

# Machine Learning

UniShare

Davide Cozzi  
@dlcgold

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione al ML</b>	<b>3</b>
2.1	Primi algoritmi . . . . .	13
2.1.1	Algoritmo find-S . . . . .	13
2.1.2	Algoritmi di eliminazione . . . . .	13
2.2	Alberi decisionali . . . . .	18
2.2.1	Algoritmo ID3 . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Reti neurali</b>	<b>24</b>
3.1	Neurone biologico . . . . .	24
3.2	Neuroni formali . . . . .	25
3.3	Reti neurali artificiali . . . . .	26
3.3.1	Percettrone . . . . .	27

# Capitolo 1

## Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlcgold/Appunti>.

Si segnala che le immagini sono tratte dalle slide del corso.

# Capitolo 2

## Introduzione al ML

Il **Machine Learning** (*ML*) è sempre più diffuso nonostante sia nato diversi anni fa.

Un **sistema di apprendimento automatico** ricava da un *dataset* una conoscenza non fornita a priori, descrivendo dati non forniti in precedenza. Si estrapolano informazioni facendo assunzioni sulle informazioni sistema già conosciute, creando una **classe delle ipotesi H**. Si cercano ipotesi coerenti per guidare il sistema di apprendimento automatico. Bisogna però mettere in conto anche eventuali errori, cercando di capire se esiste davvero un'ipotesi coerente e, in caso di assenza, si cerca di approssimare. In quest'ottica bisogna mediare tra **fit** e **complessità**. Ogni sistema dovrà cercare di mediare tra questi due aspetti, un *fit* migliore comporta alta *complessità*. Si ha sempre il rischio di **overfitting**, cercando una precisione dei dati che magari non esiste. Si ha un **generatore di dati** ma il sistema non ha conoscenza della totalità degli stessi.

Definiamo alcuni concetti base:

- **task** (*T*), il compito da apprendere. È più facile apprendere attraverso esempi che codificare conoscenza o definire alcuni compiti. Inoltre il comportamento della macchina in un ambiente può essere diverso da quello desiderato, a causa della mutabilità dell'ambiente ed è più semplice cambiare gli esempi che ridisegnare un sistema
- **performance** (*P*), la misura della bontà dell'apprendimento (e bisognerà capire come misurare la cosa)
- **experience** (*E*), l'esperienza sui cui basare l'apprendimento. Il tipo di esperienza scelto può variare molto il risultato e il successo dell'apprendimento

In merito alle parti “software” distinguiamo:

- **learner**, la parte di programma che impara dagli esempi in modo automatico
- **trainer**, il *dataset* che fornisce esperienza al *learner*

Durante l'**apprendimento** si estrapolano dati da **istanze di addestramento o test**. Quindi:

- si ricevono i dati di addestramento
- il sistema impara ad estrapolare partendo da quei dati
- si ricevono dati di test su cui si estrapola

L'ipotesi da apprendere viene chiamata **concetto target** (tra tutte le ipotesi possibili identifico quella giusta dai dati di addestramento).

Approfondiamo il discorso relativo all'*esperienza*. Innanzitutto nel momento della scelta bisogna valutare la rappresentatività esperienza. SI ha inoltre un controllo dell'esperienza da parte del *learner*:

- l'esperienza può essere fornita al learner senza che esso possa interagire
- il learner può porre domande su quegli esempi che non risultano chiari

**L'esperienza deve essere presentata in modo causale.**

Si hanno due tipi di esperienza:

1. **diretta**, dove il learner può acquisire informazione utile direttamente dagli esempi o dover inferire indirettamente da essi l'informazione necessaria (può essere chiaramente più complicato)
2. **indiretta**

Il tipo di dato che studieremo comunemente sarà il **vettore booleano** e la risposta sarà anch'essa di tipo booleano. In questo contesto l'ipotesi è una **coniunzione di variabili**.

Per ogni istanza di addestramento cerchiamo una risposta eventualmente corrispondente al nostro *target* (ovvero 1), qualora esista.

Si hanno tre tipi di apprendimento:

1. **apprendimento supervisionato**, dove vengono forniti a priori esempi di comportamento e si suppone che il *trainer* dia la risposta corretta per ogni input (mentre il learner usa gli esempi forniti per apprendere). L'esperienza è fornita da un insieme di coppie:

$$S \equiv \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

e, per ogni input ipotetico  $x_i$  l'ipotetico trainer restituisce il corretto  $y_i$

2. **apprendimento non supervisionato**, dove si riconosce *schemi* nell'input senza indicazioni sui valori in uscita. Non c'è target e si ha *libertà di classificazione*. Si cerca una *regolarità* e una *struttura* insita nei dati. In questo caso si ha:

$$S \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Il clustering è un tipico problema di apprendimento non supervisionato. Non si ha spesso un metodo oggettivo per stabilire le prestazioni che vengono quindi valutate da umani

3. **apprendimento per rinforzo**, dove bisogna apprendere, tramite il *learner* sulla base della risposta dell'ambiente alle proprie azioni. Si lavora con un *addestramento continuo*, aggiornando le ipotesi con l'arrivo dei dati (ad esempio per una macchina che deve giocare ad un gioco). Durante la fase di test bisogna conoscere le prestazioni e valutare la correttezza di quanto appreso. Il learner viene addestrato tramite *rewards* e quindi apprende una strategia per massimizzare i *rewards*, detta **strategia di comportamento** e per valutare la prestazione si cerca di massimizzare “a lungo termine” la ricompensa complessivamente ottenuta

Possiamo inoltre distinguere due tipi di apprendimento:

1. **attivo**, dove il *learner* può “domandare” sui dati disponibili
2. **passivo**, dove il *learner* apprende solo a partire dai dati disponibili

Si parla di **inductive learning** quando voglio apprendere una funzione da un esempio (banalmente una funzione target  $f$  con esempio  $(x, f(x))$ , ovvero una coppia). Si cerca quindi un'ipotesi  $h$ , a partire da un insieme d'esempi di apprendimento, tale per cui  $h \approx f$ . Questo è un modello semplificato dell'apprendimento reale in quanto si ignorano a priori conoscenze e si assume

di avere un insieme di dati. Viene usato un approccio che sfrutta anche il *Rasoio di Occam*.

