfabeto r -ario, è minore uguale della lunghezza del simbolo, avendo sempre simboli s_i , con p_i e l_i :

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i$$

Vogliamo che l_i sia il più piccolo ovvero l'unico compreso in:

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_r \frac{1}{p_i} + 1$$

Questo intervallo ha ampiezza 1 e contiene un solo intero.

Calcolo gli l_i in modo che rispettino questo principio. Tali lunghezze sono le **lunghezze di Shannon-Fano**.

Ragioniamo sulle lunghezze e vediamo se si ha un codice istantaneo con quelle lunghezze. Facendo:

$$r^{\log_r \frac{1}{p_i}} \leq r^{l_i} < r^{\log_r \frac{1}{p_i} + 1}$$

ma allora:

$$\frac{1}{p_i} \leq r^{l_i} < r^{\log_r \frac{1}{p_i}} r$$

che è:

$$\frac{1}{p_i} \leq r^{l_i} < \frac{1}{p_i} r$$

Faccio il reciproco:

$$p_i \geq \frac{1}{r^{l_i}} > \frac{p_i}{r}$$

Ora sommo tutti questi l_i :

$$\sum_{i=1}^q p_i \geq \sum_{i=1}^q \frac{1}{r^{l-i}} > \sum_{i=1}^q \frac{p_i}{r}$$

ma quindi è:

$$1 \geq K > \frac{1}{r}$$

Anche se in realtà mi basta la prima parte:

$$1 \geq K$$

Si ha quindi un codice istantaneo con le lunghezze di Shannon-Fano.

Potrei dire lo stesso per un codice univocamente decodificabile ma conviene ovviamente un codice istantaneo.

Passo ad “ottimizzare” le singole lunghezze e non la media delle stesse.

Ci si chiede ora se si ottiene una lunghezza media ottimale, “sfidando” Huffman, che solo all’ultimo ottiene le codeword che ottimizzano la lunghezza media, facendo un ragionamento che comprende tutte le probabilità facendo la scelta migliore per l’intera sorgente.

Con la codifica di Shannon-Fano si ha che ogni lunghezza dipende dalla singola probabilità e sfrutta un algoritmo più performante di quello di Huffman ma si ottiene un **codice non ottimale** e vedremo di quanto ci si discosta. Per ottenere le codeword poi parto dalle lunghezze di Shannon-Fano e ragiono sugli alberi di decodifica, costruendone uno per scegliere le codeword. Ci si può anche chiedere quali sono le lunghezze che consentono di dare un nome univoco a ciascun evento che si possa verificare, astruendo dalle sorgenti e arrivando al nocciolo dell’essenza dell’informazione.

Ripartiamo dalle lunghezze di Shannon-Fano:

$$\log_r \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_r \frac{1}{p_i} + 1$$

Voglio ottenere dei limiti per la lunghezza media, ricordando che:

$$L = \sum_{i=1}^q p_i l_i$$

ricostruisco quindi la disequazione delle lunghezze per ottenere i limiti della lunghezza media.

Moltiplico per p_i :

$$p_i \log_r \frac{1}{p_i} \leq p_i l_i < p_i \log_r \frac{1}{p_i} + p_i$$

e sommo tutto:

$$\sum_{i=1}^q p_i \log_r \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^q p_i l_i < \sum_{i=1}^q p_i \log_r \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^q p_i$$

Ma è:

$$H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$$

Avendo ottenuto i limiti superiore e inferiore (anche se quello inferiore già si sapeva, visto che $H_r(S) \leq L$ valeva per tutti i codici univocamente decodificabili e per quelli istantanei). I codici di Huffman hanno lunghezza media minore, essendo ottimali, di quelli di Shannon-Fano. Vedo quindi che Shannon-Fano dista di 1 dall'ottimo ma non sempre è così buono. Vediamo un esempio con due simboli:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2^j} \text{ e } p_2 = \frac{1}{2^j}$$

per $j \geq 2$ fissato.

Si ha che il secondo simbolo esce raramente.

Calcolo le lunghezze di Shannon-Fano:

$$\log_2 \frac{1}{p_2} \leq l_2 \rightarrow \log_2 2^j \leq l_2 \rightarrow l_2 = j$$

$$\log_2 \frac{1}{p_1} \leq l_1 \rightarrow \log_2 \frac{2^j}{2^j - 1} \leq \log_2 \left(1 + \frac{1}{2^j - 1} \right) \leq l_1 \rightarrow 1 \leq l_1 \rightarrow l_1 = 1$$

Si noti che Huffman darebbe lunghezza 1 ad entrambe mentre Shannon-Fano 1 e j e quindi sono ben lontane da essere ottime, anche se la lunghezza media dista al più 1 da quella ottima (questo per l'intervento nel conto delle probabilità di uscita dei simboli). Posso comunque poi accorciare gli alberi con nodi interni inutili, soprattutto con alfabeto binario. Quindi pur non essendo ottimo è comunque accettabile.

Possiamo dire che si ha una tendenza verso l'ottimo con la codifica di Shannon-Fano.

Definizione 12. *Definisco l' n -sima estensione S^n di una sorgente S , con $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ l'estensione coincide con n . Per $n > 1$ immagino di avere n copie della sorgente che lavorano in parallelo in modo sincrono, quindi con un colpo di clock unico per tutte. La prima sorgente emette s_{i1} , la seconda s_{i2} e l'ultima s_{in} . L' n -esima estensione considera questi s_{ij} come un vettore, considerando le n copie come una singola sorgente S^n che ha come alfabeto i simboli $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, con $\sigma_i = \{s_{i1}, \dots, s_{in}\}$, dove ogni s_i è lungo j e*

quindi $m = q^n$.

Ho che:

$$\text{Prob}[\sigma_i] = p_{i1} \cdot p_{i2} \cdot \dots \cdot p_{in}$$

Questa probabilità e q^n sono due problematiche, più è grande l'estensione e più simboli si dovrà costruire (con limiti anche macchina). Se ho probabilità piccole come p_{ij} moltiplicandoli diventano ancora più piccoli.

Si ha quindi un codice istantaneo con q^n simboli che sono n -uple di simboli della sorgente di partenza, che in ogni σ_i possono essere mescolati.

Ogni singolo S ha un $H_r(S)$ quindi si ha che, valendo l'additività per l'entropia:

$$H_r(S^n) = n \cdot H_r(S)$$

Teorema 8 (Primo teorema di Shannon, noiseless coding theorem). *Avendo:*

$$H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$$

Si ha che vale qualunque sia la sorgente e qualunque sia il codice istantaneo. In particolare, per $n \geq 1$ vale anche per l' n -esima estensione:

$$H_r(S^n) \leq L_n < H_r(S^n) + 1$$

Con L_n lunghezza media del codice per S^n . Si ha quindi che:

$$n \cdot H_r(S) \leq L_n < n \cdot H_r(S) + 1$$

Divido per n , ottenendo la formula del **primo teorema di Shannon**:

$$H_r(S) \leq \frac{L_n}{n} < H_r(S) + \frac{1}{n}$$

Si era partiti quindi da un intervallo di ampiezza 1 per arrivare ad uno di ampiezza $\frac{1}{n}$, avendo lo stesso estremo di partenza mentre l'estremo di fine muta, in modo tale che l'ampiezza dell'intervallo decresce all'aumentare di n . Al crescere di n quindi tale quantità viene schiacciata verso l'ottimo (a mo' dei due carabinieri).

D'altro canto $\frac{L_n}{n}$ è la lunghezza media di un codice istantaneo che codifica la sorgente S_n , che ha come simboli elle n -uple. La codeword codifica tutta l' n -upla e tutte le codeword hanno lunghezza media L_n e quindi in media servono L_n bit, nel caso binario, per rappresentare la n -upla. Ogni singola componente della n -upla ha quindi lunghezza $\frac{L_n}{n}$. So che, avendo $\sigma_i = \{s_{i1}, \dots, s_{in}\}$, ogni s_{ij} ha lunghezza media $\frac{L_n}{n}$. Quindi ha senso confrontare $H_r(S) \leq \frac{L_n}{n} < H_r(S) + \frac{1}{n}$ con $H_r(S) \leq L < H_r(S) + 1$. Confrontando quindi, tramite la formula del primo teorema di Shannon, si giunge a dire che se al posto

di codificare la sorgente codifico le n -esime estensioni della sorgente per n crescente allora ottengo una codifica per l' n -esima estensione che è migliore di quella che avevo codificando i singoli simboli della sorgente. È migliore perché ho un intervallo per la lunghezza media di ampiezza $\frac{1}{n}$, che quindi al crescere di n diventa sempre più piccolo, tendendo all'ottimo.

Il teorema ha validità teorica e interesse storico ma in pratica dovrei costruire S^n , con tanti simboli dei quali alcuni potrebbero avere probabilità talmente bassa da essere difficile da rappresentare a livello macchina.

3.6 Canali di Comunicazione

Prima di parlare del **secondo teorema di Shannon** dobbiamo approfondire il canale, in forma di modello matematico.

In input al canale ho simboli di un alfabeto A , ovvero a_1, a_2, \dots, a_q . Dal canale escono simboli di un alfabeto B potenzialmente diverso, b_1, \dots, b_s . Il rumore può cambiare un simbolo e quindi il canale viene modellato con probabilità condizionate tra simbolo in entrata e simbolo in uscita:

$$P(b_j|a_i)$$

Per queste probabilità usiamo una matrice M con q righe, una per ogni simbolo di A , e s colonne, una per ogni simbolo di B , con:

$$M_{ij} = P(b_j|a_i)$$

Quindi un canale è:

$$C = (A, B, rumore)$$

con

- A alfabeto dei simboli a_i che entrano nel canale, di cardinalità q
- B alfabeto dei simboli b_i che escono dal canale, che possono anche essere di cardinalità maggiore a quelli che entrano, avendo cardinalità s
- $rumore$, che data una certa P si ha che ogni simbolo di input ha una probabilità di diventare un simbolo in output. Sono probabilità condizionate, $P(b_j|a_i)$. Si ha quindi una matrice con una riga per ogni a_i e una colonna per ogni b_j con queste probabilità condizionate come elementi. Quindi con $rumore$ si intende tale matrice

Studiamo meglio la matrice. Diciamo che entra il simbolo a_i e abbiamo che il canale “non dimentica nulla”, quindi deve uscire un simbolo b_j (che per di più esce solo se qualcosa è entrato nel canale). Si ha quindi che:

$$\sum_{j=1}^s P(b_j|a_i) = 1, \forall i$$

avendo quindi a che fare con una **matrice stocastica**. Sulle colonne non succede in quanto potrei avere un simbolo che esce solo se è entrato un simbolo preciso, non esaurendo tutte le possibilità (???).

