

# Linguaggi e Computabilità

UniShare

Davide Cozzi  
@dlcgold

Gabriele De Rosa  
@derogab

Federica Di Lauro  
@f\_dila

# Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                    | <b>2</b> |
| 1.1      | Definizioni . . . . .                  | 2        |
| 1.1.1    | Alberi Sintatici . . . . .             | 14       |
| 1.1.2    | Grammatiche ambigue . . . . .          | 18       |
| 1.1.3    | Grammatiche Regolari . . . . .         | 20       |
| 1.1.4    | Espressioni Regolari (Regex) . . . . . | 23       |
| 1.2      | Automati . . . . .                     | 29       |
| 1.2.1    | Automati deterministici . . . . .      | 30       |
| 1.2.2    | Automati non deterministici . . . . .  | 36       |

# Capitolo 1

## Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlclgold/Appunti>.

Grazie mille e buono studio!

### 1.1 Definizioni

- un **linguaggio** è un insieme di stringhe che può essere generato mediante un dato meccanismo con delle date caratteristiche; un linguaggio può essere riconosciuto, ovvero dando in input una stringa un meccanismo può dirmi se appartiene o meno ad un linguaggio. I meccanismi che generano linguaggi si chiamano *grammatiche*, quelli che li riconoscono *automi*. I linguaggi formali fanno parte dell'informatica teorica (*TCS*)
- si definisce **alfabeto** come un insieme finito e non vuoto di simbolo (come per esempio il nostro alfabeto o le cifre da 0 a 9). Solitamente si indica con  $\Sigma$  o  $\Gamma$
- si definisce **stringa** come una sequenza finita di simboli (come per esempio una parola o una sequenza numerica). La stringa vuota è una sequenza di 0 simboli, e si indica con  $\varepsilon$  o  $\lambda$
- si definisce **lunghezza di una stringa** il numero di simboli che la compone (ovviamente contando ogni molteplicità). Se si ha  $w \in \Sigma^*$  è una stringa  $w$  con elementi da  $\Sigma^*$  (insieme di tutte le stringhe di tutte le lunghezze possibili fatte da  $\Sigma$ ), allora  $|w|$  è la lunghezza di  $w$ , inoltre  $|\varepsilon| = 0$ .

- si definisce **potenza di un alfabeto**  $\Sigma^k$  come l'insieme di tutte le sequenze (espressi come stringhe e non simboli) di lunghezza  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$  ottenibili da quell'alfabeto (se  $\Sigma^2$  si avranno tutte le sequenze di 2 elementi etc...). Se ho  $k = 1$  si ha  $\Sigma^1 \neq \Sigma$  in quanto ora ho stringhe e non simboli. Se ho  $k = 0$  ho  $\Sigma^0 = \varepsilon$ . Dato  $k$  ho  $|\Sigma|$  che è la cardinalità dell'insieme  $\Sigma$  (e non la sua lunghezza come nel caso delle stringhe); sia  $w \in \Sigma^k = a_1, a_2, \dots, a_k$ ,  $a_i \in \Sigma$  e  $|\Sigma| = q$  ora:

$$|\Sigma^k| = q^k$$

- si definisce  $\Sigma^*$  come **chiusura di Kleene** che è l'unione infinita di  $\Sigma^k$  ovvero

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \dots \cup \Sigma^k$$

- si ha che  $\Sigma^+$  è l'unione per  $k \geq 1$  di  $\Sigma^k$  ovvero:

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots \cup \Sigma^k = \Sigma^* - \Sigma^0$$

per esempio, per l'insieme  $\{0, 1\}$  si ha:

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 100, 000, \dots\}$$

- quindi un **linguaggio**  $L$  è un insieme di stringhe e:

$$L \subseteq \Sigma^*$$

si hanno sottoinsiemi particolari, come l'insieme vuoto, che resta però un linguaggio, il **linguaggio vuoto** e  $\emptyset \in \Sigma^k$ ,  $|\emptyset| = 0$  che è diverso dal linguaggio che contiene la stringa vuota  $|\varepsilon| = 1$  (che conta come una stringa). Inoltre  $\Sigma^* \subseteq \Sigma^*$  che ha lunghezza infinita. Posso concatenare due stringhe con un punto:  $a \cdot b \cdot c = abc$  e  $a \cdot \varepsilon = a$ . Ovviamente la stringa concatenata è lunga come la somma delle lunghezze delle stringhe che la compongono. Vediamo qualche esempio di linguaggio:

- il linguaggio di tutte le stringhe che consistono in  $n$  0 seguiti da  $n$  1:

$$\{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$$

- l'insieme delle stringhe con un uguale numero di 0 e di 1:

$$\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1001, \dots\}$$

- l'insieme dei numeri binari il cui valore è un numero primo:

$$\{\varepsilon, 10, 11, 101, 111, 1011, \dots\}$$

- $\Sigma^*$  è un linguaggio per ogni alfabeto  $\Sigma$
- $\emptyset$ , il linguaggio vuoto, e  $\{\varepsilon\}$  sono un linguaggio rispetto a qualunque alfabeto

Prendiamo un alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  con la sua chiusura di Kleen  $\Sigma = \{0, 1\}^*$ . Quando si ha un input si può avere un problema di decisione,  $P$ , che dia come output "si" o "no". Posso avere un problema di decisione (o *membership*) su  $w \in \Sigma = \{0, 1\}^*$ , con  $w$  stringa, che dia in output "si" o "no". Un linguaggio  $L$  sarà:

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid P(w) = \text{si}\}$$

quindi si ha che:

$$\Sigma^* \setminus L = \{P(w) = \text{no}\}$$

Vediamo ora un esempio di *Context Free Language (CFL)*, costruito a partire da una *Context Free Grammar (CFG)*:

**Esempio 1.** Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$  e  $L_{pal} = \text{"stringhe palindrome binarie"}$ . Quindi, per esempio,  $0110 \in L$ ,  $11011 \in L$  ma  $10010 \notin L$ . Si ha che  $\varepsilon$ , la stringa vuota, appartiene a  $L$ . Diamo una definizione ricorsiva:

- **base:**  $\varepsilon, 0, 1 \in L_{pal}$
- **passo:** se  $w$  è palindroma allora  $0w0$  è palindromo e  $1w1$  è palindromo

una variabile generica  $S$  può sottostare alle regole di produzione di una certa grammatica. In questo caso si ha uno dei seguenti:

$$S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1, S \rightarrow 0S0, S \rightarrow 1S1$$

Si ha che una grammatica  $G$  è una quadrupla  $G = (V, T, P, S)$  con:

- $V$  simboli variabili
- $T$  simboli terminali, ovvero i simboli con cui si scrivono le stringhe alla fine
- $P$  regole di produzione
- $S$  variabile di partenza *start*

riprendiamo l'esempio sopra:

**Esempio 2.**

$$G_{pal} = (V = \{S\}, T = \{0, 1\}, P, S)$$

con:

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1, S \rightarrow 0S0, S \rightarrow 1S1\}$$

Si può ora costruire un algoritmo per creare una stringa palindroma a partire dalla grammatica  $G$ :

$$\underbrace{S}_{\text{start applico una regola}} \rightarrow 1S1 \rightarrow 01S10 \rightarrow \underbrace{01010}_{\text{sostituisco variabile}}$$

con  $S$ ,  $1S1$  e  $01S10$  che sono forme sentenziali. Posso così ottenere tutte le possibili stringhe. Esiste anche una forma abbreviata:

$$S \rightarrow \varepsilon | 0 | 1 | 0S0 | 1S1$$

Non si fanno sostituzioni in parallelo, prima una  $S$  e poi un'altra

Si hanno 4 grammatiche formali, *gerarchia di Chomsky*:

- **tipo 0:** non si hanno restrizioni sulle regole di produzione,  $\alpha \rightarrow \beta$ . Sono linguaggi ricorsivamente numerabili e sono rappresentati dalle *macchine di Turing*, deterministiche o non deterministiche (la macchina di Turing è un automa)
- **tipo 1:** il lato destro della produzione ha lunghezza almeno uguale a quello sinistro. Sono grammatiche dipendenti dal contesto (*contestuali*) e come automa hanno *la macchina di Turing che lavora in spazio lineare*:

$$\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  detti *contesto* e  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in (V \cup T)^*$

- **tipo 2:** sono quelle libere dal contesto, context free. Come regola ha  $A \rightarrow \beta$  con  $A \in V$  e  $\beta \in V \cup T)^*$  e come automa ha gli *automi a pila non deterministici*
- **tipo 3:** sono le grammatiche *regolari*. Come regole ha  $A \rightarrow \alpha B$  (o  $A \rightarrow B\alpha$ ) e  $A \rightarrow \alpha$  con  $A, B \in V$  e  $\alpha \in T$ . Come automi ha gli *automi a stato finito deterministici o non deterministici*

**Esempio 3.** Sia  $G = (V, T, O, E)$ , con  $V = \{E, I\}$  e  $T = \{a, b, 0, 1, (, ), +, *\}$  quindi ho le seguenti regole, è di tipo 3:

1.  $E \rightarrow I$
2.  $E \rightarrow E + E$
3.  $E \rightarrow E * E$
4.  $E \rightarrow (E)$
5.  $I \rightarrow a$
6.  $I \rightarrow b$
7.  $I \rightarrow Ia$
8.  $I \rightarrow Ib$
9.  $I \rightarrow I0$
10.  $I \rightarrow I1$

voglio ottenere  $a*(a+b00)$  sostituisco sempre a destra (*right most derivation*)

$$E \rightarrow E * E \rightarrow E * (E) \rightarrow E * (E + E) \rightarrow E * (E + I) \rightarrow E + (E + I0) \\ \rightarrow R + (I + b00) \rightarrow E * (a + b00) \rightarrow I * (a + b00) \rightarrow a * (a + b00)$$

usiamo ora l'inferenza ricorsiva:

| passo | stringa ricorsiva | var | prod | passo stringa impiegata |
|-------|-------------------|-----|------|-------------------------|
| 1     | a                 | I   | 5    | \                       |
| 2     | b                 | I   | 6    | \                       |
| 3     | b0                | I   | 9    | 2                       |
| 4     | b00               | I   | 9    | 3                       |
| 5     | a                 | E   | 1    | 1                       |
| 6     | b00               | E   | 1    | 4                       |
| 7     | a+b00             | E   | 2    | 5,6                     |
| 8     | (a+b00)           | E   | 4    | 7                       |
| 9     | a*(a+b00)         | E   | 3    | 5, 8                    |

definisco formalmente la derivazione  $\rightarrow$ :

**Definizione 1.** Prendo una grammatica  $G = (V, T, P, S)$ , grammatica CFG. Se  $\alpha A \beta$  è una stringa tale che  $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ , appartiene sia a variabili che terminali. Sia  $A \in V$  e sia  $A \rightarrow \gamma$  una produzione di  $G$ . Allora scriviamo:

$$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$$

con  $\gamma \in (V \cup T)^*$ .

Le sostituzioni si fanno indipendentemente da  $\alpha$  e  $\beta$ . Questa è quindi la definizione di derivazione.

**Definizione 2.** Definisco il simbolo  $\rightarrow_*$ , ovvero il simbolo di derivazioni in 0 o più passi. Può essere definito in modo ricorsivo. Per induzione sul numero di passi.

- la base dice che  $\forall \alpha \in (V \cup T)^*, \alpha \rightarrow_* \alpha$
- il passo è: se  $\alpha \rightarrow_G \beta$  e  $\beta \rightarrow_* \gamma$  allora  $\alpha \rightarrow_* \gamma$

Si può anche dire che  $\alpha \rightarrow_G \beta$  sse esiste una sequenza di stringhe  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  con  $n \geq 1$  tale che  $\alpha = \gamma_1$ ,  $\beta = \gamma_n$  e  $\forall i, 1 < i < n - 1$  si ha che  $\gamma_i \rightarrow \gamma_{i+1}$  la derivazione in 0 o più passi è la chiusura transitiva della derivazione

**Definizione 3.** avendo ora definito questi simboli possiamo definire una forma sentenziale. Infatti è una stringa  $\alpha$  tale che:

$$\forall \alpha \in (V \cup T)^* \text{ tale che } S \rightarrow_G \alpha$$

**Definizione 4.** data  $G = (V, T, P, S)$  si ha che  $L(G) = \{w \in T^* \mid S \rightarrow_G w\}$  ovvero composto da stringhe terminali che sono derivabili o 0 o più passi.

**Esempio 4.** formare una grammatica CFG per il linguaggio:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\} = \{01, 0011, 000111, \dots\}$$

con  $x^n$  intendo una concatenazione di  $n$  volte  $x$  (che nel nostro caso sono 0 e 1).

posso scrivere:

$$0^n 1^n = 00^{n-1} 1^{n-1} 1$$

il nostro caso base sarà la stringa 01, Poi si ha:  $G = (V, T, P, S)$ ,  $T = \{0, 1\}$ ,  $V = \{S\}$ , il caso base  $S \rightarrow 01$  e  $S \rightarrow 0S1$  il caso passo è quindi: se  $w = 0^{n-1} 1^{n-1} \in L$  allora  $0w1 \in L$ .

Ora voglio dimostrare che  $000111 \in L$ , ovvero  $S \rightarrow_* 000111$ :

$$S \rightarrow 0S1 \rightarrow 00S11 \rightarrow 000S111$$



**Teorema 1.** data la grammatica  $G = \{V, T, P, S\}$  CFG e  $\alpha \in (V \cup T)^*$ . Si ha che vale  $S \rightarrow * \alpha$  sse  $S \rightarrow_{lm} * \alpha$  sse  $S \rightarrow_{rm} * \alpha$ . Con  $\rightarrow_{lm} *$  simbolo di left most derivation e  $\rightarrow_{rm} *$  simbolo di right most derivation

**Esempio 5.** formare una grammatica CFG per il linguaggio:

$$L = \{0^n 1^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$$

stavolta abbiamo anche la stringa vuota. Il caso base stavolta è  $S \rightarrow \varepsilon | 0S1$

**Esempio 6.** Fornisco una CFG per  $L = \{a^n | n \geq 1\} = \{a, aa, aaa, \dots\}$ . La base è  $a$

il passo è che se  $a^{n-1} \in L$  allora  $a^{n-1}a \in L$  ( o che  $aa^{n-1} \in L$ ).

Si ha la grammatica  $G = \{V, T, P, S\}$ ,  $V = \{S\}$ ,  $T = \{a\}$  e si hanno  $S \rightarrow a | Sa$  (o  $S \rightarrow a | aS$ ). Dimostro che  $a^3 \in L$ .

$$S \rightarrow Sa \rightarrow Saa \rightarrow aaa$$

oppure

$$S \rightarrow aS \rightarrow aaS \rightarrow aaa$$

**Esempio 7.** trovo una CFG per  $L = \{(ab)^n | n \geq 1\} = \{ab, abab, ababab, \dots\}$

La base è  $ab$

il passo è che se  $(ab)^{n-1} \in L$  allora  $(ab)^{n-1}ab \in L$ .

Si ha la grammatica  $G = \{V, T, P, S\}$ ,  $V = \{S\}$ ,  $T = \{a, b\}$  (anche se in realtà  $T = \{ab\}$ ) e si hanno  $S \rightarrow ab | Aab$ . Poi dimostro come l'esempio sopra

**Esempio 8.** trovo una CFG per  $L = \{a^n cb^n | n \geq 1\} = \{acb, aacbb, aaacbbb, \dots\}$

Il caso base è  $acb$  il passo è che se  $a^{n-1}cb^{n-1} \in L$  allora  $a^{n-1}cb^{n-1}acb \in L$

Si ha la grammatica  $G = \{V, T, P, S\}$ ,  $V = \{S\}$ ,  $T = \{a, b, c\}$  e si hanno  $S \rightarrow aSb | acb$ .

dimostro che  $aaaacbbbbb \in L$ :

$$S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaaaSbbb \rightarrow aaaacbbbbb$$

provo a usare anche una grammatica regolare, con le regole  $S \rightarrow aS | c$ ,  $c \rightarrow cB$  e  $B \rightarrow bB | b$ ;

$$S \rightarrow aS \rightarrow aaS \rightarrow aaC \rightarrow aacB \rightarrow aacb \dots$$

non si può dimostrare in quanto non si può imporre una regola adatta

**Esempio 9.**  $L = \{a^n cb^{n-1} | n \geq 2\}$ , con  $a^n cb^{n-1} = a^{n-1}acb^{n-1}$ .  $S \rightarrow aSb | aacb$ . Quindi:

$$S \rightarrow aSb \rightarrow aaacbb \in L$$

**Esempio 10.** cerco CFG per  $L = \{a^n c^k b^n \mid n, k > 0\}$ .  $a$  e  $b$  devono essere uguali, uso quindi una grammatica context free, mentre  $c$  genera un linguaggio regolare.

Si ha la grammatica  $G = \{V, T, P, S\}$ ,  $V = \{S, C\}$ ,  $T = \{a, b, c\}$  e si hanno  $S \rightarrow aSb \mid aCb$  e  $C \rightarrow cC \mid c$ . dimostro che  $aaaccbbb \in L$ ,  $n = 3$ ,  $k = 2$ :

$$S \rightarrow aSb \rightarrow aaSbb \rightarrow aaaCbbb \rightarrow aaacCbbb \rightarrow aaaccbbb$$

**Esempio 11.** scrivere CFG per  $L = \{a^n b^n c^k b^k \mid n, k \geq 0\}$

$$= \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid a^n b^n c^k b^k \mid n, k \geq 0\}$$

quindi  $L$  concatena due linguaggi  $L1$  e  $L2$ ,  $X = \{a^n b^n\}$  e  $Y = \{c^k d^k\}$ :

$$X \rightarrow aXb \mid \varepsilon$$

$$Y \rightarrow cYd \mid \varepsilon$$

$$S \rightarrow XY$$

voglio derivare  $abcd$ :

$$S \rightarrow XY \rightarrow XcYd \rightarrow aXbcYd \rightarrow aXbc\varepsilon d \rightarrow a\varepsilon bc\varepsilon d \rightarrow abcd$$

voglio derivare  $cd$

$$S \rightarrow XY \rightarrow Y \rightarrow cYd \rightarrow cd$$

Quindi se ho  $w \in L1, L2$ , ovvero appartenente ad una concatenazione di linguaggi prima uso le regole di un linguaggio, poi dell'altro e infine ottengo il risultato finale.

