Analisi e Progetto di Algoritmi

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Introduzione al corso

2.1 Argomenti

Si hanno diversi tipi di problemi:

- **problemi di ottimo** dove si cercano singole soluzioni efficienti (massimi o minimi) tra molte soluzioni possibili. Si usa anche la **programmazione greedy**, dove si sceglie in base ai costi locali per ottenere massimi e minimi senza però guardare i costi complessivi.
- **problemi non risolubili in tempi accettabili**, per i quali si usa la **programmazione dinamica**, che cerca di individuare sottostrutture ottime per risolvere il problema, cercando la soluzione migliore memorizzando le altre soluzioni e utilizzandole. Si cerca comunque la soluzione meno dispendiosa in termini di tempo.
- **problemi NP-completi**, ovvero problemi per cui non si può trovare un algoritmo o non si può trovare un algoritmo con una complessità asintotica polinomiale. Si useranno anche tecniche non deterministiche. Si cercherà di studiare uno dei 10 problemi più difficili della matematica: $P \subseteq NP$?

Studieremo poi i grafi non pesati con gli algoritmi *BFS* (per cercare in ampiezza) e *DFS* (per cercare in profondità). Studieremo anche i grafi pesati con problemi di cammino minimo.

2.2 Ripasso Algoritmi 1

Innazitutto due algoritmi con lo stesso scopo si possono confrontare in base a tempo e spazio, scegliendo anche in base alle esigenze hardware. Per lo spazio si calcola quanto spazio viene richiesto da variabili e strutture dati, soprattutto queste ultime che dipendono dalla dimensione dell'input. Per quanto riguarda il tempo si usano le tecniche di conto soprattutto basate sui cicli e, in generale, su tutte operazioni da effettuare. Il tempo si basa sull'input n e si indica con $T(n)$ e si esprime in forma asintotica, interessandoci quindi unicamente all'ordine di grandezza. Si hanno il caso peggiore, indicato con l'O-grande e quello migliore indicato con l'o-piccolo a seconda di n.
Si ricorda poi la tecnica della ricorsione con algoritmi che si muovono su se stessi mediante dei "passi" arrivando ad un caso base di uscita. Per calcolare i tempi di un algoritmo ricorsivo si ha $T(n) = F(n) + T(n-1)$ con F che rappresenta le istruzioni delle subroutines. Questa equazione di ricorrenza non è facilmente calcolabile ma può essere espansa muovendosi sui passi fino a che non si arriva a qualcosa di calcolabile grazie al caso 0, questo è il metodo iterativo (anche se si ha anche il metodo per sostituzione). Per gli algoritmi ricorsivi si hanno anche i divide et impera (dove il problema P è diviso in sottoproblemi risolti separatemente, con la divide, e poi combinati alla fine, con la combina) dove i tempi non sono sempre calcolabili ma se lo sono si usa il metodo dell'esperto (studiando le tre possibili casistiche).

2.2.1 Equazioni di Ricorrenza

Le equazioni di ricorrenza hanno solitamente la seguente forma:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Esistono tre metodi per risolvere le equazioni di ricorrenza:

- Iterativo (detto anche Albero di ricorsione)
- Sostituzione
- Esperto (detto anche Principale)

Metodo Iterativo

Si può usare sia per algoritmi ricorsivi e per Divide et Impera. Ad ogni passo si prende il valore a destra dell'uguaglianza e lo si sostituisce, arrivando, dopo k passi ad una formula generale. Sempre k ci darà il caso base. Posso rappresentare questo metodo con l'albero delle chiamate ricorsive, guardando quanto è alto l'albero e quanto impiega ad ogni livello

Esempio 1. *Calcolo i tempi di:*

$$\begin{cases} T(N) = T(n-1) + 8 \\ T(1) = 6 \end{cases}$$

procedo nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} T(n) = T(n-1) + 8 &= [T(n-2) + 8] + 8 = T(n-2) + 2 \cdot 8 \\ &= [T(n-3) + 8] + 2 \cdot 8 = T(n-3) + 3 \cdot 8 \\ &= [T(n-4) + 8] + 3 \cdot 8 = T(n-4) + 4 \cdot 8 \\ &= T(n-k) + k \cdot 8 \end{aligned}$$

per $k = n-1$ si ha:

$$T[n-(n-1)] + (n-1) \cdot 8 = T(1) + (n-1) \cdot 8 = 6 + (n-1) \cdot 8 = \Theta(n)$$

