

Fisica

UniShare

Davide Cozzi  
@dlcgold

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Meccanica</b>	<b>3</b>
2.1	Cinematica . . . . .	5
2.1.1	Moto Rettilineo . . . . .	5
2.1.2	Moto Verticale . . . . .	11
2.1.3	Moto nel Piano . . . . .	15
2.1.4	Moto Circolare . . . . .	21
2.1.5	Moto Parabolico . . . . .	25
2.1.6	Esercizi . . . . .	29
2.2	Dinamica . . . . .	31

# Capitolo 1

## Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlcgold/Appunti>.

Grazie mille e buono studio!

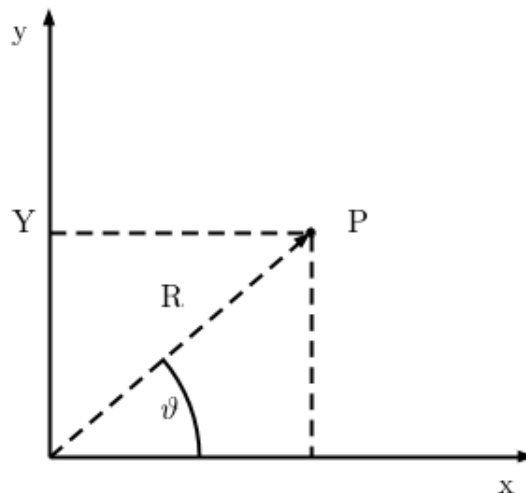
# Capitolo 2

## Meccanica

Si comincia con la Meccanica, la branca della fisica classica che studia il moto dei corpi, esprimendolo con leggi quantitative. Si ha la seguente divisione:

- **Cinematica**, dove si studia il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause
- **Dinamica**, dove si studia l'influenza delle forze nel moto

Si utilizzano i cosiddetti *punti materiali* per semplificare lo studio dei fenomeni. Un punto materiale infatti non ha estensione ma è dotato di una massa. In pratica ha dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove. Un altro strumento essenziale per lo studio dei fenomeni è il *sistema di riferimento* mediante gli assi ortogonali:



e si hanno le seguenti formule:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\sin\vartheta = \frac{Y}{R}$$

$$\cos\vartheta = \frac{X}{R}$$

$$\tan\vartheta = \frac{Y}{X}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{Y}{X}$$

e per gli angoli si usano i *radianti* in quanto adimensionali. L'angolo in radianti infatti è:

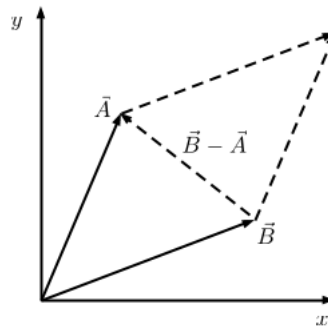
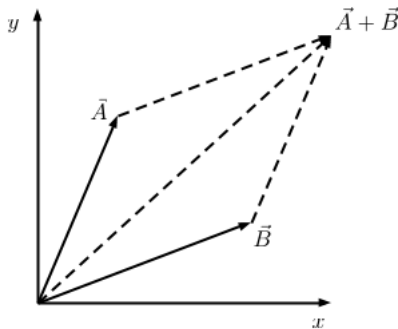
$$\vartheta_{rad} = \frac{\text{Lunghezza arco}}{\text{raggio}}$$

dove le due unità di misura esprimenti una lunghezza vengono "semplificate". Si ricordano inoltre le basi del calcolo vettoriale. Tra due vettori posso fare somme e sottrazioni. La somma non è altro che la diagonale maggiore del parallelogramma che si forma tra i due vettori. Inoltre se  $\vec{A} = (a_x, a_y)$  e  $\vec{B} = (b_x, b_y)$  si ha:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

la sottrazione è la diagonale minore e:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$



## 2.1 Cinematica

Innanzitutto qualche definizione:

- **Moto:** posizione in funzione del tempo in un dato sistema di riferimento
- **Traiettoria:** luogo dei punti attraversati dal punto materiale in movimento
- **Velocità:** variazione della posizione
- **Accelerazione:** variazione della velocità
- **Quiete:** assenza di movimento in un certo sistema di riferimento

Come grandezze fondamentali del movimento si hanno quindi *posizione*, *velocità* e *accelerazione*, tutte e tre funzioni del tempo.

### 2.1.1 Moto Rettilineo

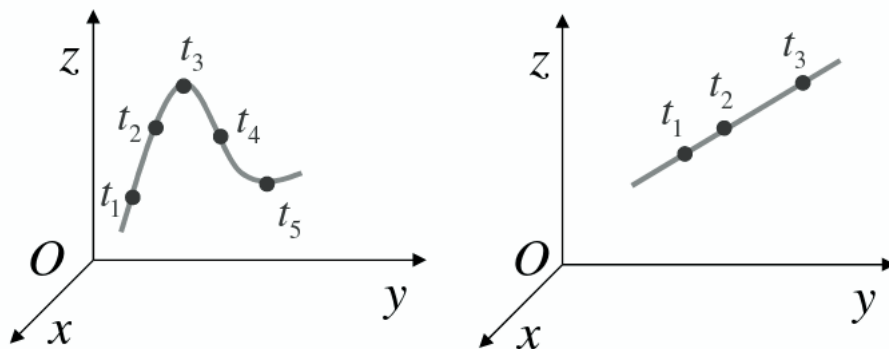
Rappresentando su un piano cartesiano avente la posizione come ordinata e il tempo come ascisse e rappresentando vari momenti del moto si ottiene una curva. Questa curva rappresenta la legge oraria.

Si ha la traiettoria più semplice, una retta. Il moto del punto quindi è esprimibile come funzione solo di

$$\vec{x}(t)$$

, che sarà la nostra equazione del moto.

