Analisi Matematica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione con la docente Rita Pini. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto.
Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Numeri Reali

2.1 Insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

2.1.1 Numeri Naturali

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \tag{2.1}$$

Proprietà su $\mathbb{N}$

- somma $\longleftrightarrow n, m \in \mathbb{N} \rightarrow n + m \in \mathbb{N}$

2.1.2 Numeri Interi

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} \tag{2.2}$$

Proprietà su $\mathbb{Z}$

- elemento neutro=0 $\longleftrightarrow n + 0 \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$
- $x + n = m \in \mathbb{Z}$
- $x \cdot n = m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ non ha soluzione (per esempio $\nexists x \in \mathbb{Z} : 2 \cdot x = 1$)

2.1.3 Numeri Razionali

Esprimibili nella forma

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\} \tag{2.3}$$

Frazioni equivalenti

Ad ogni frazione di questo tipo può essere associato un unico numero razionale.
Ad ogni numero razionale si associano infinite frazioni.
Esistono le classi di *frazioni equivalenti* che esprimono tutte un solo numero razionale.
Criterio di uguaglianza dei fattori:

$$\frac{p}{q} = \frac{p^{'}}{q^{'}} \longleftrightarrow p \cdot q^{'} = p^{'} \cdot q$$

.

Proprietà su $\mathbb{Q}$

Tra i numeri razionali sono definite le due operazioni di somma e prodotto:
$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$:

- Proprietà commutativa
  - $a + b = b + a$
  - $a \cdot b = b \cdot a$
- Proprietà associativa
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento neutro
  - $a + 0 = 0 + a = a$
  - $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Opposto / Inverso (o reciproco)
  - $a + (-a) = 0$
  - $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, se $a \neq 0$
- Proprietà distributiva
  - $(a + b) \cdot c = ac + bc$

2.1.4 Rappresentazione di $\mathbb{Q}$ come allineamento decimale

Essendo $\mathbb{Q}$ rappresentabile come:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$$

si può associare ad ognu numero razionale infinite frazioni. Da qui si può costruire la *rappresentazione con allineamenti decimali* di un numero razionale. per esempio:

$$\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6} \text{ e } \frac{5}{6} = \frac{50}{60} = \frac{8 \cdot 6 + 2}{60} = \frac{8}{10} + \frac{2}{60}$$

quindi:

$$\frac{11}{6} = 1 + \frac{8}{10} + \frac{2}{60}$$

Si procede scomponendo le frazioni in modo da avere a denominatori le potenze di 10 a partire da 1. Quindi ad ogni razionale corrisponde un **unico** alineamento decimale (**finito** se il resto è da un certo punto in poi nullo, **periodico** se la parte decimale si ripete dopo un po' infinite volte). I resti delle divisioni sono quindi sempre limitati, compredi tra 0 e $q-1$ (q è il quoziente), se il resto è, dopo un po', nullo si ha un allineamento finito, se si ripete dopo un po' l'allineamento è periodico.
Tra gli allineamenti decimali e i numeri razionali si ha una *corrispondenza biunivoca*.

Campo

Le operazioni di somma e prodotto sono chiuse rispetto a $\mathbb{Z}$, ovvero data una coppia di numeri razionali restituiscono come risultato un numero razionale. L'insieme $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un *campo*, in quanto $(\mathbb{Q}, +)$ è un *gruppo Abeliano* (ovvero la somma è commutitativa e associativa e inoltre esiste l'elemento neutro, 0) e anche $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è un *gruppo abeliano* (ovviamente con elemento neutro 1) e si ha che la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione. Il campo $\mathbb{Q}$ è inoltre un *insieme ordinato* (**campo ordinato**): è definita infatti una *relazione d'ordine*: per ogni coppia di numeri $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si può verificare infatti una e una sola tra le condizioni

$$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b,$$

con le seguenti proprietà che collegano all'ordinamento le operazioni di campo:

- Se $a < b$
  - $\forall c, a + c < b + c$
  - $\forall c > 0, a \cdot c < b \cdot c$
  - $\forall c < 0, a \cdot c > b \cdot c$

Nota: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non sono campi; su $\mathbb{N}$ non è possibile definire opposto e reciproco, mentre su $\mathbb{Z}$ non è possibile definire il reciproco.

2.2 Insieme $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri razionali si può rappresentare su una retta euclidea orientata, però non basta per descrivere tutte le lunghezze.
Ad esempio il numero $\sqrt{2}$, che corrisponde alla misura della diagonale di un quadrato di lato 1, non è razionale.

Teorema 1. *Non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$.*

Dimostrazione. Si supponga che esista un numero $r = p/q$ il cui quadrato è 2.
I numeri $p, q \in \mathbb{N}$ poiché r è positivo, e sono primi tra loro.
Allora risulta

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

cioè $p^2 = 2q^2$.
Essendo $2q^2$ pari (multiplo di 2), anche p^2 lo deve essere. Di conseguenza anche p.
Quindi esiste un numero $m \in \mathbb{N}$ tale che $p = 2m$, da cui segue che $4m^2 = 2q^2$; semplificando $2m^2 = q^2$.
Ne deriva che anche q^2 è pari (multiplo di 2). E di conseguenza q.
Questo è assurdo perché contrasta con l'ipotesi che p e q non abbiano fattori comuni. □

Teorema 2. *Non esiste alcun numero $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 5$.*

Dimostrazione. Si procede per assurdo ipotizzando che $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 5$. si definisce $r = \left(\frac{p}{q}\right)$ con p e q primi tra loro e $p, q \in \mathbb{N}$ in quanto $r > 0$, si ha quindi:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5 \Rightarrow p^2 = 5 \cdot q^2$$

Quindi p^2 è multiplo di 5 e quindi anche p lo è. Quindi:

$$\exists m \in \mathbb{N} : p = 5 \cdot m \Rightarrow \text{sostituisco} \Rightarrow 25 \cdot m^2 = 5 \cdot q^2 \Rightarrow 5 \cdot m^2 = q^2$$

Ma quindi anche q^2, e quindi q, è multiplo di 5, fattore che va contro la tesi in quanto p e q sono primi tra loro. $\square$

I numeri rappresentabili solamente con allineamenti decimali infiniti e non periodici fanno parte dei *numeri irrazionali* $\mathbb{I}$.
L'unione dei numeri razionali e degli irrazionali forma l'insieme dei numeri reali.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} + \mathbb{I} \tag{2.4}$$

Noto che

$$\mathbb{I} = \overline{\mathbb{Q}} \tag{2.5}$$

rispetto a $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ riempie completamente la retta euclidea.

Nota 1. *$\mathbb{N}_0$ è l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ compreso lo 0.*

Tutti i numeri reali possono essere scritti come allineamenti decimali, sia finiti che infiniti, periodici o non periodici, nella forma

$$\pm c_0,\ c_1 c_2 c_3 \ldots$$

dove $c_0 \in \mathbb{N}_0$ e $c_1, c_2, \ldots$ sono cifre in una serie infinita o finita.

Nota 2. *Un allinamento di periodo 9 non esiste. Per definizione è il valore subito superiore.*

Anche per i numeri reali valgono le operazioni di somma e prodotto come definite in $\mathbb{Q}$, e le proprietà di ordinamento, quindi anche $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **campo ordinato**.

2.3 Limiti di un insieme ordinato

2.3.1 Maggiorante

Definizione 1. *Sia* $A \subseteq \mathbb{Q}, A \neq \emptyset$.
Si dice che A *è* ***superiormente limitato*** *se* $\exists \alpha \in \mathbb{R} \colon x \leq \alpha \ \forall x \in A$.
α *è* maggiorante *di* A.

2.3.2 Minorante

Definizione 2. *Sia* $A \subseteq \mathbb{Q}, A \neq \emptyset$.
Si dice che A *è* ***inferiormente limitato*** *se* $\exists \beta \in \mathbb{R} \colon x \geq \beta \ \forall x \in A$.
β *è* minorante *di* A.

2.3.3 Massimo

Definizione 3. *Si dice che* A *ha massimo se* $\exists \overline{x} \in A \colon x \leq \overline{x}, \forall x \in A$.

Nota 3. *Il massimo, se esiste, appartiene all'insieme: max* $\in A$

Osservazione 1. *Il massimo, se esiste, è unico e corrisponde al minore di tutti i maggioranti di* A.

2.3.4 Minimo

Definizione 4. *Si dice che* A *ha minimo se* $\exists x^{'} \in A \colon x^{'} \leq x, \forall x \in A$.

Nota 4. *Il minimo, se esiste, appartiene all'insieme: min* $\in A$

Osservazione 2. *Il minimo, se esiste, è unico e corrisponde al maggiore di tutti i minoranti di* A.

2.3.5 Estremo superiore

Definizione 5. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A *superiormente limitato.*
Si chiama estremo superiore *di* A *il numero* $\alpha \in \mathbb{R}$ *minimo dei maggioranti di* A.

$$\alpha = \sup A \tag{2.6}$$

Nota 5. *L'estremo superiore può talvolta anche coincidere con il massimo.*
Ad esempio negli intervalli chiusi.
Se un insieme ha un massimo, tale valore è anche l'estremo superiore. Il viceversa invece non vale: se un insieme ha l'estremo superiore non necessariamente ha anche un massimo;
Se esistono entrambi, ovviamente non possono che coincidere.

Osservazione 3. *Un estremo superiore (α), deve soddisfare queste condizioni:*

- *deve essere un maggiorante:* $x \leq \alpha \ \forall x \in A$
- *deve essere il minore dei maggioranti:* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \tilde{a} \in A \colon \alpha - \epsilon < \tilde{a} \leq \alpha$
  Spostandosi a sinistra di α (nell'insieme A) di una quantità arbitrariamente piccola ϵ si devono trovare solamente elementi di A, e non altri maggioranti.

2.3.6 Estremo inferiore

Definizione 6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A inferiormente limitato.*
Si chiama estremo inferiore *di A il numero $\beta \in \mathbb{R}$ massimo dei minoranti di A.*

$$\beta = \inf A \tag{2.7}$$

Nota 6. *L'estremo inferiore può talvolta anche coincidere con il minimo.*
Ad esempio negli intervalli chiusi.
Se un insieme ha un minimo, tale valore è anche l'estremo inferiore. Il viceversa invece non vale: se un insieme ha l'estremo inferiore non necessariamente ha anche un minimo;
Se esistono entrambi, ovviamente non possono che coincidere.

Osservazione 4. *Un estremo inferiore (β), deve soddisfare queste condizioni:*

- *deve essere un minorante:* $\beta \leq x \ \forall x \in A$
- *deve essere il maggiore dei minoranti:* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \tilde{a} \in A \colon \alpha \geq \tilde{a} > \alpha + \epsilon$
  Spostandosi a destra di α (nell'insieme A) di una quantità arbitrariamente piccola ϵ si devono trovare solamente elementi di A, e non altri minoranti.

2.3.7 Proprietà dell'estremo superiore

Teorema 3 (Proprietà dell'estremo superiore)**.** *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *limitato superiormente possiede sempre un estremo superiore.*

Nota 7. $\mathbb{Q}$*, al contrario di* $\mathbb{R}$ *non possiede tale proprietà.*
Esiste almeno un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ *che, pur essendo superiormente limitato, non ammette un estremo superiore.*

A partire da questa proprietà si può definire l'operazione di addizione tra due allineamenti infiniti di numeri reali. Per farlo, si costruiscono le somme dei troncati di due numeri approssimati ogni volta ad una cifra decimale in più: queste somme dei troncati saranno sempre minori della somma reale dei due numeri, e formano una famiglia di elementi che ha un elemento superiore; tale estremo è la somma dei due numeri cercata.

2.3.8 Densità di $\mathbb{R}$

Teorema 4 (Densità di $\mathbb{R}$)**.** *Assegnati due qualunque numeri reali distinti, si possono sempre trovare tra di essi un numero razionale e un numero irrazionale.*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ a < b, \begin{matrix} \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tale che } a < r < b \\ \exists r' \in \mathbb{I} \text{ tale che } a < r' < b \end{matrix} \tag{2.8}$$

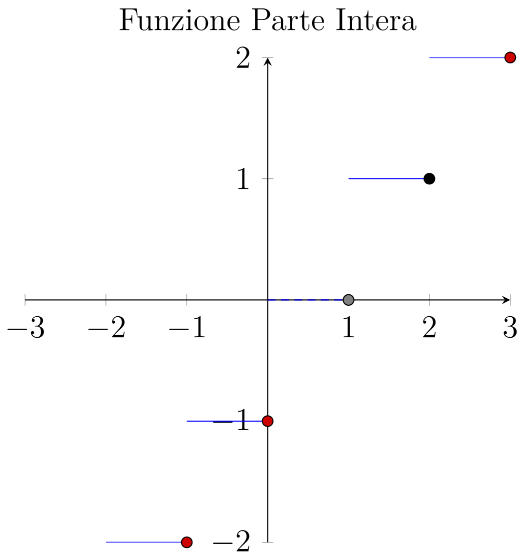
Il procedimento si può iterare infinite volte. Ne segue che tra ogni coppia di numeri reali esistono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali. Allora gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}(= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sono densi in $\mathbb{R}$.

2.3.9 Parte intera e valore assoluto

Parte intera

La funzione *Parte intera* associa d ogni $x \in \mathbb{R}$ il più grande intero $z \in \mathbb{Z}$ con $z \leq x$. Si ha la seguente notazione per la parte intera di x:

$$\lfloor x \rfloor$$



Valore assoluto

Il valore assoluto è una funzione che associa $x \in \mathbb{R}$ un $\alpha \in \mathbb{R}$ non negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ è quindi sempre positivo.

2.3.10 Proprietà archimedea

Teorema 5 (Proprietà archimedea)**.** *Siano*

- $\alpha, \beta > 0$
- $\alpha < \beta$
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

allora $\exists n \in \mathbb{N}$ *tale che* $n\alpha > \beta$.
Ovvero dopo un numero finito di "saltelli" $n\alpha$ *avrà superato* β*.*

2.4 Intervalli

2.4.1 Intervalli limitati

Intervallo chiuso

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\} \tag{2.9}$$

Intervallo aperto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\} \tag{2.10}$$

2.4.2 Intervalli illimitati, superiormente e/o inferiormente

Intervallo chiuso

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > a\} \tag{2.11}$$

Intervallo aperto

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq b\} \tag{2.12}$$

Nota 8. *I simboli di $-\infty$ e $+\infty$ sono solo convenzioni e non rappresentano dei numeri né appartengono all'insieme $\mathbb{R}$, ma sono compresi nell'insieme dei numeri reali* esteso*:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \tag{2.13}$$

2.4.3 Intervalli di $\mathbb{R}$

Si definisce la seguente simbologia per gli intervalli in $\mathbb{R}$

- $(\alpha, \beta) \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$
- $[\alpha, \beta] \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}$
- $(\alpha, \beta] \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$
- $[\alpha, \beta) \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$
- $(\alpha, +\infty) \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$

- $[\alpha, +\infty) \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$
- $(-\infty, \alpha) \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$
- $(-\infty, \alpha] \longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\}$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Sottoinsiemi connessi

Gli intervalli sono *sottoinsiemi connessi*: dati due punti dell'insieme, tutti i punti contenuti nel segmento che li congiunge sono contenuti nell'insieme.

Osservazione 5. *Qualora ci fosse un 'salto' non sarebbe un sottoinsieme connesso.*

2.5 Topologia di $\mathbb{R}$

2.5.1 Intorno

Definizione 7. *Sia $\overline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}$ si chiama* intorno circolare *(o* bolla*) di $\overline{x}$ di raggio $r > 0$ l'insieme*

$$B(\overline{x}, r) = (\overline{x} - r, \overline{x} + r) \tag{2.14}$$

2.5.2 Classificazione dei Punti

Il punto $\overline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}$ si dice:

- **interno** ad A se esiste un intorno, centrato in $\overline{x}$, tutto contenuto in A:

$$\exists r > 0\colon B(\overline{x}, r) \subset A;$$

- **esterno** ad A se esiste un intorno, centrato in $\overline{x}$, tutto contenuto nel complemento di A:

$$\exists r > 0\colon B(\overline{x}, r) \subset \overline{A};$$

- **di frontiera** se non è interno né esterno, ossia se ogni intorno centrato in $\overline{x}$ contiene sia punti di A sia punti di $\overline{A}$:

$$\forall r > 0 : \begin{cases} B(\overline{x}, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(\overline{x}, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

Osservazione 6. *Questa classificazione è disgiuntiva ed esaustiva, perché ogni punto rientra sempre in una soltanto delle tre categorie.*

L'insieme dei punti interni di A si chiama *interno* e si indica con $A°$, che non coincide necessariamente con l'insieme stesso.

