Linguaggi e Computabilità

UniShare

Davide Cozzi
@dlcgold

Gabriele De Rosa
@derogab

Federica Di Lauro
@f_dila

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: `https://github.com/dlcgold/Appunti`.
Grazie mille e buono studio!

1.1 Definizioni

- un **linguaggio** è un insieme di stringhe che può essere generato mediante un dato meccanismo con delle date caratteristiche; un linguaggio può essere riconosciuto, ovvero dando in input una stringa un meccanismo può dirmi se appartiene o meno ad un linguaggio. I meccanismi che generano linguaggi si chiamano *grammatiche*, quelli che li riconoscono *automi*. I linguaggi formali fanno parte dell'informatica teorica *(TCS)*
- si definisce **alfabeto** come un insieme finito e non vuoto di simbolo (come per esempio il nostro alfabeto o le cifre da 0 a 9). Solitamente si indica con Σ o Γ
- si definisce **stringa** come una sequenza finita di simboli (come per esempio una parola o una sequenza numerica). La stringa vuota è una sequenza di 0 simboli, e si indica con ε o λ
- si definisce **lunghezza di una stringa** il numero di simboli che la compone (ovviamente contando ogni molteplicità). Se si ha $w \in \Sigma^*$ è una stringa w con elementi da Σ^* (insieme di tutte le stringhe di tutte le lunghezze possibili fatte da Σ), allora $|w|$ è la lunghezza di w, inoltre $|\varepsilon| = 0$.

- si definisce **potenza di un alfabeto** Σ^k come l'insieme di tutte le sequenze (espressi come stringhe e non simboli) di lunghezza $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ ottenibili da quell'alfabeto (se Σ^2 si avranno tutte le sequenza di 2 elementi etc...). Se ho $k = 1$ si ha $\Sigma^1 \neq \Sigma$ in quanto ora ho stringhe e non simboli. Se ho $k = 0$ ho $\Sigma^0 = \varepsilon$. Dato k ho $|\Sigma|$ che è la cardinalità dell'insieme Σ (e non la sua lunghezza come nel caso delle stringhe); sia $w \in \Sigma^k = a_1, a_2, ..., a_k$, $a_i \in \Sigma$ e $|\Sigma| = q$ ora:
$$|\Sigma^k| = q^k$$
- si definisce Σ^* come **chiusura di Kleene** che è l'unione infinita di Σ^k ovvero
$$\Sigma* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup ... \cup \Sigma^k$$
- si ha che Σ^+ è l'unione per $k \geq 1$ di Σ^k ovvero:
$$\Sigma+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup ... \cup \Sigma^k = \Sigma^* - \Sigma^0$$
per esempio, per l'insieme $\{0, 1\}$ si ha:
$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 100, 000, ...\}$$
- quindi un **linguaggio** L è un insieme di stringhe e:
$$L \subseteq \Sigma^*$$
si hanno sottoinsiemi particolari, come l'insieme vuoto, che resta però un linguaggio, il **linguaggio vuoto** e $\emptyset \in \Sigma^k$, $|\emptyset| = 0$ che è diverso dal linguaggio che contiene la stringa vuota $|\varepsilon| = 1$ (che conta come una stringa). Inoltre $\Sigma^* \subseteq \Sigma^*$ che ha lunghezza infinita. Posso concatenare due stringhe con un punto: $a \cdot b \cdot c = abc$ e $a \cdot \varepsilon = a$. Ovviamente la stringa concatenata è lunga come la somma delle lunghezze delle stringhe che la compongono. Vediamo qualche esempio di linguaggio:
  - il linguaggio di tutte le stringhe che consistono in n 0 seguiti da n 1:
  $$\{\varepsilon, 01, 0011, 000111, ...\}$$
  - l'insieme delle stringhe con un uguale numero di 0 e di 1:
  $$\{\varepsilon, 01, 10.0011, 0101.1001, ..\}$$
  - l'insieme dei numeri binari il cui valore è un numero primo:
  $$\{\varepsilon, 10, 11, 101, 111, 1011, ...\}$$

- Σ^* è un linguaggio per ogni alfabeto Σ
- $\emptyset$, il linguaggio vuoto, e $\{\varepsilon\}$ sono un linguaggio rispetto a qualunque alfabeto

Prendiamo un alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ con la sua chiusura di Kleen $\Sigma = \{0, 1\}^*$. Quando si ha un input si può avere un problema di decisione, P, che dia come output "si" o "no". Posso avere un problema di decisione (o *membership*) su $w \in \Sigma = \{0, 1\}^*$, con w stringa, che dia in output "si" o "no". Un linguaggio L sarà:

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid P(w) = si$$

quindi si ha che:

$$\Sigma^* \backslash L = \{P(w) = no\}$$

Vediamo ora un esempio di *Context Free Language (CFL)*, costruito a partire da una *Context Free Grammar (CFG)*:

Esempio 1. *Sia* $\Sigma = \{0, 1\}$ *e* L_{pal} = *"stringhe palindrome binarie". Quindi, per esempio,* $0110 \in L$, $11011 \in L$ *ma* $10010 \notin L$. *Si ha che* ε*, la stringa vuota, appartiene a* L*. Diamo una definizione ricorsiva:*

- ***base:*** ε, $0 \;\; 1 \in L_{pal}$
- ***passo:*** *se* w *è palindroma allora* $0w0$ *è palindromo e* $1w1$ *è palindromo*

una variabile generica S *può sottostare alle regole di produzione di una certa grammatica. In questo caso si ha uno dei seguenti:*

$$S \to \varepsilon,\ S \to 0,\ S \to 1,\ S \to 0S0,\ S \to 1S1$$

Si ha che una grammatica G è una quadrupla $G = (V, T, P, S)$ con:

- V simboli variabili
- T simboli terminali, ovvero i simboli con cui si scrivono le stringhe alla fine
- P regole di produzione
- S variabile di partenza *start*

riprendiamo l'esempio sopra:

Esempio 2.

$$G_{pal} = (V = \{S\},\ T = \{0,1\},\ P,\ S)$$

con:

$$P = \{S \to \varepsilon,\ S \to 0,\ S \to 1,\ S \to 0S0,\ S \to 1S1\}$$

Si può ora costruire un algoritmo per creare una stringa palindroma a partire dalla grammatica G:

$$\underbrace{S}_{start}\ \underbrace{\to}_{applico\ una\ regola}\ 1S1 \to 01S10 \to \underbrace{01010}_{sostituisco\ variabile}$$

con S, $1S1$ *e* $01S10$ *che sono forme sentenziali. Posso così ottenere tutte le possibili stringhe. Esiste anche una forma abbreviata:*

$$S \to \varepsilon|o|1|0S0|1S1$$

Non si fanno sostituzioni in parallelo, prima una S e poi un'altra

Si hanno 4 grammatiche formali, *gerarchia di Chomsky*:

- **tipo 0:** non si hanno restrizioni sulle regole di produzione, $\alpha \to \beta$. Sono linguaggi ricorsivamente numerabili e sono rappresentati dalle *macchine di Turing*, deterministiche o non deterministiche (la macchina di Turing è un automa)

- **tipo 1:** il lato destro della produzione ha lunghezza almeno uguale a quello sinistro. Sono grammatiche dipendenti dal contesto (*contestuali*) e come automa hanno *la macchina di Turing che lavora in spazio lineare*:
$$\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 B \alpha_2$$
con α_1 e α_2 detti *contesto* e $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta \in (V \cup T)^*$

- **tipo 2:** sono quelle libere dal contesto, context free. Come regola ha $A \to \beta$ con $A \in V$ e $\beta \in V \cup T)^*$ e come automa ha gli *automi a pila non deterministici*

- **tipo 3:** sono le grammatiche *regolari*. Come regole ha $A \to \alpha B$ (o $A \to B\alpha$) e $A \to \alpha$ con $A, B \in V$ e $\alpha \in T$. Come automi ha gli *automi a stato finito deterministici o non deterministici*

Esempio 3. *Sia* $G = (V, T, O, E)$, *con* $V = \{E, I\}$ *e* $T = \{a, b, 0, 1, (,), +, *\}$ *quindi ho le seguenti regole, è di tipo 3:*

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$
5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

voglio ottenere $a*(a+b00)$ *sostituisco sempre a destra (right most derivation)*

$$E \to E * E \to E * (E) \to E * (E + E) \to E * (E + I) \to E + (E + I0)$$

$$\to R + (I + b00) \to E * (a + b00) \to I * (a + b00) \to a * (a + b00)$$

usiamo ora l'inferenza ricorsiva:

passo	*stringa ricorsiva*	*var*	*prod*	*passo stringa impiegata*
1	*a*	*I*	*5*	\
2	*b*	*I*	*6*	\
3	*b0*	*I*	*9*	*2*
4	*b00*	*I*	*9*	*3*
5	*a*	*E*	*1*	*1*
6	*b00*	*E*	*1*	*4*
7	*a+b00*	*E*	*2*	*5,6*
8	*(a+b00)*	*E*	*4*	*7*
9	*a*(a+b00)*	*E*	*3*	*5, 8*

definisco formalmente la derivazione $\to$:

Definizione 1. *Prendo una grammatica $G = (V, T, P, S)$, grammatica CFG. Se $\alpha A\beta$ è una stringa tale che $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$, appartiene sia a variabili che terminali. Sia $A \in V$ e sia $a \to \gamma$ una produzione di G. Allora scriviamo:*

$$\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$$

con $\gamma \in (V \cup T)^*$.
Le sostituzioni si fanno indipendentemente da α e β. Questa è quindi la definizione di derivazione.