Si passa quindi da un sistema di riferimento a 3 assi:



ad uno a un asse:



La scelta dell'origine della coordinata spaziale ( $x = 0$ ) e di quella temporale ( $t = 0$ ) sono arbitrari.

Si definisce la **distanza** come una quantità scalare la lunghezza del tratto percorso da un punto per cambiare posizione.

### Velocità

Per ottenere la velocità di un punto materiale ne misuro la posizione in due diversi istanti di tempo. Si ha:

- **Spostamento:**  $\Delta \vec{x} = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$  è un vettore che descrive la differenza di posizione tra due punti. Viene misurato in *Metri (m)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce in  $\frac{1}{299792458}$  s
- **Intervallo di Tempo:**  $\Delta t = t_2 - t_1$  che viene misurato in *Secondi (s)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il secondo è definito come la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra 2 livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133

Possiamo quindi definire la **Velocità Media**:

$$v_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{2}$$

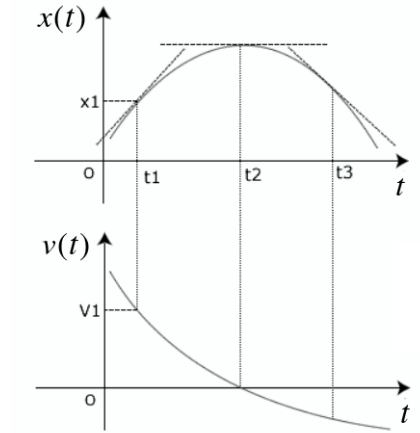
Questa grandezza però non fornisce nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Provo a spezzare il moto in più intervalli temporali al fine di studiarne ogni variazione. Si ottiene quindi la **Velocità Istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante  $t$  considerata. Il segno della velocità indica la direzione del moto sull'asse delle ascisse. La velocità è a sua volta funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

che è ben rappresentata dai seguenti grafici:

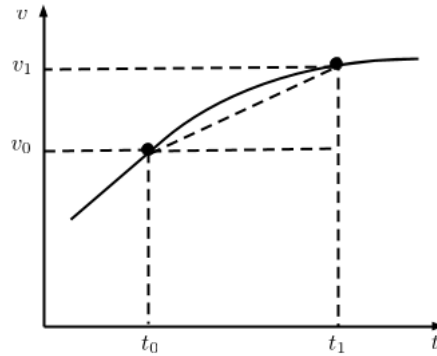


Se  $v$  è costante si parla di *Moto Rettilineo Uniforme*.

Si ha quindi:

$$\Delta x = v \Delta t \rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$$

che vale anche per  $v$  non costante ma per intervalli di tempo approssimati 0, infatti tra brevi istanti di tempo si può approssimare la velocità istantanea  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  come una velocità costante. Disegniamo ora un grafico velocità tempo con la curva rappresentante la legge oraria, indicando velocità e tempo in due momenti del moto:



calcolare l'area sottesa alla curva implica calcolare la differenza di posizione. Approssimo la curva ad una retta e procedo col banale calcolo del trapezio sottostante:

$$A = (t_1 - t_0) \left( \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{2} \right) + (t_1 - t_0) \vec{v}_0 = \left( \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{2} \right) \Delta t + \vec{v}_0 \Delta t$$

$$A = \frac{\Delta t}{2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_0 + 2\vec{v}_0) = \frac{\Delta t}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) = \Delta t v_{med}$$



Nota quindi l'equazione del moto

$$\vec{x}(t)$$

possiamo ricavare  $v(t)$  derivando, infatti la posizione si ottiene, partendo dal grafico sopra, riducendo al massimo gli intervalli di tempo e calcolando la somma delle aree dei vari rettangolini.

Si può procedere anche al calcolo di

$$\vec{x}(t)$$

avendo nota  $\vec{v}(t)$ . Sappiamo che lo spostamento totale è:  $\Delta\vec{x} = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n v_{m_i} \Delta t$  e che, per intervalli infinitesimi  $dx = \vec{v}(t)dt$ . Si ha quindi:

$$\Delta x = \underbrace{\int_{x_0}^x dx}_{\vec{x}(t) - x_0} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

↓

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

che è l'equazione del moto rettilineo per una velocità qualunque.

Possiamo ora anche riscrivere la forma completa della velocità media, essendo  $x - x_0 = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$  si ha:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

Possiamo analizzare ora il *moto rettilineo uniforme* con  $v$  costante. Essendo  $v$  costante, e non più dipendente dal tempo, può essere portata fuori dall'integrale:

$$\vec{x}(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0)$$

che è l'equazione generale del moto rettilineo uniforme dove lo spostamento varia linearmente col tempo.

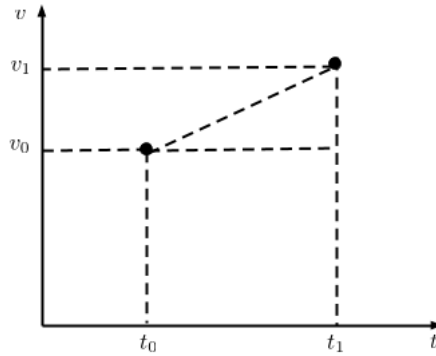
La velocità si esprime in metri al secondo ( $\frac{m}{s}$  o  $m/s$ ) o in chilometri all'ora ( $\frac{km}{h}$  o  $km/h$ ). Per passare da  $km/h$  a  $m/s$  divido la grandezza in  $km/h$  per 3,6, per passare da  $m/s$  a  $km/h$  moltiplico la grandezza in  $m/s$  per 3,6.

### Accelerazione

Si ha che in due istanti di tempo diversi abbiamo due diverse velocità:  $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$  e  $\vec{v}(t_2) = \vec{v}_2$ . Si definisce l'**Accelerazione Media**:

$$a_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Procediamo come per la velocità, con un grafico accelerazione-tempo e la legge del moto, calcolando l'area sottostante ottengo la differenza di posizione. Si ha una situazione più semplice ancora perché avendo  $a$  costante (e quindi  $\bar{a}(t) = a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  e quindi  $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$ ) essa può essere rappresentata come una retta l'area sottostante, che questa volta è letteralmente un trapezio senza approssimazioni, è lo spostamento.



ovvero:

$$A = x - x_0 = t_1 - v_0 + \frac{t_1(v_1 - v_0)}{2} = t_1 \frac{v_1 + v_0}{2}$$

e quindi

$$v_1 = v_0 + at_1$$

unendo con  $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$  si ottiene:

$$x - x_0 = \frac{t_1}{2}(v_0 + at_1 + v_0) = \frac{t_1}{2}(2v_0 + at_1) = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

↓

$$x = x_0 + v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

Ora, come per la velocità, analizziamo intervalli di tempo infinitesimi ricordando che anche l'accelerazione è una funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo e si ha che:

- $a = 0$  implica un moto rettilineo uniforme (si deriva una costante,  $v$ , e si ottiene 0)
- $a > 0$  implica una velocità crescente
- $a < 0$  implica una velocità decrescente

Proviamo ora a risalire a  $\vec{v}(t)$  conoscendo  $a(t)$ . Sappiamo che  $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt$ . Risolviamo quindi l'equazione differenziale :

$$\int_{\vec{v}_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

che è l'equazione generale per la velocità, dove, nel caso di  $a \neq 0$ , ovvero di accelerazione costante, si ha:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a \int_{t_0}^t dt = \vec{v}_0 + a(t - t_0)$$

dove si nota come la velocità sia una funzione lineare del tempo se  $t_0 = 0$ , ottenendo  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + at$ .

Cerchiamo ora l'equazione del moto in caso di *moto rettilineo uniformemente accelerato*. si ha che:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^t [\vec{v}_0 + a(t - t_0)]dt$$

↓

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0)dt$$

*porto fuori le due costanti,  $\vec{v}_0$  e  $a$*

↓

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0)dt$$

↓

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

dove, se si ha  $t_0 = 0$ , si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}at^2$$

Si ha che  $\bar{x}(t)$  con accelerazione costante è una parabola.  
Ricapitolando si ha.

- $v = v_0 + at$
- $x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

Possiamo usare le due formule combinandole. Per esempio dalla prima prendo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

e lo metto nella seconda formula:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{1}{2a}(v - v_0)^2 \\ &= x_0 + \frac{1}{a}(v_0v - v_0^2 + \frac{1}{2a}(v^2 + v_0^2 - 2vv_0)) = x_0 + \frac{1}{2a}(2v_0v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0v) \\ x &= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

Si nota come sia il termine  $at$  nel caso di  $\vec{v}(t)$  che il termine  $\frac{1}{2}at^2$  nel caso di  $a(t)$  non dipendono dalle condizioni iniziali.

Si definisce anche la velocità finale come:

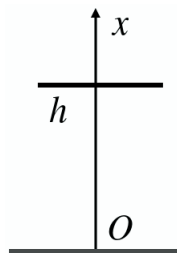
$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

L'accelerazione si esprime in metri al secondo quadrato ( $\frac{m}{s^2}$ ,  $m/s^2$  o  $ms^{-2}$ )

### 2.1.2 Moto Verticale

Sperimentale si scopre come un qualunque corpo lasciato libero di cadere nei pressi della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante  $g \simeq 9.81 ms^{-2}$  (si trascurano attrito dell'aria e si trattano piccole altitudini). Il valore di  $g$  non è costante in ogni parte del mondo ma può variare fino a circa il 0.6%.

Impostiamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  crescente verso l'alto e quindi con  $a = -g = -9.81ms^{-2}$ . Si avrà un corpo in caduta libera da un'altezza  $h$ :



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v}_0 = 0$

Con queste premesse otteniamo:

- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↓

$$\vec{x}(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a t$$

↓

$$\vec{v}(t) = -g t$$

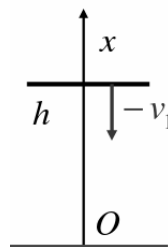
Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo  $x = 0$  nell'equazione del moto:

$$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = v(t_c) = -g t_c = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Imponiamo ora una velocità iniziale  $-\vec{v}_1$ , quindi verso il basso:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v}_0 = -\vec{v}_1$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↓

$$\vec{x}(t) = h - \vec{v}_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a t$$

↓

$$\vec{v}(t) = -\vec{v}_1 - g t$$

Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo  $x = 0$  nell'equazione del moto:

$$h - \vec{v}_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2} g t^2 + \vec{v}_1 t - h = 0$$

↓

$$t_c = \frac{-\vec{v}_1 \pm \sqrt{\vec{v}_1^2 + 2gh}}{g}$$

ma  $t < 0$  non è una soluzione fisica, quindi tengo solo la soluzione col +

$$t_c = -\frac{\vec{v}_1}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{\vec{v}_1^2 + 2gh}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = -\vec{v}_1 - g t_c = -\vec{v}_1 - g \left[ -\frac{\vec{v}_1}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{\vec{v}_1^2 + 2gh} \right] = -\sqrt{\vec{v}_1^2 + 2gh}$$

Con una velocità iniziale verso il basso avremo un tempo di caduta inferiore e una velocità al suolo maggiore rispetto alla partenza da fermo.