L'insieme dei punti di frontiera, che possono o meno appartenere all'insieme (non si può stabilire a priori) si chiama *frontiera* e si indica con ∂A.

2.5.3 Punto di accumulazione

Definizione 8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r > 0$*
$\overline{x}$ è un punto di accumulazione *di A se, per ogni intorno di $\overline{x}$, esiste almeno un altro punto x ($\neq \overline{x}$) $\in A$ interno all'intorno.*

$$\forall B(\overline{x}, r) \ \exists \text{ almeno un punto } x \in A, x \neq \overline{x} \text{ tale che } x \in B(\overline{x}, r) \tag{2.15}$$

2.5.4 Punto isolato

Definizione 9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r > 0$*
$\overline{x}$ è un punto isolato *di A se per ogni intorno di $\overline{x}$, non esiste nessun altro punto x ($\neq \overline{x}$) $\in A$ interno all'intorno; solo $\overline{x}$ appartiene all'intorno.*

$$\exists B(\overline{x}, r) \colon \{\overline{x}\} = A \cap B(\overline{x}, r) \tag{2.16}$$

Capitolo 3

Funzioni

$$f : x \to y \tag{3.1}$$

con

- $x \in X \subseteq \mathbb{R}$
- $y = f(x) \in Y \subseteq \mathbb{R}$

- $X \to$ dominio di f
- $Y \to$ codominio di f
- $y = f(x) \to$ immagine di x
- $f(x) = \{y = f(x), x \in X\} \to$ insieme immagine di x

3.1 Grafico di funzione

Si può dire che per disegnare una funzione si ha la seguente definizione:

$$gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

3.1.1 grafici fondamentiali

Qualche $\alpha \cdot x$

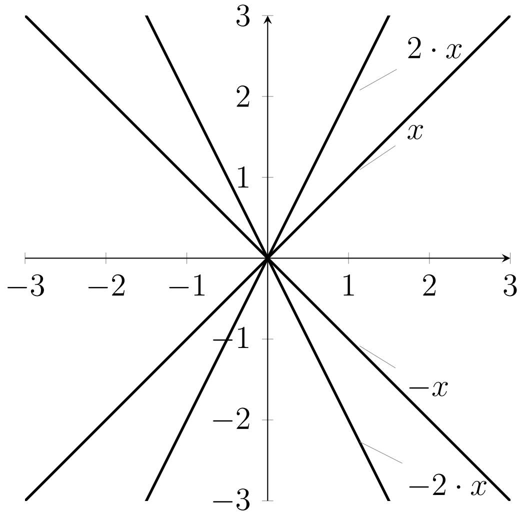


Grafico di x^2

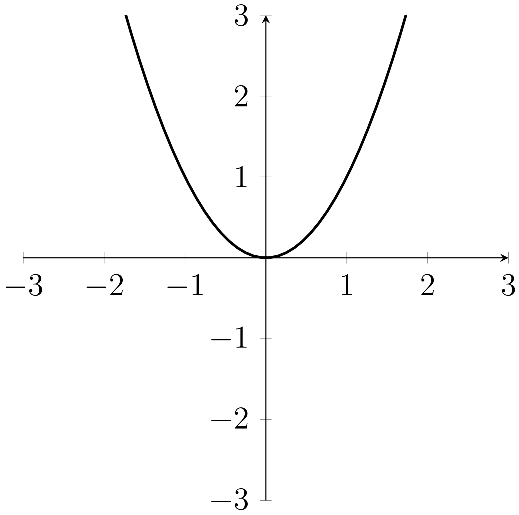
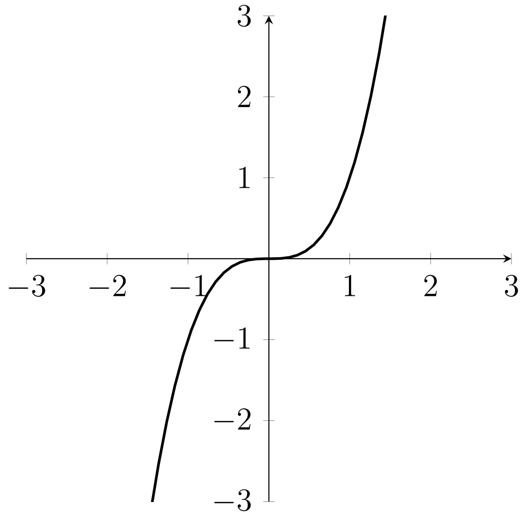
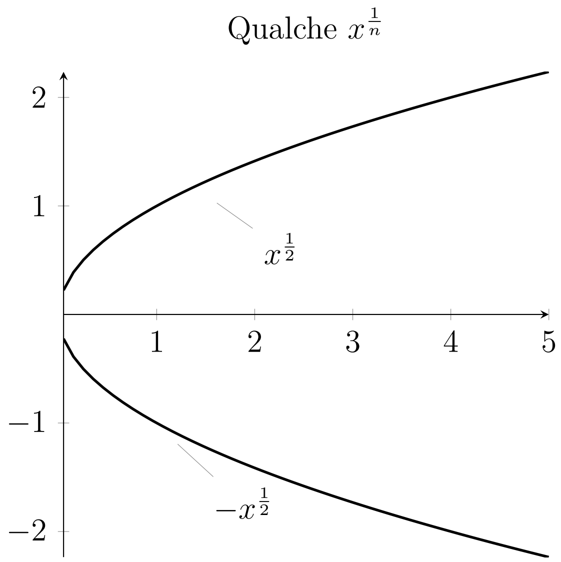
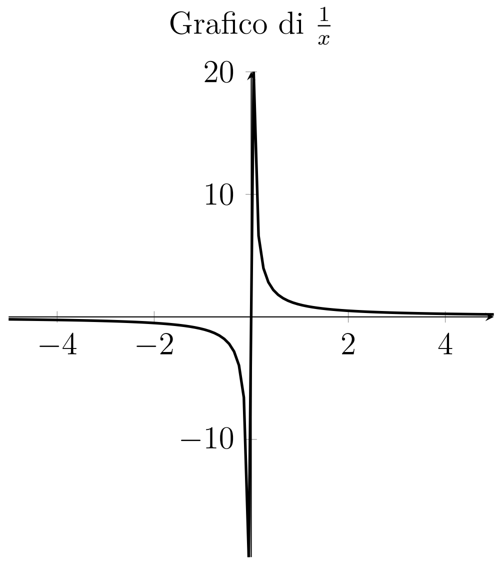


Grafico di x^3



Gli n dispari permettono $f(x)$ negative





3.2 Caratteristiche particolari

3.2.1 Funzione iniettiva

Definizione 10. *Una funzione si dice* iniettiva *se associa ad elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio.*

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{3.2}$$

3.2.2 Funzione suriettiva

Definizione 11. *Una funzione si dice* suriettiva *quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio; di conseguenza quando l'insieme delle immagini coincide con il codominio.*

$$f(X) = Y = \mathbb{R} \tag{3.3}$$

3.2.3 Funzione biunivoca (o biettiva)

Una funzione si dice *biunivoca* (o *biettiva*) quando è sia iniettiva che suriettiva.

3.3 Restrizione del dominio

Definizione 12. *Sia* $f : X \to Y$ *e sia* $X^{'} \subset X$.
Sia chiama restrizione *di* f *a* $X^{'}$, *e si indica con* $f|_{X'}$, *la funzione*

$$f|_{X'} : x^{'} \to y,\ x^{'} \in X^{'} \to f(x^{'}) \tag{3.4}$$

3.4 Simmetrie particolari

3.4.1 Funzione pari

Definizione 13. *Sia* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f *è* pari *se*

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D \tag{3.5}$$

Nota 9. *Una funzione* pari *è simmetrica rispetto all'asse delle* y*.*

3.4.2 Funzione dispari

Definizione 14. *Sia* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f *è* dispari *se*

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D \tag{3.6}$$

Nota 10. *Una funzione* dispari *è simmetrica rispetto all'origine.*

Nota 11. *Vale sempre la seguente uguaglianza:*

$$\frac{\textit{funzione dispari}}{\textit{funzione pari}} = \textit{funzione dispari}$$

3.5 Funzione periodica

Definizione 15. *Si dice che una funzione* f *è* periodica *di periodo* P *se* P *è il minimo numero positivo tale che*

$$f(x + P) = f(x) \tag{3.7}$$

3.6 Composizione di funzioni

Definizione 16. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni tale che*

$$x \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow g(f(x)) \tag{3.8}$$

si chiama composizione *di f con g la funzione*

$$g \circ f : X \to Z \tag{3.9}$$

con

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{3.10}$$

3.7 Funzione inversa

Definizione 17. *Le funzioni biunivoche sono invertibili.*
*Si definisce così la **funzione inversa** di $f(x)$:*

$$f^{-1} : Y \to X \tag{3.11}$$

con

$$x = f^{-1}(y) \tag{3.12}$$

3.7.1 Proprietà delle funzioni inverse

Funzione identica

Definizione 18. *Se $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$,*
allora $f^{-1} \circ f : X \to X$ è la funzione identica*, tale che*

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \tag{3.13}$$

Commutatività della composizione di f con f^{-1}

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} \tag{3.14}$$

Proprietà grafiche delle funzioni inverse

Le funzioni inverse sono sempre simmetriche rispetto alla bisettrice del **I** e **III** quadrante.

3.7.2 Invertibilità parziale

Alcune funzioni sono invertibili solo in una loro restrizione.

Esempio 1. $\sin x$ *e* $\cos x$ *sono invertibili solamente dopo aver ristretto il dominio in un intervallo che renda la funzione biettiva:* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\sin x : (-\infty, +\infty) \to (-1, +1)$ *non è invertibile.*
$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to (-1, +1)$ *è invertibile.*

3.7.3 Altri grafici fondamentali

Grafico di 2^x

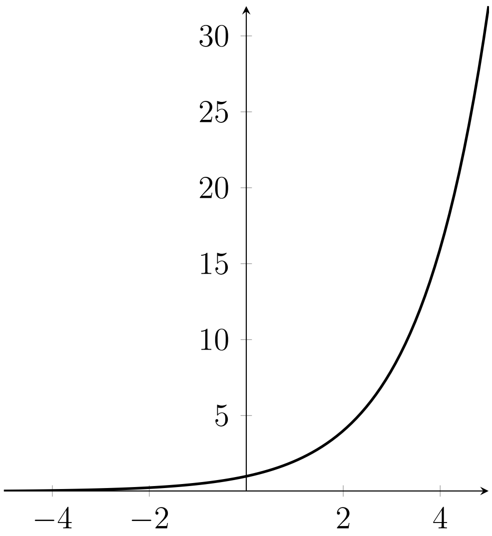


Grafico di -2^x

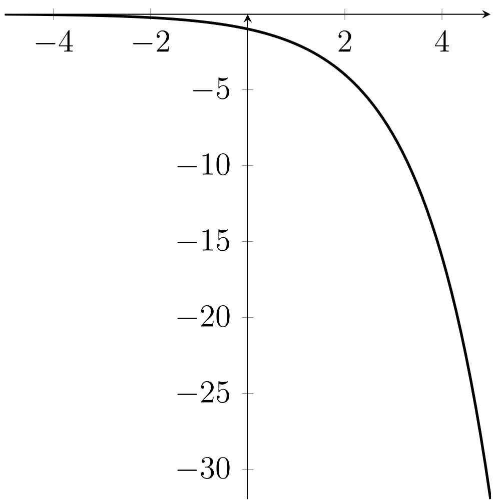


Grafico di $\log x$

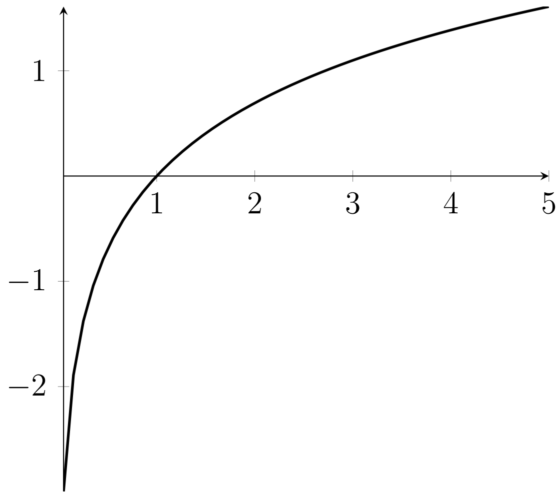
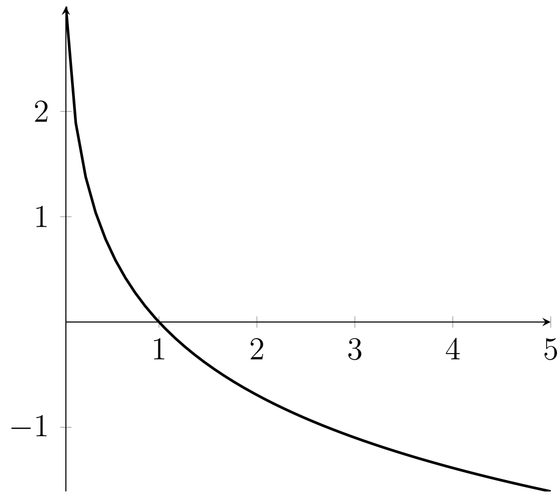


