Fondamenti Logico Matematici dell'Informatica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.

Capitolo 2

Dimostrazioni = Algoritmi

Parliamo in primis del **paradigma dimostrazioni = algoritmi**.
Prendiamo come *linguaggio di specifica* un **linguaggio del prim'ordine con identità**.

Si riportano alcune definizioni utili in *logica matematica* tratte da Wikipedia:

Definizione 1. *Definiamo* ***linguaggio del primo ordine*** *come un linguaggio formale che serve per gestire meccanicamente enunciati e ragionamenti che coinvolgono i connettivi logici, le relazioni e i quantificatori* $\forall$ *e* $\exists$.
Si ha che "del primo ordine" ndica che c'è un insieme di riferimento e i quantificatori possano riguardare solo gli elementi di tale insieme e non i sottoinsiemi (posso dire "per tutti gli elementi" ma non "per tutti i sottoinsiemi"). Tale linguaggio è caratterizzato da:

- *un* ***alfabeto di simboli*** *per variabili, costanti, predicati, funzioni, connettivi, quantificatori o punteggiatura*
- *un* ***insieme di termini*** *per denotare gli elementi dell'insieme in analisi*
- *un* ***insieme di formule ben formate (FBF)*** *ovvero un insieme di stringhe composte di simboli dell'alfabeto che vengono considerate sintatticamente corrette*

Definizione 2. *Definiamo* ***sistema assiomatico*** *come un insieme di assiomi che possono essere usati per dimostrare teoremi. Una teoria matematica consiste quindi in una assiomatica e tutti i teoremi che ne derivano.*

Definizione 3. *Definiamo un sistema formale come una formalizzazione rigorosa e completa della nozione di sistema assiomatico costituito da:*

- *un alfabeto*
- *una grammatica che specifica quali sequenze finite dei simboli dell'alfabeto corrispondono ad una FBF. La grammatica deve essere ricorsiva, nel senso che deve esistere un algoritmo per decidere se una sequenza di simboli è o meno una formula ben formata*
- *un sottoinsieme delle FBF che sono gli assiomi. L'insieme degli assiomi è ricorsivo*
- *le regole di inferenze che associano formule ben formate ad n-uple di formule ben formate*

Definizione 4. *Definiamo gli* ***assiomi di Peano*** *come un gruppo di assiomi ideati al fine di definire assiomaticamente l'insieme dei numeri naturali:*

- *esiste un numero naturale: 0 (alternativamente 1 se si vuole escludere 0):*
$$0/1 \in \mathbb{N}$$
- *ogni naturale ha un naturale come successore. Ho quindi una funzione "successore" tale che:*
$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
- *numeri diversi hanno successori diversi, ovvero:*
$$x \neq y \rightarrow S(x) \neq S(y)$$
- *0 (o alternativamente 1) non è il successore di alcun naturale, ovvero:*
$$S(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}$$
- *ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo zero e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali. Ovvero dato $U \subseteq \mathbb{N}$ tale che:*
  - $0 \in U$
  - $x \in U \rightarrow S(x) \in U$

allora:

$$U = \mathbb{N}$$

*Tale assioma è detto **assioma dell'induzione** o **principio di induzione***

Definizione 5. *In una teoria del primo ordine si chiama **chiusura universale** di una formula ben formata $A(x_1, \dots, x_n)$, con $x_1, \dots, x_n$ variabili libere, la formula:*

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_n \; A(x_1, \dots, x_n)$$

ottenuta premettendo un quantificatore universale su ogni variabile libera.

Definizione 6. *Definiamo, in logica matematica, **aritmetica di Peano (PA)** come una teoria del primo ordine che ha come assiomi propri una versione degli **assiomi di Peano** espressi nel linguaggio del primo ordine. Si ha quindi che il linguaggio di PA è il linguaggio dell'aritmetica del primo ordine con i seguenti simboli:*

- *vari simboli per le variabili: x, y, z, x_1 etc...*
- *costanti individuali: 0 etc...*
- *simboli per funzioni unarie: S*
- *simboli per funzioni binarie $+$, $\times$ ($+(x, y)$ si indica anche con $x + y$ e analogamente si fa per $\times$)*
- *simboli per relazioni unarie: $=$*
- *simboli per connettivi logici, quantificatori e parentesi*

Gli assiomi di PA sono costituiti da:

- *gli assiomi logici*
- *gli assiomi per l'uguaglianza*
- *i seguenti assiomi propri (che "traducono" nella logica di Peano gli assiomi di Peano):*
  - $\forall x \neg (S(x) = 0)$
  - $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
  - $\forall x (x + 0 = x)$

- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$

Agli assiomi propri si aggiunge anche il seguente assioma proprio:

$$(\phi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x(\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \phi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow \forall x \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

*per ogni FBF $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ di cui $x, x_1, \ldots, x_n$ sono variabili libere. Questo è uno schema di assiomi detto **schema di induzione** e si ha un assioma per ogni FBF ϕ*

Definizione 7. *Definiamo, in logica classica, il **principio del terzo escluso** che stabilisce che una proposizione e la sua negazione hanno valore opposto, non avendo una "terza opzione". In logica classica è una **tautologia**.*

Definizione 8. *Un termine è un **termine chiuso** sse non contiene delle variabili individuali.*

Definizione 9. *Una **formula chiusa** è una formula costruita nel linguaggio dei predicati in cui o non compaiono variabili o tutte le variabili presenti sono vincolate a un quantificatore e sono dunque variabili legate.*

Esempio 1. *Vediamo qualche esempio:*

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N}\ t.c.\ mcd(x, y, z)$$

ovvero z è l'mcd di x e y.
Un altro esempio:

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}\ t.c.\ fatt(x, y)$$

ovvero y è il fattoriale di z.

Formule come quelle dell'esempio possono essere lette come **specifiche del problema di trovare un algoritmo totalmente corretto** che calcoli il risultato di tale problema per ogni input valido. Questa lettura non è implicita nella logica classica, dove non è richiesto di stabilire come viene prodotto il risultato. Si ha quindi a che fare con una lettura di un problema algoritmico di interesse per un informatico.
Le **dimostrazioni** di questa tipologia di formule, nell'ambito dell'**aritmetica di Peano (*PA*)**, sono quindi interpretabili come gli algoritmi che calcolano le funzioni specificate.
Come *vantaggi* di questa "atteggiamento" si ha che:

- l'attenzione si concentra su costruire la dimostrazione, sui passi dimostrativi, e non sulla stesura del codice
- i passi elementari della dimostrazione sono automatici
- la correttezza della dimostrazione è verificabile in modo automatico
- l'estrazione/sintesi dell'algoritmo dalla dimostrazione è diretta. Una volta che si ha la dimostrazione corretta si può estrarre direttamente l'algoritmo. Tale algoritmo è totalmente corretto rispetto alla specifica

La difficoltà si trasferisce dall'ambito convenzionale della programmazione e codifica dell'algoritmo in se alla costruzione dimostrazione e dei passi dimostrativi.
Si hanno quindi anche degli *svantaggi*, abbastanza problematici:

- l'algoritmo ottenuto non è ottimale rispetto al problema. Rispetto a questo bisognerebbe capire come incorporare "più semantica" del problema da risolvere nella dimostrazione stessa
- il formalismo e il linguaggio delle dimostrazioni sono "lontani" da quelli usati usualmente nella pratica informatica

Non tutte le dimostrazioni sono direttamente interpretabili come algoritmi. Per vedere questa cosa prendiamo un esempio famoso di formula da dimostrare in analisi.

Esempio 2 (esempio di Troelstra)**.** *Esistono due numeri irrazionali n e m tali che n^m è razionale. In termini di formula del primo ordine si ha quindi:*

$$\exists n, m \in \{\mathbb{R}/\mathbb{Q}\} \; t.c. \; n^m \in \mathbb{Q}$$

Cerchiamo di capire se:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \; o \; \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

Vediamo quindi i due casi (sono solo due per il principio del terzo escluso):

1. *assumo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ e pongo $n = m = \sqrt{2}$ avendo trovato due numeri irrazionali n e m tali per cui $n^m \in \mathbb{Q}$*

2. *assumo* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ *e pongo* $n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *e* $m = \sqrt{2}$. *Ne segue che:*

$$n^m = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

e quindi ho due numeri irrazionali n *e* m *tali per cui* $n^m \in \mathbb{Q}$

Non possiamo essere soddisfatti di questa dimostrazione. Non veniamo a conoscenza, tramite la dimostrazione, che $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *sia o meno razionale. Non possiamo capirlo in quanto assumo il terzo escluso e quindi non so quale dei due casi sia valido, non abbiamo un "esiste" costruttivo (*$\exists n, m \in \{\mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$*) in quanto non sappiamo se* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *è razionale o meno. Nonostante ciò al dimostrazione sta perfettamente "in piedi" ma non esibisce* n *e* m *in quanto non determina se* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

Quanto successo nell'esempio di Troelstra non può succedere in un **sistema costruttivo**.

Definizione 10. *Definiamo* ***sistema costruttivo*** *un sistema dove si hanno come requisiti minimali:*

- $S \vdash A \vee B \to S \vdash A$ *oppure* $S \vdash B$ *quindi se nel sistema dimostro* $A \vee B$ *allora nel sistema dimostro* A *o dimostro* B, *con* A *e* B *formule chiuse. Questa è la* ***disjunction property (DP)***
- $S \vdash \exists x A(x) \to S \vdash A(t)$ *quindi se ho dimostrato un esistenziale allora deve esistere un termine chiuso* t *per cui dimostro* $A(t)$ *nel sistema. Questa è la* ***explicitly definibility property (EDP)****, detta anche* ***existence/witness property***

La logica classica quindi **non è un sistema costruttivo** perché in logica classica riesco sempre a dimostrare $A \vee \neg A$ mentre nell'esempio di Troelstra si nota come non si possa dimostrare né A né $\neg A$. Quindi da una dimostrazione classica di $A \vee \neg A$ io non tiro fuori una dimostrazione classica di A oppure una dimostrazione classica di $\neg A$ quindi non vale la DP. Inoltre non vale nemmeno la EDP, ho dimostrato l'esistenza di n e m (che sono termini chiusi) ma non ho trovato se vale la proprietà che siano irrazionali. La logica classica quindi non è una logica costruttiva.

2.1 Interpretazione BHK

Passiamo quindi ad una semantica informale che per ogni costante logica associa una condizione per la sua *costruibilità*. Questa è **l'interpretazione Brouwer-Heyting-Kreisel (*BHK*)**.

Definizione 11. *Presa una costruzione π per questa semantica proposizionale si ha che:*

- $\pi(A \wedge B) = \pi'(A)$ *e* $\pi''(B)$ *ovvero una costruzione di* $A \wedge B$ *e uguale ad un'altra costruzione di* A ***e*** *un'altra ancora di* B
- $\pi(A \vee B) = \pi'(A)$ *o* $\pi''(B)$ *ovvero una costruzione di* $A \vee B$ *e uguale ad un'altra costruzione di* A ***o*** *un'altra ancora di* B
- $\pi(A \to B)$ *è una funzione (o un funzionale, ovvero un insieme di funzioni)* f *che associa ad ogni costruzione* $\pi'(A)$ *una costruzione* $\pi''(B)$ *tale che* $\pi'' = f(\pi')$*. Quindi* f *associa costruzioni di* A *a costruzioni di* B
- $\pi(\neg A)$ *è una costruzione* π' *di* $A \to \perp$

Lato semantica predicativa si ha che, dato un dominio D *per la variabile* x*:*

- $\pi(\exists x A(x)) = \langle c, \pi' \rangle |\, c \in D$ *e* $\pi'(A(c))$ *quindi è uguale ad una coppia* $= \langle c, \pi' \rangle$ *tale che* c *appartiene al dominio e* π' *è una costruzione effettiva di* $A(c)$
- $\pi(\forall x A(x)) =$ *è una funzione* f *che associa ad ogni elemento* $c \in D$ *una costruzione* $\pi'(A(c))$ *tale che* $\pi' = f(c)$

Questa semantica "naive" ha alcune problematiche/aporie:

- la BHK non specifica la costruzione di una formula atomica
- la BHK non dimostra il falso infatti nella costruzione di $\neg$ associamo la costruzione del $\neg A$ a quella dell'implicazione, che è una costruzione che associa costruzioni di A e costruzioni di B e quindi nessuna costruzione potrebbe avere il falso (???)

Bisognerà quindi chiarire alcune restrizioni dell'interpretazione BHK.
Si hanno varie semantiche per il costruttivismo che hanno "precisato" la BHK:

- la semantica della**realizzabilità ricorsiva** di Kleene
- la semantica dell'**interpretazione dialettica** di Gödel
- la semantica delle **prove possibili** di Prawitz
- la semantica dei **problemi finiti** di Medvedev

Queste 4 semantiche sono coerenti con la BHK e quindi sono **semantiche del costruttivismo**.
Passiamo ora ad una definizione formale.

Definizione 12. *Definiamo come* ***sistema costruttivo*** *un sistema S:*

$$S = T + L$$

dove:

- *T è una teoria con assiomi di forma particolare*
- *L è una logica intuizionistica, che prendiamo come punto di partenza per il costruttivismo, con le sue estensioni*

Non sempre comunque date T e L si ha che S è un sistema costruttivo.

Un esempio di sistema costruttivo è dato dall'**aritmetica intuizionistica**, ovvero la PA interpretata all'interno della logica intuizionistica. Altri esempi sono le **teorie con assiomi di Harrop**, teorie con assiomi $\forall\exists$ con matrice positiva priva di quantificatori e con minimo modello di Herbrandt etc...
Le clausole di Horn usate i Prolog hanno un modello minimo di Herbrandt e hanno assiomi $\forall\exists$ con matrice positiva priva di quantificatori dove $\exists$ viene eliminato attraverso skolemizzazione e il $\forall$ è implicito nelle regole del programma in quanto tutte le X, Y etc... si intendono quantificati universalmente.
Quindi la parte assiomatica di una teoria non basta a rendere costruttivo il sistema anche se la logica è costruttiva. Tuttavia se si restringono le assiomatizzazioni con formule del primo ordine di tipo particolare si possono ottenere sistemi costruttivi in cui vale come minimo la *DP* e la *EDP*.

