

# Teoria della Computazione

UniShare

Davide Cozzi  
@dlcgold

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Prerequisiti di computazione</b>	<b>3</b>
2.1	Tempo di calcolo di una TM . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Complessità computazionale</b>	<b>6</b>
3.1	Riduzioni polinomiali . . . . .	12
3.1.1	Problema set-cover . . . . .	18
3.1.2	Problemi di ottimizzazione . . . . .	20
3.1.3	Problemi NP-hard non NP . . . . .	28
3.2	Complessità parametrica . . . . .	29
3.2.1	Vertex-cover parametrico . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Macchina di Turing</b>	<b>31</b>
4.1	Problemi intrattabili . . . . .	31
4.2	Definizione della TM . . . . .	32
4.3	Problemi non risolvibili . . . . .	44
4.3.1	Halting problem . . . . .	45
4.3.2	Problemi decidibili . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Pattern matching</b>	<b>50</b>
5.1	Pattern matching con automi . . . . .	53

# Capitolo 1

## Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlccgold/Appunti>.

# Capitolo 2

## Prerequisiti di computazione

L'informatica è costruita su una logica matematica. Il punto di partenza è stato dettato da Turing (con la **macchina di Turing** ( $TM$ )) e questo pensiero si è poi sviluppato nel tempo. Turing, con la sua macchina logica, ha dimostrato che ci sono funzioni non calcolabili, verità logiche non dimostrabili.

Subito dopo la macchina di Turing nasce la teoria della **complessità computazionale**, col fine di classificare i problemi in base alla difficoltà delle soluzioni mediante macchine di calcolo. Tale *difficoltà* viene stimata rispetto a **spazio** e **tempo**. La teoria della **complessità computazionale** si riferisce a varie **classi di complessità** che classificano, in un primo approccio, *problemi decisionali* descritti da funzioni binarie che hanno in input una stringa sull'alfabeto  $\{0, 1\}$  e restituiscono un bit (o 0 o 1). Questo perché le macchine di Turing ragionano in binario. Si ha quindi:

$$f : \{0, 1\}^* \rightarrow 0, 1$$

**Esistono problemi che si è dimostrato non essere risolvibili in tempo efficiente.**

Tra le classi abbiamo i **problemi NP** e **problemi P**. Inoltre i problemi NP sono a loro volta classificabili tra loro cercando i più difficili, ottenendo **problemi NP-hard** e **problemi NP-complete** (esistono varie dimostrazioni per la *NP-completezza*).

### 2.1 Tempo di calcolo di una TM

**Definizione 1.** Sia  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione calcolabile da TM e  $L\pi$  un linguaggio di decisione (dove  $\pi$  sta per “problema” e “di decisione” ci ricorda che il risultato sarà binario) allora una **TM deterministica**  $M$  accetta  $L\pi$

in tempo  $T(n)$  se,  $\forall x \in L\pi$ , con  $|x| = n$ ,  $M$  accetta  $x$  in  $T(n)$  mosse o configurazioni

**Definizione 2.** Un **problema di decisione**  $\pi$  riceve in input un'istanza  $x$  e l'output è:

- 0 che vuole dire no
- 1 che vuole dire yes

Un linguaggio  $L\pi$  restituisce 1 per tutti gli  $x$  che appartengono al linguaggio. Quindi  $L\pi$  è l'insieme degli input di  $\pi$  su cui l'output è 1 (è l'analogo della funzione caratteristica di un insieme, ovvero la funzione che risponde 1 sse un certo elemento appartiene all'insieme di riferimento).

La **funzione associata al problema** si chiama  $f\pi$  ed è la funzione che dato un input restituisce 1 sse l'input appartiene a  $L\pi$ .

Approfondiamo ora lo studio della **classe P**.

**Definizione 3.** La classe dei linguaggi di decisione accettati in tempo  $T(n) = cn^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 0$  da una TM deterministica è detta **classe P**, quindi in un tempo polinomiale sulla dimensione dell'input  $n$ , è detta **classe P**. Quindi  $P$  è una classe di **problemi di decisione**.

Potenzialmente  $p$  potrebbe anche non essere un intero in quanto si potrebbero avere tempi frazionari.

**Definizione 4.** Si definisce che  $L\pi$  è accettato da una TM in tempo  $T(n)$  se  $\exists T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  calcolabile da TM e  $\forall x \in L\pi$ , con  $|x| = n$ , la TM accetta  $x$  e risponde 1 (yes) in al più  $T(n)$  mosse di calcolo (dette anche configurazioni). Nel caso del modello della macchina RAM si ha la stessa situazione con però  $T(n)$  **istruzioni RAM** e si dice che  $L\pi$  è accettato dalla macchina RAM (si può dire che è anche deciso dell'algoritmo  $A$  della macchina RAM). In caso contrario la macchina RAM restituisce no, in quanto si parla di “decisione” oltre che di “accettazione” (a differenza della TM, dove però si può ottenere lo stesso discorso parlando di TM complementare  $M'$ , che in  $T(n)$  mi risponderà yes alla richiesta che un input non appartenga a  $L\pi$ , altrimenti bisogna fissare un limite di tempo per ottenere yes).

È dimostrabile che se  $L\pi$  è accettabile in tempo polinomiale allora nello stesso tempo è anche decidibile.

La differenza tra accettazione e decisione sarà fondamentale nel **modello non deterministico**.

Si ricordi che il **modello RAM** (*Random Access Machine*) è usato per studiare il tempo di calcolo di uno pseudocodice. È un modello teorico (una macchina teorica “simile” a quelle reali) dotato di istruzioni come *load*, *store*, *add*, *etc.*... dove un codice (ipoteticamente in qualsiasi linguaggio incluso lo pseudocodice) viene tradotto in una sorta di linguaggio macchina (linguaggio RAM), dove  $n$  è un intero rappresentante il numero di istruzioni RAM necessarie per ottenere l’output ( $n$  è detto **tempo uniforme**). Sul linguaggio RAM si può studiare anche lo spazio calcolato come numero di bit necessari per la computazione (è detto **costo logaritmico**). In questo secondo punto il costo di un’istruzione, come ad esempio  $load(n)$ , è logaritmico rispetto all’operando  $n$  ( $\log_2 n$ ), studia quindi la *dimensione* dell’input.

Consideriamo ora un modello basato su algoritmi.

**Definizione 5.** Sia  $L\pi$  un linguaggio di decisione e  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione calcolabile, allora un algoritmo  $A$  accetta  $L\pi$  in tempo  $T(n)$  sse  $\forall x \in L\pi$ , con  $|x| = n$ ,  $A$  termina su input  $x$  dopo  $T(|x|)$  passi di calcolo, ovvero istruzioni eseguite, producendo 1 come output. Quindi  $P$  è la classe dei linguaggi di decisione accettati in tempo  $T(n) = cn^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  (con lo stesso discorso di sopra su  $p$ ) da un algoritmo  $A$  in tempo polinomiale.

## Capitolo 3

# Complessità computazionale

Si cerca di catalogare dal punto di vista computazionale i **problemi intrattabili**, ovvero problemi risolvibili ma non in modo **efficiente** (ovvero in tempo polinomiale). In alcuni casi si pensa che non esista una soluzione ma non si hanno dimostrazioni in merito mentre in altri casi è addirittura dimostrato. Abbiamo quindi delle categorie informali per i problemi:

- **facili**, so risolverli in modo efficiente. È la **classe P**
- **difficili** o, più formalmente, **intrattabile**, so risolverli ma non in modo efficiente e non ho una dimostrazione che mi assicuri che non siano risolvibili in modo efficiente. È la **classe NP** e la sua sottoclasse **NP-complete**
- **dimostrabilmente difficili**, so risolverli ma so che non esiste un algoritmo efficiente in quanto è stato dimostrato che non può esistere
- **impossibili**, non so risolverli sempre neanche in modo non efficiente (esiste almeno un input che manda in crisi l'algoritmo ma esiste almeno un caso in cui funzioni)

Come formalismo useremo la **Macchina di Turing (TM)**, *deterministica e non deterministica*. Analizzeremo in primis **problemi sui grafi**. Un grafo è definito come  $G = (V, E)$ , con  $V$  insieme dei vertici e  $E$  insieme degli archi. Un grafo può essere *orientato* o *non orientato*. Un **cammino** tra due vertici è una sequenza di archi che mi porta da un vertice all'altro. Un cammino è detto **ciclo** se il vertice sorgente coincide con quello di destinazione. Due vertici sono **connessi** se esiste un cammino che li collega. Un **grafo connesso** è un grafo dove per ogni coppia di vertici si ha che essi sono connessi. Se questo cammino è di un solo arco si parla di **grafo completo**, ovvero ogni

vertice è **adiacente** ad ogni altro. Si parla di **grafo pesato** se si ha una funzione  $W$  che associa un peso ad ogni arco.

Useremo anche la teoria dei linguaggi formali con  $V$  alfabeto e stringhe costruite su  $V$ . Con  $\varepsilon$  abbiamo la stringa vuota e con  $V^*$  è l'insieme di tutte le possibili stringhe costruibili con quell'alfabeto, inclusa la stringa vuota.  $V^*$  è un insieme infinito. Con  $V^+$  indico  $V^*/\varepsilon$ , ovvero senza la stringa vuota. Un **linguaggio**  $L$  è un sottoinsieme di  $V^*$ , quindi  $L \subseteq V^*$ , che comprende tutti gli elementi di  $V^*$  che seguono una certa **proprietà** (o più proprietà). Anche  $L$  è un insieme infinito.

Un'altra nozione è quella di **problema**. Un problema computazionale è una "questione" a cui si cerca risposta. Più formalmente un problema è specificato da **parametri** (l'input del problema) e le **proprietà** che deve soddisfare la **soluzione** (l'output). L'**istanza** di un problema specificando certi parametri in input al problema (input che devono essere coerenti ai parametri richiesti).

Cominciamo con degli esempi di problemi comunque risolvibili.

**Esempio 1.** *Considero il problema arco minimo. Come parametro ho un grafo pesato sugli archi  $G = (V, E)$ . Le proprietà della soluzione è che voglio l'arco con peso minimo.*

*Per risolvere guardo tutti gli archi e vedo quello di peso minimo. Dato che basta iterare su tutti gli archi quindi la soluzione è in  $O(n)$  (in realtà  $\Theta(n)$ ), quindi in **tempo lineare** sul numero di archi (è quindi in **tempo polinomiale**)*

**Esempio 2.** *Considero il problema raggiungibilità. Come parametro ho un grafo non pesato  $G = (V, E)$  e due vertici, uno sorgente e uno destinazione, tali che  $v_s, v_d \in V$ . Le proprietà della soluzione è che voglio sapere se posso arrivare a  $v_d$  partendo da  $v_s$ .*

*Per risolvere studio tutti i cammini che partono da  $v_s$  e posso dare la risposta. Una soluzione del genere è in tempo  $O(2^{|E|})$ . Il tempo quindi cresce in **modo esponenziale**. Una soluzione migliore è quella di usare un **algoritmo di visita** che richiede tempo  $O(|V| + |E|)$ , ovvero un **tempo polinomiale**. Quindi per quanto all'inizio si pensi che sia un **problema intrattabile** si scopre che è un **problema facile***

**Esempio 3.** *Considero il problema TSP. Come parametro ho un grafo pesato sugli archi e completo  $G = (V, E)$ . Le proprietà della soluzione è che voglio sapere il cammino minimo (in realtà un ciclo) che tocca tutti i vertici una e una sola volta (una volta trovata la soluzione non mi interessa la sorgente essendo il grafo completo).*

*Sarebbe facile determinare **un** ciclo ma non quello di peso minimo e per*



farlo devo trovare tutti i cicli e trovare quello di peso minimo. Ho quindi un algoritmo che è  $O(2^n)$  (nella realtà è circa  $O(n!)$  che è comunque esponenziale per l'**approssimazione di Stirling**). In questo caso non si riesce a pensare ad una soluzione che non sia esponenziale nel tempo (anche se per alcuni input sia di facile risoluzione, basti pensare ad avere tutti gli archi di peso 1, ma mi basta avere un input problematico). Non potendo però dimostrare che sia irrisolvibile si dice che è un **problema intrattabile**. TSP è uno dei 10 problemi famosi per i quali ti danno un milione di dollari se dimostri che è o facile o impossibile

Per completezza definiamo un **algoritmo** come una sequenza di **istruzioni elementari** (supportate dal calcolatore) che, eseguite in sequenza, mi portano alla soluzione di un problema. Si ha quindi che un algoritmo  $A$  risolve un problema  $\Pi$  se per ogni possibile istanza di  $\Pi$  l'algoritmo  $A$  mi dà la risposta corretta. Distinguo però:

- **algoritmo efficiente**, che mi dà la soluzione in **tempo polinomiale** rispetto alla **dimensione dell'input**. Ho un *caso peggiore* limitato superiormente da un **polinomiale**:  $O(p(n))$ . Ho una crescita di tempo accettabile all'aumentare dell'input. Diciamo comunque che è dura anche solo raggiungere  $O(n^{10})$  quindi anche se dire polinomiale potrebbe voler dire  $O(n^{10000000})$  non si hanno casi reali di questo tipo
- **algoritmo non efficiente**, che mi dà la soluzione ma in tempo superiore a quello **polinomiale**. Ho un *caso peggiore* limitato superiormente da un **esponenziale**:  $O(2^n)$ . Ho una crescita di tempo assolutamente non accettabile (esponenziale appunto) all'aumentare dell'input

*Se ho anche solo un caso di input che porta a tempo esponenziale ho comunque un algoritmo non efficiente.*

Spesso **problemi intrattabili** vengono risolti tramite approssimazioni per arrivare ad una soluzione accettabile anche se non la migliore ma non sempre è possibile effettuare delle approssimazioni.