Altri esempi su sito e appunti di Chiodini

Metodo per Sostituzione

Si ipotizza un tempo di calcolo (si possono usare gli asintotici con O e Ω lo si dimostra per induzione

Esempio 2.

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \\ T(1) & n = 1 \end{cases}$$

Ipotizzo $O(n \cdot \log n)$ e dimostro per induzione:

$$T(n) = O(n \cdot \log n) \leq c \cdot n \cdot \log n$$

Serve una dimostrazione forte: ipotizzo $T(m)$ vera per $1 \leq m \leq n-1$ quindi si ha:

$$\begin{aligned} T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n &\leq 2 \cdot \left[c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}\right] + n \\ = c \cdot n \cdot \log \frac{n}{2} + n &= c \cdot n \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + n \\ = c \cdot n \cdot \log_2 n - c \cdot n + n &\leq c \cdot n \cdot \log n \text{ se } c \geq 1 \end{aligned}$$

Analizzo ora il caso base:
$T(1) = 1$ *quindi voglio* $1 \leq c \cdot \log_2 1$ *ovvero* $1 \leq c \cdot 0$ *ovvero mai. testo fino a che non trovo* $T(3) = 2 \cdot T(1) + 3 = 29 + 3 = 5$ *che mi va bene, infatti* $5 \leq c \cdot 3 \cdot \log_2 3$

Metodo dell'Esperto

Posso usare questo metodo solo nel caso di un'equazione di ricorrenza di questo tipo:

$$\begin{cases} T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

dove:

- $a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)$ è l'Impera ed è $\sim n^{\log_b a}$
- $f(n)$ è il divide e il combina (ovvero la parte iterativa)

Si definiscono tre casi:

- **caso 1:** $n^{\log_b a} > f(n)$ quindi $T(n) \sim n^{\log_b a}$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie: $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ (con $\epsilon > 0$) e quindi $T(n) = \Theta(n^{log_b a - \epsilon})$
- **caso 2:** $n^{\log_b a} \cong f(n)$ quindi $T(n) \sim f(n) \cdot \log n$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ e quindi $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- **caso 3:** $n^{\log_b a} < f(n)$ quindi $T(n) \sim f(n)$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ (con $\epsilon > 0$) e $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n)$ (con $k < 1$) quindi $T(n) = \Theta(f(n))$

Esempio 3. *Risolvo:*

$$T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Si ha: $f(n) = n$, $a = 9$ *e* $b = 3$.
Ho che $n^{\log_3 9} = n^2$ *quindi ho il primo caso:*
$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{2-\epsilon})$ *Posso dire che* $\exists \epsilon : O(n^{2-\epsilon}) = n$*?*
Si $\forall \epsilon < 1$*, per esempio* $\epsilon = \frac{1}{2}$*. Quindi il Metodo dell'esperto è applicabile (nel primo caso) e si ha quindi* $T(n) = \Theta(n)$

Esempio 4. *Si può analizzare meglio il MergeSort:*

$$T(n) \cong 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Si ha: $f(n) = \Theta(n)$ *e* $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
Posso applicare il Metodo dell'esperto nel secondo caso avendo così:

$$T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

Esempio 5.

