Assignment 3

Davide Cozzi, 829827

Capitolo 1

Esercizio 1

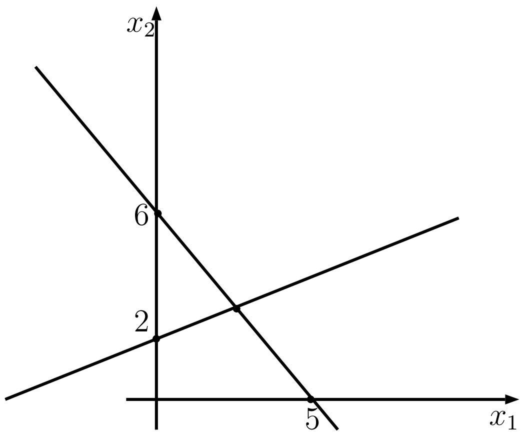
1.1 Parte a

Iniziamo disegnando la regione ammissibile del problema di programmazione lineare intera.
Disegnamo sul piano cartesiano le due rette che rappresentano i vincoli, ovvero:

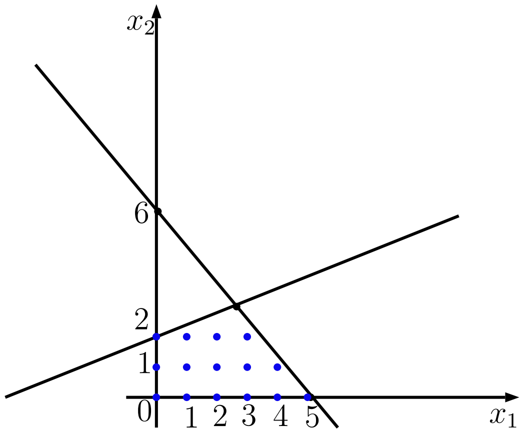
$$-2x_1 + 5x_2 = 10$$

$$6x_1 - 5x_2 = 30$$

ottenendo:



Essendo però un problema di programmazione lineare intera non avremo l'area ammissibile data unicamente dai vincoli bensì avremo i punti di coordinate intere in quest'area, ovvero:



1.2 Parte b

Procediamo ora con la risoluzione del problema.
Iniziamo risolvendo il *rilassamento lineare* del problema. Chiamiamo P_0 questo problema.
Dovendo risolvere il rilassamento lineare avremo a che fare con:

$$\min z = x_1 - 3x_2$$

soggetto ai vincoli

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

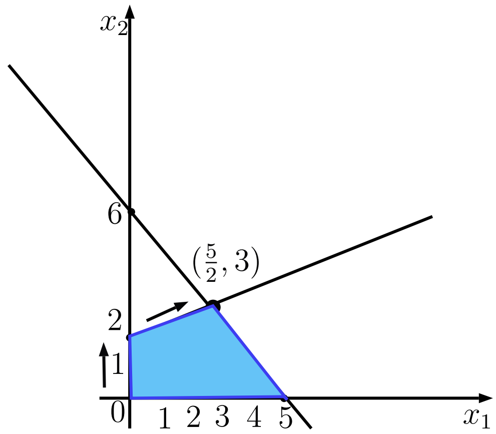
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

I punti di nostro interesse sono $(0, 0)$, ovvero l'origine, $(0, 2)$, ovvero l'incrocio tra il primo vincolo e l'asse x_2, $(5, 0)$, ovvero l'incrocio tra il secondo vincolo e l'asse x_1, e il punto di incontro tra i due vincoli. Calcoliamo questo punto di incontro:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 10 \\ 6x_1 - 5x_2 = 30 \end{cases} \implies x_1 = \frac{5}{2},\ \ x_2 = 3 \implies (\frac{5}{2}, 3)$$

