# Fisica

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

# Indice

**1 Introduzione** **2**

**2 Meccanica** **3**

2.1 Cinematica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.1.1 Moto Rettilineo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.1.2 Moto Verticale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.1.3 Moto nel Piano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

# Capitolo 1

# Introduzione

**Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link:** `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
**Grazie mille e buono studio!**

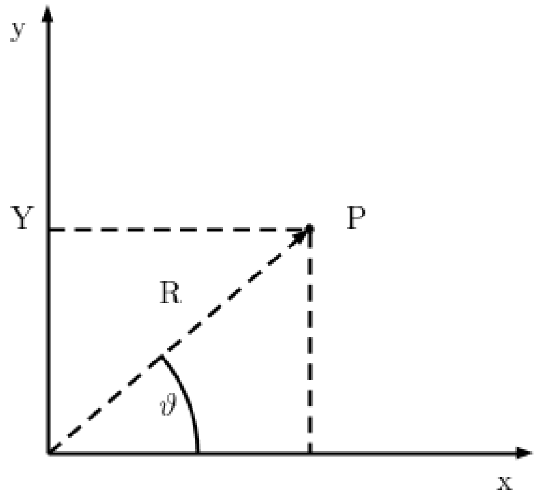
# Capitolo 2

# Meccanica

Si comincia con la Meccanica, la branca della fisica classica che studia il moto dei corpi, esprimendolo con leggi quantitative. Si ha la seguente divisione:

- **Cinematica**, dove si studia il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause
- **Dinamica**, dove si studia l'influenza delle forze nel moto

Si utilizzano i cosiddetti *punti materiali* per semplificare lo studio dei fenomeni. Un punto materiale infatti non ha estensione ma è dotato di una massa. In pratica ha dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove.
Un altro strumento essenziale per lo studio dei fenomeni è il *sistema di riferimento* mediante gli assi ortogonali:



e si hanno le seguenti formule:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$sin\vartheta = \frac{Y}{R}$$

$$cos\vartheta = \frac{X}{R}$$

$$tan\vartheta = \frac{Y}{X}$$

$$\vartheta = arctan\frac{Y}{X}$$

e per gli angoli si usano i *radianti* in quanto adimensionali. L'angolo in radianti infatti è:

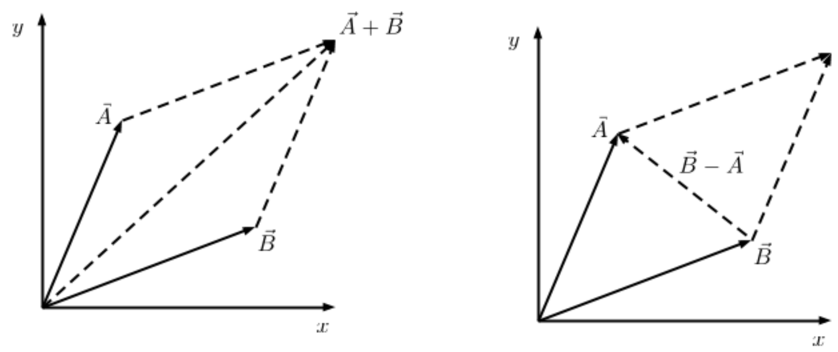
$$\vartheta_{rad} = \frac{Lunghezza\_arco}{raggio}$$

dove le due unità di misura esprimenti una lunghezza vengono "semplificate". Si ricordano inoltre le basi del calcolo vettoriale. Tra due vettori posso fare somme e sottrazioni La somma non è altro che la diagonale maggiore del parallelogramma che si forma tra i due vettori. Inoltre se $\vec{A} = (a_x, a_y)$ e $\vec{B} = (b_x, b_y)$ si ha:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

la sottrazione è la diagonale minore e:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$$



# 2.1 Cinematica

Innanzitutto qualche definizione:

- **Moto:** posizione in funzione del tempo in un dato sistema di riferimento
- **Traiettoria:** luogo dei punti attraversati dal punto materiale in movimento
- **Velocità:** variazione della posizione
- **Accelerazione:** variazione della velocità
- **Quiete:** assenza di movimento in un certo sistema di riferimento

