Assignment 2

Davide Cozzi, 829827

Capitolo 1

Esercizio 1

1.1 Parte a

Innanzitutto dobbiamo scrivere il problema in forma standard introducendo 3 variabili di slack s_1, s_2, s_3. Otteniamo quindi la seguente funzione obiettivo:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \qquad\qquad & \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + s_2 \qquad & \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + s_3 & \leq 20 \end{aligned}$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Scriviamo quindi il tableau, ricordandoci di invertire il segno dei coefficienti della funzione obiettivo:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	-2	1	-1	0	0	0
60	3	1	1	1	0	0
10	1	-1	2	0	1	0
20	1	1	-1	0	0	1

abbiamo quindi le variabili di slack in base e le variabili del problema originale fuori base.
Nella prima riga, detta $riga_0$, si leggono i tassi di miglioramento. Si capirà

di essere giunti alla soluzione ottimale quando non si avranno coefficienti negativi come tassi di miglioramento.
Partiamo con la **prima iterazione**.
Scegliamo la variabile da far entrare in base e scegliamo quella col tasso di miglioramento più grande, in questo caso x_1 che ha tasso di miglioramento pari a -2, e chiamiamo **colonna pivot** la colonna sottostante:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iniziamo ora a cercare la variabile uscente. Si parte col **test del minimo rapporto**. Prendo i rapporti tra i termini noti e i corrispettivi coefficienti positivi (tutti nel nostro caso) della colonna pivot e ne cerco il minimo:

$$\min \left\{ \frac{60}{3}, \frac{10}{1}, \frac{20}{1} \right\}$$

e notiamo che il minimo, 10, corrisponde al rapporto tra il termini della seconda riga, che diventa quindi la nostra **riga pivot**:

$$[10, 1, -1, 2, 0, 1, 0]$$

L'incrocio tra riga e colonna pivot corrisponde al nostro **elemento di pivot**, che, in questo caso, è pari a 1. Divido ora la riga pivot per l'elemento pivot (anche se in questo caso è un'operazione banale essendo il pivot pari a 1) e riscrivo il tableau con la nuova riga pivot:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	-2	1	-1	0	0	0
60	3	1	1	1	0	0
10	1	-1	2	0	1	0
20	1	1	-1	0	0	1

manipolo ora il tableau in modo da annullare tutti i valori della colonna pivot tranne il pivot stesso. Effettuo quindi le seguenti operazioni tra righe:

$$riga_0 = riga_0 + 2riga_2$$

$$riga_1 = riga_1 - 3riga_2$$

$$riga_3 = riga_3 - riga_2$$

ottenendo quindi un nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
20	0	-1	3	0	2	0
30	0	4	-5	1	-3	0
10	1	-1	2	0	1	0
10	0	2	-3	0	-1	1

Qundi ora in base abbiamo x_1, s_1, s_3 mentre s_2 esce dalla base.
Sulla riga 0 abbiamo i nuovi tassi di miglioramento e, avendo ancora valori negativi, sappiamo che non abbiamo raggiunto la soluzione ottimale. Quindi il primo valore della $riga_0$, 20, non è il valore ottimale della funzione obiettivo.
Procedo quindi con la **seconda iterazione**.
Il tasso di miglioramento maggiore è -1 quindi vogliamo far entrare in base x_2. La colonna pivot sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Facciamo nuovamente il test del rapporto minimo, ricordando di prendere solo i valori strettamente positivi della colonna pivot:

$$\min\left\{\frac{30}{4}, \frac{10}{2}\right\}$$

e il minimo, 5, corriponde ai rapporti tra i valori della terza riga che qindi diventa la nostra riga pivot:

$$[10, 0.2, -3, 0, -1, 1]$$

Il nostro elemento pivot corriponde quindi a 2.
Divido ora la riga pivot per l'elemento pivot e riscrivo il tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
20	0	-1	3	0	2	0
30	0	4	-5	1	-3	0
10	1	-1	2	0	1	0
5	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

manipolo ora il tableau in modo da annullare tutti i valori della colonna pivot tranne il pivot stesso. Effettuo quindi le seguenti operazioni tra righe:

$$riga_0 = riga_0 + riga_3$$

$$riga_1 = riga_1 - 4riga_3$$

$$riga_2 = riga_2 + riga_3$$

ottengo quindi il nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
25	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
10	0	0	7	1	-1	-2
15	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

quindi x_2 è entrato in base mentre s_3 esce dalla base.
Non si hanno più tassi di miglioramento negativi, abbiamo trovato la soluzione ottimale.
Quindi siamo giunti alla risoluzione:

Il punto di massimo è dato da $(15, 5, 0, 10, 0, 0)$
Il massimo è 25

1.2 Parte b

Dobbiamo scrivere il problema duale della funzione obiettivo:

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Innazitutto bisogna invertire cosa si ricerca nella funzione obiettivo del problema primale. Nel nostro caso il problema primale cerca il massimo quindi il duale cercherà il minimo. Inoltre i termini noti dei vincoli del primale diventeranno i coefficienti della funzione obiettivo del duale e i coefficienti della funzione obiettivo del problema primale diventeranno i termini noti dei vincoli. Nei vincoli si cambia anche il "verso" quindi $\leq$ diventerà $\geq$, mentre i vincoli di dominio conservano il "verso". Infine i coefficienti dei vincoli del problema duale non sono altro che la matrice trasposta dei coefficienti del problema primale.

Si ottiene quindi la seguente funzione obiettivo per il problema duale:

$$\min z^* = 60y_1 + 10y_2 + 20y_3$$

Con i seguenti vincoli:

$$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$$
$$y_1 - y_2 + y_3 \geq -1$$
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 1$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Prodedo ora cercando il punto di ottimo del duale col teorema degli scarti. Procedo usando il teorema, ricordando che $x_1 = 15$, $x_2 = 10$ e $x_3 = 0$. Applico quindi le condizioni di complementarietà:

- $y_1 \cdot (3x_1 + x_2 + x_3 - 60) = 0$, sostituisco le x_i e ottengo $y_1 \cdot (-10) = 0$ quindi $y_1 = 0$ che è la **prima condizione**
- $y_2 \cdot (x_1 - x_2 + 2x_3 - 10) = 0$ sostituisco le x_i e ottengo $y_2 \cdot (0) = 0$ quindi **non posso dedurre alcuna condizione di complementarietà** su y_2
- $y_3 \cdot (x_1 + x_2 - x_3 - 20) = 0$, sostituisco le x_i e ottengo $y_3 \cdot (0) = 0$ **quindi non posso dedurre alcuna condizione di complementarietà** su y_3
- $(3y_1 + y_2 + y_3 - 2) \cdot x_1 = 0$ che corrisponde a $(3y_1 + y_2 + y_3 - 2) \cdot 15 = 0$ quindi $3y_1 + y_2 + y_3 - 2 = 0$ è la **seconda condizione**
- $(y_1 - y_2 + y_3 + 1) \cdot x_2 = 0$ che corrisponde a $(y_1 - y_2 + y_3 + 1) \cdot 5 = 0$ quindi $y_1 - y_2 + y_3 + 1 = 0$ è la **terza condizione**
- $(y_1 + 2y_2 - y_3 - 1) \cdot x_3 = 0$ che corrisponde a $(y_1 + 2y_2 - y_3 - 1) \cdot 0 = 0$ **quindi non è possibile dedurre alcuna condizione di complementarietà sul primo vincolo duale**

risolvo quindi il sistema con le 3 condizioni trovate:

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - 2 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y_i = 0 \\ y_2 + y_3 = 2 \\ y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

Ottengo quindi:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e sostituendo nella funzione obiettivo del problema duale ottengo esattamente $z^* = 25$ quindi la soluzione è congruente. Inoltre, sempre sostitutendo, verifico che tutti i vincoli (compresi quelli di dominio) sono rispettati, verificando così la correttezza dei risultati ottenuti.

Capitolo 2

Esercizio 2

Partiamo dalla seguente funzione obiettivo:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 2$$

con i seguenti vincoli di dominio:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sappiamo, grazie al testo, che si ha il seguente tableau finale:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \\
\hline
\frac{64}{5} & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\
\hline
\frac{6}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\
\frac{8}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5}
\end{array}$$

Procediamo per punti:

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei termini noti b_i:
  - il primo è $b_1 = 4$. Sappiamo che al primo vincolo è associata la variabile di slack s_1 la quale può modificare il valore del termine noto. Prendendo il tableau finale dobbiamo ottenere che i termini noti restino positivi

al più di Δ_1 volte il valore della variabile di slack in quella riga. Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{6}{5} + \frac{3}{5}\Delta_1 \geq 0 \\ \frac{8}{5} - \frac{1}{5}\Delta_1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-2 \leq \Delta_1 \leq 8$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di b_1:

$$b_1 \in [4-2, 4+8] = [2, 12]$$

- il secondo è $b_2 = 2$. Sappiamo che al secondo vincolo è associata la variabile di slack s_2 la quale può modificare il valore del termine noto. Prendendo il tableau finale dobbiamo ottenere che i termini noti restino positivi al più di Δ_2 volte il valore della variabile di slack in quella riga. Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{6}{5} - \frac{3}{5}\Delta_2 \geq 0 \\ \frac{8}{5} + \frac{6}{5}\Delta_2 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-\frac{4}{3} \leq \Delta_2 \leq 2$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di b_2:

$$b_2 \in [2 - \tfrac{4}{3}, 2+2] = [\tfrac{2}{3}, 4]$$

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili in base c_1:
  - il primo è $c_1 = 3$. Riscrivo il tableau ponendo un $-\Delta_1$, nella $riga_0$ in corrispondenza alla variabile di cui sto studiando il coefficiente. Cerco quindi un modo per riportare la variabile in base e studio le trasformazioni che vengono propagate. Il tableu sarà quindi:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \\ \hline \frac{64}{5} & \Delta_1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\ \hline \frac{6}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{array}$$

e procedo facendo $riga_0 = riga_0 + \Delta \cdot riga_2$ in quanto x_1 è presente per la $riga_2$, rimandando così x_1 in base. Ottengo quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{8}{5}$	0	0	$\frac{7}{5} - \Delta_1 \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{18}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{6}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

ma sappiamo che per mantenere ottima la soluzione devo avere solo termini positivi in $riga_0$ quindi:

$$\begin{cases} \frac{7}{5} - \Delta_1 \cdot \frac{1}{5} \geq 0 \\ \frac{18}{5} + \Delta_1 \cdot \frac{6}{5} \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-3 \leq \Delta_1 \leq 7$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di c_1:

$c_1 \in [3 - 3, 3 + 7] = [0, 10]$

- il secondo è $c_2 = 4$. Riscrivo il tableau ponendo un $-\Delta_2$, nella $riga_0$ in corrispondenza alla variabile di cui sto studiando il coefficiente. Cerco quindi un modo per riportare la variabile in base e studio le trasformazioni che vengono propagate. Il tableu sarà quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5}$	0	Δ_2	$\frac{7}{5}$	$\frac{18}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

e procedo facendo $riga_0 = riga_0 + \Delta \cdot riga_1$ in quanto x_2 è presente per la $riga_1$, rimandando così x_2 in base. Ottengo quindi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$\frac{64}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{6}{5}$	0	0	$\frac{7}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{18}{5} - \Delta_2 \cdot \frac{3}{5}$
$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

ma sappiamo che per mantenere ottima la soluzione devo avere solo termini positivi in $riga_0$ quindi:

$$\begin{cases} \frac{7}{5} + \Delta_2 \cdot \frac{3}{5} \geq 0 \\ \frac{18}{5} - \Delta_2 \cdot \frac{3}{5} \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo $-\frac{7}{3} \leq \Delta_2 \leq 6$ e quindi l'intervallo di ammissibilità di c_2:

$$c_2 \in [4 - \tfrac{3}{7}, 4 + 6] = [\tfrac{5}{3}, 10]$$

- cerchiamo gli intervalli di ammissibilità dei coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili fuori base k_i. In questo caso ci basta verificare che i valori corrispondenti alle variabili fuori base nella $riga_0$ restino positivi al più di un Δ_i, in modo di restare nella condizione di avere la soluzione ottimale. Si ha quindi:

$$-\tfrac{7}{5} + \Delta_1 \geq 0 \Longrightarrow \Delta_1 \geq -\tfrac{7}{5}$$
$$-\tfrac{18}{5} + \Delta_2 \geq 0 \Longrightarrow \Delta_2 \geq -\tfrac{18}{5}$$

quindi si ottiene che:

$$k_1 \in [-\tfrac{7}{5}, +\infty]$$
$$k_2 \in [-\tfrac{18}{5}, +\infty]$$