Definizione 2. *Definisco il simbolo $\to_*$, ovvero il simbolo di derivazioni in 0 o più passi. Può essere definito in modo ricorsivo. Per induzione sul numero di passi.*

- *la base dice che $\forall\alpha \in (V \cup T)^*$, $\alpha \to *\alpha$*
- *il passo è: se $\alpha \to_G *\beta$ e $\beta \to_G *\gamma$ allora $\alpha \to *\gamma$*

Si può anche dire che $\alpha \to_G *\beta$ sse esiste una sequenza di stringhe $\gamma_1, ..., \gamma_n$ con $n \geq 1$ tale che $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_n$ e $\forall i$, $1 < i < n-1$ si ha che $\gamma_1 \to \gamma_{i+1}$ la derivazione in 0 o più passi è la chiusura transitiva della derivazione

Definizione 3. *avendo ora definito questi simboli possiamo definire una forma sentenziale. Infatti è una stringa α tale che:*

$$\forall\alpha \in (V \cup T)^* \text{ tale che } S \to_G *\alpha$$

Definizione 4. *data $G = (V, T, P, S)$ si ha che $L(G) = \{w \in T^* | \, S \to_G *w\}$ ovvero composto da stringhe terminali che sono derivabili o 0 o più passi.*

Esempio 4. *formare una grammatica CFG per il linguaggio:*

$$L = \{0^n 1^n | n \geq 1\} = \{01, 0011, 000111, ...\}$$

con x^n intendo una concatenazione di n volte x (che nel nostro caso sono 0 e 1).
posso scrivere:

$$0^n 1^n = 00^{n-1}1^{n-1}1$$

il nostro caso base sarà la stringa 01, Poi si ha: $G = (V, T, P, S)$, $T = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, il caso base $S \to 01$ e $S \to 0S1$ il caso passo è quindi: se $w = 0^{n-1}1^{n-1} \in L$ allora $0w1 \in L$.
Ora voglio dimostare che $000111 \in L$, ovvero $S \to *000111$:

$$S \to 0S1 \to 00S11 \to 000S111$$

Teorema 1. *data la grammatica* $G = \{V, T, P, S)$ *CFG e* $\alpha \in (V \cup T)^*$. *Si ha che vale* $S \to *\alpha$ *sse* $S \to_{lm} *\alpha$ *sse* $S \to_{rm} *\alpha$. *Con* $\to_{lm} *$ *simbolo di left most derivation e* $\to_{rm} *$ *simbolo di right most derivation*

Esempio 5. *formare una grammatica CFG per il linguaggio:*

$$L = \{0^n 1^n | n \geq 0\} = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, ...\}$$

stavolta abbiamo anche la stringa vuota. Il caso base stavolta è $S \to \varepsilon |\, 0S1$

Esempio 6. *Fornisco una CFG per* $L = \{a^n | n \geq 1\} = \{a, aa, aaa, ...\}$. *La base è a*
il passo è che se $a^{n-1} \in L$ *allora* $a^{n-1}a \in L$ *(o che* $aa^{n-1} \in L$*).*
Si ha la grammatica $G = \{V, T, P, S)$, $V = \{S\}$, $T = \{a\}$ *e si hanno* $S \to a|\, Sa$ *(o* $S \to a|\, aS$*). Dimostro che* $a^3 \in L$.

$$S \to Sa \to Saa \to aaa$$

oppure

$$S \to aS \to aaS \to aaa$$

Esempio 7. *trovo una CFG per* $L = \{(ab)^n | n \geq 1\} = \{ab, abab, ababab, ...\}$
La base è ab
il passo è che se $(ab)^{n-1} \in L$ *allora* $(ab)^{n-1}ab \in L$.
Si ha la grammatica $G = \{V, T, P, S)$, $V = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ *(anche se in realtà* $T = \{ab\}$*) e si hanno* $S \to ab|\, Aab$. *Poi dimostro come l'esempio sopra*

Esempio 8. *trovo una CFG per* $L = \{a^n cb^n | n \geq 1\} = acb, aacbb, aaacbbb, ...\}$
Il caso base è acb il passo è che se $a^{n-1}cb^{n-1} \in L$ *allora* $a^{n-1}cb^{n-1}acb \in L$
Si ha la grammatica $G = \{V, T, P, S)$, $V = \{S\}$, $T = \{a, b, c\}$ *e si hanno* $S \to aSb|acb$.
dimostro che $aaaacbbbbb \in L$*:*

$$S \to aSb \to aaSbb \to aaaaSbbb \to aaaacbbbb$$

provo a usare anche una grammatica regolare, con le regole $S \to aS|c$, $c \to cB$ *e* $B \to bB|b$*;*

$$S \to aS \to aaS \to aaC \to aacB \to aacb...$$

non si può dimostrare in quanto non si può imporre una regola adatta

Esempio 9. $L = \{a^n cb^{n-1} | n \geq 2\}$, *con* $a^n cb^{n-1} = a^{n-1}acb^{n-1}$. $S \to aSb|aacb$. *Quindi:*

$$S \to aSb \to aaaccbb \in L$$

Esempio 10. *cerco CFG per* $L = \{a^n c^k b^n | \, n, \, k > 0\}$*. a e b devono essere uguali, uso quindi una grammatica context free, mentre c genera un linguaggio regolare.*
Si ha la grammatica $G = \{V, T, P, S)$*,* $V = \{S, C\}$*,* $T = \{a, b, c\}$ *e si hanno* $S \to aSb|aCb$ *e* $C \to cC|c$*. dimostro che* $aaaccbbb \in L, n = 3, \, k = 2$*:*

$$S \to aSb \to aaSbb \to aaaCbbb \to aaacCbbb \to aaaccbbb$$

Esempio 11. *scrivere CFG per* $L = \{a^n b^n c^k b^k | \, n, \, k \geq 0\}$

$$= \{w \in \{a, b, c, d\}^* | \, a^n b^n c^k b^k | \, n, \, k \geq 0\}$$

quindi L concatena due linguaggi L1 e L2, $X = \{a^n b^n\}$ *e* $Y = \{c^k d^k\}$*:*

$$X \to aXb|\varepsilon$$

$$Y \to cYd|\varepsilon$$

$$S \to XY$$

voglio derivare abcd:

$$S \to XY \to XcYd \to aXbcYd \to aXbc\varepsilon d \to a\varepsilon bc\varepsilon d \to abcd$$

voglio derivare cd

$$S \to XY \to Y \to cYd \to cd$$

Quindi se ho $w \in L1, L2$, ovvero appartenente ad una concatenazione di linguaggi prima uso le regole di un linguaggio, poi dell'altro e infine ottengo il risultato finale.

Esempio 12. *scrivere CFG per* $L = \{a^n b^k c^k d^n | \, n > 0, \, k \geq 0\}$*.*

$$S \to aSd| \, aXd$$

$$X \to bXc|\varepsilon$$

derivo aabcdd:

$$S \to aSd \to aaXdd \to aabXcdd \to aabcdd$$

Esempio 13. *scrivere CFG per* $L = \{a^n cb^n c^m ad^m | \, n > 0, \, m \geq 1\}$*.*

$$S \to XY$$

$$X \to aXb|c$$

$$Y \to cUd|cad$$

$$S \to XY \to cY \to ccad$$

Esempio 14. *scrivere CFG per* $L = \{a^{n+m}xc^nyd^m|\, n,\, m \geq 0\}$. $a^{n+m} = a^na^m$ *o* a^ma^n. *Si hanno 2 casi:*

1. $L = \{a^na^mxc^nyd^m|\, n,\, m \geq 0\}$
2. $L = \{a^ma^nxc^nyd^m|\, n,\, m \geq 0\}$

ma solo $L = \{a^ma^nxc^nyd^m|\, n,\, m \geq 0\}$ *può generare una CFG (dove non si possono fare incroci, solo concatenazioni e inclusioni/innesti).*

$$S \to aSd|Y$$

$$Y \to Xy$$

$$X \to aXc|x$$

si può fare in 2:

$$S \to aSd|Xy$$

$$X \to aXc|x$$

derivo con $m = n = 1$, *aaxcyd:*

$$S \to aSd \to aXyd \to aaXcyd \to aaxcyd$$

Esempio 15. *scrivere CFG per* $L = \{a^nb^m|\, n \geq m \geq 0\}$.

$$L = \{\varepsilon, a, ab, aa, aab, aabb, aaa, aaab, aaabb, aaabbb, ...\}$$

Se $n \geq m$ *allora* $\exists k \geq 0 \to n = m + k$. *Quindi:*

$$l = \{a^{m+k}b^m|m, k \geq 0\}$$

si può scrivere in 2 modi:

1. $l = \{a^ma^kb^m|m, k \geq 0\}$ *quindi con innesto*
2. $l = \{a^ka^mb^m|m, k \geq 0\}$*quindi con concatenazione*

entrambi possibili per una CFG:

1.

$$S \to XY$$

$$X \to aX|\varepsilon \text{ si può anche scrivere } X \to Xa|\varepsilon$$

$$Y \to aYb|\varepsilon$$

oppure

$$S \to aS|X$$

$$X \to aXb|\varepsilon$$

2.