2.2 Deduzione naturale

Vediamo un accenno della **deduzione naturale** ovvero di un **calcolo diretto** (quindi differente dal calcolo indiretto dei tableaux). Nella deduzione naturale si ha per ogni connettivo una **regola di introduzione** i e una **regola di eliminazione** e. Ad esempio se ho A e B come premesse posso introdurre l'and con la regola d:i introduzione dell'and:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} i\wedge$$

Se invece ho $A \wedge B$ come premessa posso usare la regola di eliminazione dell'and, producendo:

$$\frac{A \wedge B}{A} e \wedge \text{ oppure } \frac{A \wedge B}{B} e\wedge$$

Avendo quindi due regole di eliminazione per l'and.
Passiamo all'or. Ho due regole di introduzione:

$$\frac{A}{A \vee B} i \vee \text{ oppure } \frac{B}{A \vee B} i\vee$$

L'eliminazione della or è complessa e verrà trattata più avanti ma è della forma:

$$\frac{A \vee B \quad C \quad C}{C} e\vee$$

Dove si ha che se se ho $A \vee B$ come premessa e assumendo A ho C ma anche assumendo B ho C posso eliminare l'or e ottenere C.
Passiamo all'implicazione. Se ho come assunzione A e da B riesco a dimostrare B allora posso introdurre l'implicazione:

$$\frac{\begin{array}{c}{\scriptstyle [A]} \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B} i \to$$

Per l'eliminazione ho che, tramite **modus ponens**:

$$\frac{A \to B \quad A}{B} e \to$$

Abbiamo poi la **regola del falso** che dice che dal falso segue qualsiasi cosa:

$$\frac{\perp}{B} \perp$$

e la regola dell'eliminazione della negazione che dice che se assumo $\neg A$ e ottengo il falso significa che si è ottenuta una contraddizione e quindi elimino il $\neg$:

$$\frac{\begin{array}{c}{\scriptstyle [\neg A]} \\ \perp\end{array}}{A} e\neg$$

Passiamo al $\forall$. Se ho dedotto $A(p)$ per p generico posso introdurre il $\forall$:

$$\frac{A(p)}{\forall x A(x)} i\forall$$

Se ho come assunzione $\forall x A(x)$ posso dedurre un qualsiasi $A(t)$:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)} e\forall$$

Possiamo fare l'equivalente per l'$\exists$, dove se esiste $A(t)$ posso dedurre l'esistenza di un certo x per cui vale $A(x)$:

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)} i\exists$$

L'eliminazione dell'esiste è complessa e verrà trattata più avanti ma è della forma:

$$\frac{\exists x A(x) \quad \overset{[A(p)]}{C}}{C} e\exists$$

Dove assumendo $\exists x A(x)$, assumendo $A(p)$ con p generico e riuscendo ad ottenere C da quest'ultima assunzione con una serie di restrizioni posso ottenere C eliminando $\exists$.
Una dimostrazione in deduzione naturale è modulare alle logiche si vogliono usare:

- nelle dimostrazioni in logica classica utilizzo tutte le regole della deduzione naturale appena introdotte
- nelle dimostrazioni in logica intuizionistica non devo usare la regola di eliminazione della negazione
- nelle dimostrazioni in logica minimale non devo usare la regola di eliminazione della negazione e nemmeno la regola che dal falso segue qualsiasi cosa

Possiamo quindi caratterizzare queste tre logiche e nelle ultime due, quella intuizionistica e quella minimale, si può dimostrare che valgono DP e EDP mentre non posso dire lo stesso per la logica classica. Si ha inoltre che:

$$\text{logica minimale} \subseteq \text{logica intuizionistica} \subseteq \text{logica classica}$$

Discorso diverso vale per le teorie, ovvero per i sistemi, dove l'assiomatizzazione può fare la differenza portando anche fuori dalla costruttività (se ad esempio assumo come assioma che $\forall x A(x) \vee \neg A(x)$ e gli aggiungo la logica intuizionistica ottengo la logica classica che non è costruttiva).
Una teoria specifica è l'aritmetica di Peano dove si hanno i seguenti assiomi:

- $\forall x \neg(S(x) = 0)$

- $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \to x = y)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$

Dove si ha la regola d'identità che in realtà sono due, ovvero $id1$ e $id2$:

$$\frac{}{x = x}id1 \text{ e } \frac{x = y \quad A(x)}{A(y)}id2$$

Dove si ha anche il principio/regola d'induzione:

$$\frac{A(0) \quad \begin{matrix}[A(j)] \\ \cdots \\ A(S(j))\end{matrix}}{A(t)}ind$$

Dove se dimostro $A(0)$ e assunto $A(j)$ dimostro il successore di $A(j)$ allora posso dedurre $A(t), \forall t$.

Esempio 3. *Vediamo ora un esempio con degli assiomi specifici, costruttivi:*

- $pari(0)$
- $\forall x(pari(x) \to \neg pari(S(x)))$
- $\forall x(\neg pari(x) \to pari(S(x)))$

Quindi si ha che se x è apri non lo è il successore e se x non è pari lo è il successore. Assumiamo inoltre che 0 sia pari.
Scritta così potrebbe essere riscritta "1:1" in Prolog.
Cerchiamo quindi din dimostrare che che:

$$\forall x(pari(x) \lor \neg pari(x))$$

che si può pensare si un terzo escluso e quindi valga sempre. Questa formula, a livello di specifica, va letta come una funzione "per ogni numero naturale costruisce $pari(x)$ o $\neg pari(x)$" quindi costruisce o la parte sinistra o la parte destra. Quindi la formula i può leggere come la specifica di algoritmo che per ogni naturale mi dice se vale la parte sinistra o la parte destra dell'or e quindi è un algoritmo di decisione effettivo che per ogni naturale ti dice se è pari o non è pari. Questa è un'interpretazione diversa da quella classica.

Posso quindi fare una dimostrazione per induzione.
*Il **caso base** è, chiamando pari p, assunto per assioma* $p(0)$ *e usando l'introduzione dell'or:*

$$\frac{p(0)}{p(0) \lor \neg p(0)} i\lor$$

*Passo al **caso passo**.*
Assumo per ipotesi induttiva $p(j) \lor \neg p(j)$ *e assumiamo* $\forall x(p(x) \lor \neg p(S(x)))$ *che è un altro degli assiomi. Procedo eliminando il* $\forall$*:*

$$\frac{\forall x(p(x) \lor \neg p(S(x)))}{p(j), p(j) \to \neg p(S(j))} e\forall$$

procedo quindi eliminando l'implicazione:

$$\frac{p(j), p(j) \to \neg p(S(j))}{\neg p(S(j))} e \to$$

e continuo inserendo l'or:

$$\frac{\neg p(S(j))}{p(S(j)) \lor \neg p(S(j))} i\lor$$

Analogamente faccio per l'altro assioma $\forall x(\neg p(x) \lor p(S(x)))$*:*

$$\frac{\forall x(\neg p(S(x)) \lor p(S(x)))}{\neg p(j), \neg p(j) \to p(S(j))} e\forall$$

$$\frac{\neg p(j), \neg p(j) \to p(S(j))}{p(S(j))} e \to$$

$$\frac{p(S(j))}{p(S(j)) \lor \neg p(S(j))} i\lor$$

Partendo quindi da $p(j) \lor \neg p(j)$ *posso fare l'eliminazione dell'or ottenendo il **caso passo**:*

$$\frac{p(j) \lor \neg p(j)}{p(S(j)) \lor \neg p(S(j))} e\lor$$

e quindi posso concludere il passo induttivo:

$$\frac{p(0) \lor \neg p(0) \quad p(S(j)) \lor \neg p(S(j))}{\forall x(p(x) \lor \neg p(x))} ind$$

concludendo al dimostrazione costruttiva.
Posso quindi dire che, essendo 0 pari, 1 è dispari e quindi 2 è pari, 3 dispari etc... in pratica è un ciclo che parte dal caso base e poi decide per qualsiasi numero naturale. Possiamo quindi estrarre un algoritmo iterativo (potrei anche estrarne uno ricorsivo) da questa dimostrazione. Tale algoritmo è visualizzabile nell'implementazione C nel listing 2.2.

Listing 1 Codice C dell'algoritmo di calcolo pari creato dalla dimostrazione

```c
#include <stdio.h>

void A1(int* fdv){
  *fdv = 0;
}
void A2(int* j, int* fdv){
  *fdv = 1;
  *j = *j + 1;
}
void A3(int* j, int* fdv){
  *fdv = 0;
  *j = *j + 1;
}
void base(int* f){
  A1(&*f);
}
void passo(int* j, int ff1, int* ff2){
  if (ff1 == 0){
    A2(&*j, &*ff2);
  }else{
    A3(&*j, &*ff2);
  }
}

int main(){
  int x, j, ff;
  scanf("%d", &x);
  j = 0;
  base(&ff);
  while(j <= x - 1){
    passo(&j, ff, &ff);
  }
  if (ff == 0){
    printf("%d è pari\n", x);
  }else{
    printf("%d è dispari\n", x);
  }
  return 0;
}
```

Come detto algoritmi così sintetizzati non sono algoritmi ottimali e l'esempio del pari o dispari è evidente. Normalmente si avrebbe infatti:

Listing 2 Codice C dell'algoritmo di calcolo pari ottimale

```
#include <stdio.h>
int main(){
  int x;
  scanf("%d", &x);
  if ((x % 2) == 0){
    printf("%d è pari\n", x);
  }else{
    printf("%d è dispari\n", x);
  }
  return 0;
}
```

E quindi si ha un limite nella costruzione dell'algoritmo anche se il primo sappiamo essere corretto (avendo applicato la deduzione naturale e l'induzione, ho la garanzia che in quella assiomatizzazione il programma sia totalmente corretto) mentre di quest'ultimo dovremmo dimostrare la correttezza. Nel primo programma la componente funzionale della dimostrazione è data dalle varie funzioni che si richiamano. L'algoritmo per ogni istanza calcola se vale la parte sinistra o destra della disgiunzione in modo uniforme. Le funzioni si deducono automaticamente dalla prova costruttiva. Niente di tutto ciò è asseribile sull'algoritmo ottimo.
Parlando invece di Prolog avrei una situazione diversa. In Prolog ogni computazione è un'*istanza di dimostrazione* che varia di caso in caso e quindi non si ha una dimostrazione generale. Possiamo dire che un programma Prolog non rappresenta l'algoritmo che risolve il problema specificato per ogni dato di input. Si ha quindi un diverso modello di calcolo/computazione.

Capitolo 3

Logica Intuizionistica

3.1 Logica Intuizionistica Proposizionale

La **logica intuizionistica proposizionale** è il primo paradigma che trattiamo di **logica costruttiva**, dove appunto valgono la **DP** e la **EDP**, che sono i due requisiti minimali per dire che una logica è costruttiva. L'intuizionismo proposizionale è il paradigma minimale di logica costruttiva.

3.1.1 Sintassi

Iniziamo a parlare dell'intuizionismo proposizionale e già a livello di linguaggio si ha una differenza tra la logica classica e quella intuizionistica.
Il linguaggio della logica proposizione intuizionistica comprende i seguenti *simboli*:

- variabili proposizionali A, B, C, etc...
- connettivi $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e $\rightarrow$. Il $\neg$ è l'unico connettivo unario mentre gli altri sono connettici binari
- simboli ausiliari come "(" e ")" utili a stabilire precedenze tra connettivi

Una formula ben formata intuizionistica è definita così:

1. ogni variabile proposizionale appartiene alle FBF
2. se A e B sono FBF allora:
    - $\neg A$
    - $A \vee B$

- $A \wedge B$
- $A \to B$

appartengono alle FBF

3. nient'altro appartiene alle FBF

E fin qui non si hanno differenze con la logica classica.
La differenza rispetto alla logica classica si riscontra nel fatto che i 4 connettivi intuizionistici sono tra loro **completamente indipendenti**. In logica classica invece potrei anche solo usare $\neg$ e $\vee$ in quanto gli altri due si possono ricavare da questi due (tramite leggi di De Morgan etc...). In logica classica $\neg$ e $\vee$ formano un insieme minimale di operatori. In logica intuizionistica non ho nulla del genere, non posso ridurre nessun connettivo ad un altro. D'altro canto anche Prolog riduceva pesantemente il linguaggio, basandosi sulla logica classica e sulle clausole di Horn anche se si può aprire una discussione in merito al fatto che comunque la riduzione del linguaggio delle clausole di Horn in Prolog comunque garantisce l'algoritmicità delle dimostrazioni e la loro costruttività. Le clausole di Horn sono infatti una restrizione del linguaggio classico e non tutte le formule di logica classifica sono esprimibili in termini di clausole di Horn e questa è la motivazione per cui il Prolog di fatto computa.
La logica classica pura non è costruttiva in quanto dimostro $A \vee \neg A$ anche se non è detto che poi siamo in grado di dimostrare A o di dimostrare $\neg A$. Il principio del terzo escluso fa "saltare" la costruttività della logica classica, "saltando" la proprietà della disgiunzione DP.
Da un punto di vista formale quindi la logica intuizionistica ha l'alfabeto della logica classica, la definizione di FBF della logica classica ma non si hanno le equivalenze classiche che permettevano la riduzione del numero di connettivi.
Le precedenze sui connettivi sono le stesse di quella logica classica e la modifica delle precedenze avviene con lo stesso uso delle parentesi della logica classica. Si ricorda che $\neg$ ha la precedenza su $\wedge$ che ha precedenza su $\vee$ che ha precedenza su $\to$.
Con il simbolo $\vdash$ indichiamo la **dimostrabilità**. Quindi la scrittura $\vdash A$, con $A \in FBF$, indica che la formula A è dimostrabile nella logica intuizionistica (in teoria bisognerebbe specificare la logica a pedice di $\vdash$ ma se omesso, salvo diversamente specificato, si parla di logica intuizionistica).
Passiamo quindi a presentare un **sistema deduttivo** per dimostrare formule nella logica intuizionistica.
Partiamo con un sistema deduttivo molto semplice.
L'apparato deduttivo maneggerà due tipi di formule, che indichiamo come

formule segnate dai simboli T e F. Data una qualsiasi FBF A allora TA e FA sono formule segnate con T e F.
Definiamo per ogni connettivo **T-regole** e **F-regole**. Suppongo che S sia un arbitrario insieme di formule segnate, con / che specifica che la regola si divide in due parti, con S_T specifico che tengo di S solo le formule segnate con T (sto facendo una *restrizione*):

connettivo	T-regola	F-regola
$\wedge$	$T\wedge = \frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}$	$F\wedge = \frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}$
$\vee$	$T\vee = \frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}$	$F\vee = \frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}$
$\rightarrow$	$T \rightarrow= \frac{S,T(A\rightarrow B)}{S,FA/S,TB}$	$F \rightarrow= \frac{S,F(A\rightarrow B)}{S_T,TA,FB}$
$\neg$	$T\neg = \frac{S,T(\neg A)}{S,FA}$	$F\neg = \frac{S,F(\neg A)}{S_T,TA}$