Terminologia:

- $X$ , **spazio delle istanze**, ovvero la collezione di tutte le possibili **istanze** utili per qualche compito di *learning*. In termini statistici lo *spazio delle istanze* non è altro che lo **spazio campione** (ovvero lo spazio degli esiti fondamentali di un esperimento concettuale)
- $x \in X$ , **istanza**, ovvero un singolo “oggetto” preso dallo **spazio delle istanze**. Ogni **istanza** è rappresentata tramite un **vettore di attributi unici** (un attributo per posizione del vettore)
- $c$ , **concetto**,  $c \subseteq X$ , ovvero un sottoinsieme dello *spazio delle istanze* che descrive una *classe* di oggetti (ovvero di istanze) alla quale siamo interessati per costruire un modello di *machine learning*. In pratica raccolgo quel sottoinsieme di istanze che mi garantiscono, per esempio, uno o più attributi. La nozione statistica equivalente è quella di *evento* (ovvero un sottoinsieme dello *spazio campione*). Si ha quindi che, preso un concetto  $A \subseteq X$ :

$$f_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $h$ , **ipotesi**,  $h \subseteq X$
- $H$ , **spazio delle ipotesi**
- $(x, f(x))$ , **esempio**, ovvero prendo un'istanza e la vado ad etichettare con la sua classe di appartenenza. La funzione  $f$  è detta **funzione target**
- $D = \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ , **training set**, ovvero è la raccolta degli esempi. Qualora si avesse a che fare con un *training non supervisionato* si avrebbe:  $D = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{(x'_1, f(x'_1)), \dots, (x'_n, f(x'_n))\}$ , **test**

- un **modello di machine learning** (dove *machine learning* viene anche definito come lo studio di diverse strategie, più precisamente di ottimizzazione, per cercare ipotesi soddisfacenti/efficienti nello spazio delle ipotesi) è quindi l'*ipotesi migliore*. Questo **modello predittivo** viene addestrato tramite il *training set* e servirà per inferire nuove informazioni mai state osservate nel *training set*. Lo *spazio delle ipotesi* può quindi essere chiamato anche **spazio dei modelli** (come del resto *ipotesi* e **modello** intendono la stessa cosa)
- **linguaggio delle ipotesi**, è il linguaggio che definisce lo *spazio delle ipotesi/modelli*

**Esempio 1.** Prendiamo un problema semplice di regressione lineare.

In questo contesto un'istanza è un punto  $(x, y)$ , lo spazio delle ipotesi è quello formato dalle rette  $y = a + bx$  (dove  $a$  è il nostro **bias**). Tra tutte queste rette cerco quella che sarà il **modello predittivo**, tramite la quale poter prevedere l'andamento dei vari punti (di modo che dato un  $x$  sia in grado di stabilire un buon  $y$ )

- **cross validation**, ovvero ripeto  $m$  volte la validazione su campioni diversi di input per evitare che un certo risultato derivi dalla fortuna
- **ipotesi H**, ovvero una congiunzione  $\wedge$  di vincoli sugli attributi. Tale ipotesi è **consistente**, ovvero è coerente con tutti gli esempi
- **soddisfazione di un'ipotesi**: un'istanza  $x$  soddisfa un'ipotesi  $h$  sse tutti i vincoli espressi da  $h$  sono soddisfatti dai valori di  $x$  e si indica con:

$$h(x) = 1$$

**Esempio 2.** Avendo:

$$x = \langle S, W, N, S, W, S \rangle \text{ e } h = \langle S, ?, ?, S, ?, S \rangle$$

posso dire che  $x$  soddisfa  $h$ .

se invece ho che:

$$h = \langle S, ?, ?, \emptyset, ?, S \rangle$$

posso dire che  $x$  non soddisfa  $h$ .



Si avrà, in realtà, a che fare con dati, di target e ipotesi, booleani e questo ambito è propriamente chiamato **concept learning**.

**Definizione 1.** Il **concept learning** è la ricerca, nello spazio delle ipotesi, di funzioni che assumano valori all'interno di  $\{0, 1\}$ . In altre parole si parla di funzioni che hanno come dominio lo **spazio delle ipotesi** e come codominio  $\{0, 1\}$ :

$$f : X \rightarrow \{0, 1\}$$

Volendo si possono usare insiemi e non funzioni.

Si cerca quindi con opportune procedure la miglior ipotesi che si adatta meglio al concetto implicato dal training set

In questo contesto si cerca di capire quale funzione booleana è adatta al mio addestramento. In altre parole si cerca di apprendere un'ipotesi booleana partendo da esempi di training composti da input e output della funzione. Qualora nel concept learning si abbia a che fare con più di due possibilità si aumentano i bit usati.

Nel concept learning un'ipotesi è un insieme di valori di attributi e ogni valore può essere:

- specificato
- non importante, che si indica con "?", e che può assumere qualsiasi valore. Avere un'ipotesi con tutti i valori del vettore pari a "?" implica avere l'ipotesi più generale, avendo classificato tutte le istanze solo come esempi positivi
- nullo e si indica con  $\emptyset$ . Avere un'ipotesi con tutti i valori del vettore pari a  $\emptyset$  implica avere l'ipotesi più specifica, avendo classificato tutte le istanze solo come esempi negativi

**Esempio 3.** Vediamo quindi la rappresentazione di una ipotesi (ipotizzando di avere a che fare con solo 4 attributi  $A_i$ , sempre in prospettiva booleana):

$$h = \langle 0, 1, ?, 1 \rangle = \langle A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = ?, A_4 = 1 \rangle$$

nella realtà, grazie al "?" riferito all'istanza, l'ipotesi  $h$  è un insieme di due ipotesi:

$$h \in \{(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$$

**passando quindi da una notazione per ipotesi ad una insiemistica.** Ricordiamo inoltre che lo spazio delle istanze  $X$ , dal punto di vista insiemistico è:

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3, x_4 \in A_4\}$$

Se un'istanza  $x$  soddisfa i vincoli di  $h$  allora  $h$  classifica  $x$  come esempio positivo:

$$h(x) = 1$$

Quindi, dato un *training set*  $D$ , cerco di determinare un'ipotesi  $h \in H$  tale che:

$$h(x) = c(x), \forall x \in D$$

Si ha la teoria delle **ipotesi di apprendimento induttivo** che dice che se la mia  $h$  approssima bene nel *training set* allora approssima bene su tutti gli esempi non ancora osservati.

Il concept learning è quindi una ricerca del *fit* migliore.

**Definizione 2.** Date  $h_j, h_k \in H$  booleane e definite su  $X$ . Si ha che  $h_j$  è **più generale o uguale a**  $h_k$  (e si scrive con  $h_j \geq h_k$ ) sse:

$$(h_k(x) = 1) \longrightarrow (h_j(x) = 1), \forall x \in X$$

**Si impone quindi un ordine parziale.**

Si ha che  $h_j$  è **più generale di**  $h_k$  (e si scrive con  $h_j > h_k$ ) sse:

$$(h_j \geq h_k) \wedge (h_k \not\geq h_j)$$

Riscrivendo dal punto di vista insiemistico si ha che  $h_j$  è **più generale o uguale a**  $h_k$  sse:

$$h_k \supseteq h_j$$

e che è **più generale di**  $h_k$  sse:

$$h_k \supset h_j$$

Dal punto di vista logico si ha che  $h_j$  è **più generale di**  $h_k$  sse impone meno vincoli di  $h_k$

Lo spazio delle ipotesi è descritto da una congiunzione di attributi.

**Esempio 4.** Facciamo un esempio “giocattolo” di situazione di **concept learning**.

Il **target concept**, ovvero la domanda che ci si pone, è:

*In quali tipologie di giorni A apprezza fare sport acquatici?*

Abbiamo quindi una serie di attributi per il meteo con i vari valori che possono assumere:

Attributo	Possibili valori
sky	Sunny, Cloudy, Rainy
temp	Warm, Cold
humid	Normal, High
wind	Strong, Weak
water	Warm, Cold
forecast	Same, Change

In ottica concept learning si cerca quindi la **funzione target** *enjoySport* (che sarebbe la nostra funzione *c*):

$$\text{enjoySport} : X \rightarrow \{0, 1\}$$

Vediamo quindi anche un esempio di training set *D* (per praticità i valori degli attributi sono indicati con la sola iniziale):

sky	temp	humid	wind	water	forecast	enjoySport
S	W	N	S	W	S	yes
S	W	H	S	W	S	yes
R	C	H	S	W	C	no
S	W	H	S	C	C	yes

Dove nella colonna finale si ha la risposta booleana al problema, è infatti l'**etichetta target**.

Bisogna quindi cercare un'ipotesi *h* tale che  $h(x) = c(x)$ , per tutte le istanze nel training set.

Un'ipotesi *h*, anch'essa rappresentata come vettore, sarà quindi una congiunzione  $\wedge$  di vincoli di valore sugli attributi.

**Esempio 5.** Vediamo un esempio anche relativo alle nozioni di **più generale di**.

Si hanno due ipotesi:

$$h_J = \langle S, ?, ?, ?, ?, ? \rangle$$

$$h_k = \langle S, ?, ?, S, ?, ? \rangle$$

e quindi si ha che:

$$h_J \geq h_k \text{ ovvero } h_k(x) = 1 \implies h_J(x) = 1$$

Spazio delle ipotesi  $X$



Figura 2.1: Rappresentazione di **più generale di** con i diagrammi di Eulero-Venn, dove si nota come, in  $X$ ,  $h_j \geq h_k$

infatti un'istanza positiva per  $h_k$  è sicuramente positiva anche per  $h_j$ , in quanto  $h_k$  ha un vincolo più restrittivo sul quarto attributo, che deve assumere il valore  $S$ , mentre il quarto attributo di  $h_j$  può assumere qualsiasi valore. Questo aspetto si potrebbe rappresentare con un **diagramma di Eulero-Venn** dal punto di vista insiemistico (con il “cerchio” di  $h_j$  che conterrebbe quello di  $h_k$  (essendo un insieme più esterno e quindi più generale), nello spazio delle istanze).

**Esempio 6.** Consideriamo un'ipotesi  $h$ , con quattro attributi, dal punto di vista insiemistico:

$$h \in \{(0, 1, 1, 1) (0, 1, 0, 0)\}$$

e ci si chiede se  $h \in H$ .

In primis possiamo “comprimere” questa rappresentazione insiemistica in:

$$h = \langle 0, 1, ?, ? \rangle$$

$h$  ora è rappresentata come tipicamente fatto nel concept learning.

Quindi  $h \in H$ , avendo un'ipotesi con quattro attributi.

**Esempio 7.** Consideriamo un concetto  $c$ , con cinque attributi, dal punto di vista insiemistico:

$$c \in \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 0, 1, 0), \\ (0, 1, 1, 1, 0), \\ (0, 1, 0, 1, 1), \\ (0, 1, 1, 1, 1) \end{array} \right\}$$

e ci si chiede se  $c \in H$ , quindi se la strategia è di ricerca è buona esso può essere ritrovato (altrimenti nessuna strategia lo potrebbe riconoscere).

Studiando  $c$  otteniamo che:

$$c = \langle 0, 1, ?, 1, ? \rangle$$

**Usiamo la stessa rappresentazione usata per le ipotesi**

**Esempio 8.** Vediamo un esempio di studio dello spazio delle istanze  $X$ . Considero che le istanze sono specificate da due attributi:  $A_1 = \{0, 1, 2\}$  e  $A_2 = \{0, 1\}$ . Quindi, sapendo che  $X = A_1 \times A_2$  (con  $\times$  **prodotto cartesiano**), ho che:

$$|X| = |A_1 \times A_2|$$

e quindi in questo caso  $|X| = 6$

**Esempio 9.** Vediamo un esempio di studio del numero di concetti. in  $X$  abbiamo 3 attributi, ciascuno con 3 possibili valori:  $A_i = \{0, 1, 2\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  Abbiamo già visto come calcolare  $|X|$  e quindi sappiamo che:

$$|X| = 3^3 = 27$$

Sappiamo che un concetto  $c$  è un sottoinsieme di  $X$ , quindi, chiamato  $C = \{c_i \subseteq X\}$  l'insieme di tutti i concetti so che la sua cardinalità è pari alla cardinalità dell'**insieme delle parti** di  $X$ :

$$|C| = |\mathcal{P}(X)| = |2^{|X|}| = 2^{27}$$

**Esempio 10.** Vediamo un esempio di studio del numero delle ipotesi, ovvero si studia la cardinalità dello spazio delle ipotesi (che altro non è che il numero di differenti combinazioni di tutti i possibili valori per ogni possibile attributo). Bisogna notare che l'uso di  $\emptyset$  come valore di un attributo in un'ipotesi rende tale ipotesi **semanticamente equivalente** a qualsiasi altra che contenga un  $\emptyset$  (anche non per lo stesso attributo). Inoltre tutte queste sono ipotesi che rifiutano tutto. Tutte queste ipotesi conterranno come un unico caso nel conteggio delle ipotesi.

Quindi per conteggiare tutte ipotesi **semanticamente differenti** dovrò fare (indicando con  $|A|$  il numero di valori possibili per l'attributo  $A$ ):

$$|H|_{sem} = 1 + \prod_{A \in A_i} (|A| + 1)$$

quindi moltiplicare tutti il numero di valori di ogni attributo più 1 (indicante “?” e che quindi va conteggiato come possibile valore per ogni attributi) e sommare 1 (indicante emptyset che va conteggiato solo una volta per il discorso fatto sopra in merito all'equivalenza semantica di tali ipotesi) a questo

risultato finale.

**La seguente affermazione è un esercizio dato a casa, che io risolverei come scritto.**

Qualora volessi conteggiare tutte ipotesi **sintatticamente differenti** dovrò contare  $\emptyset$  come ipotetico valore per ogni attributo e quindi:

$$|H|_{\text{ sint }} = \prod_{A \in A_i} (|A| + 2)$$

## 2.1 Primi algoritmi

### 2.1.1 Algoritmo find-S

Parliamo ora dell'algoritmo **Find-S**. Questo algoritmo permette di partire dall'ipotesi più specifica (attributi nulli, indicati con  $\emptyset$ ) e generalizzarla, trovando ad ogni passo un'ipotesi più specifica e consistente con il training set  $D$ . L'ipotesi in uscita sarà anche consistente con gli esempi negativi dando prova che il target è effettivamente in  $H$ . Con questo algoritmo non si può dimostrare di aver trovato l'unica ipotesi consistente con gli esempi e, ignorando gli esempi negativi non posso capire se  $D$  contiene dati inconsistenti. Inoltre non ho l'ipotesi più generale.