**Esempio 12.** scrivere CFG per  $L = \{a^n b^k c^k d^n \mid n > 0, k \geq 0\}$ .

$$S \rightarrow aSd \mid aXd$$

$$X \rightarrow bXc \mid \varepsilon$$

derivo  $aabcbdd$ :

$$S \rightarrow aSd \rightarrow aaXdd \rightarrow aabXcdd \rightarrow aabcbdd$$

**Esempio 13.** scrivere CFG per  $L = \{a^n c b^n c^m a d^m \mid n > 0, m \geq 1\}$ .

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid c$$

$$Y \rightarrow cUd \mid cad$$

$$S \rightarrow XY \rightarrow cY \rightarrow ccad$$

**Esempio 14.** scrivere CFG per  $L = \{a^{n+m}xc^nyd^m \mid n, m \geq 0\}$ .  $a^{n+m} = a^n a^m$  o  $a^m a^n$ . Si hanno 2 casi:

$$1. L = \{a^n a^m x c^n y d^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$2. L = \{a^m a^n x c^n y d^m \mid n, m \geq 0\}$$

ma solo  $L = \{a^m a^n x c^n y d^m \mid n, m \geq 0\}$  può generare una CFG (dove non si possono fare incroci, solo concatenazioni e inclusioni/innesti).

$$S \rightarrow aSd \mid Y$$

$$Y \rightarrow Xy$$

$$X \rightarrow aXc \mid x$$

si può fare in 2:

$$S \rightarrow aSd \mid Xy$$

$$X \rightarrow aXc \mid x$$

derivo con  $m = n = 1$ ,  $aa x c y d$ :

$$S \rightarrow aSd \rightarrow aXyd \rightarrow aaXcyd \rightarrow aa x c y d$$

**Esempio 15.** scrivere CFG per  $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$ .

$$L = \{\varepsilon, a, ab, aa, aab, aabb, aaa, aaab, aaabb, aaabbb, \dots\}$$

Se  $n \geq m$  allora  $\exists k \geq 0 \rightarrow n = m + k$ . Quindi:

$$l = \{a^{m+k} b^m \mid m, k \geq 0\}$$

si può scrivere in 2 modi:

$$1. l = \{a^m a^k b^m \mid m, k \geq 0\} \text{ quindi con innesto}$$

$$2. l = \{a^k a^m b^m \mid m, k \geq 0\} \text{ quindi con concatenazione}$$

entrambi possibili per una CFG:

1.

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aX \mid \varepsilon \text{ si può anche scrivere } X \rightarrow Xa \mid \varepsilon$$

$$Y \rightarrow aYb \mid \varepsilon$$

oppure

$$S \rightarrow aS \mid X$$

$$X \rightarrow aXb \mid \varepsilon$$

2.

$$S \rightarrow aSb|\varepsilon$$

$$X \rightarrow aX|\varepsilon$$

**Esempio 16.** scrivere CFG per  $L = \{a^n b^{m+n} c^h \mid m > h \geq 0, n \geq 0\}$ .

Se  $n > h$  allora  $\exists k \rightarrow n = h + k$ , quindi:

$$L = \{a^n b^{m+h+k} c^h \mid m > h \geq 0, n \geq 0\}$$

. ovvero:

$$L = \{a^n b^n b^k b^h c^h \mid m \geq 0, k > 0, h \geq 0\}$$

si ha:

$$S \rightarrow XYZ$$

$$X \rightarrow aXb|\varepsilon$$

$$Y \rightarrow Yb|b$$

$$Z \rightarrow bZc|\varepsilon$$

si può anche fare:

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb|\varepsilon$$

$$Y \rightarrow bYc|Z$$

$$Z \rightarrow bZ|b$$

**Esempio 17.** scrivere CFG per  $L = \{a^n b^m c^k \mid k > n + m, n, m \geq 0\}$ .

per  $n = m = 0, k = 1$  avrò la stringa  $c$ . se  $k > n + m$  allora  $\exists l > 0 \rightarrow k = n + m + l$  quindi:

$$L = \{a^n b^m c^{n+m+l} \mid l > 0, n, m \geq 0\}$$

$$= L = \{a^n b^m c^n c^m c^l \mid l > 0, n, m \geq 0\}$$

sistemando:

$$= L = \{a^n b^m c^l c^m c^n c^l \mid l > 0, n, m \geq 0\}$$

quindi:

$$S \rightarrow aSc|X$$

$$X \rightarrow bXc|Y$$

$$Y \rightarrow cY|c$$

**Esempio 18.** scrivere CFG per  $L = \{a^n x c^{n+m} y^h z^k d^{m+h} \mid n, m, k, h \geq 0\}$ .  
ovvero:

$$L = \{a^n x c^n c^m y^h z^k d^h d^m \mid n, m, k, h \geq 0\}$$

quindi avrò:

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXc \mid x$$

$$Y \rightarrow cYd \mid W$$

$$W \rightarrow yWd \mid X$$

$$Z \rightarrow zZ \mid \varepsilon$$

**Esempio 19.** vediamo un esempio di grammatica dipendente dal contesto:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

$G = \{V, T, P, S\} = \{(S, B, C, X)\} = \{(a, b, c), P, S\}$  ecco le regole di produzione (qui posso scambiare variabili a differenza delle context free):

$$1. S \rightarrow aSBC$$

$$2. S \rightarrow aBC$$

$$3. CB \rightarrow XB$$

$$4. XB \rightarrow XC$$

$$5. XC \rightarrow BC$$

$$6. aB \rightarrow ab$$

$$7. bB \rightarrow bb$$

$$8. bC \rightarrow bc$$

$$9. cC \rightarrow cc$$

vediamo un esempio di derivazione: per  $n = 1$  ho  $abc$  ovvero:

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$$

con  $n = 2$  ho  $aabbcc$ :  $S \rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aaBXBC \rightarrow aaBXCC \rightarrow aaBBCC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \rightarrow aabbccC \rightarrow aabbcc$

**Esempio 20.** vediamo un esempio di grammatica dipendente dal contesto:

$$L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$$

Si ha:

$$G = (\{S, X, C, D, Z\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

con le seguenti regole di produzione:

- $S \rightarrow aSc \mid aXc$
- $X \rightarrow bXD \mid bD$
- $DC \rightarrow CD$
- $DC \rightarrow DZ$
- $DZ \rightarrow CZ$
- $XZ \rightarrow CD$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$
- $cD \rightarrow cd$
- $dD \rightarrow dd$

provo a derivare  $aabbbccddd$  quindi con  $n = 2, m = 3$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSC \rightarrow aaXCC \rightarrow aabXDCC \rightarrow aabbXDDCC \rightarrow \\ &aabbbDDDCC \rightarrow aabbbCCDDD \rightarrow aabbbccddd \end{aligned}$$

**Esempio 21.** Sia  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contiene lo stesso numero di } a \text{ e } b\}$ :

$$S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$$

dimostro per induzione che è corretto:

- **caso base:**  $|w| = 0 \rightarrow w = \varepsilon$

- **caso passo:** si supponga che  $G$  produca tutte le stringhe (di lunghezza  $< n$ ) di  $\{a, b\}^*$  con lo stesso numero di  $a$  e  $b$  e dimostro che produce anche quelle di lunghezza  $n$ , sia:

$w \in \{a, b\}^* \mid |w| = n$  con  $a$  e  $b$  in egual numero,  $m(a) = m(b)$  con  $m()$  che indica il numero

quindi si ha che:

$$w = aw_1bw_2 \text{ o } w = bw_1aw_2$$

sia.

$$k_1 = m(a) \in w_1 = m(b) \in w_1$$

$$k_2 = m(a) \in w_2 = m(b) \in w_2$$

allora:

$$k_1 + k_2 + 1 = m(a) \in w = m(b) \in W$$

sapendo che  $|w_1| < n$  e  $|w_2| < n$  allora  $w_1$  e  $w_2$  sono egnerati da  $G$  per ipotesi induttiva

### 1.1.1 Alberi Sintatici

**Definizione 5.** Data una grammatica CFG,  $G = \{V, T, P, S\}$  un **albero sintattico** per  $G$  soddisfa le seguenti condizioni:

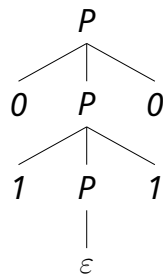
- ogni nodo interno è etichettato con una variabile
- ogni foglia è anch'essa etichettata con una variabile o col simbolo di terminale  $T$  o con la stringa vuota  $\varepsilon$  (in questo caso la foglia è l'unico figlio del padre)
- se un nodo interno è etichettato con  $A$  i suoi figli saranno etichettati con  $X_1, \dots, X_k$  e  $A \rightarrow X_1, \dots, X_k$  sarà una produzione di  $G$ . Se un  $X_i$  è  $\varepsilon$  sarà l'unica figlio e  $A \rightarrow \varepsilon$  sarà comunque una produzione di  $G$

La concatenazione in ordine delle foglie viene detto **prodotto dell'albero**

**Esempio 22.** Usiamo l'esempio delle stringhe palindrome:

$$P \rightarrow 0P0 \mid 1P1 \mid \varepsilon$$

sia il seguente albero sintattico:

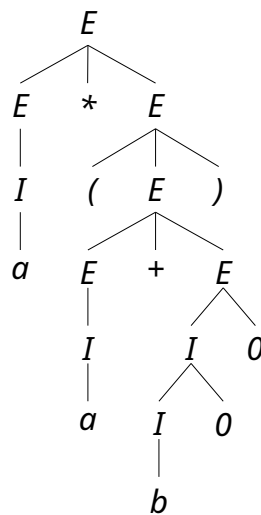


**Esempio 23.** Si ha:

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$

un albero sintattico per  $a * (a + b00)$  può essere:

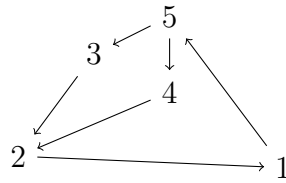




Data una CFG si ha che i seguenti cinque enunciati si equivalgono:

1. la procedura di inferenza ricorsiva stabilisce che una stringa  $w$  di simboli terminali appartiene al linguaggio  $L(A)$  con  $A$  variabile
2.  $A \rightarrow^* w$
3.  $A \rightarrow_{lm}^* w$
4.  $A \rightarrow_{rm}^* w$
5. esiste un albero sintattico con radice  $A$  e prodotto  $w$

queste 5 proposizioni si implicano l'uni l'altra:



vediamo qualche dimostrazione di implicazione tra queste proposizioni:

da 1 a 5. si procede per induzione:

- **caso base:** ho un livello solo (una sola riga),  $\exists A \rightarrow w$ :

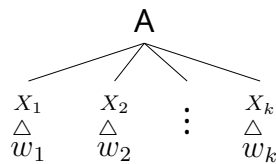
$$\begin{array}{c} A \\ \triangle \\ w \end{array}$$

- **caso passo:** suppongo vero per un numero di righe  $\leq n$ , lo dimostro per  $n + 1$  righe:

$$A \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$w = w_1, w_2, \dots, w_k$$

ovvero, in meno di  $n + 1$  livelli:



□

da 5 a 3. procedo per induzione:

- **caso base (n=1):**  $\exists A \rightarrow w$  quindi  $A \rightarrow_{lm} w$ , come prima si ha un solo livello:

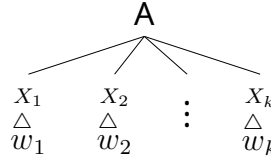
$$\begin{array}{c} A \\ \triangle \\ w \end{array}$$

- **caso passo:** suppongo che la proprietà valga per ogni albero di profondità minore uguale a  $n$ , dimostro che valga per gli alberi profondi  $n + 1$ :

$$A \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_k$$

$$w = w_1, w_2, \dots, w_k$$

ovvero, in meno di  $n + 1$  livelli:



$$A \rightarrow_{lm} X_1, X_2, \dots, X_k$$

$x_1 \rightarrow_{lm}^* w_1$  per ipotesi induttiva si ha un albero al più di  $n$  livelli quindi:

$$A \rightarrow_{lm} X_1, \dots, X_k \rightarrow_{lm}^* w_1, X_2, \dots, X_k \rightarrow_{lm}^* \dots \rightarrow_{lm}^* w_1, \dots, w_k = w$$

**Esempio 24.**

$$E \rightarrow I \rightarrow Ib \rightarrow ab$$

$$\alpha E \beta \rightarrow \alpha I \beta \rightarrow \alpha Ib \beta \rightarrow \alpha ab \beta, \quad \alpha, \beta \in (V \cup T)^*$$

□

**Esempio 25.** Mostro l'esistenza di una derivazione sinistra dell'albero sintattico di  $a * (a + b00)$ :

$$\begin{aligned} & E \rightarrow_{lm}^* E * E \rightarrow_{lm}^* I * E \rightarrow_{lm}^* a * E \rightarrow_{lm}^* a * (E) \rightarrow_{lm}^* a * (E + E) \rightarrow_{lm}^* \\ & a * (I + E) \rightarrow_{lm}^* a * (a + E) \rightarrow_{lm}^* a * (a + I) \rightarrow_{lm}^* a + (a + I0) \rightarrow_{lm}^* a * (a + I00) \rightarrow_{lm}^* a * (a + b00) \end{aligned}$$

### 1.1.2 Grammatiche ambigue

**Definizione 6.** Una grammatica è definita ambigua se esiste una stringa  $w$  di terminali che ha più di un albero sintattico

**Esempio 26.** vediamo un esempio:

1.  $E \rightarrow E + E \rightarrow E + E * E$  ovvero:



2.  $E \rightarrow E * E \rightarrow E + E * E$  ovvero:



si arriva a due stringhe uguali ma con alberi diversi. Introduciamo delle categorie sintattiche, dei vincoli alla produzione delle regole:

1.  $E \rightarrow T \mid E + T$
2.  $T \rightarrow F \mid T * F$
3.  $F \rightarrow I \mid (E)$
4.  $I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$

Possono esserci più derivazioni di una stringa ma l'importante è che non ci siano alberi sintattici diversi. Capire se una CFG è ambigua è un problema indecidibile

**Esempio 27.** vediamo un esempio:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid SS \mid iS \mid iSeS$$

con  $S$ =statement,  $i$ =if e  $e$ =else. Considero due derivazioni:

1.  $S \rightarrow iSeS \rightarrow iiSeS \rightarrow iie$ :



2.  $S \rightarrow iS \rightarrow iiSeS \rightarrow iieS \rightarrow iie$ :



Si ha quindi una grammatica ambigua

**Teorema 2.** Per ogni CFG, con  $G = (V, T, P, S)$ , per ogni stringa  $w$  di terminali si ha che  $w$  ha due alberi sintattici distinti sse ha due derivazioni sinistre da  $S$  distinte.

Se la grammatica non è ambigua allora esiste un'unica derivazione sinistra da  $S$

### Linguaggi inerentemente ambigui

**Definizione 7.** Un linguaggio  $L$  è inerentemente ambiguo se tutte le grammatiche CFG per tale linguaggio sono a loro volta ambigue

**Esempio 28.** Sia  $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 1\} \cup \{a^n b m n c^m d^n \mid n, m \geq 1\}$  si ha quindi un CFL formato dall'unione di due CFL.  $L$  è inerentemente ambiguo e generato dalla seguente grammatica:

- $S \rightarrow AB \mid C$

- $A \rightarrow aAb \mid ab$
- $B \rightarrow cBd \mid cd$
- $C \rightarrow aCd \mid aDd$
- $D \rightarrow bDc \mid bc$

si possono avere due derivazioni:

1.  $S \rightarrow_{lm} AB \rightarrow_{lm} aAbB \rightarrow_{lm} aabbB \rightarrow_{lm} aabbcBd \rightarrow_{lm} aabbccdd$
2.  $S \rightarrow_{lm} C \rightarrow_{lm} aCd \rightarrow_{lm} aaBdd \rightarrow_{lm} aabBcdd \rightarrow_{lm} aabbccdd$

a generare problemi sono le stringhe con  $n=m$  perché possono essere prodotte in due modi diversi da entrambi i sottolinguaggi. Dato che l'intersezione tra i due sottolinguaggi non è vuota si ha che  $L$  è ambiguo

### 1.1.3 Grammatiche Regolari

Sono le grammatiche che generano i linguaggi regolari (quelli del terzo tipo) che sono casi particolari dei CFL.

Si ha la solita grammatica  $G = (V, T, P, S)$  con però vincoli su  $P$ :

- $\varepsilon$  si può ottenere solo con  $S \rightarrow \varepsilon$
- le produzioni sono tutte lineari a destra ( $A \rightarrow aA$  o  $A \rightarrow a$ ) o a sinistra ( $A \rightarrow Ba$  o  $A \rightarrow a$ )

**Esempio 29.**  $I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$  è una grammatica con le produzioni lineari a sinistra.

Potremmo pensarlo a destra  $I \rightarrow a \mid b \mid aI \mid bI \mid 0I \mid 1I$ .

Vediamo esempi di produzione con queste grammatiche:

- con  $I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$  possiamo derivare  $ab01b0$ :

$$I \rightarrow I0 \rightarrow Ib0 \rightarrow I1b0 \rightarrow I01b0 \rightarrow Ib01b0 \rightarrow ab01b0$$

- con  $I \rightarrow a \mid b \mid aI \mid bI \mid 0I \mid 1I$  invece non riusciamo a generare nulla:

$$I \rightarrow 0I \rightarrow 0a$$

definisco quindi un'altra grammatica (con una nuova categoria sintattica):

$$I \rightarrow aJ \mid bJ$$

$$J \rightarrow a \mid b \mid aJ \mid bJ \mid 0J \mid 1J$$

che però non mi permette di terminare le stringhe con 0 e 1, la modifico ancora ottenendo:

$$I \rightarrow aJ \mid bJ$$

$$J \rightarrow a \mid b \mid aJ \mid bJ \mid 0J \mid 1J \mid 0 \mid 1$$

e questo è il modo corretto per passare da lineare sinistra a lineare destra

**Esempio 30.** Sia  $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$  con  $S \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0S \mid 1S$ . Si ha quindi:

$$L(G) = \{0, 1\}^*$$

si hanno comunque due proposizioni ridondanti, riducendo trovo:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1S$$

con solo produzioni lineari a destra. Con produzioni lineari a sinistra ottengo:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid S0 \mid S1$$

**Esempio 31.** Trovo una grammatica lineare destra e una sinistra per  $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ :

- **lineare a destra:** si ha  $G = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$  e quindi:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aS \mid bB$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

ma non si possono generare stringhe di sole  $b$ , infatti:

$$S \rightarrow aS \rightarrow abB \rightarrow abbB \rightarrow abbb$$

ma aggiungere  $\varepsilon$  a  $B$  **non è lecito**. posso però produrre la stessa stringa da due derivazioni diverse:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aS \mid bB \mid b$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

che risulta quindi la nostra lineare a destra

- **lineare a sinistra:** si ha  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$  e quindi:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid Sb \mid Ab \mid a$$

$$A \rightarrow Aa \mid a$$

**Esempio 32.** Trovo una grammatica lineare destra e una sinistra per  $L = \{ab^n cd^m e \mid n \geq 0, m > 0\}$ :

- **lineare a destra:** si ha  $G = (\{S, A, B, E\}, \{a, b, c, d, e\}, P, S)$  e quindi:

$$S \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow bA \mid cB$$

$$B \rightarrow dB \mid dE$$

$$E \rightarrow e$$

- **lineare a sinistra:** si ha  $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c, d, e\}, P, S)$  e quindi:

$$S \rightarrow Xe$$

$$A \rightarrow Xd \mid Yd$$

$$B \rightarrow Zc$$

$$E \rightarrow a \mid Zb$$

quindi se per esempio ho la stringa "ciao" si ha:

- **lineare a destra:**

$$S \rightarrow Ao$$

$$A \rightarrow Ba$$

$$B \rightarrow Ei$$

$$E \rightarrow c$$

- **lineare a sinistra:**

$$S \rightarrow cA$$

$$A \rightarrow iB$$

$$B \rightarrow aE$$

$$E \rightarrow o$$

**Esempio 33.** A partire da  $G = (\{S, T\}, \{0, 1\}, P, S)$  con:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid 0S \mid 1T$$

$$T \rightarrow 0T \mid 1S$$

trovo come è fatto  $L(G)$ :

$$L(G) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ha un numero di 1 pari}\}$$

**Esempio 34.** fornire una grammatica regolare a destra e sinistra per:

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ha almeno uno 0 o almeno un 1}\}$$

Si ha che tutte le stringhe tranne quella vuota contengono uno 0 o un 1 quindi  $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ :

- **lineare a destra:**

$$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0S \mid 1S$$

- **lineare a sinistra:**

$$S \rightarrow 0 \mid 1 \mid S0 \mid S1$$

### 1.1.4 Espressioni Regolari (Regex)

le regex sono usate per la ricerca di un pattern in un testo o negli analizzatori lessicali. Una regex denota il linguaggio e non la grammatica. Si hanno le seguenti operazioni tra due linguaggi  $L$  e  $M$ :

- **unione:** dati  $L, M \in \Sigma^*$ , l'unione  $L \cup M$  è l'insieme delle stringhe che si trovano in entrambi i linguaggi o solo in uno dei due

**Esempio 35.**

$$L = \{001, 10, 111\}$$

$$M = \{\varepsilon, 001\}$$

$$L \cup M = \{\varepsilon, 01, 10, 111, \varepsilon\}$$

si ha che:

$$L \cup M = M \cup L$$

- **concatenazione:** dati  $L, M \in \Sigma^*$ , la concatenazione  $L \cdot M$  (o  $LM$ ) è l'insieme di tutte le stringhe ottenibili concatenandone una di  $L$  a una di  $M$



**Esempio 36.**

$$L = \{001, 10, 111\}$$

$$M = \{\varepsilon, 001\}$$

$$L \cdot M = \{001, 001001, 10, \dots\}$$

si ha che:

$$L \cdot M \neq M \cdot L$$

- si definiscono:

$$- L \cdot L = L^2, L \cdot L \cdot L = L^3 \text{ etc...}$$

$$- L^1 = L$$

$$- L^0 = \{\varepsilon\}$$

- **chiusura di Kleene:** dato  $L \subseteq \Sigma^*$  si ha che la chiusura di Kleene di  $L$  è:

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

ricordando che  $L^0 = \varepsilon$

**Esempio 37.** Sia  $L = \{0, 11\}$ , si ha:

$$L^0 = \varepsilon$$

$$L^1 = L = \{0, 11\}$$

$$L^2 = L \cdot L = \{00, 011, 110, 1111\}$$

$$L^3 = L \cdot L \cdot L = L^2 \cdot L = \{000, 0110, 1100, 11110, 0011, 01111, 11011, 111111\}$$

vediamo dei casi particolari:

- $L = \{0^n \mid n \geq 0\}$  implica  $|L| = \infty$  e quindi, essendo  $L^i = L$ ,  $i \geq 1$  e quindi  $|L^i| = \infty$ ,  $|L^*| = \infty$ . Si ha quindi:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup \dots \cup L^i = L$$

- $L = \emptyset$  implica  $L^0 = \{\varepsilon\}$ ,  $L^2 = L \cdot L = \emptyset$  e così via per ogni concatenazione di  $L$ . Si ha quindi:

$$L^* = L^0 = \{\varepsilon\}$$

–  $L = \{\varepsilon\}$  implica  $L^0 = \{\varepsilon\} = L = L^1 = L^2 = \dots$ , si ha quindi:

$$L^* = \{\varepsilon\} = L$$

L'insieme vuoto e l'insieme contenente la stringa vuota hanno le uniche chiusure di Kleene finite

**Definizione 8.** *Si riporta la definizione ricorsiva di un'espressione regolare:*

• **casi base:** *si hanno tre casi base:*

1.  $\varepsilon$  e  $\emptyset$  sono espressioni regolari
2. se  $a \in \Sigma$   $a$  è un'espressione regolare,  $L(a) = \{a\}$
3. le variabili che rappresentano linguaggi regolari sono espressioni regolari,  $L(L) = L$

• **casi passo:** *si hanno i 4 casi passo:*

1. **unione:** se  $E$  e  $F$  sono espressioni regolari allora anche  $E + F = E \cup F$  è un'espressione regolare e si ha:

$$L(E + F) = L(E) \cup L(F)$$

2. **concatenazione:** se  $E$  e  $F$  sono espressioni regolari allora anche  $EF = E \cdot F$  è un'espressione regolare e si ha:

$$L(EF) = L(E) \cdot L(F)$$

3. **chiusura:** se  $E$  è un'espressione regolare allora  $E^*$  è un'espressione regolare e si ha:

$$L(E^*) = (L(E))^*$$

4. **parentesi:** se  $E$  è un'espressione regolare allora  $(E)$  è un'espressione regolare e si ha:

$$L((E)) = L(E)$$

**Esempio 38.** *trovo regex per l'insieme di stringhe in  $\{0,1\}^*$  che consistono in 0 e 1 alternati:*

$$01 \rightarrow \{01\}$$

$$(01)^* \rightarrow \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, \dots\}$$

$$(01)^* + (10)^* \rightarrow \{\varepsilon, 01, 10, 0101, 1010, \dots\}$$

*ma posso volere diverse quantità di 0 e 1, sempre mantenendo l'alternanza, metto o uno 0 o un 1 davanti a quanto ottenuto appena sopra:*

$$(01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^* \rightarrow \{\varepsilon, 01, 10, 010, 101, \dots\}$$

*non è comunque l'unica soluzione, si può avere:*

$$(\varepsilon + 1)(01)^*(\varepsilon + 0) \rightarrow \{\varepsilon, 01, 10, 010, 101, \dots\}$$

*oppure ancora:*

$$(\varepsilon + 0)(10)^*(\varepsilon + 1)$$

Si ha una precedenza degli operatori, in ordine di precedenza (si valuta da sinistra a destra):

1. chiusura di Kleene  $*$
2. concatenazione  $\cdot$ , che è associativo  $((E \cdot F) \cdot G = E \cdot (F \cdot G))$  ma non è commutativo  $(E \cdot F \neq F \cdot E)$
3. unione  $+$  che è associativa  $((E+F)+G = E+(F+G))$  ed è commutativo  $(E + F = F + E)$
4. infine le parentesi

si hanno anche delle proprietà algebriche:

- due espressioni regolari sono equivalenti se denotano lo stesso linguaggio
- due espressioni regolari con variabili sono equivalenti se lo sono  $\forall$  assegnamento alle variabili
- l'unione è commutativa e associativa, la concatenazione è solo associativa
- si definiscono:

- **identità:** ovvero un valore unito all'identità è pari a se stesso (elemento neutro della somma  $0 + x = x + 0 = x$ ).  $\emptyset$  è identità per l'unione ( $\emptyset + L = L + \emptyset = L$ ),  $\{\varepsilon\}$  è identità per la concatenazione ( $\varepsilon L = L\varepsilon = L$ )
- **annichilitore:** ovvero un valore concatenato all'annichilitore da l'annichilitore (l'elemento nullo del prodotto  $0x = x0 = 0$ ).  $\emptyset$  è l'annichilitore per la concatenazione ( $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$ )
- **distributività:** dell'unione rispetto alla concatenazione (che non è commutativa):
  - **distributività sinistra:**  $L(M + N) = LM + LN$
  - **distributività destra:**  $(M + N)L = ML + NL$
- **idempotenza:**  $L + L = L$
- $(L^*)^* = L^*$
- $\emptyset^* = \varepsilon$  infatti  $L(\emptyset) = \{\varepsilon\} \cup L(\emptyset) \cup L(\emptyset) \cdot L(\emptyset) \cup \dots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \emptyset \dots = \varepsilon$
- $\varepsilon^* = \varepsilon$  infatti  $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \cup L(\varepsilon) \cup L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup \dots = \{\varepsilon\} = L(\varepsilon)$
- $L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$  (quindi con almeno un elemento che non sia la stringa vuota)
- $L^* = l^+ + \varepsilon$

**Esempio 39.** *Ho  $ER = (0 + 1)^*0^*(01)^*$ :*

- *001 fa parte del linguaggio? Si:  $\varepsilon \cdot 0 \cdot 01$*
- *1001 fa parte del linguaggio? Si:  $1 \cdot 0 \cdot 01$*
- *0101 fa parte del linguaggio? Si:  $\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot 0101$*
- *0 fa parte del linguaggio? Si:  $\varepsilon \cdot 0 \cdot \varepsilon$*
- *10 fa parte del linguaggio? Si:  $1 \cdot 0 \cdot \varepsilon$*