Senza le due restrizioni di S a $_T$ otterrei i tableaux della logica classica proposizionale. Quindi passare al questo apparato deduttivo della logica intuizionistica non è complesso.
Usando queste regole una **dimostrazione** è una sequenze di applicazione di queste regole che comincia sempre con FX dove X è la formula che voglio dimostrare e deve terminare con una configurazione, ovvero un insieme di sotto-dimostrazioni, che contiene una coppia complementare, ovvero una formula segnata T e la stessa formula segnata F. La logica intuizionistica (come quella classica) è **decidibile** quindi con un numero finito di passi riesco sempre a stabilire se una formula è dimostrabile o meno nella logica intuizionistica. Questo accade in quanto la lunghezza della formula è sempre finita, non si ha possibilità di generare formule infinite, e le regole vanno a destrutturare le formule ottenendo sempre formule di complessità minore ad ogni applicazione di regola e quindi prima o pi si arriva alle formule atomiche, finendo il processo in quanto non hanno ovviamente regole di destrutturazione.
Nella logica intuizionistica, a differenza di quella classica, non tutti gli ordini di applicazione delle regole portano ad una tavola chiusa, ovvero ad una dimostrazione della formula, anche se la formula è dimostrabile. Esistono strategia di soluzione che non vanno a buon fine e questo è dovuto all'ordine dell'applicazione delle regole e alla concorrenza tra l'applicazione di due regole. Le uniche regole che però hanno questo problema sono le due con restrizione. Non tutti (a priori rispetto all'ordine di applicazione delle regole) i tableaux quindi sono chiusi, a differenza della logica classica. Mi basta

un tableaux chiuso (se ottengo più branch per una regola devono comunque chiudere tutti) per dimostrare che una formula è dimostrabile mentre per dire che non lo è mi serve che tutti i possibili tableaux non siano chiusi. Si ricorda che non è necessaria una formula atomica con F e T per chiudere un tableaux ma una qualsiasi FBF con F e T.

Esempio 4. *Vediamo che il principio del terzo escluso nell'intuizionismo non è dimostrabile.*
Prendo:

$$A \vee \neg A$$

e chiediamoci se è dimostrabile nella logica intuizionistica.
So che non lo è quindi mi aspetto di non trovare un tableaux chiuso, ovvero che termina con tutti i rami che contengono una formula segnata T e la stessa segnata F. Tale formula può essere diversa ramo per ramo anche se non succederà in questo caso avendo solo A.
Parto segnando F la formula:

$$F(A \vee \neg A)$$

Applico la F di $\vee$:

$$\frac{F(A \vee \neg A)}{FA, F(\neg A)}$$

Applico ora l'unica regola che posso applicare, essendo A atomica, ovvero la F di $\neg$ (con praticamente $S = FA$ e quindi $S_T = \emptyset$):

$$\frac{FA, F(\neg A)}{TA}$$

Questo tableaux non è un tableaux chiuso e quindi la formula non è dimostrabile nella logica intuizionistica, come volevasi dimostrare.

Esempio 5. *Vediamo un'altro esempio.*
Prendiamo la legge di De Morgan:

$$\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Parto con la dimostrazione:

$$F(\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B))$$

Procedo con l'implicazione:

$$\frac{F(\neg(A \vee B) \to (\neg A) \wedge (\neg B))}{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Qui entra il problema della strategia. In questa situazione potrei applicare il T di $\neg$ o l'F di $\wedge$. Nella mia testa, o nel prover, devo comunque ricordare che ad un certo punto avevo la scelta, in modo da poter fare backtracking qualora non si chiuda il tableaux. Si ricorda che questo non poteva avvenire in logica classica. Lo segnalo con un asterisco:

$$*T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Procedo prima con il T di $\neg$:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Ma anche qui ho più scelte (l'F di $\vee$ e l'F di $\wedge$), me lo segno con due asterischi:

$$**F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Scelgo la F di $\vee$ perché non crea branch:

$$\frac{F(A \vee B), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{FA, FB, F((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

Procedo con la F di $\wedge$, creando due branch:

$$\frac{FA, FB, F((\neg A) \wedge (\neg B))}{FA, FB, F(\neg A)/FA, FB, F(\neg B)}$$

Ma:

$$\frac{FA, FB, F(\neg A)/FA, FB, F(\neg B)}{TA/TB}$$

e quindi il tableaux non è chiuso. Effettuo il backtracking cominciando dal primo asterisco. Torno alla formula e rimuovo l'asterisco:

$$T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Applico quindi la F di $\wedge$:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F((\neg A) \wedge (\neg B))}{T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)}$$

Studiamo i due branch in parallelo ma devo mettere un asterisco, potendo fare sia T che F di $\neg$:

$$*T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)$$

Conviene fare il F di $\neg$ perché conserviamo l'altra parte di formula:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), F(\neg A)/T(\neg(A \vee B)), F(\neg B)}{T(\neg(A \vee B)), TA/T(\neg(A \vee B)), TB}$$

Procedo con la T di $\neg$:

$$\frac{T(\neg(A \vee B)), TA/T(\neg(A \vee B)), TB}{F(A \vee B), TA/F(A \vee B), TB}$$

e quindi, con l'F di $\vee$:

$$\frac{F(A \vee B), TA/F(A \vee B), TB}{FA, FB, TA/FA, FB, TB}$$

Nel primo branch ho FA e TA e quindi ho una formula con sia F che T, ovvero A. Discorso analogo nel secondo con B e quindi il tableaux è chiuso. Quindi questa legge di De Morgan è dimostrabile in logica proposizione intuizionistica. Mi basta una percorso che porta ad un tableaux chiuso (e volendo qui si potrebbe vedere che è anche l'unica facendo gli altri percorsi mancanti).
Si può vedere, facendo i conti che l'altra formula di De Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \to (\neg A) \vee (\neg B)$$

non è dimostrabile, non arrivando mai ad un tableaux chiuso. Non ho mai una strategia vincente quindi la formula non è dimostrabile nella logica intuizionistica. Dietro a questo comportamento si ha un motivo semantico che vedremo.

Esempio 6. *Tramite i tableaux si vede che la legge della doppia negazione:*

$$\neg\neg A \to A$$

non è dimostrabile (per di più avendo un solo cammino) in logica intuizionistica.

Si vedrà che la legge del terzo escluso o la legge della negazione, se aggiunti (ne basta uno dei due) alla logica intuizionistica la trasformano nella logica classica e viceversa, se nella logica classica non dimostro il terzo escluso o la doppia negazione ottengo la logica intuizionistica.

Esempio 7. *Tramite i tableaux si vede che la legge della conversa (non sono sicuro di aver sentito bene il nome):*

$$A \to \neg\neg A$$

è dimostrabile (per di più avendo un solo cammino) in logica intuizionistica. Si può quindi vedere come valendo un solo verso dell'implicazione (non vale la legge della doppia negazione) non può valere l'equivalenza $A \iff \neg\neg A$ in logica intuizionistica.

Il backtracking ha conseguenze nella complessità dell'algoritmo di decisione della logica proposizionale intuizionistica che è stato dimostrato da Stackman avere complessità spaziale pari a:

$$O(n + \log n)$$

Il backtracking si può iterare a seconda dell'ordine delle regole.
Non posso dire nell'intuizionismo che vale A sse non vale $\neg\neg A$. Infatti il sse altro non è che:

$$A \iff \neg\neg A$$

e quindi dovrei avere sia che:

$$A \to \neg\neg A$$

$$\neg\neg A \to A$$

ma abbiamo solo la prima valida.

Esempio 8. *Ci chiediamo se la formula:*

$$A \to B$$

equivale, come in logica classica, a:

$$\neg A \vee B$$

ovvero:

$$A \to B \iff \neg A \vee B$$

Già da subito possiamo dire che non vale in quanto si avrebbe dipendenza tra connettivi, cosa che abbiamo detto non esistere in logica intuizionistica. Vediamo se sono dimostrabili i due versi:

$$(A \to B) \to (\neg A \vee B)$$

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

Facendo i passaggi si dimostra che la prima formula non è dimostrabile e quindi già sappiamo che non vale il sse. Comunque possiamo fare i conti e veder che il secondo verso è dimostrabile in logica intuizionistica.

Vediamo un trucco per le strategia: *se si ha una formula la cui regola restringe S a S_T se ho formule complesse segnate T mi conviene aspettare ad applicare queste T e applicare la F delle regole che restringono, ovvero quelle di $\neg$ e $\rightarrow$.*
Abbiamo quindi descritto un genuino sistema di decisione con però un piccolo problema per il quale serve un esempio.

Esempio 9. *Proviamo a vedere se la formula della doppia negazione del principio del terzo escluso è dimostrabile nella logica intuizionistica. Studiamo quindi la formula:*

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

Si ha quindi:

$$F(\neg\neg(A \vee \neg A))$$

E quindi:

$$\frac{F(\neg\neg(A \vee \neg A))}{T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Da cui segue:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A)}$$

Proseguendo:

$$\frac{F(A \vee \neg A)}{FA, F(\neg A)}$$

E infine:

$$\frac{FA, F(\neg A)}{TA}$$

Coi soliti passaggi si arriverebbe (si noti il condizionale) a dire che non è dimostrabile arrivando nell'unico percorso possibile ad un tableaux non chiuso.
Anche Fitting arriva a questa conclusione

Ma per capire meglio il problema serve un teorema.

Teorema 1 (Teorema di Kolmogorov-Glivenko)**.** *Se una formula A è dimostrabile in logica classica allora e solo allora è dimostrabile in logica intuizionistica la doppia negazione di tale formula, a livello proposizionale (a livello predicativo se cose si complicano particolarmente).*

Ma questo stona rispetto all'esempio appena fatto. Il terzo escluso è dimostrabile in logica classica e quindi ci aspetteremmo che la sua doppia negazione sia dimostrabile in logica intuizionistica, contraddicendo il teorema. Proviamo a rivedere i conti:

$$F(\neg\neg(A \vee \neg A))$$

E quindi:

$$\frac{F(\neg\neg(A \vee \neg A))}{T(\neg(A \vee \neg A))}$$

da cui segue:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A)}$$

applicando però T di $\neg$ mi premuro di riscrivere la formula a cui ho applicato la regola, ottenendo al posto del risultato precedente:

$$\frac{T(\neg(A \vee \neg A))}{F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}$$

questo complica molto il calcolo ma si dimostrerà che comunque ripetere le formule non rende il calcolo infinito.
Ora avrei più scelte quindi lo segnalo con il solito asterisco:

$$*F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))$$

Proseguo in primis con l'F dell'or:

$$\frac{F(A \vee \neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}{FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Anche qui ho più scelte, lo segnalo:

$$**FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))$$

Proseguo con F di $\neg$:

$$\frac{FA, F(\neg A), T(\neg(A \vee \neg A))}{TA, T(\neg(A \vee \neg A))}$$

Proseguo con T di $\neg$:

$$\frac{TA, T(\neg(A \vee \neg A))}{TA, F(A \vee \neg A)}$$

E quindi:

$$\frac{TA, F(A \vee \neg A)}{TA, FA, F(\neg A)}$$

Avendo TA e FA mi posso fermare avendo chiuso il tableaux (si nota che risolvere il $\neg$ avrebbe portato ad avere TA, TA non chiudendo il tableaux). Si è quindi dimostrato che la formula è dimostrabile, confermando quanto detto nel teorema di di Kolmogorov-Glivenko.
Ripetere ogni volta la regola come fatto al secondo passaggio, però renderebbe il tableaux ingestibile e renderebbe il calcolo semi-decidibile, perché se la formula non è dimostrabile posso andare avanti all'infinito a ripetere le formule, comportando un serio problema. Si nota inoltre che abbiamo subito scelto il percorso che portava alla chiusura ma ci sono stati due punti in cui abbiamo scelto una regola rispetto ad un'altra. La seconda scelta nella formula con $*$ avrebbe portato ad un tableaux non chiuso (e si vedeva quasi ad occhio che lo avrebbe fatto). Anche in merito alla formula con $**$ si nota che la seconda scelta avrebbe portato ad un tableaux che non chiudeva.
Possiamo dire che la regola di poter riusare le formule a cui applichi la regola riportandola nel tableaux è una sorta di **meta-regola**. L'aggiunta di questa meta-regola è un calcolo completo rispetto alla logica proposizionale intuizionistica, ovvero tutte le formule intuizionistiche dimostrabili hanno un tableaux chiuso.
Le uniche formule che eventualmente richiedono al ripetizione, ovvero l'uso di questa meta-regola, sono le formule T di $\neg$ e T di $\rightarrow$. Possiamo quindi riformulare quelle due regole.
Per il $\rightarrow$:

$$T \rightarrow = \frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA, T(A \rightarrow B)/S, TB}$$

notando che nella seconda parte non devo ripetere la formula.
Per il $\neg$:

$$T\neg = \frac{S, T(\neg A)}{S, FA, T(\neg A)}$$

Con le regole così modificate (queste due modificate più tutte le altre non modificate) abbiamo un **calcolo completo e corretto** per la logica proposizionale intuizionistica. Non ci sono quindi formule dimostrabili intuizionisticamente per cui non esiste un tableaux chiuso con le regole descritte. D'ora in poi per i due casi useremo sempre le due nuove regole modificate anche se potenzialmente non è sempre necessario. Se ottengo un tableaux chiuso senza ripetizione lo ottengo anche con ma se lo ottengo con la ripetizione non per forza lo ottengo senza. Volendo posso ricordarmi della ripetizione usando un "placeholder" senza dover riscrivere ogni volta la formula intera per segnalare che in caso non riesca a chiudere il tableaux senza la ripetizione posso usare la ripetizione.
Esplicitare i due casi in cui può servire la ripetizione della formula è un grande aiuto dal punto di vista computazionale, essendo solo due casi.