---

#### Algorithm 1 Algoritmo Find-S

---

```

function FINDS
   $h \leftarrow$  l'ipotesi più specifica in  $H$ 
  for ogni istanza di training positiva  $x$  do
    for ogni vincolo di attributo  $a_i$  in  $h$  do
      if il vincolo di attributo  $a_i$  in  $h$  è soddisfatto da  $x$  then
        non fare nulla
      else
        sostituisci  $a_i$  in  $h$  con il successivo vincolo più
        generale che è soddisfatto da  $x$ 
  return ipotesi  $h$ 

```

---

### 2.1.2 Algoritmi di eliminazione

**Definizione 3.** Si dice che  $h$  è **consistente** con il training set  $D$  di concetti target sse:

$$\text{Consistent}(h, D) := h(x) = c(x), \forall \langle x, c(x) \rangle \in D$$

**Definizione 4.** Si definisce **version space**, rispetto ad  $H$  e  $D$ , come il sottoinsieme delle ipotesi da  $H$  consistenti con  $D$  e si indica con:

$$VS_{H,D} = \{h \in H \mid \text{Consistent}(h, D)\}$$

**Esempio 11.** Vediamo un esempio per capire la consistenza. Riprendiamo la situazione dell'esempio 4 con un training set  $D$  leggermente diverso:

example	sky	temp	humid	wind	water	forecast	enjoySport
1	S	W	N	S	W	S	yes
2	S	W	H	S	W	S	yes
3	R	C	H	S	W	C	no
4	S	W	H	S	C	C	yes

e prendiamo l'ipotesi:

$$h = \langle S, W, ?, S, ?, ? \rangle$$

e studiamo se  $h$  sia **consistente** con  $D$ .

Studio l'esempio 1:  $(\langle S, W, N, S, W, S \rangle, \text{yes})$ . Vedo che ogni valore va bene e, avendo la classificazione *yes*, ho la stessa etichetta assegnata dalla **funzione target** *enjoySport*, quindi l'ipotesi è consistente con l'esempio.

Questo vale per tutti e quattro gli esempi (il terzo non “appaia” ma questo è confermato dalla label *no*) e quindi la mia ipotesi è **consistente** con il training set.

Vediamo quindi algoritmo **List-Then Eliminate**:

---

**Algorithm 2** Algoritmo List-Then Eliminate

---

**function** LTE

$vs \leftarrow$  una lista connettente tutte le ipotesi di  $H$

**for** ogni esempio di training  $\langle x, c(x) \rangle$  **do**

rimuovi da  $vs$  ogni ipotesi  $h$  non consistente con

l'esempio di training, ovvero  $h(x) \neq c(x)$

**return** la lista delle ipotesi in  $vs$

---

Questo algoritmo è irrealistico in quanto richiede un numero per forza esaustivo di ipotesi.

**Definizione 5.** *Definiamo:*

- $G$  come il confine generale di  $VS_{H,D}$ , ovvero l'insieme dei membri generici al massimo. È l'insieme delle ipotesi più generali:

$$G = \{g \in H \mid g \text{ è consistente con } D \wedge$$

$$(\nexists g' \in H \text{ t.c. } g' \geq g \wedge g' \text{ è consistente con } D)\}$$

Possiamo dire che  $G = \langle ?, ?, ?, \dots ? \rangle$

- $S$  come il confine specifico di  $VS_{H,D}$ , ovvero l'insieme dei membri specifici al massimo. È l'insieme delle ipotesi più specifiche:

$$S = \{s \in H \mid s \text{ è consistente con } D \wedge$$

$$(\nexists s' \in H \text{ t.c. } s' \geq s \wedge s' \text{ è consistente con } D)\}$$

Possiamo dire che  $S = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots \emptyset \rangle$

Ogni elemento di  $VS_{H,D}$  si trova tra questi confini:

$$VS_{H,D} = \{h \in H \mid (\exists s \in S) (\exists g \in G) (g \geq h \geq s)\}$$

con  $\geq$  che specifica che è più generale o uguale

Vediamo quindi algoritmo **candidate eliminate**



**Algorithm 3** Algoritmo Candidate Eliminate

---

**function** CE $G \leftarrow$  insieme delle ipotesi più generali in  $H$  $S \leftarrow$  insieme delle ipotesi più specifiche in  $H$ **for** ogni esempio di training  $d = \langle x, c(x) \rangle$  **do**    **if**  $d$  è un esempio positivo **then**        rimuovi da  $G$  ogni ipotesi inconsistente con  $d$         **for** ogni ipotesi  $s$  in  $S$  inconsistente con  $d$  **do**            rimuovi  $s$  da  $S$ 

        aggiungi a  $S$  tutte le generalizzazioni minime  $h$  di  $s$   
 tali che  $h$  sia consistente con  $d$  e qualche membro di  $G$   
 sia più generale di  $h$

        rimuovi da  $S$  ogni ipotesi più generale di un'altra in  $S$     **else**        rimuovi da  $S$  ogni ipotesi inconsistente con  $d$         **for** ogni ipotesi  $g$  in  $G$  inconsistente con  $d$  **do**            rimuovi  $g$  da  $G$ 

        aggiungi a  $G$  tutte le generalizzazioni minime  $h$  di  $g$   
 tali che  $h$  sia consistente con  $d$  e qualche membro di  $S$   
 sia più generale di  $h$

        rimuovi da  $G$  ogni ipotesi più generale di un'altra in  $G$ **return** la lista delle ipotesi in  $vs$ 

---

Questo algoritmo ha alcune proprietà:

- converge all'ipotesi  $h$  corretta provando che non ci sono errori in  $D$  e che  $c \in H$
- se  $D$  contiene errori allora l'ipotesi corretta sarà eliminata dal *version space*
- si possono apprendere solo le congiunzioni
- se  $H$  non contiene il concetto corretto  $c$ , verrà trovata l'ipotesi vuota

Il nostro spazio delle ipotesi non è in grado di rappresentare un semplice concetto di target disgiuntivo, si parla infatti di **Biased Hypothesis Space**. Studiamo quindi un **unbiased learner**. Si vuole scegliere un  $H$  che esprime ogni concetto insegnabile, ciò significa che  $H$  è l'insieme di tutti i possibili

sottoinsiemi di  $X$ .  $H$  sicuramente contiene il concetto target.  $S$  diventa l'unione degli esempi positivi e  $G$  la negazione dell'unione di quelli negativi. Per apprendere il concetto di target bisognerebbe presentare ogni singola istanza in  $X$  come esempio di training.

Un learner che non fa assunzioni a priori in merito al concetto target non ha basi “razionali” per classificare istanze che non vede.

Introduciamo quindi il **bias induttivo** considerando:

- un algoritmo di learning del concetto  $L$
- degli esempi di training  $D_C = \{\langle x, c(x) \rangle\}$

Si ha che  $L(x_i, D_c)$  denota la classificazione assegnata all'istanza  $x_i$ , da  $L$ , dopo il training con  $D_c$ .

**Definizione 6.** Il **bias induttivo** (con **bias** che normalmente denota una distorsione o un scostamento dei dati) di  $L$  è un insieme minimale di asserzioni  $B$  tale che, per ogni concetto target  $c$  e  $D_c$  corrispondente si ha che:

$$[B \wedge D_c \wedge x_i] \vdash L(x_i, D_c), \forall x_i \in X$$

con  $\vdash$  che rappresenta l'implicazione logica

Possiamo quindi distinguere:

- **sistema induttivo**, dove si hanno in input gli esempi di training e la nuova istanza, viene usato l'algoritmo *candidate eliminate* con  $H$  e si ottiene o la classificazione della nuova istanza nulla
- **sistema deduttivo** equivalente al sistema induttivo sopra descritto dove in input si aggiunge l'asserzione “ $H$  contiene il concetto target” e si produce lo stesso output tramite un **prover di teoremi**

Abbiamo quindi visto tre tipi di *learner*:

1. il **rote learner**, dove si ha classificazione sse  $x$  corrisponde ad un esempio osservato precedentemente. Non si ha *bias induttivo*
2. l'algoritmo **candidate eliminate** con **version space**, dove il *bias* corrisponde al fatto che lo spazio delle ipotesi contiene il concetto target
3. l'algoritmo **Find-S**, dove il *bias* corrisponde al fatto che lo spazio delle ipotesi contiene il concetto target e tutte le istanze sono negative a meno che il target opposto sia implicato in un altro modo

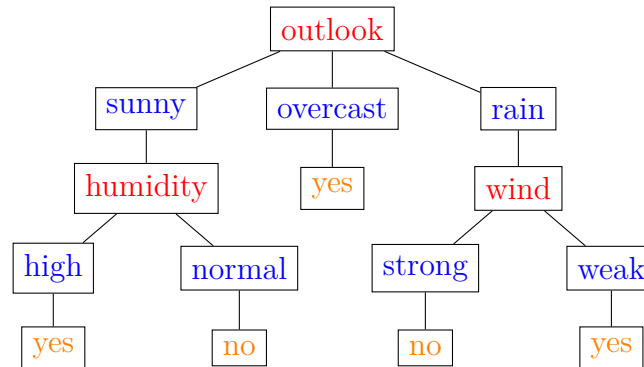


Figura 2.2: Esempio di albero decisionale

## 2.2 Alberi decisionali

Vediamo come sfruttare una struttura dati discreta, l'**albero di decisione**, per affrontare problemi di *concept learning*. Su questa struttura implementeremo l'algoritmo chiamato **ID3** che tra le ipotesi sceglie il risultato dell'apprendimento tramite esempi di addestramento. La lista delle ipotesi in questo caso è enorme e la scelta è guidata dal cosiddetto *information gain*. Possiamo quindi scegliere, al posto delle classiche funzioni booleane, **alberi di decisione** per rappresentare un modello che applicato ad esempi non visti ci dirà se applicare in output un'etichetta vera o falsa in base a quanto appreso. Siamo in ambito di **apprendimento supervisionato**.

Si hanno attributi che hanno anche più di due valori. Per ogni ipotesi si ha un albero di decisione, come quello in figura 2.2. In rosso si hanno gli attributi, in blu i valori degli attributi e in arancione le foglie coi risultati. Le foglie sono le risposte booleane.

Avanzando nell'albero cerchiamo una risposta (che ci deve essere).

La flessibilità nella costruzione dell'albero sta nel scegliere gli attributi e i valori di ognuno. Con l'algoritmo **ID3** si costruiscono alberi decisionali in base alle istanze che ricevo (per avere un albero coerente con le istanze ricevute). Formule booleane possono essere rappresentate in un albero decisionale (figura 2.3 e figura 2.4), costruendo un albero che sia *yes* solo nei casi la formula booleana sia vera.

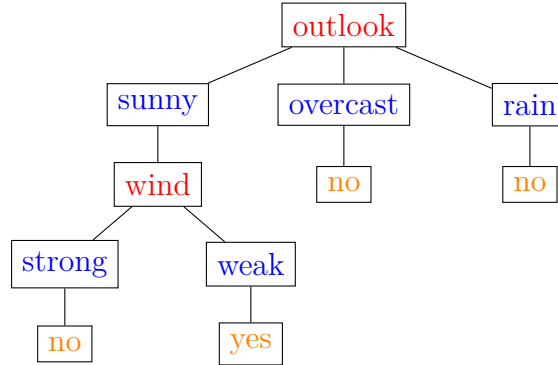


Figura 2.3: Esempio di albero decisionale per la formula  $(Outlook = Sunny) \wedge (Wind = Weak)$

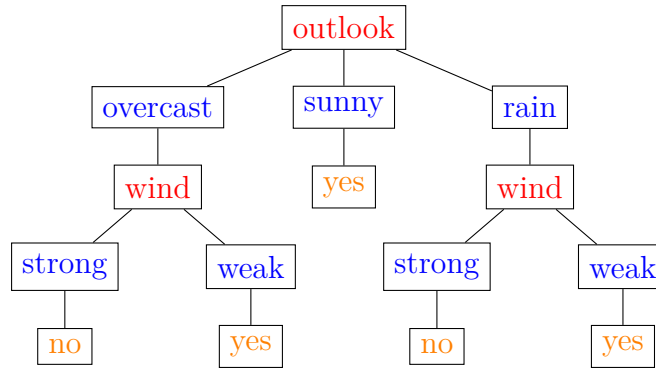


Figura 2.4: Esempio di albero decisionale per la formula  $(Outlook = Sunny) \vee (Wind = Weak)$

Notiamo a questo punto come l'albero decisionale in figura 2.2 è la rappresentazione di:

$$(Outlook = Sunny \wedge Humidity = Normal)$$

$$\vee (Outlook = Overcast)$$

$$\vee (Outlook = Rain \wedge Wind = Weak)$$

Possiamo dire che gli alberi decisionali descrivono tutte le funzioni booleane. Avendo  $n$  funzioni booleane avremo un numero distinto di tabelle di verità (e quindi di alberi decisionali), ciascuna con  $2^n$  righe, pari a  $2^{2^n}$ .

Riassumiamo alcune caratteristiche degli alberi decisionali:

- abbiamo attributi con valori discreti

- abbiamo un target di uscita discreto, le foglie hanno valori precisi
- posso costruire ipotesi anche con disgiunzioni
- può esserci “rumore” nel training dei dati
- possono esserci attributi di cui non ho informazioni

### 2.2.1 Algoritmo ID3

Vista la difficoltà di scegliere l'albero si ha l'idea di scegliere un piccolo albero di partenza (o più piccoli) e ricorsivamente l'attributo più significativo (sia nei nodi rossi intermedi che nelle foglie) come radice per il sotto-albero. Si fanno quindi crescere in modo coerente gli alberi piccoli scelti in partenza. Si punta ad arrivare ad un albero valido per tutti gli esempi ricevuti e anche per quelli non visti.

Iniziamo a vedere l'algoritmo anche se saranno necessarie molte specifiche:

---

#### Algorithm 4 Algoritmo ID3

---

##### **function** ID3

```

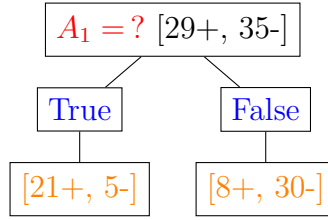
  A ← il “miglior” attributo di decisione per il prossimo nodo
  assegno A come attributo di decisione per il nodo, che sarà rosso
  for ogni valore dell'attributo A do
    creo un discendente
    ordina gli esempi di training alla foglia
    in base al valore dell'attributo del branch
    if ho classificato tutti gli esempi di training then
      mi fermo
    else
      itero sulle foglie appena create
```

---

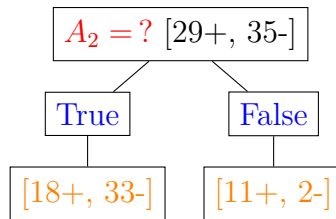
Bisogna in primis capire cosa si intende come **attributo migliore**. Per farlo introduciamo la seguente notazione:

$$[\textit{esempi positivi+}, \textit{esempi negativi-}]$$

entrambi rappresentati con un valore intero. Gli esempi positivi sono gli esempi che già mi hanno restituito *yes* mentre quelli negativi. In generale sono tutti esempi su cui devo ancora valutare l'attributo. E proseguo così assegnando etichette positive e negative. Vediamo quanto detto:



Se siamo nella situazione in cui dobbiamo confrontare l'attributo sopra con un altro, per esempio:



Entrambe le foglie del primo attributi ci parlano di valori sbilanciati (tra esempi positivi e negativi), a differenza delle due del secondo attributo, dove sono una sbilanciata e una no. Per ora stabiliamo ad occhio lo sbilanciamento. Il criterio di scelta ci porta a preferire lo sbilanciamento, verso un ideale “tutti positivi” o “tutti negativi”. Quindi se un attributo ha divisioni sbilanciate è da ritenersi migliore.