$L((0+1)^*) = (L(0+1))^* = (L(0)+L(1))^* = (\{0\} \cup \{1\})^* = (\{0, 1\})^* = \{0, 1\}^*$   
 ovvero tutte le combinazioni di 0 e 1

Si ricorda che:

$$(0 + 1)^* \neq 0^* + 1^*$$

**Esempio 40.** *ho*  $ER = ((01)^* \cdot 10 \cdot (0 + 1)^*)^*$

- *0101 fa parte del linguaggio? No*
- *01000 fa parte del linguaggio? No*
- *01011 fa parte del linguaggio? No*
- *10111 fa parte del linguaggio? Si,  $\varepsilon \cdot 10 \cdot 111$*
- *101010 fa parte del linguaggio? Si, prendo  $10 \cdot 1010$*
- *101101 fa parte del linguaggio? Si,  $\varepsilon \cdot 10 \cdot 1$  due volte*
- *0101100011 fa parte del linguaggio? Si,  $0101 \cdot 10 \cdot 0011$  (0011 lo posso prendere da  $(0 + 1)^*$ )*

**Esempio 41.** *ho*  $ER = ((01)^* \cdot 10 \cdot (0 + 1))^*$

- *0101 fa parte del linguaggio? No*
- *01000 fa parte del linguaggio? No*
- *01011 fa parte del linguaggio? No*
- *10111 fa parte del linguaggio? No*
- *101010 fa parte del linguaggio? No*
- *101101 fa parte del linguaggio? Si,  $\varepsilon \cdot 10 \cdot 1$  due volte*
- *0101100011 fa parte del linguaggio? No*

**Esempio 42.** *Da*  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  *stringhe contenenti almeno una volta 01 quindi:*

$$(0 + 1)^* 01 (0 + 1)^*$$

**Esempio 43.** *ho*  $ER = (00^*1^*)^*$ , *quindi:*

$$L = \{\varepsilon, 0, 01, 000, 001, 010, 011\} = \{\varepsilon\} \cup \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ che inizia con } 0\}$$

**Esempio 44.** *ho*  $ER = a(a + b)^*b$ , *quindi:*

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ inizia con } a \text{ e termina con } b\}$$

**Esempio 45.** *ho*  $ER = (0^*1^*)^*000(0 + 1)^*$ , *quindi, sapendo che*  $\{0, 1\}^*$  *mi permette tutte le combinazioni che voglio come*  $(0 + 1)^*$ :

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ come voglio con tre } 0 \text{ consecutivi}\}$$

**Esempio 46.** ho  $ER = a(a+b)^*c(a+b)^*c(a+b)^*b$ , quindi:

$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ inizia con } a, \text{ termina con } b \text{ e contiene almeno due } c, \\ \text{eventualmente non adiacenti}\}$

**Esempio 47.** Da  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  ogni 1 è seguito da 0, a meno che non sia l'ultimo carattere, ovvero 11 non compare quindi:

$$(10 + 0)^*(\varepsilon + 1)^*$$

**Esempio 48.** cerco  $ER$  per  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  stringhe contenenti un numero pari di 1:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

oppure:

$$(0 + 10^*1)^*$$

**Esempio 49.** cerco  $ER$  per  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  stringhe contenenti un numero dispari di 1:

$$(0^*10^*)^*0^*10^*$$

oppure:

$$(0 + 10^*1)^*10^*$$

**Esempio 50.** cerco  $ER$  per  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  stringhe contenenti un numero divisibile per 3 di 0:

$$(1^*01^*01^*0)^*1^*$$

**Esempio 51.** cerco  $ER$  per  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  stringhe contenenti al più una coppia di 1 consecutivi:

$$(10 + 0)^*(11 + 1 + \varepsilon)(01 + 0)^*$$

**Esempio 52.** cerco  $ER$  per  $L \subseteq \{a, b, c\}^*$  stringhe contenenti almeno una  $a$  e almeno una  $b$ :

$$c^*(a(a+c)^*b + b(b+c)^*a)(a+b+c)^*$$

## 1.2 Automi

un automa a stati finiti ha un insieme di stati e un controllo che si muove da stato a stato in risposta a input esterni. Si ha una distinzione:

- **automi deterministici:** dove l'automa non può essere in più di uno stato per volta
- **automi non deterministici:** dove l'automa può trovarsi in più stati contemporaneamente

### 1.2.1 Automi deterministici

Un automa a stati finiti deterministico (*DFA*), un automa che dopo aver letto una qualunque sequenza di input si trova in un singolo stato. Il termine *deterministico* concerne il fatto che per ogni input esiste un solo stato verso il quale l'automa passa dal suo stato corrente. Un automa a stati finiti deterministico consiste nelle seguenti parti:

- un insieme finito di stati, spesso indicato con  $Q$
- un insieme finito di simboli di input, spesso indicato con  $\Sigma$
- una funzione di transizione, che prende come argomento uno stato e un simbolo di input e restituisce uno stato. La funzione di transizione sarà indicata comunemente con  $\delta$ . Nella rappresentazione grafica informale di automi  $\delta$  è rappresentata dagli archi tra gli stati e dalle etichette sugli archi. Se  $q$  è uno stato e  $a$  è un simbolo di input,  $\delta(q, a)$  è lo stato  $p$  tale che esiste un arco etichettato con  $a$  da  $q$  a  $p$ <sup>2</sup>
- uno stato iniziale, uno degli stati in  $Q$
- un insieme di stati finali, o accettanti,  $F$ . L'insieme  $F$  è un sottoinsieme di  $Q$

Nel complesso un DFA è rappresentato in maniera concisa con l'enumerazione dei suoi elementi, quindi con la quintupla:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

con  $A$  nome del DFA,  $Q$  insieme degli stati,  $\Sigma$  rappresentante i simboli di input,  $\delta$  la sua funzione di transizione,  $q_0$  il suo stato iniziale e  $F$  l'insieme degli stati accettanti.

Vediamo come decidere se accettare o meno una stringa (sequenza di caratteri) in input mediante un DFA.

Ho una sequenza in input  $a_1 \dots a_n$ . Parto dallo stato iniziale  $q_0$ , consultando la funzione di transizione  $\delta$ , per esempio  $\delta(q_0, a_1) = q_1$  e trovo lo stato in cui il DFA entra dopo aver letto  $a_1$ . Poi passo a  $\delta(q_1, a_2) = q_2$  e così via,  $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$  fino a ottenere  $q_n$ . Se  $q_n$  è elemento di  $F$  allora  $a_1 \dots a_n$  viene accettato, altrimenti viene rifiutato.

**Esempio 53.** *specifico DFA che accetta tutte le stringhe binarie in cui compare la sequenza 01:*

$$L = \{w \mid w \text{ è della forma } x01y, \text{ con } x \text{ e } y \text{ pari a } 0 \text{ o } 1\} = \{01, 11010, 100011, \dots\}$$

o anche:

$$L = \{x01y | x, y \in \{0, 1\}^*\}$$

abbiamo quindi:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

ragioniamo sul fatto che  $A$ :

1. se ha "già visto"  $01$ , accetterà qualsiasi input
2. pur non avendo ancora visto  $01$ , l'input più recente è stato  $0$ , cosicché se ora vede un  $1$  avrà visto  $01$
3. non ha ancora visto  $01$ , ma l'input più recente è nullo (siamo all'inizio), in tal caso  $A$  non accetta finché non vede uno  $0$  e subito dopo un  $1$

la terza condizione rappresenta lo stato iniziale. All'inizio bisogna vedere uno  $0$  e poi un  $1$ . Ma se nello stato  $q_0$  si vede per primo un  $1$  allora non abbiamo fatto alcun passo verso  $01$ , e dunque dobbiamo permanere nello stato  $q_0$ ,  $\delta(q_0, 1) = q_0$ . D'altra parte se nello stato iniziale vedo  $0$  siamo nella seconda condizione, uso quindi  $q_2$  per questa condizione, si avrà quindi  $\delta(q_0, 0) = q_2$ . Vedo ora le transizioni di  $q_2$ , se vedo  $0$  ho che  $0$  è l'ultimo simbolo incontrato quindi uso nuovamente  $q_2$ ,  $\delta(q_2, 0) = q_2$ , in attesa di un  $1$ . Se arriva  $1$  passo allo stato accertante  $q_1$  corrispondente alla prima condizione,  $\delta(q_2, 1) = q_1$ . Ora abbiamo incontrato  $01$  quindi può succedere qualsiasi cosa e dopo qualsiasi cosa accada potremo nuovamente aspettarci qualsiasi cosa, ovvero  $\delta(q_1, 0) = \delta(q_1, 1) = q_1$ . Si deduce quindi che:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \text{ e } F = \{q_1\}$$

quindi:

$$A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$$

con in totale le seguenti transizioni:

$$\delta(q_0, 1) = q_0$$

$$\delta(q_0, 0) = q_2$$

$$\delta(q_2, 0) = q_2$$

$$\delta(q_2, 1) = q_1$$

$$\delta(q_1, 0) = q_1$$

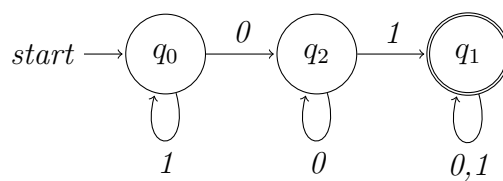
$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

posso rappresentarle in maniera tabulare, con lo stato iniziale indicato da  $\rightarrow$  e quelli accettanti con  $*$ :



| $\delta$          | $0$   | $1$   |
|-------------------|-------|-------|
| $\rightarrow q_0$ | $q_1$ | $q_0$ |
| $* q_1$           | $q_1$ | $q_1$ |
| $q_2$             | $q_2$ | $q_1$ |

o col diagramma di transizione:



**Esempio 54.** Trovo automa per:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ che contiene un numero pari di } b\}$$



ovvero se da  $q_0$  vado a  $q_1$  sono obbligato ad generare due  $b$ , dato che il nodo accettato è  $q_0$ . In entrambi i nodi posso generare quante  $a$  voglio.