Analizziamo ora il moto verticale di un punto materiale lanciato dal basso verso l'alto con velocità  $\vec{v}_2$ :



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $\vec{v}_0 = \vec{v}_2$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↓

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a t$$

↓

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_2 - g t$$

Inizialmente si ha  $v > 0$ , finché il punto sale verso l'alto, fino a fermarsi. Con  $v = 0$  si ha l'altezza massima. Si ha quindi:

$$v = \vec{v}_2 - g t = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{\vec{v}_2}{g}$$

e quindi:

$$x_{max} = x(t_{max}) = \vec{v}_2 \frac{\vec{v}_2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{\vec{v}_2^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{\vec{v}_2^2}{g}$$

raddoppiando la velocità iniziale avrò quindi un'altezza 4 volte superiore. Da questp momento in poi di avrò la caduta libera da  $h = x - max$  con  $\vec{v}_0 = 0$ :

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \left( \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g} \right)} = \frac{v_2}{g}$$

e quindi si avrò:

$$t_{tot} = t_{max} + t_c = \frac{2v_2}{g}$$

### 2.1.3 Moto nel Piano

Si passa ora al moto in 2 dimensioni quindi con una traiettoria curva (e non più una retta).

Si introducono le coordinate cartesiane ( $x(t)$  e  $y(t)$ ) e quelle polari ( $r(t)$  e  $\vartheta(t)$ ). Si hanno le seguenti formule per il passaggio da coordinate cartesiane a polari:

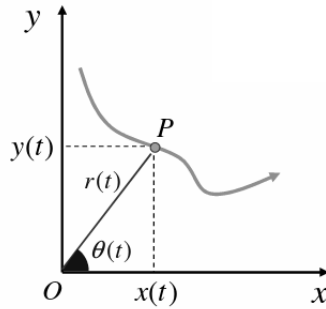
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \vartheta = \frac{y}{x}$$

e le seguenti per il passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta$$



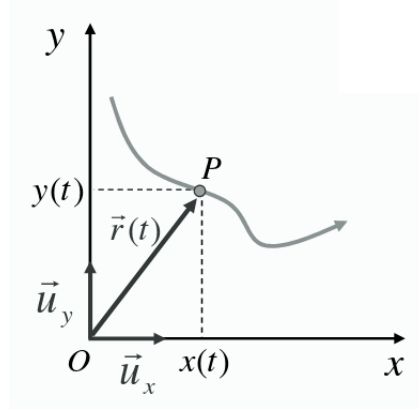
Il moto di  $P$  è descritto attraverso l'evoluzione del vettore posizione:

$$\vec{r}(t) \equiv (\vec{x}(t), y(t))$$

Si introducono inoltre i versori degli assi  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ , ricordando che  $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_y| = 1$  e che i versori restano fissi nel tempo. Si ottiene quindi:

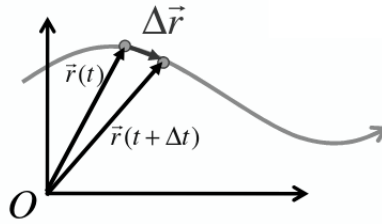
$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$





Suppongo ora la traiettoria fissata e nota a priori. Fissata un'origine  $O$ , una posizione  $s(t)$  e la velocità  $v = \frac{ds}{dt}$  si ha che il moto è completamente determinato. Si ha una generalizzazione del moto rettilineo su una traiettoria curva.

Prendiamo ora in considerazione il seguente caso:



si ha il vettore spostamento:

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

e il vettore velocità media:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

e il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

al limite  $\Delta t \rightarrow 0$  lo spostamento infinitesimo si dispone sulla tangente alla traiettoria nel punto  $P$ :

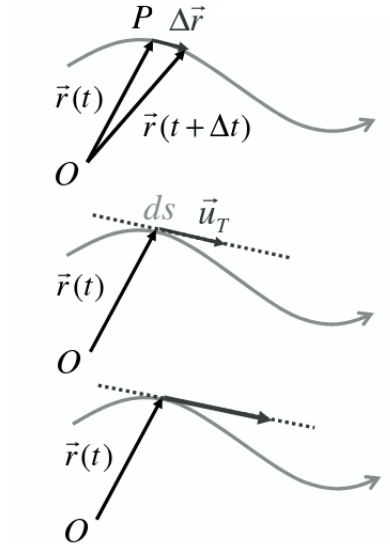
$$d\vec{r} = ds \vec{u}_T$$

con  $|\vec{u}_T| = 1$  versore della tangente che indica una direzione variabile nel tempo. Per il vettore velocità avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T$$

con  $v$  indicate il modulo della velocità e  $\vec{u}_T$  la direzione.

Quanto appena descritto è visualizzabile nelle seguenti immagini:



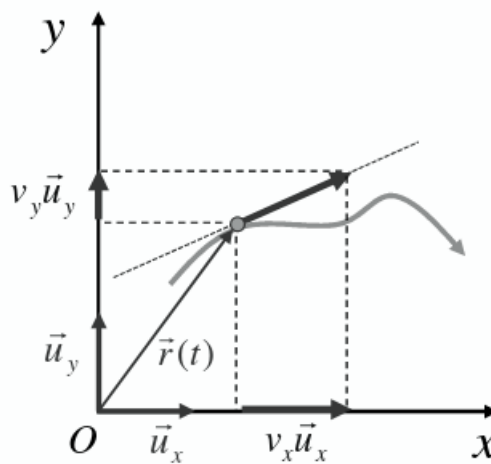
Analizziamo ora meglio la velocità nelle componenti cartesiane. Essendo  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  e  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$  si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

con il modulo della velocità:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