Anche se avessi la capacità di fare con un computer mille volte migliore di quelli attuali, un problema esponenziale avrà comunque tempi non accettabili in proporzione ad un problema polinomiale. Quindi non sarà il miglioramento hardware a permettere di rendere accettabile la soluzione di problemi esponenziali.

Un **algoritmo intrattabile** quindi non risolve in modo efficiente tutti gli input. Bisognerà trovare un modo per capire se un algoritmo è **intrattabile**

per davvero.

Studiamo ora il tempo di calcolo di una **macchina di Turing non deterministica (NTDM)**:

**Definizione 6.** Sia  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione calcolabile da TM. Dato  $L\pi$  un linguaggio di decisione allora una NDTM  $M$ .  $M$  accetta  $L\pi$  in tempo  $T(n)$  se per ogni  $x$  in  $L\pi$ , con  $|x| = n$ ,  $M$  accetta  $x$  in  $T(n)$  mosse (o configurazioni).

Quindi la **classe NP** è la classe dei linguaggi di decisione accettati in tempo  $T(n) = cn^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  da una NDTM

Diamo una definizione alternativa di NP:

**Definizione 7.** Sia  $L\pi$  un linguaggio di decisione,  $N : n \rightarrow n$  una funzione calcolabile,  $y$  una stringa di lunghezza polinomiale nell'input, allora un algoritmo  $A$  con "certificato" accetta  $L\pi$  in tempo  $t(n)$  se per ogni  $x$  in  $L\pi$ , con  $|x| = n$ ,  $A$  termina su input  $(x, y)$  dopo  $t(|x|)$  passi di calcolo (istruzioni eseguite) producendo 1 in output. Quindi la **classe NP** è la classe dei linguaggi (o problemi) di decisione accettati in tempo  $T(n) = cn^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  da un algoritmo  $A$  "certificato"

Resta da capire il significato del termine "certificato".

**Definizione 8.** Preso un algoritmo  $A$  definiamo cosa significa che sia "certificato" si compone di un input  $(x, y)$  con  $y$  che è una stringa, nel dettaglio una **dimostrazione**, che garantisce che  $x \in L\pi$ .

Vediamo un esempio:

**Esempio 4.** Uso un problema NP come esempio, quindi  $\pi \in NP$ , per avere un algoritmo che ammette certificato (non ho alternative).

Prendo il problema  $\pi$  vertex-cover. Come input si ha un grafo  $G = (V, E)$  e un intero  $k$ . Come output ho o 1 o 0, essendo un problema di decisione, e si cerca di capire se  $\exists V' \subseteq V$  tale che  $V'$  è una copertura di  $G$ . Il sottoinsieme è copertura di un grafo quando foral  $e \in E$  almeno un estremo dell'arco  $e = (u, v)$  è in  $V'$ . La copertura con il minor numero di vertici è detta **minima copertura**.

Il problema vertex-cover chiede se esiste una copertura del grafo di dimensione  $k$ . È quindi un **problema di decisione**. Qualora trovassi una copertura di cardinalità minore di  $k$  mi basterà aggiungere vertici arbitrari fino al raggiungimento di  $k$ . Ovviamente può non esistere una copertura di cardinalità  $k$ .

Il problema di vertex-cover è il problema di decisione del problema di trovare

la minima copertura di un grafo, che è un **problema di ottimizzazione** (o **problema di ottimo**) (ogni problema di ottimizzazione può essere trasformato in uno di decisione aggiungendo un parametro  $k$  e richiedendo un risultato booleano).

vertex-cover decisionale è nella classe **NP** con “certificato” e, in questo caso, il parametro  $y$  è la dimostrazione che posso dare risposta affermativa, per esempio la certezza di avere un sottoinsieme di vertici che effettivamente copre tutto il grafo, quindi  $y = V'' \subseteq V$  tale per cui  $V''$  copre  $G$  con cardinalità  $k$ . Bisogna capire come trovare e come usare  $y$ , sapendo che  $A$  lavora in tempo polinomiale e che la lunghezza di  $y$  è polinomiale in dimensione di  $x$ . Vedendo che la cardinalità di  $y$  è minore di  $k$  l'algoritmo  $A$  verifica che con i vertici passati con  $y$  si è in grado di rispondere al problema in modo affermativo, problema che ha in input  $G$  e  $k$ . In poche parole  $A$ , per ogni arco, esamina se ogni estremo è in  $y$  e, se tutti gli archi hanno un estremo in  $y$  allora si ha che usando  $y$  si è in grado di verificare l'input  $G, k$  è **accettato**. Questa verifica è in tempo polinomiale e si ha che  $|y| = O(|G, k|)$ , soprattutto se  $|y|$  è una costante.

Ad oggi non si è dimostrato che vertex-cover si risolvibile in tempo polinomiale. È quindi un problema **NP-hard**.

**Esempio 5.** Per l'algoritmo TSP la versione di ottimo è trovare il tour di costo minimo. Il problema di decisione è se esiste un tour di massimo peso  $k$ . In questo caso già il problema di decisione è già in **NP** e lo è anche il problema di ottimo. La verifica con “certificato” ha comunque costo polinomiale nel caso di richiesta di verifica di un dato tour con costo minore di  $k$ .

**Il problema di decisione è una restrizione di quello di ottimo.**

Per notazione dato un algoritmo  $A$  chiamiamo  $A_d$  la sua versione di decisione.

**Senza “certificato” non potrei accettare un problema NP.**

Un problema di classe **NP** quindi ammette verifica in tempo polinomiale, ammettendo un “verificatore” in tempo polinomiale per i problemi specifici.

Non è così scontato trovare “certificato”, di dimensione polinomiale nell'input, e trovare il “verificatore”. Per esempio la classe **exptime** non esiste  $A$  con “certificato” che sia polinomiale (la verifica potrebbe richiedere tempo esponenziale).

Quindi per un problema **NP** con “certificato” non posso trovare soluzione in tempo polinomiale ma posso verificare una soluzione data in tempo polinomiale.

Posso quindi dimostrare che un problema  $\pi$ , con in input una struttura combinatoria discreta (come un grafo) e un intero, è in **NP**.

Si ha quindi che  $\mathbf{P}$  è vista come sottoclasse la  $\mathbf{NP}$  dove i problemi di decisione sono risolvibili in tempo polinomiale anche senza “certificato”. Per dimostrare che  $P \subseteq NP$  devo far vedere che ogni  $L\pi \in P$  ammette un algoritmo  $A$  con “certificato” in tempo polinomiale. Ma questo è vero perché  $L\pi$  è accettato da un algoritmo  $A$ , in tempo polinomiale con  $y = \emptyset$  e quindi  $y$  non è necessario.

Si ha quindi che  $P \subseteq NP$ . Pensando poi, per esempio, all’*isomorfismo di grafi* nessuno sa se sia  $P$  o  $NP$ . Questo problema ha in input due grafi e come output se sono isomorfi tra loro.



Figura 3.1: Diagramma di *Eulero Venn* per le classi di complessità

*Tratto dagli appunti di Metodi Formali:*

*Si parla di isomorfismo quando due strutture complesse si possono applicare l’una sull’altra, cioè far corrispondere l’una all’altra, in modo tale che per ogni parte di una delle strutture ci sia una parte corrispondente nell’altra struttura; in questo contesto diciamo che due parti sono corrispondenti se hanno un ruolo simile nelle rispettive strutture.*

Diamo ora una definizione formale di isomorfismo tra sistemi di transizione etichettati, che possono quindi essere grafi dei casi o grafi dei casi sequenziali.

**Definizione 9.** Siano dati due sistemi di transizione etichettati:

$A_1 = (S_1, E_1, T_1, s_{01})$  e  $A_2 = (S_2, E_2, T_2, s_{02})$ .

e siano date due **mappe biunivoche**:

1.  $\alpha : S_1 \rightarrow S_2$ , ovvero che passa dagli stati del primo sistema a quelli del secondo
2.  $\beta : E_1 \rightarrow E_2$ , ovvero che passa dagli eventi del primo sistema a quelli del secondo

allora:

$$\langle \alpha, \beta \rangle : A_1 = (S_1, E_1, T_1, s_{01}) \rightarrow A_2 = (S_2, E_2, T_2, s_{02})$$

è un **isomorfismo** sse:

- $\alpha(s_{01}) = s_{02}$ , ovvero l'immagine dello stato iniziale del primo sistema coincide con lo stato iniziale del secondo
- $\forall s, s' \in S_1, \forall e \in E_1 : (s, e, s') \in T_1 \Leftrightarrow (\alpha(s), \beta(e), \alpha(s')) \in T_2$   
ovvero per ogni coppia di stati del primo sistema, tra cui esiste un arco etichettato  $e$ , vale che esiste un arco, etichettato con l'immagine di  $e$ , nel secondo sistema che va dall'immagine del primo stato considerato del primo sistema all'immagine del secondo stato considerato del secondo sistema, e viceversa

**Definizione 10.** Si definiscono due **sistemi equivalenti** sse hanno grafi dei casi sequenziali, e quindi di conseguenza anche grafi dei casi, isomorfi. Due sistemi equivalenti accettano ed eseguono le stesse sequenze di eventi

## 3.1 Riduzioni polinomiali

Si hanno alcuni problemi che sono in grado di risolvere qualunque problema di decisione in **NP**. Serviranno prima le definizioni di **NP-hard** e **NP-complete**.

Vediamo innanzitutto il problema *independent-set* che ci aiuterà analisi.

**Definizione 11.** L'*independent-set* di un grafo non orientato è un sottoinsieme  $I \subseteq V$  tale che  $\forall u, v \in I (u, v) \notin E$ . Il problema *ind\_set*, nella versione di ottimo, è quello di trovare l'*independent-set* di cardinalità massima di un grafo non orientato. Nella versione di decisione *ind\_set<sub>d</sub>* si ha

anche il parametro  $k$  intero e si cerca se esiste un *independent-set* di cardinalità uguale a  $k$ . L'*independent-set* di cardinalità massima può essere usato come “certificato”.

Questo problema è legato alla *copertura dei vertici*, infatti sappiamo che se dall'insieme dei vertici togliamo un sottoinsieme di minima copertura troviamo un *independent-set* di cardinalità massima perché sto facendo il complemento di un insieme di copertura di cardinalità minima, infatti tra i vertici non nell'insieme di copertura di cardinalità minima, ovvero nel complemento, non posso avere un arco per definizione e quindi se il primo è di cardinalità minima allora il secondo, che è l'*independent-set*, è di cardinalità massima. Infatti i vertici nella copertura sono vertici che toccano tutti gli archi. Dal punto di vista delle applicazioni pratiche questi problemi si prestano allo studio, per esempio, delle telecomunicazioni.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $ind\_set_d$  è **NP**, infatti esiste un algoritmo  $A$  che in costo polinomiale prende in ingresso il grafo,  $k$ , e un “certificato”  $y$  e i vertici in  $y$ , che sono vertici di un *independent-set* per il grafo  $G$  di cardinalità  $k$ . L'algoritmo verifica che  $y$  è un *independent-set* e il costo della verifica è quadratico su  $|y|$ , ovvero  $|y|^2$  che nel caso peggiore è  $|V|^2$ . So anche che, per l'input  $x$ ,  $O(|x|) = O(|E| + |V|) = O(|V|^2 + |V|)$  nel caso peggiore, quindi il tempo di verifica è **polinomiale**.  $\square$

**Definizione 12.** Vediamo ora il problema di **soddisfacibilità SAT**. Questo problema prende in input una formula booleana  $\phi$  in **forma normale congiunta (CNF)**, ovvero che ha una congiunzione ( $\wedge$ ) come legame tra le **clausole**. Una clausola è un  $\vee$  di **letterali**, ovvero di variabili booleane  $x_i$  o  $\neg x_i$ . In output ho se la forma sia soddisfacibile o meno.

**Esempio 6.** Prendo 3 variabili,  $x_1, x_2, x_3$ . Creo i letterali  $x_1, x_2, x_3$  e anche  $\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3$ . Creo quindi le clausole  $c_1 = x_1 \vee x_2$ ,  $c_2 = x_1 \vee \neg x_2$  e  $c_3 = x_1 \vee \neg x_2$ . Definisco quindi la CNF  $\phi$ :

$$\phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) = c_1 \wedge c_2 \wedge c_3$$

Quindi in ogni clausola almeno un letterale deve essere vero, cosicché tutte le clausole siano vere rendendo vera la CNF.

Avendo due letterali a clausola si è definito un 2SAT.

Il numero di letterali  $k$  che compongono la clausola definisce un problema  $k$ SAT. Si ha che  $2SAT \in P$  ma con  $k > 2$  si ha che  $kSAT \in NP$  (in realtà è in **NP-hard**)



Figura 3.2: Rappresentazione grafica della riduzione

**Definizione 13.** Definiamo un problema **NP-hard** come un problema difficile almeno quanto un problema **NP**. Ogni problema  $A$  in **NP** può essere risolto con una chiamata di procedura a  $B$ , che è un problema **NP-hard** a cui tutti gli altri “chiedono aiuto” per trovare una soluzione.

Ad esempio *vertex-cover* è un problema **NP-hard** e quindi posso risolvere ogni problema  $A$  in **NP** con il problema *vertex-cover*  $B$ .

Trasformo quindi l’input  $w$  di  $A$  in un input  $f(w)$  per  $B$  in tempo polinomiale. La risposta di  $B$  con input  $f(w)$  è la stessa che  $A$  dà su input  $w$ .

Non tutti i problemi **NP-hard** sono dentro la classe **NP**

**Definizione 14.** Definiamo quindi il concetto di **riduzione**, rappresentato in figura 3.2.

La riduzione è la trasformazione dell’input di  $w$  in  $A$  in un input  $f(w)$  per  $B$ , in tempo polinomiale. La risposta di  $B$  con input  $f(w)$  è la stessa che  $A$  dà su input  $w$ .

Si ha che  $A$  si riduce polinomialmente a  $B$ , e si scrive:

$$A \leq_p B$$

se  $\exists f$  tale che:

$$w \in L_A \text{ sse } f(w) \in L_B$$

con  $f$  calcolabile in tempo polinomiale, infatti il calcolo di  $f(w)$  è  $= (|w|^p)$ , con  $p \in \mathbb{N}$  per semplicità. Non devo introdurre una complessità superiore nel contesto di confronto tra problemi (??).

Ogni problema  $A$  che in **NP** può essere risolto con una chiamata di procedura a  $B$ , quindi posso risolvere ogni problema  $A \in \text{NP}$  con *vertex-cover*, essendo esso un problema **NP-hard**.

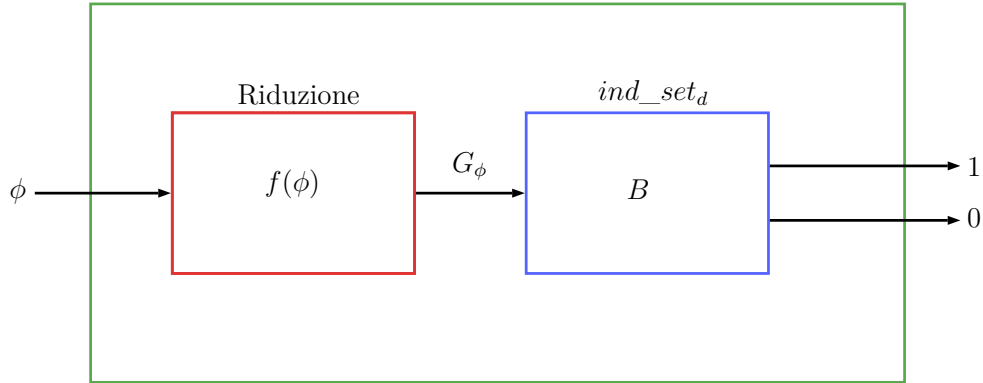


Figura 3.3: Rappresentazione grafica dell'esempio 7

**Definizione 15.**  $B$  è **NP-hard** sse  $\forall A \in NP$   $A$  si riduce a  $B$  in tempo polinomiale:

$$A \leq_p B, \forall A$$

Un problema  $NP$ –hard può non essere in  $NP$ , in quanto potrebbe non avere un “certificato” per consentire la verifica in tempo polinomiale.

**Definizione 16.** Un problema **NP-hard** e anche **NP** si dice che il problema è **NP-complete**

$kSAT$  è il primo problema che si è dimostrato essere anche **NP-complete**.

**Esempio 7.** Vediamo un esempio di riduzione, rappresentata in figura 3.3:

$$3SAT \leq_p ind\_set_d$$

arrivando e alla conclusione che  $ind\_set_d$  è **NP-completo**.

e vediamo che  $\phi$  è soddisfacibile sse  $G_\phi$  ha un independent-set di dimensione  $k = |\phi|$ , con  $|\phi|$  pari al numero di clausole della formula.

Costruisco quindi un grafo che ha un vertice per ogni letterale della clausola. Collego i tre letterale della clausola ottenendo un “triangolo”, detto gadget, che rappresenta una clausola. Infine collego ogni letterale al suo negato.



Quindi per la formula:

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

avrò il grafo  $G_\phi$  che codifica la formula  $\phi$ :



Quindi un **gadget** è una rappresentazione dell'input del problema  $A$  di partenza e ogni **gadget** rappresenta una clausola.

Ricordiamo che  $\phi$  è soddisfacibile sse esiste un assegnamento delle variabili della formula tale per cui almeno un letterale di ogni clausola è vero. Nel grafo relativo alla formula lego quindi un letterale ad ogni suo complemento al fine di poter identificare i valori di verità e avendo il calcolo di independent-set (per la **riduzione**) prendo uno solo degli estremi di un arco, e quindi uno solo tra  $x_i$  e  $\neg x_i$ , codificando l'assegnamento di verità. Il concetto di **riduzione** è quindi ritrovabile nella capacità di rappresentare un problema in un'altra forma, studiabile con un altro algoritmo.

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $A$  3SAT e con  $B$  independent-set.

Effettuiamo quindi la prova finale, la dimostrazione vera e propria. A questo livello di comprensione abbiamo dimostrato l'esistenza della funzione  $f$ , che trasforma  $\phi$  (ovvero l'input di  $A$ ) in  $\langle G, k \rangle$ , ovvero l'input di  $B$ , e che essa è in tempo polinomiale. Abbiamo quindi che  $w \in L_A$  sse  $f(w) \in L_B$ . Se  $\phi$  è vera allora esiste un *independent-set* di dimensione  $k$  per  $\langle G, k \rangle$ .

Nell' "altro verso" abbiamo che se esiste un *independent-set* di dimensione  $k$  per  $\langle G, k \rangle$  allora  $\phi$  è vera. Dimostrare questi due "versi" equivale a dimostrare la riduzione.

Il **primo verso** si dimostra dicendo che dato un assegnamento di verità si seleziona un letterale vero da ogni triangolo. Questi letterali veri scelti formano l'*independent-set*  $S$ , che ha dimensione  $k$ . Questo può accadere sse  $\phi$  è vera, infatti per ogni clausola  $c_i \exists l_{ij}$ , letterale, che rende vera  $c_i$ , a questo punto tale letterale è un vertice del triangolo, ovvero del gadget  $g_{c_i}$ , (mi basta infatti un letterale vero per triangolo) e, poiché tutte le clausole sono vere, ho la scelta di  $k$  vertici se  $k$  è il numero delle clausole. Esiste quindi un *independent-set* di dimensione  $k$ .

Per questo si potrebbe fare una **dimostrazione per costruzione**, ovvero se rendo vera  $c_y$  con  $l_y$  significa che la variabile  $x_i$  può essere usata o come 1 o come 0 nell'assegnamento di verità in un altro letterale  $l_z$ , che rende vera la clausola  $c_z$ . Ma  $x_i$ , se già usata, non posso più usarla con valore opposto a quello scelto per  $c_y$  e quindi non esiste un arco di collegamento tra  $l_y$  e  $l_z$ . Si può dimostrare anche per **assurdo**. Se esiste un arco tra i due letterali  $l_z$  e  $l_y$  che rendono vere le clausole  $c_z$  e  $c_y$ , allora ottengo una contraddizione sugli assegnamenti di verità, asserendo che i due letterali sono uno la negazione dell'altro ma entrambi sono veri, per poter rendere vere le clausole.

Il **secondo verso** si dimostra dicendo che, dato un *independent-set*  $S$  di dimensione  $k$ ,  $S$  deve contenere un vertice per triangolo. Ponendo quindi i letterali contenuti in  $S$  come veri si ottiene un assegnamento di verità che è **consistente** e tutte le clausole sono soddisfatte. Quindi se esiste un *independent-set* di dimensione  $k$  allora trovo un assegnamento alle variabili  $x_i$ ,  $\forall 1 \dots n$  che rende vera  $\phi$ , ovvero assegno 0 o 1 a ciascuna variabile (ovviamente o 1 o 0, non entrambi). Se esiste l'*independent-set* di dimensione  $k$  pari al numero delle clausole, allora per ogni gadget  $g_{c_i}$ , che rappresenta una clausola, esiste un vertice nel gadget che si trova anche nell'*independent-set*, quindi esiste un letterale, per ogni clausola  $c_i$  tale che non è collegato ad un altro letterale dell'*independent-set*, ovvero non è collegato ad un altro letterale di un'altra clausola (ovvero ho un nodo per gadget che non ha un arco verso un nodo di un altro gadget). Quindi per ogni letterale vedo la variabile che rende vero il letterale e con il valore dato alla variabile costruisco l'assegnamento o 0 o 1 a quella variabile (se  $l_i = \neg x_j$  allora  $x_j = 0$  e se  $l_i = x_j$  allora  $x_j = 1$ ). Trovo quindi l'assegnamento delle variabili che è di verità per  $\phi$ , dimostrando quindi che  $\phi$  è vera.  $\square$

Siccome 3SAT è **NP-complete** allora anche *independent-set* è **NP-complete**, infatti:

$$\forall A \in NP \leq_p 3SAT \leq_p \text{independent-set}$$

in quanto la riduzione  $\leq_p$  è **transitiva**, e quindi:

$$\forall A \in NP \leq_p \text{independent-set} \in NP$$

**Teorema 1.** Se un problema  $\Pi$  **NP-complete** è in  $P$  allora si può dire  $P = NP$ , implicando che ogni problema  $A \in NP$  è risolvibile da  $\Pi \in P$ . Questa cosa non è stata ancora dimostrata (e probabilmente si riuscirà a dimostrare l'opposto).

*Dimostrazione.* Per ogni problema  $A$  in **NP** so che  $A \leq_p \Pi$ , ovvero  $\Pi$  è una procedura che risolve  $A$ , con trasformazione dell'input  $x$  di  $A$  nell'input  $f(x)$

di  $\Pi$ , con  $f(x)$  calcolabile in tempo polinomiale.

Assumendo quindi che  $\Pi \in P$  allora anche ogni  $A \in P$ , e quindi  $NP = P$ .  $\square$

**Teorema 2.** *La riduzione polinomiale è transitiva. Ovvero se  $A \leq_p B$  e  $B \leq_p C$  allora:*

$$A \leq_p C$$

*Dimostrazione.* Infatti  $A \leq_p B$  implica l'esistenza di  $f$  tale che  $x \in L_A$  sse  $f(x) \in L_B$ . Ugualmente  $B \leq_p C$  implica l'esistenza di  $g$  tale che  $x \in L_B$  sse  $g(x) \in L_C$ .

Devo dimostrare che  $\exists f'$  tale che  $x \in L_A$  sse  $f'(x) \in L_C$ . Per ottenere  $f'$  compongo  $f$  e  $g$ . Assumendo che  $x$  appartiene all'input di  $f$  compongo le funzioni, quindi ho che  $f' = g \circ f$ , e ho che  $x \in L_A$  e che  $f(x) \in L_B$  (quindi  $f(x)$  è un input per  $B$ ) ma quindi  $g(f(x)) \in L_C$  (quindi  $g(f(x))$  è un input per  $C$ ). Ho quindi dimostrato la transitività.

Se  $f$  e  $g$  sono costruibili in tempo polinomiale, la prima sulla dimensione di  $x$  e la seconda su quella di  $f(x)$ , allora anche  $f' = g \circ f$  è costruibile in tempo polinomiale, proporzionalmente alla cardinalità di  $x$ .  $\square$

Quindi per dimostrare che un problema  $\Pi'$  è **NP-hard** devo ridurre  $\Pi'$  ad un problema qualsiasi **NP-hard** (in base alla somiglianza del problema), sapendo che  $\forall A \in NP$   $A$  si riduce ad un problema **NP-hard**, come  $SAT$ .

In modo equivalente per dire che è un problema è **NP-complete** faccio quanto fatto per **NP-hard** ma devo aggiungere che esso sia in  $NP$ , dovendo quindi aggiungere il "certificato".

**Teorema 3.** *Si ha che  $SAT \leq_p 3SAT$*

*Dimostrazione.* **Dimostrazione solo parziale, solo l'inizio è stato fatto in aula.**

Prendo una  $\phi$  con  $k \geq 4$  letterali. Ogni clausola deve diventare una clausola con al più 3 letterali (introducendo nuovi letterali ogni volta che viene negato uno).  $\square$

### 3.1.1 Problema set-cover

Questo problema si applica bene allo studio, nel campo delle telecomunicazioni, dei ripetitori e dello studio della copertura per reti mobili.

**Definizione 17.** *Dato un universo  $U$  di  $n$  elementi sia  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  una collezione di sottoinsiemi di  $U$ . Sia anche data una funzione di costo  $c: S \rightarrow \mathbb{Q}^+$ . Il problema **set-cover** consiste nel trovare una collezione  $C$  di sottoinsiemi di  $S$  di costo minimo che copra tutti gli elementi di  $U$ .*

**Esempio 8.** Se ho  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_2 = \{2, 3\}$ ,  $S_3 = \{4, 5\}$  e  $S_4 = \{1, 2, 4\}$ , con  $S = \bigcup S_i$ . Per praticità assumo costo uniforme, ovvero che  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ .

Quindi la soluzione  $C$  è  $\{S_1, S_3\}$ , in quanto questi due insiemi coprono tutti gli elementi di  $U$ , con costo pari a 5 (che è il minimo che posso avere).

**Definizione 18.** Qualora il costo sia uniforme allora il **set-cover** diventa la ricerca di una sotto-collezione che copra tutti gli elementi di  $U$  con minima dimensione.

**Teorema 4.** *set-cover*, nella versione decisionale e nella versione con peso uniforme, è **NP-complete** (quindi se esiste una collezione  $C$  di sottoinsiemi di  $S$  la cui unione sia  $U$  con cardinalità minore uguale di  $k$ ).

*Dimostrazione.* Posso facilmente dimostrare che  $|C| \leq k$  in tempo polinomiale e che l'unione degli insiemi di  $C$  include tutti gli elementi di  $U$ , in tempo polinomiale su  $|U|$ . Posso aggiungere anche un “certificato”, nella forma di una collezione che copre tutto  $U$  (e quindi la verifica è in tempo polinomiale sulla dimensione del “certificato” più quella di  $U$ ). Quindi **set-cover** è in **NP**.

Per dimostrare che **set-cover** è **NP-hard** dimostro che:

$$\text{vertex-cover} \leq_p \text{set-cover}$$

ovvero uso un problema che so già essere **NP-hard**, appunto *vertex-cover* (avendo già dimostrato che  $\forall A \in \text{NP}, A \leq_p \text{vertex-cover}$ , dimostrando che *set-cover* dimostra tutti i problemi in **NP**).

Faccio vedere che posso usare *set-cover* per dimostrare *vertex-cover*.

Devo quindi trasformare un'istanza di *vertex-cover*  $C = \langle G = (V, E), j \rangle$  in un'istanza  $C'$  di *set-cover*, in tempo polinomiale, tale che  $C$  è soddisfacibile sse  $C'$  è soddisfacibile.

Procedo quindi con la trasformazione. Pongo innanzitutto  $U = E$ . Per quanto riguarda la collezione  $S$  procedo nel seguente modo. Etichetto i vertici in  $V$  da 1 a  $n$ . A questo punto  $S_i$  diventa l'insieme degli archi incidenti al vertice  $i$ -simo. A questo punto basta porre  $k = j$  per concludere la costruzione polinomiale dell'istanza di *set-cover*.

In poche parole ciascun arco è un elemento di  $U$  e ciascun vertice è un insieme di  $S$ .

Vediamo anche la dimostrazione formale che *vertex-cover* risponde “yes”, per  $j$ , sse istanza di *set-cover* risponde “yes” per  $k = j$ .

Innanzitutto se *vertex-cover* risponde “yes” per  $j$  allora trovo una collezione di *set-cover* buona di cardinalità  $j$ . Suppongo infatti  $G$  ha una copertura

$C$  di al più  $j$  vertici e quindi  $C$  corrisponde ad una collezione di  $C'$  di sottoinsiemi  $U$ . Poiché assumo  $k = j$  allora  $|C'| \leq k$ . Inoltre  $C'$  copre tutti gli elementi di  $U$  coprendo tutti gli archi di  $G$ , in quanto ogni elemento di  $U$  è un arco in  $G$ . Poiché  $C$  è una copertura, almeno un estremo dell'arco è in  $C$  e quindi l'arco è in un insieme di  $C'$ .

Dimostriamo anche l'altro verso della dimostrazione, ovvero devo garantire l'esistenza della copertura. Suppongo di avere un set cover  $C'$  di dimensione  $k$ . Dato che ad ogni insieme di  $C'$  ho associato un vertice in  $G$  allora  $|C| = |C'| \leq k = j$ . Inoltre,  $C$  è una copertura di  $G$  poiché  $C'$  è un set-cover, poiché, preso un arco  $e$  ho che  $e \in U$  e quindi  $C'$  deve contenere almeno un insieme che contiene  $e$  e tale insieme è quello che corrisponde ai nodi che sono estremi di  $e$ . Quindi  $C$  deve contenere almeno un estremo di  $e$ . Quindi posso concludere dicendo che  $C$  è copertura di  $G$ .  $\square$

Si continua la ricerca di una dimostrazioni di **NP-completezza**, ambito di studio nato dopo la scoperta di Cook di  $SAT \in \mathbf{NP-complete}$ .

Partiamo ricordando che:

**Teorema 5.** *Se  $B$  è un problema tale che  $A \leq_p B$ , con  $A$  **NP-hard** (o ovviamente anche **NP-complete**), allora  $B$  è **NP-hard** e se inoltre  $B \in NP$  allora  $B$  è **NP-complete**.*

*Dimostrazione.* Con la transitività della riduzione  $\leq_p$  si ha che  $\forall \pi \in NP, \pi \leq_p A$  e quindi  $A$  è **NP-hard**. Inoltre avendo  $A \leq_p B$  ho che  $\pi \leq_p B$  e quindi  $B$  è **NP-hard**, inoltre, avendo  $B \in NP$ , ho che è **NP-complete**  $\square$

### 3.1.2 Problemi di ottimizzazione

#### Clique-problem

**Definizione 19.** *Definisco **clique** (cricca) di un grafo non orientato  $G = (V, E)$  come un sottoinsieme  $V' \subseteq V$  di vertici tale che:*

$$\forall v_1, v_2 \in V' (v_1, v_2) \in E$$

*quindi un sottoinsieme di vertici con solo vertici collegati da un arco.*

Definisco quindi il problema.

**Definizione 20.** *Il **clique-problem** è un problema di ottimizzazione (nel dettaglio di massimo) in cui si cerca la **clique** di dimensione massima di un grafo (ovvero  $|V'|$  è massimo). Nella versione decisionale chiedo se esiste una **clique** di dimensione  $k$ .*

*Il problema è **NP-complete***

*Dimostrazione.* Dimostriamo che sia **NP-complete** (nella versione decisionale). Cerco quindi un algoritmo polinomiale, con “certificato”. Uso quindi un insieme  $V' \subseteq V$  come vertici della **clique** come “certificato” per il grafo in input. Per verificare che  $V'$  è una **clique** controllo che:

$$\forall v_1, v_2 \in V' (v_1, v_2) \in E$$

e questa verifica è polinomiale, infatti è  $O(|V'|^2)$  e quindi è quadratico nella dimensione dell’input.

Bisogna ora trovare un problema  $A \in \text{NP-complete}$  tale che  $A$  si riduce in tempo polinomiale al **clique-problem** (quindi **clique-problem** risolve  $A$ ). Notiamo che una **clique** è l’opposto di **independent-set**, che avevamo dimostrato tramite  $3SAT$  (che può risolvere **independent-set**).

Quindi per **clique-problem** provo ancora ad usare  $3SAT$ . Devo fare in modo che  $\phi \in 3SAT$  sse il grafo  $G_\phi$  ha una **clique** di dimensione uguale al numero di clausole di  $\phi$ . Quindi avendo  $k$  clausole in  $\phi$  avrò che ciascuna clausola sarà un gadget e da ogni gadget estrarrà un vertice che comporrà la **clique** di dimensione  $k$ .

Il grafo  $G_\phi$  è costruito come nel caso di *independent-set* coi letterali come vertici.

Bisogna studiare il collegamento tra tali vertici (che sarà diverso al caso di *independent-set*, non avendo quindi i triangoli).

Ipotizzo:

$$\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge c_3$$

con:

$$c_1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$$

$$c_2 = \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

$$c_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

Per ogni clausola faccio i vertici per ogni letterale (distinti anche per lo stesso letterale, come nel caso di *independent-set*).

Per ora abbiamo vertici isolati e i tre vertici isolati di ogni clausola sono il gadget. A questo punto collego ogni letterale di ogni clausola con ogni altro letterale di ogni altra clausola (non della stessa) che non sia l’opposto, collegando quindi solo vertici **consistenti** (in quanto non potrei avere una **clique** connettendo due vertici non consistenti). Sto facendo esattamente l’opposto di *independent-set*. Costruito il grafo  $G_\phi$  cerco almeno una **clique** di dimensione 3 per  $3SAT$ . Non potrò mai avere più di un letterale per clausola nella **clique** non essendo tra loro collegati.

Passare da  $\phi$  a  $G_\phi$  ha costo polinomiale in tempo, ottenendo quindi istanza, in tempo polinomiale.



Figura 3.4: Grafo  $G_\phi$  per **clique-problem**, con le due righe di nodi e la colonna che rappresentano i tre gadget

Inoltre bisogna dimostrare che se  $\phi$  ha un assegnamento che la rende vera allora esiste una **clique** per  $G_\phi$  di dimensione  $k$ . Se  $\phi$  è vera allora per ogni clausola  $c_r$  esiste almeno un letterale che è vero e assumiamo che tale letterale sia  $l_i^r = 1$ . Questo letterale è associato al vertice  $v_i^r$ . Quindi data la clausola  $c_i$ , vera per il letterale  $l_j^i$  allora costruisco l'insieme dei vertici  $V' \subseteq V$  tale che sia formato da quei singoli vertici corrispondenti ai singoli letterali veri. Questo  $V'$  è una **clique** infatti avrò solo letterali “collegabili” nel grafo (non essendo vero che un letterale sia vero e contemporaneamente falso, cosa che comporterebbe l'assenza dell'arco). Ho solo archi tra letterali consistenti tra loro e quindi, per costruzione, esiste l'arco tra i vertici corrispondenti ( $\forall u, v \in V'$ ).

Inoltre bisogna dimostrare che, se esiste una **clique** di dimensione  $k$ , allora  $\phi$  è vera e quindi le  $K$  clausole sono tutte vere.

Per ogni vertice di  $v_{it} \in V'$  se appartiene al gadget della clausola  $c_i$  rendo vero il letterale associato (o falso se esso è negato). A questo punto rendo vera ogni clausola rendendo vero almeno un suo letterale e quindi so di ottenere un assegnamento di verità per  $\phi$  in quanto i letterali, per come sono stati definiti, sono consistenti.

**sistemare formalismi**

□

*Dimostrazione.* Dimostriamo che la riduzione del problema *clique*, che sap-

piano essere **NP-complete**, è in tempo polinomiale.