In logica classica predicativa si ha una situazione analoga per quanto riguarda l'istanziazione dei parametri, con la T di $\forall$ e la F di $\exists$ (controllare appunti di fondamenti dell'informatica).
La logica classica proposizionale non richiederebbe mai un artificio simile a quello della meta-regola, così come non richiede backtracking perché vale la **proprietà di Chruch-Rosser** che ci assicura che se un tableaux deve chiudere chiuderà qualsiasi percorso si scelga.
Ricordando che $\neg\neg A \to A$ non è dimostrabile intuizionisticamente ma sappiamo che vale classicamente essendo una tautologia classica. Ma allora, per il teorema di Kolmogorov-Glivenko al formula:

$$\neg\neg(\neg\neg A \to A)$$

è dimostrabile in logica intuizionistica e si può verificare coi soliti passaggi (usando per di più una sola volta una ripetizione, nonostante potenzialmente se ne creino di più durante la dimostrazione).

3.1.2 Semantica e Modelli di Kripke

Abbiamo parlato finora di **sintassi**, parliamo ora della **semantica**, in termini di **modelli di Kripke**, per capire cosa significano *vero ($\top$)* e *falso ($\bot$)* in logica intuizionistica. La nozione di verità in logica intuizionistica è molto diversa da quella della logica classica, dove ogni proposizione è semplicemente vera o falsa sulla base delle tabelle di verità dei vari connettivi. La logica intuizionistica non ha tale semantica perché assegna significati ai connettivi in modo diverso dalla logica classica ma si basa appunto sui *modelli di Kripke*.
Kripke, prima dei modelli per l'intuizionismo, aveva chiuso un problema per i modelli delle **logiche modali**, logiche dove si hanno gli operatori di "necessario" e "possibile" associati alle formule che erano divise in 5 logiche, S1, S2, S3, S4 e S5, ciascuna con semantiche diverse, anche dal punto di vista del formalismo (non avendo una semantica che uniformasse queste 5). Kripke, da giovane, ottenne una semantica unificatrice di queste 5 logiche modali, risolvendo questo problema aperto. Dopo la risoluzione di questo problema Kripke si è appunto dedicato alla logica intuizionistica anche se i suoi studi in merito (*paper disponibile su Elearning*) hanno avuto un'accoglienza "tiepida" in quanto si era in piena Guerra Fredda e gli studi sul costruttivismo e sull'intuizionismo erano prevalentemente bandiera dell'est, con Kolmogorov etc..., mentre Kripke era statunitense, e quindi la Russia contrastava tali studi se svolti da studiosi non dell'est (pubblicando solo in russo per di più con una rivista negli USA che traduceva, in modo però non integrale facendo riassunti, tali articoli). Un'altra accusa era stata in merito al fatto che Krip-

ke usava strumenti di logica classica per parlare della semantica della logica intuizionistica. Alla fine erano due motivazioni ideologiche e non tecniche.

Modelli di Kripke in Intuizionismo Proposizionale

Definizione 13. *Definiamo* ***modello di Kripke*** *per la logica intuizionistica proposizionale è una tripla:*

$$K = (G, R, \vDash)$$

dove:

- *G insieme, finito o infinito, che Kripke chiama* ***stati di conoscenza****. Lo possiamo considerare come un* ***insieme discreto*** *di stati di conoscenza*
- *R relazione riflessiva e transitiva definita su G*
- *$\vDash$ ovvero una relazione tra elementi di G e formule ben formate della logica intuizionistica. Tale relazione è detta* ***forcing*** *ovvero "essere vero intuizionisticamente".*
  Formalmente diciamo che, dato $\Gamma \in G$ e $A \in FBF$ (nella logica intuizionistica), " Γ verifica A" si scrive: $\Gamma \vDash A$. Quindi nello stato di conoscenza Γ di tutti gli stati di conoscenza G la formula A è vera. *Se dico che, fissato $\Delta \in G$, A è* falsa *in Δ allora scrivo $\Delta \nvDash A$, avendo che " Δ non verifica A", quindi A non è vera in Δ*

Dobbiamo quindi caratterizzare la logica intuizionistica su questo modello. Si richiede che se $\Gamma \in G$ rende vera $A \in FBF$ e $\Delta \in G$ è tale che Γ è in relazione R con Δ allora anche Δ deve verificare A, ovvero, formalmente:

$$\Gamma \vDash A \wedge \Gamma R \Delta \implies \Delta R A$$

Questo vale $\forall \Delta$ tale che $\Gamma R \Delta$. Possiamo leggere quanto scritto anche nel seguente modo: *una formula, quando è vera in uno stato di conoscenza $\Gamma \in G$ deve essere vera in tutti gli stati di conoscenza $\Delta \in G$ che si possono raggiungere da* Γ, questo perché la relazione R è di tipo riflessivo e transitivo. Tali stati vengono detti **stati compatibili**, in questo caso con Γ. $\Gamma R \Delta$ si legge con "Γ è in relazione con Δ" o anche "Δ è accessibile da Γ" (soprattutto in logica modale è detta **relazione di accessibilità**).
Una volta che una formula è vera in uno stato di conoscenza rimarrà vero in tutti gli stati di conoscenza che seguono. Questo è un **requisito molto**

forte, una volta che una formula diventa vera diventa vera per sempre, in tutti i branch dell'albero a partire dal nodo in cui diventa vera. È quindi vera in tutti gli stati di conoscenza compatibili a quello in cui diventa vera. Se una formula è vera nella radice dell'albero rimarrà sempre vera, visto che, avendo praticamente a che fare con un particolare **diagramma di Hasse**, dalla radice "vedo" tutti gli altri nodi.
La critica che viene fatta a questa teoria è che non si prevede la **falsificabilità** di una formula.
Dobbiamo quindi definire cosa significhino (e l'ordine non è causale in quanto le prime due ricalcano molto la definizione classica), con $\Gamma \in G$ e $A, B \in FBF$:

- $\Gamma \vDash (A \vee B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \vee B$).
- $\Gamma \vDash (A \wedge B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \wedge B$)
- $\Gamma \vDash \neg A$
- $\Gamma \vDash (A \to B)$ (si noti che le parentesi sono per sola facilità di lettura, avrei potuto scrivere $\Gamma \vDash A \to B$)

Si ha quindi che, con $\Gamma \in G$ e $A, B \in FBF$:

- $\Gamma \vDash (A \vee B)$ sse $\Gamma \vDash A$ **o** $\Gamma \vDash B$
- $\Gamma \vDash (A \wedge B)$ sse $\Gamma \vDash A$ **e** $\Gamma \vDash B$
- $\Gamma \vDash \neg A$ sse $\Delta \nvDash A,\ \forall \Delta \in G$ t.c. $\Gamma R \Delta$. Si nota che è necessario anche che $\Gamma \nvDash A$ in quanto la relazione R è riflessiva e quindi $\Gamma R \Gamma$
- $\Gamma \vDash (A \to B)$ sse **o** $\Delta \nvDash A$ **o** $\Delta \vDash B, \forall \Delta \in G$ t.c. $\Gamma R \Delta$. La definizione non mi dice che in tutti i Δ è falso A o in tutti i Δ è vero B ma può capitare che in alcuni sia falso A, in alcuni vero B. Mi basta che, per essere vera l'implicazione, in ogni Δ deve essere o falsa A o vera B

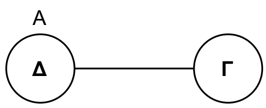
Si nota che per i primi due non si ha una grande differenza rispetto alla logica classica. Posso prendere un modello di Kripke in cui G contiene un solo elemento, che chiamiamo Γ, e ottenere la logica classica, che è quindi caratterizzata da modelli di Kripke con un solo stato di conoscenza. Quindi $\wedge$ e $\vee$ che si riferiscono allo stesso stato di conoscenza Γ sono simili alla definizione classica di vero per $\wedge$ e $\vee$. Si vede che per negazione e implicazione

non vale un discorso simile, in quanto non si prende più un solo stato di conoscenza tutti gli stati di conoscenza che sono in relazione con Γ. Questa è una delle **caratterizzazioni** forti di un connettivo nella logica intuizionistica. Un'altra critica volta a Kripke è stata che, fissato un qualsiasi elemento di G in esso una formula o è vera o falsa *classicamente*, e è stato accusato di aver fatto una teoria dei modelli per una logica costruttiva, ovvero l'intuizionismo, su base classica (cosa inaccettabile per gli intuizionisti ortodossi). **Abbiamo dato la semantica della logica intuizionistica**.
Vediamo ora vari esempi di formule non dimostrabili intuizionisticamente, che quindi non hanno un tableaux chiuso intuizionista, e per le quali deve quindi esistere un **contromodello**, ovvero un modello di Kripke che falsifica tali formule.

Esempio 10. *Cominciamo dalla non dimostrabilità del terzo escluso:*

$$\nvDash A \vee \neg A$$

Dobbiamo mostrare un modello di Kripke che rende falsa questa formula.
Disegno il modello di Kripke:



Dove si hanno due nodi, Γ *e* Δ*, e in cui se una FBF non viene indicata per un nodo significa che è falsa, mentre se viene segnata, come* A *per* Δ*, significa che è vera.*
Possiamo leggere il modello come: "in Γ *sono false tutte le formule ben formate, in* Δ *sono false tutte le formule ben formate escluso* A *che è vero".*
Abbiamo quindi $\Delta \vDash A$ *e* $\Gamma \nvDash A$*.*
Voglio sapere se:

$$\Gamma \vDash A \vee \neg A$$

Quindi mi serve che $\Gamma \vDash A$ *oppure* $\Gamma \vDash \neg A$*. Ho che* $\Gamma \nvDash A$ *non avendo l'etichetta* A*. Studio ora* $\Gamma \vDash \neg A$*. Mi serve che:*

$$\Delta \nvDash A, \ \forall \Delta \in G \ t.c. \ \Gamma R \Delta$$

Ma so che $\Delta \vDash A$ *e quindi anche* $\Gamma \vDash \neg A$ *non è vera. Ne segue che, non essendo vero né* $\Gamma \vDash A$ *né* $\Gamma \vDash \neg A$*:*

$$\Gamma \nvDash A \vee \neg A$$

Avendo che la non dimostrabilità del terzo escluso, dimostrata coi tableaux, corrisponde alla non veridicità del terzo escluso, dimostrata ora coi modelli di Kripke, avendo un modello che rende falsa la formula, che è appunto un ***contromodello*** *(che per di più questo è il modello di Kripke "standard" usato per il terzo escluso).*
Ipotizzando di essere in logica classica con un modello di Kripke ad un solo stato non potrei giungere a tale conclusione infatti il terzo escluso vale in logica classica. Non potrei prendere il modello a fatto ma ne prenderei uno con solo Γ *senza alcuna formula valida in* Γ*, verificando* $A \vee \neg A$ *in quanto in* Γ *è verificato* $\neg A$ *non avendo altri nodi per la regola del* $\neg$ *di Kripke (come invece si ha in logica intuizionistica).*

Teorema 2 (Teorema di completezza e validità)**.** *La non dimostrabilità corrisponde alla non veridicità. Tutto ciò che faccio sintatticamente ha il suo corrispondente semantico per cui tutte le formule per cui esiste un tableaux chiuso hanno un modello di Kripke che le rende vere e le formule che non hanno un tableaux chiuso hanno un modello di Kripke che le rende false.*

Esempio 11. *Vediamo se intuizionisticamente se:*

$$\Gamma \not\models \neg\neg A \to A$$

Sappiamo già che non ha un tableaux chiuso. Usiamo lo stesso modello dell'esempio precedente:

Mi serve che:

$$\Delta \not\models \neg\neg A \;\textbf{\textit{o}}\; \Delta \models A, \;\; \forall \Delta \in G \; t.c. \; \Gamma R \Delta$$

Ma $\Delta \models A$ *in quanto* A *non vale in* Γ *e* R *è riflessiva,* $\Gamma \not\models A$*. Ragiono ora su* $\Delta \not\models \neg\neg A$*. Si ha però che* $\Gamma \models \neg\neg A$*, esistendo un* Δ *che rende vero* A *(facendo i passaggi con la doppia negazione si arriva a voler cercare questo, devo avere che* $\Gamma \not\models \neg A$ *e quindi che esiste almeno un* Δ *che verifica* A*), e quindi abbiamo dimostrato che:*

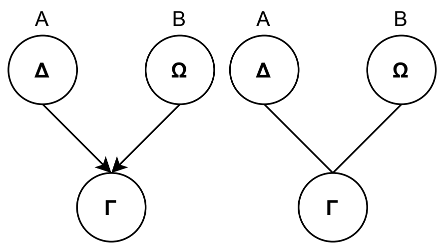
$$\Gamma \not\models \neg\neg A \to A$$

Avendo un contro modello che verifica l'antecedente e non il conseguente dell'implicazione.

Esempio 12. *Dimostriamo che intuizionisticamente:*

$$\Gamma \not\models \neg\neg(A \vee B) \rightarrow \neg\neg A \vee \neg\neg B$$

Il tableaux di questa formula non è chiuso.
Vediamo che esiste un contromodello (le due rappresentazioni sono equivalenti(???)):



Si ha quindi che Γ è in relazione R con se stesso, con Δ, che a sua volta è in relazione solo con se stessa, e con Ω, che è in relazione solo con se stessa. Partiamo con $\Gamma \models \neg\neg(A \vee B)$ che significa che esiste un nodo accessibile da Γ in cui $A \vee B$ è vera. Questo è vero perché in $\Delta \models A$ e $\Omega \models B$ (ne basta uno dei due).
Ora devo dimostrare che $\Gamma \not\models \neg\neg A \vee \neg\neg B$ per avere che è un contromodello. Devo quindi avere che $\Gamma \not\models \neg\neg A$ e $\Gamma \not\models \neg\neg B$ in tutti i nodi accessibili da Γ. E vedo che in Δ non vale B e in Ω non vale A, avendo quindi trovato il contromodello non potendo valere l'implicazione.