Procediamo quindi con la risoluzione grafica mediante il metodo del simplesso.
Partiamo valutando il punto $(0, 0)$, qui si ha $z = 0$. Come vertici adiacenti ha $(0, 2)$ e $(5, 0)$. Grazie alla funzione obiettivo notiamo che z decresce (stiamo cercando il minimo) se ci spostiamo verso $(0, 2)$, dove $z = -6$, e cresce se ci spostiamo verso $(5, 0)$ dove $z = 5$.
Arrivato in $(0, 2)$ ho solamente $(\frac{5}{2}, 3)$ come vertice ammissibile da verificare. Si ha che, in $(\frac{5}{2}, 3)$, $z = -\frac{13}{2}$, abbiamo trovato quindi la soluzione ottimale. Graficamente si avrebbe:



Possiamo quindi dire che nel nodo P_0 abbiamo $z_0 = -\frac{13}{5}$, $UB_0 = 6$ (ovvero l'upperbound intero) e $z^* = +\infty$ (ovvero la migliore soluzione intera fino a P_o, posta a $+\infty$ in quanto non ancora trovata).
Posso quindi procedere con il Metodo Branch&Bound.
Avendo come soluzione ottima di P_0 il punto $(\frac{5}{2}, 3)$ cerchiamo la soluzione intera partizionando su x_1, specificando gli intervalli secondo le formule:

$$P_1 : x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$$

$$P_2 : x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$$

ottenendo quindi, nel nostro caso, i seguenti vincoli per il problema P_1:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$

$$x_1 \leq 2$$

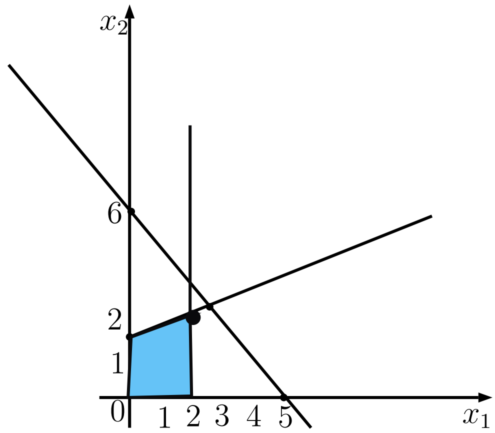
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

e per P_2:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Iniziamo valutando P_1. Disegnandolo si ottiene:



Risolviamo P_1 e P_2 mediante il bounding, risolvendone i rilassamenti lineari. Per il problema P_1 si ha:

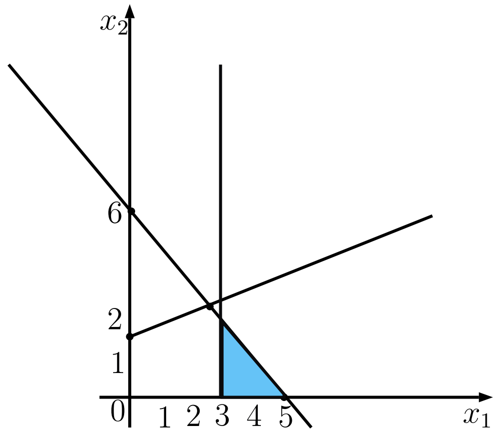
$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

e per P_2:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Partiamo quindi da $(0, 0)$ che ha $z = 0$. Come vertici adiacenti abbiamo $(0, 2)$, con $z = -6$, e $(2, 0)$, con $z = 2$. Ci spostiamo in $(0, 2)$. Calcoliamo l'incorcio tra $-2x_1 + 5x_2 = 10$ e $x_1 = 2$ e otteniamo il punto $(2, \frac{14}{2})$, che ha $z = -\frac{32}{5}$, ovvero la soluzione ottima di P_1, anche se ancora non intera.
Per P_1 si avrà quindi $z_1 = -\frac{32}{5}$, $UB_1 = 6$ e $z_1^* = -\infty$. Non possiamo usare il fathoming per chiudere questo problema.