Grafico di $-\log x$



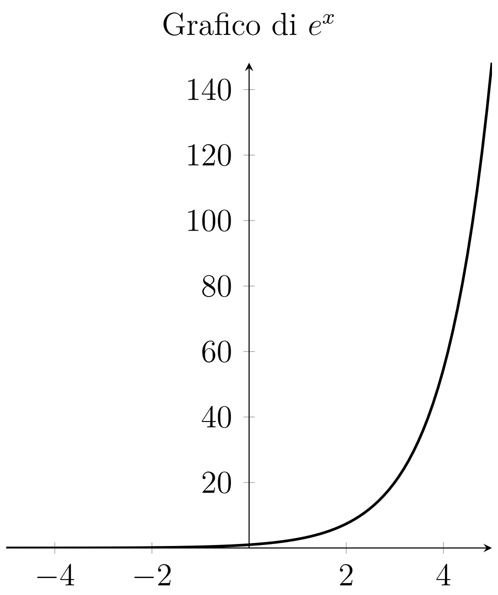


Grafico di e^x
140
120
100
80
60
40
20
−4
−2
2
4

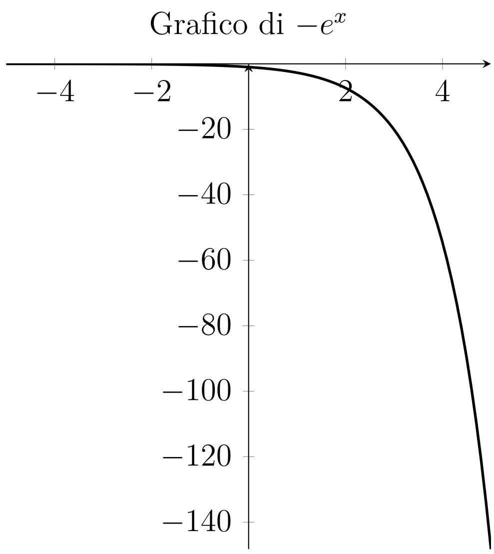


Grafico di $-e^x$
−4
−2
2
4
−20
−40
−60
−80
−100
−120
−140

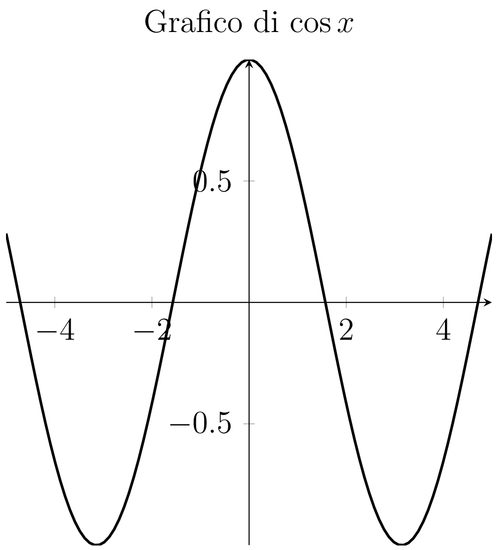


Grafico di $\cos x$
0.5
−4
−2
2
4
−0.5

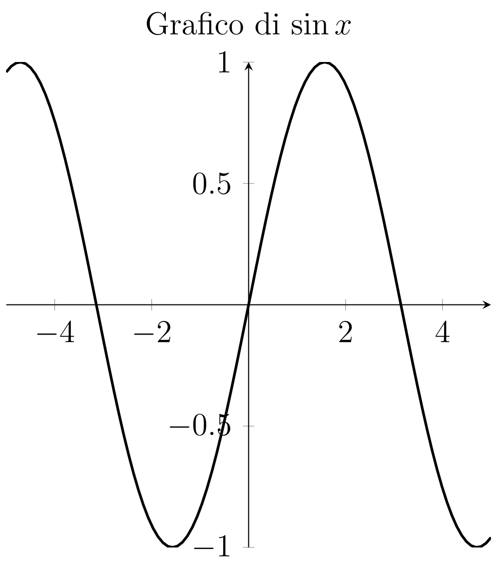


Grafico di $\sin x$
1
0.5
−4
−2
2
4
−0.5
−1

Grafico di $\tan x$

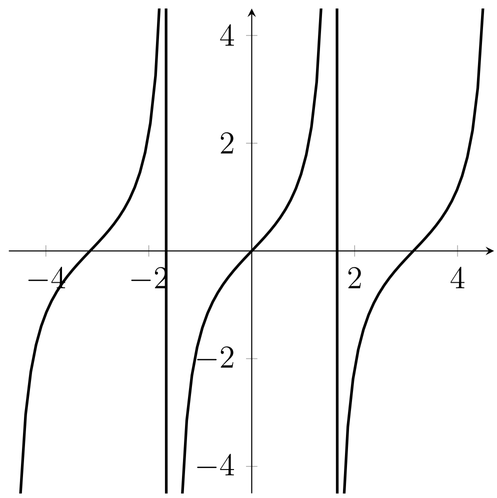


Grafico di $\arccos x$

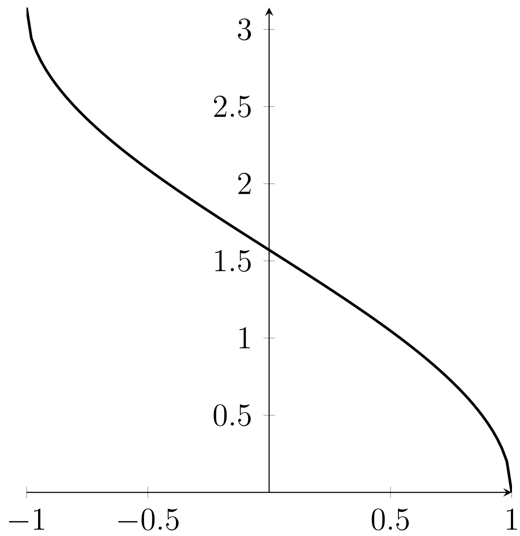


Grafico di $\arcsin x$

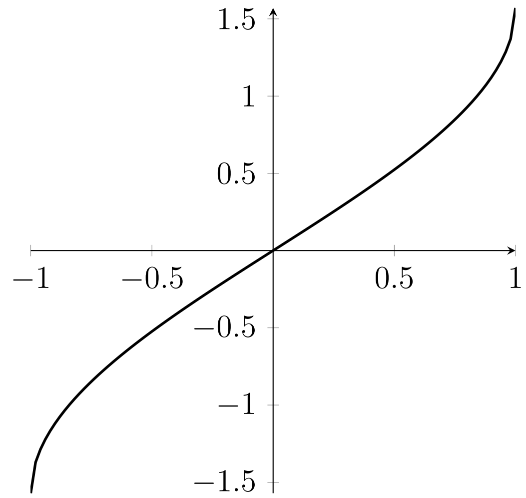
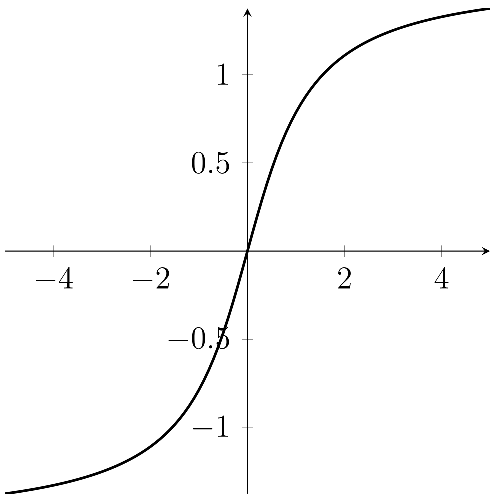


Grafico di $\arctan x$



con $\arctan x : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

Si definiscono infine le funzioni iperboliche:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Capitolo 4

Successioni

4.1 Definizione di successione

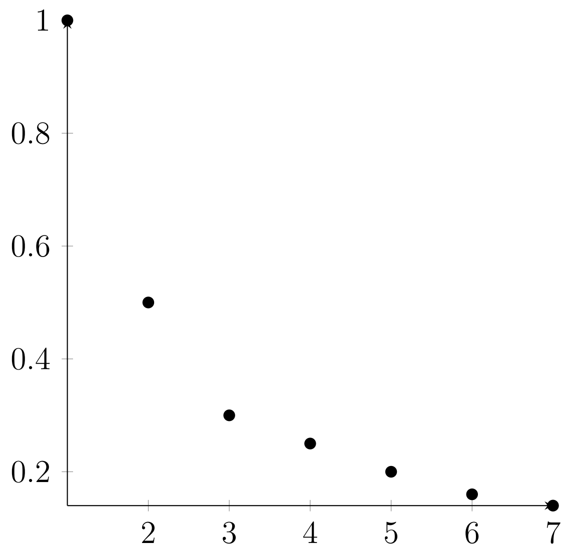
Si chiama successione una funzione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

4.1.1 Simbologia per le successioni

Una successione viene indicata con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, o per semplicità con $\{a_n\}$. A livello grafico una successione si può rappresentare come un insieme di punti:

Grafico di $1/n$



Termine generale

L'immagine $f(n)$, con $n \in \mathbb{N}$, viene indicata con a_n.

$$f(n) = a_n \tag{4.2}$$

a_n si chiama *termine generale* della successione.
Sebbene il termine generale indichi l'immagine della successione e non la successione stessa, per convenzione si può usare per indicare la successione.

4.2 Successioni monotone

Una successione $\{a_n\}$ può essere:

- crescente (o crescente in senso stretto), se $\forall n$ si ha $a_n < a_{n+1}$;
- non decrescente (o crescente in senso lato), se $\forall n$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$;
- decrescente (o decrescente in senso stretto), se $\forall n$ si ha $a_n > a_{n+1}$;
- non crescente (o decrescente in senso lato), se $\forall n$ si ha $a_n \geq a_{n+1}$.

Se una di queste proprietà è verificata, la successione è *monotona*.

Nota 12. *Si dice che una proprietà per una successione vale* ***definitivamente*** *se esiste un valore $\exists n_0$ tale che $\forall n > n_0$ la proprietà è verificata.*

È diverso affermare che una successione verifica una proprietà per infiniti n o definitivamente.

Ad esempio, la successione a valori reali $a_n = (-1)^n$ soddisfa la proprietà $a_n = 1$ per infiniti n, ma non definitivamente, infatti continua ad oscillare tra 1 e -1 e non si può stabilire un numero $n = n_0$ oltre il quale a_n verifichi *sempre* la proprietà.

Una successione è *definitivamente monotona* se una delle precedenti proprietà vale solo per $\forall n > n_0$. In questo particolare caso le proprietà delle successioni monotone valgono solo per gli $n > n_0$.

4.3 Successioni regolari

4.3.1 Successioni convergenti

Limite di successione

Definizione 19. *Si dice che la successione* $\{a_n\} \to \ell \in \mathbb{R}$ *(o, ha limite uguale a* ℓ*) per* $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \tag{4.3}$$

se $\forall\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n \in B(\ell, \epsilon)$ $\forall n \geq n_0$.

La successione a_n **converge** a ℓ.

4.3.2 Successioni divergenti

Nota 13. *Sia* $a \in \mathbb{R}$.
Si chiama ***intorno di +***∞ *un insieme del tipo* $(a, +\infty)$.
Allo stesso modo, si chiama ***intorno di -***∞ *un insieme del tipo* $(-\infty, a)$.

Definizione 20. *Si dice che la successione* $\{a_n\} \to \pm\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \tag{4.4}$$

se $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n \in (a, +\infty)$ $\forall n \geq n_0$.

4.4 Successioni irregolari

Le successioni **regolari** sono quelle per cui $\exists$ un limite finito (*convergenti*) e quelle il cui limite è infinito $\pm\infty$ (*divergenti*).
Tutte le altre si dicono **irregolari**.

4.5 Teorema di unicità del limite

Teorema 6 (di unicità del limite)**.** *Sia* a_n *una successione regolare.*
Se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

tale limite è ***unico***.

Nota: per definizione di successione regolare, $L \in \mathbb{R}$ o $L = \pm\infty$.

Dimostrazione. **Per assurdo** $\exists L_1, L_2$ con $L_1 \neq L_2$
tali che $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$.

Supponiamo che siano $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ e $L_1 \leq L_2$.

Sia $0 < \epsilon \leq \frac{L_2 - L_1}{2}$ (ovvero $B_2(L_2, \epsilon) \wedge B_1(L_1, \epsilon) = 0$, "gli intorni non si intersecano")

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } L_1 - \epsilon < a_n < L_1 + \epsilon, \forall n \geq n_0 \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tale che } L_2 - \epsilon < a_n < L_2 + \epsilon, \forall n \geq n_1 \end{array}$$

Sia $N = max\{n_0, n_1\} \Rightarrow$ impossibile! perchè se $n \to \pm\infty$, N sarebbe contemporaneamente in B_1 e B_2 e non può esserlo dato che i due intorni non si intersecano. □

4.6 Successione limitata

Definizione 21. *Si dice che la successione $\{a_n\}$ è limitata se l'insieme $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.*

4.6.1 Successione convergente è limitata

Osservazione 7. *Sia $\{a_n\}$ una successione.*
Se $\{a_n\} \to L \in \mathbb{R}$ (convergente) $\Rightarrow \{a_n\}$ è limitata.
Se $\{a_n\} \to \pm\infty$ (divergente) $\Rightarrow \{a_n\}$ non è limitata.

Dimostrazione bonus. Si scelga $\epsilon = 1$ come raggio dell'intorno. Sia ℓ il limite della successione: per ipotesi, esiste un numero intero N tale che $\forall n \geq N$ risulta $a_n \in B(\ell, 1)$. Allora l'insieme formato dai valori di $\{a_n\}$ per $n \geq N$ ha un diametro inferiore o uguale a 2, quindi è limitata. Allora poiché l'insieme dei valori della successione per $n < N$ è di cardinalità finita, è limitato anch'esso, quindi tutta la successione è limitata in quanto somma di due insiemi limitati. □

Nota 14. *Il viceversa non vale. Una successione è limitata quando il suo codominio è limitato; non implica necessariamente che la successione converga ad un limite.*
Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ limitata, ma non converge.

4.7 Teorema di permanenza del segno

Teorema 7 (di permanenza del segno)**.** *Sia* $\{a_n\} \to L$*, con* $L > 0$ *(eventualmente* $L = +\infty$*)*
allora $a_n > 0$ *definitivamente;*
ovvero $\exists n_0$ *a partire dal quale la successione è strettamente positiva.*

Dimostrazione. Sia $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$. Scelgo $\epsilon = \frac{L}{2}$

Considero l'intorno di L: $(\frac{L}{2}, \frac{3}{2}L)$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$, $a_n \in (\frac{L}{2}, \frac{3}{2}L) = B(L, \frac{L}{2})$

in particolare $a_n > \frac{L}{2}(> 0)$. □

4.8 Teorema del confronto (per successioni)

Teorema 8 (del confronto)**.**

1. *Siano* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *tre successioni a valori reali, con* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *definitivamente. Se le successioni* a_n *e* c_n *convergono entrambe ad un limite* α*, allora* b_n *ammette il limite, e tale limite coincide con* α*.*

2. *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni a valori reali, con* $a_n \leq b_n$ *definitivamente:*

   - *se* a_n *diverge a* $+\infty$*, allora anche* b_n *ammette il limite, che è* $+\infty$*;*
   - *se* b_n *diverge a* $-\infty$*, allora anche* a_n *ammette il limite, che è* $-\infty$*.*

Dimostrazione.

1. Per la convergenza di a_n e c_n si ha che

   - $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \colon \forall n \geq n_0 \to \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$;
   - $\forall \epsilon > 0\ \exists n_1 \colon \forall n \geq n_1 \to \alpha - \epsilon < c_n < \alpha + \epsilon$.

   Per tutti gli $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ devono sussistere entrambe le proprietà. Allora, poiché per ipotesi b_n è compreso tra le altre due successioni, risulta
   $$\alpha - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \epsilon,$$
   A questa relazione segue che $\alpha - \epsilon < b_n < \alpha + \epsilon$, quindi anche b_n converge ad α.

2. Nel caso in cui $a_n \to +\infty$, segue che definitivamente $a_n > M$ (con M arbitrariamente grande).
   Per ipotesi, $b_n \geq a_n$. Quindi definitivamente si ha $b_n \geq a_n > M$.
   Ne deriva $b_n > M$, ovvero b_n diverge a $+\infty$.

   Analogamente si dimostra il caso in cui $b_n \to -\infty$. □

È possibile utilizzare il criterio del confronto per dimostrare l'esistenza di alcuni limiti e determinarne la convergenza o divergenza.
Dal teorema del confronto segue che

Osservazione 8. *Sia $\{a_n\}$ il prodotto di due successioni b_n e c_n. Se $b_n \to 0$ e c_n è limitata, la successione $a_n = b_n \cdot c_n$ converge a 0.*

Definizione 22 (Limiti destro e sinistro). *Sia $\{a_n\}$ una successione convergente a valori reali. Si dice che a_n tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per* eccesso *(e si indica $a_n \to \ell^+$) se la successione è definitivamente compresa nell'intorno destro di ℓ, cioè in $[\ell, \ell + \epsilon)$. Analogamente, a_n tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per* difetto *(e si indica $a_n \to \ell^-$) se la successione è definitivamente compresa nell'intorno sinistro di ℓ, cioè in $(\ell - \epsilon, \ell]$.*

4.9 Teorema di esistenza del limite per s. monotone

Teorema 9. *(Teorema di esistenza del limite per successioni monotone)*
Tutte le successioni monotone sono regolari. Sia inoltre $\{a_n\}$ una successione a valori reali: se è monotona crescente, allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n\},$$

e tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti è $+\infty$. Se $\{a_n\}$ è invece monotona decrescente, allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n\},$$

e tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti è $-\infty$.

Dimostrazione. Si supponga $\{a_n\}$ monotona crescente, e sia $\sup\{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$. Allora ℓ è un maggiorante, e anche il minimo dei maggioranti. Quindi

$$a_n \leq \ell \ \forall n \text{ e } \forall \epsilon > 0\ \exists N \colon \ell - \epsilon < a_N \leq \ell.$$

L'elemento a_{N+1} deve essere maggiore di a_N, perché la successione è crescente, e al contempo deve essere minore di ℓ, e così via per ogni elemento di a_n che segue nell'ordinamento della successione. Tutti gli elementi a_n sono tali che, $\forall n > N$:

$$\ell - \epsilon < a_N \leq a_n \leq \ell,$$

quindi appartengono all'intorno sinistro di ℓ, cioè $a_n \to \ell^-$ per $n \to +\infty$.

Sia ora $\sup\{a_n\} = +\infty$. Poiché non ci sono maggioranti, vale che $\forall M > 0$ $\exists a_N > M$, e dato che la successione è crescente, esiste $N\colon \forall n \geq N$ si ha che $a_n \geq a_N > M$, quindi $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

La dimostrazione per $\{a_n\}$ decrescente è analoga. □

4.10 Algebra dei limiti

Si può estendere l'insieme dei numeri reali per comprendere anche il concetto di infinito (negativo e positivo). Si ottiene l'**insieme dei numeri reali *esteso***

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

In questo insieme valgono tutte le proprietà di somma e prodotto quando a e b sono finiti, ma non alcune non valgono se uno dei due è $\pm\infty$.
$\Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ non è un campo.