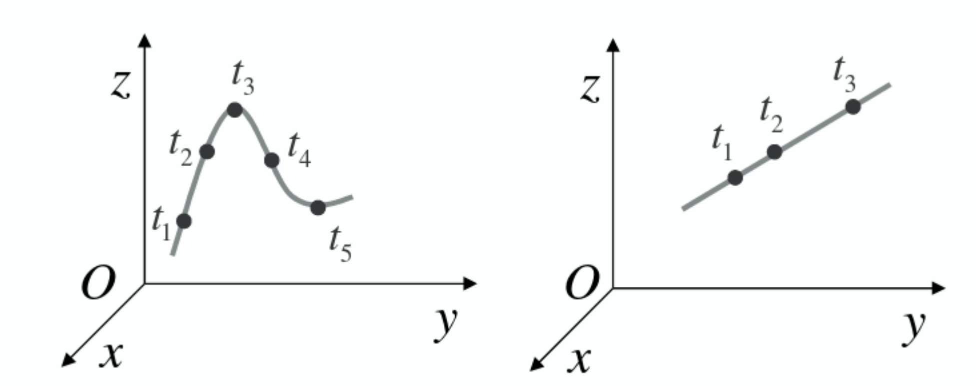
Come grandezze fondamentali del movimento si hanno quindi *posizione*, *velocità* e *accelerazione*, tutte e tre funzioni del tempo.

## 2.1.1 Moto Rettilineo

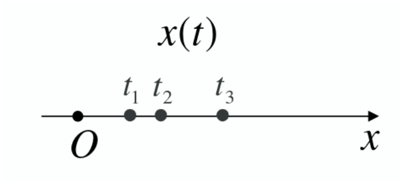
Rappresentando su un piano cartesiano avente la posizione come ordinata e il tempo come ascisse e rappresentando vri momenti del moto si ottiene una curva. Questa curva rappresenta la legge oraria.
Si ha la traiettoria più semplice, una retta. Il moto del punto quindi è esprimibile come funzione solo di

$$\vec{x}(t)$$

, che sarà la nostra equazione del moto.
Si passa quindi da un sistema di riferimento a 3 assi:




ad uno a un asse:




La scelta dell'origine della coordinata spaziale ($x = 0$) e di quella temporale ($t = 0$) sono arbitrari.
Si definisce la **distanza** come una quantità scalare la lunghezza del tratto percorso da un punto per cambiare posizione.

### Velocità

Per ottenere la velocità di un punto materiale ne misuro la posizione in due diversi istanti di tempo. Si ha:

- **Spostamento:** $\Delta\vec{x} = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$ è un vettore che descrive la differenza di posizione tra due punti. Viene misurato in *Metri (m)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce in $\frac{1}{299792458}s$
- **Intervallo di Tempo:** $\Delta t = t_2 - t_1$ che viene misurato in *Secondi (s)* secondo il Sistema Internazionale (SI). Il secondo è definito come la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra 2 livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133

Possiamo quindi definire la **Velocità Media:**

$$v_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{2}$$

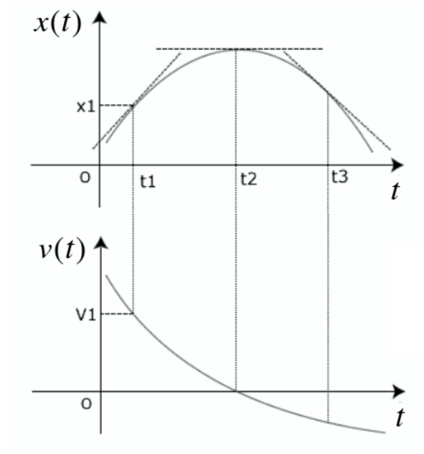
Questa grandezza però non fornisce nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Provo a spezzare il moto in più intervalli temporali al fine di studiarne ogni variazione. Si ottiene quindi la **Velocità Istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante $t$ considerata. Il segno della velocità indica la direzione del moto sull'asse delle ascisse. La velocità è a sua volta funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

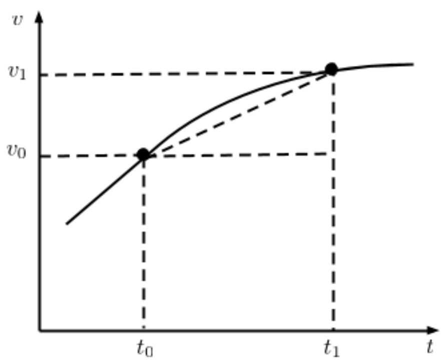
che è ben rappresentata dai seguenti grafici:




Se $v$ è costante si parla di *Moto Rettilineo Uniforme*.
Si ha quindi:

$$\Delta x = v\Delta t \rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$$

che vale anche per $v$ non costante ma per intervalli di tempo approssimati 0, infatti tra brevi istanti di tempo si può approssimare la velocità istantanea $v(t) = \frac{dx}{dt}$ come una velocità costante. Disegniamo ora un grafico velocità tempo con la curva rappresentante la legge oraria, indicando velocità e tempo in due momenti del moto:




calcolare l'area sottesa alla curva implica calcolare la differenza di posizione. Approssimo la curva ad una retta e procedo col banale calcolo del trapezio sottostante:

$$A = (t_1 - t_0)(\frac{\vec{v_1} - \vec{v_0}}{2}) + (t_1 - t_0)\vec{v_0} = (\frac{\vec{v_1} - \vec{v_0}}{2})\Delta t + \vec{v_0}\Delta t$$

$$A = \frac{\Delta t}{2}(\vec{v_1} - \vec{v_0} + 2\vec{v_0}) = \frac{\Delta t}{2}(\vec{v_0} + \vec{v_1}) = \Delta t v_{med}$$

Nota quindi l'equazione del moto

$$\vec{x}(t)$$

possiamo ricavare $v(t)$ derivando, infatti la posizione si ottiene, partendo dal grafico sopra, riducendo al massimo gli intervalli di tempo e calcolando la somma delle aree dei vari rettangolini .
Si può procedere anche al calcolo di

$$\vec{x}(t)$$

avendo nota $\vec{v}(t)$. Sappiamo che lo spostamento totale è: $\Delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} v_{m_i}\Delta t$ e che, per intervalli infinitesimi $dx = \vec{v}(t)dt$. Si ha quindi:

$$\Delta x = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx}_{\vec{x}(t)-x_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

che è l'equazione del moto rettilineo per una velocità qualunque.
Possiamo ora anche riscrivere la forma completa della velocità media, essendo $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$ si ha:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

Possiamo analizzare ora il *moto rettilineo uniforme* con $v$ costante. Essendo $v$ costante, e non più dipendente dal tempo, può essere portata fuori dall'integrale:

$$\vec{x}(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$

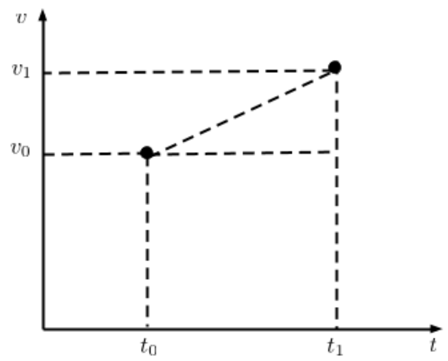
che è l'equazione generale del moto rettilineo uniforme dove lo spostamento varia linearmente col tempo.
La velocità di esprime in metri al secondo ($\frac{m}{s}$ o $m/s$) o in kilometri all'ora $\frac{km}{h}$ o $km/h$). Per passare da $km/h$ a $m/s$ divido la grandezza in $km/h$ per 3,6, per passare da $m/s$ a $km/h$ moltiplico la grandezza in $m/s$ per 3,6.

**Accelerazione**

Si ha che in due istanti di tempo diversi abbiamo due diverse velocità: $\vec{v}(t_1) = \vec{v_1}$ e $\vec{v}(t_2) = \vec{v_2}$. Si definisce l'**Accelerazione Media:**

$$a_m = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Procediamo come per la velocità, con un grafico accelerazione-tempo e la legge del moto, calcolando l'area sottostante ottengo la differenza di posizione. Si ha una situazione più semplice ancora perché avendo $a$ costante (e quindi $\overline{a}(t) = a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ e quindi $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$) essa può essere rappresentata come una retta l'area sottostante, che questa volta è letteralmente un trapezio senza approssimazioni, è lo spostamento.