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n \cdot \log n$$

Si ha: $f(n) = n \cdot \log n$ *e* $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$ *e siamo nel terzo caso:*

$$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon}$$

se pongo $\epsilon = 1 - \log_4 3$ *ottengo* n*. Il terzo caso richiede una doppia verifica:*

$$3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \log \frac{n}{4} \leq k \cdot n \log n$$

che vale per $k = \frac{3}{4}$ *infatti si ha:*

$$\frac{3}{4} \cdot n \cdot \log \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} \cdot n \cdot \log n$$

Si hanno quindi entrambi i requisiti e si può asserire che $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$

Esempio 6. *Calcolo i tempi di:*

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \cdot \log n$$

Si ha: $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$ *e* $f(n) = n \cdot \log n$*. Provo a procedere col terzo caso, dimostrando che:*

$$n \cdot \log n = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = \Omega(n^{1+\epsilon}) = \Omega(n \cdot n^{\epsilon})$$

Ma tale ϵ *non esiste in quanto* $n^{\epsilon} > \log n$ *infatti:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \log n}{n \cdot n^{\epsilon}} = 0, \ \ \forall \epsilon > 0$$

Bisogna quindi applicare un altro metodo per risolvere l'equazione di ricorrenza

Esempio 7. *Calcolo la seguente equazione di ricorrenza:*

$$\begin{cases} T(n) = 1 & n = 1 \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Quindi avrò un albero binario di soli 1 di profonfità 2^k *Quindi* $T(n) = \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ *con* $k = \log n$ *in quanto si avranno in totale* $n = 2^k = 2 \cdot 2^k - 1$. *Quindi ottengo* $2n - 1$ *quindi avrò* $\Theta(n)$.

Abbiamo poi visto alcune strutture dati: *array, list, stack, queue, tree (e binary-tree) e heap.*

Capitolo 3

Programmazione Dinamica

Partiamo dall'algoritmo che calcola la lista di Fibonacci:

```
function FIB(n)
  if n = 1 then
    return n
  else
    return FIB(n − 1) + FIB(n − 2)
  end if
end function
```

Si vede che non sappiamo calcolarne la compplessità, che non è polinomiale ma magari esponenziale o addirittura fattoriale.
Sia $T(n)$ il costo della chiamata alla funzione. Se $n = 0$ o $n = 1$ ho $T(n) = 1$. Andando avanti avrò $T(n) = 1 + T(n-1) + T(n-2)$ che non è risolvibile con le tecniche che conosciamo. Vediamo come risolverla: riscriviamo l'equazione non omogenea:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 1$$

e facciamo una piccola approssimazione:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$$

ottenendo un'equazione lineare omogenea a cui sommerò qualcosa per ottenre il risultato della non omogenea. Quindi risolvo l'omogenea ipotizzando un valore per $T(n)$, per esempio $T(n) = r^n$, e testiamolo, diventa:

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$$

moltiplico da entrambe le parti per r^2 perché posso:

$$r^2 \cdot r^n - r \cdot r^n - r^n = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado con soluzioni $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Quindi

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$$

ha due soluzioni:

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

quindi:

$$T_0(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ora cerco la soluzione particolare, sostituisco in:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 1$$

Tutte le $T(\cdot)$ con k ottenendo $k - k - k = 1 \rightarrow k = -1$.
Quindi la soluzione finale è:

$$T(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 = \Theta \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

che è la sezione aurea
Miglioriamo l'algoritmo introducendo un array di n celle F, inizializzarlo

```
F[1...n]
for i ← 1 to n do
   F[i] ← empty
end for
```

e procedere con la ricorsione con annotazione, che scrive i vari step su un array (sprecando quindi memoria) e modificando fibonacci per ottenre la versione con annotazione:

```
function FIBANN(n)
  if f[i] == empty then
    if n ≤ 1 then
      F[n] ← n
    else
      F[n] = FIBANN(n − 1) + FIBANN(n − 2)
    end if
    return F[n]
  end if
end function
```