Vediamo che la trasformazione della formula  $\phi$  di 3SAT nel grafo  $G_\phi$  è una riduzione in tempo polinomiale.

Dato un assegnamento che rende vera  $\phi$ , che ha  $k$  clausole, dobbiamo costruire una *clique* per  $G_\phi$  che abbia  $k$  vertici. Ciascuna clausola  $c_r$  ha almeno un letterale  $l_i^r$  che ha assegnato il valore 1,  $\top$ . Ciascun letterale  $l_i^r$  corrisponde ad un vertice  $v_i^r$ . Costruiamo  $V'$  insieme di vertici per ogni letterale  $l_i^r$  vero per ogni clausola  $c_r$ . Dimostriamo che  $V'$  è una *clique*. Si ha che per ogni coppia  $v_i^r, v_j^s \in V'$ ,  $r \neq s$  (due vertici rappresentanti due letterali di due clausole diverse) abbiamo che  $(v_i^r, v_j^s) \in E$  essendo entrambi i letterali veri e, per costruzione, sono consistenti, cioè uno non è l'opposto dell'altro.

Vediamo l'altro verso.

Supponiamo che  $G_\phi$  abbia una *clique*  $V'$  di dimensione  $k$  e bisogna vedere se  $\phi$  è vera. Sappiamo che  $V'$ , per costruzione ha esattamente un solo vertice per ogni clausola,  $v_i^r$  per la clausola  $c_r$ . Prendo quindi il letterale corrispondente  $l_i^r$  e assegno a tale letterale il valore 1 (se negato 0). Quindi so che il letterale complemento di  $l_i^r$  non verrà usato per rendere vera una clausola perché il vertice  $v_i^r$  non è collegato con un arco ad un vertice che rappresenta il complemento di  $l_i^r$ . Quindi riesco a costruire un assegnamento di verità *consistente* (ovvero ogni variabile è presa come  $x_i = 1$  oppure  $x_i = 0$  ma non entrambi i valori sono usati) per  $\phi$ .  $\square$

Si può dimostrare che:

$$clique \leq_p vertex\_cover$$

$$independent\_set \leq_p vertex\_cover$$

$$vertex\_cover \leq_p independent\_set$$

$$vertex\_cover \leq_p clique$$

Infatti vale il seguente teorema:

**Teorema 6.** *Se ho che:*

$$A \leq_p B$$

*e  $A, B \in NP$ -complete, allora:*

$$B \leq_p A$$

*Dimostrazione.* Infatti, siccome  $B$  è in **NP-complete** allora è anche in **NP**, allora:

$$B \leq_p A$$



Ma posso fare lo stesso discorso con  $A$ , essendo in **NP-complete** e quindi sono interscambiabili e quindi:

$$A \leq_p B$$

□

I problemi **NP-complete** richiedono quindi una soluzione efficiente. Bisogna quindi pensare ad algoritmi di approssimazione, algoritmi polinomiali con “garanzia”, ovvero **euristiche** (ovvero un qualcosa che funziona in pratica) per il problema. Non si ha quindi una soluzione esatta al problema, l’euristica non fornisce una soluzione esatta. L’obiettivo è quindi quello di risolvere i problemi **NP-complete**.

**Definizione 21.** Definiamo un **problema di ottimizzazione**, dato un problema  $\Pi$  e un’istanza  $x$ , come la ricerca di un ottimo di  $x$ , detto  $opt(x)$ . Il costo di una soluzione ammissibile su  $x$  calcolato da un algoritmo  $A$  per il problema  $\Pi$  è indicato con  $A(x)$  (che quindi è il costo della soluzione calcolato da  $A$ ).

Si cerca quindi la soluzione, tra tutte quelle di  $\Pi$ , che massimizza o minimizza una funzione costo (appunto  $opt(x)$ ). Non sappiamo chi calcoli questo costo.

**Definizione 22.** Definiamo un **algoritmo  $\varepsilon$ -approssimato** per un problema  $\Pi$  è un algoritmo  $A$  polinomiale che restituisce una soluzione ammissibile che dista da quella ottima di un fattore  $\varepsilon$ .

Se  $\Pi$  è un **problema di minimo** allora:

$$A(x) \leq \varepsilon \cdot opt(x), \text{ con } \varepsilon > 1$$

Si raggiunge quindi un valore più grande del minimo, di una quantità fissata  $\varepsilon$ . Devo quindi garantire che non sia troppo grande, tramite varepsilon.

Si ha quindi che:

$$\frac{A(x)}{opt(x)} \leq \varepsilon$$

L’algoritmo lavora in tempo polinomiale e risolve in modo approssimato problemi  $\Pi$  **NP-completi**. Se avessi  $\varepsilon = 1$  avrei la soluzione ottima, ma non sarebbe possibile in quanto avrei un algoritmo polinomiale per un algoritmo **NP-completo**.

Se  $\Pi$  è un **problema di massimo** allora:

$$A(x) \geq \varepsilon \cdot opt(x), \text{ con } 0 < \varepsilon < 1$$

In quanto raggiungo una soluzione più piccola del massimo ma devo garantire che non sia troppo piccola, tramite varepsilon.  $\varepsilon \cdot \text{opt}(x)$  è infatti una “frazione” dell’ottimo.

Si ha quindi che:

$$\frac{A(x)}{\text{opt}(x)} \geq \varepsilon \implies \frac{\text{opt}(x)}{A(x)} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

A seconda del problema devo trovare un  $\varepsilon$ , che viene fissata costante per ogni input (e quindi è indipendente dall’input stesso e dalla sua dimensione) che serve da “garanzia”. So quindi che  $A(x)$ , ovvero il costo della soluzione approssimata ammissibile calcolata da  $A$ , in tempo polinomiale, si rapporta a  $\text{opt}(x)$ , calcolata dall’algoritmo esatto in tempo esponenziale (se fosse polinomiale si avrebbe  $P = NP$ ), tramite una distanza  $\varepsilon$  (da un alto è un  $\limsup$  e dall’altro un  $\liminf$ ).

Tipicamente si ha come valore tipico per varepsilon 2, avendo quindi una **2-approssimazione**, in quanto facilmente dimostrabile.

**Esempio 9.** Prendiamo vertex-cover nella versione di ottimo. Dato  $G = (V, E)$  ha come soluzione ammissibile una copertura di vertici per  $G$ . Il costo di una soluzione è la cardinalità di  $V'$ , se  $V'$  è una soluzione ammissibile. Il costo ottimo di vertex-cover invece è la minima cardinalità di  $V'$ .

**Definizione 23.** Si ha il cosiddetto **approximation ratio**  $r$  dicendo che:

$$\max \left\{ \frac{A(x)}{\text{opt}(x)}, \frac{\text{opt}(x)}{A(x)} \right\} \leq r, \text{ con } r > 1$$

Il primo caso copre il caso di minimo mentre il secondo caso copre il massimo.

**Non tutti i problemi ammettono una  $r$ -approssimazione, per  $r$  costante.**

Ci sono problemi infatti dove il calcolo di:

$$\max \left\{ \frac{A(x)}{\text{opt}(x)}, \frac{\text{opt}(x)}{A(x)} \right\} \leq \rho(n)$$

per una certa funzione  $\rho$ , con  $|x| = n$ , ovvero il massimo dipende dalla dimensione dell’input, non avendo quindi più un  $r$  costante. La dimensione del problema influisce sulla capacità di approssimazione e degradano all’aumentare della dimensione. Si ha, per esempio,  $\rho(n) = \log n$ .

Per capire  $\varepsilon$  fornisco un’euristica  $A$  per il problema e provo a dimostrare, senza conoscere l’ottimo (quindi per ogni possibile input), che in ogni caso:

$$\frac{A(x)}{\text{opt}(x)} \leq \varepsilon$$

dimostrando che si ha una  $\varepsilon$ -approssimazione (non sempre è dimostrabile o perlomeno per alcuni problemi si è ancora riusciti).

**Teorema 7.** *Esiste  $A$  polinomiale per vertex-cover che è 2-approssimante, quindi:*

$$\frac{A(x)}{\text{opt}(x)} \leq 2$$

*Dimostrazione.* Prendo il grafo  $G = (V, E)$ .

Cerco un  $A$  che calcoli in tempo polinomiale una soluzione ammissibile, ovvero una copertura di vertici del grafo. Si sceglie che  $A$  non deve essere un *algoritmo greedy*.

Prendo quindi un arco del grafo  $e = (u, v) \in E$ . Inizio a costruire una copertura  $C$ , all'inizio vuota ( $C = \emptyset$ ), che ora diventa, aggiungendo i due vertici:

$$C = C \cup \{u, v\}$$

Inoltre rimuovo dall'insieme degli archi  $E$  tutti gli archi che hanno un estremo nell'attuale copertura  $C$ , e quindi nel nostro caso in  $u$  o  $v$ .

Procedo quindi iterativamente costruendo  $C$  fermandomi quando  $E$  risulti vuoto, ovvero fino a che  $E = \emptyset$ .

È quindi una 2-approssimazione in quanto al massimo posso prendere il doppio dei vertici per fare la copertura, infatti, per costruzione, seleziono ogni volta archi che non hanno estremi in comune. Per ognuno di questi archi scelti devo prendere i due estremi, quindi ho  $2 \cdot k$  vertici in  $C$  per  $k$  archi e quindi:

$$A(x) = 2 \cdot k$$

Ma di  $\text{opt}(x)$  so che nel caso migliore prende esattamente un estremo per ogni scelto dall'algoritmo, e quindi per archi che non hanno estremi in comune. Quindi nel caso migliore:

$$\text{opt}(x) \geq k$$

Dato che stiamo cercando di minimizzare, quindi  $k$  è il *lower bound* e quindi:

$$\frac{A(x)}{\text{opt}(x)} \leq \frac{2k}{k} \leq 2$$

Come volevasi dimostrare. □

**Algorithm 1** Algoritmo di vertex-cover approssimato

---

```

function VCAPPROX( $G = (V, E)$ )
   $C \leftarrow \emptyset$ 
   $E' \leftarrow E$ 
  while  $E' \neq \emptyset$  do
    let  $(u, v) \in E'$ 
     $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$ 
    for every  $(u, z) \in E' \wedge$  every  $(v, z') \in E'$  do
      delete  $(u, z), (v, z')$  from  $E'$ 
  return  $C$ 

```

---

L'idea della 2-approssimazione è quella che si cerca un limite inferiore all'ottimo per il problema, ad esempio, appunto, *vertex-cover*. Si ha che:

$$opt(x) \geq k$$

con  $k$  che è il  $\liminf$  mentre  $opt(x)$  è la dimensione dell'ottimo su istanza  $X$ , nel caso di *vertex-cover* ho  $x = G = (V, E)$ . Sviluppo quindi un algoritmo polinomiale che produce una soluzione ammissibile per il problema e tale che abbia costo di tale soluzione sia  $\varepsilon$  volte il limite inferiore dell'ottimo, con  $\varepsilon > 1$ :

$$A(x) = \varepsilon \cdot \liminf, \quad \varepsilon > 1$$

Inoltre ho che:

$$A(x) \leq \varepsilon \cdot k, \quad \varepsilon > 1$$

e quindi:

$$\frac{A(x)}{opt(x)} \leq \frac{\varepsilon \cdot k}{k} \leq \varepsilon$$

avendo quindi una  $\varepsilon$ -approssimazione.

Nel caso di *vertex-cover* costruisco un **matching perfetto**, selezionando archi del grafo che non condividono i vertici estremi. Utilizzo quindi tutti i vertici, per il *matching perfetto*. Una copertura minima del grafo deve per forza ottenere esattamente un vertice per ogni arco di matching, perché non hanno estremi in comune. Quindi il limite inferiore dell'ottimo è il numero di archi del matching (visto che ho un vertice per arco):

$$opt(x) \geq |E_{\text{matching}}|$$

Posso usare una tecnica greedy per costruire il matching, mettendo nelle soluzioni ammissibili entrambi gli estremi di ogni arco, per l'ammissibilità, per poi fare la rimozione degli archi incidenti.

L'algoritmo  $A$  quindi costruisce in modo greedy (o meglio “in modo incrementale”, incrementatamente) un matching per  $G$  così:  
 prende un arco  $e_i$  e rimuove tutti gli archi incidenti agli estremi di  $e_i$  inserendo nella soluzione ammissibile entrambi gli estremi di  $e_i$ . Sicuramente l'arco successivo scritto da  $A$  non condivide estremi con  $e_i$ .  
 L'unico problema è che  $A(x)$  ha dimensione doppia rispetto al numero di archi:

$$A(x) = 2 \cdot |E_{\text{matching}}|$$

del matching mentre:

$$\text{opt}(x) \geq |E_{\text{matching}}|$$

avendo quindi la 2-approssimazione.