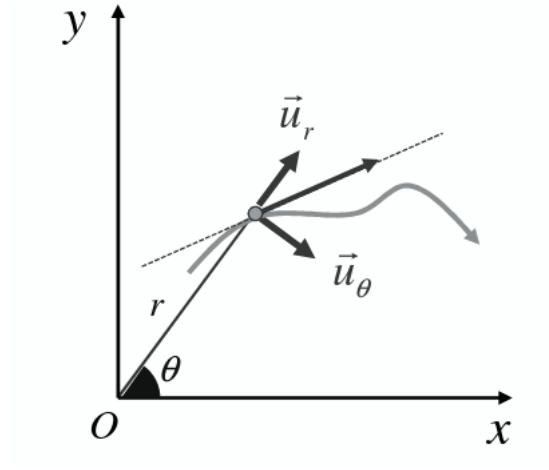
Passiamo alle componenti polari. Essendo  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  e  $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$  (col vettore  $\vec{u}_r$  mostrato in figura) si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta$$

in quanto solitamente la derivata di un vettore è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\perp$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



Possiamo approfondire ancora lo studio della velocità in componenti polari infatti:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v}_r} + r \underbrace{\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta}_{\vec{v}_\vartheta}$$

con:

- $\vec{v}_r$  è la **velocità radiale** e  $|\vec{v}_r| = \frac{dr}{dt}$  è la variazione di  $r$
- $\vec{v}_\vartheta$  è la **velocità trasversa** e  $|\vec{v}_\vartheta| = r\frac{d\vartheta}{dt}$  è la variazione della direzione

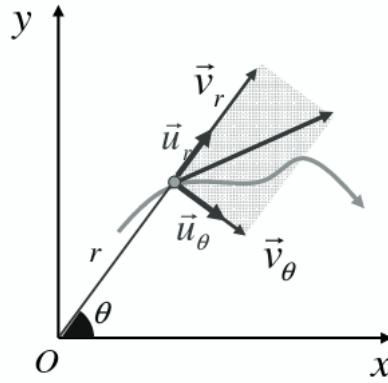
quindi:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta$$

e quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}$$

Ecco un'immagine che spiega quanto detto:



Passiamo ora all'accelerazione nel piano. Essa è, come sappiamo, la variazione della velocità  $\vec{v} = v\vec{u}_T$  ma, se nel moto rettilineo è solo la variazione del modulo, nel moto del piano si ha anche la variazione della direzione. Iniziamo sapendo che  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Quindi:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

ricordando la derivata di un versore si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

con:

- $\vec{u}_N$  versore perpendicolare al versore tangente
- $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$  variazione del modulo velocità, detta  $\vec{a}_T$  **accelerazione tangenziale**
- $v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$  variazione della direzione, detta  $\vec{a}_N$  **accelerazione normale o centripeta**

quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

procedendo con l'analisi della traiettoria si nota come essa possa essere approssimata da una circonferenza con un certo raggio  $R$  che può essere usato come raggio di curvatura. Si ha quindi  $ds = R d\phi$  e quindi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

Posso quindi sostituire  $\frac{d\phi}{dt}$  nella formula precedentemente trovata dell'accelerazione ottenendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

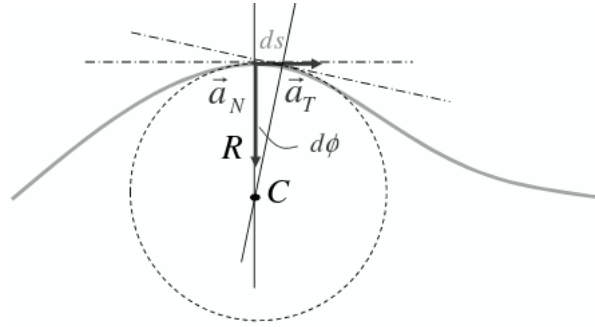
quindi  $\vec{a}_N$  può anche essere indicata con  $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$ . Da questi ultimi due risultati si intuiscono due cose:

1. se  $r \rightarrow \infty$  si ha  $\vec{a}_N = 0$  e quindi un moto rettilineo
2. se  $\frac{dv}{dt} = 0$  si ha  $\vec{a}_T = 0$  e quindi un moto curvilineo uniforme con solo il cambiamento della direzione

Si ha infine il modulo dell'accelerazione:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

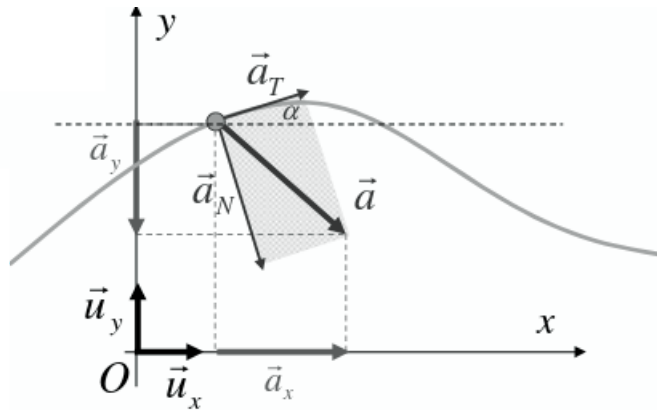
Ecco un'immagine di quanto detto:



Proiettiamo ora l'accelerazione sugli assi del sistema cartesiano:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$$

analizziamo anche quanto succede sul piano:



Possiamo ora scrivere le componenti cartesiane in funzione di quella tangenziale e di quella centripeta:

- per l'ascisse:

$$a_x = (a_T)_x + (a_N)_x = a_t \cos \alpha + a_n \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{R} \sin \alpha$$

- per l'ordinata:

$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin \alpha - \frac{v^2}{R} \cos \alpha$$