ovvero:

$$A = x - x_0 = t_1 - v_0 + \frac{t_1(v_1 - v_0)}{2} = t_1\frac{v_1 + v_0}{2}$$

e quindi

$$v_1 = v_0 + at_1$$

unendo con $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$ si ottiene:

$$x - x_0 = \frac{t_1}{2}(v_0 + at_1 + v_0) = \frac{t_1}{2}(2v_0 + at_1) = v_0t_1 + \frac{a}{2}t_1^2$$

$$\downarrow$$

$$x = x_0 + v_0t_1 + \frac{a}{2}t_1^2$$

Ora, come per la velocità, analizziamo intervalli di tempo infinitesimi ricordando che anche l'accelerazione è una funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo e si ha che:

- $a = 0$ implica un moto rettilineo uniforme (si deriva una costante, $v$, e si ottiene 0)
- $a > 0$ implica una velocità crescente
- $a < 0$ implica una velocità decrescente

Proviamo ora a risalire a $\vec{v}(t)$ conoscendo *a(t)*. Sappiamo che $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt$. Risolviamo quindi l'equazione differenziale :

$$\int_{\vec{v_0}}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

che è l'equazione generale per la velocità, dove, nel caso di $a \neq 0$, ovvero di accelerazione costante, si ha:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + a \int_{t_0}^{t} dt = \vec{v_0} + a(t - t_0)$$

dove si nota come la velocità sia una funzione lineare del tempo se $t_0 = 0$, ottenendo $\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$.

Cerchiamo ora l'equazione del moto in caso di *moto rettilineo uniformemente accelerato*. si ha che:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + a(t - t_0)]dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v_0}dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

*porto fuori le due costanti,* $\vec{v_0}$ *e* $a$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0} \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)dt$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

dove, se si ha $t_0 = 0$, si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}at^2$$

Si ha che $\overline{x}(t)$ con accelerazione costante è una parabola.
Ricapitolando si ha.

- $v = v_0 + at$
- $x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

Possiamo usare le due formule combinandole. Per esempio dalla prima prendo

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

e lo metto nella seconda formula:

$$x = x_0 + v\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{1}{2a}(v - v_0)^2$$

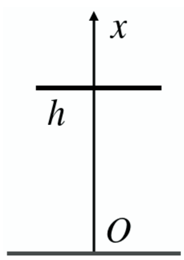
$$= x_0 + \frac{1}{a}(v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2a}(v^2 + v_0^2 - 2vv_0) = x_0 + \frac{1}{2a}(2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2v_0 v)$$

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Si nota come sia il termine $at$ nel caso di $\vec{v}(t)$ che il termine $\frac{1}{2}at^2$ nel caso di $a(t)$ non dipendono dalle condizioni iniziali.
L'accelerazione si esprime in metri al secondo quadrato ($\frac{m}{s^2}$, $m/s^2$ o $ms^-2$)

### 2.1.2 Moto Verticale

Sperimentale si scopre come un qualunque corpo lasciato libero di cadere nei pressi della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g \simeq 9.81\,ms^{-2}$ (si trascurano attrito dell'aria e si trattano piccole altitudini). Il valore di $g$ non è costante in ogni parte del mondo ma può variare fino a circa il 0.6%.
Impostiamo un sistema di riferimento con l'asse $x$ crescente verso l'alto e quindi con $a = -g = -9.81ms^{-2}$. Si avrà un corpo in caduta libera da un'altezza $h$:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v_0} = 0$

Con queste premesse otteniamo:

- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = -gt$$

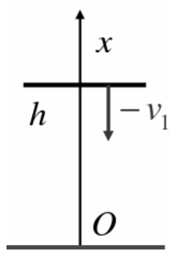
Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = v(t_c) = -gt_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Imponiamo ora una velocità iniziale $-\vec{v_1}$, quindi verso il basso:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $\vec{v_0} = -\vec{v_1}$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = h - \vec{v_1}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = -\vec{v_1} - gt$$

Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo $x = 0$ nell'equazione del moto:

$$h - \vec{v_1}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 - \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + \vec{v_1}t - h = 0$$

$$\downarrow$$

$$t_c = \frac{-\vec{v_1} \pm \sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}}{g}$$