$$S \rightarrow aSb|\varepsilon$$

$$X \rightarrow aX|\varepsilon$$

Esempio 16. *scrivere CFG per* $L = \{a^n b^{m+n} c^h |\, m > h \geq 0,\, n \geq 0\}$.
Se $n > h$ *allora* $\exists k \rightarrow n = h + k$, *quindi:*

$$L = \{a^n b^{m+h+k} c^h |\, m > h \geq 0,\, n \geq 0\}$$

. *ovvero:*

$$L = \{a^n b^n b^k b^h c^h |\, m \geq 0, k > 0, h \geq 0\}$$

si ha:

$$S \rightarrow XYZ$$

$$X \rightarrow aXb|\varepsilon$$

$$Y \rightarrow Yb|b$$

$$Z \rightarrow bZc|\varepsilon$$

si può anche fare:

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb|\varepsilon$$

$$Y \rightarrow bYc|Z$$

$$Z \rightarrow bZ|b$$

Esempio 17. *scrivere CFG per* $L = \{a^n b^m c^k |\, k > n + m,\, n, m \geq 0\}$.
per $n = m = 0$, $k = 1$ *avrò la stringa c. se* $k > n + m$ *allora* $\exists l > 0 \rightarrow k = n + m + l$ *quindi:*

$$L = \{a^n b^m c^{n+m+l} |\, l > 0,\, n, m \geq 0\}$$

$$= L = \{a^n b^m c^n c^m c^l |\, l > 0,\, n, m \geq 0\}$$

sistemando:

$$= L = \{a^n b^m c^l c^m cnl |\, l > 0,\, n, m \geq 0\}$$

quindi:

$$S \rightarrow aSc|X$$

$$X \rightarrow bXc|Y$$

$$Y \rightarrow cY|c$$

Esempio 18. *scrivere CFG per* $L = \{a^n x c^{n+m} y^h z^k d^{m+h} | \, n, m, k, h \geq 0\}$*.*
ovvero:

$$L = \{a^n x c^n c^m y^h z^k d^h d^m | \, n, m, k, h \geq 0\}$$

quindi avrò:

$$S \to XY$$

$$X \to aXc|x$$

$$Y \to cYd|W$$

$$W \to yWd|X$$

$$Z \to zZ|\varepsilon$$

Esempio 19. *vediamo un esempio di grammatica dipendente dal contesto:*

$$L = \{a^n b^n c^n | \, n \geq 1\}$$

$G = \{V, T, P, S\} = \{(S, B, C, X)\} = \{(a, b, c), P, S\}$ *ecco le regole di produzione (qui posso scambiare variabili a differenza delle context free):*

1. $S \to aSBC$
2. $S \to aBC$
3. $CB \to XB$
4. $XB \to XC$
5. $XC \to BC$
6. $aB \to ab$
7. $bB \to bb$
8. $bC \to bc$
9. $cC \to cc$

vediamo un esempio di derivazione: per $n = 1$ *ho abc ovvero:*

$$S \to aBC \to abC \to abc$$

con $n = 2$ *ho aabbcc:* $S \to aSBC \to aaBCBC \to aaBXBC \to aaBXCC \to aaBBCC \to aabBCC \to aabbCC \to aabbcC \to aabbcc$

Esempio 20. *vediamo un esempio di grammatica dipendente dal contesto:*

$$L = \{a^n b^m c^n d^m \,|\, n, m \geq 1\}$$

Si ha:

$$G = (\{S, X, C, D, Z\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

con le seguenti regole di produzione:

- $S \to aSc|\, aXc$
- $X \to bXD|\, bD$
- $DC \to CD$
- $DC \to DZ$
- $DZ \to CZ$
- $XZ \to CD$
- $bC \to bc$
- $cC \to cc$
- $cD \to cd$
- $dD \to dd$

provo a derivare aabbbccddd quindi con $n = 2$, $m = 3$:

$$S \to aSC \to aaXCC \to aabXDCC \to aabbXDDCC \to$$
$$aabbbDDDCC \to aabbbCCDDD \to aabbbccddd$$

Esempio 21. *Sia $L = \{w \in \{a, b\}^* |$ w contiene lo stesso numero di a e b$\}$:*

$$S \to aSbS|\, bSaS|\, \varepsilon$$

dimostro per induzione che è corretto:

- ***caso base:*** $|w| = 0 \to w = \varepsilon$

- ***caso passo:*** *si supponga che G produca tutte le stringhe (di lunghezza $<$ di n) di $\{a,b\}^*$ con lo stesso numero di a e b e dimostro che produce anche quelle di lunghezza n, sia:*

  $w \in \{a,b\}^* \mid |w| = n$ *con a e b in egual numero,* $m(a) = m(b)$ *con m() che indica il numer*

  quindi si ha che:

  $$w = aw_1bw_2 \text{ o } w = bw_1aw_2$$

  sia.

  $$k_1 = m(a) \in w_1 = m(b) \in w_1$$

  $$k_2 = m(a) \in w_2 = m(b) \in w_2$$

  allora:

  $$k_1 + k_2 + 1 = m(a) \in w = m(b) \in W$$

  sapendo che $|w_1| < n$ e $|w_2| < n$ allora w_1 e w_2 sono egnerati da G per ipotesi induttiva

1.1.1 Alberi Sintatici

Definizione 5. *Data una grammatica CFG, $G = \{V,T,P,S\}$ un **albero sintattico** per G soddisfa le seguenti condizioni:*

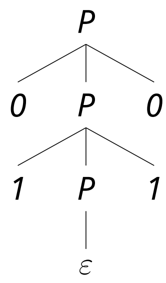
- *ogni nodo interno è etichettato con una variabile*
- *ogni foglia è anch'essa etichettata con una variabile o col simbolo di terminale T o con la stringa vuota ε (in questo caso la foglia è l'unico figlio del padre)*
- *se un nodo interno è etichettato con A i suoi figli saranno etichettati con X1, ..., Xk e $A \to X1, ..., Xk$ sarà una produzione di G. Se un Xi è ε sarà l'unica figlio e $A \to \varepsilon$ sarà comunque una produzione di G*

*La concatenazione in ordine delle foglie viene detto **prodotto dell'albero***

Esempio 22. *Usiamo l'esempio delle stringhe palindrome:*

$$P \to 0P0|\,1P1|\varepsilon$$

sia il seguente albero sintatico:

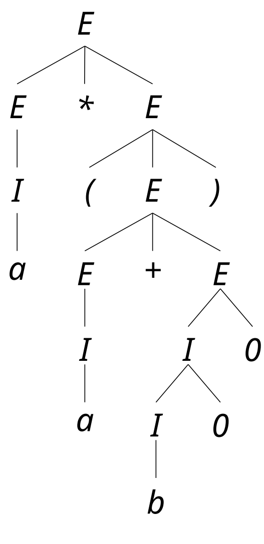


Esempio 23. *Si ha:*

$$E \to I|\,E+E|\,E*E|\,(E)$$

$$I \to a|\,b|\,Ia|\,Ib|\,I0|\,I1$$

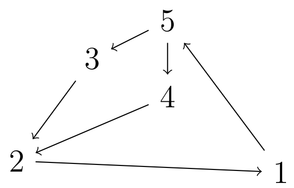
un albero sintattico per $a*(a+b00)$ *può essere:*



Data una CFG si ha che i seguenti cinque enunciati si equivalgono:

1. la procedura di inferenza ricorsiva stailisce che una stringa w di simboli terminali appartiene al linguaggio $L(A)$ con A variabile
2. $A \to^* w$
3. $A \to^*_{lm} w$
4. $A \to^*_{rm} w$
5. esiste un albero sintattico con radice A e prodotto w

queste 5 proposizioni si implicano l'uni l'altra:



vediamo qualche dimostrazione di implicazione tra queste proposizioni:

da 1 a 5. si procede per induzione:

- **caso base:** ho un livello solo (una sola riga), $\exists A \to w$:

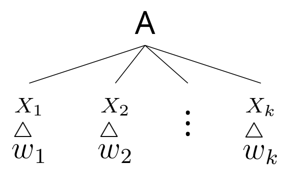
$$\overset{A}{\underset{w}{\triangle}}$$

- **caso passo:** suppongo vero per un numero di righe $\leq n$, lo dimsotro per $n+1$ righe:

$$A \to X_1, X_2, ..., X_k$$

$$w = w_1, w_2, ..., w_k$$

ovvero, in meno di $n+1$ livelli:



$\square$

da 5 a 3. procedo per induzione:

- **caso base (n=1):** $\exists A \to w$ quindi $A \to_{lm} w$, come prima si ha un solo livello:

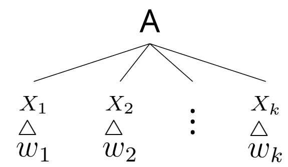
$$\begin{array}{c} A \\ \triangle \\ w \end{array}$$

- **caso passo:** suppongo che la proprierà valga per ogni albero di profondità minore uguale a n, dimostro che valga per gli alberi profondi $n+1$:

$$A \to X_1, X_2, ..., X_k$$

$$w = w_1, w_2, ..., w_k$$

ovvero, in meno di $n+1$ livelli:



$$A \to_{lm} X_1, X_2, ..., X_k$$

$$x_1 \to^*_{lm} w_1 \text{ per ipotesi induttiva si ha un albero al più di n livelli}$$

quindi:

$$A \to_{lm} X_1, ..., X_k \to^*_{lm} w_1, X_2, ..., X_k \to^*_{lm} ... \to^*_{lm} w_1, ..., w_k = w$$