Teorema 10. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a valori reali, e sia $a_n \to a$ e $b_n \to b$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

- *la successione $a_n + b_n$ ammette limite e tale limite è $a + b$, purché la somma $a + b$ sia definita in $\overline{\mathbb{R}}$;*
- *la successione $a_n b_n$ ammette limite e tale limite è ab, purché il prodotto ab sia definito in $\overline{\mathbb{R}}$.*

4.10.1 Forme di indecisione

Nei casi non compresi dal precendente teorema, il risultato dell'operazione tra i due limiti non è definito. Si ha una *forma di indecisione*. In questi casi il risultato non si può sapere a priori e si deve dedurre caso per caso da teoremi e/o formule note; non è mai stabilito.
Le forme di indecisione si presentano nelle seguenti forme:

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0} \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Inoltre, si possono applicare alle successioni alcune funzioni elementari, come il logaritmo o le funzioni trigonometriche, e il limite della funzione si può calcolare come la funzione del limite della successione, come afferma il seguente teorema.

Teorema 11. *Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali convergente al numero a. Sia $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione "elementare". Se la successione a_n e il suo limite a appartengono a D, allora*

$$f(a_n) \to f(a).$$

4.11 Confronto di infiniti

Per calcolare più velocemente il rapporto di due successioni divergenti si stabilisce quale tipo di funzione "diverge più velocemente", confrontando i tipi di infiniti. Si definisce così una scala di tipi di successioni, ordinate partendo dalla più lenta a divergere:

$$\log_a^b n \qquad n^c \qquad d^n \qquad n! \qquad n^n,$$

con i vari coefficienti scelti opportumanente in modo che le successioni divergano. Il rapporto di uno di questi infiniti per uno qualsiasi dei precedenti tende a infinito, con il segno opportuno, e ovviamente il reciproco tende a zero.

Sia $a_n \to L$ (con $L > 0$) e $b_n \to 0$ (con $b_n > 0$ definitivamente) allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to +\infty.$$

Se $|a_n| \leq k$ (si ha quindi una *Successione Limitata*) e $b_n \to 0^+$ allora si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Se ho $a_n \geq k > 0$ (una successione che quindi rimane sempre distaccata dall'asse delle x, non raggiungendo mai lo 0) e $b_n \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty.$$

4.11.1 Alcuni casi particolari

Si elencano ora alcuni casi specifici per il calcolo dei limiti su potenze, esponenziali e logaritmi:

$$n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0^+ & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{a^n}_{a>0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\log_a n}_{a>0,\ a\neq 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

4.11.2 Infiniti e infinitesimi

Si dice che a_n è infinitesima (quindi che converge a 0) se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \to 0$$

Si dice che a_n è infinita (quindi che diverge a $+\infty$ o a $-\infty$) se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \to +\infty, \ -\infty$$

4.12 Criterio del rapporto

Teorema 12 (Criterio del Rapporto)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n > 0$. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

allora:

$$\begin{cases} L \in [0,1) & \textit{se } a_n \to 0 \\ L \in (1,+\infty] & \textit{se } a_n \to +\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $L \in [0, 1)$:

$\forall \epsilon > 0 \ a_n \in (L-\epsilon, \ L+\epsilon)$ (definitivamente) $\rightarrow \exists n_0 : \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < L+\epsilon, \ \forall n \geq n_0$

Scelgo di mettere $L + \epsilon < 1$. Ho quindi:

$$a_{n_0+1} < a_{n_0}(L + \epsilon)$$

$$a_{n_0+2} < a_{n_0+a}(L + \epsilon) < a_{n_0}(L + \epsilon)^2$$

$$\vdots$$

$$0 < a_n < a_{n_0}(L + \epsilon)^{n-n_0} \longrightarrow \overbrace{\frac{a_{n_0}}{(L + \epsilon)^{n_0}}}^{k>0} \cdot \underbrace{(L + \epsilon)^n}_{\{b_n\}, \ b_n \to 0} = k \cdot b_n = 0$$

□

Esempio 2. *Vediamo due casi di limiti in cui si usa il criterio del rapporto:*

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{b^n}}_{a>0, \ b>1} \rightarrow \ \textit{uso il criterio del rapporto}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n + 1)^a}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n^a} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\frac{1}{b}}^{b\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{(n + 1)^a}{n^a}}_{(1+\frac{1}{n})^a=1} = \overbrace{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}\to 0} \cdot 1 = 0$$

Quindi $n^a < b^n$.

Osservazione 9. *Il criterio del rapporto inoltre viene usato per stabilire la cosiddetta Gerarchia degli Infiniti. Si ha infatti:*

$$\log_a^b n < n^c < d^n < n! < n^n$$

Dimostriamo, per esempio, che $n^n > n!$:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{(n + 1)^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n + 1)^n}{n^n} = \underbrace{\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n}_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e} = e \longrightarrow e > 1 \longrightarrow \text{ Diverge.}$$

Forma di indecisione particolare: 1^∞.
Si tratta di un caso particolare di $a_n^{b_n}$, con $a_n \to 1$. Si ha quindi: 1^{b_n}.
Il problema è che con $a_n \to 1$ non è possibile usare il teorema del confronto.
Perchè ad esempio sia la successione $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ che $\{n\} \to +\infty$, usando il teorema del confronto, tenderebbero a 1.

4.13 Successioni per Ricorrenza

Le *successioni per ricorrenza* sono definite nella seguente maniera:

$$\{a_n\} = \begin{cases} a_1 = c, \text{ con } c \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(n,\ a_n) \end{cases} \tag{4.5}$$

Si ha quindi

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Metodi di risoluzione Raramente è possibile trovare una formula per indicare f, in quel caso si ha la cosiddetta *forma esplicita*.
In tutti gli altri casi, per risolvere il limite della successione è necessario utilizzare il teorema del confronto o provare a dimostrarne la monotonia.

4.14 Asintotici

Le 2 pagine seguenti sono il file landau.pdf della professoressa Pini, consegnato a lezione:

ASINTOTICO e o PICCOLO

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni di numeri reali definitivamente non nulli.

Asintotico: Si dice che a_n è *asintotico* a b_n, e si indica con il simbolo $a_n \sim b_n$, se

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1.$$

Si osservi che la relazione $\sim$ tra successioni definitivamente non nulle è

- riflessiva, cioè $a_n \sim a_n$;
- simmetrica, cioè $a_n \sim b_n$ se e solo se $b_n \sim a_n$;
- transitiva, cioè e $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ implica che sia $a_n \sim c_n$.

Esempi: se $a_n \to 0$, allora

$$a_n \sim \sin a_n \sim \tan a_n \sim \arctan a_n \sim \ln(1+a_n) \sim e^{a_n} - 1 \sim \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{\alpha}, \quad (1-\cos a_n) \sim \frac{a_n^2}{2}.$$

"o piccolo": Si dice che a_n è *o piccolo* di b_n, e si indica con il simbolo $a_n = o(b_n)$, se

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0.$$

Esempi: $n! = o(n^n)$, $n^b = o(c^n)$ $(b > 0,\ c > 1)$, $c^n = o(n!)$ $(c > 1)$.

Si osservi che la relazione di *o piccolo* tra successioni definitivamente non nulle

- non è riflessiva, cioè **non è** $a_n = o(a_n)$;
- non è simmetrica, cioè se $a_n = o(b_n)$, **non è** $b_n = o(a_n)$;
- è transitiva, cioè se $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$, allora $a_n = o(c_n)$.

Le relazioni di *asintotico* e di *o piccolo* sono legate come segue:

$$a_n \sim b_n \text{ se e solo se } a_n = b_n + o(b_n).$$

Infatti,

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \iff \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0 \iff \frac{a_n - b_n}{b_n} \to 0 \iff a_n - b_n = o(b_n).$$

Ad esempio, è equivalente scrivere $n^2 + \ln n \sim n^2$, oppure $n^2 + \ln n = n^2 + o(n^2)$.

Si noti che, se $a_n = o(b_n)$, e $a'_n = o(b_n)$, allora $a_n + a'_n = o(b_n)$, e $a_n - a'_n = o(b_n)$.

Attenzione!

- $a_n \sim a'_n$ non implica che sia $e^{a_n} \sim e^{a'_n}$: ad esempio, $n^2 + n \sim n^2$ ma $\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \nrightarrow 1$;
- $a_n \sim a'_n$ implica che sia $\ln a_n \sim \ln a'_n$ purché **non sia** $a_n \to 1$. Per esempio, vale la relazione $\ln(n! + n^2 - 4) \sim \ln(n!)$, ma è falso $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

USO dei SIMBOLI nei CALCOLI di LIMITE

- Se $a_n = o(b_n)$, allora $\lim(a_n + b_n) = \lim b_n$;
- se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$, allora $\lim a_n b_n = \lim a'_n b'_n$, e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{a'_n}{b'_n}$.

Si osservi che $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$ **non implica** $(a_n - b_n) \sim (a'_n - b'_n)$, anche quando $a_n - b_n$ e $a'_n - b'_n$ sono definitivamente non nulli.
Esempio: $a_n = n + 1/n$, $a'_n = n + 1/n^2$, $b_n = b'_n = n$.

Qualche esempio di applicazione:

- $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim n \cdot \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$;
- $\dfrac{n^3 - \ln n + n!}{n^n - 3^n + \cos n} \sim \dfrac{n!}{n^n} \to 0$;
- $\dfrac{\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{1/3} - 1}{(e^{2/n^2} - 1) \arctan n} \sim \dfrac{\frac{1}{3} \sin \frac{1}{n}}{\arctan n \cdot \frac{2}{n^2}} \sim \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}}{\arctan n \cdot \frac{2}{n^2}} = \dfrac{n}{6 \arctan n} \to +\infty$;
- $\dfrac{\arctan \frac{1}{n+n^3} \cdot \ln(n^2 + n + \sin n)}{3 \ln(4n^2 + \sqrt{n} + 7) \cdot (\cos \frac{1}{2n} - 1)} \sim \dfrac{\arctan \frac{1}{n^3} \cdot \ln n^2}{3 \ln 4n^2 \cdot (-\frac{1}{8n^2})} \sim \dfrac{\frac{1}{n^3} \cdot 2 \ln n}{-6 \ln n \cdot \frac{1}{8n^2}} = -\dfrac{8}{3n} \to 0$.

4.15 Limiti Notevoli

4.15.1 Numero di Nepero

Si introduce, *senza dimostrazione*, uno dei principali limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \text{ numero di Nepero}$$

Si osserva, di conseguenza, che:

$$\forall\{a_n\},\, a_n \to 0,\, a_n \neq 0 \longrightarrow (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$$

e anche che:

$$\forall\{a_n\},\, |a_n| \to +\infty \longrightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$$

Limiti notevoli derivati dal limite notevole di e

Da questo limite notevole si derivano altri limiti notevoli:

- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \longleftrightarrow \ln(1+a_n) \sim a_n$ (che si dimostra con ln a $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}$)
- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1 \longleftrightarrow e^{a_n} - 1 \sim a_n$
- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{(1+a_n)^\alpha-1}{a_n} \to \alpha \longleftrightarrow (1+a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot a_n$

4.15.2 Limite notevole del seno

Abbiamo inoltre un altro limite notevole molto importante:

$$\text{Sia } a_n > 0 \text{ e } a_n \to 0 \longrightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1 \longleftrightarrow \sin a_n \sim a_n$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\sin a_n < a_n < \tan a_n$$

Passando ai reciproci si ha

$$\frac{\cos a_n}{sin a_n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sin a_n}$$

Moltiplicando tutto per $\sin a_n$ si ottiene

$$\cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1$$

Sapendo infine che per $a_n \to 0 \longrightarrow \cos a_n \to 1$ si ottiene

$$1 < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1$$

e quindi per il teorema del confronto si ha:

$$\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$$

$\square$

Limiti notevoli derivati dal limite notevole del seno

Da questo limite notevole si ricavano i seguenti:

- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{\tan a_n}{a_n} \to 1 \longleftrightarrow \tan a_n \sim a_n$
- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{\arctan a_n}{a_n} \to 1 \longleftrightarrow \arctan a_n \sim a_n$
- $a_n \to 0 \longrightarrow \frac{1-\cos a_n}{{a_n}^2} \to \frac{1}{2} \longleftrightarrow 1 - \cos a_n \sim \frac{{a_n}^2}{2}$

Dimostrazione. (dell'ultimo limite notevole derivato)
Si sa che

$$(1 - \cos a_n) \cdot (1 + \cos a_n) = \sin^2 a_n$$

Grazie al limite notevole $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ si ha che

$$\frac{\sin^2 a_n}{{a_n}^2} \to 1.$$

Possiamo quindi dire che:

$$\frac{(1 - \cos a_n) \cdot (1 + \cos a_n)}{{a_n}^2} \to 1$$

Essendo inoltre

$$(1 + \cos a_n) = 2 \text{ con } a_n \to 0$$

Si ottiene

$$\frac{(1 - \cos a_n) \cdot 2}{{a_n}^2} \to 1 \longleftrightarrow \frac{1 - \cos a_n}{{a_n}^2} \to \frac{1}{2}$$

$\square$

Capitolo 5

Serie

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali. Si costruisce una successione che è la somma dei termini di a_n da 1 a k:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

questa è una *serie numerica* di termine generale a_n. In altre parole una *serie numerica* è una successione di somme parziali. Si usa la notazione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Di una serie solitamente si studia la convergenza o la divergenza.

5.1 Principio di Induzione

Sia $P(n)$ una proprietà che valga per l'intero n. Se $P(n_0)$ è vera e se si suppone $P(n)$ vera allora $P(n+1)$ è vera.

Esempio 3. *Somma dei primi n numeri interi:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Si ha, per il *Principio di Induzione* che:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

la tesi è verificata $\rightarrow P(n)$ è vera $\forall n$

$\square$

5.2 Serie conosciute

5.2.1 Serie geometrica

$$\overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}^{q \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \text{oscilla} & q \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Questa serie si può definire come:

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Quindi con $|q| < 1$ si ha che $q^{k+1} \rightarrow 0$ e la serie converge a $\frac{1}{q+1}$, con $q > 1$ si ha che diverge mentre con $q < -1$ si ha un oscillazione tra $+\infty$ e $-\infty$. In caso si $q = 1$ si ha banalmente una somma infinita di 1, quindi diverge. $\square$

5.2.2 Serie di Mengoli (o Telescopica)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Dimostrazione. Si ha che si può effettuare la seguente scomposizione di $\frac{1}{n(n+1)}$:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)}$$

Dato che $An + A + Bn \overbrace{=}^{!} 1$ si ha:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

e quindi:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Se si prova a fare la somma al crescere di n si ha:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

□

5.2.3 Serie Armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Dimostrazione. Considero

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$$

Poichè il termine generale è monotono decrescente è tutta sicuramente maggiore di $\frac{1}{2k}$, l'ultimo addendo, moltiplicato k volte. Quindi:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}$$

Cauchy non è rispettato quindi e la serie diverge. □

5.3 Condizione necessaria di convergenza

Teorema 13. *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergente (ovvero che tende ad un numero finito) allora* a_n *tende a* 0.