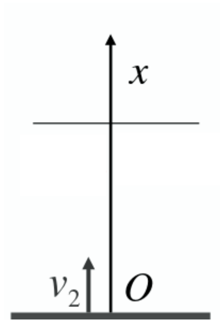
*ma $t < 0$ non è una soluzione fisica, quindi tengo solo la soluzione col +*

$$t_c = -\frac{\vec{v_1}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = -\vec{v_1} - gt_c = -\vec{v_1} - g\left[-\frac{\vec{v_1}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}\right] = -\sqrt{\vec{v_1}^2 + 2gh}$$

Con una velocità iniziale verso il basso avremo un tempo di caduta inferiore e una velocità al suolo maggiore rispetto alla partenza da fermo.
Analizziamo ora il moto verticale di un punto materiale lanciato dal basso verso l'alto con velocità $\vec{v_2}$:




Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $\vec{v_0} = \vec{v_2}$
- **Equazione del moto:**

$$\vec{x}(t) = x_0 + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\downarrow$$

$$\vec{x}(t) = \vec{v_2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + at$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v_2} - gt$$

Inizialmente si ha $v > 0$, finché il punto sale verso l'alto, fino a fermarsi. Con $v = 0$ si ha l'altezza massima. Si ha quindi:

$$v = \vec{v_2} - gt = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{\vec{v_2}}{g}$$

e quindi:

$$x_{max} = x(t_{max}) = \vec{v_2}\frac{\vec{v_2}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{\vec{v_2}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{v_2}^2}{g}$$

raddoppiando la velocità iniziale avrò quindi un'altezza 4 volte superiore. Da questp momento in poi di avrà la caduta libera da $h = x - max$ con $\vec{v_0} = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{v_2}^2}{g}\right)} = \frac{\vec{v_2}}{g}$$

e quindi si avrà:

$$t_{tot} = t_{max} + t_c = \frac{2\vec{v_2}}{g}$$

### 2.1.3 Moto nel Piano

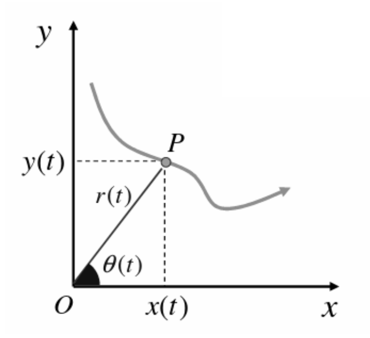
Si passa ora al moto in 2 dimensioni quindi con una traiettoria curva (e non più una retta).
Si introducono le coordinate cartesiane ($x(t)$ e $y(t)$) e quelle polari ($r(t)$ e $\vartheta(t)$). Si hanno le seguenti formule per il passaggio da coordinate cartesiane a polari:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tan\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

e le seguenti per il passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$x = r\,cos\,\vartheta$$

$$y = r\,sin\,\vartheta$$

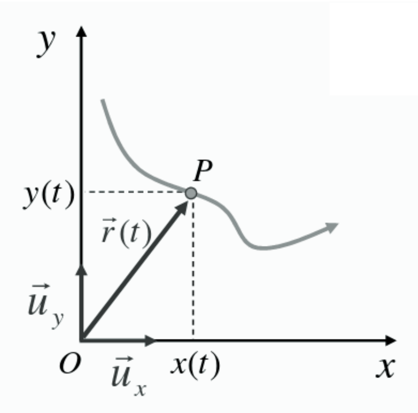



Il moto di $P$ è descritto attraverso l'evoluzione del vettore posizione:

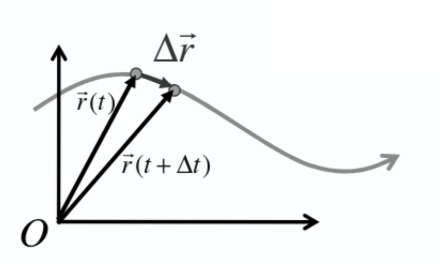
$$\vec{r}(t) \equiv (\vec{x}(t), y(t))$$

Si introducono inoltre i versori degli assi $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, ricordando che $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_y| = 1$ e che i versori restano fissi nel tempo. Si ottiene quindi:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$