Per essere ancora più precisi bisogna richiamare la matematica dell'**entropia**.

**Definizione 7.** Dato un training set  $S$  con valori  $v_i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Se l'entropia di un insieme di bit misura più o meno la sua quantità di informazione (quanto è “speciale”) noi possiamo richiamare una formula per l'entropia su  $S$ :

$$I(P(v_1), \dots, P(v_n)) = \sum_{i=1} -P(v_i) \log_2 P(v_i)$$

Dove  $I(x)$  indica il valore dell'entropia su  $x$  e  $P(y)$  sta per la probabilità legata ad un valore  $y$ .

Nel caso booleano le istanze presenti in un certo insieme  $S$  sono associate ad un'etichetta, conteggiandole. Nella variabile  $p$  conto i valori di  $S$  con etichetta positiva e con  $n$  negativa (esempi positivi e negativi). Ottengo quindi in modo esplicito la sommatoria:

$$I\left(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\right) = -\frac{p}{p+n} \log_2 \frac{p}{p+n} - \frac{n}{p+n} \log_2 \frac{n}{p+n}$$

Se inoltre diciamo che  $p_+$  è la proporzione di esempi positivi e  $p_-$  di quelli negativi (saranno quindi tra 0 e 1) possiamo misurare l'**impurità** di  $S$  con

l'entropia:

$$Entropy(S) = -p_+ \log_2 p_+ - p_- \log_2 p_-$$

Avrò quindi alta entropia se positivi e negativi sono “metà e metà”

Parliamo quindi di **information gain**  $IG$  che viene calcolato su ogni attributo  $A$  e su  $S$ :

$$IG(S, A) = I\left(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\right) - remainder(A)$$

dove:

$$remainder(A) = \sum_{i=1}^v \frac{p_i + n_i}{p+n} I\left(\frac{p_i}{p_i + n_i}, \frac{n_i}{p_i + n_i}\right)$$

e quindi l'information gain è la riduzione aspettata nell'entropia per ordinare  $S$  sull'attributo  $A$ . Si sceglie l'attributo con il maggiore IG.

Possiamo riscrivere il conto come:

$$IG(S, A) = Entropy(S) - \sum_{v \in values(A)} \frac{|S_v|}{|S|} Entropy(S_v)$$

**Esempio 12.** Vediamo l'esempio di calcolo di entropia di  $A_1$  con  $[29+, 35-]$ :

$$Entropy([29+, 35-]) = -\frac{29}{64} \log_2 \frac{29}{64} - \frac{35}{64} \log_2 \frac{35}{64} = 0.99$$

Calcolo anche l'information gain di  $A_1$ , sapendo che  $Entropy([21+, 5-]) = 0.71$  e  $Entropy([8+, 30-]) = 0.74$ , e quindi:

$$IG(S, A_1) = 0.99 - \frac{26}{64} \cdot 0.71 - \frac{38}{64} \cdot 0.74 = 0.27$$

ugualmente calcolo  $IG(S, A_2) = 0.12$ .

Quindi so che devo scegliere  $A_1$  in quanto  $0.27 > 0.12$

Facciamo qualche osservazione finale sull'**algoritmo ID3**:

- lo spazio delle ipotesi è completo e sicuramente contiene il target
- ho in output una singola ipotesi
- non si ha backtracking sugli attributi selezionati, si procede con una ricerca greedy (ma trovo scelte buone localmente e non ottime)

- fa scelte basate su una ricerca statistica, facendo sparire incertezze sui dati
- il bias non è sulla classe iniziale, essendo lo spazio delle ipotesi completo, ma sulla scelta di solo alcune funzioni, preferendo alberi corti (e più semplici) e posizionando attributi ad alto information gain vicino alla radice. Il bias è quindi sulla preferenza di alcune ipotesi. Si usa il criterio euristico di *rasoio di Occam*
- $H$  è l'insieme potenza delle istanze  $X$

Viene introdotto però l'**overfitting**. Se misuro l'errore di una ipotesi  $h$  sul training set ( $error_{traini}(h)$ ) e poi misuro l'errore di quella ipotesi sull'intero set delle possibili istanze  $D$  ( $error_D(h)$ ) ho che l'ipotesi  $h$  va in **overfit** sul quel data set se:

$$error_{traini}(h) < error_{traini}(h') \wedge error_D(h) > error_D(h')$$

quindi se presa un'altra ipotesi questa è migliore della prima e ha un errore sull'intera distribuzione delle ipotesi inferiore vado in *overfit*. Il problema è che non posso sapere se esiste tale  $h'$ . Per evitare il problema uso sempre il rasoio di Occam scegliendo ipotesi semplici ed evitando di far crescere l'albero quando lo "split" non è statisticamente significativo. Un altro modo è quello di togliere pezzi, all'albero, che toccano poche istanze o pure calcolare una *misura di complessità dell'albero*, minimizzando la grandezza dell'albero e gli errori del *training set*, usando il **Minimum Description Length (MDL)**



# Capitolo 3

## Reti neurali

### 3.1 Neurone biologico

In natura l'operazione di *learning* viene eseguita tramite il **cervello**, che tramite i **neuroni**, delle cellule nervose, è in grado di effettuare una miriade di operazioni in parallelo. Potenzialmente i neuroni hanno un tempo di risposta nell'ordine dei millisecondi mentre in circuito logico si aggira nell'ordine dei nanosecondi quindi la differenza deve essere ricercata nell'*architettura* del nostro cervello. La “potenza di calcolo” del cervello è data dal funzionamento parallelo di  $\sim 10^{11}$  neuroni, collegati tra loro da  $\sim 10^5$  connessioni. Vediamo quindi indicativamente gli elementi principali di un **neurone biologico**:

- **corpo**, che implementa tutte le funzioni logiche del neurone
- **assone**, il canale di uscita verso gli altri neuroni, è quello che si occupa di trasmettere gli impulsi nervosi
- **dendrite**, la parte che permette al neurone di ricevere gli impulsi nervosi
- **sinapsi**, ovvero la regione funzionale in cui avviene lo scambio dei segnali, ovvero dove ogni singolo ramo terminale dell'assone (**bottone sinaptico**) del neurone (detto **neurone pre-sinaptico**) trasmette impulsi nervosi provenienti dal neurone ai dendriti di altri neuroni (detti **neuroni post-sinaptici**)

Questa “architettura” è quindi basata sull'emissione di segnali da parte del neurone. Questa azione dipende da vari fattori, come ad esempio la forza del segnale ricevuto da altri neuroni e la forza delle connessioni di un neurone con le sue sinapsi. Si ha che la **funzione di risposta** di un neurone è una

funzione non lineare impulso ricevuto dai dendriti. Dopo l'invio di un impulso ogni neurone ha un tempo, detto **refractory time**, prima del quale poter inviare un altro impulso. Si hanno infatti due stati possibili per il *neurone biologico*:

1. **eccitazione**, quando il neurone invia, tramite le sinapsi, segnali (che per comodità computazionale chiamiamo già **pesati**) ai neuroni connessi
2. **inibizione**, quando il neurone non invia segnali

La **transizione di stato** dipende dall'entità complessiva dei segnali eccitatori e inibitori ricevuti dal neurone.