**Esempio 55.** Trovo automa per:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ che contiene un numero dispari di } b\}$$



ovvero se da  $q_0$  vado a  $q_1$  sono obbligato ad generare una sola  $b$ , dato che il nodo accettato è  $q_1$ . In entrambi i nodi posso generare quante  $a$  voglio e posso tornare da  $q_1$  a  $q_0$  per generare altre  $b$ .

**Esempio 56.** Trovo automa per:

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = 0^n 1^m\}$$

vediamo i vari casi: **Si ha che  $q_E$  è lo stato pozzo dove vanno le stringhe venute male**

- $n, m \geq 0$ :



ovvero posso non generare nulla e uscire subito con  $q_0$ , generare solo un  $1$  e passare a  $q_1$  e uscire oppure generare  $0$  e  $1$  a piacere con l'ultimo stato o generare  $0$  a piacere dal primo e  $1$  a piacere dal secondo.

- $n \geq 0 \ m > 0$ :



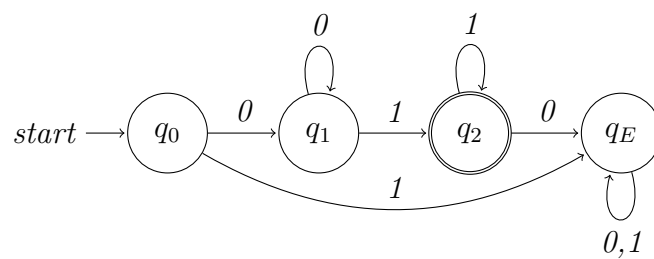
ovvero come l'esempio sopra solo che non posso uscire in  $q_0$  in quanto almeno un 1 deve essere per forza generato

- $n > 0 \ m \geq 0$ :



CHIARIRE

- $n, m > 0$ :



CHIARIRE

**Esempio 57.** Trovo automa per:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ e dispari di } b\}$$



**Esempio 58.** Trovo automa per:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ seguito da uno dispari di } b\}$$

$$L = \{a^{2n}b^{2k+1} \mid j, k \geq 0\}$$



ovvero in tabella:

| $\delta$          | $a$   | $b$   |
|-------------------|-------|-------|
| $\rightarrow q_0$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $q_1$             | $q_0$ | $q_E$ |
| $* q_2$           | $q_E$ | $q_3$ |
| $q_3$             | $q_E$ | $q_2$ |
| $q_E$             | $q_E$ | $q_E$ |

**Esempio 59.** Trovo automa per:

$$L = \{a^{2k+1}b^{2h} \mid h, k \geq 0\}$$



**Esempio 60.** Trovo automa per:

$$L = \{a^{2n+1}b^{2k+1} \mid n, k \geq 0\}$$



**Esempio 61.** Trovo automa per:

$$L = \{x010y \mid x, y \in \{0, 1\}^*\}$$



### 1.2.2 Automi non deterministici

Un automa a stati finiti non deterministici (*NFA*) può trovarsi in diversi stati contemporaneamente. Come i DFA accettano linguaggi regolari e spesso sono più semplici da trattare rispetto ai DFA.

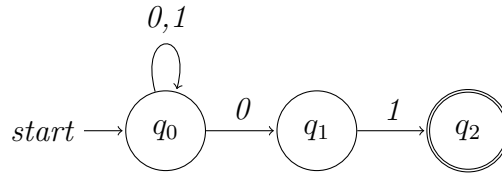
Un NFA è definito come un DFA ma si ha un diverso tipo di transizione  $\delta$ , che ha sempre come argomenti uno stato e un simbolo di input ma restituisce zero o più stati.

**Esempio 62.** Sia  $L = \{x01 \mid x \in \{0, 1\}^*\}$  ovvero il linguaggio formato da tutte le stringhe binarie che terminano in 01.

Avremo il seguente automa deterministico:



che diventa il seguente NFA:



quindi con:

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_2\}$$

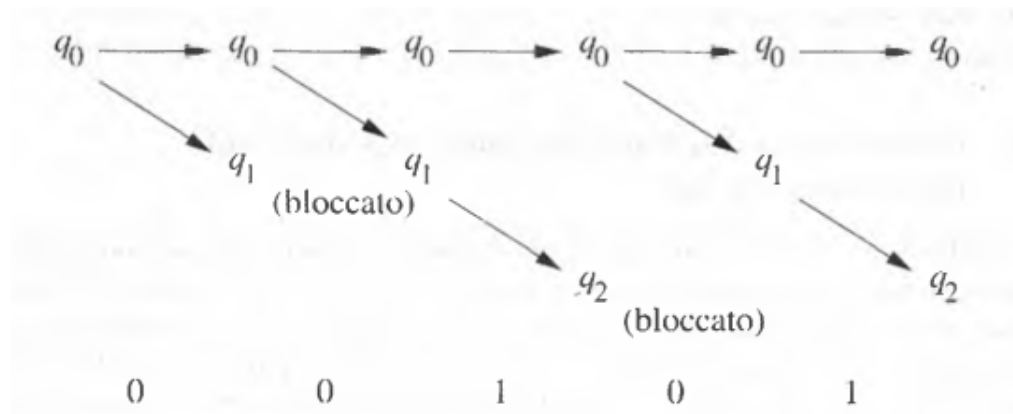
$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

in forma tabulare:

| $\delta$          | 0              | 1           |
|-------------------|----------------|-------------|
| $\rightarrow q_0$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_1\}$   |
| $q_1$             | $\emptyset$    | $\{q_2\}$   |
| $*q_0$            | $\emptyset$    | $\emptyset$ |

vediamone la simulazione per la stringa 00101:



ovvero si parte dallo stato iniziale, quando viene letto 0 si passa a  $q_0$  e  $q_1$ , poi viene letto il secondo 0 quindi  $q_0$  va nuovamente verso  $q_0$  e  $q_1$  mentre il primo  $q_1$  muore non avendo transizioni su 0. Arriva poi l'1 quindi  $q_0$  va solon verso  $q_0$  e  $q_1$  verso  $q_2$  e sarebbe accettante ma l'input non è finito. Ora arriva 0 e  $q_2$  si blocca mentre  $q_0$  va sia in  $q_0$  che in  $q_1$ . Arriva infine un 1 che manda  $q_0$  in  $q_0$  e  $q_1$  in  $q_2$  che è accettante e non avendo altri input si è dimostrata l'appartenenza della stringa al linguaggio

definisco quindi un NFA come una quintupla:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

con, a differenza dei DFA:

$$\delta : Q \times F \rightarrow 2^Q$$

Possiamo ora definire  $\delta$ , delta cappuccio che prende in ingresso uno stato e l'intera stringa  $w$ . Definisco ricorsivamente:

- **caso base:** se  $|w| = 0$  ovvero se  $W = \varepsilon$  si ha:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

- **caso passo:** se  $|w| > 0$ , allora  $W = xa$ ,  $a \in \Sigma$  e  $x \in \Sigma^*$ . Posto  $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$  si ha:

$$\hat{\delta}(q, w) = \cup \delta(p_i, a)$$

Per il linguaggio  $L$  accettato dall'automa si ha:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

**Esempio 63.** Automa per  $L = \{x010y \mid x, y \in \{0, 1\}^*\}$  ovvero tutte le stringhe con dentro la sequenza 010:



Troviamo ora un algoritmo che trasformi un NFA in un DFA. Dall'ultimo esempio ricavo:

|                       | 0              | 1              |
|-----------------------|----------------|----------------|
| $\emptyset$           | $\emptyset$    | $\emptyset$    |
| $\rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$      |
| $\{q_1\}$             | $\emptyset$    | $\{q_2\}$      |
| $* \{q_2\}$           | $\emptyset$    | $\emptyset$    |
| $\{q_0, q_1\}$        | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |
| $* \{q_0, q_2\}$      | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$      |
| $* \{q_1, q_2\}$      | $\emptyset$    | $\{q_2\}$      |
| $* \{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |

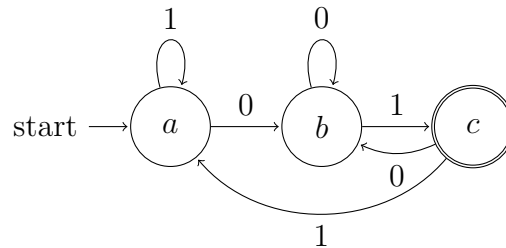
ovvero:



che è il DFA che si era anche prima ottenuto. Si hanno però dei sottoinsiemi mai raggiungibili. Si ha quindi:

|                       | 0              | 1              |
|-----------------------|----------------|----------------|
| $\rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$      |
| $\{q_0, q_1\}$        | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |
| $\{q_0, q_2\}$        | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$      |

e definendo  $\{q_0\} = a$ ,  $\{q_0, q_1\} = b$  e  $\{q_0, q_2\} = c$  si avrà:



Definiamo questo algoritmo che avrà:

- come input un NFA  $N = (Q_n, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$
- come output un DFA  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$  tale che  $L(D) = L(N)$

con:

- $Q_D = 2^{Q_N}$  (quindi se  $Q_N = n$  si ha  $|Q_D| = 2^n$ )
- $F_D = \{S \subseteq Q_n \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$



- $\forall S \subseteq Q_N$  e  $\forall a \in \Sigma$ :

$$\delta_D(S, a) = \cup \delta_n(p, a)$$

per esempio:

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) \cup \delta_N(q_2, 0)$$

Si definisce l' $\varepsilon$ -NFA, l'automa a stati finiti non deterministici con  $\varepsilon$  transizioni. Con la transizione  $\varepsilon$  posso saltare i nodi, ovvero avanza senza aggiungere caratteri

**Esempio 64.** Si ha  $ER = a^*b^*c^*$ , che genera:

$$L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0\}$$

si ha:



ovvero con  $\varepsilon$  posso per esempio generare quante a voglio da  $q_0$  e passare a  $q_2$ , uscendo senza generare altro

Si definisce la funzione  $ECLOSE : Q \rightarrow 2^Q$ , con  $ECLOSE(q)$  insieme degli stati raggiungibili da  $q$  tramite  $\varepsilon$ -mosse. Nell'esempio precedente si avrebbe:

$$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

$$ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$$

si ha inoltre che:

- $ECLOSE 2^Q \rightarrow 2^Q \quad P \subseteq Q$
- $ECLOSE(P) = \cup ECLOSE(p)$
- $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

mettendo in tabella l'esempio precedente si ha:

|                                   | a                   | b              | c           |
|-----------------------------------|---------------------|----------------|-------------|
| $* \rightarrow \{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$   |
| $*\{q_1, q_2\}$                   | $\emptyset$         | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$   |
| $*\{q_2\}$                        | $\emptyset$         | $\emptyset$    | $\{q_2\}$   |
| $\emptyset$                       | $\emptyset$         | $\emptyset$    | $\emptyset$ |

riscrivendo:

- $a = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $b = \{q_1, q_2\}$
- $c = \{q_2\}$
- $d = \emptyset$

ovvero:

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, a) &= ECLOSE(\delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a)) \\
 &= ECLOSE(\{q_0\} \cup \emptyset \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_0\}) \\
 &= ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}
 \end{aligned}$$

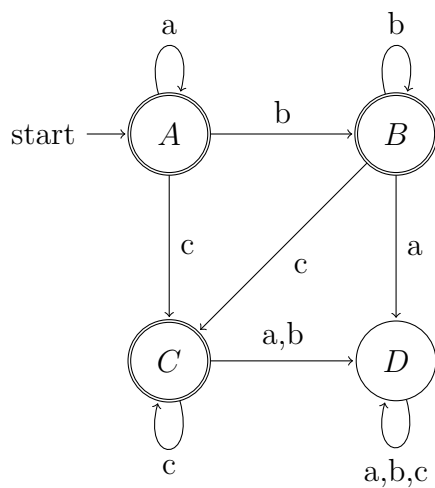
e

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, B) &= ECLOSE(\delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b)) \\
 &= ECLOSE(\emptyset \cup \{q_1\} \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_1\}) \\
 &= ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}
 \end{aligned}$$

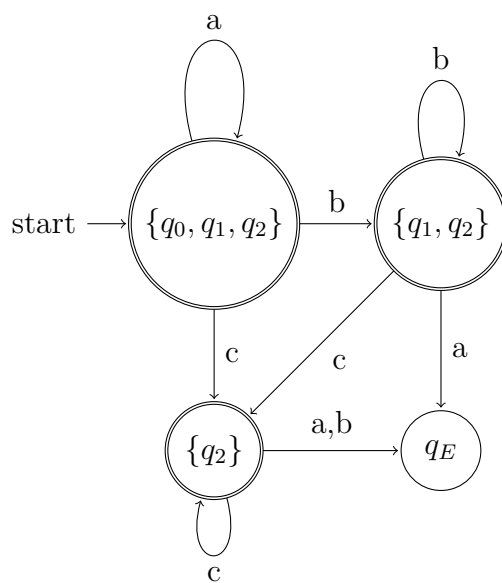
e

$$\begin{aligned}
 \delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, c) &= ECLOSE(\delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c)) \\
 &= ECLOSE(\emptyset \cup \emptyset \cup \{q_2\}) = ECLOSE(\{q_2\}) \\
 &= ECLOSE(q_2) = \{q_2\}
 \end{aligned}$$

si ottiene quindi il seguente NFA:



che diventa il seguente DFA:



**esercizi**

**Esempio 65.** automa DFA per  $w = x010y$ ,  $x, y \in \{0, 1\}^*$  :  
la stringa più corta è 010



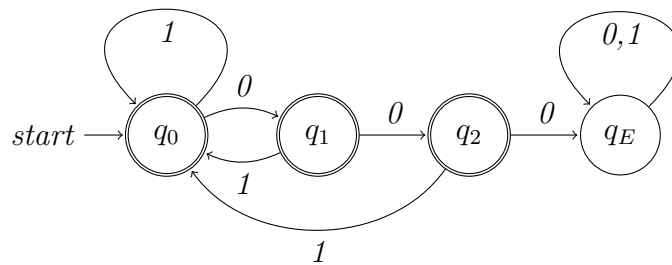
**Esempio 66.** automa DFA per  $a^{2k+1}b^{2h}$ ,  $h, k \geq 0$  :  
concatenazione di  $a$  dispari e  $b$  pari:



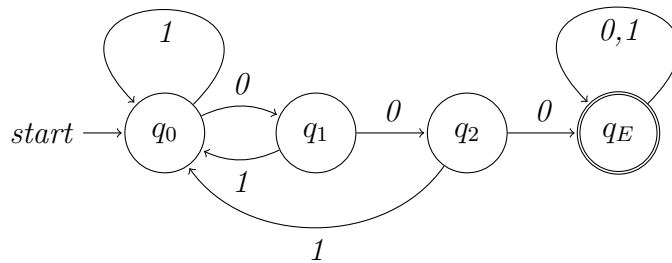
**Esempio 67.** cerco DFA per stringhe inizianti con  $a$  e finenti con  $b$ , con  
occorrenze di  $b$  singole o a coppie, nessuna regola per  $c$ .  
per esempio  $abbcb$  è nel linguaggio



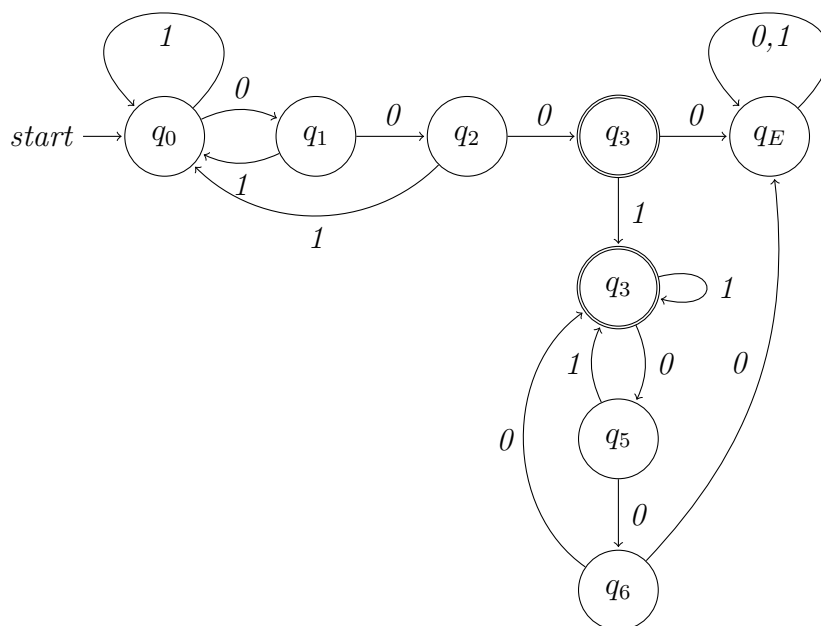
**Esempio 68.** *cerco DFA per stringhe di bit non contegano 000*

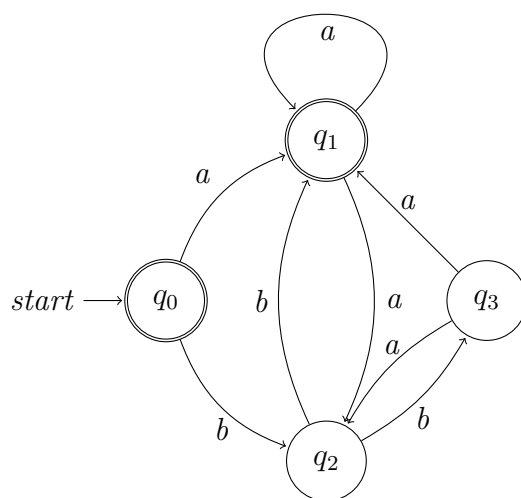


**Esempio 69.** *cerco DFA per stringhe di bit non contegano 000 almeno una volta*



**Esempio 70.** *cerco DFA per stringhe di bit che contengono 000 solo una volta*





**Esempio 71.**

| <i>DFA</i>              | <i>a</i>       | <i>b</i>       |
|-------------------------|----------------|----------------|
| $* \rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$    |
| $*\{q_1, q_2\}$         | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_1, q_3\}$ |
| $\emptyset$             | $\emptyset$    | $\emptyset$    |
| $*\{q_1, q_3\}$         | $\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$    |

**Esempio 72.**