Suppongo ora la traiettoria fissata e nota a priori. Fissata un'origine $O$, una posizione $s(t)$ e la velocità $v = \frac{ds}{dt}$ si ha che il moto è completamente determinato. Si ha una generalizzazione del moto rettilineo su una traiettoria curva.
Prendiamo ora in considerazione il seguente caso:




si ha il vettore spostamento:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

e il vettore velocità media:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

e il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

al limite $\Delta t \to 0$ lo spostamento infinitesimo si dispone sulla tangente alla traiettoria nel punto $P$:

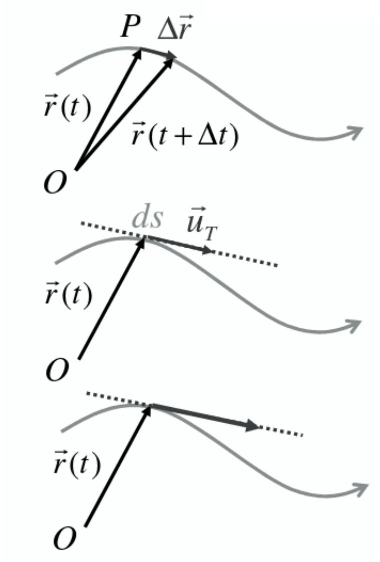
$$d\vec{r} = ds\vec{u}_T$$

con $|\vec{u}_T| = 1$ versore della tangente che indica una direzione variabile nel tempo. Per il vettore velocità avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$$

con $v$ indicate il modulo della velocità e $\vec{u}_T$ la direzione.

Quanto appena descritto è visualizzabile nelle seguenti immagini:



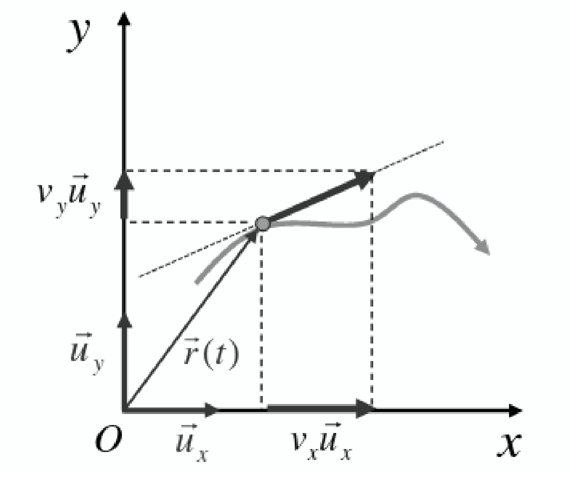

Analizziamo ora meglio la velocità nelle componenti cartesiane. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = \vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$ si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

con il modulo della velocità:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



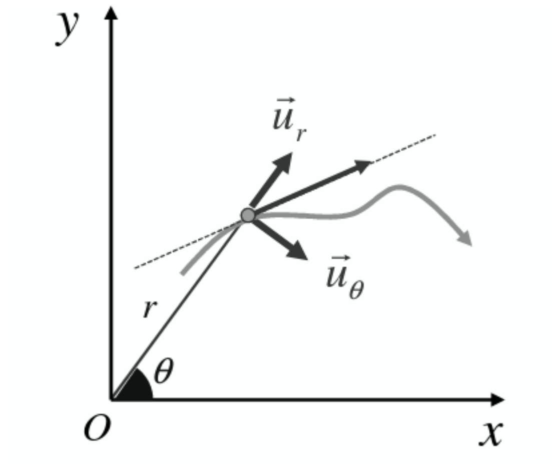
Passiamo alle componenti polari. Essendo $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ e $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$ (col versore $\vec{u}_r$ mostrato in figura) si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta$$

in quanto solitamente la derivata di un versore è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\perp$$

Ecco un'immagine di quanto detto:




Possiamo approfondire ancora lo studio della velocità in componenti polari infatti:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v_r}} + \underbrace{r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta}_{\vec{v_\vartheta}}$$

con:

- $\vec{v_r}$ è la **velocità radiale** e $|\vec{v_r}| = \frac{dr}{dt}$ è la variazione di $r$
- $\vec{v_\vartheta}$ è la **velocità traversa** e $|\vec{v_\vartheta}| = r\frac{d\vartheta}{dt}$ è la variazione della direzione

quindi:

$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\vartheta}$$

e quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}$$

Ecco un'immagine che spiega quanto detto: