Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Introduzione alla Ricerca Operativa

La **Ricerca Operativa** è essenziale nel *problem solving* e nell'ambito del *decision making*. Sostanzialmente quindi si studia l'ottimizzazione, massimizzando le performances, l'accuratezza dei costi etc... per raggiungere un obiettivo.
Sulle slides ci sono vari esempi introduttivi di vita reale
Un altro problema studiato dalla riceca operativa sono le previsioni, mediante algoritmi predittivi che studiano i *pesi* delle osservazioni (cosa utile nel **Machine Learning** in quanto sono un uso di base delle **Reti Neurali**, *vari esempi introduttivi sulle slides*).
La ricerca operativa si occupa di formalizzare un problema in un modello matematico e calcolare una soluzione ottimo o approssimata. Essa costituisce un approccio scientifico alla risoluzione di problemi complessi da ricondurre alla matematica applicata. È utile in ambiti economici, logistici, di progettazione di servizi e di sistemi di trasporto e, ovviamente, nelle tecnologie. *È la branca della matematica più applicata.*
Il *primo passo* consiste nel costruire un modello traducendo il problema reale in linguaggio anturale in un linguaggio matematico, che non è ambiguo. Il *secondo passo* consiste nella costruzione delle soluzioni del modello tramite algoritmi e programmi di calcolo. Il *terzo passo*, ovvero l'ultimo, è l'interpretazione e la valutazione delle soluzioni del modello rispetto a quelle del problema reale.
La ricerca operativa ha origini nel 1800 in un ambiente puramente matematico. È stata resa "*algoritmica*" con la Macchina di Turing. **La ricerca operativa usa anche tecniche numeriche e non solo analitiche**.
Negli ultimi hanno si sono sviluppati, mediante il concetto di **gradiente**, nuovi algoritmi per il **deep network**.

2.1 Modelli nella R.O.

Definizione 1. *Data una funzione* $f : \mathbb{R} \rightarrow mathbbR$ *e* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un* ***problema di ottimizzazione*** *può esssere formulato come:*

$$opt\ f(x)\ s.t.\ x \in X$$

dove con $opt = \min, \max$ *indendiamo che opt può essere o min o max, portando ad un problema di minimizzazione con* $\min\ f(x)$ *o di massimizzazione* $\max\ f(x)$.
$f(x)$ *è detta* ***funzione obiettivo*** *e vale che:*

$$max[f(x) : x \in X] = -min[-f(x) : x \in X]$$

Inoltre $x \subseteq \mathbb{R}^n$ *è* ***l'insieme delle soluzioni ottenibili*** *o anche* ***regione ammissibile****.*
Infine $x \in X$ *rappresenta il* ***vettore delle variabili decisionali*** *e si tratta di variabili numeriche i cui valori rappresentano la soluzione del problema.*
Si capisce che essendo in $\mathbb{R}$ ***si hanno infinite soluzioni****.*
Quindi, un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo/massimo della funzione f ***tra i punti dell'insieme*** X *Se* $X = \mathbb{R}^n$ *si ha un'****ottimizzazione non vincolata****, altrimenti,* $x \subset \mathbb{R}$ *si ha un'****ottimizzazione vincolata****, dove la ricerca dei punti di ottimo della funzione obiettivo è fatta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione tenendo però conto dei vincoli. Se ho una funzione obiettivo lineare non si può avere un'ottimizzazione non vincolata (non saprei cercare massimi e minimi senza vincoli).*
*Abbiamo poi l'****ottimizzazione intera o a numeri interi*** *se* $x \in \mathbb{Z}^n$ *e si possono avere ottimizzazioni miste se si hanno interi e reali. Si ha anche l'****ottimizzazione binaria*** *quando si hanno due vie decisionali.*
Se non specificato si intende $X \subseteq \mathbb{R}$***.***

Definizione 2. *Quando l'insieme* X *delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione è espresso in un sistema di equazioni o disequazioni si parla di* ***problema di programmazione matematica (PM)****.*
Come vincolo si ha un'espressione $g_i(x)\{\leq, =, \geq\}0$ *(*$g_i \geq 0$ *etc ...) e con* $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ *che è una generica funzione che lega due variabili.*
Si possono avere più vincoli ma si ha sempre l'uguale in ogni vincolo per permettere il funzionamento degli algoritmi*.*

La regione ammissibile è $X \subseteq \mathbb{R}^n$ che è l'intersezione di tutti i vincoli del problema

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | \, g_i(x)\{\leq, 0, \geq\}0, \, i = 1, \ldots, m$$

Si hanno quindi m vincoli e n variabili. ***Se*** $x \in X$ ***allora*** x ***è soluzione ammissibile, se*** $x \notin X$ ***allora*** x ***è non ammissibile***

Esempio 1. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

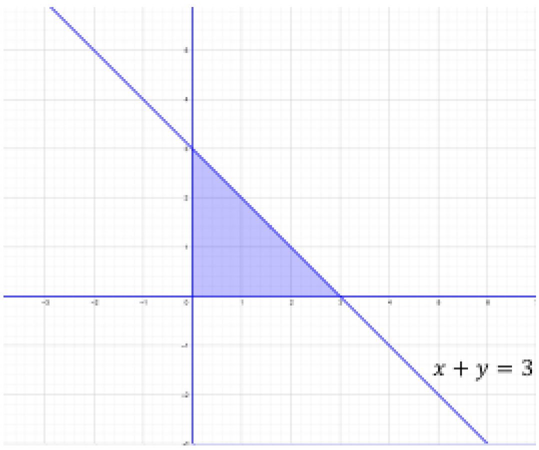
con i 3 vincoli:

$$x + y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

la regione ammissibile è:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | \, x + y \leq 3, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$$

ovvero l'area sottesa alla retta e compresa negli assi cartesiani:



Si possono avere problemi con regione non ammissibile, ovvero con $X = \emptyset$, che implica che il problema è mal posto oppure bisogna abbassare qualche vincolo. Si può avere un problema illimitato con:

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x_c \in X : f(x_c) \leq c \; se \; opt = min$$

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x_c \in X : f(x_c) \geq c \; se \; opt = max$$

Infine si può avere una sola soluzione ottima o più (anche infinite) soluzioni ottime utte con lo stesso valore della funzione obiettivo.

Esempio 2. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 3 vincoli:

$$x + y \leq -1$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Non ha soluzione (è matematicamente impossibile) e il problema non è ammissibile

Esempio 3. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\max_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 2 vincoli:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Ha come soluzione infinito

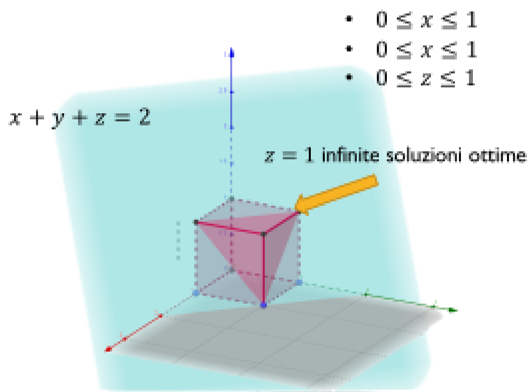
Esempio 4. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\max_{x,y,z}(z)$$

con i 4 vincoli:

$$x + y + z = 2$$
$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq 1$$

Ha infinite soluzioni (tutte le soluzioni con $z = 1$ e $x+y = 1$, in quanto cerco il max di z e come ultio vincolo ho che al massimo è 1)



La risoluzione di un problema di Programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale** ovvero un vettore $^* \in X$ tale che:

$$f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in X\ \textit{se opt} = \min$$

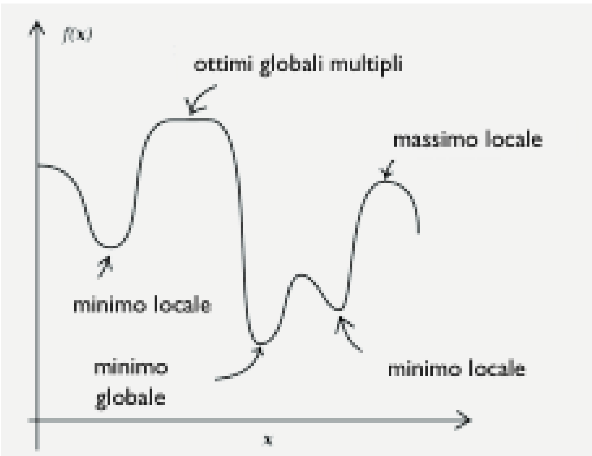
$$f(x^*) \geq f(x)\ \forall x \in X\ \textit{se opt} = \max$$

Quando il problema è molto difficile da risolvere possiamo accontentarci di un ottimo locale, vale a dire un $\hat{x} \in X$ tale che, fissato un $\varepsilon > 0$ opportuno si ha che (per problemi di minimo e massimo):

$$f(\hat{x}) \leq f(x)\ \forall x \in X : \||x - \hat{x}|| \leq \varepsilon\ \textit{se opt} = \min$$

$$f(\hat{x}) \geq f(x)\ \forall x \in X : \||x - \hat{x}|| \leq \varepsilon\ \textit{se opt} = \max$$

Un problema di ottimizzazione può avere più ottimi locali e globali e i punti di ottimo globale sono anche di ottimo locale.



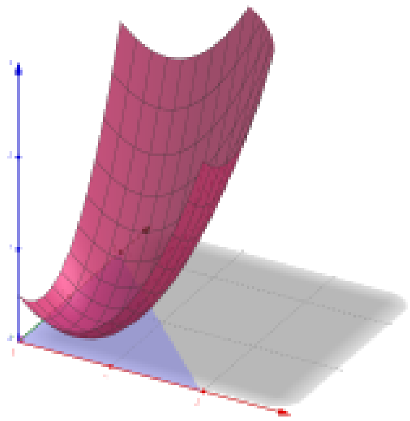
Esempio 5. *abbiamo la funzione obiettivo:*

$$\min_{x,y}((x-0.2)^2+y^2)$$

con i 3 vincoli:

$$x+y \leq 1$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

In viola si ha la funzione obiettivo tridimensionale e convessa e in azzurro la regione ammissibile



si ha solo un minimo globale. Si possono usare le ***curve di livello*** *che sono le proiezioni ortogonali sul piano cartesiano ottenute intersecando il piano z con il grafico della funzione.*
In generale si useranno tecniche numeriche anche se si ha che ***una funzione convessa ha un solo minimo globale***

Esempio 6. *abbiamo la funzione obiettivo:*

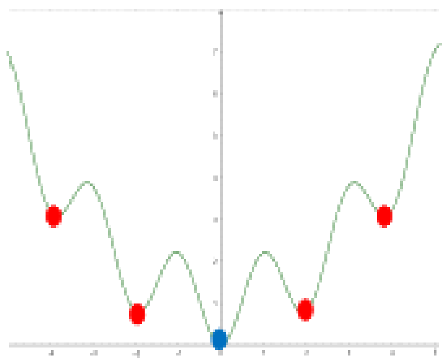
$$\min_x (0.2x^2 + (1 - \cos(\pi x)))$$

con i 2 vincoli:

$$x \geq 5$$

$$y \geq 0$$

e si ha il seguente grafico:



si ha il coseno quindi si ha una funzione nè concava nè convessa si ha quindi un ottimo globale e 4 locali

Si ha:

- **programmazione lineare (PL)**, con obiettivo e vincoli lineari:

$$opt\, f(x) = c^T x$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g_i(x)\{\leq, =, \geq\}0, \; i = 1, \; g_i(x) = a_i^T x - b_i\}$$

- **programmazione lineare intera (PLI)**, con obiettivo e vincoli lineari interi:

$$opt\, f(x) = c^T x$$

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^n : \; g_i(x)\{\leq, =, \geq\}0, \; i = 1, \; g_i(x) = a_i^T x - b_i\}$$

- **programmazione non lineare (PNL)**, con obiettivo e vincoli $g_i(x)$ non lineari:

$$opt\, f(x)$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g_i(x)\{\leq, =, \geq\}0, \; i = 1, \; g_i(x) = a_i^T x - b_i\}$$

Esempio 7. *abbiamo la funzione obiettivo:*

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 3 vincoli:

$$x + y \leq 1$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

non è lineare in quanto x e y sono al quadrato e quindi non lineare

Esempio 8. *abbiamo la funzione obiettivo:*

$$\min_{x,y}(x + y)$$

con i 2 vincoli:

$$x^2 - 1 \geq 0$$
$$y \geq 0$$

non è lineare in quanto ho un vincolo al quadrato e quindi non lineare

Esempio 9. *abbiamo la funzione obiettivo:*

$$\min_{x,y}(x + 4y)$$

con i 4 vincoli:

$$x + y = 3$$
$$x^2 - 1 \geq 0$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

non è lineare in quanto ho un vincolo al quadrato e quindi non lineare ma posso renderlo lineare in quanto $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ma $x + 1$ è sempre positivo quindi posso ammorbidire il vincolo rendendo il problema lineare

Esempio 10.

Ingredienti	Disponibilità massima	Costo x litro
Rum chiaro	6 l	15 €
Cola	15 l	1 €
Limone	3 l	2.5 €

Le dosi ideali sono: almeno il 25% di rum (R) chiaro e il 50% di Cola (C) e non più del 10% di limone (L) e voglio 10L di cubalibre. Abbiamo quindi, per logica:

$$R \geq 0$$
$$C \geq 0$$
$$L \geq 0$$
$$R \leq 6$$
$$C \leq 15$$
$$L \leq 3$$

quindi:

$$0 \leq R \leq 6$$
$$0 \leq C \leq 15$$
$$0 \leq L \leq 3$$

inoltre:

$$R + C + L \geq 10$$

che è:

$$R + C + L - 10 \geq 0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix} - 10 \geq 0$$

quindi:

$$a_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \, x = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}, \, b_1 = 10$$

Cosa vuol dire almeno il 25% di rum chiaro?

$$R \geq 0.25 \cdot (R + C + L)$$

Cosa vuol dire almeno il 5o% di cola?

$$R \geq 0.5 \cdot (R + C + L)$$

Cosa vuol dire almeno il 25% di limone?

$$R \geq 0.1 \cdot (R + C + L)$$

che sono vincoli lineari.
quindi il costo è:

$$\min_{R,C,L} (15R + C + 2.5L)$$

che è una funzione obiettivo lineare. Osserviamo che la funzione obiettivo può essere scritta anche nella seguente forma compatta:

$$\min c^t x, \quad c^t = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2.5 \end{bmatrix} \ e \ x = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$$

Ora riscriviamo in forma matriciale:

$$\min cx$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

con:

$$c = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$$

la prima riga sarà $R + C + L \geq 10$
la seconda sarà $R \geq 0.25 \cdot (R + C + L) \geq 0 \rightarrow (1 - 0.25)R - 0.25R - 0.25L$
la terza sarà $C \geq 0.5 \cdot (R + C + L) \geq 0 \rightarrow -0.5R + (1 - 0.5)C - 0.5L$
la quarta sarà $L \geq 0.1 \cdot (R + C + L) \geq 0 \rightarrow -0.1R - 0.25C + 0.9(1 - 0.1)L$
la quinta sarà $0 \leq R \leq 6 \rightarrow -R \geq -6$
la sesta sarà $0 \leq C \leq 15 \rightarrow -C \geq -6$
la settima sarà $0 \leq L \leq 3 \rightarrow -L \geq -6$
e quindi:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.5 & 0.5 & -.5 \\ 0.1 & 0.1 & -0.9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -15 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Esempio 11. *Si ha che:*

Il comprare o no un videogioco può essere modellizzato per mezzo di variabili decisionali binarie associate ad ogni gioco usando variabili binarie:

$$x_i \in \{0, 1\}\, i = 1, \dots n$$

con $x_i = 1$ *si compra con* $x_i = 0$ *no.*
Non superare il budget massimo di 100 euro può essere espresso dalla seguente relazione:

$$39,99 \cdot x_1 + 39,99 \cdot x_2 + 59,99 \cdot x_3 + 59,99 \cdot x_5 + 19,99 \cdot x_5 + 29,99 \cdot x_6 150$$

Non superare la memoria massima può essere espresso dalla seguente relazione:

$$30 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 46 \cdot x_5 + 12 \cdot x_5 + 70 \cdot x_6 150$$

e sono vincoli lineari.
Volere i giochi che più ci piacciono si esprime nel seguente modo:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

che è una funzione obiettivo lineare.
Volere i giochi che più ci piacciono, avendo 200 euro di budget e 100GB si spazio corrisponde a:

$$\max(2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6)$$

Si tratta, quindi, di un problema di programmazione lineare a variabili binarie, che sono un caso particolare di variabili intere. Un modello di ottimizzazione di questo tipo prende il nome di Problema dello zaino (Knapsack)

altri esempi sulle slide

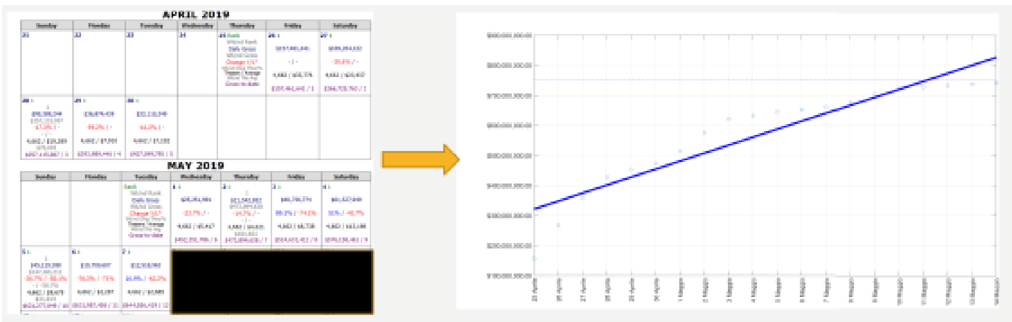
Esempio 12. *Partendo dai dati di vendita di avatar capire se Endgame supererà gli incassi di avaatar, sapendo gli incassi dei primi giorni.*
Vogliamo costruire una retta di regressione lineare che interpoli i dati:

$$y = ax + b, \ \ a, b \in \mathbb{R}$$

Bisogna calcolare la retta di regressione corrisponde al seguente problema di ottimizzazione non vincolata:

$$\min_{a,b} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \right]$$

e quindi si ha funzione obiettivo non-lineare con a, b variabili continue. Cerco quindi la retta di regressione partendo dai primi dati e ipotizzo una previsione e cerco a e b :



Questo è un problema di ottimizzazione non vincolata e non lineare

altri esempi sulle slide

2.1.1 Esercizio

Esercizio 1. ***testo:***
La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alfa, Beta e Gamma). Per due di esse (Beta e Gamma) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per ciascuna batteria, i costi di manodopera (per batteria prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per batteria):

Batterie	Rame (kg/batteria)	Costi manodopera	Prezzi di vendita
Alfa	-	12	25
Beta	1	6	20
Gamma	2	4	30

(costi e manodopera sono entrambi in euro/batteria)
Si suppinga che ogni batteria prodotta sia anche venduta.
I tre tipi di batteria vogliono essere prodotti in quantità tali che il numero di batterie di tipo Alfa sia almeno doppio del numero di batterie di tipo Beta e non superiore al numero di batterie Gamma. Formulare un opportuno modello di programmazione lineare per la pianificazione ottimale dell'attività diproduzione della Svivon.
Soluzione:
Innazitutto partiamo dal'ultima frase e definiamo le relazioni tra i tipi di batteria. Definiamo x_i il numero di batterie di tipo $i \in I$, con $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ***insieme degli indici****. Cerchiamo ora funzione* ***obiettivo*** *e* ***vincoli****.*
Suppongo di produrre una batteria di tipo α, avrò un guadagno effettivo pari a guadagno meno costi: $25 - 12 = 13$. Per le β si avrà, avendo anche il costo del rame di 5 euro al kilo, $20 - 6 - 5 \cdot 1 = 9$. Per le γ sarà $30 - 4 - 5 \cdot 2 = 16$. L'azienda ovviamente vuole guadagnare di più, dobbiamo massimizzare il profitto. Il profitto delle α sarà $13x_\alpha$, per le β sarà $9x_\beta$ e per le γ sarà $16x_\gamma$. Quindi si avrà la seguente funzione obiettivo:

$$\max(z) = 13x_\alpha + 9x_\beta + 16x_\gamma$$

con i seguenti vincoli (ricordando che solo le β e le γ usano il rame):

$$\begin{cases} x_\alpha \geq 2x_\beta \\ x_\alpha \leq x_\gamma \\ x_\beta + 2x_\gamma < 4000 \end{cases}$$

Bisogna specificare che le variabili non sono continue, quindi aggiungiamo un vincolo di interezza:

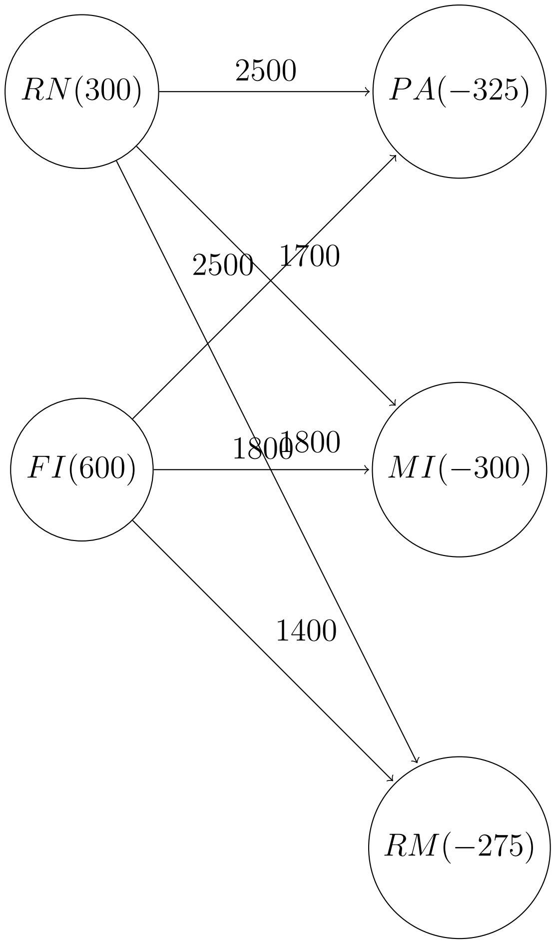
$$x_i \in \mathbb{N}, \forall i \in I$$

E abbiamo risolto le richieste dell'esercizio

Esercizio 2. ***Testo:***
Un'industria con dueimpianti produttivi localizzati a Rimini e Firenze è interessata a sapere qual è l'organizzazione ottimale della propria rete distributiva, in modo da ottimizzare la consegna dei prodotti presso letreprincipali città di distribuzione:Palermo, Milano e Roma. La capacità produttiva dei due impianti di produzione è la seguente: Rimini 300, Firenze 600. La domanda presso le tre città di distribuzione è la seguente: Palermo 325, Milano 300, Roma 275. I costi associati al viaggio tra gli impianti di produzione e le città di distribuzione sono dati dalla seguente tabella:

	Palermo	Milano	Roma
Rimini	2500	1700	1800
Firenze	2500	1800	1400

Formulare un modello di Programmazione lineare che permetta di pianificare lo spostamento ottimale dei prodotti dagli impiantialle cittàdi distribuzione in modo tale da minimizzare i costi di viaggio
Soluzione:



Sugli archi ho i costi di trasporto.
Definisco due insiemi indici, uno $I = \{RN, FI\}$ *con le città di partenza, e uno* $J = \{PA, MI, RM\}$ *con le città d'arrivo.*
Quindi le varfiabili $x_{i,j}$ *indicano il numero di prodotti trasportati da dalla città* $i \in I$ *a quella* $j \in J$.
Avrò la seguente funzione obiettivo:

$$\min(z) = 2500x_{RN,PA} + 1700x_{RN,MI} + \cdots + 1400x_{FI,RM}$$

che può essere scritta in maniera compatta definendo il dato $c_{i,j}$ *come il costo di trasporto tra le due città* i *e* j, *ottenendo:*

$$\min(z) = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j}$$

Cerchiamo ora i vincoli. A Rimini possono uscire 300 prodotti:

$$x_{RN,PA} + x_{RN,MI} + x_{RN,RM} = 300$$

una cosa simile va fatta per Firenze.
Per le città di arrivo vediamo l'esempio di Palermo:

$$x_{RN,PA} + x_{FI_PA} = +325$$

similmente per Milano e Roma.
Questi vincoli possono essere compattati a livello di sintassi, indicando con b_i *il numero di prodotti spedibili da una città* $i \in I$*:*

$$\sum_{j \in J} x_{i,j} = b_i, \ \forall i \in I$$

e indicando con b_j *il numero di prodotti ricevibili da una città* $j \in J$*:*

$$\sum_{i \in I} x_{i,j})b_j, \ \forall j \in J$$

e aggiungiamo il vincolo per l'interezza:

$$x_{i,j} \in \mathbb{N}, \ \forall (i,j) \in I \times J$$