3.1.3 Deduzione Naturale

Introduciamo ora un nuovo calcolo, quello della **deduzione naturale**, introdotto da Gentzen negli anni '30 e perfezionato da Prawitz (perfezionamento che tratteremo).
La deduzione naturale è un calcolo che è funzionale alla logica classica, alla logica intuizionistica e alla logica minimale, con semplici variazioni nell'uso delle regole.
La deduzione naturale è un calcolo la cui nozione di dimostrazione 'è molto diversa dal calcolo a tableaux, che è un calcolo per refutazione (ovvero quando vogliamo dimostrare una formula la segniamo F e cerchiamo di ottenere una configurazione chiusa ovvero una contraddizione), essendo quindi un calcolo **indiretto e goal-oriented** ma che non permette di vedere come è fatta la costruzione di una certa formula ma che dimostra che averla segnata F porta d avere un tableaux chiuso. Di contro la deduzione naturale utilizza,

per dimostrare una formula, un metodo diretto che, a partire da certe assunzioni, costruisce la formula. Quindi l'ultimo passo di una dimostrazione in deduzione naturale è la formula che si vuole dimostrare.
Con la scrittura

$$\begin{matrix}\pi \\ A\end{matrix}$$

Diciamo che si è dimostrata la formula A attraverso π, dove π è un insieme finito di passi, con eventuali assunzioni e applicazioni delle regole della deduzione naturale.
Dire che A è dimostrabile:

$$\vdash \begin{matrix}\pi \\ A\end{matrix}$$

Significa dire che esiste una sequenza finita di applicazioni di regole e assunzioni π che termina con A e quindi, non avendo alcuna formula a sinistra di $\vdash$ si ha che la dimostrazione di A non dipende da alcuna formula e che in π le eventuali assunzioni verranno chiuse, quindi sparendo, rispetto alla deduzione di A nei vari passi. Quindi $\vdash \substack{\pi \\ A}$ è il **frame** nel quale ci si muoverà.
La deduzione naturale comprende:

- le **regole di introduzione**
- le **regole di eliminazione**

Date $A, B \in FBF$ si hanno:

connettivo	introduzione	eliminazione
$\wedge$	$\frac{A,B}{A\wedge B} i\wedge$	$\frac{A\wedge B}{A} e\wedge$ $\frac{A\wedge B}{B} e\wedge$
$\vee$	$\frac{A}{A\vee B} i\vee$ $\frac{B}{A\vee B} i\vee$	$\frac{A\vee B, \substack{\cancel{A} \\ \pi' \\ C}, \substack{\cancel{B} \\ \pi'' \\ C}}{C} e\vee$
$\rightarrow$	$\frac{\substack{\cancel{A} \\ \pi \\ B}}{A\rightarrow B} i\rightarrow$	$\frac{A, A\rightarrow B}{B} e\rightarrow$

Per l'eliminazione dell'or si ha che Prawitz ottiene questo risultato facendo:

$$\begin{matrix}A \\ \pi' \\ C\end{matrix} \text{ e } \begin{matrix}B \\ \pi'' \\ C\end{matrix}$$

Ovvero se esiste una dimostrazione di C che dipende solo da A o B sono libero di dedurre C tramite eliminazione dell'or **dimenticando**, specificata con $\cancel{X}$, le assunzioni che ho separatemene di A e di B, avendo $A \vee B$ come assunzione:

$$\frac{A \vee B, \frac{\cancel{A}}{\substack{\pi' \\ C}}, \frac{\cancel{B}}{\substack{\pi'' \\ C}}}{C} e\vee$$

tengo solo in considerazione la dimostrazione di $A \vee B$, quindi la scrittura corretta è, qualora non sia quindi un'assunzione:

$$\frac{\substack{\pi \\ A \vee B}, \substack{\cancel{A} \\ \pi' \\ C}, \substack{\cancel{B} \\ \pi'' \\ C}}{C} e\vee$$

C è una nuova formula che non è necessariamente contenuta in A o B. Se non si riesce a trovare questa C non si può fare l'eliminazione dell'or.
Per l'inserimento dell'implicazione si suppone di fare un'assunzione A. Se dopo un numero finito di applicazioni di regole π otteno B allora posso introdurre l'implicazione $A \to B$. Si dice che la regola "scarica" l'assunzione A e quindi indichiamo $\cancel{A}$. Quando scrivo poi l'implicazione ho comunque che la dimostrazione non dipende più da A perché è già compresa in $A \to B$.
La regole di eliminazione dell'implicazione è detta **modus ponens**.
In merito all'implicazione ho che se ho un conseguente posso anche derivare un'implicazione con qualsiasi antecedente, senza scaricare nulla:

$$\frac{{}^1\cancel{A}, {}^2 B}{} i\wedge$$

$$\frac{A \wedge B}{\wedge}$$

$$\frac{B}{A \to B} i \to \text{scaricando solo 1}$$

È quindi una semplificazione della regola di introduzione dell'implicazione.
Queste regole sono valide sia per la logica classica che per quella intuizionistica che per quella modale.
Dopo le regole dei tre connettivi binari abbiamo quelle per la costante del *falso*:

	introduzione	eliminazione
$\perp$	$\frac{A, \neg A}{\perp} i\perp$	$\frac{\perp}{B} e\perp$

L'eliminazione del falso mi ricorda che dal falso segue qualsiasi cosa.
La regola dell'eliminazione del falso non si può usare in logica minimale.
Possiamo quindi passare al connettivo unario della negazione:

	introduzione	eliminazione
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{A}\\ \pi\\ \perp\end{matrix}}{\neg A}i\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\neg A}\\ \pi\\ \perp\end{matrix}}{A}e\neg$

La regola dell'introduzione del $\neg$ non si può usare in logica minimale.
La regola dell'eliminazione del $\neg$ non si può usare in logica intuizionistica.
Questo calcolo, per $\neg$, è "sovrabbondante" rispetto alle regole in quanto potrei riscrivere $\neg A$ come $A \to \perp$ ed eliminare le regole del $\neg$. Per di più con questa implicazione Prawitz ha chiuso un problema aperto che Gentzen, usando solo il $\neg$, non era riuscito a chiudere, ovvero il **teorema di normalizzazione in logica intuizionistica con il calcolo della deduzione naturale**, dimostrando che tutte le dimostrazioni in deduzione naturale possono essere normalizzate, ovvero ridotte ad una forma *normale*.
Gentzen ha chiamato questo calcolo deduzione naturale perché era fermamente convinto che questo fosse il modo di ragionare in matematica in modo "naturale".
Vediamo quindi come costruire dimostrazioni in deduzione naturale, in una certa logica. Anche in questo caso sintassi e semantica devono essere coerenti, ovvero formule valide nella logica data devono essere dimostrabili con la deduzione naturale e formule non valide non devono essere dimostrabili in nessun modo.
La prima difficoltà riguarda il come far partire la dimostrazione e questo è il motivo per cui tutti i prover automatici per la deduzione naturale sono stati un fallimento (mentre coi tableaux sappiamo sempre da dove partire).

Definizione 14. *Una dimostrazione $\vdash A$ di una formula A, in deduzione naturale, è una sequenza finita di applicazioni di regole, π, della deduzione naturale che termina con la formula A e in cui eventuali assunzioni devono essere state tutte "scaricate", essendo quindi chiusa rispetto alle assunzioni:*

$$\begin{matrix}\pi\\ A\end{matrix}$$

Se A è dimostrabile da un insieme di formule $A_1, \dots A_n$ di premesse allora in π possono rimanere assunte $A_1, \dots A_n$. Questo si indica con:

$$A_1, \dots A_n \vdash A$$

Vediamo qualche esempio.

Esempio 13. *Il primo esempio è quello del terzo escluso in logica classica (vedendo anche perché non vale in logica intuizionistica).*
Con $\vdash_{CL}$ indichiamo che una cosa è dimostrabile in logica classica. Vogliamo quindi dimostrare che:

$$\vdash_{CL} A \vee \neg A$$

Numeriamo le assunzioni, per poter indicare accanto alla regola che scarica l'assunzione il suo numero:

1. *A*
2. *$\neg(A \vee \neg A)$*

Procedo quindi:

$$\frac{{}^{1}A}{A \vee \neg A}\, i\vee$$

Potremmo pensare di aver finito, avendo ottenuto la formula, ma non è così. Dobbiamo infatti scaricare l'assunzione A. Assumo quindi un'altra assunzione, la 2 e procedo:

$$\frac{{}^{2}\neg(A \vee \neg A), A \vee \neg A}{\perp}\, i\perp$$

Ma dal falso posso dire che segue qualsiasi cosa in logica classica e quindi, iniziando a scaricare l'assunzione 1:

$$\frac{\perp}{\neg A}\, i\neg$$

Quindi, nel complesso ho:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{\quad}\, i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\neg(A \vee \neg A), A \vee \neg A}{\quad}\, i\perp$$

$$\frac{\perp}{\neg A}\, i\neg$$

Devo ancora scaricare la 2. Continuo:

$$\frac{\neg A}{A \vee \neg A}\, i\vee$$

Ma devo ancora scaricare la 2. Assumo quindi nuovamente la 2:

$$\frac{{}^{2}\neg(A \vee \neg A), A \vee \neg A}{\perp}\, i\perp$$

E quindi:

$$\frac{\bot}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\, i\neg$$

che scarica 2, avendo complessivamente:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{\quad}\, i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{\quad}\, i\bot$$

$$\frac{\bot}{\quad}\, i\neg$$

$$\frac{\neg A}{\quad}\, i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)}, A \vee \neg A}{\quad}\, i\bot$$

$$\frac{\bot}{\neg\neg(A \vee \neg A)}\, i\neg$$

Ma sono arrivato alla doppia negazione del principio del terzo escluso e non al terzo escluso. Finora ho usato solo regole valide anche in logica intuizionistica, che indico con INT e quindi la doppia negazione del terzo escluso è dimostrabile in logica intuizionistica, avendo scaricato tutte le assunzioni e avendo usato regole valide in quella logica:

$$\vdash_{INT} \neg\neg(A \vee \neg A)$$

Ovviamente la doppia negazione del terzo escluso vale anche in logica classica per lo stesso ragionamento.
Voglio però arrivare al terzo escluso in logica classica. Per scaricare la 2 posso fare eliminazione del false (che non vale in logica intuizionistica ma solo in logica classica):

$$\frac{\bot}{A \vee \neg A}\, e\bot$$

che consuma la 2:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A}}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)},\ A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{}\,i\neg$$

$$\frac{\neg A}{}\,i\vee$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg(A \vee \neg A)},\ A \vee \neg A}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{A \vee \neg A}\,e\bot$$

arrivando quindi a:

$$\vdash_{CL} A \vee \neg A$$

Che non è dimostrabile in logica intuizionistica (come già si sapeva).

Esempio 14. *Vediamo una delle formule di De Morgan:*

$$\vdash_{INT} \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$$

Come assunzioni ho:

1. $\neg(A \vee B)$
2. A
3. B

Parto dal basso, sapendo che vorrei ottenere:

$$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B}\,i \to \quad \textit{(scaricando 1)}$$

Vediamo i passaggi i passaggi "risalendo", procedendo, come si dice, "per necessità" (ricostruendo ogni volta ciò che mi serve risalendo nella dimostra-

zione, ricostruendola a ritroso):

$$\frac{{}^{2}\cancel{A}}{}i\vee\ ,\ \frac{{}^{3}\cancel{B}}{}i\vee$$

$$\frac{A\vee B,{}^{1}\cancel{\neg(A\vee B)}}{}i\bot,\ \frac{A\vee B,{}^{1}\cancel{\neg(A\vee B)}}{}i\bot$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 2)},\ \frac{\bot}{}i\neg\ \textit{(scaricando 3)}$$

$$\frac{\neg A,\neg B}{}i\wedge$$

$$\frac{\neg A\wedge\neg B}{\neg(A\vee B)\rightarrow\neg A\wedge\neg B}i\rightarrow\ \textit{(scaricando 1)}$$

Chiudendo la dimostrazione avendo scaricato tutto ed essendo arrivati alla formula voluta. L'unico passo "strano", era capire che $\neg A/B$ era in contraddizione con A/B, portando all'introduzione dell'or e poi del $\bot$.
Vediamo un'altra dimostrazione della stessa:

$$\vdash_{INT} \neg(A\vee B)\rightarrow\neg A\wedge\neg B$$

Assumo:

1. A
2. $\neg(A\vee B)$
3. B

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$Ho\ \pi_1 =$$

$$\frac{\frac{\frac{{}^1\cancel{A}}{}i\vee}{A \vee B, {}^2\cancel{\neg(A \vee B)}}i\bot}{}$$

$$\frac{\bot}{\neg A}i\neg(scaricando\ 1)$$

$$rifaccio\ anche\ con\ B,\ avendo \pi_2 =$$

$$\frac{\frac{\frac{{}^3\cancel{B}}{}i\vee}{A \vee B, {}^2\cancel{\neg(A \vee B)}}i\bot}{}$$

$$\frac{\bot}{\neg B}i\neg(scaricando\ 3)$$

$$sono\ nella\ situazione$$

$$\frac{\pi_1, p_2}{}i\wedge$$

$$\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B}i \to (scaricando\ 2)$$

(i passaggi di π_1 e π_2 li avrei potuti scrivere uno accanto all'altro).
Quindi, avendo usato solo regole valide per la logica intuizionistica:

$$\vdash_{INT} \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$$

Passiamo alla dimostrazione della conversa:

$$\vdash_{INT} \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$$

Sappiamo già che il tableaux non chiude.
Assumo:

1. $\neg A \wedge \neg B$
2. $A \vee B$
3. A
4. B

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{{}^1\cancel{1\neg A \wedge \neg B}}{}e\wedge\,,\ \frac{{}^1\cancel{1\neg A \wedge \neg B}}{}e\wedge$$

$$\frac{\neg A,{}^3\cancel{A}}{}i\bot,\ \frac{\neg B,{}^4\cancel{B}}{}i\bot$$

$$\frac{\bot,\bot,{}^2\cancel{A \vee B}}{}e\vee \textit{ (scaricando 3 e 4)}$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 2)}$$

$$\frac{\neg(a \vee B)}{\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)}i \to \textit{ (scaricando 1)}$$

Ho quindi dimostrato, nel complesso, un'equivalenza avendo entrambi i versi dell'implicazione (e per entrambi i versi si ha un tableaux chiuso), sia in logica classica che intuizionistica.