### 2.1.4 Moto Circolare

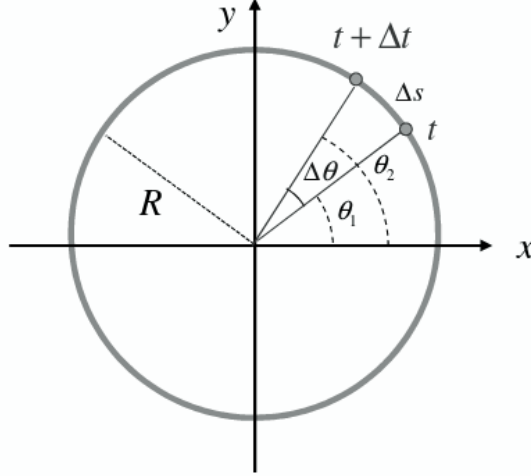
Si tratta di un caso particolare di moto curvilineo nel piano. In generale si ha il modulo della velocità non uniforme. Si hanno quindi:

- *coordinate polari*:
  - angolo  $\theta(t)$
  - raggio  $r(t) = R = \text{costante}$
- *coordinate curvilinee*:
  - posizione misurata lungo la traiettoria  $s(t) = R\theta(t)$
- *coordinate cartesiane*:
  - $\vec{x}(t) = R \cos \theta(t)$
  - $y(t) = R \sin \theta(t)$

ovvero:



Iniziamo ad analizzare il moto circolare. Considero il punto  $P$  in due istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ . Quindi avrò  $\theta(t) = \theta_1$  e  $\theta(t + \Delta t) = \theta_2$ . Nel complesso si ha  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ :



Si definisce innanzitutto la velocità angolare media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

mentre per la velocità angolare istantanea si ha:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Si indica ora la velocità angolare in funzione di  $v$  e  $R$ , ricordando che  $ds = R d\theta$ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

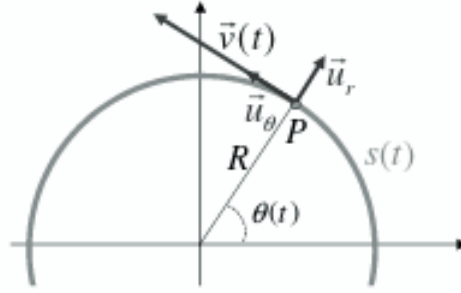
quindi la velocità angolare è proporzionale al modulo della velocità ed inversamente proporzionale al raggio. Inoltre  $v = \omega R$ . Partiamo da qui per approfondire la velocità nel moto circolare. Sappiamo che in generale nel moto curvilineo si ha:  $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ . Si ha che  $\frac{dr}{dt} = 0$  quindi:

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta$$

in quanto  $R$  è costante e quindi si ha come modulo della velocità:

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| = \omega(t)R$$

graficamente si ha:



Si ha inoltre che se si parla di moto circolare uniforme si ha che  $v = \omega R$  è costante in quanto  $\omega$  è costante.

Passiamo all'accelerazione nel moto circolare uniforme. Si ha solo l'accelerazione centripeta in quanto  $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{U}_N$$

con  $v^2$  costante e si ha il modulo dell'accelerazione pari a:

$$a = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega v$$

Quindi per il moto lungo la traiettoria si ha:

- $s(t) = s_0 + vt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

e nel moto circolare uniforme si può notare un moto periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

vediamo ora l'accelerazione in caso di moto non uniforme, quindi con  $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$  e con  $\vec{v}(t) = \omega(t)R$ . Definisco un'accelerazione angolare media:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

e l'accelerazione angolare istantanea, si ricorda che  $\omega = \frac{v}{r}$ :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{R} a_T$$



visivamente:



Possiamo quindi riscrivere accelerazione normale e tangenziale in funzione di quantità angolari:

- $a_N = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{v=\omega R} a_N = \omega^2 R$
- $a_T = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=\omega R} a_T = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$

quindi:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + \omega^2 R \vec{u}_N = R(\alpha \vec{u}_T + \omega^2 \vec{u}_N)$$

quindi infine:

- $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha dt = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^t dt = \omega_0 + \alpha t$  in quanto  $t_0 = 0$
- $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \theta_0 + \int_{t_0}^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ , dove si nota l'analogia con l'accelerazione nel moto rettilineo
- $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

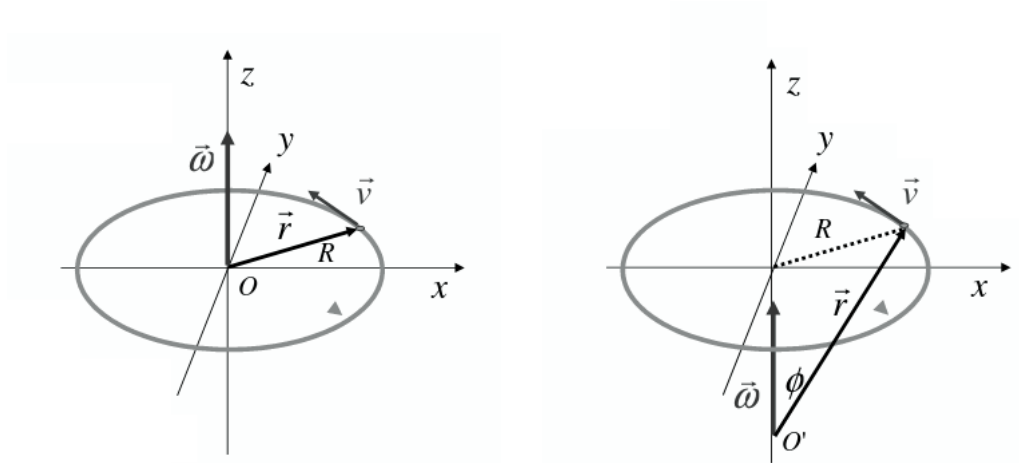
Diamo nuovamente un'occhiata alla velocità angolare  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$ . Si ha che è una quantità scalare. Studiamo ora la notazione vettoriale di  $\vec{\omega}$ . Questo vettore ha direzione ortogonale alla circonferenza e, visto dalla punta di  $\vec{\omega}$  il moto appare antiorario. Si ha quindi che  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$  e:

$$|\vec{v}| = \omega R \sin \frac{\pi}{2} = \omega R$$

anche se il vettore  $\vec{\omega}$  si può applicare a qualunque punto dell'asse  $z$ , ottenendo:

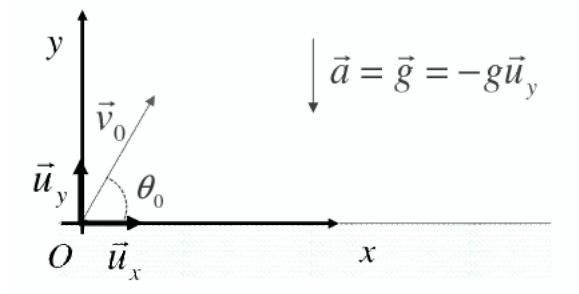
$$|\vec{v}| = \omega R \sin \phi = \omega R$$

graficamente si ha a sinistra il caso con applicazione sull'origine normale e a destra il caso applicazione in un punto a scelta:



### 2.1.5 Moto Parabolico

Consideriamo il moto di un punto materiale lanciato da terra (con angolo  $\theta_0$ ) con una certa velocità iniziale  $v_0$ :



posto  $t_0 = 0$  e  $\vec{r}(t_0) = 0$  otteniamo per la velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt = \vec{v}_0 - g\vec{u}_y \int_{t_0}^t dt = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_y$$

↓

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta_0 \\ v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \end{cases}$$

e per la posizione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

↓

$$\begin{cases} x = x(t) = \int_{t_0}^t v_x = (v_0 \cos \theta_0) t \\ y = y(t) = \int_{t_0}^t v_y = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

notiamo che la componente  $x$  rappresenta un moto rettilineo uniforme mentre quella  $y$  un moto uniformemente accelerato. Passiamo ora al calcolo della traiettoria  $y(x)$ . Dall'equazione di  $x(t)$  otteniamo:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$$

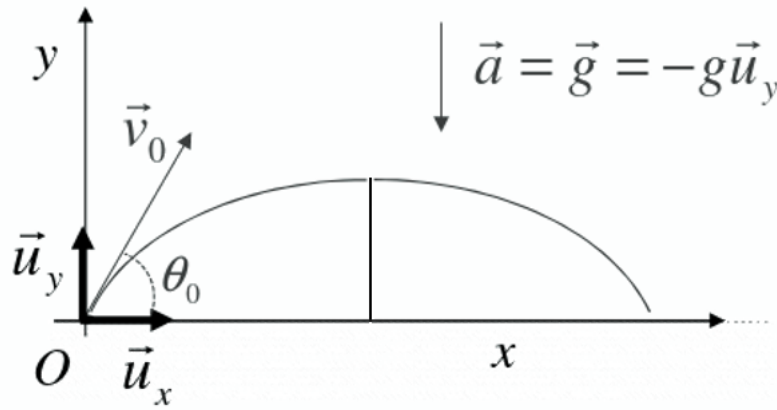
quindi:

$$y(x) = (v_0 \sin \theta_0) \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

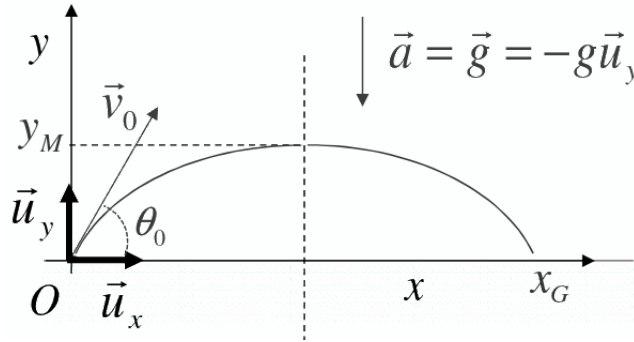
↓

$$y(x) = (\tan \theta_0) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

ovvero l'equazione di una parabola con asse verticale, infatti:



Studiamo ora la gittata, che si ha con  $y(x) = 0$ :



Quindi, essendo  $y(x) = 0$ , si ha:

$$\tan\theta_0 = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

quindi:

$$x_G = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2\theta_0 \tan\theta_0 = \frac{2v_0^2}{g} \cos\theta_0 \sin\theta_0$$

↓

$$x_G = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

e, fissata la velocità iniziale si ha la gittata massima con  $\sin(2\theta_0) = 1$  (quindi con  $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ). Si ha quindi:

$$x_{G_{max}} = \frac{v_0^2}{g}$$

la parabola è simmetrica rispetto all'asse e a  $x_M$  si ha l'altezza massima  $y_M = y(x_M)$ . Si ha:

$$x_M = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

e, mettendo  $x_M$  nella formula della traiettoria, si ottiene:

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta_0$$

che è l'altezza massima lungo la traiettoria. Ne segue che l'altezza massima si ha sulla verticale (con  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ) e quindi si ha l'altezza massima pari a:

$$Y_{M_{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Possiamo ora calcolare il tempo di volo, ovvero il tempo impiegato a raggiungere la gittata  $x_G$ :

$$t_G = \frac{x_G}{v_x} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) \frac{1}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$\downarrow$$

$$t_G = \frac{2v_0}{g} \sin\theta_0$$

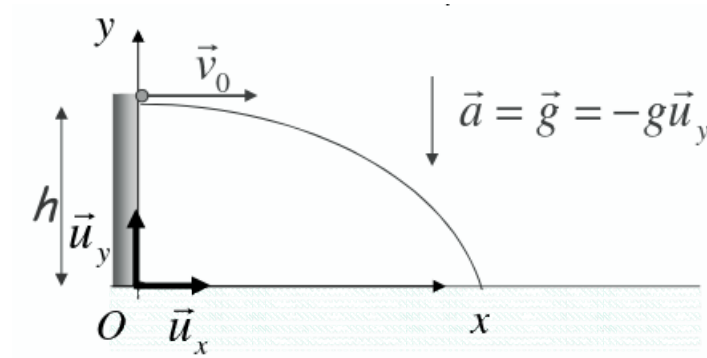
che con  $\sin\theta_0 = 1$ , ovvero con  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  (sulla verticale), raggiunge il suo massimo:

$$t_{G_{max}} = \frac{2v_0}{g}$$

si hanno inoltre le seguenti velocità finali:

$$\begin{cases} v_x(t_G) = v_x(t_0) = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y(t_G) = -v_y(t_0) = -v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

Vediamo ora un punto materiale lanciato orizzontalmente da altezza  $h$ .



è un moto parabolico con condizioni iniziali diverse:

- $x(0) = 0$
- $y(0) = h$
- $v_x(0) = v_0$
- $v_y(0) = 0$

con la seguente equazione del moto:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

che implicano:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

si hanno quindi:

- tempo di volo:  $t = \frac{x}{v_0}$
- traiettoria:  $y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$
- tempo di caduta:  $y(t) = 0 \rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- gittata:  $x(t_c) = x_G = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- velocità finale:  $v_x(t_c) = v_0$  e  $v_y(t_c) = -\sqrt{2gh} \rightarrow v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

### 2.1.6 Esercizi

prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \rightarrow |\vec{c}| = ab \sin \theta$$

**Esercizio 1.** si ha una strada rettilinea di 5.2km percorsa in auto a 43km/h, dopo si ha un altro percorso di 1.2km (fatto in 27m). Trovo velocità media nei due tratti:

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5.2 + 1.2 = 6.4km$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{v} + \Delta t_2 = \frac{5.2}{43} + 0.45 = 0.12 + 0.45 = 0.57h$$

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6.4}{0.57} = 11km/h$$

ora torna alla macchina, tornando indietro di 1.2km in 35m, quindi la nuova velocità media totale sarà:

$$v_{med2} = \frac{5.2}{0.57 + 0.58} = 4.5km/h$$

sistemare parte finale

**Esercizio 2.** negli anni '60 c'è stato il record di velocità al suolo con 631km/h in 3.72s. L'accelerazione media è maggiore di quella di gravità?

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{631}{3.6} \frac{1}{3.72} = 47,2 m/s^2$$

che è maggiore di 9.81

**Esercizio 3.** la metro va da A a B. Quando parte accelera con  $1.2m/s^2$ , per metà tratta accelera così positivamente e poi frena con lo stesso modulo. Tra A e B ci sono 1100m. Calcolo tempo e velocità massima:

$$v_{max} = v \frac{\Delta x}{2} = \sqrt{2a\Delta x} \frac{1}{2} = \sqrt{a\Delta x} = \sqrt{1.2 * 1100} = 36,3 m/s$$

$$v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v_{fin}}{a} = \frac{36.3}{1.2} = 30.3s$$

$$\Delta t_{tot} = 30.3 \cdot 2 = 60.6s$$

in quanto accelera e frena con lo stesso modulo

**Esercizio 4.** un tizio urla in un pozzo e l'eco gli torna dopo 2s. Quanto è profondo il pozzo ( $v_{suono} = 344m/s$ )

$$2\Delta x = v\Delta t \rightarrow t = \frac{344 \cdot 2}{2} = 344m$$

**Esercizio 5.** Un aereo per staccarsi dalla pista deve avere una velocità finale di 360km/h. La pista è lunga 1,8km. Si ha accelerazione costante. Qual è l'accelerazione minima?

$$v_{fin}^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow a = \frac{360}{3.6} \frac{1}{2 \cdot 1.8 \times 10^3} = 2.7 m/s^2$$

**Esercizio 6.** Un tizio fa cadere una chiave inglese da un grattacielo. Dov'è la chiave dopo 1.5s?

$$\Delta x = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{9.81 \cdot 1.2^2}{2} = -11m$$

negativo nel mio sistema di riferimento

**Esercizio 7.** lancio una palla in alto con  $v_0 = 12m/s$ , quanto ci impiega ad arrivare alla massima altezza?

$$v_f = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{12}{9.81} = 1.2s$$

quanta strada fa?

$$x = -\frac{v_0^2}{2g} = -\frac{12^2}{2 \cdot (-9.81)} = 7,3m$$

quanto impiega la palla per arrivare a 5m sopra il punto di lancio?

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \frac{1}{2}9,81t^2 + 12t + 5 = 0$$

↓

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot \frac{9,81}{2} 5}}{2,45} = \begin{cases} 0,53s \\ 1,9s \end{cases}$$

sappiamo che per il volo completo impiega 1,2s, quindi impiegherà 0,53s per arrivare a 5m e 1,9s per salire all'apice e scendere nuovamente a 5m

**Esercizio 8.** Un aereo getta aiuti umanitari ad una quota di 1200m volando a 430km/h. Calcolo a quale angolo devono essere gettati gli aiuti?

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2400}{9,81}} = 15,6s$$

↓

$$x = \frac{430}{3,6} \cdot 15,6 = 1863m$$

↓

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1869}{1200}$$

↓

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan\left(\frac{1869}{1200}\right) = 57^\circ$$

## 2.2 Dinamica