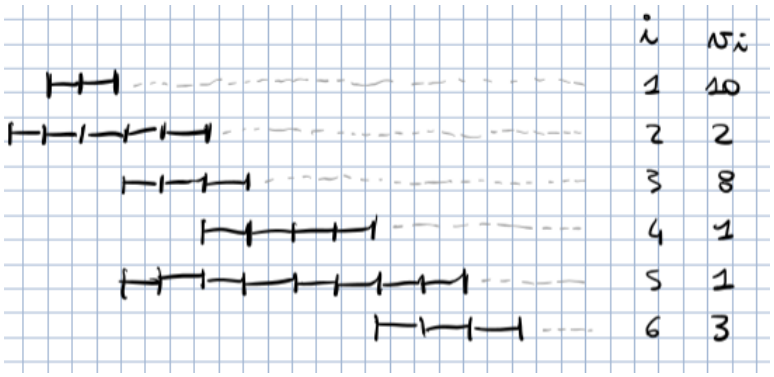
Quindi se si richiede qualcosa di già usato lo si ritorna prendendolo dall'array. Questo è esponenziale
Iterativamente sarebbe:

```
function FIBIT(n)
  F[0] ← 0
  F[1] ← 1
  for i ← 2 to n do
    F[i] ← F[i − 1] + F[i − 2]
  end for
  return F[n]
end function
```

questo è polinomiale

Un Nuovo Problema

Abbiamo una serie di task che possono essere svolte con un certo costo v_i, che partono in tempi diversi e non possono essere svolte contemporaneamente:



Per ogni attività si ha quindi un s_i, tempo di inizio, un f_i, tempo di fine, e un v_i, il costo, con $i \dots n$ che indica l'attività. Definiamo $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ come l'insieme che contiene attività mutualmente compatibili sse:

$$\forall i, j \in A \; [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) \neq \emptyset$$

definiamo anche $comp(A)$:

$$\begin{cases} \text{true} & \text{se mutualmente compatibili} \\ \text{false} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che verifica se dei task sono mutualmente compatibili.

Inoltre $V(A) = \sum_{i \in A} v_i$ per vedere il costo totale di una serie di task, con:

$$P(\{1, \dots, n\}) \to \{true, \, false\}$$
$$V : P(\{1, \dots, n\}) \to \mathbb{R}$$

Quindi la soluzione sarà un insieme di task tale che:

$$S \subseteq \{1, \dots, n\} \to comp(S) = true, \; V(S) = \max\{v(A)\}$$

Definiamo in maniera formale: l'instanza è una $n \in \mathbb{N}$ e $X_n \in \{1, \dots, n\}$. Ad ogni attività $i \in X_n$ ci sono associate il tempo di inizio s_i, di fine f_i e il valore v_i.
La soluzione è un sottoinsieme $S \subseteq X_N$ di attività compatibili secondo la funzione *comp* e tale che $v(S) = \max_{A \subseteq X_n, \, comp(A) = TRUE}\{v(A)\}$. La soluzione basata sulla forza bruta (calcolo tutte le combinazioni) è $\Omega(2^n)$ nel caso migliore; non va bene.
Usiamo quindi la programmazione dinamica devo però prima cercare la soluzione in termini ricorsivi, cercando i sottoproblemi. La struttura da "far

calare" è X_n a step di $n-1$ lavorando quindi su $S_{n-1} \subseteq X_{n-1}$ tale che valga quanto sopra.
Il sottoprobelma i-esimo sarà $X_i = \{1, \dots i\}$ con $S_i \subseteq X_i$ con le condizioni di sopra.
Il sottoproblema con $i = 1$ avrà $X_1 = \{1\}$ fatto solo dalla prima attività e quindi avrò $S_1 = \{1\}$ e quindi $v(S_1) = v_1$, ovvero 10 nel nostro caso.
Inoltre se $i = 0$ avrò l'insieme vuoto che ha valore 0.
Quindi $S_1 = \{1\}$, con $V(S_1) = 1$, e $S_0 = \emptyset$, con $v(s_0) = 0$ e questi potrebbero essere i miei casi base.
Ragioniamo su 6, se 6 è soluzione allora sarà insieme alla soluzione delle altre attività compatibili, ovvero quella di 4 essendo la prima compatibile in ordine, o meglio $s_6 = \{6\} \cup S_4$. Per la 5 sarà 1, per la 4 sarà 2, per la 3 sarà 1 e per la 2 non sarà nessuna, come per 1, e quindi sarà 0. Ho appena definito $p(i) = \max\{j | \, j < i, \;$ j compatibile con i$\}$ assumendo che $\max \emptyset = 0$, quindi l'attività con indice maggiore compatibile precedente a quella in studio.
Questo schema funziona per attività ordinate sull'ordine di fine.