### 3.1.3 Problemi NP-hard non NP

Vediamo un algoritmo **NP-hard** che non è in **NP**, o meglio che ancora non sia dimostrato esserlo. Si congetture che non sia possibile che tutti i problemi **NP-hard** siano nella classe **NP**.

Si parla comunque di problemi di decisione decidibili.

Non posso al momento attuale dimostrare che un problema **NP-hard** non sia in **NP** ma si hanno problemi per cui non si riesce a mostrare che siano in **NP**, ovvero nessuno è riuscito a costruire un algoritmo con “certificato” per questi problemi. Si ricorda la figura 3.1.

#### Quantified boolean formula problem

Un esempio è decidere se una formula  $\phi$  con *quantificatori* è vera. Per questo problema **NP-hard** non esiste un algoritmo con certificato, non ancora perlomeno.

Una **Quantified Boolean Formula (QBF)**  $\phi$  è una formula proposizionale con dei *quantificatori*, ovvero della forma:

$$\phi = Q_{1p_1} Q_{2p_2} \dots Q_{1n_n}$$

Con un quantificatore  $Q_{ip_i}$  relativi alle proposizioni  $p_i$ .  
 Si ha:

$$Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

**Esempio 10.** Vediamo un esempio di QBF:

$$\forall p_1 \exists p_2 \exists p_3 (p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_3))$$

Decidere se la formula  $\phi$  è vera è un problema **PSPACE-complete**, ovvero un problema che si risolve con spazio polinomiale rispetto all'input  $x$ , ma al momento attuale nessuno ha mostrato che il problema QBF appartiene a **NP**.

Diversi problemi possono essere espressi in QBF (come ad esempio le mosse degli scacchi) ma questi per ora sono tutti in tempo esponenziale.

Aumentando il numero di quantificatori mi sposto in una nuova gerarchia, in un contesto di gerarchie infinite dove ad ogni aumento di un quantificatore corrisponde una classe di complessità nuova che contiene tutte quelle precedenti.

Noi sappiamo che:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME$$

La classe PSPACE è la classe di tutti i problemi accettati da un Turing Machine in spazio polinomiale. La classe **EXPTIME** ha tempo esponenziale e **NEXPTIME** se il problema è risolvibile da una Turing Machine non deterministica.

**Definizione 24.** Un problema  $\Pi$  è **complete** per una classe di complessità  $k$  sse  $\Pi \in k$  ed è **difficile** per quella classe.

SI hanno:

- **NP-complete**
- **NPSPACE-complete**

## 3.2 Complessità parametrica

La **complessità parametrica** è stata introdotta negli anni novanta e viene studiata molto in ambito di **bioinformatica** e studio di **reti/grafi**.

Un problema **NP-complete** posso dire che alcune istanze sembrano risolvibili in tempo polinomiale, fissando determinati parametri che caratterizzano l'istanza. Ad esempio prendo *vertex-cover* con al più una certa dimensione  $k$  in un grafo comunque molto complesso, magari con  $10^8$  nodi e  $k$  fissato a un numero piccolo, tipo 5. Non cerco quindi una minima copertura ma una di una certa dimensione, piccola. In questo caso, con  $k$  piccolo, un tempo esponenziale in  $k$  è accettabile (esempio  $2^5$  è accettabile).

Mi serve quindi un algoritmo polinomiale sull'input ma esponenziale su  $k$ .

**Definizione 25.** Un problema decidibile  $\Pi$  è **trattabile fissato il parametro**, **Fixed Parameter Tractable (FPT)**, con parametro  $k$ , sse esiste

un algoritmo  $A$ , una costante  $c$  è una funzione computabile  $f$  tale che per tutti gli input  $\langle x, k \rangle$   $A$  risolve  $\Pi$  con tempo di calcolo:

$$T(n) = f(k) \cdot |x|^c = f(k) \cdot n^c$$

Quindi ho comunque un tempo polinomiale in  $x$  ed esponenziale in  $k$ ,  $|x|^c \rightarrow 2^k$ . Divido quindi l'input in due dimensioni ed esprimo il tempo evidenziando i due parametri.

Se avessi un algoritmo  $A$ , con input  $x$ , per un problema **NP-complete** avrei  $2^{|x|} = 2^n$  ma avendo in input  $\langle x, k \rangle$  diventa polinomiale in  $|x| = n$  ma esponenziale in  $k$ . Nella risposta quindi considero una parte limitata dell'input, per questo serve  $k$  piccolo.

Fissato  $k$  ho una **soluzione esatta** e quindi gli algoritmi parametrici sono vantaggiosi rispetto agli algoritmi di approssimazione.

Non tutti i problemi possono avere un problema parametrico associato.

### 3.2.1 Vertex-cover parametrico

Prendendo *vertex-cover* **decisionale** cerco una copertura di dimensione massima  $k$ . Ho quindi in input  $\langle G = (V, E), k \rangle$  e trovo un algoritmo che decide se esiste tale copertura minima in tempo  $T(n)$ , in funzione di  $n$  e  $k$ .

Si ha il seguente teorema:

**Teorema 8.** *Il problema *vertex-cover*  $(G, k)$  è risolvibile in tempo  $O(2^k \cdot |V|)$  dove  $V$  è l'insieme dei vertici di  $G$ , con la costante che non dipende da  $k$  e da  $|V|$ . Si ha quindi:*

$$O^*(f(x)) = O(2^k \cdot |V|)$$

Avendo  $O^*$  che specifica indipendenza da  $k$  e da  $|V|$ .

Si vuole quindi  $s^{|V|} = 2^k$ .

Si parte quindi cercando di costruire insiemi con al più  $k$  vertici esplorando un albero binario di ricerca, sviluppandolo fino a profondità  $2^k$ , che avrà come foglie degli insiemi *vertex-cover* di dimensione  $k$ .

Si quindi ricorre ai **Bounded search trees** (*alberi di ricerca limitati*).

# Capitolo 4

## Macchina di Turing

### 4.1 Problemi intrattabili

Trovare una soluzione polinomiale ad un algoritmo **NP-hard** come TSP comporterebbe la rottura di tutte le chiavi crittografiche in quanto trovato un algoritmo polinomiale per uno lo trovi per tutti.

Ci serve a questo punto una definizione più rigorosa di **algoritmo**, per poterne calcolare meglio i tempi. Ricordiamo che per assunzione un algoritmo è **efficiente** se è in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input  $x$ , sapendo che  $|x| = n$  (solitamente al più si arriva a  $O(n^5)$  o poco più poi si salta ad algoritmi esponenziali). Un algoritmo esponenziale è un algoritmo **non efficiente**, il tempo cresce troppo velocemente all'aumentare dell'input (anche se magari in alcuni casi non è in tempo esponenziale). Si ricorda che si studia sempre il tempo nel **caso peggiore**, prenderemo quindi sempre l'O-grande sulla dimensione dell'input  $O(f(x))$ .

Vediamo degli esempi:

- un algoritmo che cerca l'arco minimo lavora in tempo polinomiale nel caso peggiore ed è quindi un **problema trattabile**
- problemi, come il test di primalità o TSP, che non hanno un algoritmo polinomiale sono **intrattabili**, infatti nessuno ha mai dimostrato che esiste un algoritmo efficiente

Tra i problemi intrattabili abbiamo però problemi che sono **dimostrabilmente intrattabili**. Banalmente un problema che mi chiede di stampare tutte le possibili sequenze per una certa proprietà è in questa categoria, dovendo stampare tutte le sequenze possibili si ha  $O(2^n)$  e si può dimostrare che con meno operazioni non si stamperebbero alcune soluzioni corrette.



Ci concentreremo su problemi intrattabili ma non *dimostrabilmente intrattabili*.

Per anni problemi come il *test di primalità* potevano garantire che prima o poi si sarebbe trovato un algoritmo polinomiale (forse). Quindi abbiamo:

- problemi dimostrabilmente intrattabili
- problemi non dimostrabilmente intrattabili, sono, diciamo, “i più difficili” tra i problemi intrattabili
- tutti gli altri problemi

**Un problema indecidibile non è un problema intrattabile**, in quanto non si hanno proprio algoritmi che risolvono un certo problema e questo è dimostrabile (c'è almeno un input che manda in crisi un algoritmo, che va in loop infinito o sbaglia risposta) mentre un problema intrattabile comunque in qualche modo lo posso risolvere ma in tempi troppo elevati.

L'algoritmo per il test di primalità funziona in  $\log(n^{12})$ , nella versione più efficiente sviluppata da un gruppo di indiani, che arriva ad ottenere un tempo polinomiale.

## 4.2 Definizione della TM

Definiamo quindi in modo più rigoroso il concetto di algoritmo per poter dimostrare che un certo algoritmo può anche non esistere. Non ci basta più la definizione di algoritmo come sequenza di passi logici, in quanto andrebbe anche definito un certo linguaggio (con scelte, cicli, operazioni aritmetiche, operazioni logiche) ma ancora non basterebbe, non si è ancora sicuri di poter trasformare un certo input in un certo output (per qualunque problema in input). Lo step mancante è la **macchina di Turing**, con essa si può garantire quanto appena detto, con essa si formalizza il processo di calcolo, ovvero la serie di passaggi che porta da un input ad un output. Turing ragionò dicendo che normalmente si risolve un problema partendo da carta e penna, ponendosi poi in un certo stato mentale in cui si risolve o si studia una parte dell'input (ad esempio in uno stato *leggi tutti* leggo “step by step” tutto l'input, senza cambiare sto mentale, che verrà cambiato quando finisco quello precedente). Divide quindi l'input in *caselle* su cui si fanno operazioni semplici, spostandosi a destra o a sinistra di una casella, o leggendo/scrivendo la casella corrente. Turing ipotizza di avere carta illimitata. Quindi la MT

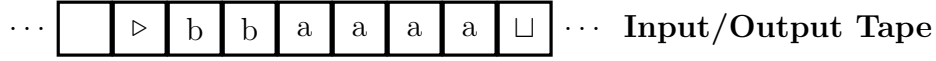


Figura 4.1: Esempio di nastro di una TM

avrà un nastro infinito che permette di memorizzare informazioni e si ha una testina di lettura e scrittura. Si ha un meccanismo che si pone in uno *stato*, sulla base del contenuto letto dalla testina e dallo stato posso scegliere di spostarmi di una testina a destra o di una a sinistra, eventualmente dopo avere scritto e modificando, sempre eventualmente, lo stato. Tutto questo basta per il **calcolo**, infatti:

**Teorema 9** (Tesi di Turing-Church). *Non esiste nessun formalismo di calcolo che sia più potente della Macchina di Turing:*

*“Se un problema è umanamente calcolabile, allora esisterà una macchina di Turing in grado di risolverlo (cioè di calcolarlo)”*

*È una tesi che non ha dimostrazione formale (non avendo chiara la definizione di **calcolo**) ma è stata dimostrata empiricamente nel corso degli anni. Portando quindi a dire che il calcolo è ciò che può essere eseguito con un Macchina di Turing (anche se non tutti i meccanismi di calcolo sono equivalenti ad una TM, ad esempio gli automi a stati finiti). Quindi ciò che è computabile è computabile da una TM o da un suo equivalente (come un linguaggio di programmazione). Banalmente anche una rete neurale lo è.*

Formalizziamo quindi la macchina di Turing.

**Definizione 26.** *Si definisce formalmente una TM come la quintupla:*

$$TM = (K, \Sigma, k_0, \delta, F)$$

- insieme  $K$  di stati
- un alfabeto  $\Sigma$
- uno stato di partenza  $k_0$
- una funzione di transizione  $\delta$
- un insieme  $F$  di stati finali

*Si hanno inoltre i seguenti stati finali:*

- $H$ , per l'*halt*

- $Y$ , per lo *yes*
- $N$ , per il *no*

Il simbolo  $\sqcup$  specifica che non ho un simbolo e il simbolo  $\triangleright$  mi specifica che da lì parte l'input.

**Definizione 27.** La funzione di transizione esprime cosa fa passo-passo la TM:

$$\delta : K \times \Sigma \rightarrow K \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$$

Ovvero prende in input uno stato e un simbolo e può avere in input un cambio di stato oppure il cambio del simbolo in quel punto o lo spostamento della testina di una posizione (che può comunque restare ferma).

Si possono avere diverse varianti di implementazioni, obbligando al testina a spostarsi (andando avanti e indietro per indicare che deve stare ferma etc...). Vedremo poi che avere questa funzione di transazione comporta l'avere una **TM deterministica** e che si potrà sviluppare una **TM non deterministica**.

