Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Introduzione alla Ricerca Operativa

La **Ricerca Operativa** è essenziale nel *problem solving* e nell'ambito del *decision making*. Sostanzialmente quindi si studia l'ottimizzazione, massimizzando le performances, l'accuratezza dei costi etc... per raggiungere un obiettivo.
Sulle slides ci sono vari esempi introduttivi di vita reale
Un altro problema studiato dalla riceca operativa sono le previsioni, mediante algoritmi predittivi che studiano i *pesi* delle osservazioni (cosa utile nel **Machine Learning** in quanto sono un uso di base delle **Reti Neurali**, *vari esempi introduttivi sulle slides*).
La ricerca operativa si occupa di formalizzare un problema in un modello matematico e calcolare una soluzione ottimo o approssimata. Essa costituisce un approccio scientifico alla risoluzione di problemi complessi da ricondurre alla matematica applicata. È utile in ambiti economici, logistici, di progettazione di servizi e di sistemi di trasporto e, ovviamente, nelle tecnologie. *È la branca della matematica più applicata.*
Il *primo passo* consiste nel costruire un modello traducendo il problema reale in linguaggio anturale in un linguaggio matematico, che non è ambiguo. Il *secondo passo* consiste nella costruzione delle soluzioni del modello tramite algoritmi e programmi di calcolo. Il *terzo passo*, ovvero l'ultimo, è l'interpretazione e la valutazione delle soluzioni del modello rispetto a quelle del problema reale.
La ricerca operativa ha origini nel 1800 in un ambiente puramente matematico. È stata resa "*algoritmica*" con la Macchina di Turing. **La ricerca operativa usa anche tecniche numeriche e non solo analitiche**.
Negli ultimi hanno si sono sviluppati, mediante il concetto di **gradiente**, nuovi algoritmi per il **deep network**.

2.1 Modelli nella R.O.

Definizione 1. *Data una funzione* $f : \mathbb{R} \rightarrow mathbbR$ *e* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un* ***problema di ottimizzazione*** *può esssere formulato come:*

$$opt\ f(x)\ s.t.\ x \in X$$

dove con $opt = \min, \max$ *indendiamo che opt può essere o min o max, portando ad un problema di minimizzazione con* $\min\ f(x)$ *o di massimizzazione* $\max\ f(x)$.
$f(x)$ *è detta* ***funzione obiettivo*** *e vale che:*

$$max[f(x) :\ x \in X] = -min[-f(x) :\ x \in X]$$

Inoltre $x \subseteq \mathbb{R}^n$ *è* ***l'insieme delle soluzioni ottenibili*** *o anche* ***regione ammissibile***.
Infine $x \in X$ *rappresenta il* ***vettore delle variabili decisionali*** *e si tratta di variabili numeriche i cui valori rappresentano la soluzione del problema.*
Si capisce che essendo in $\mathbb{R}$ ***si hanno infinite soluzioni***.

Se $X = \mathbb{R}^n$ *si ha un'****ottimizzazione non vincolata****, altrimenti,* $x \subset \mathbb{R}$ *si ha un'****ottimizzazione vincolata****, dove la ricerca dei punti di ottimo della funzione obiettivo è fatta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione tenendo però conto dei vincoli. Se ho una funzione obiettivo lineare non si può avere un'ottimizzazione non vincolata (non saprei cercare massimi e minimi senza vincoli).*
*Abbiamo poi l'****ottimizzazione intera o a numeri interi*** *se* $x \in \mathbb{Z}^n$ *e si possono avere ottimizzazioni miste se si hanno interi e reali. Si ha anche l'****ottimizzazione binaria*** *quando si hanno due vie decisionali.*
Se non specificato si intende $X \subseteq \mathbb{R}$***.***

Definizione 2. *Quando l'insieme* X *delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione è espresso in un sistema di equazioni o disequazioni si parla di* ***problema di programmazione matematica (PM)***.
Come vincolo si ha un'espressione $g_i(x)\{\leq, =, \geq\}0$ $(g_i \geq 0\ etc \ldots)$ *e con* $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ *che è una generica funzione che lega due variabili.*
Si possono avere più vincoli ma si ha sempre l'uguale in ogni vincolo per permettere il funzionamento degli algoritmi.
La regione ammissibile è $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *che è l'intersezione di tutti i vincoli del problema*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n |\ g_i(x)\{\leq, 0, \geq\}$$

Esempio 1. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 3 vincoli:

$$x + y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

la regione ammissibile è:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | \, x + y \leq 3, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$$

Si possono avere problemi con regione non ammissibile, ovvero con $X = \emptyset$, che implica che il problema è mal posto oppure bisogna abbassare qualche vincolo. Si può avere un problema illimitato con:

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x_c \in X : f(x_c) \leq c \; se \; opt = min$$
$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x_c \in X : f(x_c) \geq c \; se \; opt = max$$

Infine si può avere una sola soluzione ottima o più (anche infinite) soluzioni ottime

Esempio 2. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\min_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 3 vincoli:

$$x + y \leq -1$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Non ha soluzione (è matematicamente impossibile) e il problema non è ammissibile

Esempio 3. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\max_{x,y}(x^2 + y^2)$$

con i 2 vincoli:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Ha come soluzione infinito

Esempio 4. *abbiamo la funzione obiettivo*

$$\max_{x,y,z}(z)$$

con i 4 vincoli:

$$x + y + z = 2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 1$$

Ha infinite soluzioni (tutte le soluzioni con $z = 1$ *e* $x + y = 1$*, in quanto cerco il max di* z *e come ultio vincolo ho che al massimo è 1)*