Quindi:

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

e:

$$v(S_i) = \begin{cases} v_i + v(S_{p(i)}) \\ v(S_{i-1}) \end{cases}$$

Il modo di procedere consiste nel valcolare i valori e aggiornare il massimo:

$$v(S_i) = \max\{v_i + v(S_{p(i)}),\, v(s_{i-1})\},\; i > 0$$

sapendo $v(S_1) = 1$ e $v(s_0) = 0$.
Ma in realtà $v(S_1) = 1$ è ricavabile da $v(S_0)$ con la formula quindi avremo solo un caso base: $v(S_0) = 0$, $i = 0$.
Quindi abbiamo trovato la ricorrenza, considerando anche che:

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } v_i + v(S_{p(i)}) \geq v(S_{i-1}) \\ S_{i-1} & \text{se } v_i + v(S_{p(i)}) < v(S_{i-1} \end{cases}$$

Quindi ottengo l'algoritmo ricorsivo per calcolare i vari v_i:

```
function R_OPT(i)
  if i == 0 then
    return 0
  else
    return max(v_i + R_OPT(p[i]), R_OPT(i − 1))
  end if
end function
```

Ma è ingestibile dal punto di vista della complessità. Utilizzo quindi un vettore $M[0..n]$, introducendo la programmazione dinamica, dove in $M[i]$ memorizzo il valore della soluzione del problema di taglia i, ovvero $v(S_i)$. Facciamo quindi la ricorsione con l'annotazione:

```
for j ← 0 to n do
  M[j] ← empty
end for
function AR_OPT(i)
  if M[i] == empty then
    if i == 0 then
      M[i] ← 0
    else
      M[i] ← max(v_i + AR_OPT(p[i]), AR_OPT(i − 1))
    end if
  end if
  return M[i]
end function
```

che resta una tecnica *top-down*. Ma solitamente si lavora *bottom-up* nella programmazione dinamica. Quindi non abbiamo di caricare l'array e non abbiamo bisogno di if/else:

```
function PD_OPT(i)
  M[0] ← 0
  for j ← 1 to i do
    M[j] ← max(v_j + M[P[j]], M[J − 1])
  end for
  return M[i]
end function
```

ovviamente prima di tutto ho il caricamento di p[i], come è stato descritto sopra.
Ora si ha una complessità pari a $\Theta(n)$ per quest'ultimo algortimo, che calcola $v(S_i)$ ma bisogna sommare $\Theta(n \log n)$, in quanto bisogna ordinare le attività sul tempo di fine.
Ora devo capire cos'è S_i, uso il **weighted interval scheduling** per stamparlo (usando l'array M), usando un algoritmo ricorsivo che non ripete cose già usare, un algoritmo ricorsivo in coda che quindi è comodo ed efficiente da lasciare ricorsivo:

```
function WIS_PRINT(i)
  if i ≠ 0 then
    if v_i + M[p(i)] ≥ M[i − 1] then
      print(i)
      WIS_PRINT(p(i))
    else
      WIS_PRINT(i − 1)
    end if
  end if
end function
```

C'è uno step necessità di un teorema:

Teorema 1. *Siano $s_0, \ldots, S_{i-1}$ le varie soluzioni dei sottoproblemi allora:*

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

Dimostrazione. Assumo che $i \notin S_i$. Se per assurdo $S_{i-1} \neq S_i$ e non fosse soluzione del problema i-esimo allora sicuramente $v(S_i) > v(S_{i-1})$. Siccome $i \notin S_i$ allora $S_i \subseteq \{1, \ldots, i-1\}$ e quindi $comp(S_i) = TRUE$ ma questo comporta un assurdo, infatti so che S_{i-1} è soluzione di $i-1$ ma lo sarebbe anche S_i ma so che $v(S_i) > v(S_{i-1})$ quindi S_{i-1} non sarebbe soluzione di $i-1$; quindi abbiamo un assurdo dato da una contraddizione. **resto della dimostrazione settimana prossima** □