Esempio 24.

$$E \to I \to Ib \to ab$$

$$\alpha E \beta \to \alpha I \beta \to \alpha I b \beta \to \alpha a b \beta, \;\; \alpha, \beta \in (V \cup T)^*$$

□

Esempio 25. *Mostro l'esistenza di una derivazione sinistra dell'albero sintattico di $a * (a + b00)$:*

$$E \to^*_{lm} E * E \to^*_{lm} I * E \to^*_{lm} a * E \to^*_{lm} a * (E) \to^*_{lm} a * (E + E) \to^*_{lm}$$

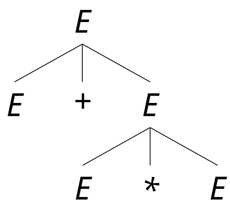
$$a*(I+E) \to^*_{lm} a*(a+E) \to^*_{lm} a*(a+I) \to^*_{lm} a+(a+I0) \to^*_{lm} a*(a+I00) \to^*_{lm} a*(a+b00)$$

1.1.2 Grammatiche ambigue

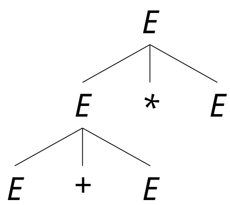
Definizione 6. *Una grammatica è definita ambigua se esiste una stringa w di terminali che ha più di un albero sintattico*

Esempio 26. *vediamo un esempio:*

1. $E \rightarrow E + E \rightarrow E + E * E$ *ovvero:*



2. $E \rightarrow E * E \rightarrow E + E * E$ *ovvero:*



si arriva a due stringhe uguali ma con alberi diversi. Introduciamo delle categorie sintatiche, dei vincoli alla produzione delle regole:

1. $E \rightarrow T|\,E + T$
2. $T \rightarrow F|\,T + F$
3. $F \rightarrow I|\,(E)$
4. $I \rightarrow a|\,b|\,Ia|, Ib|\,I0|\,I1$

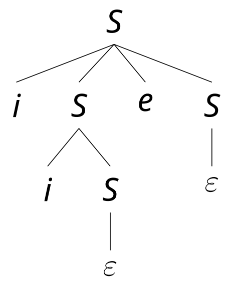
Possono esserci più derivazioni di una stringa ma l'importante è che non ci siano alberi sintattici diversi. Capire se una CFG è ambigua è un problema indecidibile

Esempio 27. *vediamo un esempio:*

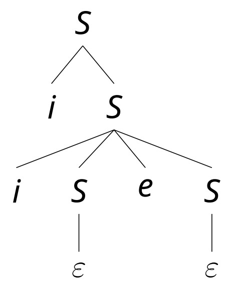
$$S \rightarrow \varepsilon|\,SS|\,iS|\,iSeS$$

con S=statement, i=if e e=else. Considero due derivazioni:

1. *$S \to iSeS \to iiSeS \to iie$:*



2. *$S \to iS \to iiSeS \to iieS \to iie$:*



Si ha quindi una grammatica ambigua

Teorema 2. *Per ogni CFG, con $G = (V, T, P, S)$, per ogni stringa w di terminali si ha che w ha due alberi sintattici distinti sse ha due derivazioni sinistre da S distinte.*
Se la grammatica non è ambigua allora esiste un'unica derivazione sinistra da S

Linguaggi inerentemente ambigui

Definizione 7. *Un linguaggio L è inerentemente ambiguo se tutte le grammatiche CFG per tale linguaggio sono a loro volta ambigue*

Esempio 28. *Sia $L = \{a^n b^n c^m d^m | \, n, m \geq 1\} \cup \{a^n bmnc^m d^n | \, n, m \geq 1\}$*
si ha quindi un CFL formato dall'unione di due CFL. L è inerentemente ambiguo e generato dalla seguente grammatica:

- $S \to AB | C$

- $A \to aAb|\, ab$
- $B \to cBd|\, cd$
- $C \to aCd|\, aDd$
- $D \to bDc|\, bc$

si possono avere due derivazioni:

1. $S \to_{lm} AB \to_{lm} aAbB \to_{lm} aabbB \to_{lm} aabbcBd \to_{lm} aabbccdd$
2. $S \to_{lm} C \to_{lm} aCd \to_{lm} aaBdd \to_{lm} aabBcdd \to_{lm} aabbccdd$

a generare problemi sono le stringhe con n=m perché possono essere prodotte in due modi diversi da entrambi i sottolinguaggi. Dato che l'intersezione tra i due sottolinguaggi non è buota si ha che L è ambiguo

1.1.3 Grammatiche Regolari

Sono le grammatiche che generano i linguaggi regolari (quelli del terzo tipo) che sono casi particolari dei CFL.
Si ha la solita grammatica $G = (V, T, P, S)$ con però vincoli su P:

- ε si può ottenere solo con $S \to \varepsilon$
- le produzioni sono tutte lineari a destra ($A \to aA$ o $A \to a$) o a sinistra ($A \to Ba$ o $A \to a$)

Esempio 29. *$I \to a|\, b|\, Ia|\, Ib|\, I0|\, I1$ è una grammatica con le produzioni lineari a sinistra.*
Potremmo pensarlo a destra $I \to a|\, b|\, aI|\, bI|\, 0I|\, 1I$.
Vediamo esempi di produzione con queste grammatiche:

- *con $I \to a|\, b|\, Ia|\, Ib|\, I0|\, I1$ possiamo derivare $ab01b0$:*

$$I \to I0 \to Ib0 \to I1b0 \to I01b0 \to Ib01b0 \to ab01b0$$

- *con $I \to a|\, b|\, aI|\, bI|\, 0I|\, 1I$ invece non riusciamo a generare nulla:*

$$I \to 0I \to 0a$$

definisco quindi un'altra grammatica (con una nuova categoria sintattica):

$$I \to aJ|\, bJ$$

$$J \to a|\, b|\, aJ|\, bJ|\, 0J|\, 1J$$

che però non mi permette di terminare le stringhe con 0 e 1, la modifico ancora otterdendo:

$$I \to aJ|\, bJ$$

$$J \to a|\, b|\, aJ|\, bJ|\, 0J|\, 1J|\, 0|\, 1$$

e questo è il modo corretto per passare da lineare sinistra a lineare destra

Esempio 30. *Sia* $G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ *con* $S \to \varepsilon|\, 0|\, 1|\, 0S|\, 1S$*. Si ha quindi:*

$$L(G) = \{0,1\}^*$$

si hanno comunque due proposizioni ridondanti, riducendo trovo:

$$S \to \varepsilon|\, 0S|\, 1S$$

con solo produzioni lineari a destra. Con produzioni lineari a sinistra ottengo:

$$S \to \varepsilon|\, S0|\, S1$$

Esempio 31. *Trovo una grammatica lineare destra e una sinistra per* $L = \{a^n b^m |\, n, m \geq 0\}$*:*

- ***lineare a destra:*** *si ha* $G = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$ *e quindi:*

  $$S \to \varepsilon|\, aS|\, bB$$

  $$B \to bB|\, b$$

  ma non si possono generare stringhe di sole b, infatti:

  $$S \to aS \to abB \to abbB \to abbb$$

  ma aggiungere ε *a* B ***non è lecito****. posso però produrre la stessa stringa da due derivazioni diverse:*

  $$S \to \varepsilon|\, aS|\, bB|\, b$$

  $$B \to bB|\, b$$

  che risulta quindi la nostra lineare a destra

- ***lineare a sinistra:*** *si ha* $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ *e quindi:*

$$S \to \varepsilon |\, Sb |\, Ab |\, a$$

$$A \to Aa |\, a$$

Esempio 32. *Trovo una grammatica lineare destra e una sinistra per* $L = \{ab^n cd^m e |\, n \geq 0\,, m > 0\}$*:*

- ***lineare a destra:*** *si ha si ha* $G = (\{S, A, B, E\}, \{a, b, c, d, e\}, P, S)$ *e quindi:*

$$S \to aA$$

$$A \to bA |\, cB$$

$$B \to dB |\, dE$$

$$E \to e$$

- ***lineare a sinistra:*** *si ha si ha* $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c, d, e\}, P, S)$ *e quindi:*

$$S \to Xe$$

$$A \to Xd |\, Yd$$

$$B \to Zc$$

$$E \to a |\, Zb$$

quindi se per esempio ho la stringa "ciao" si ha:

- ***lineare a destra:***

$$S \to Ao$$

$$A \to Ba$$

$$B \to Ei$$

$$E \to c$$

- ***lineare a sinistra:***

$$S \to cA$$

$$A \to iB$$

$$B \to aE$$

$$E \to o$$

Esempio 33. *A partire da* $G = (\{S,T\},\{0,1\},P,S)$ *con:*

$$S \to \varepsilon|\,0S|\,1T$$

$$T \to 0T|\,1S$$

trovo come è fatto $L(G)$*:*

$$L(G) = \{w \in \{0,1\}^*|\, w \text{ ha un numero di 1 pari}\}$$

Esempio 34. *fornire una grammatica regolare a destra e sinistra per:*

$$L = \{w \in \{0,1\}^*|\, w \text{ ha almeno uno 0 o almeno un 1}\}$$

Si ah che tutte le stringhe tranne quella vuota ciontengono uno 0 o un 1 quindi $G = (\{S\},\{0,1\},P,S)$*:*

- ***lineare a destra:***
$$S \to 0|\,1|\,0S|\,1S$$

- ***lineare a sinistra:***
$$S \to 0|\,1|\,S0|\,S1$$

1.1.4 Espressioni Regolari (Regex)

le regex sono usate per la ricerca di un pattern in un testo o negli analizzatori lessicali. Una regex denota il linguaggio e non la grammatica. Si hanno le seguenti operazioni tra due linguaggi L e M:

- **unione:** dati L, $M \in \Sigma^*$, l'unione $L \cup M$ è l'insieme delle stringhe che si trovano in entrambi i linguaggi o solo in uno dei due

  Esempio 35.
$$L = \{001, 10, 111\}$$
$$M = \{\varepsilon, 001\}$$
$$L \cup M = \{\varepsilon, 01, 10, 111, \varepsilon\}$$

  si ha che:
$$L \cup M = M \cup L$$

- **concatenazione:** dati L, $M \in \Sigma^*$, la concatenazione $L \cdot M$ (o LM) è lisieme di tutte le stringhe ottenibili concatenandone una di L a una di M

Esempio 36.

$$L = \{001, 10, 111\}$$

$$M = \{\varepsilon, 001\}$$

$$L \cdot M = \{001, 001001, 10, ...\}$$

si ha che:

$$L \cdot M \neq M \cdot L$$

- si definiscono:
  - $L \cdot L = L^2$, $L\ cdotL \cdot L = L^3$ etc...
  - $L^1 = L$
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$
- **chiusura di Kleene:** dato $L \subseteq \Sigma^*$ si ha che la chiusura di Kleen di L è:

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

ricordando che $l^0 = \varepsilon$

Esempio 37. *Sia* $L = \{0, 11\}$*, si ha:*

$$L^0 = \varepsilon$$

$$L^1 = L = \{0, 11\}$$

$$L^2 = L \cdot L = \{00, 011, 110, 1111\}$$

$$L^3 = L{\cdot}L{\cdot}L = L^2{\cdot}L = \{000, 0110, 1100, 11110, 0011, 01111, 11011, 111111\}$$

vediamo dei casi particolari:

- $L = \{0^n | \, n \geq 0\}$ implica $|L| = \infty$ e quindi, essendo $L^i = L$, $i \geq 1$ e quindi $|L^i| = \infty$, $|L^*| = \infty$. Si ha quindi:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup ... \cup L^i = L$$

- $L = \emptyset$ implica $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^2 = L \cdot L = \emptyset$ e così via per ogni concatenazione di L. Si ha quindi:

$$L^* = L^0 = \{\varepsilon\}$$

– $L = \{\varepsilon\}$ implica $L^0 = \{\varepsilon\} = L = L^1 = L^2 = ...$, si ha quindi:

$$L^* = \{\varepsilon\} = L$$

L'insieme vuoto e l'insieme contenente la stringa vuota hanno le uniche chiusure di kleene finite

Definizione 8. *Si riporta la definizione ricorsiva di un'espressione regolare:*

- ***casi base:*** *si hanno tre casi base:*
  1. *ε e $\emptyset$ sono espressioni regolari*
  2. *se $a \in \Sigma$ a è un'esprssione regolare, $L(a) = \{a\}$*
  3. *le variabili che rappresentano linguaggi regolari sono espressioni regolari, $L(L) = L$*
- ***casi passo:*** *si hanno i 4 casi passo:*
  1. ***unione:*** *se E e F sono espressioni regolari allora anche $E+F = E \cup F$ è un'espressione regolare e si ha:*

     $$L(E + F) = L(E) \cup L(F)$$

  2. ***concatenazione:*** *se E e F sono espressioni regolari allora anche $EF = E \cdot F$ è un'espressione regolare e si ha:*

     $$L(EF) = L(E) \cdot L(F)$$

  3. ***chiusura:*** *se E è un'espressione regolare allora E^* è un'espressione regolare e si h:*

     $$L(E^*) = (L(E))^*$$

  4. ***parentesi:*** *se Eè un'espressione regolare allora (E) è un'espressione regolare e si ha:*

     $$L((E)) = L(E)$$

Esempio 38. *trovo regex per l'insieme di stringhe in* $\{0,1\}^*$ *che consistono in 0 e 1 alternati:*

$$01 \to \{01\}$$
$$(01)^* \to \{\varepsilon, 01, 0101, 010101, ...\}$$
$$(01)^* + (10)^* \to \{\varepsilon, 01, 10, 0101, 1010, ...\}$$

ma posso volere diverse quantità di 0 e 1, sempre mantenendo l'alternanza, metto o uno 0 o un 1 davanti a quanto ottenuto appena sopra:

$$(01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^* \to \{\varepsilon, 01, 10, 010, 101, ...\}$$

non è comunque l'unica soluzione, si può avere:

$$(\varepsilon + 1)(01)^*(\varepsilon + 0) \to \{\varepsilon, 01, 10, 010, 101, ...\}$$

oppure ancora:

$$(\varepsilon + 0)(10)^*(\varepsilon + 1)$$

Si ha una precedenza degli operatori, in ordine di precedenza (si valuta da sinistra a destra):

1. chiusura di Kleene *
2. concatenazione $\cdot$, che è associativo ($(E \cdot F) \cdot G = E \cdot (F \cdot G)$) ma non è commutativo ($E \cdot F \neq F \cdot E$)
3. unione + che è associativa ($(E+F)+G = E+(F+G)$) ed è commutativo ($E + F = F + E$)
4. infine le parentesi

si hanno anche delle proprietà algebriche:

- due espressioni regolari sono equivalenti se denotano le stesso linguaggio
- due espressioni regolari con variaboli sono equivalenti se lo sono $\forall$ assegnamento alle variabili
- l'unione è commutativa e associativa, la concatenazione è solo associativa
- si definiscono:

- **identità:** ovvero un valore unito all'identità è pari a se stesso (elemento neutro della somma $0+x = x+0 = x$). $\emptyset$ è identità per l'unione ($\emptyset + L = L + \emptyset = L$), $\{\varepsilon\}$ è identità per la concatenazione ($\varepsilon L = L\varepsilon = L$)
- **annichilitore:** ovvero un valore concatenato all'annichilatore da l'annichilitore (l'elemento nullo del prodotto $0x = x0 = 0$). $\emptyset$ è l'annichilitore per la concatenazione ($\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$)

- **distributività:** dell'unione rispetto alla concatenazione (che non è commutativa):
  - **distributività sinistra:** $L(M + N) = LM + LN$
  - **distributività destra:** $(M + N)L = ML + NL$
- **idempotenza:** $L + L = L$
- $(L^*)^* = L^*$
- $\emptyset^* = \varepsilon$ infatti $L(\emptyset) = \{\varepsilon\} \cup L(\emptyset) \cup L(\emptyset) \cdot L(\emptyset) \cup ... = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \emptyset ... = \varepsilon$
- $\varepsilon^* = \varepsilon$ infatti $L(\varepsilon^*) = \{\varepsilon\} \cup L(\varepsilon) \cup L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup ... = \{\varepsilon\} = L(\varepsilon)$
- $L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$ (quindi con almeno un elemento che non sia la stringa vuota)
- $L^* = l^+ + \varepsilon$

Esempio 39. *Ho* $ER = (0 + 1)^*0^*(01)^*$*:*

- *001 fa parte del linguaggio? Si:* $\varepsilon \cdot 0 \cdot 01$
- *1001 fa parte del linguaggio? Si:* $1 \cdot 0 \cdot 01$
- *0101 fa parte del linguaggio? Si:* $\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot 0101$
- *0 fa parte del linguaggio? Si:* $\varepsilon \cdot 0 \cdot \varepsilon$
- *10 fa parte del linguaggio? Si:* $1 \cdot 0 \cdot \varepsilon$

$L((0+1)^*) = (L(0+1))^* = (L(0)+L(1))^* = (\{0\} \cup \{1\})^* = (\{0, 1\})^* = \{0, 1\}^*$ *ovvero tutte le combinazioni di 0 e 1*

Si ricorda che:

$$(0 + 1)^* \neq 0^* + 1^*$$

Esempio 40. *ho* $ER = ((01)^* \cdot 10 \cdot (0+1)^*)^*$

- *0101 fa parte del linguaggio? No*
- *01000 fa parte del linguaggio? No*
- *01011 fa parte del linguaggio? No*
- *10111 fa parte del linguaggio? Si,* $\varepsilon \cdot 10 \cdot 111$
- *101010 fa parte del linguaggio? Si, prendo* $10 \cdot 1010$
- *101101 fa parte del linguaggio? Si,* $\varepsilon \cdot 10 \cdot 1$ *due volte*
- *0101100011 fa parte del linguaggio? Si,* $0101 \cdot 10 \cdot 0011$ *(0011 lo posso prendere da* $(0+1)^*$*)*

Esempio 41. *ho* $ER = ((01)^* \cdot 10 \cdot (0+1))^*$

- *0101 fa parte del linguaggio? No*
- *01000 fa parte del linguaggio? No*
- *01011 fa parte del linguaggio? No*
- *10111 fa parte del linguaggio? No*
- *101010 fa parte del linguaggio? No*
- *101101 fa parte del linguaggio? Si,* $\varepsilon \cdot 10 \cdot 1$ *due volte*
- *0101100011 fa parte del linguaggio? No*