Dimostrazione. Sia $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ la successione associata alla serie, allora se la serie converge, per ipotesi, si ha:

$$s_n \to L \in \mathbb{R}$$

$$s_{n-1} \to L \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$s_n - s_{n-1} = a_n \to L - L \to 0 \longrightarrow a_n \to 0$$

$$\text{in quanto } s_n = s_{n-1} + a_n.$$

□

Nota 15. *Se* $a_n \not\to 0$ *allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *non converge, ma è* ***divergente o indeterminata****.*

Nota 16. *Non vale il viceversa: se so solo che* $a_n \to 0$*, non posso dire nulla sul carattere della serie.*

5.4 Operazioni tra Serie

- siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie convergenti $\longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ converge
- sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, convergente, e sia $k \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- se $a_n = b_n$ definitivamente allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

Teorema 14. *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *con* $a_n \geq 0$ *definitivamente* $\forall n \in \mathbb{N}$ *allora la serie non può oscillare ma è regolare (quindi converge o diverge a* $+\infty$*)*

Dimostrazione. Poiché ogni volta aggiungo alle somme parziali un qualcosa di positivo si ha: $s_n \leq s_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; si ha quindi, per il teorema sulle successioni monotone, una successione monotona *Non Decrescente* e quindi si ha sempre un limite (o $+\infty$ o $L \in \mathbb{R}$) e non può oscillare. Stesso vale se la successione fosse monotona decrescente (solo che in caso si avrebbe il limite a $-\infty$ e non a $+\infty$) □

5.5 Strumenti per lo studio del Carattere di una Serie

5.5.1 Teorema del confronto per serie numeriche

Teorema 15 (del Confronto per Serie Numeriche)**.** *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$*, con* $0 \leq a_n \leq b_n$ *,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *allora:*

- *se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge (definito maggiorante dell'altra successione) anche* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
- *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge allora anche* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge.*

Dimostrazione. Si procede così:

- Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$:

  $$\{S_n\} = a_1 + ... + a_n \leq b_1 + ... + b_n = \{S_n^{'}\}$$

  Suppongo che $s_n^{'} \to L^{'} \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $\{S_n\}$ (supposta monotona *non decrescente*), ammette limite, per la monotonia, ed è limitata; $L^{'}$ è il *sup* di $\{S_n^{'}\}$ ed è maggiorante di S_n; quindi si ha:

  $$S_n \leq L^{'}, \forall n \text{ quindi } S_n \to L \in \mathbb{R} \text{ finito } (L < L^{'}) \longrightarrow S_n \text{ converge}$$

- suppongo $s_n \to +\infty$, *monotona crescente*, e $s_n^{'} \geq s_n$ allora per il *Teorema del confronto* $s_n^{'}$ diverge a $+\infty$

$\square$

5.5.2 Teorema del confronto asintotico

Teorema 16 (del Confronto Asintotico)**.** *Siano* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$*, con* $a_n, b_n > 0$ *e* $a_n \sim b_n$ *quindi* $\frac{a_n}{b_n} \to 1$*, allora le due serie hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. Scelgo un un ϵ piccolo a piacere, per comodità scelgo $\epsilon = \frac{1}{2}$; allora:

$$\exists n \geq n_0 \longrightarrow 1 - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \epsilon$$

$$\downarrow$$

$$\text{se } \epsilon = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{b_n}{2} < a_n < \frac{3}{2} \cdot b_n$$

Quindi:

- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge per il *Teorema del confronto* (anche se è moltiplicata per $\frac{1}{2}$ converge, ovviamente)
- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} \cdot b_n = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge per il *Teorema del confronto* (anche se è moltiplicata per $\frac{3}{2}$ diverge, ovviamente)

□

5.5.3 Teorema di condensazione

Teorema 17 (Criterio di Condensazione)**.** *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *con* $a_n > 0$ *e* $a_n \geq a_{n+1}$*, successione monotona decrescente allora:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \textit{ hanno lo stesso carattere}$$

Da questo teorema possiamo trarre la seguente applicazione:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{Converge con } & a \geq 2 & \text{in quanto } \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^2} \\ \text{Converge con } & 1 < a < 2 & \text{per il Criterio di Condensazione} \\ \text{Diverge con } & 0 < a \leq 1 & \text{in quanto } \frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si dice che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *Converge Assolutamente* se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

5.5.4 Teorema della convergenza assoluta

Teorema 18 (della Convergenza Assoluta)**.** *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, se la serie converge assolutamente allora converge anche semplicemente.*

Dimostrazione. Sia $a_n = b_n - c_n$ con:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n < 0 \\ 0 & \text{se } a_n \geq 0 \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \text{ e } 0 \leq c_n \leq |a_n|$$

Per ipotesi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge quindi per il *Teorema del Confronto* anche b_n e c_n convergono:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$$

Dove tutti gli elementi di questa equazione convergono, imponendo la convergenza, per conseguenza, da destra a sinistra □

5.5.5 Teorema della Radice

Teorema 19 (Criterio della Radice)**.** *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *, con* $a_n > 0$ *allora:*

$$\sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R} =$$
$$\begin{cases} \textit{se } L > 1 & \textit{la serie diverge} \\ \textit{se } (0 <)L < 1 & \textit{la serie converge} \\ \textit{se } L = 1 & \textit{non si può dire nulla sul carattere della serie} \end{cases}$$

Dimostrazione.

- sia $(0 <)L < 1$ e sia $\epsilon > 0$ piccolo a piacere. Sia $L + \epsilon < 1$; $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0$ (definitivamente) :

  $$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon \longrightarrow a_n < (L + \epsilon)^n$$

  Dato che $(L + \epsilon)^n$ è una serie geometrica con $q < 1$ converge, quindi anche a_n converge

- sia $L > 1$; tutti i termini di a_n sono maggiori di 1. Ne consegue che:

  $$\sqrt[n]{a_n} > 1 \longrightarrow a_n \to 1$$

□

5.5.6 Teorema del rapporto

Teorema 20. *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie termini positivi. Supponendo che* $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \equiv \alpha$*:*

- *se* $\alpha < 1$ *la serie converge*
- *se* $\alpha > 1$ *la serie diverge e inoltre* $a_n \to +\infty$

  Dimostrazione. Si hanno le dimostrazioni dei due punti:

  Sia $0 < \alpha < 1$. Si può definire un $q \in (\alpha, 1)$ per cui $\exists N : \forall n > N$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Allora per questi n si ha:

  $$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N$$

  Tutti questi rapporti, del tipo $\frac{a_k}{a_{k-1}}$, sono minori di q e quindi:

  $$a_n \leq q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}$$

  Dove q^n è una serie geometrica di ragione minore di 1 ($q < 1$), e quindi converge, e quindi, per il teorema del confronto, anche a_n converge.

- Sia $\alpha > 1$. Si può definire un $q \in (1, \alpha)$ per cui $\exists N : \forall n > N$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$. Allora per questi n si ha esattamente come sopr, solo che alla fine si ha, perchè tutti i termini sono maggiori di q:

  $$a_n \geq q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}$$

  Dove q^n è una serie geometrica di ragione maggiore di 1 ($q > 1$), e quindi diverge, e quindi, per il teorema del confronto, anche a_n diverge.

  □

5.5.7 Serie conosciute

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$. essa si risolve con il confronto asintotico il più delle volte.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{Converge con} & a > 1 \\ \text{Diverge con} & a \leq 1 \end{cases}$$

Esempio 4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^m \cdot a_{2^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^m$$

Esempio 5. *Sia data* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \cdot \log^b n}$ *si ha:*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \cdot \log^b n} = \begin{cases} \textit{Converge con } \ a > 1, \forall b \\ \textit{Converge con } \ a = 1, b > 1 \\ \textit{Diverge negli altri casi} \end{cases}$$

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *di segno qualsiasi.* Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge anche la serie iniziale converge

Esempio 6.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge per convergenza assoluta*
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *non si può dire nulla sulla divergenza assoluta*
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n)}{n}$ *non sappiamo dire nulla*

5.5.8 Criterio di Leibniz

Teorema 21 (criterio di Leibniz)**.** *Sia*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$

. Si ha una serie oscillante. Se:

- $a_n \geq 0$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

allora la serie converge

Dimostrazione. Si ha: $s_1 = a_1, \ s_2 = a_1 - a_2, \ s3 = a_1 - a_2 + a_3$ ovvero $(s_2 + a_3), ...$
Quindi $\{s_{2n}\}$, le successioni delle somme parziali di indici pari, è monotona *non decrescente* e superiormente limitata. Quindi

$$s_{2n} \to S \in \mathbb{R}$$

$$\exists \epsilon > 0, \ \exists n_0, \forall n \geq n_0 \longrightarrow S - \epsilon < s_{2n} \leq S$$

Vediamo le somme parziali di indice dispari. Dato che $a_n \to 0$

$$\exists \overline{N}, \forall n \geq \overline{n} \longrightarrow a_n < \epsilon$$

Quindi:

$$s_{2n} + a_{2n+1} < S + \epsilon$$

In conclusione $\forall n$

$$S - \epsilon < s_{2n} + s_{2n+1} < S + \epsilon$$

Quindi la successione delle somme parziali ammette limite finito □

Esempio 7.

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  Si ha: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ *e* $\frac{1}{n} \to 0$. *Quindi la serie converge.*

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

  Si ha:

  $$n - \sqrt{n} \leq n + 1 - \sqrt{n+1}$$

  e quindi:

  $$\sqrt{n+1} \leq n + \sqrt{n}$$

  infine:

  $$\sqrt{n+1} \leq 1 + n + 2 \cdot \sqrt{n}$$

5.5.9 Teorema di Dirichlet

Teorema 22 (di Dirichlet)**.** *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie assolutamente convergente. Allora, per ogni permutazione* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *si ha che la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)}$ *è convergente alla stessa somma. (Attenzione: deve essere una convergenza assoluta)*

Capitolo 6

Funzioni

Si definisce una funzione f come:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In generale con $D = (a, b)$ o $D = (a, b) \cup (c, d)$.
Per calcolare il limite di una funzione lo si calcola nei *punti di accumulazione*.

Definizione 23. *Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D^{'}$ ($D^{'}$ indica l'insieme dei punti di accumulazione di D). Si dice che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \ \ con \ L \in \mathbb{R}$$

se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in B(x_0, \delta) \backslash \{x_0\} \ \ si \ ha \ f(x) \in B(L, \epsilon)$$

Cioè se:

$$|x - x_0| < \delta, \ \ con \ x \neq x_0 \ \ e \ x \in D, \ \ comporta \ |f(x) - L| < \epsilon$$

Definizione 24. *Si dice che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in B(x_0, \delta) \backslash \{x_0\} \ \ si \ ha \ f(x) > k$$

*Se il limite di $f(x)$ diverge (a $+\infty$ o $-\infty$) la retta $x = x_0$ si dice **Asintoto Verticale** per f.*

Definizione 25. *Sia $+\infty$ punto di accumulazione per D (ovvero D non è superiormente limitato). Si dice che:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L, \ \textit{con } L \in \mathbb{R}$$

se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in (M, +\infty) \ \textit{e } x \in D, \ \textit{tale che } f(x) \in B(L, \epsilon)$$

Se il limite di $f(x)$ tende a $L \in \mathbb{R}$ la retta $y = L$ si chiama ***Asintoto Orizzontale*** *per f (vale sia con $x \to +\infty$ che con $x \to -\infty$)*

Definizione 26. *Si dice che:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \exists H \in \mathbb{R} : \ \forall x \in (H, +\infty), \ \textit{con } x \in D, \ \textit{si ha } f(x) \in (k, +\infty)$$

Definizione 27. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f periodica con periodo T(cioè T è il più piccolo numero positivo , $\neq 0$, tale che $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Se:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(c) = L, \ \textit{con } L \in \mathbb{R}, \ \textit{allora } f(x) = L \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Sia per assurdo f non costante, cioè:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \ f(x_0) = L^{'} \neq L$$

□

Definizione 28. *Sia $f : D \to R$, con x_0 punto di accumulazione di D. Si dice che:*

$$\lim_{x\to x^-} f(x) = L, +\infty, -\infty$$

se, per ogni intorno di L o di $+\infty$ o di $-\infty$:

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \textit{si ha l'esistenza del limite}$$

Teorema di collegamento

Teorema 23 (di collegamento)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ sia $p \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per D. Allora:*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \ L \in \mathbb{R}^*, \ \textit{sse } \forall \{x_n\} \subset D, \ \textit{con } x_n \neq p \ \textit{e } x_n \to p, \ \textit{si ha } f(x_n) \to L$$

Esempio 8. *Due esempi di applicazione:*

- *Applico il teorema del collegamento a* $\frac{sin(x)}{x}$. *Dato che:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \text{ si ha: } \lim_{n \to +\infty} \frac{sin(a_n)}{a_n} = 1, \forall \{a_n\} \to 0, \ \{a_n\} \neq 0$$

- *Posso dimostare che:*

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

in quanto posso definire $\frac{1}{x} = \pi \cdot n$, *avendo quindi sempre un argomento del sin che diverge, in questo caso:*

$$\lim_{x \to +\infty} sin\,(\pi \cdot n) = 0$$

posso però anche definire $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot n$, *che diverge comunque però:*

$$\lim_{x \to +\infty} sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot n \right) = 0, 1, -1 \text{ (oscilla)}$$

Si ha quindi che non tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite, quindi il teorema del collegamento garantisce l'inesistenza del limite.

Osservazione 10. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

è unico lo sono anche:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Osservazione 11. *sia* x_0 *di accumulazione per* D *sia a sinistra (-) che a destra (+) allora:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

sse:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

comodo per calcolare limiti verso un punto non incluso nel dominio.

Teorema di unicità del limite

Teorema 24. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per D. Se:*

$$\exists \lim_{x\to p} f(x) = L,\ L \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora questo limite è unico.

Teorema di permanenza del segno

Teorema 25 (di permanenza del segno)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $p, \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per D. Se:*

$$\lim_{x\to p} f(x) > 0$$

allora $f(x) > 0$ $\forall x$ in un opportuno intorno di p (e in D).

Teorema del confronto

Teorema 26 (del confronto)**.** *Siano $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ e p di accumulazione per D. Se:*

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall x \in D\backslash\{p\}$
- $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$

allora:

$$\lim_{x\to p} g(x) = L$$

Osservazione 12. *Se si ha $h(x)\cdot k(x)$ con $h(x) \to 0,$ per $x \to p$ e $|k(x) < c|$, con c costante, allora:*

$$0 \leq |h(x) \cdot k(x)| \leq |h(x) \cdot c|$$

Corollario 1. *Se $f, g : D \to \mathbb{R}$, p di accumulazione per D. Se*

- $f(x) \leq g(x)$
- $$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$$

allora: $\lim_{x\to p} g(x) = +\infty$ *Vale anche con* $-\infty$

Nota 17. *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona non decrescente se:*

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2,\ \textit{si ha}\ f(x_1) \leq f(x_2)$$

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2,\ \textit{si ha}\ f(x_1) < f(x_2)$$

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona non crescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2,\ \textit{si ha}\ f(x_1) \geq f(x_2)$$

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona decrescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2,\ \textit{si ha}\ f(x_1) > f(x_2)$$

Teorema 27 (di esistenza del limite per funzioni monotone)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D = (a, b)$, se f è monotona non decrescente allora:*

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x)$$

e inoltre:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup\{f(x)\},\ \textit{con}\ x \in (a, b)$$

ovviamente:

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$$

e inoltre:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{f(x)\},\ \textit{con}\ x \in (a, b)$$

Nota 18 (qualche limite importante)**.** *Si hanno:*

1. $f(x) = x^\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ \ con \ \alpha \in \mathbb{R}$

   - $x \to +\infty = \begin{cases} +\infty \ \ con \ \alpha > 0 \\ 1 \ \ con \ \alpha = 0 \\ 0 \ \ con \ \alpha < 0 \end{cases}$
   - $x \to 0^+ = \begin{cases} 0 \ \ con \ \alpha > 0 \\ 1 \ \ con \ \alpha = 0 \\ +\infty \ \ con \ \alpha < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \alpha^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   - $x \to +\infty = \begin{cases} +\infty \ \ con \ \alpha > 1 \\ 1 \ \ con \ \alpha = 1 \\ 0 \ \ con \ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$
   - $x \to 0 = \begin{cases} 0 \ \ con \ \alpha > 1 \\ 1 \ \ con \ \alpha = 1 \\ +\infty \ \ con \ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

3. $f(x) = log_\alpha x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ \ con \ \alpha \neq 1 \ \ e \ \alpha > 0$

   - $x \to +\infty = \begin{cases} +\infty \ \ con \ \alpha > 1 \\ -\infty \ \ con \ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$
   - $x \to 0 = \begin{cases} -\infty \ \ con \ \alpha > 1 \\ +\infty \ \ con \ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

6.0.1 Operazioni sui limiti

Teorema 28 (dell'algebra dei limiti)**.** *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, p di accumulazione per D. Se:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_1$$

e

$$\lim_{x \to p} g(x) = L_2$$

allora:

$$\lim_{x \to p} (f + g)(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{L_1}{L_2}$$

Purché le operazioni siano definite in $\overline{\mathbb{R}}$

Osservazione 13. *Se $f(x) \to L$, con $L > 0$ e $g(x) \to 0$ ma si ha $g(x) > 0$ in un intorno di $p \backslash \{p\}$, allora:*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Teorema del limite di composizione

Teorema 29 (del limite di composizione)**.** *Siano $f : D_1 \to \mathbb{R}$ e $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Sia p_1 di accumulazione per D_1. Si ha:*

$$\lim_{x \to p_1} f(x) = L_1$$

Si ha poi che L_1 è di accumulazione per D_2 e quindi:

$$\lim_{t \to L_1} g(t) = L_2$$

ovvero se:

$$\exists\ (g \circ f)(x),\ \forall x \in D_2$$

allora:

$$\lim_{x \to p_1} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to p_1} g(f(x)) = \lim_{t \to L_1} g(t)$$

6.1 Continuità

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D$, con x_0 di accumulazione per D. Si dice che F è continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema 30. *Le funzioni elementari sono continue in ogni punto del loro dominio.*

Esempio 9. *Sia $f(x) = e^x$, con $x_0 \in \mathbb{R}_0$:*

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

allora $\exists \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 \to \forall x |x - x_0| < \delta \to |e^x - e^{x_0}| < \epsilon$, quindi $e^{x_0} - \epsilon < e^x < e^{x_0} + \epsilon$ Passando hai logaritmi si ha:

$$\log(e^{x_0} - \epsilon) < x < \log(e^{x_0} + \epsilon) \longrightarrow \log(1 - \frac{\epsilon}{e^{x_0}}) < x - x_0 < \log(1 + \frac{\epsilon}{e^{x_0}})$$

ponendo $m = \min\{\log(1 - \frac{\epsilon}{e^{x_0}}, \log(1 + \frac{\epsilon}{e^{x_0}}\}$ si ha che $|x - x_0| < m \to |e^x - e^{x_0}| < \epsilon$ e quindi si ha continuità in x_0

Nota 19. *Se $x_0 \in D$ è di accumulazione per D f è:*

- *continua da destra in x_0 se:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- *continua da sinistra in x_0 se:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- *continua su D se contemporaneamente continua sia da destra che da sinistra*

Teorema di continuità di somma, prodotto e quoziente

Teorema 31 (di continuità di somma, prodotto e quoziente)**.** *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_o \in D$, punto di accumulazione per D. Se f e g sono continue in x_0 lo sono anche:*

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *(con $g(x) \neq 0$)*

Dimostrazione.