3.0.1 Programmazione Dinamica

Un problema di decisione prevede unicamente 2 tipi di risultato: vero e falso. Si ha una distinzione dei problemi:

- **problemi intrattabili**, che potrebbero avere una risposta calcolabile in un tempo idnefinito o addirrittura che non possono essere dimostrati
- **problemi di ricerca**, che si occupano di trovare una soluzione positiva ad una certa istanza (per esempio dei problemi che trattano i percorsi)
- **problemi di ottimo**, dove si cerca una e una sola soluzione che massimizza o minimizza una certa funzione costo

Si parla di **algoritmi euristici** quando si una un algoritmo che ci da una soluzione che magari non è la migliore. A questi si aggiungono **algortitmi di approssimazione** che si occupano di cercare l'ordine di una soluzione rispetto a quella "migliore".

3.0.2 Un Problema di Sequenze

Prendiamo una stringa $X =< x_1, \ldots, x_n >$. Una sottosequenza di X è un insieme di indici con $i_1 \ldots i_k$ con $k \leq n$ e indici strettamente crescenti ma non necessariamente consecutivi. Quindi data una sequenza $X =< x_1, \ldots, x_n >$ e una sottosequenza $Z =< z_1, \ldots z_n >$ diciamo che:

$$\exists i_1, \ldots i_k \rightarrow x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k},\ i_i > i_{i-1}$$

Si assuma che gli indici partano da 1.
Quindi, per esempio, per la stringa $X =< A, B, C, B, D, A, B >$ si possono avere le sottosequenze $A_1 =< B, C, D, B >$ (con indici $2, 3, 5, 7$), $A_2 =< A, B, A, B >$ (con indici $1, 2, 6, 7$ oppure $1, 4, 6, 7$) etc. . ..

3.0.3 Longest Common Substring

Si definisce una **sottosequenza comune** Z a due sequenze X e Y se Z è sottosequenza sia di X che di Y (non è necessario che gli indici siano nello stesso ordine).
Cerchiamo ora un algoritmo che trovi la più grande sottostringa comune, appunto **long common substring (LCS)**, con però elementi ordinati in grandezza, quindi *longest increasing subsequence (LIS)*.
Con una soluzione iterativa avremmo $O(2^n)$ quindi pensiamo ad una soluzione con la programmazione dinamica.
Cerchiamo quindi un problema associato, cercando la sottoesequenza di X più lunga che termina in una certa posizione i. In questo studio delle sequenze gli indici aumentano solo se il valore che indicizzano è superiore a quello rpecedente, altrimenti diminuisocno di una unità (a meno che non sia l'indice 1 che resta uguale), quindi, per esempio, la stringa $X =< A, B, C, B, D, A, B >$ avrà indici $1, 2, 3, 2, 4, 3, 4$.
Definiamo $L[i]$ la lunghezza massim della LIS che termina col carattere in posizione i.
Procedo salvando la lunghezza della sottosequenza iù lunga fino a i.
Si definisce X_i la restrizione della sequenza considerando solo i primi i caratteri. Chiamiamo Z_i la più lunga sottosequenza di X che termina con X_i.
Salviamo le varie Z in un array $L[1..N]$ con $L[i]$ che è la lunghezza massima della sottosequenza di X che termina con X_i
Si ha il caso base:

$$L[1] = 1$$

e il caso generale:

$$L[i] = 1 + \max_{1 \leq j \leq i-1} \{L[j] |\, X_j < X_i\},\ 1 < i \leq N$$

ricordando che $\max \emptyset = 0$.
La soluzione sarà quindi:

$$\max_{1 \leq i \leq N} \{L[i]\}$$

Scriviamo quindi l'algoritmo:

function $LIS(X[1..N])$
  $L[1..N]$
  $X[0] = -1$
  $L[1] = 1$

$L[0] = 0$
for $i \leftarrow 2$ **to** N **do**
  $R \leftarrow maxAcc(l[], i, i-1, X[i])$
  $L[i] = R + 1$
end for
$RT \leftarrow \max(L[i], 1, N)$
return RT