Ogni operazione sulla TM ha lo stesso tempo e quindi posso usare il numero di passi per calcolare il tempo di risoluzione.

Per esprimere la computazione di una TM usiamo una **configurazione**, ovvero sulla base della definizione della TM e dello stato attuale devo definire tutti i passi.

**Definizione 28.** Un **configurazione** di una TM è definita da:

- lo stato in cui si trova
- la stringa sul nastro (definita da tutti i simboli a destra della testina e tutti quelli a sinistra, ai quali viene aggiunto quello sotto la testina)
- la posizione delle testina

In base alla configurazione la TM saprà come procedere.

La configurazione descrive in ogni istante lo stato della macchina e quindi si ha la seguente **configurazione iniziale**, per la stringa  $X$  (che ha un carattere per posizione del nastro, al quale comunque viene aggiunto lo start *triangleright*):

$$(k_0, \triangleright X, 1)$$

e ad un certo punto sia arriverà ad uno stato di arresto, per esempio dopo aver cambiato  $X$  in  $Y$  ed essere tornata nello stato 2:

$$(H, \triangleright Y, 2)$$

e quindi output sarà la stringa  $Y$  (senza il  $\triangleright$ ).

Potrei avere anche  $Y$  o  $N$  al posto di  $H$  in problemi decisionali, per capire magari se una certa stringa ha le caratteristiche desiderate o meno.

Vediamo alcuni esempi di costruzione di TM:

**Esempio 11.** Si scriva la TM che calcoli il successore di un numero binario, che sarà l'input (e si dà per scontato che sia correttamente formattato avendo solo 0 o 1 come simboli). Si trascuri il riporto (nel senso che non aggiungo ulteriori bit).

Vediamo nella pratica un esempio di somma binaria:  
prendo 01101010 e sommo 1:

$$\begin{array}{r} 10010101 + \\ 00000001 = \\ \hline 10010110 \end{array}$$

Definisco quindi la TM:

- $S = \{s_0, s_1\}$
- $\Sigma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1\}$
- per la funzione di transizione si ha:

$$\delta \rightarrow (s_0, [\triangleright, 0, 1]) \rightarrow (s_0, [\triangleright, 0, 1], \rightarrow)$$

$$\delta \rightarrow (s_0, \sqcup) \rightarrow (s_1, \sqcup, \leftarrow)$$

$$\delta \rightarrow (s_1, 0) \rightarrow (H, 1, -)$$

$$\delta \rightarrow (s_1, 1) \rightarrow (s_1, 0, \leftarrow)$$

$$\delta \rightarrow (s_1, \triangleright) \rightarrow (H, \triangleright, -)$$

ovvero scorro fino alla fine e inverte l'ultimo numero (se è 0 diventa 1 e fine ma se è 1 lo rendo 0 e poi mi sposto a sinistra e se è un 1 diventa 0 e così via, fino alla fine dove metto 1, come prevede la somma binaria)

- $s_0$  è lo stato iniziale

Volendo ad un certo punto si arriva allo stato finale  $H$ . In quel momento ho una nuova stringa  $Y$  (il risultato delle modifiche su  $X$ ):

$$(H, \triangleright Y, -)$$

e la testina non deve più spostarsi. Questa può essere interpretata come uno **stato di arresto**.

Un altro caso è avere una computazione infinita nel caso in cui, letto un simbolo e lo stato, la testina ricopia il simbolo ma non si sposta né a destra né a sinistra. Oppure una testina potrebbe “rimbalzare” infinitamente tra due posizioni. Quest’ultima cosa può anche accadere tra molte posizioni, entrando comunque in **loop infinito**, ritornando sempre, prima o poi, in una configurazione (e si noti “configurazione”, non coppia stato-simbolo) già avuta. In questo caso la computazione è **non terminante** e la computazione non produce alcun output. *Quindi un insieme finito di elementi (stati, simboli e possibili transazioni) può comunque descrivere un comportamento infinito (infiniti passi).*

Analizziamo meglio gli stati terminanti  $Y$  e  $N$  il primo indicante che la stringa in input è accettata, avendo certe caratteristiche richieste, il secondo che la stringa viene rifiutata. Non ho quindi più bisogno della stringa in output, quindi posso lasciar scritto quello che voglio quando finisco, mi basta sapere lo stato finale  $Y$  e  $N$ .

**Esempio 12.** Sistemiamo l’esempio precedente aggiungendo il riporto, dovendo aggiungere un bit.

*Si indica solo la funzione di transizione.*

*Scorro fino alla fine (quindi vado a destra indipendentemente dal simbolo fino ad un blank):*

$$\delta \rightarrow (s_0, [\triangleright, 0, 1]) \rightarrow (s_0, [\triangleright, 0, 1], \rightarrow)$$

*Sono a destra dell’ultimo carattere di  $X$  (avendo un blank):*

$$\delta \rightarrow (s_0, \sqcup) \rightarrow (s_1, \sqcup, \leftarrow)$$

*eseguo il conto tornando indietro:*

$$\delta \rightarrow (s_1, 0) \rightarrow (H, 1, -)$$

$$\delta \rightarrow (s_1, 1) \rightarrow (s_1, 0, \leftarrow)$$

*sono tornato all’inizio:*

$$\delta \rightarrow (s_1, \triangleright) \rightarrow (s_2, 1, \leftarrow)$$

devo “shiftare” tutti i caratteri (per farlo semplicemente metto  $\triangleright$  nel primo blank a sinistra del precedente  $\triangleright$  arrivando nello stato  $s_2$ , come indicato nello step precedente):

$$\delta \rightarrow (s_2, \sqcup) \rightarrow (H, \triangleright, -)$$

(avrei comunque potuto shiftare tutte le unità a destra di una posizione, o semplicemente, sapendo che ora sul nastro ho soli 0 dovrei tornare a destra di un passo, cambiare il primo 0 in 1 e aggiungere uno 0 in fondo alla stringa).

**Esempio 13.** Vediamo un esempio in cui una TM riconosce una stringa binaria che è palindroma o meno.

Si indica solo la funzione di transizione.

Se sono sullo start vado a destra di uno:

$$\delta(s_0, \triangleright) \rightarrow (s_0, \triangleright, \rightarrow)$$

se vedo 0 vado nello stato zero, scrivo  $\sqcup$  e vado a destra:

$$\delta(s_0, 0) \rightarrow (zero, \sqcup, \rightarrow)$$

analogo leggendo 1, andando nello stato 1 scrivendo blank:

$$\delta(s_0, 1) \rightarrow (one, \sqcup, \rightarrow)$$

vado in fondo alla stringa (qualsiasi incrocio tra gli stati one e zero e simboli 1 e 0 legga vado a destro riscrivendo lo stesso simbolo):

$$\delta \rightarrow ([zero, one], [0, 1]) \rightarrow (\delta \rightarrow ([zero, one], [0, 1], \rightarrow)$$

sono in fondo alla stringa, se sono in stato zero scrivo blank e torno indietro, in uno stato zero':

$$\delta(zero, \sqcup) \rightarrow (zero', \sqcup, \leftarrow)$$

idem per stato one

$$\delta(one, \sqcup) \rightarrow (one', \sqcup, \leftarrow)$$

se sono in zero' e leggo 0 vado in stato  $s_1$  e vado a sinistra:

$$\delta(zero', 0) \rightarrow (s_1, \sqcup, \leftarrow)$$

se sono in zero' e leggo 1 la stringa non è palindroma, esco con stato  $N$ :

$$\delta(zero', 1) \rightarrow (N, \sqcup, \leftarrow)$$

idem per stato one', andando in stato  $s_2$ :

$$\delta(one', 1) \rightarrow (s_2, \sqcup, \leftarrow)$$

$$\delta(one', 0) \rightarrow (N, \sqcup, \leftarrow)$$

ora proseguo a sinistra fino ad un blank riscrivendo quanto letto:

$$\delta(s_1, [0, 1]) \rightarrow (s_1, [0, 1], \leftarrow)$$

sono nel blank e torno allo stato iniziale, potendo ricominciare la computazione:

$$\delta(s_1 \sqcup) \rightarrow (s_0, \sqcup, \rightarrow)$$

ma se la stringa (di cardinalità pari) è palindroma cancello tutto, devo quindi specificare che se in  $s_0$  ho blank la stringa è valida:

$$\delta(s_0, \sqcup) \rightarrow (Y, \sqcup, -)$$

se invece la stringa è di cardinalità dispari, allo stato attuale, entra in loop, dobbiamo quindi aggiungere un'uscita d: a zero' o one' in questo caso:

$$\delta([zero', one'], \sqcup) \rightarrow (Y, \sqcup, -)$$

**Esempio 14.** Scrivo una TM per decidere se la stringa in input è del tipo  $a^n b^n c^n$ .

Si indica solo la funzione di transizione.

Se leggo a vado nello stato A e vado a destra

$$\delta(s_0, a) \rightarrow (A, \sqcup, \rightarrow)$$

Se leggo in  $s_0$  b o c significa che non ho a quindi esco:

$$\delta(s_0, [b, c]) \rightarrow (N, \sqcup, -)$$

Se in A trovo un'altra a la lascio e vado a destra:

$$\delta(A, a) \rightarrow (A, a', \rightarrow)$$

Se in A leggo b vado in B, e vado a destra:

$$\delta(A, b) \rightarrow (B, b', \rightarrow)$$

se invece leggo c non ho b e esco:

$$\delta(A, c) \rightarrow (N, \sqcup, -)$$

se in B e trovo a non va bene:

$$\delta(B, a) \rightarrow (N, \sqcup, -)$$

*Se in  $B$  trovo un'altra  $b$  la lascio e vado a destra:*

$$\delta(B, b) \rightarrow (B, b, \rightarrow)$$

*Se in  $B$  leggo  $c$  vado in  $C$  e vado a sinistra a controllare:*

$$\delta(B, c) \rightarrow (C, c', \leftarrow)$$

*controllo tramite i sentinella indicati con  $'$ .*

*Siamo in  $C$  quindi:*

$$\delta(C, c') \rightarrow (C, c', \leftarrow)$$

*Se però vedo  $b$  o  $b'$  resto in  $C$  e riscrivo:*

$$\delta(C, [b, b']) \rightarrow (C, [b, b'], \leftarrow)$$

*Per  $A$  cambia, se vedo a scorro:*

$$\delta(C, a) \rightarrow (C, a, \leftarrow)$$

*ma se vedo  $a'$  torno in  $s_0$ :*

$$\delta(C, a') \rightarrow (s_0, a', \rightarrow)$$

*ma ora  $A$  può incontrare  $b'$ , che va bene, o  $c'$  che non va bene:*

$$\delta(A, b') \rightarrow (A, b', \rightarrow)$$

$$\delta(A, c') \rightarrow (N, \sqcup, -)$$

*Per  $C$ :*

$$\delta(C, [b, c]) \rightarrow (C, [b, c'], \rightarrow)$$

*Se sono in  $s_0$  e trovo  $a'$  ho finito le  $a$ :*

$$\delta(s_0, a') \rightarrow (s_0, a', \rightarrow)$$

*idem:*

$$\delta(s_0, [b', c']) \rightarrow (s_0, [b', c'], \rightarrow)$$

*Vado in stato check se:*

$$\delta(s_0, \sqcup) \rightarrow (check, \sqcup, \leftarrow)$$

*e proseguo fino a trovare solo  $b'$  o  $c'$ , se trovo invece  $b$  o  $c$  esco. Diventa quindi molto lungo.*



L'esempio sopra mostra quanto possa diventare lunga una semplice computazione sulla TM, ci servirebbe quindi una sorta di *TM alternativa*.

**Teorema 10** (teorema di Böhm-Jacopini). *Qualunque algoritmo può essere implementato utilizzando tre sole strutture, la sequenza, la selezione e il ciclo, da applicare ricorsivamente alla composizione di istruzioni elementari*

**Definizione 29.** *Si ha la **TM a k nastri**, ovvero la **TM multi-nastro** dove ho  $k$  nastri di lettura e scrittura, magari avendo l'input solo su un nastro o su multipli. La macchina quindi legge uno stato e  $k$  simboli  $\{\sigma_1 \dots, \sigma_k\}$ . Prima dello spostamento quindi scrive tutti i simboli. Lo spostamento sarà uno per ogni nastro.*

**Esempio 15.** *Risolviamo il precedente problema (decidere se la stringa in input è del tipo  $a^n b^n c^n$ ) con  $k$  nastri.*

*Potrei usare 4 nastri, sul primo c'è l'input. Finché trovo  $a$  scrivo sul primo, quando trovo  $b$  passo a secondo e faccio lo stesso se leggo  $c$ . In ogni caso mi interrompo se dopo delle  $b$  trovo  $a$  o dopo  $c$  trovo  $a, b$ . Infine torno indietro sui tre nastri e vedo se sono allineati.*

Una **TM a k nastri** non è più potente di una **TM a singolo nastro** (vale il rapporto linguaggio di programmazione e linguaggio macchina). Esiste sempre una traduzione verso la TM a singolo nastro.