Esempio 42. *Da* $L \subseteq \{0,1\}|$ *stringhe contenenti almeno una volta 01 quindi:*

$$(0+1)^* 01 (0+1)^*$$

Esempio 43. *ho* $ER = (00^*1^*)^*$*, quindi:*

$$L = \{\varepsilon, 0, 01, 000, 001, 010, 011\} = \{\varepsilon\} \cup \{w \in \{0,1\}^* | \ w \textit{ che inizia con 0}\}$$

Esempio 44. *ho* $ER = a(a+b)^*b$*, quindi:*

$$L = \{w \in \{a,b\}^* | \ w \textit{ inizia con } a \textit{ e termina con } b\}$$

Esempio 45. *ho* $ER = (0^*1^*)^*000(0+1)^*$*, quindi, sapendo che* $\{0,1\}^*$ *mi permette tutte le combinazioni che voglio come* $(0+1)^*$*:*

$$L = \{w \in \{0,1\}^* | \ w \textit{ come voglio con tre 0 consecutivi}\}$$

Esempio 46. *ho* $ER = a(a+b)^*c(a+b)^*c(a+b)^*b$*, quindi:*

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* |\ w \text{ inizia con } a, \text{ termina con } b \text{ e contiene almeno due } c,$$
$$\text{eventualmente non adiacenti}\}$$

Esempio 47. *Da* $L \subseteq \{0,1\}|$ *ogni 1 è seguito da 0, a meno che non sia l'ultimo carattere, ovvero 11 non compare quindi:*

$$(10+0)^*(\varepsilon+1)^*$$

Esempio 48. *cerco ER per* $L \subseteq \{0,1\}^*|$ *stringhe contenenti un numero pari di 1:*

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

oppure:

$$(0+10^*1)^*$$

Esempio 49. *cerco ER per* $L \subseteq \{0,1\}^*|$ *stringhe contenenti un numero dispari di 1:*

$$(0^*10^*)^*0^*10^*$$

oppure:

$$(0+10^*1)^*10^*$$

Esempio 50. *cerco ER per* $L \subseteq \{0,1\}^*|$ *stringhe contenenti un numero divisibile per 3 di 0:*

$$(1^*01^*01^*0)^*1^*$$

Esempio 51. *cerco ER per* $L \subseteq \{0,1\}^*|$ *stringhe contenenti al più una coppia di 1 consecutivi:*

$$(10+0)^*(11+1+\varepsilon)(01+0)^*$$

Esempio 52. *cerco ER per* $L \subseteq \{a,b,c\}^*|$ *stringhe contenenti almeno una* a *e almeno una* $b:$

$$c^*\left(a(a+c)^*b + b(b+c)^*a\right)(a+b+c)^*$$

1.2 Automi

un automa a stati finiti ha un insieme di stati e un controllo che si muove da stato a stato in risposta a input esterni. Si ha una distinzione:

- **automi deterministici:** dove l'automa non può essere in più di uno stato per volta
- **automi non deterministici:** dove l'automa può trovarsi in più stati contemporaneamente

1.2.1 Automi deterministici

Un automa a stati finiti deterministico (*DFA*), un automa che dopo aver letto una qualunque sequenza di input si trova in un singolo stato. Il termine *deterministico* concerne il fatto che per ogni input esiste un solo stato verso il quale l'automa passa dal suo stato corrente. Un automa a stati finiti deterministico consiste nelle seguenti parti:

- un insieme finito di stati, spesso indicato con Q
- un insieme finito di simboli di input , spesso indicato con Σ
- una funzione di transizione, che prende come argomento uno stato e un simbolo di input e restituisce uno stato. La funzione di transizione sarà indicata comunemente con δ. Nella rappresentazione grafica informale di automi δ è rappresentata dagli archi tra gli stati e dalle etichette sugli archi. Se q è uno stato e a è un simbolo di input, $\delta(q, a)$ è lo stato p tale che esiste un arco etichettato con a da q a p[2]
- uno stato iniziale, uno degli stati in Q
- un insieme di stati finali, o accettanti , F. L'insieme F è un sottoinsieme di Q

Nel complesso un DFA è rappresentato in maniera concisa con l'enumerazione dei suoi elementi, quindi con la quintupla:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

con A nome del DFA, Q insiem degli stati, Δ rappresentante i simboli di input, δ la sua funzione di transizione, q_0 il suo stato iniziale e F l'insieme degli stati accettanti.
Vediamo come decidere se accettare o meno una stringa (sequenza di caratteri) in input mediante un DFA.
Ho una sequenza in input $a_1...a_n$. Parto dallo stato iniziale q_0, consultando la funzione di transizione δ, per esempio $\delta(q_0, a_1) = q_1$ e trovo lo stato in cui il DFA entra dopo aver letto a_1. Poi passo a $\delta(q_1, a_2) = q_2$ e così via, $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$ fino a ottenere q_n. Se q_n è elemento di F allora $a_1...a_n$ viene accettato, altrimenti viene rifiutato.

Esempio 53. *specifico DFA che accetta tutte le strighe binarie in cui compare la sequenza 01:*

$L = \{w | w$ *è della forma x01y, con x e y pari a 0 o 1*$\} = \{01, 11010, 100011, ...\}$

o anche:

$$L = \{x01y|x, y \in \{0,1\}^*\}$$

abbiamo quindi:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

ragioniamo sul fatto che A:

1. *se ha "già visto" 01, accetterà qualsiasi input*
2. *pur non avendo ancora visto 01, l'input più recente è stato 0, cosicché se ora vede un 1 avrà visto 01*
3. *non ha ancora visto 01, ma l'input più recente è nullo (siamo all'inizio), in tal caso A non accetta finché non vede uno 0 e subito dopo un 1*

la terza condizione rappresenta lo stato iniziale. All'inizio bisogna vedere uno 0 e poi un 1. Ma se nello stato q_0 *si vede per primo un 1 allora non abbiamo fatto alcun passo verso 01, e dunque dobbiamo permanere nello stato* q_0*,* $\delta(q_0, 1) = q_0$*. D'altra parte se nello stato iniziale vedo 0 siamo nella seconda condizione, uso quindi* q_2 *per questa condizione, si avrà quindi* $\delta(q_0, 0) = q_2$*. Vedo ora le transizoni di* q_2*, se vedo 0 ho che 0 è l'ultimo simbolo incontrato quindi uso nuovamente* q_2*,* $\delta(q_2, 0) = q_2$*, in attesa di un 1. Se arriva 1 passo allo stato accertante* q_1 *corrispondente alla prima condizione,* $\delta(q_2, 1) = q_1$*. Ora abbiamo incontrato 01 quindi può succedere qualsiasi cosa e dopo qualsiasi cosa accada potremo nuovamente aspettarci qualsiasi cosa, ovvero* $\delta(q_1, 0) = \delta(q_1, 1) = q_1$*. Si deduce quindi che:*

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \text{ e } F = \{q_1\}$$

quindi:

$$A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$$

con in totale le seguenti transizioni:

$$\delta(q_0, 1) = q_0$$

$$\delta(q_0, 0) = q_2$$

$$\delta(q_2, 0) = q_2$$

$$\delta(q_2, 1) = q_1$$

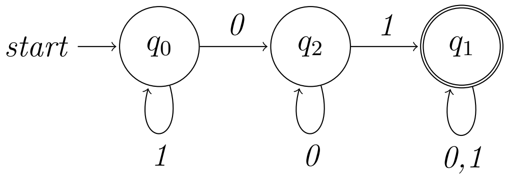
$$\delta(q_1, 0) = q_1$$

$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

posso rappresentarle in maniera tabulare, con lo stato inizale indicato da $\rightarrow$ *e quelli accettanti con* $*$*:*

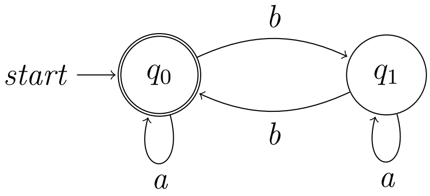
δ	*0*	*1*
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
$* q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

o col diagramma di transizione:



Esempio 54. *Trovo automa per:*

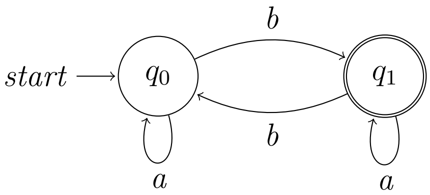
$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } b\}$$



ovvero se da q_0 vado a q_1 sono obbligato ab generare due b, dato che il nodo accettnate è q_0. In entrambi i nodi posso generare quante a voglio.

Esempio 55. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero dispari di } b\}$$



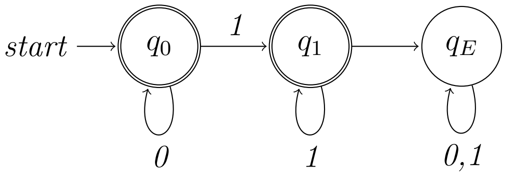
ovvero se da q_0 vado a q_1 sono obbligato ab generare una sola b, dato che il nodo accettnate è q_1. In entrambi i nodi posso generare quante a voglio e posso tornare da q_1 a q_0 per generare altre b.