Esempio 15. *Proviamo a dimostrare l'altra formula di De Morgan:*

$$\vdash_{INT} \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$$

Il tableaux della formula non chiude quindi arriveremo a dire che:

$$\nvdash_{INT} \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$$

Siano date le seguenti assunzioni:

1. A
2. B
3. $\neg(A \wedge B)$

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{{}^1\cancel{A},{}^2 B}{}i\wedge$$

$$\frac{A \wedge B,{}^3\cancel{\neg(A \wedge B)}}{}i,\bot$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 1)}$$

$$\frac{\neg A}{}i\vee$$

$$\frac{\neg A \vee \neg B}{}i \to \textit{ (scaricando 3)}$$

$$\frac{\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B}{}$$

Ma non si è scaricato B e quindi non è una dimostrazione, né classica né intuizionistica.
Vediamo se la conversa vale intuizionisticamente:

$$\vdash_{INT} \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$$

Assumo:

1. $\neg A \vee \neg B$, *ovvero assumo l'antecedente*
2. $\neg A$
3. $\neg B$
4. $A \wedge B$

Procediamo quindi con la dimostrazione:

$$\frac{^4\cancel{A \wedge B}}{}e\wedge\,,\quad \frac{^4\cancel{A \wedge B}}{}e\wedge$$

$$\frac{A,^2\cancel{\neg A}}{}i\bot,\quad \frac{B,^3\cancel{\neg B}}{}i\bot$$

$$\frac{\bot,^1\cancel{\neg A \vee \neg B}}{}e\vee\ \textit{(scaricando 2 e 3)}$$

$$\frac{\bot}{}i\neg\textit{(scaricando 4)}$$

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)}i\to\ \textit{(scaricando 1)}$$

Quindi, avendo usato solo regole valide per la logica intuizionistica:

$$\vdash_{INT} \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$$

Quindi "mezza" De Morgan vale in logica intuizionistica.

Durante la lezione 6, parte 2, altri esempi di dimostrazione:

- $\vdash_{INT} (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
- $\vdash_{INT} (\neg A \vee \neg B) \to (B \to \neg A)$
- $\vdash_{INT} (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)$, detta **scambio degli antecedenti**
- $\nvdash_{INT} ((A \to B) \to A) \to A$, detta **legge di Peirce**, che vale solo in logica classica

- $\nvdash_{INT} (A \to B) \iff (\neg B \to \neg A)$, detta **legge di contrapposizione**, che ricorda il **teorema di deduzione della logica classica** che legava dimostrabilità e implicazione, avendo a livello proposizionale che se con ipotesi A dimostro B, $A \vdash B$ allora $A \to B$. Classicamente si ha anche che $\vdash \neg B \to \neg A$ se $A \vdash B$ e si noti che è il procedimento di una *dimostrazione per assurdo*, secondo la logica classica. Vale in logica classica ma il $\leftarrow$ non vale in logica intuizionistica. **Non posso dimostrare direttamente per assurdo in logica intuizionistica** ma si usano dei "meta-sistemi"

- $\vdash_{INT} ((((A \to B) \to A) \to A) \to B) \to B$

Se la formula è un'implicazione si assume spesso l'antecedente che poi si scarica all'ultimo passo. Non si hanno comunque strategie deterministiche.
Si è notato come non ci sia un metodo preciso per ottenere la strategia e per di più la strategia non è unica potenzialmente. Nel primo esempio si parte dall'alto, nel secondo dal basso.
Per capire se esiste una dimostrazione faccio prima la prova coi tableaux, che se chiude mi garantisce l'esistenza di una dimostrazione.
L'idea di partire a dimostrare sapendo a quali connettivi bisogna arrivare sia adatta molto bene anche la **calcolo dei sequenti** di Gentzen (sono un calcolo diretto), dove si parte sempre dal basso, risalendo "per necessità", fino ad arrivare agli assiomi caratteristici della logica in uso e del calcolo dei sequenti. Si hanno meccanismi di traduzione da tableaux intuizionistici a sequenti e da sequenti a deduzione logica (???). I sequenti sono "mediani" nel paradigma del goal-oriented.
Anche in deduzione naturale, in modo analogo alla matematica, si possono usare i **lemmi**.

Esempio 16. *Dimostriamo:*

$$\vdash_{INT} \neg\neg(A \land B) \to \neg\neg A \land \neg\neg B$$

Si assume:

1. $\neg A$
2. $\neg\neg(A \land B)$
3. $\neg B$

Di ha quindi la dimostrazione:

$$\cfrac{^1\cancel{\neg A}}{}\, i\vee\ ,\quad \cfrac{^3\cancel{\neg B}}{}\, i\vee$$

$$\cfrac{\neg A \vee \neg B}{\overline{}}\, \textit{regola derivata},\quad \cfrac{\neg A \vee \neg B}{\overline{}}\, \textit{regola derivata}$$

$$\cfrac{\neg(A \wedge B),^2 \cancel{\neg\neg(A \wedge B)}}{}\, i\bot,\quad \cfrac{\neg(A \wedge B),^2 \cancel{\neg\neg(A \wedge B)}}{}\, i\bot$$

$$\cfrac{\bot}{}\, i\neg\, \textit{(scaricando 1)},\quad \cfrac{\bot}{}\, i\neg\, \textit{(scaricando 3)}$$

$$\cfrac{\neg\neg A, \neg\neg B}{}\, i\wedge$$

$$\cfrac{\neg\neg A \wedge \neg\neg B}{\neg\neg(A \wedge B) \to \neg\neg a \wedge \neg\neg B}\, i \to \textit{(scaricando 2)}$$

con la doppia barra indico una regola derivata da un precedente lemma (nel nostro caso dalla legge/teorema di De Morgan) che quindi chiamiamo lemma di De Morgan, non dovendo quindi dimostrare nuovamente la cosa, riducendo la "complessità" della dimostrazione.

Comunque non si hanno strategie deterministiche per iniziare una dimostrazione, si hanno comunque suggerimenti in base alla formula, ad esempio se ho una cosa del tipo $A \to B$ si parte spesso, ma non sempre, assumendo A per poi cercare di scaricarla. Bisogna sempre prima guardare bene la formula che si deve dimostrare, ragionando su sottoformule etc…

3.1.4 Ottimizzazione dei Tableaux

Parliamo ora di **ottimizzazione dei tableaux intuizionistici**.

Esempio 17. *Riprendiamo il tableaux di Fitting per la doppia negazione del terzo escluso:*

$$F\neg\neg(A \vee \neg A)$$

che ricordiamo dimostrabile in logica intuizionistica per il teorema di Kolmogorov-Glivenko.

Riprendiamo il tableaux di Fitting:

$$\frac{\frac{\frac{F\neg\neg(A\vee\neg A)}{T\neg(A\vee\neg A)}}{FA\vee\neg A}}{\frac{FA, F\neg A}{TA}}$$

Che sembra non chiudere.
Si ricorda però che, sempre Fitting, risolve la questione ripetendo una formula:

$$\frac{F\neg\neg(A\vee\neg A)}{\frac{T\neg(A\vee\neg A)}{\frac{FA\vee\neg A, T\neg(A\vee\neg A)}{\frac{FA, F\neg A, T\neg(A\vee\neg A)}{\frac{TA, T\neg(A\vee\neg A)}{\frac{TA, FA\vee\neg A}{TA, FA, F\neg A}}}}}}$$

che chiude.
Si è usato il fatto che si è usata, come regola per il T di $\neg$:

$$\frac{S, T\neg A}{S, FA, T\neg A}$$

Nell'esempio ci si è rifatti al concetto di **realizzabilità**.

Definizione 15. *Preso un nodo Γ di un modello di Kripke per la logica intuizionistica diremo che Γ **realizza** TA sse Γ* forza *A, ovvero sse:*

$$\Gamma \vDash A$$

*Inoltre si ha che Γ **realizza** FA sse in Γ **non è vera** A, ovvero sse:*

$$\Gamma \nvDash A$$

*Abbiamo quindi legato il segno T/F al **forcing intuizionista**. Le regole devono quindi mantenere la realizzabilità.*

Vediamo, sempre pensando all'esempio, cosa significhi mantenere la realizzabilità parlando di $T\neg A$. Si ha che, intuizionisticamente:

$$\Gamma \vDash \neg A$$

Ma nell'intuizionismo significa che:

$$\forall \Delta \text{ t.c } \Gamma R \Delta, \Delta \nvDash A$$

Se diciamo che una formula realizzata prima di applicare una regola deve essere realizzata anche dopo tale applicazione si ha che, avendo:

$$\frac{S, T\neg A}{S, FA, T\neg A}$$

FA può essere eliminata, quindi restringendo S a S_C non è più garantito che sia realizzato FA ovvero che sia forzata A. Dato che questo deve avvenire $\forall\Delta$ mi "porto dietro" $T\neg A$ in modo che in ogni punto del tableaux sia realizzabile la formula $\neg A$ (ma questo succede solo se ripeto il T).
Non sempre bisogna ripetere la T, ad esempio:

$$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB}$$

che passando da una T a due T non crea problemi anche se restringo a S_T, avendo un Γ che realizza TA e TB allora ho che forza $A \wedge B$.
Vale lo stesso discorso anche avendo:

$$\frac{S, T(A \vee B)}{S, TA/S, TB}$$

garantendo o da un alto o dall'altro la realizzabilità di $A \vee B$. Infatti se è realizzato TA ho un Γ che forza A e che automaticamente forza $A \vee B$. Viceversa con TB ho un Γ che forza B e che automaticamente forza $A \vee B$.
Abbiamo un'altra regola che obbliga a ripete:

$$\frac{S, T(A \to B)}{S, FA, T(A \to B)/S, TB}$$

Dove, avendo che FA può essere "tagliato" da una restrizione S_T nel primo branch, conservo anche la formula (non avendo F nel secondo branch non devo ripetere).
Vediamo un calcolo che, "modulo backtracking", non necessiterà della ripetizione delle formule, avendo già tutta la sua semantica all'interno del calcolo. Si parla quindi di **semantic tableaux**, avendo che i tableaux "mimano" la

semantica della logica di riferimento. Più semantica incorporariamo nelle regole stesse e migliore sarà il calcolo dal punto di vista dell'efficienza.
Quanto detto viene bene con il T di $\neg$.
Aggiungiamo a T e F il segno F_C che significa **falso certo**:

	T-regola	F-regola	F_C-regola
$\wedge$	$T\wedge = \frac{S,T(A\wedge B)}{S,TA,TB}$	$F\wedge = \frac{S,F(A\wedge B)}{S,FA/S,FB}$	$F_C\wedge = \frac{S,F_C(A\wedge B)}{S_C,F_CA/S_C,F_CB}$
$\vee$	$T\vee = \frac{S,T(A\vee B)}{S,TA/S,TB}$	$F\vee = \frac{S,F(A\vee B)}{S,FA,FB}$	$F_C\vee = \frac{S,F_C(A\vee B)}{S,F_CA,F_CB}$
$\rightarrow$	$T\rightarrow = \frac{S,T(A\rightarrow B)}{S,FA,T(A\rightarrow B)/S,TB}$	$F\rightarrow = \frac{S,F(A\rightarrow B)}{S_C,TA,FB}$	$F_C\rightarrow = \frac{S,F_C(A\rightarrow B)}{S_C,TA,F_CB}$
$\neg$	$T\neg = \frac{S,T(\neg A)}{S,F_CA}$	$F\neg = \frac{S,F(\neg A)}{S_C,TA}$	$F_C\neg = \frac{S,F_C(\neg A)}{S_C,TA}$

Il nuovo segno è dato in quanto al semantica del $\neg$ ci dice che, avendo il forcing di $\neg A$, A deve rimanere falso in ogni nodo del modello di Kripke e quindi è un falso che deve permanere sempre in tutto il tableaux.
S_C è definito come l'insieme S meno l'insieme delle formule segnate con F (detto FC_J):

$$S_C = S - \{FC_j\}$$

Notiamo, in prima istanza, come da formule F_C otteniamo sempre formule F_C o T, stabilizzando il tableaux.
Nell'implicazione di F_C notiamo ancora però la presenza di TA che porterebbe a fare lo stesso ragionamento di replicazione della formula dell'implicazione ma questo è uno step successivo di ottimizzazione.
Un tableaux in questo nuovo calcolo è chiuso secondo le regole dei normali tableaux ma anche se ho TA, F_CA.

Esempio 18. *Riprendiamo la doppia negazione del terzo escluso con questo nuovo calcolo:*

$$\frac{\frac{\frac{\frac{F\neg\neg(A\vee\neg A)}{T\neg(A\vee\neg A)}}{F_C(A\vee\neg A)}}{F_CA, F_C\neg A}}{F_CA, TA}$$

e quindi il tableaux è chiuso, anche senza aver ripetuto il $T\neg$.