- per $f + g$:

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

- per $f \cdot g$:

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$

- per $\frac{f}{g}$, con $g(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

□

Definizione 29. *Si dice che f è continua in D se f è continua in tutti i punti di D*

teorema di continuità delle composizioni

Teorema 32 (di continuità delle composizioni)**.** *Siano* $f : D_1 \to \mathbb{R}$*, continua in* x_0 *e* $g : D_2 \to \mathbb{R}$*, con* $f(x_0) \in D_2$ *e* g *continua in* x_0*. Inoltre* $\exists g \circ f$ *in un intorno di* x_0*. Allora* $g \circ f$ *è continua in* x_0

Dimostrazione. Sia:

$$\epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta,\ x \in D_1$$

$$\downarrow$$

$$|(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x_0)| < \epsilon \longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

Sia ha $\epsilon > 0$, per continuità di g:

$$\exists \delta_1 > 0\ |y - f(x_0)| < \delta_1 \to |g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

Sia ha $\epsilon > 0$, per continuità di g:

$$\exists \delta_2 > 0 :\ |x - x_0| < \delta_2 \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$$

quindi:

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon > 0 \longrightarrow |x - x_0| < \delta_2$$
$$\downarrow g$$
$$\delta_1 \longrightarrow\longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1$$
$$\downarrow f$$
$$\delta_2 \longrightarrow\longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

$\square$

6.1.1 Discontinuità

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ $x_o \in D$, punto di accumulazione per D. Se f non è continua in x_0 si dice *Discontinua* in x_0. Si hanno i seguenti tipi di discontinuità:

- **I specie**:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1,\ L_1 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2,\ L_2 \in \mathbb{R}$$
con
$$L - 1 \neq L_2$$
- **II specie**:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ è infinito o non esiste}$$
oppure
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ è infinito o non esiste}$$
- **III specie (discontinuità *eliminabile*)**:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R},\ \text{con } L \neq f(x_0)$$

Esempi di Continuità

- $P_n(x)$, i polinomi sono funzioni continue
- $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},\ Q_n(x) \neq 0$, le funzioni razionali sono continue
- $|x|$, il modulo di x è continuo
- ci sono funzioni, come $\sqrt{\log(\sin x)}$, che sono continue in punti isolati
- $f(x) = \begin{cases} x \text{ con } x \in \mathbb{Q} \\ 2x \text{ con } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ è continua solo nell'origine, negli altri punti ha una discontinuità di **II specie** perché non ho i limiti

6.2 Proprietà delle funzioni continue in intervalli

Le seguenti proprietà valgono solo se l'insieme è un intervallo

Teorema 33 (degli zeri)**.** *sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* f *continua,* $f(a) \cdot f(b) \neq 0$ *(hanno segno diverso). Allora* $\exists x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$

Dimostrazione. Sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ chiamo $S = \{x \in [a, b]\}$tale che$f(x) < 0$. Tale insieme è:

- $S \neq \emptyset$ infatti $a \in S$
- superiormente limitato e $\exists \sup S = x_0$

Provo che x_0 è zero della funzione: $f(x_0) = 0$.
Procedo per assurdo, $f(x_0) < 0$. In questo caso, per il teorema della permanenza del segno, avremmo $f(x) < 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ma allora $\sup S > x_0$, ma sappiamo che oltre x_0 non si può andare, essendo il *sup*.
Se $f(x_0) > 0$. In questo caso, per il teorema della permanenza del segno, avremmo $f(x) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $\inf S < x_0$.
Quindi vale 0 in quel punto. □

Sia f una funzione qualsiasi, $f : D \to \mathbb{R}$. $x_0 \in D$ è un *punto fisso* se $f(x_0) = x_0$.

Teorema del punto fisso

Osservazione 14 (teorema del punto fisso)**.** *Sia* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *continua. Allora esiste punto fisso per* $f \in [0, 1]$

Dimostrazione. Sia $g(x) = f(x) - x$. Allora: $g(x) = \begin{cases} g(0) = f(0) > 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases}$
Quindi $\exists x_0 \in (0, 1) \longrightarrow f(x_0) = x_0$ □

Osservazione 15 (metodo di bisezione)**.** *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*, continua ,* $f(a) > 0$ *e* $f(b) < 0$ *Prendo il punto medio tra gli estremi(* $a = \alpha_0,\ b = \beta_0$*. Se* $\frac{\alpha_0+\beta_0}{2} > 0$ *il nuovo intervallo diventa* $[\frac{\alpha_0+\beta_0}{2} = \alpha_1, \beta_0 = \beta_1]$ *e se* $\frac{\alpha_0+\beta_0}{2} < 0$ *diventa* $[\alpha_0 = \alpha_1, \frac{\alpha_0+\beta_0}{2} = \beta_1]$*. Si ha* $[\alpha_0, \beta_0] > [\alpha_1, \beta_1] > ... > [\alpha_n, \beta_n]$ *Proseguo fino a che ho* $\{\alpha_n\} \to L_1$ *e* $\{\beta_n\} \to L_2$*. Dato che* $\alpha_n - \beta_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ *allora* $L_1 = L_2$

Teorema di Darboux

Corollario 2 (teorema di Darboux o dei valori intermedi)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo qualsiasi e f continua in I. Allora:*

$$f(I) \text{ è un intervallo}$$

Dimostrazione. Siano $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Sia $y_0 \in [y_1, y_2]$. Allora:

$$y_0 \in f(I)$$

$$f(x) - y_0 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} f(x_1) - y_0 = y_1 - y_0 < 0 \\ f(x_2) - y_0 = y_2 - y_0 > 0 \end{cases}$$ □

Definizione 30. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.*

- *x_0 è punto di massimo assoluto globale per f se $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x$*
- *x_0 è punto di minimo assoluto globale per f se $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x$*
- *x_0 è punto di massimo assoluto locale per f se $\exists B(x_0, r)$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in B(x_0, r) \cap D$*
- *x_0 è punto di minimo assoluto locale per f se $\exists B(x_0, r)$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in B(x_0, r) \cap D$*

Una funzione ha massimo se ha un massimo assoluto globale, ha invece minimo se ha un minimo assoluto globale

6.2.1 Teorema di Weierstrass

Teorema 34 (di Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Allora f ha sia massimo che minimo in $[a, b]$.*

Nota 20. *Nel caso di intervalli illimitati si possono trovare massimo e/o minimo globali restringendo l'intervallo ad un insieme limitato e osservando l'andamento della funzione (per esempio $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$, che tende a $+\infty$ sia con $x \to -\infty$ che con $x \to +\infty$, ha per forza un minimo globale).*

Dal seguente teorema e da quello dei valori intermedi si ha, in particolare, che:

Definizione 31.

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua allora:

$$f([a, b]) = [m, M] \text{ con } m = \min f, \text{ e } M = \max f$$

6.2.2 Teorema della funzione inversa

Se $f : D \to \mathbb{R}$ se f è *iniettiva*, $f : D \to Im(f) = f(D)$ Se f è monotona crescente o decrescente (in senso stretto) allora f è *Biunivoca* tra D e $f(D) = Im(f)$ Se $f : D \to \mathbb{R}$ è *continua* e *iniettiva* allora $f^{-1} : f(D) \to D$ si può dire questso:

Teorema 35 (della funzione inversa)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f crescente e strettamente monotona. Allora:*

$$\exists f^{-1} : \overbrace{[m, M]}^{=Im(f)} \to [a, b]$$

e f^{-1} è continua.

Definizione 32. *Siano* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *,* p *di accumulazione per* D*. Sia* $g(x) \neq 0$ *in un intorno di* p*. Si dice che* $f \sim g$*, per* $x \to p$ *se:*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

6.2.3 Limiti notevoli per funzioni

Definizione 33. *Limiti notevoli per* $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$

$$ln(1 + x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$$

$$\tan x \sim x$$

$$(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$$

Valgono anche se si ha $f(x)$ *al posto di* x*, con* $f(x) \to 0$*:*

$$\sin f(x) \sim f(x)$$

$$ln(1 + f(x)) \sim f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$$

$$(1 + f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot f(x)$$

$$\tan f(x) \sim f(x)$$

$$(1 - \cos f(x)) \sim \frac{f(x)^2}{2}$$

Definizione 34. *Si dice che* $f = o(g)$*, con* $x \to p$ *se:*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si indica con $f = o(1)$*, con* $x \to p$ *se:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0$$

Definizione 35. *Si dice che f è un Infinito, per $x \to p$ se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty, -\infty$$

Si dice che f è un Infinitesimo, per $x \to p$ se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0$$

Definizione 36. *Se f è un Infinito, per $x \to p$, si dice che è un infinito di ordine $\alpha > 0$ se:*

$$x \to p \longrightarrow f(x) \sim k \cdot \frac{1}{|x-p|^{\alpha}}, \text{ con } p \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq 0$$

$$x \to +\infty \longrightarrow f(x) \sim k \cdot x^{\alpha}, \text{ con } k \neq 0$$

Per esempio se, dopo i vari conti sul limite, arrivo a x^3 so che f ha ordine di infinito $\alpha = 3$

6.2.4 Studio di Funzione

Per una funzione infinita si ha:

Definizione 37. *f si dice funzione infinita per $x \to p$ se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

. Si hanno i seguenti infiniti campione:

- *se $p = x_0 \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{1}{|x-x_0|}$*
- *se $p = +\infty$ o $-\infty \longrightarrow |x|$*

Definizione 38. *Si dice che f ha Ordine di Infinito $\alpha > 0$ per $x \to x_0$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x-x_0|^{\alpha}}} = k \neq 0$$

Definizione 39. *f ha Ordine di Infinito α, per $x \to +\infty$ se:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = k \neq 0$$

Per una funzione infinitesima si ha:

Definizione 40. *Si hanno i seguenti infinitesimi campione:*

- *se* $p = x_0 \in \mathbb{R} \longrightarrow |x - x_0|$
- *se* $p = \pm\infty \longrightarrow \frac{1}{|x|}$

Definizione 41. *Si dice che* f *ha Ordine di Infinitesimo* $\alpha > 0$ *per* $x \to x_0$ *se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x - x_0|^\alpha} = k \neq 0$$

Definizione 42. f *ha Ordine di Infinitesimo* α*, per* $x \to +\infty$ *se:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = k \neq 0$$

6.2.5 Asintoti

Asintoti Verticali

Definizione 43. *sia* $f : D \to \mathbb{R}$*. Si dice che* $x = x_0$ *è Asintoto Verticale di* f *per* $x \to x_0^+$ *(oppure* f *per* $x \to x_0^-$*) se:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asintoti Orizzontali

Definizione 44. *sia* $f : D \to \mathbb{R}$*. Si dice che* $y = L$ *è Asintoto Orizzontale (destro) di* f *per* $x \to +\infty$ *se:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

In modo analogo si definisce l' Asintoto Orizzontale (sinistro) con f *per* $x \to -\infty$

Asintoti Obliqui

Definizione 45. *sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si dice che $y = mx + q$ è Asintoto Obliquo Destro di f per $x \to +\infty$ se:*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \text{ ovvero } f(x) = mx + q + o(1)$$

Definizione 46. *sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si dice che $y = mx + q$ è Asintoto Obliquo Sinistro di f per $x \to -\infty$ se:*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \text{ ovvero } f(x) = mx + q + o(1)$$

Definizione 47. *sia diche che se $f(x)$ ha asintoto obliquo destro e sinistro uguali essa ha un: Asintoto Obliquo Bilatero*

Teorema 36 (teorema di caratterizzazione di asintoto obliquo)**.** *sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Allora $y = mx + q$ con $m \neq 0$ è asintoto obliquo con:*

- $\frac{f(x)}{x} \to m,$ *per* $x \to +\infty$
- $f(x) - mx \to q$ *per* $x \to +\infty$

Analogamente si ragiona per $-\infty$ in $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$

L'esistenza di un asintoto obliquo destro esclude l'esistenza di altri asintoti a $+\infty$, se sinistro a $+\infty$, se bilatero a $\pm\infty$

Capitolo 7

Derivazione

7.1 Teoria della Derivazione

Sia $x_0 \in (a, b)$. Si chiama *Rapporto Incrementale* di f, con punto iniziale x_0 e incremento h, la seguente frazione:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ con } (x_0 + h) \in (a, b)$$

è detto:

- destro se $h > 0$
- sinistro se $h < 0$

Definizione 48. *Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Tale limite è detto **Derivata** di f in x_0 e si indica con:*

$$f^{'}(x_0)$$

oppure con:

- $Df(x_0)$
- $\frac{df}{dx}(x_0)$

Si ha che:

- *se* $\exists \lim_{h\to 0^+}$ *esiste la derivata destra* $f'_+(x_0)$ *in* x_0
- *se* $\exists \lim_{h\to 0^-}$ *esiste la derivata sinistra* $f'_-(x_0)$ *in* x_0

inoltre si ha che:

$$\exists f'(x_0) \text{ se e solo se } \exists f'_-(x_0) \text{ e } \exists f'_+(x_0)$$

Definizione 49. *Sia* f *derivabile in* x_0*. Si dice che la retta di equazione:*

$$f(x) = y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

è Tangente al grafico di f *in* $(x_0, f(x_0))$

Definizione 50. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile in tutti i punti di* (a, b)*. La funzione* $x \to f'(x)$ *definita su* (a, b) *si chiama Funzione Derivata*

Si ha il rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si ha che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}\ \exists f'(a)$ si ha che $\exists f'_+(a)$ e se $\exists f'(b)$ si ha che $\exists f'_-(b)$
Se una funzione è derivabile in un punto lì è anche continua

7.1.1 Condizione necessaria di derivabilità

Teorema 37 (condizione necessaria di derivabilità)**.** *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $\exists f'(x_0)$*, allora* f *è continua in* x_0 *(*$x_0 \in (a, b)$*).*

Dimostrazione. Sia ha :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

sapendo dall'equazione della retta tangente, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, che:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \overbrace{f'(x_0)}^{\in\mathbb{R}} \cdot 0 = 0$$

□

Non vale l'inverso, vedisi la funzione *modulo* che è continua ma

- $\nexists f^{'}(x)$ *con* $x = 0, f^{'}(0_{-}) = -1$ *e* $f^{'}(0_{+}) = +1$
- $\exists f^{'}_{-}(x) = -1$
- $\exists f^{'}_{+}(x) = 1$

7.1.2 Teoremi fondamentali

Teorema 38 (algebra delle derivate)**.** *Siano* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabili in tutto* (a, b)*. Allora:*

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *con* $g \neq 0$

sono derivabili e:

- $f + g = f^{'} + g^{'}$
- $f \cdot g = f \cdot g^{'} + f^{'} \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *con* $g \neq 0 = \frac{f \cdot g^{'} - f^{'} \cdot g}{g^2}$

Osservazione 16. *Siano* $f_1, ..., f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$*. Allora:*

- $(f_1 + ... + f_n) = (f^{'}_1 + ... + f^{'}_n)$
- $(f_1 \cdot ... \cdot f_n) = (f^{'}_1 \cdot f_2 \cdot f_n + f^{'}_2 \cdot f_1 \cdot ... \cdot f_n + ... + f_1 \cdot f_2 \cdot .. \cdot f^{'}_n)$

Teorema 39 (derivata della funzione composta)**.** *Siano* $f : (a, b) \to (c, d)$ *e* $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *e siano* f *e* g *derivabili nei loro domini. Allora:*

$$g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R} \text{ è derivabile}$$

$$\downarrow$$

$$(g \circ f)^{'} = g^{'}(f(x)) \cdot (f^{'}(x))$$

Teorema 40 (derivata di funzione inversa)**.** *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile e strettamente monotona e* $f^{'}(x0 \neq 0$*. Quindi* $\exists f^{-1} : Im(f) \to \mathbb{R}$ *è derivabile e:*

$$(f^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{f^{'}(x)} \text{ con y=f(x)}$$

7.1.3 Derivate fondamentali

Si elencano le derivate delle funzioni elementari **(Attenzione agli insiemi di
definizione delle varie funzioni elementari)**:

Funzione $f(x)$	**Derivata** $f^{'}(x)$	**Dimostrazione**
$k \in \mathbb{R}$	0	rapporto incrementale
x^{α} (con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$)	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	rapporto incrementale
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	rapporto incrementale
e^x	e^x	rapporto incrementale
$\log x$	$\frac{1}{x}$	derivata dell'inversa di e^x
$\log_{\alpha} x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_{\alpha} e$	rapporto incrementale
α^x	$\alpha^x \cdot \log \alpha$	derivata di funzioni composte
$\sin x$	$\cos x$	rapporto incrementale
$\cos x$	$-\sin x$	rapporto incrementale
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	derivata di $\frac{\sin x}{\cos x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	derivata di $\frac{1}{\sin x}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	derivata di $\frac{1}{\cos x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	derivata di $\frac{1}{\tan x}$

Dimostrazione. Alcune dimostrazioni:

- $f^{'}(k \in \mathbb{R}) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{k-k}^{0\ vero}}{0} = 0$
- $f^{'}(x^\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - {x_0}^\alpha}{h} = \frac{{x_0}^\alpha \cdot \left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1\right]}{h} \sim {x_0}^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{h}{x_0} \cdot \frac{1}{h} = \alpha \cdot {x_0}^{\alpha-1}$
- $f^{'}(e^x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot h}{h} = e^{x_0}$
- $f^{'}(\alpha^x) \to \alpha^x = e^{xln(\alpha)} \to f^{'}(e^{xln(\alpha)}) = e^{xln(\alpha)} \cdot ln(\alpha) = \alpha^x \cdot ln(\alpha)$
- $f^{'}(sin(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{sin(x_0+h) - sin(x_0)}{h} = \frac{sin(x_0) \cdot cos(h) + cos(x_0) \cdot sin(h) - sin(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot (sin(x_0)(cos(h) - 1) + cos(x_0) \cdot sin(h) = \frac{1}{h} \cdot sin(x_0(cos(h) - 1) + \frac{1}{h} cos(x_0) sin(h) = cos(x_0)$
- $f^{'}(cos(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x_0+h) - cos(x_0)}{h} = \frac{cos(x_0) \cdot cos(h) - sin(x_0) \cdot sin(h) - cos(x_0)}{h} = \frac{-\sin(x_0) \cdot sin(h)}{h} = -sin(x_0)$
- $f^{'}(ln(x)) \overbrace{\to}^{inversa} g(x) = e^x \to (g^{-1})(y) = \frac{1}{g^{'}(x)}$ con $y = g(x) = e^x \to (g^{-1})(y) = \frac{1}{g^{'}(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \to f^{'}(x) = \frac{1}{x}$
- $f^{'}(tan(x)) = f^{'}(\frac{sin(x_0)}{cos(x_0)}) = \frac{cos^2(x_0) + sin^2(x_0)}{cos^2(x_0)} = \frac{1}{cos^2(x_0)} = 1 + tan^2(x_0)$
- $f^{'}(arcsin(x)) \overbrace{\to}^{inversa} g(x) = sin(x),\ con\ arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to (g^{-1})(y) = \frac{1}{g^{'}(x)} = \frac{1}{cos(x)},\ con\ cos^2(x) = 1 - sin^2(x) = 1 - y^2 \to cos(x) = \sqrt{1-y^2}$ (per avere $arcsin(x) \in$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ serve cos(x) positivo) $\to$
  $f^{'}(arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $f^{'}(arccos(x)),\ si\ ragiona\ come\ sopra\ con\ arcsin(x) \in [0, \pi] \to$
  $f^{'}(arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},\ x \neq \pm 1$
- $f^{'}(arctan(x)) \overbrace{\to}^{inversa} g(x) = tan(x),\ con\ tan(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}\ quindi\ (g^{-1})(y) = \frac{1}{g^{'}(x)} = \frac{1}{1+tan^2(x)},\ con\ tan(x) = y\ si\ ha\ f^{'}(arctan(x)) = \frac{1}{1+y^2}$

□

Nota 21. *Si ha che:*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$f^{'} : D^{'} \subseteq D \to \mathbb{R},\ x \to f^{'}(x)$$

Definizione 51. *Se esiste finito il*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{'}(x_0 + h) - f^{'}(x_0)}{h}$$

tale limite si chiama ***Derivata Seconda*** *di* f *in* x_0*, e si indica con:*

$$f^{''}(x_0) \text{ o con } (f^{'})^{'}(x_0)$$

si può proseguire fino alla derivata n-esima

Per ogni derivata succesiva si diminuisce sempre di grado. La derivata di ordine $n+1$, con n grado, è sempre 0.

7.1.4 Estremanti

Definizione 52. *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*, con* $x_0 \in (a,b)$*. Si dice che* x_0 *è un punto di* ***Massimo Locale*** *di* f *se:*

$$\exists \gamma > 0 : f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$$

Definizione 53. *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*, con* $x_0 \in (a,b)$*. Si dice che* x_0 *è un punto di* ***Minimo Locale*** *di* f *se:*

$$\exists \gamma > 0 : f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$$

7.1.5 Teorema di Fermat

Teorema 41 (di Fermat). *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, *con* $x_0 \in (a, b)$. *Se:*

- $\exists f^{'}(x_0)$
- x_0 *è un estremante*

Allora:

$$f^{'}(x_0) \text{ è un estremante} \to f^{'}(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di massimo locale.Quindi:

$$\exists \gamma > 0 : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$$

$$\text{e } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \end{cases} \longrightarrow = 0$$

Analogamente si ha per un punto di minimo locale □

Osservazione 17. *Si ha che:*

- *se* x_0 *non è interno al dominio il teorema è* ***falso***
- *se in* x_0 *non esiste* $f^{'}$, x_0 *può comunque essere un estremante.*

Osservazione 18. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* f *derivabile. Gli eventuali estremanti sono da cercarsi tra i punti*$\{x | \ f^{'}(x) = 0\}$, *che sono i* ***Punti Stazionari****, ovvero i punti con derivata nulla.*

7.1.6 Punti di non Derivabilità

Punti di Flesso a Tangente Verticale

Si ha se il rapporto incrementale diverge:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

Punti Angolosi

Si ha se il rapporto incrementale tende a due valori diversi di cui almeno uno è finito *"da destra" e "da sinistra"*:

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_1$$

$$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L_2$$

$$\text{con } L_1 \neq L_2$$

Cuspidi

Si ha se il rapporto incrementale diverge *"da destra" e "da sinistra"*:

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

7.1.7 Teorema di Rolle

Teorema 42 (di Rolle)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se:*

- *f è continua in $[a,b]$*
- *f è derivabile su (a,b)*
- *$f(a) = f(b)$*

allora:

$$\exists c \in (a,b)\text{: } f^{'}(c) = 0$$

(Non immporta la non derivabilità degli estremi)

Dimostrazione. Si hanno due casi:

- se f è costantre si ha che: $f^{'}(c) = 0,\ \forall c \in (a,b)$
- se f non è costante si ha che, per il teroema di Weierstrass, f assume M (max) e m (min) in $[a,b]$, che $M > m$ e che uno dei due valori è assunto da $c \in (a,b)$. Sia ora $m = f(c)$ o $M = f(c)$, per il teorema di Fermat si ah che $f^{'}(c) = 0$

□

Teorema di Lagrange

Teorema 43 (di Lagrange)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Se:*

- f *è continua in* $[a, b]$
- f *è derivabile su* (a, b)

Allora:

$$\exists c \in (a, b)\colon\ f^{'}(c) = \overbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}^{\textit{punto medio}}$$

Dimostrazione. Definiamo $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$. Si ha che:

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a)$$

Per il teorema di Rolle applicato a g

$$\exists c \in (a, b)\text{: } g^{'}(c) = 0 \longrightarrow f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollario 3 (conseguenza fondamentali al teorema di Lagrange)**.** *Sia* f : $I \to \mathbb{R}$, *con* I *intervallo e* f *derivabile.*

- *Siano* $x_1 < x_2$, *con* $x_1, x_2 \in I$. *Allora:*

  $$f^{'}(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ \textit{con}\ x_1 < c < x_2$$

  quindi:

  $$\exists c \in (x_1, x_2)\colon\ f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(c)(x_2 - x_1)$$

- *Sia* f *monotona non decrescente in* I. *Allora:*

  $$f^{'}(x) \geq 0,\ \forall x \in I$$

  Dimostrazione. Si dimostra per assurdo: ovvero dovrebbe $\exists x_0 \in I$: $f^{'}(x_0) < 0$. Ma

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  ha, per $h > 0$, numeratore e denominatore positivi, quindi non può essere negativo.
  (Attenzione: *vale solo su un intervallo*) □

- *Sia f monotona non crescente in I. Allora:*

$$f^{'}(x) \leq 0, \ \forall x \in I$$

- $\forall x_1, x_2 \in I$ *con* $x_1 < x_2$ *si ha che:*

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

inoltre

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f^{'}(c)}^{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\forall x_1, x_2 \in I}$$

- *f è monotona strettamente crescente se $f^{'}(x) > 0$, $\forall x \in I$*

- *f è monotona strettamente decrescente se $f^{'}(x) < 0$, $\forall x \in I$*

- *f è costante in I se e solo se $f^{'}(x) = 0$, $\forall x \in I$*

  Dimostrazione. Se per assurdo non fosse costante si avrebbe $f(x_1) \neq f(x_2)$, con $x_1, x_2 \in I$ ma questo implica $x_1 = x_2$ per avere $f^{'}(c) = 0$ □

- *Siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabili in I.*
  Allora $f(x) = g(x) + k$ (k costante) $\longleftrightarrow f^{'}(x) = g^{'}(x), \ \forall x \in I$

7.1.8 Teorema di Cauchy

Teorema 44 (di Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$con:*

- *f, g continue in $[a, b]$*
- *f, g derivabili in (a, b)*
- *$g^{'}(x) \neq 0$, (quindi, per Rolle, g(b) ≠ g(a)) $\forall x \in (a, b)$*

allora:

$$\exists c \in [a, b] \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

7.1.9 Teorema di De L'Hopital

Teorema 45 (di De L'Hopital). *Siano $f, g : (a, b) \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$, con:*

- *f, g derivabili in $(a, b) \backslash \{x_0\}$*
- *$g^{'}(x) \neq 0$*
- *si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \ o \ \frac{\infty}{\infty}$$

Allora se esiste il:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(Attenzione: se :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

non esiste ***non si può dire nulla****; inoltre il teorema vale anche "da destra" e "da sinistra")*

Nota 22 (condizione sufficente di derivablità in un punto). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Se:*

- *f è continua in x_0*
- *$\exists f^{'}(x)$, $\forall x \neq x_0$*

Allora se esistono finiti:

$$\lim_{x \to x_0^+} f^{'}(x) = f^{'}_{+}(x_0)$$

$$e \ \lim_{x \to x_0^-} f^{'}(x) = f^{'}_{-}(x_0)$$

$$se \ f^{'}_{+}(x_0) = f^{'}_{-}(x_0)$$

allora

$$f^{'}_{\pm}(x_0) = f^{'}(x_0)$$

Osservazione 19. *Per trovare massimi e minimi relativi si procede così:*
Sia $f : (a, b) =\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ f *derivabile in* $(a, b)\backslash x_0$*. Se:*

- $f^{'}(x_0) \geq 0\, \forall x < x_0$
- $f^{'}(x_0) \leq 0\, \forall x > x_0$

Se f *continua in* x_0 *allora* x_0 *è punto di massimo locale.*
Se invece si ha:

- $f^{'}(x_0) \leq 0\, \forall x < x_0$
- $f^{'}(x_0) \geq 0\, \forall x > x_0$

Se f *continua in* x_0 *allora* x_0 *è punto di minimo locale.*

7.2 Formula di Taylor e Mc Laurin

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ f derivabile in (a, b). Si ha che:

- $f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ con $x \rightarrow x_0$, in quanto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f^{'}(x_0) + o(1)$
- $f(x) = f(x_0) + f^{'}(c)(x - x_0)$ con $c \in (x_0, x)$ o $c \in (x, x_0)$

Partiamo con la prima. $f(x) = \overbrace{f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)}^{\text{eq. retta tangente}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{resto}}$, con $x \rightarrow x_0$. Voglio raffinare l'approssimazione raggiungendo un grado maggiore nel resto. Per esempio lo cerco per l'esponenziale:

$$e^x = 1 + x + \alpha x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\rightarrow x_0} \frac{e^x - 1 - x - \alpha x^2}{x^2} = \overbrace{\frac{e^x - 1 - 2\alpha x}{2x}}^{\text{(usando De L'Hopital)}} = \frac{e^x - 2\alpha}{2} = 0 \text{ sse } \alpha = \frac{1}{2} \text{ con } x \rightarrow 0$$

Osservazione 20. *Sia* $f(x) = P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$, *con* $\alpha_n \neq 0$

$$f(0) = a_0$$

$$f^{'}(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + ... + n\alpha_n x^{n-1} \to f^{'} = \alpha_1$$

$$...$$

$$f^{''}(x) = ... \to f^{''} = 2\alpha_2$$

$$...$$

Quindi:

$$f(x) = P_n(x) = f(0) + f^{'}(0) \cdot x + \frac{f^{''}(0)}{2} \cdot x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Il polinomio generico è:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$$

Teorema 46 (Formula di Taylor)**.** *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $\exists f^{(j)}(x)$, $\forall x \in (a,b)\, \forall j = 1, 2, ..., n$ *e* $\exists f^{(x)}(x_0)$ *allora si ha il seguente polinomio, detto* ***Polinomio di Taylor****:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + o(x - x_0)^n, \text{ per } x \to x_0$$

Osservazione 21. *Il polinomio di Taylor di una funzione è unico, cioè se* $P(x)$ *è un polinomio di grado* $\leq n$ *tale che* $f(x) - P_n(x) = o(x - x_0)^n$, *con* $x \to x_0$ *esso può solo essere il polinomio di Taylor* $P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + o(x - x_0)^n$

Teorema 47 (Formula di Mc Laurin)**.** *Se* $x_0 = 0$ *si parla di* ***Formula di Mc Laurin*** *e di* ***Polinomio di Mc Laurin*** *(cambia solo il nome)*

Alcune formule di Mc Laurin, calcolate col polinomio di Mc Laurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Nota 23. *Il polinomio di Taylor fornisce approssimazioni locali delle funzioni*

Teorema 48 (Condizione Sufficente per estremanti locali)**.** *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $\exists f^{(j)}(x_0)$, $\forall j = 1, 2, ..., n$ *Se* $0 = f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0)$ *e* $f^n(x_0) \neq 0$ *allora:*

- *se* n *è pari* x_0 *è un estremante locale (forte)*
  1. *se* $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 *è un punto di minimo locale*
  2. *se* $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 *è un punto di massimo locale*
- *se* n *è dispari* x_0 *non è un estremante*

Resto di Peano e di Lagrange

Per la formula di Taylor si ha la formula con **Resto di Peano**:

$$f(x) = \overbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j}^{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{o(x - x_0)^n}_{\text{resto di Peano}} \quad , \text{ per } x \to x_0$$

Si ha anche quella col **Resto di Lagrange**: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e $\exists f^{(j)}(x)$, $\forall x \in (a,b)$, continua e $\exists f^{(n+1)}(x)$, $\forall x \in (a,b) \backslash \{x_0\}$, allora:

$$f(x) = \overbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x-x_0)^j}^{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}, \text{ con } c \in (x_0, x) \text{ o } c \in (x, x_0)$$

7.3 Convessità e Concavità

Innanzitutto f deve essere definita su un intervallo (non posso avere due "blocchi" separati)