Con la funzione *maxAcc* che calcola il massimo degli accettabili. Questo algoritmo è $O(n^2)$.
calcolo $L[i]$ che è la sequenza più lunga che termina col carattere i:

$$L[i] =] \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1 & i = 1 \\ 1 + \max(L[j]|\, c[j] < c[i],\, j = 1 \dots i-1) & i > 1 \end{cases}$$

Scriviamo il vero algoritmo:

function $LIS(S[1..n])$
  $L[1] \leftarrow 1$
  $maxTot \leftarrow 1$
  for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
    $max \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow 1$ **to** $i-1$ **do**
      if $S[j] < S[i]$ **AND** $L[i] > max$ **then**
        $max \leftarrow j$
      end if
      $l[i] \leftarrow L[max] + 1$
      $P[i] \leftarrow max$
      if $L[i] > maxTot$ **then**
        $maxTot \leftarrow i$
      end if

```
    end for
  end for
  return maxTot
end function
```

Con *maxTot* salva il massimo dell'arrayb delle lunghezza.
Che ha tempo di esecuzione pari a $T(n) = 3c + 5cn + 3c\sum_1^n i = O(n^2)$.
Questa funzione verrà chiamata in una ciclo for. Per rendere il tutto più efficiente quindi memorizzo, anzichè memorizzare tutti i valori degli array che si vengono a creare contenenti le sequenze buone, l'indice del maxTot precedente, nella lista P, avendo una complessità di salvataggio sulla memoria pari a $O(n)$.

3.0.4 Il Problema delle Scatole

Ho una tripla $B_i = (a_i, b_i, c_i)$ rappresentanti lunghezza, larghezza e altezza di una scatola. B_i è quindi un insieme di scatole che non possono essere ruotate. Voglio sapere a lunghezza più lunga di scatole che possono essere contenute una dentro l'altra. Cerco quindi il massimo valore di k tale per cui, per una sequenza $B_1, \ldots, B_i$:

$$\exists x \to B_1, \ldots, B_i |\, B_{i1} \subset B_{i2} \subset \cdots_{ik}\,,\ i_1 < \cdots < i_k$$

Si introduce un vettore z con n elementi tale che $z[i]$ sia la lunghezza massima di una sottosequenza crescente di elementi $B_1, \ldots, B_i$. Quindi:

$$z[i] = \begin{cases} 1 + \max\{z[j] |\, 1 \le j < i,\, a_j < a_i,\, b_j < b_i,\, c_j < c_i\} & i > 1 \\ 1 & i = 1 \end{cases}$$

inoltre $\max\{\emptyset\} = 0$. Abbiamo quindi il seguente algoritmo:

```
function MaxBox(B[1..n])
  z[1] ← 1
  for i ← 2 to n do
    max ← 0
    for j ← 1 to i − 1 do
```

```
      if a_j < a_i AND b_j < b_i AND c_j < c_i AND z[j] < max then
        max ← z[j]
      end if
    end for
    z[i] ← max
  end for
  return z
end function
```

Si ha complessità apri a $O(n^2)$ mentre lo spazio richiesto è quello per memorizzare il vettore, ovvero $\Theta(n)$.
Può anche essere scritto ricorsivamente ma risulta troppo esoso in termini di spazio.

3.1 Longest Common Subsequence

Ritorniamo al problema di inizio capitolo. Abbiamo due stringhe, $X =< x_1, \dots x_n >$ e $Y =< y_1 \dots y_n >$ con Z sottosequenza comune a X e Y.
Per ragionare secondo la programmazione dinamica identifichiamo le istanze relative ai sottoproblemi come X_i e Y_j che sono $n+1$ e $m+1$ prefissi del problema. Un sottoproblema generico è identificato da una coppia di indici e ad ogni sottoproblema è associata una lunghezza. L alunghezza della massima sottosequenza comune K è la maggiore tra tutte le lunghezze delle sottosequenze comuni W. Si ha quindi che:

$$Z_k = LCS(X_i, Y_j)$$

Inoltre si ha che, sapendo che x_i è l'ultimo simbolo:

$$LCS(x_{i-1}, y_{j-1}) \,|\, x_i \text{ se } x_i = y_j$$

altrimenti, se $z_k \neq x$, si ha che:

$$Z_k = LCS\,(X_i, Y_j) = LCS\,(X_{i-1}, Y_j) \text{ e } C_{i,j} = C_{i-1,j}$$

mentre, se $x_x \neq y_j$ si ha che:

$$Z_k = LCS\,(X_i, Y_j) = LCS\,(X_i, Y_{j-1}) \text{ e } C_{i,j} = C_{i,j-1}$$

Quindi cerco un algoritmo del tipo:

$$LCS(x, y) \rightarrow LCS(x - \{A\}, y - \{A\})$$

Costruisco quindi una matrice C che indica come sono allineate le sequenze con un algoritmo che controlla i primi i caratteri di X e i primi j di Y.

La prima riga e la prima colonna sono fissi 0, e il controllo inizia dalla prima riga di 0. Non appena l'algoritmo trova un match, copia nella casella della matrice corrispondente il valore contenuto nella casella precedente sulla diagonale a sinistra, incrementandolo di 1, mentre se i caratteri confrontati sono diversi viene copiato nella casella il massimo tra il valore a sinistra e il calore sopra. L'ultima casella in basso a destra (quella di posizione (n, m)) rappresenta la lunghezza massima.
Quindi $C[i, j]$ contiene la lunghezza della stringa più lunga tra gli i caratteri di X e i j di Y.
Si ha quindi un caso base sfruttando la prima riga e la prima colonna formate da soli zeri:

$$C[i, j] = 0 \text{ se } i = j = 0$$

e un caos generico:

$$C[i, j] = \begin{cases} C[i-1, j-1] + 1 & \text{se } x_i = y_i \\ \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\} & \text{se } x_i \neq y_i \end{cases}$$

per esempio per $X =< A, B, C, B, D, A, B >$ e $Y =< B, D, C, A, B, A >$ avremmo:

X / Y	0	B	D	C	A	B	A
0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1
B	0	1	1	1	1	2	2
C	0	1	1	2	2	2	2
B	0	1	1	2	2	3	3
D	0	1	2	2	2	3	3
A	0	1	2	2	3	3	4
B	0	1	2	2	3	4	4

ottengo quindi:

```
function LCS(X, Y)
  for i ← 0 to n do
    C[i, 0] ← 0
  end for
  for j ← 0 to m do
    C[0, j] ← 0
  end for
  for 1 ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
      if X[i] == Y[j] then
        C[i, j] ← C[i − 1, j − 1] + 1
      else
        C[i, j] = max(C[i − 1, j], C[i, j − 1] + 1)
      end if
    end for
  end for
  return C[n, m]
end function
```

Ho quindi un tempo $\Theta(nm) \sim \Theta(n^2)$ e uno spazio richiesto pari a $\theta(nm)$ che è quello della matrice.
La sottosequenza poi la prendo usando gli indici i e j
Per risparmiare spazio posso riempire la matrice cancellando le righe inutili, quindi al peggio uso due righe, quella he sto costruendo e quella precedente, raggiungendo $\Theta(2n)$ come uso di spazio ma rendendo più difficile la risalita per ritrovare quale è effettivamente la sequenza, in quanto dovrei risalire la matrice costruendola nuovamente.

3.1.1 Growing LCS, GLCS

Cerco una LCS in cui gli elementi sono oridnati in ordine crescente. Suppngo di avere $X = [1, 4, 12, 3, 16, 8]$ e $Y = [12, 1, 3, 17, 8]$. La Z sarebbe quindi $Z = [1, 3, 8]$.
Una soluzione banale è trovare tutte le sottosequenze, calcolando la lunghezza solo di quelle crescenti, ma avrebbe tempo esponenziale. **da aggiungere, non ho più voglia**