F_C **è stato proposto da Moscato a Fitting ed è stato accolto nello studio dell'intuizionismo**.
Si è quindi incorporato più semantica nel calcolo infatti:

$$\Gamma \models F_C A \iff \Gamma \models \neg A$$

avendo che la semantica del $\neg$ viene incorporata dal segno F_C, avendo che Γ realizza $F_C A$ sse realizza $\neg A$. Abbiamo fatto quindi un primo step di ottimizzazione.
Dal punto di vista "proof teoretico" il segno F_C riesce a evitare duplicazioni della formula $\neg A$, a livello intuizionista, che sarebbero sempre necessarie per chiudere il tableaux.
Ripariamo dalla doppia negazione del terzo escluso:

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

Si ha, con il nuovo calcolo:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F\neg\neg(A \vee \neg A)}{T\neg(A \vee \neg A)}}{F_c(A \vee \neg A)}}{F_C A, F_C \neg A}}{F_C A, TA}$$

Avendo che il tableaux chiude (senza il ragionamento di Fitting di ripetere le formule). Il discorso può essere generalizzato dicendo che, ogni volta che si vuole applicare il teorema di Kolmogorov-Glivenko, ragionando come Fitting avrò sempre bisogno di ripetere formule, avendo in partenza una doppia negazione (dovendo fare comunque un $F\neg$ e un $T\neg$ come prime mosse, se non uso F_C). Quindi, avendo una formula valida classicamente, per dimostrare intuizionisticamente la doppia negazione, posso usare F_C evitando la ripetizione di formule, a meno di avere poi nella formula dei $T \rightarrow$. Si ha quindi un **trattamento ottimale** del $T\neg$ ma manca quello di $T \rightarrow$.
Moscato, coi vari collaboratori, ha lavorato anni per trovare una soluzione soddisfacente, quindi un calcolo corretto e completo, che rimuovesse anche la ripetizione del $T \rightarrow$. Si sono quindi chiesti se, a livello proposizionale, esistesse una soluzione al problema. Si arriverà a dire che c'è una soluzione a livello proposizionale ma non a livello predicativo (il $T\forall$ richiede sempre e comunque la ripetizione) e nemmeno a livello di logica classica (lato predicativo si ha ripetizione sia per $T\forall$ che per $T\exists$). Nella logica classica, lato

proposizionale, vale quindi la regola di Chruch-Rosser e quindi non sarà mai necessario ripetere una formula mentre in logica intuizionistica questo non vale e quindi bisogna pensare a delle strategie per evitarlo. Il calcolo puro di Fitting prevede per forza ripetizioni per $\neg$ e $T \rightarrow$ ma in questo nuovo calcolo con F_C ho solo ripetizioni per $T \rightarrow$.
Presentiamo quindi un ulteriore calcolo che rimuova anche questa ripetizione. Che nuovo calcolo proviene da un'idea di Dikov, che aveva ragionato sulla deduzione naturale e sul calcolo dei sequenti di Gentzen. Dikov aveva studiato cosa succede a livello di deduzione naturale quando si assumono nuovamente certe formule, costruendo un calcolo in cui non succede. Moscato e Miglioli, studiando il lavoro di Dikov, hanno cercati di applicare le stesse regole al calcolo a tableaux ottimizzato.
L'idea è di studiare in modo approfondito come è fatto l'antecedente dell'implicazione e non dare una sola regola per il $T \rightarrow$ ma dare tante regole a seconda della forma dell'antecedente dell'implicazione.
Si va quindi ad analizzare la formula del tipo:

$$T\ A \rightarrow B$$

Si studia l'antecedente A. Si hanno quindi vari casi:

- A è atomica o negata, che indico con AN (per dire A e Negata)
- A è una disgiunzione, quindi del tipo $A = C \vee D$
- A è una congiunzione, quindi del tipo $A = C \wedge D$
- A è un'implicazione, quindi del tipo $A \rightarrow B$

Si da quindi una regola ad hoc per ciascuna tipologia di antecedente. Si hanno quindi quattro formule.
Facciamo qualche considerazione preliminare. In primis si nota come il calcolo venga ancora più complicato, complicando il lavoro di un prover, anche se questo è trascurabile dal punto di vista computazionale. Una seconda osservazione è che non si riesce a trovare un modo per importare nel calcolo la semantica dell'implicazione, come per il caso di $T\neg$, che importava la semantica della negazione intuizionistica nel calcolo. Questa infatti è un'idea più *sintattica* e sostituisce una formula con un suo equivalente intuizionista, che abbia nell'antecedente una complessità implicazionale sempre più bassa, fino ad arrivare a formule atomiche o negate per poter applicare la regola di base, avendo che la regola per le atomiche e le negate non prevede ripetizioni di formule. Si ha quindi una "trasformazione di formule". Si ottiene un calcolo privo di ripetizioni, *anche se può darsi che esista una soluzione più semantica*

e meno sintattica del problema di questo tipo di calcolo, magari cercando un nuovo segno ad hoc.
Vediamo quindi queste 4 regole che sostituiscono la precedente regola per $T \rightarrow$:

	$\mathbf{T} \rightarrow$
$Ant = A$ o $Ant = \neg A$	$\frac{S,TA \rightarrow B}{S,FA/S,TB} T \rightarrow AN$
$Ant = A \wedge B$	$\frac{S,T(A \wedge B) \rightarrow C}{S,T(A \rightarrow (B \rightarrow C))} T \rightarrow \wedge$
$Ant = A \vee B$	$\frac{S,T(A \vee B) \rightarrow C}{S,TA \rightarrow C,TB \rightarrow C} T \rightarrow \vee$
$Ant = A \rightarrow B$	$\frac{S,T(A \rightarrow B) \rightarrow C}{S,FA \rightarrow B,TB \rightarrow C/S,TC} T \rightarrow\rightarrow$

Si nota che la complessità logica di B non ha importanza. In tutti i casi si ottengono complessità implicazionali minori, avendo antecedenti sempre meno complessi logicamente nella risultante rispetto alla premessa.
Questo nuovo calcolo, con questa nuova regola per $T \rightarrow$ è **corretto, completo e senza ripetizioni**.
A livello di prover questo risultato permette di non dover creare liste aggiuntive di formule da ripetere (considerando che Fitting nemmeno limitava la cosa a $T\neg$ e $T \rightarrow$).

Esempio 19. *Studiamo:*

$$\vdash_{INT} ((\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$\frac{F((\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A}{} F \rightarrow$$

$$\frac{T(\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow A, FA}{} T \rightarrow \vee$$

$$\frac{T\neg A \rightarrow A, T\neg\neg A \rightarrow A, FA}{} T \rightarrow AN$$

$$\frac{T\neg A \rightarrow A, F\neg\neg A, FA/T\neg A \rightarrow A, TA, FA}{} F\neg\textit{(chiude branch destro)}$$

$$\frac{T\neg A \rightarrow A, T\neg A}{} T\neg$$

$$\frac{T\neg A \rightarrow A, F_C A}{} T \rightarrow AN$$

$$\frac{F\neg A, F_C A/TA, F_C A}{} F\neg\textit{(chiude branch destro)}$$

$$TA, F_C A$$

Avendo che il tableaux chiude, senza ripetizioni.
Si nota che avendo $T\neg A \to A, T\neg\neg A \to A, FA$ *si osserva che è prodotto da un antecedente in* $\vee$ *con due negate. Si hanno quindi ora due antecedenti entrambi con due negate, sotto* T*, che mi riportano alla regola per il* $T \to$ *delle atomiche e delle negate.*

Dimostreremo che questo calcolo è corretto e completo.
Il prover PTP è basato su questo calcolo con ulteriori strategie di ottimizzazione.
Possiamo quindi vedere la dimostrazione del teorema di Kolmogorov-Glivenko, che riscriviamo per comodità, tramite il calcolo a tableaux con F_C e la non ripetizione di $T\neg$ e $T \to$.

Teorema 3 (Teorema di Kolmogorov-Glivenko). *Se una formula* A *è dimostrabile in logica classica allora e solo allora è dimostrabile in logica intuizionistica la doppia negazione di tale formula, a livello proposizionale. Formalmente si ha quindi:*

$$\vdash_{CL} A \iff \vdash_{INT} \neg\neg A$$

Quindi tutte le tesi classiche sono dimostrabili, se doppiamente negate, in logica intuizionistica.

Dimostrazione. Per fare la dimostrazione si introduce una nuova regola:

$$\frac{S, TA \to B}{S, F_C A / S_C, TB}\overline{T \to}$$

che chiamiamo appunto $T \to$ soprassegnato. Questa regola è corretta dal punto di vista del calcolo intuizionistica e possiamo usarla quando vogliamo. La sua peculiarità rispetto all'originale $T \to$ è che nel branch a sinistra ho $F_C A$ quindi non si avrà mai il taglio della stessa applicando regole intuizionistiche. Nel branch di destra si ha TB che già non verrebbe mai tagliata ama, per correttezza e non per completezza, si restringe S a S_C.
Ricordiamo che la vecchia regola era, dove si ripeteva la formula a causa di FA nel branch di sinistra e non si restringeva S in quello di destra:

$$\frac{S, TA \to B}{S, FA, TA \to B / S, TB} T \to$$

La $\overline{T \to}$ è una versione corretta ma non completa di $T \to$. L'uso della prima quindi comporta un calcolo corretto ma non completo, mentre la seconda sia corretto che completo.

Ora a noi basta avere una formula corretta, cosa che rende possibile il poterla applicare ogni volta che voglio.
Parto quindi dal tableaux intuizionista di $\neg\neg A$:

$$\frac{F\neg\neg A}{\quad}F\neg$$

$$\frac{T\neg A}{F_C A}T\neg$$

Avendo che da questo momento in poi il tableaux intuizionista diventa equivalente a quello classico, con solo i segni T e F_C. Dobbiamo dimostrarlo per casi, a seconda della natura di A:

- A è una formula atomica quindi se chiude classicamente $F_C A$ chiude anche intuizionisticamente
- A è del tipo $B \vee C$, avendo che $F_C(B \vee C)$ produce/deduce $F_C B, F_C C$
- A è del tipo $B \wedge C$, avendo che $F_C(B \wedge C)$ produce/deduce $F_C B / F_C C$
- A è del tipo $\neg B$, avendo che $F_C \neg B$ produce/deduce TB
- A è del tipo $B \to C$, avendo che $F_C(B \to C)$ produce/deduce $TB, F_C C$

Analizzo l'ultimo caso, avendo $TB, F_C C$. Questo è l'unico caso in cui potrei avere ancora formule che vengono tagliate con le regole intuizionistiche, in caso di implicazione ma posso evitare la cosa. Infatti, se TB fosse anch'essa un'implicazione, potrei usare il $\overline{T \to}$ e ottenere formule che non verranno mai tagliate dall'applicazione di regole intuizionistiche, avendo che il tableaux classico e quello intuizionistico coincidono. Ne segue che se quello classico chiude allora chiude anche quello intuizionistico. Il trucco sta nel $F_C A$ nel branch sinistro del risultante della regola del $\overline{T \to}$, vale a dire rafforzare, scrivendo F_C invece di F della'antecedente dell'implicazione e quindi ottenendo da una formula certa, $TA \to B$ due formule certe, una per branch, $F_C A$ e TB. Per questo logica classica e logica intuizionistica qui coincidono. Da un T prodotto da un F_C vengono quindi fuori solo formule certe con al nuova regola del $\overline{T \to}$.
Si è arrivati a tutto questo discorso dicendo che bisogna chiudere il tableaux per $F_C A$ e da quel punto in poi il tableaux classico e quello intuizionista coincidono. Qualsiasi sia il tipo di A (specificando nel caso dell'implicazione

l'uso di $\overline{T \rightarrow}$) ottengo qualcosa che non è più "tagliabile" usando regole intuizionistiche e quindi, partendo da $F\neg\neg A$ e arrivando ad $F_C A$, anche qualora A non sia atomica, arrivo ad un punto in cui le due logiche coincidono, **dimostrando il teorema**, non avendo più regole intuizionistiche che possono tagliare.
Si arriva a dire che, in questa situazione, l'S classico e l'S_C intuizionistico coincidono.
Essendo corretta la regola del $\overline{T \rightarrow}$ *la posso usare nella dimostrazione del teorema. La regola non è completa perché esistono tesi intuizionistiche, dimostrabili intuizionisticamente, che non possono essere dimostrate con usando regola, che porterebbe ad un tableaux che non chiude.* □

3.2 Logica Intuizionistica Predicativa

Per parlare di logica predicativa intuizionistica abbiamo bisogno di specificare il suo **alfabeto**, formato da:

1. un insieme di **variabili individuali** che indichiamo con x, y, z etc...
2. un insieme di **costanti individuali**, detti anche **parametri** in certi contesti, che indichiamo con a, b, c etc...
3. un insieme di **funzioni**, con la loro arietà (che ricordiamo essere il numero degli argomenti o operandi che richiede), che indichiamo con f, g, h etc...
4. un insieme di **predicati**, con la loro arietà, che indichiamo con P, Q, R etc...
5. un insieme di **costanti logiche proposizionali** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
6. un insieme di **quantificatori**, ovvero quello **esistenziale** $\exists$ e quello **universale** $\forall$
7. un insieme di **simboli ausiliari**, come, ad esempio, "(" e ")"

Gli insiemi 1,5,6 e 7 sono generali per tutti i linguaggi intuizionistici. I punti 2,3 e 4 sono detti **tipo di similarità** o **segnatura** dello specifico linguaggio. Specificando quindi costanti individuali, funzioni e predicati vado a specificare un particolare *linguaggio del primo ordine.*
Rispetto all'alfabeto per il linguaggio del primo ordine della logica classica

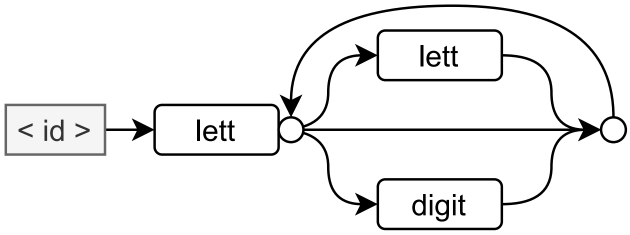


Figura 3.1: Esempio di carta sintattica in C, per un identificatore. Si legge "un identificatore C *id* comincia sempre con una lettera alfabetica *lett*, seguita da una lettera alfabetica *lett* o da una cifra *digit*, il tutto iterato". A esempio `A10` è un identificatore, `1AB` no.

non si riscontrano differenze con quello intuizionistico, i due alfabeti coincidono (come del resto coincidevano anche gli alfabeti dei linguaggi proposizionali).
Anche le altre definizioni, ovvero quelle di **termine** e di **formula ben formata**, coincidono tra logica predicativa classica e logica predicativa intuizionistica.

Definizione 16. *Definisco **termine**, in logica predicativa intuizionistica. Si ha che:*

1. *ogni costante individuale è un termine*
2. *ogni variabile individuale è un termine*
3. *se $t_1, \dots, t_n$ sono termini e f è una funzione di arietà n allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine*

*Si ha che 1 e 2 sono i **casi base** mentre 3 è la **clausola induttiva**.*

In un parallelo con il mondo della programmazione posso pensare ad un **tipo**, ad esempio `int`. Ho che:

```
x+1
```

è una funzione binaria che somma ad una variabile x, che suppongo di tipo `int`, una costante 1, comunque di tipo `int`.
Si ha che, in programmazione, `x+1` è un'**espressione**, che è appunto in programmazione il corrispettivo di **termine** nella logica.
Ogni linguaggio di programmazione ha una sua sintassi, definita tramite **carte sintattiche**, esempio in figura 3.1, usate per definire una grammatica deterministica in un linguaggio di programmazione. Quindi dal punto di vista della carta sintattica un'espressione è:

- una costante
- una variabile
- un simbolo di funzione applicato a n espressioni se il simbolo di funzione ha arietà n

Torniamo a parlare di logica predicativa.