Definizione 54. *Sia I intervallo e e sia $F : I \to \mathbb{R}$. F è* ***Convessa*** *in I se:*

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \textit{ e } \forall t \in [0,1] \textit{ si ha:}$$

$$\underbrace{f((1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2)}_{\textit{punti solo in } (x_1, x_2)} \leq (1-t) \cdot f(x_1) + t \cdot f(x_2)$$

Si ha una ***stretta convessità*** *(dove la retta tra due punti non interseca mai la funzione) se:*

$$\forall x_1, x_1 \in I, x_1 < x_2 \textit{ e } \forall t \in [0,1] \textit{ si ha:}$$

$$\underbrace{f((1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2)}_{\textit{punti solo in } (x_1, x_2)} < (1-t) \cdot f(x_1) + t \cdot f(x_2), \textit{ con } x_1 \neq x_2$$

Definizione 55. *Sia I intervallo e e sia $f : I \to \mathbb{R}$. F è* ***Concava*** *o* ***Strettamente Concava*** *in I se $-f$ è convessa o, rispettivamente, strettamente convessa*

Osservazione 22. *I rapporti incrementali di una funzione convessa sono non decrescenti. f è convessa sse è a* ***rapporti incrementali non decrescenti****. Inoltre se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile (una volta) allora f è convessa sse:*

- *$f^{'} : I \to \mathbb{R}$ è non decrescente*
- *$\forall x_0 \in I$ si ha che $f(x) \geq f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0)$, $\forall x \in I$ (la funzione sta sempre sopra la retta tangente)*

Teorema 49 (condizione necessaria e sufficiente del secondo ordine per la convessità)**.** *Sia I intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile due volte. Allora f è convessa in I sse:*

$$f^{''}(x) \geq 0, \forall x \in I$$

Dimostrazione. Suppongo f convessa e vedo che la derivata seconda è sempre non negativa. Procedo per assurdo, quindi $\exists x_0 \in I \longrightarrow f^{''}(x) \leq 0$. Uso Taylor con resto di Peano:

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = f(x_0)+f^{'}(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0}{2}\cdot(x-x_0)^2+o(1), (\text{per } x \to x_0) < \overbrace{f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0)}^{e.\ retta\ tangente}$$

in un intorno di x_0 ed è un assurdo, la derivata dovrebbe stare sotto la funzione. Usando Taylor con resto di Lagrange inoltre si ha, $\forall x, x_0 \in I$:

$$f(x) = f(x_0)+f^{'}(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f^{''}(c)}{2}\cdot(x-x_0)^2,\ (\text{con } c \in (x_0, x)) \geq f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$$

$\square$

Osservazione 23. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $\exists f^{''}(x), \forall x \in I$. Allora, se $f^{''}(x) > 0, \forall x \in I$ allora f è strettamente convessa. Questa è una* ***Condizione Sufficiente***

Osservazione 24. *I rapporti incrementali di una funzione concava sono non crescenti. f è concava sse è a* ***rapporti incrementali non crescenti****. Inoltre se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile (una volta) allora f è concava sse:*

- *$f^{'} : I \to \mathbb{R}$ è non crescente*
- *$\forall x_0 \in I$ si ha che $f(x) \leq f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0), \forall x \in I$ (la funzione sta sempre sotto la retta tangente)*

Teorema 50 (condizione necessaria e sufficiente del secondo ordine per la concavità)**.** *Sia I intervallo e e sia $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile due volte. Allora f è convava in I sse:*

$$f^{''}(x) \leq 0, \forall x \in I$$

Osservazione 25. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $\exists f^{''}(x), \forall x \in I$. Allora, se $f^{''}(x) < 0, \forall x \in I$ allora f è strettamente concava. Questa è una* ***Condizione Sufficiente***

Definizione 56. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile in I.*
Si dice che $x_0 \in I$ è punto di flesso per f se $\exists$ un intorno di $(x_0 - r, x_0 + r)$ tale che:

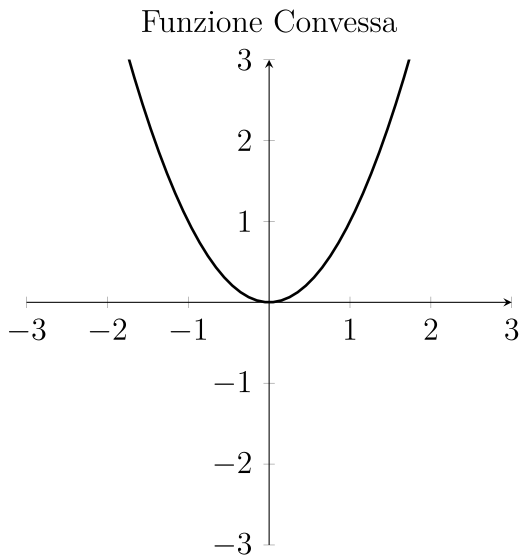
$$f(x) \leq f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ con } (x_0 - r) < x \leq x_0$$

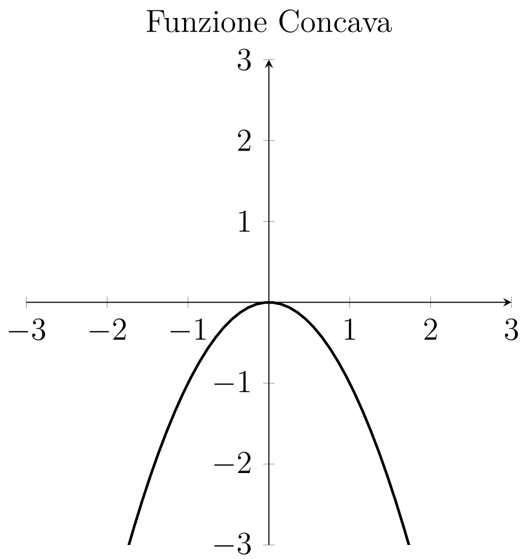
$$f(x) \geq f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ con } x_0 < x \leq (x_0 + r)$$

o viceversa.
Ovvero quando si ha un cambio tra concavità e convessità. Si ha:

- ***Flesso Ascendente*** *con la funzione che passa da sotto a sopra la tangente, prima concava e poi convessa*
- ***Flesso Dicendente*** *con la funzione che passa da sopra a sotto la tangente, prima convessa e poi concava*

La tangente di una funzione nel punto di flesso si chiama ***Tangente di Flesso***





Capitolo 8

Integrazione

8.1 Primitive

Definizione 57. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo.*
Si dice che $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è una ***primitiva*** *di f in I se φ è derivabile e $\varphi^{'}(x) = f(x), \forall x \in I$ Per indicare le (evenuali) primitive di f si usa il simbolo:*

$$\int f(x)\, dx$$

Osservazione 26.

- *se φ è una primitiva di f in I anche $\varphi + c$ (c = costante) è una primitiva di f in I*
- *non è detto che si riesca a determinare φ*
- *se f ha una discontinuità eliminabile o di I specie* ***non ha primitiva***
- *la primitiva è unica (per il teorema di Lagrange)*

Nota 24. *Come per le derivate si ha la linearità per la somma:*

$$\int (\alpha \cdot f^{'}(x) + \beta \cdot g^{'}(x)) = \alpha \cdot \int f(x) + \beta \cdot \int g(x)$$

primitve immediate:

Funzione	**Primitiva**
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq -1$	$\varphi(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha = -1$	$\varphi(x) = ln\|x\| + c = ln(\pm) + c$
$f(x) = e^x$	$\varphi(x) = e^x + c$
$f(x) = \sin(x)$	$\varphi(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$\varphi(x) = \sin(x) + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\varphi(x) = \arcsin(x) + c$
$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$\varphi(x) = \arctan(x) + c$

Teorema 51 (Teorema di integrazione per parti)**.** *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f^{'}, g^{'}$ continue, allora:*

$$\int f^{'}(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g^{'}(x)\, dx$$

Teorema 52. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, continua e $g : J \to \mathbb{R}$, con $g^{'}$ continua e $g(t) \in I$, $\forall t \in J$, allora:*

$$\int f(g(t)) \cdot g^{'}(t)\, dt = \int f(x)\, dx, \; con \; g(t) = x$$

Nota 25. *Alcune sostutuzioni notevoli, con R funzione razionale dell'argomento in parentesi:*

- $\int R(sin(x), cos(x))dx :$
  $t = tan(\frac{x}{2});\; cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2};\; sin(x) = \frac{2t}{1+t^2};\; dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
- $\int R(sin^2(x), cos^2(x), tan(x))dx :$
  $t = tan(x);\; cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2};\; sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2};\; dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

- $\int R(cos(x)) \cdot sin(x)dx : t = cos(x);\ dt = -sin(x)dx$
- $\int R(sin(x)) \cdot cos(x)dx :$
  $t = sin(x);\ dt = cos(x)dx$
- $\int R(e^x) \cdot e^x dx :$
  $t = e^x;\ dt = e^x dx$

8.2 Integrale di Riemman

Definizione 58. *Si definisce, con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e f limitata. Si definisce l'integrale definito:*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Nota 26. *Si chiama **partizione** $\mathbb{P}$ di $[a, b]$ un sottoinsieme di $[a, b]$ del tipo:*

$$\{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\},\ con\ x_i < x_{i+1}\ e\ i \in \mathbb{N}$$

Definizione 59. *Si definisce la **somma superiore**:*

$$S(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1}),\ L_i = sup(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

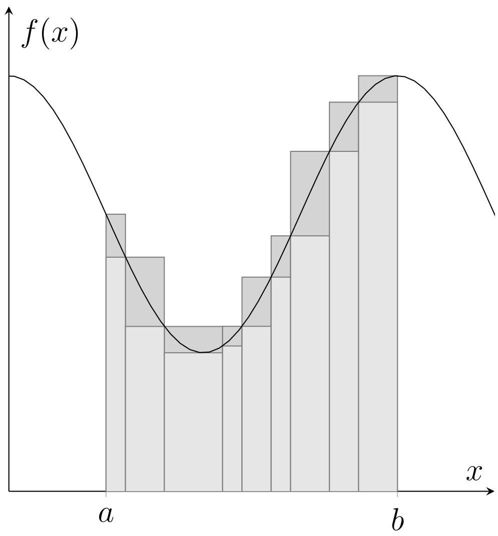
*E si definisce la **somma inferiore**:*

$$s(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}),\ l_i = inf(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Proprietà:

- $\forall \mathbb{P}$ si ha $s(\mathbb{P}) \leq S(\mathbb{P})$
- sia $\mathbb{P}^*$ un raffinamento di $\mathbb{P}$, quindi una sottopartizione di $\mathbb{P}$ ovvero si ha:
  $S(\mathbb{P}^*) \leq S(\mathbb{P})$ e $s(\mathbb{P}^*) \geq s(\mathbb{P})$
- $\forall \mathbb{P}, \mathbb{P}'$ si ha $s(\mathbb{P}) \leq S(\mathbb{P}')$, con $\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \cup \mathbb{P}'$

Nota 27. *Sia* $A = \{S(\mathbb{P}), \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{R}$ *inferiormente limitato allora:* $\exists\, inf(A) \in \mathbb{R}$. *Sia* $B = \{s(\mathbb{P}), \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{R}$ *superioremente limitato allora:* $\exists\, sup(B) \in \mathbb{R}$.



Somme superiori e inferiori della funzione $f(x) = 2 + \sin(\pi x)$, con una data partizione

Definizione 60. *la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata, è Riemman integrabile se:*

$$inf(A) = sup(B) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Teorema 53 (condizione necessaria e sufficiente di integrabilità)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata allora f è Riemman integrabile in $[a,b]$ se:*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \mathbb{P}(\epsilon) : \, S(\mathbb{P}(\epsilon)) - s(\mathbb{P}(\epsilon)) < \epsilon$$

Teorema 54. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona (non costante) allora f è Riemman integrabile*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e $\mathbb{P} = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ Si ha:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n(f(b) - f(a))} \text{ ovvero hanno la stessa ampiezza}$$

$$\downarrow$$

$$S(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{1}{n(f(b) - f(a))} \text{ f monotona non decrescente}$$

$$\downarrow$$

$$S(\mathbb{P}) = \frac{1}{n(f(b) - f(a))} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

e

$$s(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n(f(b) - f(a))}$$

$$\downarrow$$

$$s(\mathbb{P}) = \frac{1}{n(f(b) - f(a))} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

Si ha quindi:

$$S(\mathbb{P}) - s(\mathbb{P}) = \frac{1}{n(f(b) - f(a))} \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})}^{f(b)-f(a)} = \frac{1}{n} < \epsilon$$

□

Teorema 55. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f è Riemman integrabile.*

Propietà dell'integrale di Riemman

- se c'è un punto escluso si può ignorare
- sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ Riemman integrabile. Allora:
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$
- Si ha che:
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e sia $c \in (a,b)$, allora se f è Riemman integrabile in $[a,b]$ f è Riemman integrabile anche in $[a,c]$ e $[c,b]$ e:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- Additività dell'integrale di Riemman: siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g Riemman integrabili su $[a,b]$ allora:
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$
- Omogeneità: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f Riemman integrabile, e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora:
$$\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$$
inoltre si ha che:
$$\int_a^b -f = -\int_a^b f$$
- siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g Riemman integrabili su $[a,b]$,
se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ allora:
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$
inoltre:
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$$

Nota 28. *Se il risultato di un integrale di Riemman è negativo significa che si sta calcolando l'area sopra la curva (tra la curva e l'asse). Inoltre se si sta clacolando l'area sottostante una curva che in un intervallo assume valore negativo sull'asse delle y si ha la somma delle aree sopra l'asse delle x meno la somma delle aree sotto l'asse delle x.*

Osservazione 27. *Siano* $l = inf(f(x))$ *in* $[a, b]$ *e* $L = sup(f(x))$ *in* $[a, b]$, *con* $l, L \in \mathbb{R}$, *si ha che:*

$$l(b-a) \leq \int_a^b f \leq L(b-a)$$

8.2.1 Teorema della media Integrale

Teorema 56 (della media integrale)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua, allora:*

$$\exists c \in [a, b] : \, f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Dimostrazione. Siano: $l = inf\{f(x), x \in [a, b]\}$ e $L = sup\{f(x), x \in [a, b]\}$. Essendo f continua in $[a, b]$ essa è lì integrabile. Essendo $b > a$ si ha:

$$l \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq L$$

Dove, essendo f continua, si ha, per il teorema di Weierstrass $l = min(f)\ e\ L = max(f)$ Quindi, per il teorema di Darboux, si ha che:

$$\exists c \in [a, b] \to \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

□

8.2.2 Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

Teorema 57. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemman integrabile (limitata). Si ha che:* $\forall x \in [a, b]$ f *è integrabile su* $[a, x] \, \forall x \in [a, b]$.
Si definisce:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

Teorema 58. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemman integrabile. Allora* $F(x) = \int_a^x f$ *è continua in* $[a, b]$. *Se* f *è anche continua in* $x_0 \in [a, b]$ *allora* F *è derivabile in* x_0 *e* $F^{'}(x_0) = f(x_0)$

Teorema 59 (fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione $F(x) = \int_a^x f$ è derivabile in $[a, b]$ e $F^{'}(x) = f(x)\,\forall x \in [a, b]$.*
Ovvero F è una primitiva di f

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a, b]$. Si ha

- per $h > 0$:
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$
si ha quindi:
$$\frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f\right) = \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f\right)$$
$$\downarrow$$
$\frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f = f(x_h)$ per il teorema della media integrale, con $x_h \in (x_0, x_0+h)$
quindi:
$$F^{'}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x_0)$$
(con $h \to 0$ si ha $x_h \to x_0$)

- per $h < 0$:
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{|h|\to 0} \frac{F(x_0 - |h|) - F(x_0)}{-|h|}$$
$$\downarrow$$
$$= \lim_{|h|\to 0} \frac{F(x_0) - F(x_0 - |h|)}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0-h}^{x_0} f = \lim_{|h|\to 0} f(x_h) = f(x_0)$$

□

Corollario 4. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua f ha primitiva:*
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \;\; con \; x_0 \in I$$

Teorema 60 (formula fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e sia* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una primitiva di* f*. Allora:*

$$F(x) = \int_a^x f = \varphi(x) - \varphi(a)$$

Dimostrazione. Per la continuità di f si ha la sua primitiva, $F(x)$ che è la funzione integrale. Anche φ è una sua primitiva e quindi deve differire da $F(x)$ per una costante, k: ad esempio $\varphi(x) = F(x) + k$. Allora:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f$$

$\square$