L'utente ha i simboli a_i e decide come inserirli nel canale ciascuno con una certa $P(a_i)$, avendo la distribuzione di probabilità:

$$\{P(a_i)\}_{i=1}^q$$

Dobbiamo quindi calcolare $P(b_j)$. Per uscire b_j si ha che o entra un simbolo a_1 che viene trasformato in b_j , con $P(b_j|a_1)$ oppure un a_2 , con $P(b_j|a_2)$, e così via, fino a a_q , con $P(b_j|a_q)$. Se moltiplico queste probabilità condizionate per la probabilità che ci sia in input il simbolo e sommo tali termini ottengo tutti i modi possibili in cui può uscire b_j :

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^q P(a_i) \cdot P(b_j|a_i), \forall j$$

E, prese tutte le equazioni per ogni j , si parla di **equazioni di canale**, che ci dicono la distribuzione di probabilità in uscita, se sommo il valore per tutti i j ottengo 1:

$$\sum_{j=1}^s p(b_j) = 1$$

Le probabilità $P(b_j|a_i)$, contenute nella matrice di canale, sono **probabilità in avanti**, ponendosi dal punto di vista del mittente. Posso studiare anche le $P(a_i|b_j)$, ponendosi dal punto di vista del ricevente che si chiede, dato un output, cosa è entrato nel canale, avendo **probabilità all'indietro**. Queste due probabilità sono legate dal teorema di Bayes, che sviluppo tramite le equazioni di canale:

$$P(a_i|b_j) = \frac{P(b_j|a_i)p(a_i)}{b_j} = \frac{P(b_j|a_i)p(a_i)}{\sum_{i=1}^q P(a_i) \cdot P(b_j|a_i)}, \forall i, j$$

Ma quindi alla fine ho la frazione tra un solo termine e tutti i termini ma ci garantisce anche deve essere stato inserito un a_i per avere un b_j .

3.6.1 Canali particolari

Si hanno due canali particolari, “estremi”:

1. **canale senza rumore**, dove inserito un simbolo di esce sempre lo stesso simbolo. Ho sempre che un input comporta uno e un solo output, sempre. Potrebbe essere che i due alfabeti sono comunque diversi non avendo per forza lo stesso simbolo (entra c ed esce c) ma potrei avere un altro simbolo (se entra c esce v) ma questo deve accadere sempre, avendo determinismo. Lato equazioni di canale si ha che la probabilità di uscita di un b_j è la stessa che ha il corrispettivo a_i di essere in input. Nella matrice di canale quindi ho un solo 1 per riga, che corrisponde al b_j che esce, e 0 altrimenti. Resta comunque una matrice stocastica, anche se ho un solo 1 per ogni riga
2. **canale completamente rumoroso**, dove inserito un simbolo a_i può uscire un b_j qualsiasi che non dipende da a_i . Il canale dimentica a_i e spara a caso un b_j . Nella matrice di canale, stocastica, in ogni riga si ha una distribuzione uniforme, avendo ogni valore pari a $\frac{1}{s}$

Questi canali sono casi estremi teorici, non è possibile costruirli. Per forza c'è rumore in natura e quindi il primo è impossibile, anche se ci si può avvicinare. Il secondo farebbe comodo per generare numeri casuali ma un canale così privo di determinismo non è costruibile, anche se usando il **rumore di fondo dell'universo** o i **tempi di decadimento** forniscono risultati quasi prossimi.

3.6.2 Canale Binario Simmetrico

Un altro canale particolare è il **canale binario simmetrico (CBS)**. Un CBS è un canale binario in entrata, ovvero che ha due soli simboli in input, $a = 0$ e $a = 1$, e binario in uscita, $b = 0$ o $b = 1$. Entra un bit ed esce un bit. Dato 0 può uscire 1 o 0 e dato 1 può uscire 0 o 1. Si hanno quindi:

- $P_{0,0} = P(b = 0|a = 0)$
- $P_{0,1} = P(b = 1|a = 0)$
- $P_{1,0} = P(b = 0|a = 1)$
- $P_{1,1} = P(b = 1|a = 1)$

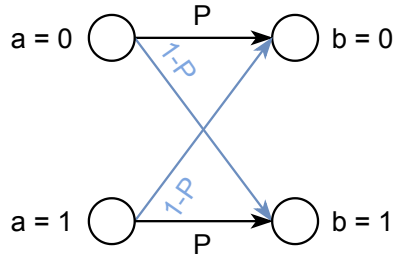


Figura 3.3: Rappresentazione di un canale binario simmetrico

Ho quindi una matrice del tipo, con a sulle righe e b sulle colonne:

$$\begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix}$$

Avendo una matrice simmetrica, che si comporta uguale indipendentemente dal bit di ingresso. Se entra 0 ed esce 0 o entra 1 ed esce 1 abbiamo una trasmissione corretta, altrimenti abbiamo un errore di trasmissione. Simmetrico significa che la probabilità di una trasmissione corretta è uguale nei due casi, la chiamo P , e quella di avere una trasmissione errata è uguale nei due casi, la chiamo Q . La matrice diventa quindi:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}$$

Dato che, quando inserisco 0, o ricevo 0 o 1 (vale anche avendo 1 in input) allora, avendo comunque la matrice stocastica:

$$P + Q = 1$$

e quindi:

$$Q = 1 - P$$

Ma allora:

$$\begin{bmatrix} P & 1 - P \\ 1 - P & P \end{bmatrix}$$

Mi basta quindi solo il valore di P per avere tutte le informazioni di un CBS. In un CBS ho quindi due simboli possibili in input e quindi, per praticità chiamo:

$$p(a = 0) = p$$

$$p(a = 1) = 1 - p$$

Ho quindi, lato equazioni di canale, che:

$$p(b = 0) = p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)$$

$$p(b = 1) = p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P$$

Se avessi $P = 1$ e $Q = 0$ (ma anche $Q = 1$ e $P = 0$, avendo che sempre si ha deterministicamente il cambio di bit) avrei un **CBS senza rumore**. Se avessi $P = \frac{1}{2}$ e $Q = \frac{1}{2}$ avrei un **CBS completamente rumoroso**. Vedo anche le probabilità all'indietro, calcolabili con tutto quello di cui abbiamo appena discusso:

$$P(a = 0|b = 0) = \frac{P(b = 0|a = 0) \cdot P(a = 0)}{p(b = 0)} = \frac{P \cdot p}{p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)}$$

Vediamo quindi i due casi particolari (facilmente verificabili sostituendo):

- CBS senza rumore:

$$P(a = 0|b = 0) = 1$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 0|b = 0) = p$$

$$P(a = 1|b = 0) = \frac{P(b = 0|a = 1) \cdot P(a = 1)}{p(b = 0)} = \frac{(1 - P) \cdot (1 - p)}{p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)}$$

Vediamo quindi i due casi particolari:

- CBS senza rumore:

$$P(a = 1|b = 0) = 0$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 1|b = 0) = 1 - p$$

$$P(a = 0|b = 1) = \frac{P(b = 1|a = 0) \cdot P(a = 0)}{p(b = 1)} = \frac{(1 - P) \cdot p}{p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P}$$

Vediamo quindi i due casi particolari:

- CBS senza rumore:

$$P(a = 1|b = 0) = 0$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 1|b = 0) = 1 - p$$

$$P(a = 1|b = 1) = \frac{P(b = 1|a = 1) \cdot P(a = 1)}{p(b = 1)} = \frac{P \cdot (1 - p)}{p \cdot (1 - P) + (1 - p) \cdot P}$$

Vediamo quindi i due casi particolari:

- CBS senza rumore:

$$P(a = 1|b = 1) = 1$$

- CBS completamente rumoroso:

$$P(a = 1|b = 1) = p$$

Esempio 23. Supponendo di avere un CBS con $P = \frac{9}{10}$, avendo che 9 volte su 10 il bit arriva corretto. Si ha quindi $Q = \frac{1}{10}$, avendo progettato un “buon canale”, anche se, senza sapere $p(a_i)$, il massimo che posso fare è supporli uniformi. L'utente però potrebbe non usarlo per probabilità uniforme, ad esempio qui suppongo un utente che inserisce secondo:

$$P(a = 0) = p = \frac{19}{20}$$

$$P(a = 1) = 1 - p = \frac{1}{20}$$

Il ricevente vede uscire $b = 0$ e vuole sapere se è entrato $a = 0$:

$$P(a = 0|b = 0) = \frac{171}{172}$$

che sembra ragionevole. Si ha anche, ovviamente:

$$P(a = 1|b = 0) = \frac{1}{172}$$

Avendo che:

$$P(a = 0|b = 0) > P(a = 1|b = 0)$$

Si ha poi:

$$P(a = 0|b = 1) = \frac{19}{28}$$

$$P(a = 1|b = 1) = \frac{9}{28}$$

Avendo che:

$$P(a = 0|b = 1) > P(a = 1|b = 1)$$

Ma allora se vede $b = 1$ dice che comunque è più probabile $a = 0$, non capendo quando sia entrato $a = 1$.

Nell'esempio si è visto che le probabilità dipendono comunque dall'uso dell'utente, che sceglie le $p(a_i)$, che se scelte male portano a situazioni strane come quelle dell'esempio. Nell'esempio si è creato un bias che porta sempre a scegliere $a = 0$, avendo che $p(a = 0) \gg p(a = 1)$. Questo succede in quanto, guardando le equazioni sopra descritte, si ha, con questa scelta, $p > P$ e $p > Q$ (avendo indicato $p(a = 0)$ con p).

3.6.3 Entropie del Canale

Dato un canale con $a_i \in A$ in input e $b_j \in B$ in output, con le varie probabilità associate. Normalmente ho la sorgente A di q simboli, dove i vari $P(a_i)$ sono una distribuzione di probabilità. Mettendosi nei panni di un osservatore che vede solo l'output si ha una "sorgente" B , di s simboli, dove i vari $P(b_j)$ sono una distribuzione di probabilità. La vedo come sorgente perché il canale è una *black box*, se invece potessi vedere dentro vedrei che B non sarebbe una sorgente, con le probabilità $P(b_j)$ che non sono native ma derivate da quelle dei simboli a_i e dalle $P(b_j|a_i)$, tramite le equazioni di canale.

Si hanno molte entropie.

Posso dare l'entropia della sorgente A :

$$H_r(A) = \sum_{i=1}^q P(a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)}$$

Vedo B come sorgente e quindi:

$$H_r(B) = \sum_{j=1}^s P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)}$$

Ho anche, ponendomi dal punto di chi vede sia A che B , la quantità di informazione media emessa dalla sorgente in input dato un simbolo in output:

$$H_r(A|b_j) = \sum_{i=1}^q P(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Questa è una sorta di **entropia tecnica** che serve a calcolare quella di A dato B :

$$\begin{aligned} H_r(A|B) &= \sum_{j=1}^s P(b_j) \cdot H_r(A|b_j) \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^q P(b_j) \cdot p(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)} \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^q P(a_i, b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Questa è detta **equivocazione** e studia la quantità di informazione media sull'input avendo in uscita un qualsiasi simbolo di B , essendo dal punto di vista del ricevente che studia la quantità di informazione immessa nel canale. Si noti che si rompe quella sorta di simmetria nella formula dell'entropia (tra il P e il denominatore della frazione).

Un'altra entropia interessante è:

$$H_r(B|a_i) = \sum_{j=1}^s P(b_j|a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Questa serve per l'altra entropia famosa che è:

$$H_r(B|A) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

Anche questa è detta **equivocazione** ed è la quantità di informazione media sull'output avendo inserito un qualsiasi simbolo di A nel canale, essendo dal punto di vista del mittente che inserisce un simbolo qualsiasi nel canale. Infine ho anche l'entropia congiunta:

$$H_R(A, B) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j, a_i)}$$

Dove sono nel punto di vista di un osservatore esterno che vede input, canale e output, qualunque sia il simbolo che entri nel canale e qualunque sia quello che esca dal canale.

Suppongo che A e B siano indipendenti, ovvero che il canale è *completamente rumoroso*. Ma allora:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j)$$

E sostituendo:

$$\begin{aligned} H_r(A, B) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i) \cdot P(b_j) \log_r \frac{1}{P(a_i) \cdot P(b_j)} \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \left[\log_r \frac{1}{P(a_i)} + \log_r \frac{1}{P(b_j)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i) \cdot P(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)} \end{aligned}$$

Posso scambiare le sommatorie e portare fuori le cose che non dipendono più dalle singole sommatorie, isolando ciò che riguarda A e ciò che riguarda B , ottenendo:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^s p(b_j) \sum_{i=1}^q p(a_i) \cdot \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^q p(a_i) \sum_{j=1}^s p(b_j) \cdot \log_r \frac{1}{P(b_j)} \\ &= H_r(A) \sum_{j=1}^s P(b_j) + H_r(B) \sum_{i=1}^q P(a_i) = H_r(A) + H_r(B) \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B)$$

Avendo che le due sommatorie fanno 1.

E quindi se sono indipendenti la quantità di informazione congiunta è la somma delle due singole quantità di informazione, avendo che la quantità di informazione è additiva.

Si cerca una relazione tra la quantità di informazione in output e quella in input, ipotizzando che un po' vada persa nel canale causi rumore. Sicuramente al più in output avrò la stessa quantità di informazione.

Normalmente non si ha un canale completamente rumoroso quindi il simbolo in output dipende da quello in input, avendo A e B non indipendenti ma si ha:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j|a_i)$$

usando le probabilità in avanti che ho già a disposizione. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} H_r(A, B) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \left[\frac{1}{P(a_i)} \cdot \frac{1}{P(b_j|a_i)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(a_i)} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)} \end{aligned}$$

Per la proprietà marginale so che:

$$\sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) = P(a_i)$$

So anche che la seconda somma è l'equivocazione.

Ma allora:

$$H_r(A, B) = \sum_{i=1}^q P(a_i) \cdot \log \frac{1}{P(a_i)} + H_r(B|A)$$

Quindi in generale si ha, avendo che il primo termine della somma è l'entropia di A :

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B|A)$$

In caso fossero indipendenti avrei:

$$H_r(B|A) = H_r(B)$$

Ritrovando anche, qualora A e B fossero indipendenti:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B)$$

3.6.4 Mutua Informazione

Definizione 13. Definiamo **mutua informazione** come la differenza di quantità di informazione data dal conoscere o non conoscere il simbolo in output dal canale:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{1}{P(a_i)} - \log_r \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Ma quindi, per le proprietà dei logaritmi:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i|b_j)}{P(a_i)}$$

Moltiplico sopra e sotto per $P(b_j)$:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i|b_j) \cdot P(b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

ma allora:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

E quindi:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(b_j|a_i) \cdot P(a_i)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

e infine:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)} = I(b_j; a_i)$$

Avendo che la mutua informazione quindi non dipende dall'ordine.

Se considero il caso particolare in cui a_i e b_j sono indipendenti allora:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) \cdot P(b_j)$$

Allora:

$$I(a_i; b_j) = \log_r \frac{P(a_i) \cdot P(b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)} = 0$$

Per ora si parla di un solo simbolo in input e uno solo in output.
 Estendo la definizione alle medie:

$$\begin{aligned} I(A; b_j) &= \sum_{i=1}^q P(a_i|b_j) \cdot I(a_i; b_j) \\ &= \sum_{i=1}^q P(a_i|b_j) \cdot \log_r \frac{P(a_i|b_j)}{P(a_i)} \end{aligned}$$

E poi, per B :

$$\begin{aligned} I(a_i; B) &= \sum_{j=1}^s P(a_i|b_j) \cdot I(a_i; b_j) \\ &= \sum_{j=1}^s P(b_j|a_i) \cdot \log_r \frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)} \end{aligned}$$

e, come ultimo, la **mutua informazione del sistema**:

$$\begin{aligned} I(A; B) &= \sum_{i=1}^q P(a_i) I(a_i; B) \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)} = I(B; A) \end{aligned}$$

Teorema 9. Si può dimostrare che:

- $I(A; B) \geq 0$, per Gibbs
- $I(A; B) = 0$ sse A e B sono indipendenti
- $I(A; B) = I(B; A)$

La quantità di informazione trasmessa nel canale, per una distribuzione $P(a_i)$ fissata è proprio la mutua informazione del sistema. Infatti, tralasciando la r dell'entropia in quanto irrilevante:

$$I(A; B) = H(A) + H(B) - H(A, B)$$

e si sa che:

$$I(A; B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \geq 0$$

Inoltre sappiamo che:

$$H_r(A, B) = H_r(A) + H_r(B|A)$$

$$H_r(A, B) = H_r(B) + H_r(A|B)$$

Uso una delle due per sostituire:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) \geq 0$$

oppure:

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A) \geq 0$$

Ma so quindi che (l'entropia è comunque ≥ 0):

$$0 \leq H(A|B) \leq H(A)$$

e che:

$$0 \leq H(B|A) \leq H(B)$$

Scopro quindi che:

$$H(A, B) \leq H(A) + H(B)$$

e vale l'uguaglianza sse A e B sono indipendenti, avendo un canale completamente rumoroso.

Tra tutte queste formule abbiamo come importanti:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) \geq 0$$

che ci dice che la mutua informazione del sistema corrisponde a quella trasmessa meno l'equivocazione, che altro non è che la quantità di informazione persa causa rumore (*non si dimostra la cosa*). Avere $I(A; B) \geq 0$ è data dal fatto che il rumore non mi può mandare in negativo, “togliendo più dell'informazione presente”.

L'altra formula essenziale:

$$H(A, B) \leq H(A) + H(B)$$

Avendo che al più la massima informazione è la somma di quella di A e di quella di B , valore massimo che si ottiene solo se sono indipendenti. Negli altri casi si ha l'intervento del rumore, vedendo uscire meno quantità di informazione di quella entrata.

3.6.5 Capacità del Canale

Abbiamo detto che la quantità di informazione trasmessa nel canale, per una distribuzione $P(a_i)$ fissata è proprio la mutua informazione del sistema. Ma sappiamo che una scelta errata della distribuzione comporta cose inaspettate ed errate. Si vuole evitare che l'utente faccia scelte inopportune e si vorrebbe che la quantità di informazione trasmissibile dal canale non dipenda dalla scelta dell'utente, la *capacità del canale* non deve dipendere da $P(a_i)$.

Definizione 14. Si definisce, informalmente, la **capacità del canale** C come la massima quantità di informazione trasmissibile dal canale (ovvero la mutua informazione del sistema) al variare di tutte le possibili $P(a_i)$:

$$C = \max_{P(a_i)} I(A; B)$$

Questa definizione è corretta matematicamente ma non aiuta dal punto di vista pratico, dovendo calcolare tutte le:

$$I(A; B) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)}$$

al variare dei $P(a_i)$.

Si sono quindi ricercate delle *restrizioni* ragionevoli.

La principale di queste deriva dal fatto che:

$$I(A; B) = H_r(B) - H_r(B|A)$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H_r(B) - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)} \\ &= H_r(B) - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s p(a_i) \cdot P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)} \\ &= H_r(B) \sum_{i=1}^q p(a_i) \cdot \sum_{j=1}^s P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)} \end{aligned}$$

Quindi nella matrice di canale mi fisso su una riga, per a_i , e calcolo coi valori della riga, variando per b_j .

Si è quindi pensato ad un **canale uniforme**, dove gli elementi di ogni riga della matrice sono sempre gli stessi, al più di una permutazione. Ogni riga

è quindi una permutazione della prima riga. Posso ovviamente avere righe uguali. Con un canale uniforme chiamo:

$$w = \sum_{j=1}^s P(b_j|a_i) \log_r \frac{1}{P(b_j|a_i)}$$

per una certa riga e quindi, per un canale uniforme:

$$I(A; B) = H_r(B) - \sum_{i=1}^q p(a_i) \cdot w$$

Ma w non dipende da i :

$$I(A; B) = H_r(B) - w \cdot \sum_{i=1}^q p(a_i)$$

Ma quindi, avendo $\sum_{i=1}^q p(a_i) = 1$:

$$I(A; B) = H_r(B) - w$$

Fare:

$$C = \max_{P(a_i)} I(A; B)$$

equivale quindi a:

$$C = \max_{P(a_i)} \{H_r(B) - w\}$$

ma w è costante:

$$C = \max_{P(a_i)} \{H_r(B)\} - w$$

Vediamo se esistono tali canali uniformi.

Torniamo al CBS. Guardando la matrice vedo che la seconda riga è una permutazione della prima e quindi il CBS è un canale uniforme.

Prendiamo ora l' n -esima estensione di un CBS, CBS^n , per $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. In un CBS^n ho n copie del CBS che trasmettono un bit con una certa probabilità di trasmissione corretta, uguale per tutte. Con un CBS^n posso trasmettere un pacchetto di n bit, dove ogni bit ha la stessa probabilità di trasmissione corretta P ed errata $Q = 1 - P$. Ogni bit è trasmesso indipendentemente dagli altri, un errore su un bit non influisce sulla trasmissione degli altri. Questo ci riporta la **rumore bianco**, infatti CBS^n è il canale che si usa nel modello del canale bianco. La matrice di CBS^n , per un certo n , è uniforme, avendo quindi un canale uniforme.

Abbiamo quindi già due canali uniformi: CBS e CBS^n . Ha senso quindi

studiare tali canali uniformi.

Calcolo ora la mutua informazione e la capacità del CBS.

Parto calcolando w e scelgo di usare la prima riga, $[P \ Q]$:

$$w = P \log_2 \frac{1}{P} + Q \log_2 \frac{1}{Q}$$

e quindi, essendo $Q = 1 - P$:

$$w = P \log_2 \frac{1}{P} + (1 - P) \log_2 \frac{1}{1 - P}$$

oppure, avendo $P = 1 - Q$:

$$w = (1 - Q) \log_2 \frac{1}{1 - Q} + Q \log_2 \frac{1}{Q}$$

Ricordo che, vedere anche la figura 3.4.1:

$$H_2(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

Ma allora, avendo qui $P = p$:

- $w = H_2(P)$
- $w = H_2(Q)$

E mi basta sapere o P o Q avendo che sono legati. Per un CBS però P è un numero e basta, e anche Q quindi:

$$C = \max\{H_2(B) - h_2(P)\} = \max\{H_2(B)\} - h_2(P)$$

$$C = \max\{H_2(B) - h_2(Q)\} = \max\{H_2(B)\} - h_2(Q)$$

In un BBS la distribuzione in input dipende solo da p , ricordando la figura 3.3, e quindi:

$$C = \max_p \{H_2(B)\} - h_2(P)$$

$$C = \max_p \{H_2(B)\} - h_2(Q)$$

Si ha che B corrisponde all'output, ovvero la sorgente che vede il destinatario ed è comunque Bernoulliana e quindi è anche lei come la figura 3.4.1. Se chiamo x la possibilità che esca 0 e $1 - x$ che esca 1. Posso operare però solo su p e il massimo di $h_2(B)$ è $\frac{x}{2}$ ma allora, per le equazioni di canale:

$$x = p \cdot P + (1 - p) \cdot (1 - P)$$

$$\begin{aligned}
&= p \cdot P + 1 - P - p + p \cdot P \\
&= 1 - P - p + 2 \cdot p \cdot P \\
&= 1 - P - p \cdot (1 - 2 \cdot P)
\end{aligned}$$

Cerco un p che dia $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= x \\
&= p(1 - 2 \cdot P) = \frac{1}{2} - P = \frac{1 - 2 \cdot P}{2}
\end{aligned}$$

Ma allora, dividendo il primo e l'ultimo termine:

$$p = \frac{1}{2}$$

Ma ho supposto:

$$1 - P \neq 0 \rightarrow P \neq \frac{1}{2}$$

che è ragionevole perché sarebbe un canale completamente rumoroso. Assumo quindi un CBS non completamente rumoroso.

Posso quindi dire che:

$$C = 1 - H_2(P)$$

$$C = 1 - H_2(Q)$$

In quanto il valore massimo dell'entropia della Bernoulliana è 1 e la si ottiene quando la probabilità di uscita vale $\frac{1}{2}$, che vale quando anche la probabilità di inserire un valore è $\frac{1}{2}$ (??? risentire ultimi 15m lezione 2 13 aprile).

Passando a CBS^n ho che ogni singolo CBS è uguale e che la quantità di informazione è additiva. Si ha quindi la capacità di un CBS^n :

$$C = n \cdot (1 - H_2(P))$$

$$C = n \cdot (1 - H_2(Q))$$

3.7 Secondo Teorema di Shannon

La dimostrazione del teorema non viene fatta a lezione.

Questo teorema è fondamentale nella teoria dell'informazione.

Con questo teorema si usa praticamente tutto quanto spiegato in questo capitolo.

Si useranno alcuni passaggi matematici.

In primis la seguente maggiorazione, avendo $H(\cdot)$ funzione entropia per una sorgente Bernoulliana:

$$\sum_{k=0}^{\lambda \cdot n} \leq 2^{n \cdot H(\lambda)}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \quad \lambda \cdot n \in \mathbb{N}$$

Si ha poi il seguente teorema:

Teorema 10 (Legge Debole dei Grandi Numeri). *Date x_1, \dots, X_n variabili casuali indipendenti, con stessa distribuzione, media μ e varianza σ^2 si ha che $\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere e $\forall \delta > 0$, $\exists n_0$ tale che, $\forall n > n_0$:*

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \delta$$

Ovvero, detto altrimenti:

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| > \varepsilon \right) < \delta$$

Avendo che la media dei valori X_i può essere portata, con alte probabilità, vicino quanto si vuole a μ , che altro non è che il valore atteso. Si dice infatti che la media di tali valori dista da μ per un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Ogni bit inviato forma l'insieme delle variabili casuali che descrivono i risultati dei nostri n “esperimenti” indipendenti e uguali. per il teorema posso portare il valore medio di tale sequenza di esperimenti vicino al μ di ogni esperimento (non con certezza ma con probabilità prossima quanto si vuole a 1).

Ci si aspetta quindi un errore medio pari a $n \cdot Q$ nella spedizione di n cifre da un CBS^n ma per tale teorema lo porteremo prossimo quanto si vuole a Q , a patto di avere n grande (spedendo quindi grandi sequenze di bit).

Il secondo teorema di Shannon, a differenza del primo, riguarda i **canali rumorosi**.

Teorema 11 (Secondo Teorema di Shannon). *Dato un canale rumoroso, con una certa capacità C , è possibile trasmettere informazioni avvicinandosi arbitrariamente alla capacità del canale e contemporaneamente mantenendo arbitrariamente bassa la probabilità d'errore, ovvero la probabilità che il ricevente sbagli a decodificare. Si mantiene quindi l'affidabilità del canale, appunto la probabilità di ricevere correttamente i messaggi, prossima a 1.*

Su elearning dettagli della dimostrazione. Quanto detto in seguito è solo qualche commento non richiesto all'orale.

La struttura della dimostrazione parte da una definizione:

Definizione 15. Definiamo **regola di decisione** come una funzione che usa il decodificatore per capire quale simbolo è stato spedito a partire dal simbolo ricevuto:

$$d : B \rightarrow A$$

Si dà per scontato che possa avvenire un errore. Si ha una matrice con le probabilità all'indietro che mi dice le probabilità di avere un a_i avendo ricevuto b_j . Le colonne di tale matrice sommano 1 e hanno appunto le **probabilità all'indietro** $P(b_j|a_i)$ e si usa una **regola di massima verosomiglianza**. Potrei anche avere equiprobabilità studiando tali regole che quindi non sono uniche.

Si parla poi di **probabilità d'errore**, ovvero la probabilità che il ricevente sbaglia a decodificare, ovvero ricevuto b_j non si capisca il giusto a_i .

Il teorema poi si dimostra usando CBS^n e assumendo rumore bianco, ma anche per altri tipi di canale, che comportano conti più complessi.

Si suppone $Q < \frac{1}{2}$ anche perché se no avrei o un canale completamente rumoroso, con $=$, o che “sbaglia” più di metà delle volte ma quindi, essendo Bernoulliano, ha comunque $Q < \frac{1}{2}$.

Con A assumo solo i messaggi validi:

$$A \subset \{0, 1\}$$

Mentre B sono tutti i possibili:

$$B \subseteq \{0, 1\}$$

Inoltre, per il CBS^n :

$$P(a_i) = \frac{1}{m}$$

e quindi:

$$I(a_i) = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{m}} = \log_2 m$$

E si ha poi:

$$n \cdot C = n \cdot (1 - H_2(Q))$$

Per il teorema, dato $\varepsilon_1 > 0$:

$$\begin{aligned} I(a_i) &= \log_2 n = n \cdot (C - \varepsilon_1) \\ &= n \cdot C - n \cdot \varepsilon_1 \end{aligned}$$

che dipende da n . Ma allora:

$$m = 2^{n \cdot (C - \varepsilon_1)} = \frac{2^{n \cdot C}}{2^{n \cdot \varepsilon_1}}$$

Si scelgono poi casualmente i messaggi.

Ipotizzo una sfera per la correzione di raggio, in fase di invio per a_i , per $\varepsilon_2 > 0$:

$$r = n \cdot Q + \varepsilon_2$$

in modo che il destinatario, che anche lui ha una sfera per la correzione d'errore e sceglie il simbolo più vicino al centro, che è il più probabile, che equivale ad usare la massima verosimiglianza. Qualora però tale simbolo non fosse univoco si avrebbe errore, avendo errore nella decisione (che è l'errore della probabilità d'errore). Nemmeno provo a valutare altri simboli equidistanti. Si calcola quindi la probabilità di commettere tale errore e si continua con il ragionamento del teorema.

Shannon fa quindi una media di tutti i messaggi validi, ovvero su tutte le codifiche casuali, facendo poi vari ragionamenti geometrici e applicando i due costrutti matematici posti ad inizio sezione e la cosiddetta **equazione di Fano**.

Si cerca di dimostrare anche **l'inverso del secondo teorema di Shannon**, mettendo nel canale più informazione di quella che è trasmissibile dal canale. Si arriva a dire che, forzando il canale, la probabilità di errore non può arrivare a 0, restando ad un valore comunque positivo, sbagliando quindi a decodificare.

Il secondo teorema comunque ci dice che esiste il codice ma non ci dice come è fatto ma si è visto che usando la codifica casuale spesso si ottiene qualcosa di funzionante. **Ha comunque più valenza teorica che pratica.**

Capitolo 4

Crittografia

Lo scopo della **crittografia** è quello di memorizzare, trasmettere ed elaborare informazioni, in presenza di agenti ostili, che voglio leggere e modificare tali informazioni. La crittografia non è la **steganografia**, che consiste nel nascondere un messaggio dentro dati multimediali, occupandosi quindi di impronte digitali etc. . .

Con la crittografia non nascondo l'esistenza del messaggio ma lo codifico in modo che un esterno non possa farci nulla. Tenzialmente basta la crittografia.

La crittografia è quindi una codifica, che si aggiunge alla codifica di sorgente e alla codifica di canale, che limita la comprensione del contenuto al mittente e al destinatario.

Ormai la crittografia è una scienza che comprende tante tematiche. Si hanno quindi sia questioni di complessità computazionale, per cifrare e decifrare (mittente e ricevente devono metterci pochissimo a cifrare e decifrare mentre gli altri migliaia di anni). Si fruttano quindi la **teoria dei numeri** e l'**algebra**, con monoidi, campi, anelli etc. . . e la **complessità computazionale**.

Le applicazioni della crittografia variano dallo storage ai DRM, dalle criptovalute alla homomorphic encryption, ovvero computazione fatta su dati cifrati, dal cloud computing alla trasmissione sicura di dati sensibili e al secure secret sharing, dove ogni partecipante ha una parte del segreto e servono almeno k partecipanti per ricostruirlo, con meno partecipanti non si ha nemmeno una vaga idea dello stesso.

Lo schema standard sono **Alice** e **Bob** che si scambiano un messaggio e **Eve** che cerca di intercettare il messaggio, "origliando". Alice e Bob comunicano su un canale pubblico. Eve può leggere e/o scrivere sul canale, nel caso semplice solo leggere. Mandare il messaggio msg in chiaro, in plain text, viene sicuramente intercettato. Alice quindi codifica il messaggio ma anche così facendo, senza ulteriori specifiche, Bob non sa come leggere il messaggio.

Bisogna quindi far dipendere la codifica da una chiave k conosciuta solo da Alice e Bob. Alice calcola il c , ciphertext, come il risultato della cifratura con k e lo spedisce a Bob. Bob quindi, conoscendo la chiave può riottenere il messaggio originale, tramite una funzione $msg = D_k(c)$. Eve non sapendo k non può fare nulla: $??? = D_?(c)$. Per Bob quindi decifrare è facile per Eve quasi impossibile.

In realtà la crittografia, che prevede lo studio e la progettazione di crittosistemi sicuri, era chiamata **criptologia**. La **crittoanalisi** studia invece come “rompere” i crittosistemi, portando ad uno studio “evolutivo” dei sistemi. Quindi sia crittografia che crittoanalisi sono importanti, anche perché Eve potrebbe essere la “parte buona”, come la polizia che intercetta i terroristi. Servono quindi entrambi gli aspetti.

La criptologia era spesso definita l’unione di crittografia e crittoanalisi.

Parlando dell’**attaccante** Eve bisogna stabilire delle assunzioni, dando un modello. Si ha quindi che:

- se Eve non può né leggere né scrivere il canale è sicuro. È una situazione non realistica, avendo che normalmente si comunica via radio attraverso l’aria o via cavo
- se Eve può leggere ma non scrivere si hanno solo **attacchi passivi**, ovvero leggere i messaggi e trarne vantaggio, ed è la situazione più comune. Non si hanno **impersonificazioni**, ovvero far finta di essere uno dei due estremi della comunicazione, far finta di essere Bob o Alice
- se Eve può scrivere ma non leggere si ha che può disturbare la comunicazione, avendo che ogni canale ha, come visto, una capacità massima e se la superiamo, per il secondo teorema di Shannon, provochiamo errori di decodifica. Eve può quindi cercare di saturare il canale ma non riesce a trarre vantaggio dal messaggio, non potendolo leggere
- se Eve può leggere e scrivere si ha che può fare **attacchi attivi** e **impersonificazioni**. È la situazione ovviamente più pericolosa

SI ha che:

- Alice vuole mandare il plaintext m
- Alice codifica m tramite una funzione $E(\cdot)$, ottenendo un ciphertext, $c = E(m)$
- Alice spedisce c

- Bob decodifica c tramite $D(\cdot)$, $m = D(c)$

Alice e Bob devono quindi accordarsi prima sulle due funzioni, magari, a sua volta, in un canale non sicuro. Le due funzioni E e D devono essere mantenute segrete. Alice e Bob, più precisamente, si accordano sull'algoritmo di cifratura e di conseguenza di decifratura. Già alla fine del 1800 Kerkhoff enuncia il suo principio:

mantenere segrete le funzioni è difficile mentre mantenere segreta una piccola informazione come la chiave è più semplice.

L'algoritmo quindi può anche essere pubblico ma senza la chiave non te ne fai nulla. Inoltre cambiare chiave è più semplice che cambiare algoritmo.

Nella modernità gli algoritmi sono spesso opensource, garantendo ancora più sicurezza tramite la community che lavora sull'algoritmo, evidenziando falle e problematiche (cosa che garantisce anche una certa visibilità).

Le chiavi sono piccole, ad esempio 128, 192 o 256 bit per AES. Sono quindi più facili da tenere nascoste rispetto ad intere procedure.

Se Eve scopre la chiave segreta rompe il crittosistema, e ogni messaggio diventa praticamente in chiaro. IN tal caso si parla di **rottture totali**. Un'altra situazione è che Eve abbia varie copie c (perché "spia") e m (visto che magari dopo un po' diventa pubblico), venendo a conoscenza magari della relazione tra c e m , si parla in caso di **rottura parziale**. Un messaggio cifrato può restare pubblico per un tot di tempo prima che il rischio di essere decifrato diventi troppo alto. Questo tempo varia a seconda dell'algoritmo, della chiave e dei possibili avversari (se si parla di NSA auguri). Un'altra variabile nel discorso è quanto il messaggio deve rimanere effettivamente segreto. Si ha inoltre una serie di assunzioni non dimostrate e uno potrebbe trovare un modo per risolvere problemi che si credono difficili. Un'altro aspetto è la **legge di Moore**, avendo che le macchine con cui si decifra evolvono e si potenziano ogni circa 18 mesi. Si potrebbero anche avere nuovi algoritmi etc... e magari un'informazione sicura ora non lo sarà tra 100 anni, quando magari si avranno computer quantistici a pieno regime (e quindi serviranno altri algoritmi di cifratura). Spesso si usano due algoritmi in modo che, a medio termine, se un algoritmo viene rotto si usa l'altro.

Definizione 16. Definiamo formalmente un **crittosistema** come una quintupla:

$$(PT, CT, K, E(\cdot), D(\cdot))$$

Dove:

1. PT , spazio dei plaintext, ovvero lo spazio di tutti i possibili testi in chiaro. Solitamente sono stringhe binarie quindi è un insieme $\{0,1\}^*$ o comunque un certo Σ^* (nei cifrari storici e basta)

2. CT , spazio dei ciphertext, mi piacerebbe fosse anch'esso $\{0, 1\}^*$
3. K , spazio delle chiavi, detto **keyspace**, ovvero i possibili valori che può assumere la chiave segreta. Il keyspace non deve essere troppo piccolo perché l'attaccante potrebbe usare il bruteforce
4. funzione di cifratura $E : PT \times K \rightarrow CT$
5. funzione di decifratura $D : CT \times K \rightarrow PT$

Spesso si indicano $E_k(\cdot)$ anziché $E(\cdot, k)$ ed equivalente per D .

Scegliendo $k \in K$ scelgo una coppia $E_k D_k$.

Si noti che:

$$CT = \cup_{k \in K} E_k(PT)$$

Si ha che:

$$\forall m \forall k, D_k(E_k(m)) = m$$

Anche se non è vero in assoluto. Nei crittosistemi simmetrici si usa la stessa chiave per cifrare e decifrare, anche se in realtà si usa, per decifrare, una chiave **ottenibile** (e non per forza la stessa) facilmente da quella usata per cifrare. Nell'equazione quindi si assume che la chiave sia proprio la stessa.

Si ha che $\forall m$ e $\forall k$ $c = E_k(m)$ deve essere facile da computare ma deve essere (estremamente) difficile trovare m conoscendo solo $c = E_k(m)$. Deve essere facile computare m conoscendo c e k ma deve essere (estremamente) difficile trovare K sapendo solo $c = E_k(m)$ e m .

Facile e (estremamente) difficile sono in termini di complessità computazionale (computati o meno in tempo polinomiale da una DTM). Per altri modelli uso la **TM probabilistica** ma mai la NDTM, perché risolve in tempo polinomiale problemi che in pratica non sappiamo realmente risolvere in tempo polinomiale.

Una macchina che effettua un attacco bruteforce capisce di aver trovato la giusta chiave a seconda di vari aspetti. Dipende da cosa viene cifrato. Ad esempio parlando di file lo si capisce guardando i primi byte, i metadati, e se sono consistenti con il formato che ci si aspetta si è arrivati alla giusta decodifica. Se si parla di un semplice file di testo o si guarda se ci sono parole riconoscibili tramite un dizionario o guardare l'entropia del messaggio ottenuto, visto che i messaggi in linguaggio naturale sono molto ridondanti, avendo quindi ridondanza bassa. Se la decifratura non va a buon fine ottengo un risultato pseudo casuale, simile al risultato di una cifratura. L'entropia

basta anche solo di un pezzo.

Fare i controlli dopo una cifratura non è un grosso problema, sono calcoli veloci. Quindi aumentando lo spazio delle chiavi si aumenta la complessità, visto che il singolo controllo non è difficile.

4.1 Cifrari Storici

Partiamo con qualche accenno storico per capire il discorso.

4.1.1 Cifrario di Cesare

Tra **cifrari storici** abbiamo il **cifrario di Cesare**, che è un crittosistema simmetrico molto debole (ma in un periodo dove ben pochi sapevano anche solo leggere andava più che bene). Il messaggio, si narra, era scritto sulla testa di uno schiavo dopo averlo rasato, aspettando che poi crescessero i capelli prima di mandarlo al destinatario. Si hanno:

- $\Sigma = \{A, B, \dots, Z\}$
- $PT = CT = \Sigma^*$
- $K = \{1, 2, \dots, 25\}$
- ogni lettera è cifrata e decifrata indipendentemente

Nella cifratura, fissata k , si ottiene c avanzando di k posizioni ogni lettera nell'alfabeto. Per decifrare si “torna indietro” di k posizioni sull'alfabeto, eventualmente iniziando da capo, in modo circolare. Per questo $k = 0$ non ha senso e si parte da $k = 1$.

Avanzare di 25 posizioni equivale a tornare indietro di una. Il problema è quindi il keyspace piccolissimo (e Olivio disse che Cesare usasse sempre $k = 3$).

Il cifrario di Cesare è un esempio di **crittosistema per sostituzione monoalfabetica**, in quanto ogni lettera, fissato k , è sempre sostituita con la stessa (e anche questo è un problema di sicurezza).

Si hanno altre caratteristiche interessanti:

- decifrare con k equivale a cifrare con $26 - k$
- $D_k E_k = E_0 D_0$
- posso riordinare passi di cifratura e decifratura ottenere lo stesso risultato

4.1.2 Crittosistema di Hill

Un altro sistema storico è il **crittosistema di Hill**. In questo caso non si ha più sostituzione monoalfabetica e fa uso dell'algebra lineare. Resta comunque poco sicuro evidenziando una “bad practice”, ovvero fa tutto tramite operazioni lineari. È un crittosistema simmetrico con la chiave di decifratura che è la matrice inversa di quella di cifratura (non uso la stessa chiave quindi). Fare l'inversa di una matrice è un **problema facile** e quindi è comunque un crittosistema simmetrico.

Si hanno come chiavi i numeri da 0 a 25 che rappresentano le lettere dell'alfabeto (la a è 0 etc...). Ogni operazione è fatta in mod 26. Si sceglie un intero $d \geq 2$ e si cifrano blocchi di d lettere. Si cifra un blocco alla volta e non una lettera alla volta. La chiave di cifratura è una matrice quadrata M , con valori da 0 a 25, tale che, se $\det(M) \neq 0$ allora la matrice è invertibile e l'inversa ha valori tra 0 e 25. Ad esempio:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$$

Per vedere se la matrice è invertibile si guarda il determinante.

La chiave per decifrare non è quindi la chiave per cifrare ma si ottiene facilmente da essa.

I d numeri (che rappresentano le lettere) si mettono un vettore e si sceglie quindi la matrice che funge da chiave per cifrare.

Si avrà che $PT = CT$. Divido il testo m in l blocchi P_i di d lettere e se la lunghezza di m non è un multiplo di d si aggiungono a m lettere fittizie che siano riconoscibili come tali (anche se questa cosa può anche aiutare l'attaccante). Si avrà quindi:

$$m = P_1 P_2 \dots P_l$$

Si ha quindi che ogni blocco viene cifrato a parte:

$$C_i = M \cdot P_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, l$$

Moltiplicando la matrice per il vettore ottengo un altro vettore, coi numeri che corrispondono le lettere del blocco cifrate.

e infine si concatenano i C_i per ottenere il testo cifrato:

$$c = C_1 C_2 \dots C_l$$

Esempio 24. Si ha $m = HELP$ e $d = 2$. Come chiavi uso:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$$

Si hanno quindi:

$$P_1 = \begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Ma allora (ricordando le operazioni mod 26):

$$C_1 = M \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_2 = M \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$c = C_1 C_2 = HIAT$$

Vediamo quindi se questo crittosistema è sicuro. Supponiamo che Eve sa o scopre quanto valga d (magari provandone tante, non è una cosa costosa computazionalmente) ma non sa quanto vale M . Suppongo che veda passare c e che scopra m , magari perché dopo un tot di tempo m diventi pubblico o perché ha fatto attività di intelligence. A questo punto Eve conosce anche i blocchi e i vettori corrispondenti a m . Si ha quindi un semplice sistema di equazioni e se è fortunata ottenendo una matrice invertibile allora può riottenere la chiave M tramite semplici operazioni algebriche. Questo attacco è ancora più semplice se Eve può scegliere il testo in chiaro, qualora l'algoritmo di cifratura sia pubblico.

Se ottiene una matrice non invertibile si ha che ha ottenuto alcuni blocchi dipendenti ma comunque potrebbe ricostruire una parte di matrice e, prima o poi, magari scoprendo un altro pezzo del testo in chiaro, può scoprire l'intera chiave M .

Il grosso problema è quindi che la cifratura è un'operazione lineare, essendo fatta moltiplicando una matrice per un vettore. Si è quindi visto come un crittosistema con operazioni lineari sia da evitare.

4.1.3 Crittosistema di Playfair

Nel 1854 si è pensato al **crittosistema di Playfair** che nella versione base prevede addirittura una chiave fissa, ovvero una matrice 5×5 di lettere (non potendo cifrare la j visto che in inglese si hanno 26 lettere). Il testo è diviso in blocchi di due lettere ma non posso avere blocchi con due lettere uguali all'interno.

Si ha che la chiave è:

$$k = \begin{bmatrix} s & y & d & w & z \\ r & i & p & u & l \\ h & c & a & x & f \\ t & n & o & g & e \\ b & k & m & q & v \end{bmatrix}$$

Lo studio viene poi fatto in base a come sono le due lettere nella matrice, se nella stessa riga/colonna muovendosi ciclicamente nella riga e nella colonna. Se non sono nella stessa riga/colonna si identifica il sottorettangolo con le due lettere come estremi prendendo poi gli altri due estremi. La decifrazione si fa con le operazioni nell'ordine inverso.

Il problema grave è che la chiave è sempre la stessa. Per costruire altre chiavi si parte da una frase, si tolgono le ripetizioni e si completa la sequenza ottenuta con le lettere mancanti, in ordine alfabetico. Questo comporta un inizio spesso di senso compiuto e una fine composta spesso dalle ultime lettere dell'alfabeto (per il modo in cui la matrice viene creata a partire da una frase, all'inizio la frase non viene quasi toccata ma alla fine si aggiungono le ultime lettere dell'alfabeto, spesso poco frequenti).

Esempio 25. *Parto da:*

course on cryptography

rimuovo le ripetizioni:

coursenyptgah

completo con le lettere mancanti tranne "j":

coursenyptgahbdfiklmqvwxyz

Avrei la matrice:

$$k = \begin{bmatrix} c & o & u & r & s \\ e & n & y & p & t \\ g & a & h & b & d \\ f & i & k & l & m \\ q & v & q & x & z \end{bmatrix}$$

Ottenendo qualcosa di facile da analizzare.

È un sistema quindi polialfabetico ma le sostituzioni dei blocchi sono sempre le stesse.

4.1.4 Cifrario di Vigenère

In realtà, nel 1586, fu creato il **cifrario di Vigenère**, che è stato ritenuto sicuro per secoli.

Funziona circa come il cifrario di Cesare ma diventa abbastanza robusto in quanto la chiave cambia dopo ogni cifratura di ogni lettera del plain. Per cifrare e decifrare si usa una tabella contenente tutte le possibili cifrature di Cesare. In altri termini si ha una tabella quadrata di righe e colonne apri al numero delle lettere dell'alfabeto. La prima riga è nell'ordine giusto, la secondo ruotata di 1 (si parte da "b" e si arriva ad "a ") e così via.

Come chiave si sceglie una parola che viene ripetuta fino a ottenere la stessa lunghezza del testo in chiaro.

Si prende la coppia (m_i, k_i) e si usano queste come coordinate (la prima colonna e la prima riga sono l'alfabeto in ordine coretto e si usano come coordinate) per prendere una lettera dalla tabella sopra costruita. Per decifrare si fa l'ordine opposto, partendo da (c_i, k_i) , sfruttando la colonna che inizia con c_i cercando la cella contente k_i per ottenere la coordinata sulle righe.

Questo sistema è stato considerato sicuro al 100% per secoli.

Si ha quindi che la i -esima lettera di m è cifrata con il cifrario Cesare dove la chiave è l' i -esima lettera di k . Se la lunghezza di k è l (prima delle ripetizione) allora la lettera di m in posizione $i, i + l, i + 2 \cdot l$ etc... sono cifrate sempre con lo stesso carattere di k , quindi con la stessa chiave. Suppongo però di conoscere la lunghezza della chiave e scrivo il testo cifrato in una matrice, di k colonne, in modo che i caratteri cifrati dallo stesso carattere sono sulla stessa colonna. Posso quindi fare un'analisi delle frequenze su ogni colonna e trovare la chiave di ogni colonna. Si rompe quindi il crittosistema anche se il numero di possibili chiavi di per n lettere è 26^n (già solo per $n = 5$ parliamo di $26^5 = 11881376$) essendo quindi un numero abbastanza grande per rendere infattibile un bruteforce (a meno di usare un computer, cosa non fattibile fino a qualche decennio fa). Bisogna comunque sapere la lunghezza della chiave.

Nel 1860 Kasiski dice che se la chiave è lunga n allora potrebbe capitare, se m ha certe regolarità, che la stessa parola potrebbe venire cifrata con la stessa sequenza di chiavi. Si ottengono così, nel ciphertext, ripetizioni lunghe n di lettere (anche se comunque potrebbe essere un caso). Si può quindi pensare che la chiave sia lunga quanto un divisore della distanza tra queste ripetizioni (e per senso logico si estraggono un paio di valori possibili). SI può quindi passare all'analisi delle frequenze essendo comunque risolto facilmente, in certi casi, lo step di trovare la lunghezza della chiave.

Può convenire, in questo caso, fare sovracifrature, ovvero cifrare i testi cifrati etc...

4.1.5 Sicurezza dei Crittosistemi Storici

Fino alla prima guerra mondiale anche crittosistemi deboli andavano bene causa analfabetismo. Il crittosistema veniva fatto a mano, si cifrava a mano e si trasmetteva in qualche modo. Non si potevano quindi fare troppe operazioni, dovendo farlo a mano e spesso in guerra. Inoltre essendo fatto da un umano doveva essere semplice per ridurre errori umani, che dovevano seguire le istruzioni per cifrare.

In tempo di pace, all'inizio del 1900 si sono diffuse macchine meccaniche di calcolo (prima enormi e poi sempre più piccole grazie alla corrente elettrica). Si è quindi automatizzata la cifratura permettendo crittosistemi arbitrariamente complessi (non essendoci più l'umano) con centinaia di operazioni anche perché le macchine vengono usate anche per la crittoanalisi. Tali macchine vengono create con obiettivi pacifici per usi aziendali (per segreti aziendali, per la Borsa etc. . .) e non bellici. Il mondo però aziendale ha sdegnato questi macchinari che sono stati "rispolverati" in ambito bellico, soprattutto durante la seconda guerra mondiale.

Tali macchinari utilizzano dei rotori (in sequenza il precedente al termine fa scattare il successivo etc. . .). Ogni rotore è diviso in celle e ogni cella contiene una lettera. Ogni rotore effettua una sostituzione monoalfabetica e ogni lettera di m è cifrata usando tutti i rotori. La chiave è rappresentata quindi dalla posizione dei rotori. Ogni volta che si cifra una lettera il rotore più veloce scatta cambiando chiave. Con 26 lettere dopo 26^3 lettere si ripresenta una ripetizione per la stessa lettera, rompendo ogni analisi statistica. Il metodo per inserire il messaggio deve comunque essere semplice. Si deve anche avere un modo comodo per vedere il messaggio cifrato.

Si passa quindi da macchine meccaniche a macchine elettro-meccaniche, con collegamenti elettrici (26, uno per lettera) nei rotori, avendo che ogni rotore implementa una permutazione fissata, cambiando sempre una lettera in un'altra. Ad ogni rotazione cambia la coppia di lettere, ogni volta si ha quindi una permutazione diversa.

Immagini utili su slide.

Si fa quindi una sostituzione polialfabetica con chiavi lunghissime, avendo che la chiave iniziale è la posizione causale dei rotori all'inizio, da cui si ottengono le varie chiavi derivate, dopo 26^n posizioni per n rotori. Ogni analisi statistica è destinata a fallire.

La **macchina Enigma** è ancora più complessa. Grande poco più di una macchina da scrivere ha gli stessi tasti, in modo che si possa inserire facilmente m . Si hanno di base 3 rotori (ma poi sono aumentati), con per di più possibilità di cambiarli con altri rotori. Si sceglieva la posizione iniziale dei rotori e dopo ogni lettera si accendeva una lampadina corrispondente alla

lettera cifrata. Faceva parte della chiave iniziale anche uno **scambiatore**, che costituiva una ulteriore permutazione fissa (**immagini su slide**). La cifratura faceva inoltre due giri sui rotori. La macchina andava a batteria e durava un'intera giornata.

Decifrare a mano era letteralmente impossibile. I polacchi hanno iniziato per primi a lavorare a come funzionassero le macchine Enigma per capire come intercettare i nazisti. Anche gli inglesi le hanno studiate, capendo come annullare l'effetto degli scambiatori, che per di più obbligavano una lettera a non essere mai cifrata con se stessa.

Non si poteva comunque lavorare a mano e quindi Alan Turing costruì i macchinari per decifrare. Tali macchinari erano delle **bombe logiche** e facevano attacchi bruteforce (facendo molto casino a livello di rumore sonoro per di più) tentando più chiavi in contemporanea, sapendo testo in chiaro e testo cifrato. Se la chiave non andava bene scattava alla seguente producendo appunto un suono simile al ticchettio di una bomba.

In merito si torna al discorso di quanto tempo può restare cifrato un messaggio e avendo dietro gli Alleati che pagavano per costruire macchine per decifrare tale tempo era alla fine poco.

C'era anche il macchinario detto **Colossus**, con la stessa potenza di un Pentium 4, dedicato solo a studiare il keyspace.

4.1.6 Crittoanalisi per Crittosistemi Storici

Si possono in generale avere quattro scenari di attacco, in ordine di vantaggio crescente per Eve:

1. Eve conosce solo x e vuole ottenere m . È una situazione tanto complicata per l'attaccante quanto rara. Si parla di **cryptotext only**
2. Eve conosce alcune coppie c_i, m_i . Eve quindi studia i nuovi c che arrivano e cerca di calcolare il corrispondente m . Si parla di **known plaintext**
3. Eve può scegliere i testi in chiaro e computare i corrispondenti c . Eve quindi cerca di computare m all'arrivo di un nuovo c . Durante la seconda guerra mondiale succedeva quando i tedeschi usavano per un giorno sempre la stessa chiave. È, modernamente, lo scenario classico della crittografia a chiave pubblica e si parla di **chosen plaintext**

4. Eve può decifrare ogni testo, scelto in modo adattivo, per un certo periodo di tempo. A questo Eve può più facilmente scoprire m all'arrivo di un c . Si parla di **chosen ciphertext**

Si hanno quindi, in una piccola *tassonomia* dei sistemi:

- crittosistemi a chiave pubblica
- crittosistemi simmetrici che usano due operazioni fondamentali:
 1. **trasposizione**, usando la chiave segreta come permutazione, all'aumentare della lunghezza dei blocchi permutati possono essere sicuri ma aumenta anche la complessità di calcolo. Si fa una sorta di anagramma. Questi crittosistemi non sono tendenzialmente sicuri
 2. **sostituzione**, come in Cesare. A loro volta si parla di sostituzioni **monoalfabetiche** o **polialfabetiche**, avendo che una stessa lettera può essere cifrata in modo diverso. Quest'ultima differenza è comunque molto relativa all'alfabeto in uso (si pensi ad Hill che diventa monoalfabetico nell'alfabeto dei blocchi, un blocco uguale diventa sempre lo stesso altro blocco). Monoalfabetici non sono sicuri ma nemmeno polialfabetici a meno di sostituzioni complesse

Quindi un crittosistema simmetrico è una applicazione sequenziale di trasposizioni e sostituzioni a seconda di una chiave

Il crittosistema deve essere sicuro ma anche “semplice” da usare per l'utente. In un crittosistema per sostituzione monoalfabetico non si ha sicurezza in quanto non si nascondono le proprietà statistiche delle lettere del testo in chiaro in linguaggio naturale (in inglese, ad esempio, la lettera “e” compare più spesso delle altre etc. . .). Mi basterebbe quindi, statisticamente, sfruttare tali percentuali, cercando la lettera più frequente nel ciphertext per supporre poi che sia la “e” etc. . . Si hanno inoltre coppie (ma anche sulle terne) di lettere ad alta frequenza e questo rendere ancora più debole il crittosistema. Per tutte queste statistiche si hanno tabelle dedicate. Si può cercare di falsare questi dati scrivendo testi su misura (con frasi non convenzionali, ovviamente l'assenza di spazi etc. . .) ma è abbastanza difficile ottenere un risultato accettabile, se non impossibile (bastano pochi tentativi per capire la corrispondenza tra caratteri o tuple di caratteri). Questo succede appunto perché anche cambiando la lettera non cambiano le frequenze della lingua

sottostante (e anche se questa non si conosce non sono così tante da rendere difficile andare a tentativi, inoltre lingue simili hanno percentuali simili per i caratteri). Si può cercare di rendere complicata la lingua usando lingue complesse e poco usate ma anche questa operazione è difficile abbia successo (un esempio di uso erano gli americani nella seconda guerra mondiale che usavano l'indiano Navajo)

Per risolvere il problema si sono usate varie possibilità. Ad esempio inserire lettere extra rispetto al testo per falsare le frequenze, in modo che ogni lettera abbia una frequenza simile alle altre.

Una tecnica che funziona molto bene è quella delle **omofone**. Si supponga in uso l'alfabeto inglese. Sappiamo che “e” è la lettera più frequente. Supponiamo quindi di usare un alfabeto $\Gamma = \{0, \dots, 99\}$ e se una lettera appare il 12% delle volte uso 12 numeri da Γ e ogni volta che ne vedo uno scelgo uno di questi 12 numeri a caso. Si ottiene quindi una **cifratura randomizzata**. La scelta può anche essere fatta con cura per appiattire le frequenze delle omofone. Con le omofone la crittoanalisi diventa complessa.

Se ogni volta scelgo a caso uno degli omofoni significa che lo stesso testo, cifrato due volte in tempi diversi, porta a due ciphertext diversi. Lo stesso testo in chiaro ha quindi sempre in ciphertext diverso ma questo non ha problemi in fase di decifratura, nel momento in cui conosco le omofone. La decifratura resta deterministica ma la cifratura diventa comunque più robusta.

4.2 Crittosistemi Standard

Nei tempi moderni, in ambito bancario, si è cercato ad un modo sicuro per trasportare tra banche i registri con le cifre rappresentati i soldi. Ovviamente tali registri devono essere sicuri.

Fino agli anni settanta ogni banca usava il proprio crittosistema, venduti da aziende con annesso hardware. Se due banche dovevano comunicare dovevano scegliere lo stesso.

Si inizia a pensare ad un crittosistema standard buono per usi civili, come quelli bancari, ma anche non così buono per fini militari. Parte una “gara” per fare questo crittosistema standard. Negli USA c’era IBM che nel 1977 sviluppa **DES**, grazie ad un gruppo di ricerca tra cui Faistel. All’inizio il crittosistema creato fu **Lucifer**, che venne però considerato eccessivo, rallentando inutilmente onerosi i calcoli per l’hardware dell’epoca (oltre alla volontà di indebolirlo per scopi civili da parte del governo). L’NSA aveva avuto da dire anche sulle **s-box** di DES, ovvero le parti non lineari, in quanto a conoscenza di sistemi non pubblici in grado di romperle. DES usa chiavi a 56 bit, che a breve sarebbero diventate poche.

Si fa quindi una nuova “gara” che viene vinta da Daeman e Rijmen che creano **AES**, con chiave da 128, 192 e 256 bit. AES verrà rotto dai computer quantistici, è solo questione di tempo. Abbandoneremo quindi molti crittosistemi attuali ma se ne hanno altri che resistono ai computer quantistici.

4.2.1 DES

Non chiedi all’orale i dettagli, su slide ci sono le matrici e le varie tabelle.

La chiave è lunga 56 bit avendo quindi un keyspace di 2^{56} , che ora come ora sono pochi. Questi 56 bit hanno un bit di parità ogni 7, in modo che ogni byte sia dispari, che è un pasticcio inutile. Sono quindi 56 bit più 8 di parità, che sono dipendenti.

DES fa iterazioni con una *round function* su blocchi di 64 bit di m per ottenere un c di 64 bit. Ad ogni iterazione usa una chiave derivata diversa calcolata dai 56 bit della chiave iniziale. Si ha che il calcolo delle chiavi derivate è:

- si riceve il pacchetto di 64 bit di m
- applico la permutazione iniziale, accedendo ai singoli bit della chiave e ai singoli bit di m . La permutazione è una matrice 8×8
- le prime 4 righe le chiamo c_0 e sono 28 bit e le altre quattro D_0
- calcolo da C_{n-1} e D_{n-1} , per $1 \leq n \leq 16$, i C_n e i D_n , applicando due rotazioni a sinistra verso C_{n-1} e D_{n-1} (**esempio su slide**)
- si fa una **selezione permutata** per C_n e D_n per $1 \leq n \leq 16$, chiamando K_n il risultato. Si hanno quindi 16 chiavi derivate. Ogni K_i ha 48 bit

Per la cifratura (che si ricorda avere chiave di 56 bit):

- si divide m in blocchi di 64 bit che viene cifrato separatamente. Ogni blocco cifrato lo chiamo w
- a partire da w si applica una permutazione iniziale, ovvero una matrice 8×8 , chiamando l_0 e R_0 le prime e le seconde 4 righe (ciascuno è di 32 bit), avendo che $w = L_0 R_0$. Si usano i nomi L e R perché sono a sinistra e destra della struttura di Faistel
- calcolo da L_{n-1} e R_{n-1} , per $1 \leq n \leq 16$, i L_n e i R_n tramite:

$$L_n = R_{n-1}$$

$$R_n = L_{n-1} \oplus f(R_{n-1}, K_n)$$

Questi due conti sono detti **round function** si usa, nel secondo, una chiave derivata. La funzione f prende in input un input di 32 bit e uno, la chiave, di 48 bit e restituisce un risultato a 32 bit

- c si ottiene applicando l'inversa della permutazione iniziale al blocco $R_{16}L_{16}$

Quindi la cifratura è un'iterazione in cui si applicano le permutazioni usando i vari principi di confusione etc. . . di Shannon.

Si ha quindi una **cifratura a blocchi**.

La cifratura era computazionalmente pensata per essere fatta su hardware specifico.

Si noti che la permutazione iniziale della fase di cifratura non aggiunge alcuna sicurezza al crittosistema, in quanto la tabella della permutazione iniziale è fissa (**tabella presente nelle slide**). In AES vedremo che si userà la chiave anche per la prima e l'ultima permutazione.

Per decifrare:

- preso c , di 64 bit, si applica la permutazione iniziale ottenendo $L_{16}R_{16}$
- si ricostruiscono L_0 e R_0 , iterativamente tramite:

$$R_{n-1} = L_n$$

$$L_{n-1} = R_n \oplus f(L_n, k_n)$$

per risalire la struttura di Faistel. Queste due equazioni sono l'inversa della round function. Le K_n ovviamente le applico a partire dalla 16 fino alla 0.

Chiamo $w' = L_0R_0$

- applicando w' all'inversa della permutazione iniziale si ottiene w

Vediamo ora meglio la funzione f . Si ha:

- **input:** un blocco L_n di 32 bit e una chiave/blocco di 48 bit K_n
- **output:** un blocco di 32 bit

Si procede così:

- si prende L_n e lo si espande a 48 bit usando come permutazione una matrice 8×6 con numeri ripetuti

- questo blocco è un xor bit a bit con K_n . Chiavo B il risultato, di 48 bit
- divido B in 8 blocchi di 6 bit. Ogni blocco viene ridotto a 4 bit, B' usando una tabella s-box s_i . Per B_1 produco B'_1 con s_1 etc... Tali s_i sono fisse. Per fare ciò si prendono il primo e l'ultimo bit di B , che quindi insieme sono un $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. I 4 bit centrali sono un numero $y \in \{0, \dots, 15\}$. Si ha che x e y sono riga e colonna che useremo in s_i . Quindi B'_i è il numero espresso in binario del valore contenuto in s_i alla riga x e la colonna y .

Esempio su slide.

A tale b' si applica un'ulteriore permutazione prima di restituire il risultato

Quest'ultima parte è la parte *non lineare*, in quanto si usano matrici di sostituzione (le s-box), dove le sostituzioni non sono lineari. Le s-box sono fisse e sono la parte cruciale. Inizialmente IBM aveva proposto alcune tabelle ma l'NSA, a cui IBM ha chiesto consulenza, ha fatto sostituire tali tabelle, senza che l'NSA disse il perché. Si temeva che ci fosse dell'interesse un questa modifica, viste le modalità della stessa, ma in realtà si è scoperto che NSA non aveva secondi fini. Quelle nuove tabelle non erano *backdoor* ed erano più sicure nei confronti di nuovi attacchi, la crittoanalisi lineare e la crittoanalisi differenziale, rispetto alle tabelle iniziali (probabilmente l'NSA già lo sapeva, 20 anni prima). Ovviamente sono tutte supposizioni.

Vediamo quindi le proprietà del DES.

Tra i pro:

- è veloce usando hardware dedicato per prendere i singoli bit. Le operazioni sono veloci e le matrici sono fissate (cosa che permette un accesso ancora più veloce). Si usano addirittura delle **lookup table**, fissate, con tutti i valori pre-calcolabili
- la crittoanalisi di crittosistemi deve lavorare su sistemi non lineari complessi, risoluzione dei quali tendenzialmente è un problema NP-completo. Si è provato a che a semplificare tutte le equazioni ma non si sono raggiunti risultati
- grazie a NSA il DES resiste a crittoanalisi lineare e differenziale

Tra i contro, motivi per i quali non è più sicuro:

- la chiave è lunga solo 56 bit

- si può costruire hardware specifico che lavori sul keyspace di 2^{56} bit. Tali macchine sono dette *DES Cracking Machine*. Tale macchina parallela, con 1800 processori, trovava nel 1998 la chiave in circa due giorni. Ai giorni nostri si ha addirittura hardware programmabile a livello consumer
- l'hardware dedicato a rompere DES, secondo diverse stime, non era così costoso, a fine anni '70 era sui 20 milioni di dollari, a fine anni '90 comunque 250000 dollari (a causa della legge di Moore). Rompere il crittosistema non costava più dei guadagni in caso di rottura in diversi casi

A fine anni '90 si è capito che DES non andasse più bene. A metà anni '90 parte una competizione per cambiare sistema ma questa richiede anni. Nel frattempo si è usato **triple-DES (3DES)** come alternativa a DES. In 3DES si usano due chiavi k_1 e k_2 da 56 bit ciascuna e si procede così:

- si cifra w con k_1 , ottenendo c_1
- si decifra c_1 con k_2 ottenendo c_1
- si cifra c_2 con k_1 , ottenendo c

Usando quindi la **cifratura EDE (*encryption-decryption-encryption*)**. Questo sistema è compatibile con l'hardware certificato per DES. Quindi certificare 3DES non era complicato, dovendo chiamare DES 3 volte con due chiavi.

Per 3DES c'era anche la versione con 3 chiavi.

4.2.2 AES

Nella competizione i sistemi non open non furono accettati, questo perché gli esperti devono studiarne la sicurezza.

La competizione fu vinta da Rijndael (letto come se fosse “rain doll”), un sistema creato da due Belgi, Daeman e Rijmen (da qui il nome del sistema). Rijndael è quindi il nuovo standard, detto **AES**, a partire dal 2002.

Il sistema cifra blocchi da 128 bit e si hanno chiavi tipicamente di 128, 192 e 256 bit (AES-128, AES-192, AES-256). Si potrebbero usare altre chiavi.

A differenza di DES lavora su byte e non sui bit essendo quindi più efficiente e in grado di lavorare su più tipologie di hardware, di vario prezzo. L'implementazione software è molto semplice. Nello standard sono descritti i tradeoff tra dimensione della memoria e efficienza dell'algoritmo, usando anche qui delle lookup table.

Studiamo solo AES-128 ma le altre versioni sono quasi identiche, al più della generazione delle chiavi derivate e il numero di iterazioni durante la cifratura.

L'algoritmo non accede ai singoli bit e organizza i 16 byte in una matrice 4×4 da leggere per colonne.

All'inizio la matrice contiene i 16 byte di w (prima colonna da w_0 a w_3 , seconda da w_4 a w_7 etc. . .) e alla fine quelli di c . Tale matrice è detta **matrice di stato**.

Le chiavi derivate vengono chiamate **round key**. In generale, per la cifratura:

- si prende w e li si mette nella matrice di stato
- si fa uno xor tra la matrice di stato e la round key
- si fanno 9 round in cui:
 - si fa la sostituzione dei byte della matrice di stato con una s-box, operazione detta *SubBytes*. È l'unica parte non lineare ed è veramente “ridotta all'osso”. È una trasformazione invertibile e si opera su ogni byte della matrice e si sostituisce ogni byte con sempre la stessa s-box, fissata nello standard. Tale s-box è una matrice 16×16 che permette sostituzioni di bytes. Tale s-box è facilmente calcolabile, infatti preso il byte b la sostituzione è in realtà un semplice conto. Se $b \neq 0$ metto $b = b^{-1}$. Quindi il risultato è $A \cdot b + c$, con A matrice fissata di bit. Ma questa è una operazione lineare. La parte non lineare è in $b = b^{-1}$. Posso rappresentare il byte $b = b_7 \dots b_0$ come vettore di bit, come per $A \cdot b + c$, ma anche come $GF(2^8)$, ovvero un **campo di Galois**, quindi come un polinomio in x , dove i b_i sono i coefficienti (b_0 è il termine noto). Fare l'inverso è trovare il polinomio che moltiplicato per quello che rappresenta b dà come risultato 00000001. Tutto questo avviene “modulo” un polinomio fissato irriducibile. Si divide il polinomio in analisi per quello fissato e si ottiene un quoziente e un resto. Tale resto è un polinomio di grado inferiore a quello di quello fissato. Si usa quindi un polinomio fissato di grado 8.
 - (Ultima parte molto ???)
 - si ruotano le righe, operazione detta *ShiftRows*. In questa operazione si ruotano verso a sinistra le righe

della matrice. Si ruota di i posizioni, per la i -esima riga (quindi la prima resta uguale, avendo $i = 0$)

- si fanno operazioni sulle colonne, operazioni dette *MixColumns*. In questa operazione si mettono i byte della colonna e si moltiplicano per una matrice 4×4 fissata. Il risultato è la nuova colonna. Tale conto è facile con hardware a 32 bit e in caso di hardware inferiore bisogna iterare più volte il conto
 - si applica la *addRoundKey*, ovvero lo xor bitwise con la chiave derivata, come per DES. Su una macchina a 32 bit lo xor viene facile in 4 mosse, facendo lo xor di 4 byte per volta. Se si hanno meno bit devo farlo in più mosse.
- si fa un ultimo round senza *MixColumns*
 - lo stato ora raggiunto è c

In generale, nei vari passaggi, quando si parla di moltiplicazioni si ha che esse sono fatte sui bytes. Quando si parla di somme si parla di xor.