Definizione 17. *Definiamo **termine chiuso** come un termine che non contiene variabili.*

Esempio 20. *Ad esempio:*

- $f(x, 1)$*, con f di arietà 2, è un termine ma non è un termine chiuso, avendo x, che è una variabile, come argomento*
- $g(4, 7)$*, con g di arietà 2, è un termine ed è un termine chiuso, avendo solo costanti come argomento*
- $g(f(x, 2), 4)$*, con g ed f di arietà 2, è un termine, avendo una funzione ed una costante come parametri ed entrambi sono termini. Non è però un termine chiuso dato che $f(x, 2)$ non è un termine chiuso*

Definizione 18. *Definiamo le **formule ben formate** del primo ordine. Si ha che:*

1. *se P è un **predicato**, di arietà n (cosa che potremmo indicare con P^n) e $t_1, \dots, t_n$ sono **termini**, allora $P(t_1, \dots, t_n) \in FBF$. $P(t_1, \dots, t_n)$ è detta **formula atomica***
2. *se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in FBF$ allora:*
   - $\neg\mathcal{A} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in FBF$
   - $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \in FBF$

   *Si noti che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, scritte così in corsivo per evidenziare questo aspetto, non fanno parte del linguaggio appena definito, non sono termini etc... ma sono **meta-variabili che variano su formule ben formate**, ovvero sono simboli di arbitrarie formule ben formate*

3. *se x è una **variabile individuale** e P è un **predicato** del linguaggio, allora:*

   - $\forall x P(x) \in FBF$
   - $\exists x P(x) \in FBF$

   Quindi i due quantificatori possono quantificare solo su variabili individuali (a livello di logica predicativa, ovvero di logica del primo ordine, una cosa del tipo $\forall P(P(x))$ non è ammessa)

Fin qui si potrebbe dire "nulla di nuovo", in quanto tutto quello che è appena stato detto vale in logica intuizionistica come in logica classica. In realtà qualche differenza potrei già farla. A livello di logica classica proposizionale potrei usare un insieme minimale di operatori con solo $\neg$ e $\vee$ mentre in logica intuizionistica non potrei.
Dal punto di vista dei quantificatori in logica classica potrei definire $\forall$ come $\neg\exists\neg$ e $\exists$ come $\neg\forall\neg$, quindi me ne basterebbe uno dei due. In logica intuizionistica questo non vale e i due quantificatori sono del tutto indipendenti e non definibili, non valendo l'equivalenza classica.
Tra le due logiche quindi non si ha una differenza sintattica (al più che in logica classica potrei togliere qualche connettore e un quantificatore) ma si ha una differenza semantica (che spiega perché in logica intuizionistica non posso trascurare connettivi e quantificatori).
Si avranno **modelli di Kripke** per la logica predicativa intuizionistica.

Definizione 19. *Si definisce **variabile libera** una variabile non legata ad un quantificatore.*

Definizione 20. *Definiamo **formula ben formata chiusa** quando ogni variabile della FBF compare nell'ambito di un quantificatore o esistenziale o universale. In altri termini una FBF è chiusa se non contiene variabili libere.*
*Una FBF non chiusa si dice anche **FBF aperta**.*

Esempio 21. *Ad esempio:*

- $\forall x \exists y P(x, y)$ *è una FBF chiusa*
- $\forall x(P(x, y) \wedge Q(x))$ *è una FBF ma non è una FBF chiusa a causa di y*
- $\forall x(Q(x) \wedge \exists y(P(x, y)))$ *è una FBF chiusa*

- $\forall x Q(x) \wedge \exists y(P(x,y))$ *è una FBF ma non è una FBF chiusa perché la x del secondo termine dell'and non ha più un quantificatore (bisogna guardare le parentesi)*

Tendenzialmente studieremo formule ben formate chiuse (in quanto vedremo che ogni FBF chiusa è $\top$ e $\bot$ fissata un'interpretazione, che dobbiamo ancora definire per la logica intuizionistica, mentre una FBF aperta, per essere valutata, richiede una esemplificazione / un'istanziazione della *variabile libera*).

3.2.1 Deduzione Naturale Predicativa

Passiamo ora alla deduzione naturale in ottica logica predicativa.
Vediamo quindi l'estensione delle regole della deduzione naturale al caso predicativo. A livello predicativo in realtà le regole sono le stesse della logica classica in quanto basta la regola dell'eliminazione del $\neg$ a livello proposizionale per caratterizzare anche la logica intuizionistica predicativa.
Anche in questo caso si hanno le regole di eliminazione e le regole di introduzione, dato un predicato P e a costante:

quantificatore	introduzione	eliminazione
$\exists$	$\dfrac{P(a)}{\exists x P(x)} i\exists$	$\dfrac{\overset{\pi}{\exists x P(x)},\ \overset{\cancel{P(a)}}{\overset{\pi_1}{C}}}{C} e\exists$
$\forall$	$\dfrac{\overset{\pi}{P(x)}}{\forall x P(x)} i\forall$	$\dfrac{\forall x P(x)}{P(a)} e\forall$

Per l'introduzione di $\forall$ non faccio ipotesi sul valore della costante a e se ho una dimostrazione che porta a $P(a)$, dove non faccio appunto ipotesi su a, allora posso introdurre il $\forall$. Mi serve quindi una dimostrazione di $P(a)$ con a non fissato. Si ha che a in questo caso è quindi una sorta di *parametro* (questo vale anche nell'eliminazione del $\forall$, mentre nell'introduzione di $\exists$ è una costante specifica, in quanto basta averne una). Ad esempio posso dire che d "pari 4" posso dedurre che "esiste un x che è pari" ma non che "tutti gli x sono pari", in quanto l'a dell'introduzione del $\forall$ non deve essere specificato ma deve provenire da una dimostrazione di $P(a)$ in cui a non è mai stato particolarizzato.
In merito all'eliminazione di $\exists$ si suppone di aver ottenuto $\exists x P(x)$ tramite una dimostrazione π. Si assume quindi $P(x)$ dove a non deve essere mai occorso in nessun punto di π e non dove occorrere in nessun punto di C che

si ottiene tramite π_1. In tal caso posso eliminare $\exists$ e ottenere C, che è indipendente dal valore di a in $P(a)$. Ad esempio posso dire "esiste un numero primo e pari", assumo un $Pari(a)$, e deduco un C che non contiene a, ad esempio $C = 2$, allora posso eliminare $\exists$ e concludere con 2 come risultante. Il punto è che a priori, da un esiste, non so quale sia il termine esistente ma se faccio tutto il ragionamento sopra posso dire che C è tale termine e andare avanti nella dimostrazione.
Le *regole critiche* sono l'introduzione di $\forall$, che è pesante come significato dovendo dire che vale per ogni, e l'eliminazione dell'esiste, che è pesante come significato in quanto dal dire che esiste qualcosa si estrae quel qualcosa, arrivando ad un $C \in FBF$. Le altre due regole sono più "leggere".
Con queste quattro regole si ha un **calcolo corretto e completo** per la logica classica se si ha l'eliminazione del $\neg$ e per la logica intuizionistica se non si ha tale regola. Quindi questo calcolo, che ricordiamo essere di Prawitz è molto flessibile e modulare rispetto alle varie logiche.
Tutte le altre regole proposizionali si usano come già visto.
La nozione di dimostrazione in deduzione naturale è invariata. Se scrivo $\vdash_{INT} A$ intendo dire che è dimostrabile una formula predicativa A in logica intuizionistica, esistendo una sequenza finita di applicazioni di regole di deduzione naturale predicativa intuizionistica che termina con la formula A. Se ho assunzioni che non voglio scaricare posso dare la nozione più generale di dimostrazione di una formula predicativa A a partire da un insieme di assunzioni Γ:

$$\Gamma \vdash_{INT} A$$

Vediamo qualche esempio di deduzione naturale predicativa.

Esempio 22. *Partiamo con un esempio famoso, di una formula non dimostrabile, nemmeno classicamente. Questo esempio segnala come l'uso scorretto dell'introduzione del $\forall$ può portare a dimostrazioni errate. Prendiamo quindi:*

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \to \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

Ovvero avrei la "distribuzione" del $\forall$ sull'or che non ha senso. Sarebbe come dire "ogni numero è pari o dispari quindi o ogni numero è pari o ogni numero è dispari".
Applichiamo le regole per vedere se è dimostrabile, sapendo che non dovrà esserlo.
Si hanno le seguenti assunzioni:

1. $\forall x(A(x) \vee B(x))$
2. $A(a)$

3. $B(a)$

E la dimostrazione:

$$\frac{{}^{1}\forall x(A(x) \vee B(x))}{A(a) \vee B(a)} e\forall$$

In parallelo vorrei avere:

$$\frac{{}^{2}A(a)}{\forall x A(x)} i\forall, \quad \frac{{}^{3}B(a)}{\forall x B(x)} i\forall$$

$$\frac{\forall x A(x)}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)} i\vee, \quad \frac{\forall x B(x)}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)} i\vee$$

Unendo i due percorsi:

$$\frac{A(a) \vee B(a), \forall x A(x) \vee \forall x B(x), \forall x A(x) \vee \forall x B(x)}{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)}$$

Non chiaro ipotetico ultimo passaggio, a priori del passaggio "illegale".
Ma questo non posso farlo perché per l'introduzione di $\forall$ non posso partire da assunzioni. Quindi questa formula non è nemmeno dimostrabile classicamente, come è intuitivo dire. Quindi:

$$\nvdash_{CL} \forall x(A(x) \vee B(x)) \to \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

Potenzialmente potrei avere altri metodi ma possiamo dire che, in questo caso, non si arriverebbe mai a conclusione.

Si può dimostrare che l'$\exists$ si distribuisce sull'or (fatto su quaderno).
Vediamo ora un altro esempio.

Esempio 23. *Vediamo un esempio di formula dimostrabile solo classicamente:*

$$\exists x A(x) \iff \neg \forall x \neg A(x)$$

Vedremo che uno dei due sensi è dimostrabile anche intuizionisticamente. Parto con:

$$\exists x A(x) \to \neg \forall x \neg A(x)$$

Si hanno le assunzioni:

1. $\exists x A(x)$

2. $\forall x \neg A(x)$

3. $A(a)$

e la seguente applicazione di regole:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{2}\cancel{\forall x \neg A(x)}}{{}^{3}\cancel{A(a)}, \neg A(a)}e\forall}{\bot}i\bot}{{}^{1}\cancel{\exists x A(x)}, \neg\forall x \neg A(x)}i\neg\textit{(scaricando 2)}}{\neg\forall x \neg A(x)}e\exists\textit{(scaricando 3)}}{\exists x A(x) \rightarrow \neg\forall x \neg A(x)}i \rightarrow \textit{(scaricando 1)}$$

Quindi la formula è dimostrabile intuizionisticamente, non avendo assunzioni non scaricate. Come strategia si è seguita quella simile alla logica proposizionale, cercando di arrivare all'introduzione finale dell'implica che scaricasse la prima assunzione.
Vedo l'altro verso:

$$\exists x A(x) \leftarrow \neg\forall x \neg A(x)$$

ovvero:

$$\neg\forall x \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

Si ragiona sapendo che la dimostrazione è possibile solo classicamente.
Si hanno le assunzioni:

1. $\neg\forall\neg x A(x)$

2. $\neg A(a)$

e la seguente applicazione di regole:

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg A(a)}}{}\,i\forall$$

$$\frac{{}^{1}\neg\forall\neg x A(x), \forall x\neg A(x)}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{}\,e\neg \textit{(scaricando 2)}$$

$$\frac{A(a)}{}\,i\exists$$

$$\frac{\exists x A(x)}{}\,i \to \textit{(scaricando 1)}$$

$$\neg\forall x\neg A(x) \to \exists x A(x)$$

L'introduzione del $\neg$ *è solo presente in logica classica e non in logica intuizionistica.*
Come prima si potrebbe pensare che non va bene perché introduco il $\forall$ ***da un'assunzione, ma l'assunzione poi viene scaricata, siamo quindi "al limite" dell'accettabile****.*
Si ha comunque che la formula è dimostrabile solo classicamente per l'introduzione del $\neg$*.*
Cerchiamo ora un'altra dimostrazione senza quell'introduzione di $\forall$ *"al limite" (anche se la dimostrazione sopra sarebbe accettata in esame).*
Si hanno le assunzioni:

1. $\neg\forall\neg x A(x)$
2. $\neg\exists x A(x)$

Si usa il lemma per cui da $\neg\exists x A(x)$ *derivo* $\forall x\neg A(x)$*.*
Si ha quindi la seguente applicazione di regole:

$$\frac{\frac{{}^{2}\cancel{\neg\exists x A(x)}}{}}{}\,\textit{(regola derivata)}$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{\neg\forall\neg x A(x)}, \forall x\neg A(x)}{}\,i\bot$$

$$\frac{\bot}{}\,i\neg \textit{(scaricando 2)}$$

$$\frac{\exists x A(x)}{}\,i \to \textit{(scaricando 1)}$$

$$\neg\forall x\neg A(x) \to \exists x A(x)$$

Si ha comunque che la formula è dimostrabile solo classicamente e non intuizionisticamente, per l'introduzione del $\neg$*, al più comunque di riuscire dimostrare, classicamente il lemma:*

$$\vdash_{CL} \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

Vediamo tale dimostrazione.
Si assume:

1. $A(a)$
2. $\neg\exists A(x)$

Avendo quindi la seguente applicazione di regole:

$$\frac{{}^{1}\cancel{A(a)}}{\quad\quad} i\exists$$

$$\frac{{}^{2}\cancel{\neg\exists A(x)}, \exists x A(x)}{\quad\quad} i\bot$$

$$\frac{\bot}{\quad} i\neg \textit{(scaricando 1)}$$

$$\frac{\neg A(a)}{\quad\quad} i\forall$$

$$\frac{\forall x \neg A(x)}{\quad\quad} i \to \textit{(scaricando 2)}$$

$$\neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

Avendo che la formula è dimostrabile classicamente.
Posso fare l'introduzione di $\forall$ ***perché*** $\neg A(a)$ ***è derivata e*** a ***compare solo in una formula derivata.***
Del resto quest'ultima dimostrazione sarebbe valida anche intuizionisticamente se ci servisse. Quindi si ha che:

$$\vdash_{INT} \neg\exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

Chiamo il seguente teorema anche se non ho idea di cosa sia veramente.

Teorema 4. *Nell'intuizionismo non è mai dimostrabile che da una formula negata si arrivi ad un esistenziale "puro".*