Una legge importante è la **regola di Hebb** che indica che i cambiamenti di forza delle connessioni delle sinapsi di due neuroni connessi è proporzionale alla correlazione tra l'emissione di segnali dei neuroni stessi (ovvero se due neuroni rispondono allo stesso input allora è bene che siano connessi).

## 3.2 Neuroni formali

Dopo una breve introduzione biologica possiamo alla definizione **formale e matematica** che verrà usato nello studio delle reti neurali. Questo modello matematico è stato proposto da **McCulloch** e **Pitts** e definisce formalmente un **neurone binario a soglia** come una quadrupla:

$$\langle n, C, W, \theta \rangle$$

dove:

- $n$  specifica il **nome**
- $C$  specifica l'**insieme degli input**  $c_i$
- $W$  specifica il **vettore dei pesi**  $w_i$ , associati ad ogni input  $c_i$ . È una rappresentazione formale dei pesi delle sinapsi (e si nota che possono essere sia positivi che negativi)
- $\theta$  specifica la **soglia**, utile per definire quando un neurone manda effettivamente il segnale

Per definire i **due stati del neurone** si usa l'insieme  $\{0, 1\}$  o l'insieme  $\{-1, 1\}$  (si ha infatti un **neurone binario**). La **funzione di transizione** viene indicata con:

$$c(t+1) = 1 \text{ sse } \sum w_i \cdot c_i(t) \geq \theta$$

ovvero in un tempo successivo  $t + 1$  ho che il neurone emette il segnale (stato pari ad 1) sse al tempo precedente  $t$  ho avuto una somma pesata, tramite  $w_i$ , degli input  $c_i(t)$  maggiore della soglia  $\theta$ .

L'insieme degli stati, rappresentato in modo binario, comporta che la funzione di transizione sia una **funzione a scalino**:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{con } x = \sum w_i \cdot c_i$$

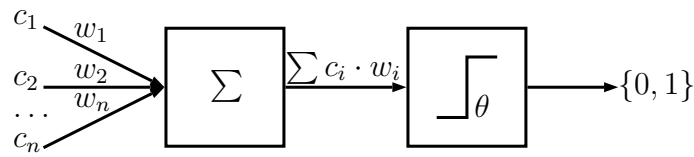


Figura 3.1: Rappresentazione matematica del modello di McColluch e Pitts

Questo modello è comunque estremamente semplificato. L'insieme degli stati potrebbe non essere booleano ma potrebbe essere  $\mathbb{R}$ , infatti anche nella biologia il segnale in uscita dai neuroni è graduato e continuo. Si potrebbe quindi avere una **funzione logistica o sigmoide**, dove, avendo come insieme degli stati  $\mathbb{R}$  si avrebbe:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad \text{con } x = \sum w_i \cdot c_i$$

### 3.3 Reti neurali artificiali

Lo studio di un singolo neurone non è comunque particolarmente interessante. Si introduce quindi lo studio di **reti neurali** dove vengono posti diversi *neuroni* in modo che possano fare qualcosa di utile.

Si hanno alcune **caratteristiche strutturali** delle *reti neurali artificiali*:

- hanno un gran numero di unità
- permettono operazioni elementari
- hanno un alto livello di interconnessione

Ci sono anche alcune **caratteristiche dinamiche**:

- si hanno cambiamenti di stato in funzione dello stato dei neuroni collegati in input

- si ha una funzione di uscita per ogni unità
- si ha la modifica dello schema di connessione, tramite la modifica dei pesi, per l'apprendimento

Dal punto di vista formale, dovendo espandere le definizioni fatte nel caso del singolo neurone a più neuroni, si lavora con:

- una **matrice dei pesi**  $W$ , con i valori indicati tramite  $w_{ij}$
- un **vettore delle soglie**  $\Theta$ , con i valori indicati tramite  $\theta_i$
- l'**input netto per il neurone (?)  $i$  al tempo  $t$** , indicato con  $n_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \cdot c_j(t) - \theta_i$
- la **funzione di transizione** indicata con  $c_i(t+1) = g(n_i(t))$

**RIVEDERE NOTAZIONE CHE POTREBBE ESSERE ERRATA.**

### 3.3.1 Percettrone

Il percettrone è la tipologia di rete neurale più semplice, sono infatti una semplificazione estrema del sistema nervoso.

**Definizione 8.** *Un percettrone è una collezione di neuroni, di cardinalità  $M$ , a cui viene aggiunto un insieme di nodi in input, di cardinalità  $N$  (generalmente diversa da quella della collezione di neuroni). Generalmente gli input sono pesati e con la notazione  $w_{ij}$  indichiamo il peso della connessione tra il nodo  $i$ -simo in input e il neurone  $j$ -simo.*

*I neuroni sono tra loro completamente indipendenti comportando anche un insieme di elementi in output. Nel caso semplice di funzioni di transizione binarie l'output sarà quindi un vettore binario contenente all'indice  $k$ -simo 1 se il neurone  $k$  ha inviato il segnale o 0 altrimenti.*

*Solitamente coi percettroni si parla di learning supervisionato.*

Dal punto di vista geometrico il vettore dei pesi  $W$  rappresenta un **iperpiano** (che è una retta in  $\mathbb{R}^2$ ) che separa i possibili vettori di input in due classi, a seconda che formino con  $W$  un angolo acuto o ottuso.

**Ripasso di algebra lineare**

Per praticità ripasseremo i concetti fondamentali facendo riferimento a  $\mathbb{R}^2$ , formato quindi da elementi, dette coordinate, che sono coppie ordinate  $(x_1, x_2)$  (rappresentabili con un punto nel piano o con un segmento orientato con partenza nell'origine e destinazione nelle coordinate del punto nel piano).

Ricordiamo le operazioni fondamentali, dati  $R$  pari a  $(x_1, x_2)$  e  $Q$  pari a  $(x_3, x_4)$

- addizione:  $P + Q = (x_1 + x_3, x_2 + x_4)$
- prodotto per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda \cdot R = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$
- prodotto scalare tra vettori:  $\langle P, Q \rangle \equiv P \cdot Q^T = \sum_{i=1}^n r_i \cdot q_i$  (dove  $r_i$  e  $q_i$  sono rispettivamente gli elementi di  $R$  e  $Q$  all'indice  $i$ )

Ricordiamo la *norma* di un vettore  $X$ :

$$\|X\| \equiv \sqrt{X \cdot X^T} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i} = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Con  $X = 0$  indichiamo il *vettore nullo* (che ha anche norma nulla).