Esempio 56. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* | w = 0^n 1^m\}$$

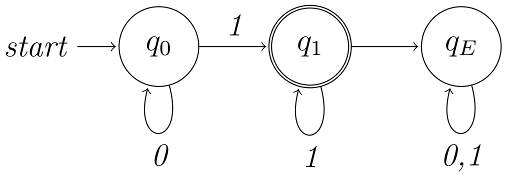
vediamo i vari casi: ***Si ha che q_E è lo stato pozzo dove vanno le stringhe venute male***

- $n, m \geq 0$:



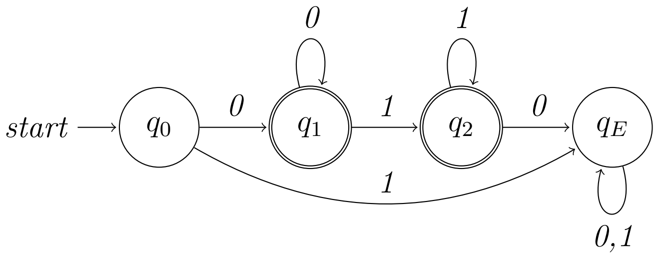
ovvero posso non generare nulla e uscire subito con q_0, generare solo un 1 e passare a q_1 e uscire oppure generare 0 e 1 a piacere con l'ultimo stato o generare 0 a piacere dal primo e 1 a piacere dal secondo.

- $n \geq 0$ $m > 0$*:*



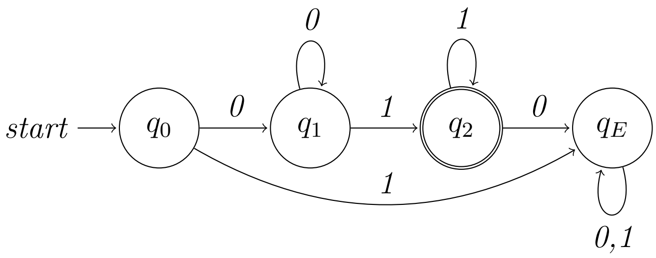
ovvero come l'esempio sopra solo che non posso uscire in q_0 *in quanto almeno un 1 deve essere per forza generato*

- $n > 0$ $m \geq 0$*:*



CHIARIRE

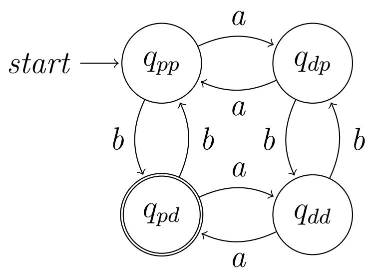
- $n, m > 0$*:*



CHIARIRE

Esempio 57. *Trovo automa per:*

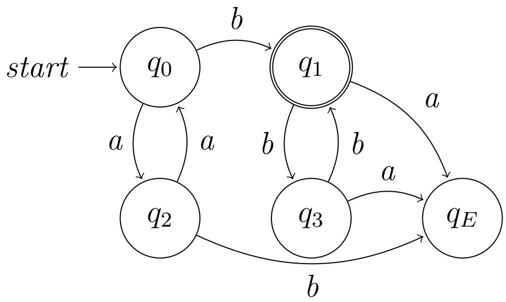
$$L = \{w \in \{a,b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ e dispari di } b\}$$



Esempio 58. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{a,b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ seguito da uno dispari di } b\}$$

$$L = \{a^{2n}b^{2k+1} | j, k \geq 0\}$$

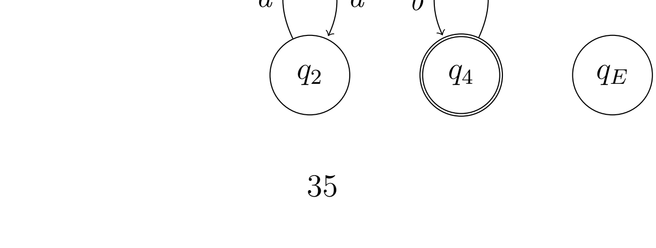


ovvero in tabella:

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_0	q_E
$* q_2$	q_E	q_3
q_3	q_E	q_2
q_E	q_E	q_E

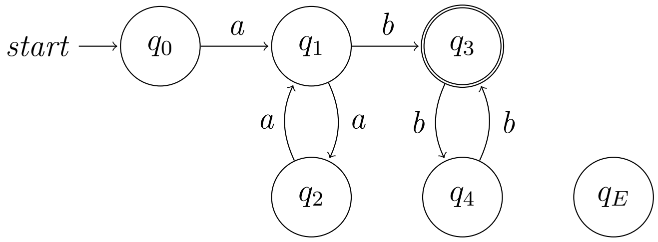
Esempio 59. *Trovo automa per:*

$$L = \{a^{2k+1}b^{2h} |\ h, k \geq 0\}$$



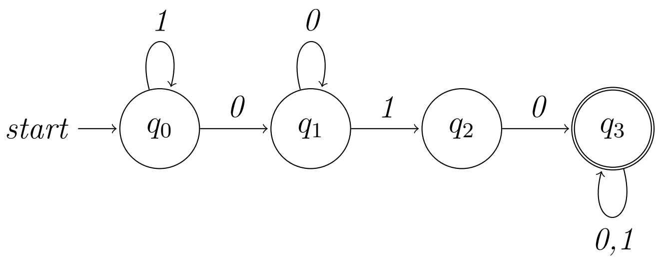
Esempio 60. *Trovo automa per:*

$$L = \{a^{2n+1}b^{2k+1} |\, n, k \geq 0\}$$



Esempio 61. *Trovo automa per:*

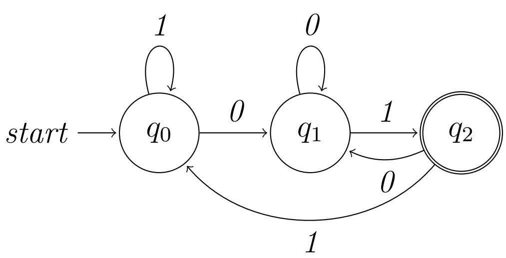
$$L = \{x010y |\, x, y \in \{o, 1\}^*\}$$



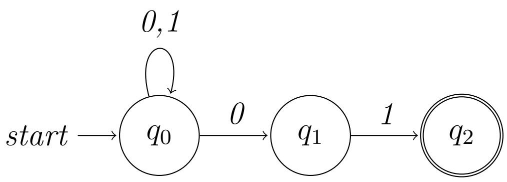
1.2.2 Automi non deterministici

Un automa a stati finiti non deterministici (*NFA*) può trovarsi in diversi stati contemporaneamente. Come i DFA accettano linguaggi regolari e spesso sono più semplici da trattare rispetto ai DFA.
Un NFA è definito come un NFA ma si ha un diverso tipo di transizione δ, che ha sempre come argomenti uno stato e un simbolo di input ma resituisce zero o più stati.

Esempio 62. *Sia* $L = \{x01 |\, x \in \{o, 1\}$ *ovvero il linguaggio formato da tutte le stringhe binarie che terminano in 01.*
Avremo il seguente automa determinsitico:



che diventa il seguente NFA:



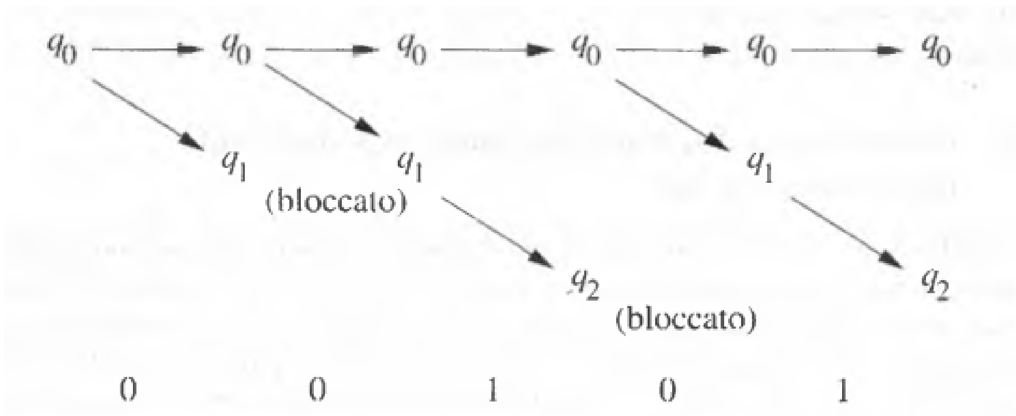
quindi con:

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$
$$\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$$
$$\delta(q_1, 0) = \emptyset$$
$$\delta(q_1, 1) = \{q_2\}$$
$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$
$$\delta(q_2, 1) = \emptyset$$

in forma tabulare:

δ	*0*	*1*
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$

vediamone la simulazione per la stringa 00101:



ovvero si parte dallo stato inziale, quando viene letto 0 si passa a q_0 e q_1, poi viene letto il secondo 0 quindi q_0 va nuovamente verso q_0 e q_1 mentre il primo q_1 muore non avendo transizioni su 0. Arriva poi l'1 quindi q_0 va solon verso q_0 e q_1 verso q_2 e sarebbe accettante ma l'input non è finito. Ora arriva 0 e q_2 si blocca mentre q_0 va sia in q_0 che in q_1. Arriva infine un 1 che manda q_0 in q_0 e q_1 in q_2 che è accettante e non avendo altri input si è dimostrata l'appartenenza della stringa al linguaggio definisco quindi un NFA come una quintupla:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

con, a differenza dei DFA:

$$\delta : Q \times F \to 2^Q$$

Possiamo ora definire $\hat{\delta}$, delta cappuccio che prende in ingresso uno stato e l'intera stringa w. Definisco ricorsivamente:

- **caso base:** se $|w| = 0$ ovvero se $W = \varepsilon$ si ha:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

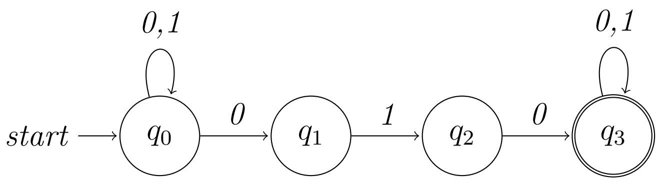
- **caso passo:** se $|w| > 0$, allora $W = xa$, $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$. Posto $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, ..., p_k\}$ si ha:

$$\hat{\delta}(q, w) = cup\delta(p_i, a)$$

Per il lingauggio L accettato dall'automa si ha:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* |\, \hat{\delta}(q_0, q) \cap F \neq \emptyset\}$$

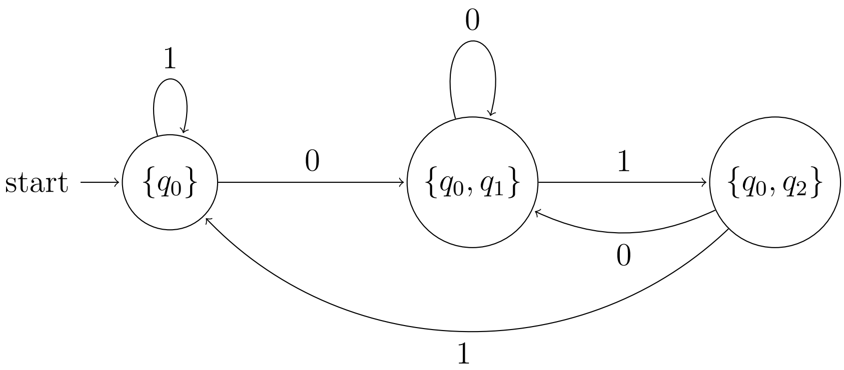
Esempio 63. *Automa per* $L = \{x010y|\, x, y \in \{0, 1\}^*\}$ *ovvero tutte le stringhe con dentro la sequenza* 010*:*



Troviamo ora un algoritmo che trasformi un NFA in un DFA.
Dall'ultimo esempio ricavo:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

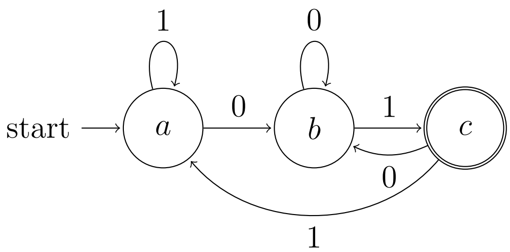
ovvero:



che è il DFA che si era anche prima ottenuto. Si hanno però dei sottoinsiemi mai raggiungibili. Si ha quindi:

	0	1
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

e definendo $\{q_0\} = a$, $\{q_0, q_1\} = b$ *e* $\{q_0, q_2\} = c$ si avrà:



Definiamo questo algoritmo che avrà:

- come input un NFA $N = (Q_n, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$
- come output un DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ tale che $L(D) = L(N)$

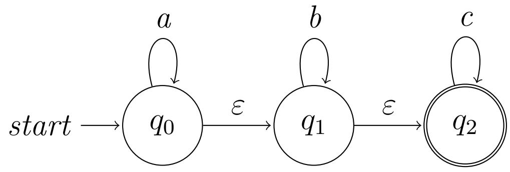
con:

- $Q_D = 2^{Q_N}$ (quindi se $Q_N = n$ si ha $|Q_D| = 2^n$)
- $F_D = \{S \subseteq Q_n | \, S \cap F_N \neq \emptyset\}$

- $\forall S \subseteq Q_N$ e $\forall a \in \Sigma$:
$$\delta_D(S, a) = \cup \delta_n(p, a)$$
  per esempio:
$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) \cup \delta_N(q_2, 0)$$

Si definisce l'$\varepsilon - NFA$, l'automa astati finiti non deterministici con ε transizioni. Con la transizione ε posso saltare i nodi, ovvero avanza senza aggiungere caratteri

Esempio 64. *Si ha $ER = a^* b^* c^*$, che genera:*
$$L = \{a^n b^m c^k |\, n, m, k \geq 0\}$$
si ha:



ovvero con ε posso per esempio generare quante a voglio da q_0 e passare a q_2, uscendo senza generare altro

Si definisce la funzione $ECLOSE : Q \rightarrow 2^Q$, con $ECLOSE(q)$ insieme degli stati raggiungibili da q tramite $\varepsilon - mosse$. Nell'esempio precedente si avrebbe:
$$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$$
$$ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$$
si ha inoltre che:

- $ECLOSE 2^Q \rightarrow 2^Q \;\; P \subseteq Q$
- $ECLOSE(P) = \cup ECLOSE(p)$
- $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

mettendo in tabella l'esempio precedente si ha:

	a	b	c
$* \rightarrow \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

riscrivendo:

- $a = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $b = \{q_1, q_2\}$
- $c = \{q_2\}$
- $d = \emptyset$

ovvero:

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = ECLOSE(\delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a))$$

$$= ECLOSE(\{q_0\} \cup \emptyset \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_0\})$$

$$= ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

e

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, B) = ECLOSE(\delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b))$$

$$= ECLOSE(\emptyset \cup \{q_1\} \cup \emptyset) = ECLOSE(\{q_1\})$$

$$= ECLOSE(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

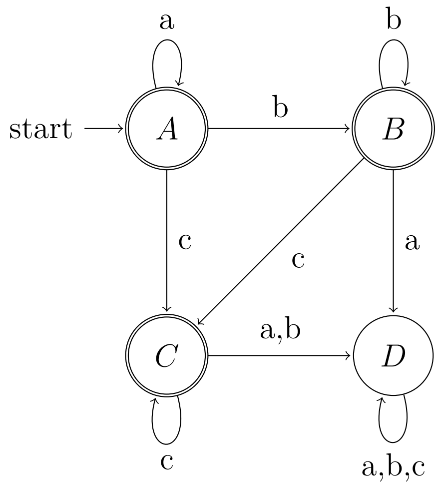
e

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, c) = ECLOSE(\delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c))$$

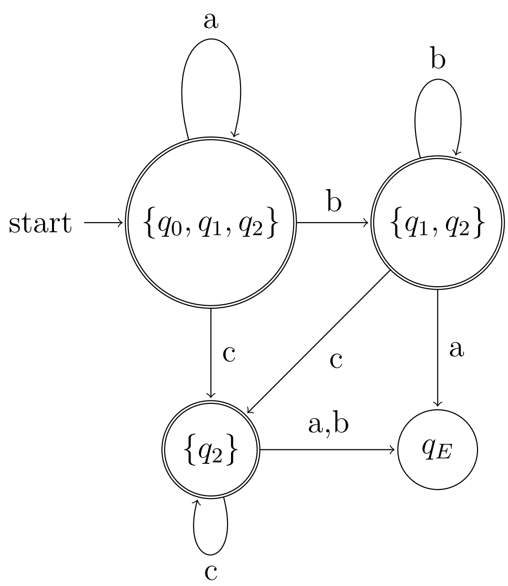
$$= ECLOSE(\emptyset \cup \emptyset \cup \{q_2\}) = ECLOSE(\{q_1\})$$

$$= ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$$

si ottiene quindi il seguente NFA:

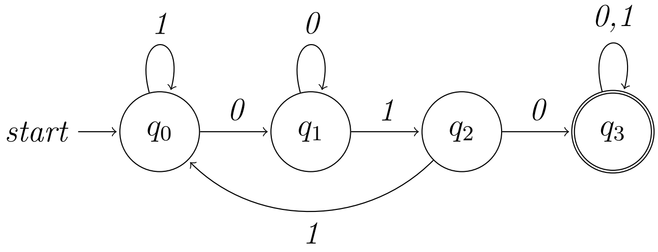


che diventa il seguente DFA:

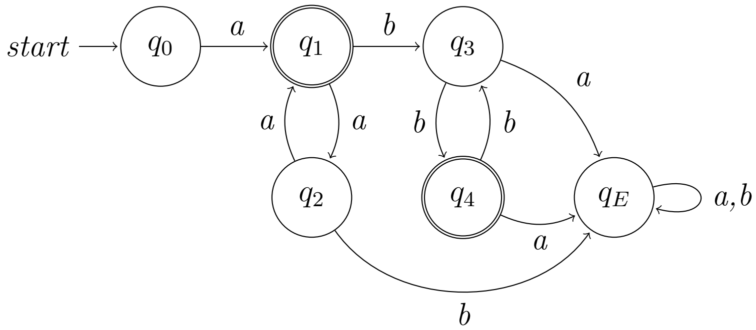


esercizi

Esempio 65. *automa DFA per* $w = x010y,\ x, y \in \{0, 1\}^*$ *:*
la stringa più corta è 010



Esempio 66. *automa DFA per* $a^{2k+1}b^{2h},\ h, k \geq 0$ *:*
concatenazione di a dispari e b pari:



Esempio 67. *cerco DFA per stringhe inizianti con a e finenti con b, con occorrenze di b singole o a coppie, nessuna regola per c.*
per esempio abbcb è nel linguaggio