Passiamo ora a P_2 che invece si presenta come:



Partiamo quindi, per il metodo del simplesso, da $(3, 0)$, che ha $z = 3$. Come vertici adiacenti abbiamo $(5, 0)$, con $z = 5$ e l'incrocio tra $6x_1 + 5x_2 = 30$ e $x_1 = 3$. Calcolato il punto si ottiene che è $(3, \frac{12}{5})$, con $z = -\frac{21}{5}$, ovvero la soluzione ottima, anche se ancora non intera, per P_2. In P_2 si ha quindi $z_2 = \frac{21}{5}$, $UB_2 = 4$ e $z_2^* = -\infty$. Non possiamo usare il fathoming per chiudere questo problema.
Avendo ancora entrambi nodi attivi procediamo col branching di P_1. In questo caso, avendo $x_2 = \frac{14}{5}$, procediamo col creare P_3 con i seguenti vincoli (usando la stessa tecnica usata sopra):

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

e per P_4:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

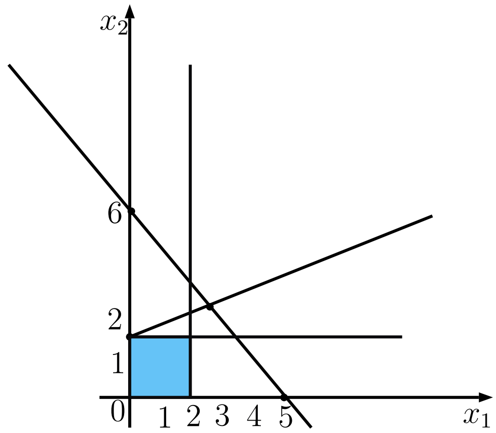
Procedendo col bounding otteniamo i rispettivi rilassamenti lineari. Per P_3:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

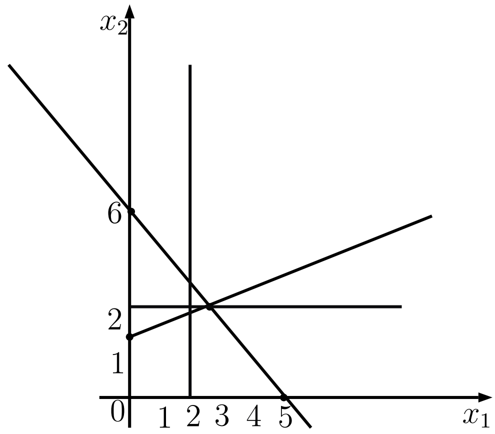
e per P_4:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Partiamo da P_3 che si presenta così:



Partiamo valutando il punto $(0,0)$, con $z = 0$. Come vertici adiacenti ha il vertice $(0,2)$, con $z = -6$, e il vertice $(2,0)$, con $z = 2$. Mi sposto in $(0,2)$ e valuto l'unico vertice adiacente rimasto, ovvero $(2,2)$, con $z = -4$, valore che mi fa restare in $(0,2)$. Abbiamo quindi che in $(0,2)$ si ha la soluzione ottima, intera, e, quindi, per P_3 si ha $z_3 = -6$, $UB_3 = -6$ e $z_3^* = -6$. Possiamo chiudere il branch grazie alla terza regola di fathoming
Valutiamo P_4, disegnandolo si ottiene:



Notando subito che P_4 non ha soluzioni ammissibili (non si hanno punti nella regione ammissibile) e quindi posso usare la prima regola di fathoming per chiudere il branch.
Abbiamo ancora il nodo P_2 da valutare. P_2 aveva soluzione pottima in $(3, \frac{12}{5})$ quindi procediamo col metodo di branch su x_2. Per P_5 si ottiene:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

e per P_6:

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Procedendo col bounding otteniamo i rispettivi rilassamenti lineari. Per P_5 si ottiene:

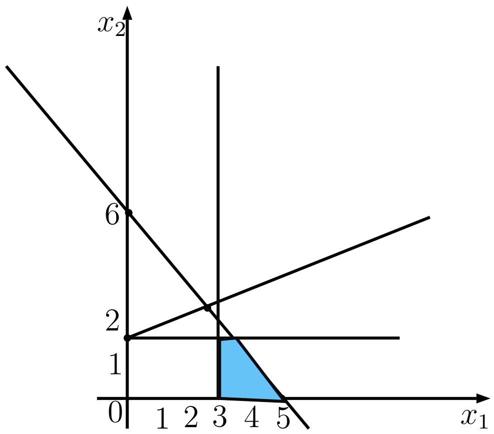
$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

e per P_6:

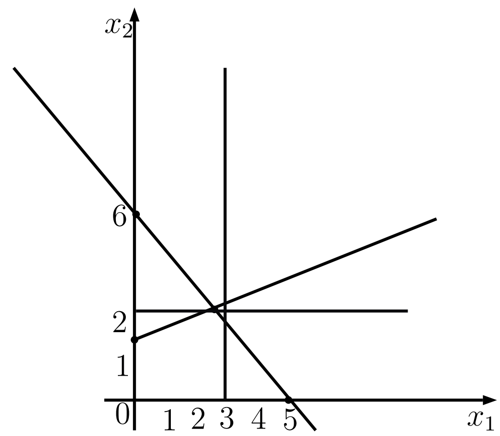
$$-2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$6x_1 - 5x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Partiamo da P_5 che si presenta così:



partiamo valutando il punto $(3, 0)$, con $z = 3$. Come vertici adiacenti abbiamo $(5, 0)$, con $z = 5$, e $(3, 2)$, con $z = -3$. Ci spostiamo quindi in $(3, 2)$ e valutiamo l'unico vertice adiacente rimasto, ovvero l'incrocio tra $6x_1 + 5x_2 = 30$ e $x_2 = 2$. Questo incrocio è rappresentato dal punto $(\frac{10}{3}, 2)$ che ha $z = -\frac{8}{3}$, valore che ci fa restare in $(3, 2)$, che è la soluzione ottima intera di P_5. Per P_5 si ha quindi $z_5 = -3$, $UB_5 = -3$ e $z_5^* = -6$. Possiamo quindi chiudere questo branch per la prima regola di fathoming in quanto si ha un upperbound inferiore a z^*.

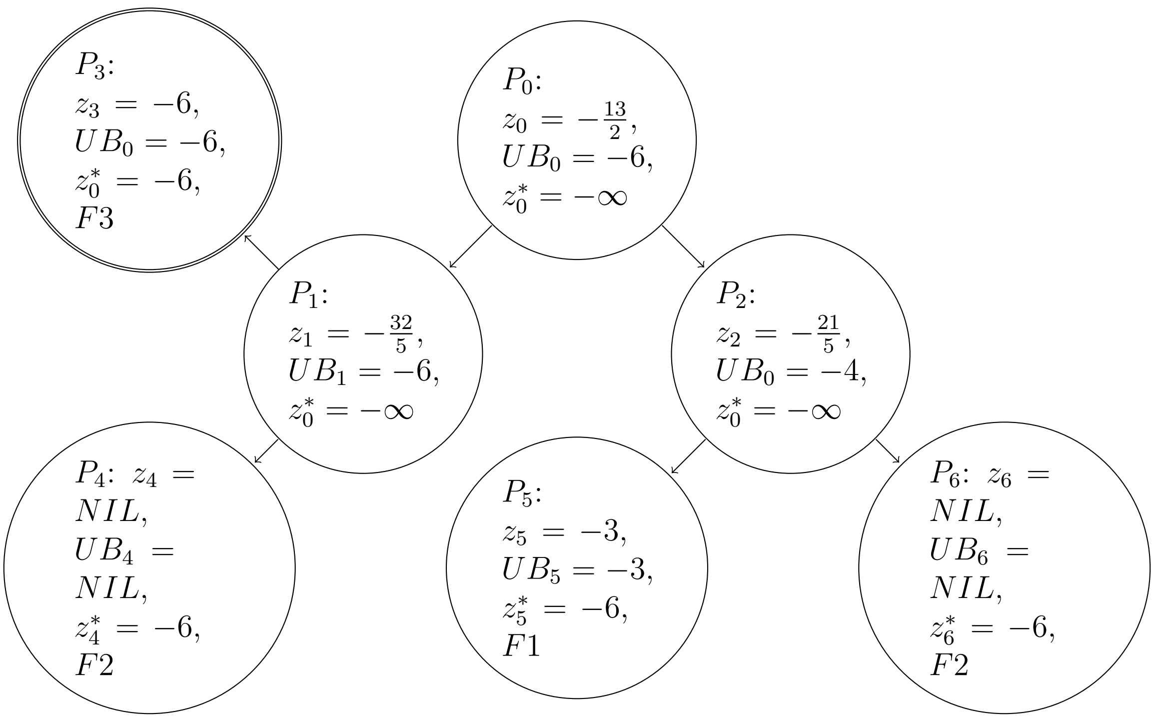
Valutiamo infine P_6:



Come si vede non si hanno soluzioni ammissibili (non si hanno punti nella regione ammissibile) e quindi il branch viene chiuso per la seconda regola di fathoming.
Siamo quindi giunti alla conclusione che il problema lineare intero ha:

punto di minimo in $(0, 2)$ e minimo pari a $z = -6$

Graficamente si avrebbe:



Capitolo 2

Esercizio 2

2.1 Parte a

Dobbiamo applicare un'iterazione del metodo del gradiente effettuando la line-search in modo esatto, a partire dal punto $A^T = (-1, 4)$ sul problema di minimizzazione non lineare:

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + 2(x_2 - 3)^2$$

Iniziamo quindi definendo $x^0 = x^A$, $k = 0$, $\varepsilon_1 = 0.01$ e $\varepsilon_2 = 0.1$.
Innazitutto calcolo il gradiente della funzione. Calcolo quindi la derivata parziali:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 + 4(x_2 - 3)$$

Ottenendo quindi:

$$\nabla f(x_1, x_2) = [4x_1 + x_2 \quad x_1 + 4(x_2 - 3)]$$

Studio quindi la direzione di discesa studiando il gradiente nel punto iniziale $x^0 = x^A$:

$$d^0 = -\nabla f(x^0) = -[4(-1) + (4) \quad (-1) + 4((4) - 3)] = [0 \quad -3]$$

Seguendo il metodo del gradiente cerchiamo ora il punto x^1. Sappiamo che:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$

quindi:

$$x^1 = [-1 \quad 4] + \alpha^0 [0 \quad -3] \Longrightarrow x^1 = [-1 \quad 4 - 3\alpha^0]$$

Ma bisogna calcolare α^0. Calcolo quindi il minimo della funzione f lungo d^0, ovvero calcolo $f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x^1) &= 2(-1)^2 + (-1)(4 - 3\alpha^0) + 2((4 - 3\alpha^0) - 3)^2 \\ &= 2 - 4 + 3\alpha^0 + 2(-3\alpha^0 + 1)^2 \\ &= -2 + 3\alpha^0 + 2(9\alpha^{0^2} - 6\alpha^0 + 1) \\ &= 18\alpha^{0^2} - 9\alpha^0 \end{aligned}$$

ma per avere un punto di minimo ci serve:

$$\frac{df(x^1)}{d\alpha^0} = 0$$

quindi la derivata di $18\alpha^{0^2} - 9\alpha^0$ nulla, ovvero otteniamo come punto di minimo:

$$36\alpha^0 - 9 = 0 \Longrightarrow \alpha^0 = \frac{1}{4}$$

Possiamo quindi calcolare effettivamente x^1:

$$x^1 = [-1 \quad 4] + \frac{1}{4}[0 \quad -3] \Longrightarrow x^1 = [-1 \quad \tfrac{13}{4}]$$

Procediamo ora con la verifica dei 2 criteri d'arresto. Innazitutto valutiamo la funzione nei punti x^0 e x^1:

$$f(x^0) = 2(-1)^2 + (-1)(4) + 2((4) - 3)^2 = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$f(x^1) = 2(-1)^2 + (-1)(\frac{13}{4}) + 2((\frac{13}{4}) - 3)^2 = 2 - \frac{13}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$$

calcolo inoltre il gradiente in x^1:

$$\nabla f(x^1) = [-\tfrac{3}{4} \quad 0]$$

Verifico quindi i due criteri:

1. verifichiamo $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_1$:

$$|-\frac{9}{8} - 0| < 0.01$$

   ma $\frac{9}{8} \not< 0.01$ quindi il criterio d'arresto non è verificato

2. verifichiamo $\|\nabla f(x^1)\| < 0.1$:

$$\sqrt{\frac{9}{16}+0} = \frac{3}{4}$$

ma $\frac{3}{4} \nless 0.1$ quindi il criterio d'arresto non è verificato

Possiamo dire che con una sola iterazione non si riesce a calcolare una soluzione ottima del problema

2.2 Parte b

Dobbiamo applicare un'iterazione del metodo di Newton a partire dal punto $A^T = (-1, 4)$ sul problema di minimizzazione non lineare:

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2(x_2 - 3)^2$$

Notiamo innazitutto che abbiamo a che fare con una funzione quadratica quindi il metodo convergerà con una sola iterazione.
Iniziamo quindi definendo $x^0 = x^A$, $k = 0$, $\varepsilon_1 = 0.01$ e $\varepsilon_2 = 0.1$.
Innazitutto calcolo il gradiente della funzione. Calcolo quindi la derivata parziali:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 + 4(x_2 - 3)$$

Ottenendo quindi:

$$\nabla f(x_1, x_2) = [4x_1 + x_2 \quad x_1 + 4(x_2 - 3)]$$

Studio poi il gradiente nel punto iniziale $x^0 = x^A$:

$$\nabla f(x^0) = [4(-1) + (4) \quad (-1) + 4((4) - 3)] = [0 \quad 3]$$

Procedo poi col calcolo della matrice Hessiana. Calcolo quindi le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1 x_1} = 4, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1 x_2} = 1$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2 x_1} = 1, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2 x_2} = 4$$

Ottengo quindi la mia matrice Hessiana per un generico punto:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Procedo quindi col calcolo dell'inversa della matrice. Calcolo innazitutto il determinante che sarà:

$$det(H_f(x)) = (4 \cdot 4) - (1 \cdot 1) = 15$$

procedo poi col calcolo dei cofattori:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$$

Sappiamo quindi che la matrice inversa è la matrice dei cofattori, trasposta, divisa per il determinante:

$$H_f(x)^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

Sappiamo ora che il punto x^{k+1} è dato da:

$$x^{k+1} = x^k - H_f(x^k)^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

quindi, nel nostro caso:

$$x^1 = x^0 - H_f(x^0)^{-1} \cdot \nabla f(x^0)$$

ovvero:

$$x^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Effettuo il prodotto riga per colonna tra l'Hessiana e il gradiente nel punto iniziale:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \frac{1}{5} \\ 0 + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

ed effettuo la sottrazione:

$$x^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{1}{5} \\ 4 - \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Ho quindi trovato il punto x^1.
Calcolo il gradiente in x^1:

$$\nabla f(x^1) = [4(-\tfrac{4}{5}) + \tfrac{16}{5} \quad -\tfrac{4}{5} + 4(\tfrac{16}{5} - 3)] = [0 \quad 0]$$

Sappiamo quindi che è un punto di ottimo.
Calcolo ora gli autovalori della matrice Hessiana, scrivo quindi la matrice:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

ne calcolo il determinante:

$$d = (4 - \lambda^2) - 1$$

per trovare gli autovalori voglio $d = 0$ quindi:

$$(4 - \lambda^2) - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

essendo entrambi positivi stiamo valutando un punto di minimo.

Il punto di minimo è $x^1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{5}\right)$