Definiamo il *versore* (*vettore unitario*) come:

$$\frac{X}{\|X\|}, \quad X \neq 0$$

In  $\mathbb{R}^2$  l'angolo  $\theta$  sotteso tra due vettori  $X$  e  $Y$  è:

$$\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

La proiezione di un vettore  $X$  sul vettore  $Y$  è:

$$X_Y = \|X\| \cdot \cos \theta$$

Si hanno quindi tre casi:

1.  $\theta < 90 \iff \langle X, Y \rangle > 0$
2.  $\theta > 90 \iff \langle X, Y \rangle < 0$
3.  $\theta = 90 \iff \langle X, Y \rangle = 0$

(quindi disegnando una retta sul piano tutti i punti sopra di essa appartengono ad una certa classe e quelli sotto ad un'altra).

Posso definire una retta  $r$  che passa per l'origine in  $\mathbb{R}^2$  assegnando un vettore  $W = (w_1, w_2)$  ad essa ortogonale, infatti tutti i punti, ovvero vettori,  $X = (x_1, x_2)$  sulla retta sono ortogonali a  $W$ :

$$\langle W, X \rangle = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 = 0$$

Quindi la retta (ovvero l'iperpiano) mi separa due semispazi, a seconda che  $\langle X, W \rangle$  sia strettamente positivo o strettamente negativo.

Generalizzando ora a  $n$  dimensioni ho che, dato l'iperpiano  $h$  (di dimensione  $n - 1$ ):

- se  $h$  passa dall'origine allora si ha l'equazione  $\langle X, Y \rangle = 0$
- se non passa per l'origine  $\langle X, Y \rangle + b = 0$
- 

I vettori in un iperpiano si proiettano tutti nello stesso modo e i punti ad un lato e all'altro dell'iperpiano sono distinti dal fatto che  $\langle X, Y \rangle + b$  sia strettamente positiva o strettamente negativa

Studiamo quindi l'apprendimento del perceptrone.

Come abbiamo visto l'output è rappresentato da un vettore booleano rappresentante 1 in posizione  $k$  in corrispondenza del neurone  $k$ -simo che ha inviato il segnale o 0 altrimenti. A questo risultato si giunge tramite un certo input pesato e, essendo un training supervisionato, esso viene verificato. Qualora un risultato non vada bene bisogna procedere cambiando i pesi. Il problema è appunto la scelta dei pesi, che non sono conoscibili a priori. Un peso troppo alto porta un neurone a mandare il segnale anche quando non dovrebbe mentre un peso troppo basso impedisce l'invio del segnale anche quando il neurone dovrebbe. Preso un neurone  $k$  che porta un risultato errato posso definire una **function error** come:

$$E = y_k - t_k$$

dove:

- $y_k$  è l'output del neurone
- $t_k$  è il target atteso per quel neurone

Per tale neurone bisognerà sistemare tutti i pesi  $w_{ik}$ .

Se  $E$  è negativa allora il neurone avrebbe dovuto emettere il segnale ma non lo ha fatto e quindi bisogna aumentare il peso e viceversa (nel caso binario o ho -1 o 1). Bisogna però considerare che l'input potrebbe essere negativo e quindi anche in pesi devono poter essere negativi. Perfezioniamo quindi il conto della differenza di peso necessaria con la moltiplicazione di  $E$  (messa in negativo in modo da eventualmente "sistemare" il segno per input negativi) per l'input:

$$\Delta w_{ik} = -(y_k - t_k) \times c_i$$

In questo discorso bisogna inserire anche la soglia, importante per input specifici (basti pensare ad un input pari a 0 che annullerebbe ogni cambio di peso secondo la formula precedente). Per ora trascureremo tali casi anche se una semplice soluzione per un caso limite come quello di avere solo input nulli, è quella di aggiungere un **nodo bias**, di valore  $-1$ , collegato ai neuroni con peso nullo.

Viene anche introdotto il **learning rate**  $\eta$ , utile per stabilire la velocità di apprendimento della rete. Si ottiene quindi:

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \eta \cdot (y_j - t_j) \times c_i$$

In pratica  $\eta$  decide quanto cambiare il peso (e se si vuole trascurare il parametro basta porre  $\eta = 1$ ). L'uso di tale parametro migliora la stabilità della *rete neurale* che non avrà cambi di peso eccessivi, anche se questo comporta tempi di apprendimento più estesi. Tipicamente si ha che:

$$0.1 \leq \eta \leq 0.4$$

Si ha che ad ogni iterazione ci si aspetta un miglioramento della *rete neurale* (e questo miglioramento è dimostrabile). Viene imposto quindi un limite  $T$  di iterazioni entro le quali interrompere l'apprendimento anche se non si è arrivati al risultato corretto.

Vediamo due teoremi utili per lo studio dell'apprendimento del perceptrone su due classi  $A$  e  $B$ , banalmente rappresentanti, nella nostra situazione binaria e semplificata, il caso in cui si abbia il neurone che emette il segnale (valore 1 in output) o altrimenti (valore 0 in output). Nel nostro caso le classi sono discriminabili.

**Teorema 1** (Teorema di convergenza). *Comunque si scelgano i pesi iniziali, se le classi  $A$  e  $B$  sono discriminabili, la procedura di apprendimento termina dopo un numero finito di passi*

**Teorema 2** (Teorema di Minsky e Papert). *La classe delle forme discriminabili da un perceptrone semplice è limitata alle forme linearmente separabili*

**Teorema 3.** *Se l'insieme degli input estesi è partito in due classi linearmente separabili allora:*

$$\exists W \text{ t.c. } \begin{cases} 1 & \text{se } \sum w_i \cdot c_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sum w_i \cdot c_i < 0 \end{cases}$$

con  $W$  **vettore dei pesi**.

Vediamo quindi l'algoritmo di learning per un percettrone, data la **funzione di transizione** per un input di cardinalità  $m$  e  $n$  neuroni:

$$y_j = g \left( \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i < 0 \end{cases}$$

---

**Algorithm 5** Algoritmo di learning del percettrone

---

**function** PERCEPTRON-LEARNING

*# Inizializzazione*

*si imposta tutti i pesi  $w_{ij}$  a valori casuali piccoli (anche negativi)*

*# Training*

**for**  $T$  iterazioni **o** fino a che tutti gli output non sono corretti **do**

**for** ogni vettore input **do**

*# calcolo lo stato del neurone  $j$  tramite la funzione di transizione  $g$*

$$y_j = g \left( \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i < 0 \end{cases}$$

*# aggiorno ogni peso individualmente*

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \eta \cdot (y_j - t_j) \times c_i$$

*# nella prossima iterazione avrò nuovi pesi*

*# Recall per il risultato finale*

$$y_j = g \left( \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sum_{i=0}^m w_{ij} \cdot c_i < 0 \end{cases}$$


---

La complessità dell'algoritmo è  $O(Tnm)$ .

Si può dimostrare, tramite il **teorema della convergenza del percettrone** che dopo  $\beta$  modifiche di peso il percettrone classifica correttamente ogni input anche se tale  $\beta$  non è il reale numero di stadi e dipende dall'output.