Per esempio invece un automa a stati finiti è meno potente di un TM, che può spostarsi e scrivere dove vuole, a differenza degli automi.

Vediamo cosa quindi può fare una TM:

- una TM può **computare** funzioni su stringhe
- una TM può **decidere** (rispondendo  $Y$  o  $N$ ) un linguaggio (ovvero un insieme finito o infinito di stringhe, come il caso sopra  $a^n b^n c^n$ ), ovvero data una stringa in input è sempre in grado di dire se appartiene o meno al linguaggio. Un linguaggio è **decidibile**, o, più formalmente, **ricorsivo**, se esiste almeno una TM che decide il linguaggio, fermandosi sempre in  $Y$  o  $N$ . Solitamente è un linguaggio finito, ma potrebbe anche essere infinito (ma tutte le stringhe sarebbero comunque riconoscibili)
- una TM può **accettare** un linguaggio, ovvero se fornisco una stringa in input che appartiene al linguaggio la riconosce come tale e prima o poi arriva allo stato  $Y$ , altrimenti la macchina potrebbe:

- fermarsi in uno stato  $N$

- entrare in un loop infinito, non avendo mai la risposta ma magari in realtà non è un loop infinito ma solo servono anni per avere la risposta

Quindi la TM non è in grado di distinguere completamente le stringhe che non fanno parte di un linguaggio. Un linguaggio è **linguaggio ricorsivamente enumerabile** è un linguaggio per cui data una stringa in input buona la TM si ferma, altrimenti la TM potrebbe o fermarsi o andare avanti all'infinito nella computazione. Posso enumerare tutte le stringhe che fanno parte del linguaggio, tramite una certa procedura. Potrei quindi avere un linguaggio infinito ma con stringhe che mandano in loop la TM, anche se comunque non sono in grado di capire se sono in un loop o se prima o poi la stringa data in input verrà riconosciuto. Ci sono linguaggi che si può dimostrare essere ricorsivamente enumerabili (e alcuni che non sono nemmeno ricorsivamente enumerabili)

Ricordiamo comunque che esistono problemi irrisolvibili, dimostrati tali, come la soluzione di *equazioni Diofantee*.

I linguaggi possono essere quindi ricorsivi, ricorsivamente enumerabili o non ricorsivamente enumerabili. Un linguaggio finito è ricorsivo.

Se ho l'alfabeto  $\Sigma$ , presa la \*-chiusura di  $\Sigma$  (che quindi comprende la stringa vuota e tutte le stringhe che posso ottenere concatenando uno o più simboli di  $\Sigma$ ), ovvero  $\Sigma^*$ , la TM riconosce subito la stringa in input in quanto costruita per funzionare su  $\Sigma$ , quindi il linguaggio è ricorsivo. Se prendo  $\Sigma^+$ , ovvero  $\Sigma^*$  senza  $\varepsilon$ , ho comunque un linguaggio ricorsivo per lo stesso motivo, dovendo solo controllare in più se  $s_0$  è  $\sqcup$ .

**Teorema 11.** *Preso un linguaggio  $L$  costruito alfabeto  $\Sigma$  si ha che se  $L \subseteq \Sigma^*$  se  $L$  è ricorsivo è anche ricorsivamente enumerabile.*

*Dimostrazione.* Se  $L$  è ricorsivo esiste una TM che riconosce se, data una stringa  $x$ ,  $x \in L$ , rispondendo  $Y$  e risponde  $N$  se  $x \notin L$ .

Costruisco ora una TM  $M'$  che se il linguaggio non è ricorsivo allora vado in loop, indicato con  $\infty, \uparrow, \perp$ . Quindi quando la macchina sta per andare in  $N$  cambio  $\delta$  per ottenere il loop, ottenendo una macchina che va in loop se  $x \notin L$ , mentre riconosce con  $Y$  se  $x \in L$  e quindi  $L$  è ricorsivamente enumerabile.  $\square$

**Teorema 12.**  *$L$  è ricorsivo sse  $L$  è ricorsivamente enumerabile e il complementare di  $L$ ,  $\overline{L}$  è ricorsivamente enumerabile.*

*Dimostrazione.* Rispetto alla dimostrazione precedente, che garantisce che se  $L$  è ricorsivo allora è ricorsivamente enumerabile, devo definire, per il complementare, una TM che va in loop se  $x \in L$ , andando altrimenti in loop. Presa quindi una TM  $M$  che decide  $L$ , definisco  $M'$  che accetta  $L$ , che quindi è ricorsivamente enumerabile. Definisco ora  $M''$  che restituisce  $Y$  se  $x \in \bar{L}$  ovvero  $x \notin L$  (e  $\infty$  se  $x \notin \bar{L}$ , ovvero  $x \in L$ ). Quindi  $M''$  fa la stessa cosa di  $M$  ma quando  $M$  sta per rispondere  $Y$  faccio andare  $M''$  in loop e se  $M$  va in  $N$  faccio andare  $M''$  in  $Y$ , tutto tramite un cambio di  $\delta$ .  $\square$

**Teorema 13.** *Preso un linguaggio  $L$ , se è ricorsivamente enumerabile e lo è anche il complementare  $\bar{L}$  allora  $L$  è ricorsivo.*

*Dimostrazione.* Presa una TM  $M'$ , se questa risponde  $Y$  allora  $M$  risponde  $Y$ . Presa  $M''$  se questa risponde  $Y$  allora  $M$  risponde  $N$ .  $M'$  e  $M''$  accettano  $L$  e  $\bar{L}$  quindi non possono dire  $Y$  contemporaneamente e non rispondono  $N$ , andando in loop.  $M$  non va mai in loop perché  $x \in L \vee x \notin L$  per cui prima o poi una tra  $M'$  e  $M''$  si ferma. Devo quindi simulare l'esecuzione delle due macchine, raggruppandole in una sola, appunto  $M$ . Posso usare 4 nastri (due per le macchine e due per gli input) oppure posso mettere le due  $\delta$  delle due macchine nella stessa (facendo prima un'operazione di  $m'$  e poi una di  $M''$  e così via), fino a che non si arriva ad uno  $Y$  e, segnando tramite un nastro le configurazioni di  $M'$  e  $M''$ , posso capire se far uscire  $M$  con  $Y$  o  $N$ , in base a chi tra  $M'$  e  $M''$  è uscito con  $Y$ .  $\square$

A noi interessano comunque i **problemi** ma i linguaggi sono comodi per parlare di **intrattabilità**, legandosi bene ai **problemi di decisione**.

**Definizione 30.** *Un problema di decisione è un problema con solo due possibili risposte,  $Y$  e  $N$ .*

*I problemi di decisione sono restrizioni di problemi di ottimo, ai quali viene aggiunto un **bound**, cambiando la domanda in una richiesta di esistenza di un caso che soddisfi il bound nel problema di ottimo (ma comunque potrei non avere tempi polinomiali, anche se il problema decisionale è più facile di quello di ottimo).*

**Teorema 14.** *Un problema di decisione è sempre più facile del corrisponde problema di ottimo.*

Posso associare un problema di decisione allo studio di un linguaggio, avendo essi la stessa risposta,  $Y$  o  $N$ . Un problema di decisione ha quindi un corrispondente linguaggio, con l'input del problema che ha una corrispondente stringa (di cui bisogna studiare appartenenza ad un linguaggio).

**Esempio 16.** Il problema *Hamiltonian cycle problem (HCP)* (esiste anche la variante non con il ciclo ma con il cammino: *Hamiltonian path problem (HPP)*).

Dato un grafo non completo e non pesato ci si chiede se c'è un modo per partire da un nodo e tornarci dopo aver toccato tutti i vertici una e una sola volta.

Questo problema è di decisione ed è risolvibile, ma è difficile da risolvere in termini temporali (restringersi ai problemi decisionali non sempre implica miglioramenti in termini di tempo). HCP si risolve solo in tempo esponenziale.

**Teorema 15.** Se il problema di decisione non è risolvibile in modo efficiente sicuramente il problema di ottimo associato non è risolvibile in modo efficiente.

**Teorema 16.** Preso  $\pi$  problema di decisione. Posso passare da  $\pi$  ad un linguaggio  $L(\pi)$  attraverso uno **schema di codifica**, che prende in input un'istanza del problema e mette in output una stringa  $x$  del linguaggio. Se istanza ha risposta  $Y$  ho  $\text{cod}(x) \in L$  (e se risponde  $N$  ho  $\text{cod}(x) \notin L$ , con  $\text{cod}$  che indica una **codifica**, ovvero una traduzione dell'istanza nel linguaggio).

Risolvere un problema di decisione vuole dire essere in grado di riconoscere o meno le stringhe del corrispondente linguaggio.

**Esempio 17.** Pensando a HCP ho:

$$L_{HCP} = \{y \in \Sigma^* \mid \text{che corrispondono ad un'istanza con risposta } Y\}$$

Sapendo che HCP è risolvibile so che esiste una TM che risolve il problema e il grafo può essere tradotto in stringa, ad esempio tramite una matrice di adiacenza.

HCP è risolubile sse il linguaggio associato è decidibile, e quindi ricorsivo.

**Teorema 17.** Quindi un problema decisionale è risolubile sse il linguaggio associato è decidibile, e quindi ricorsivo.

**Definizione 31.** Il tempo di esecuzione di una TM è il conto dei passi di esecuzione nel caso peggiore.

## 4.3 Problemi non risolvibili

Ci serve, in primis, una nuova TM:

**Definizione 32.** Definiamo la **Universal Turing Machine (UTM)** come una TM che non fa un compito specifico in base alla  $\delta$  ma prende in input un'altra TM  $M$ , un separatore “;” e l'input  $x$  di  $M$  e da in output la stessa cosa che darebbe  $M$  con input  $x$ :

$$UTM(M; x) \rightarrow M(x)$$

Quindi calcola quello che calcola qualunque altra TM.

La UTM è simile a quello che fa tramite un linguaggio di programmazione, dove si dà una sequenza di istruzioni e un input, ottenendo un output. Un calcolatore moderno è quindi una sorta di UTM (con l'hdd che corrisponde al nastro infinito, non avendo potenzialmente limite potendo aggiungere altri dischi).

Esistono le **Small UTM (SUTM)** che riusano gli stati per ridurre lo spazio usato.

Stati e simboli sono mediamente numeri naturali, e gli spostamenti pure (con magari degli stati particolari). Un moderno calcolatore infatti ragiona solo su numeri per definire tutto, dagli stati ai simboli.

Normalmente si ha che  $UTM(M; x)$  ha due nastri sul primo  $(M; x)$  e sul secondo la configurazione attuale di  $(M; x)$ . Quindi una TM può simularne un'altra salvando le configurazioni. La UTM tramite la sua  $\delta$  poi copia lo stato di uscita di  $M$ , magari scrivendo su un terzo nastro l'output.

**Posso quindi costruire una TM (la UTM) che simuli un'altra TM**, quindi si è in grado di scrivere un algoritmo che prende in input un altro programma scritto nello stesso linguaggio, che fa le stesse cose, e quindi il primo algoritmo, per esempio, può dare le risposte opposte.

Si ha quindi che esistono **linguaggi non ricorsivi**, ovvero esistono **problemi non decidibili** (come i dieci problemi proposti da Hilbert ad inizio novecento).

Si ha che le TM sono **enumerate** in quanto possono essere associate ai numeri naturali.

Ci sono problemi che possono essere chiaramente descritti per i quali sappiamo che non esiste alcun algoritmo in grado di risolverli (di risolverli **sempre**, basta quindi anche solo un caso per cui non posso avere tale algoritmo). **Un problema non decidibile non è un problema intrattabile**, che sarebbe risolvibile ma solo in tempo esponenziale.

Non si può comunque dimostrare a priori che non esista un certo algoritmo (?)

### 4.3.1 Halting problem

Turing riconosce da subito come interessante l'**halting problem**. Si cerca un algoritmo che data una certa coppia  $(M; x)$ , TM/input, mi dica se quella macchina arriva a termine computazione o entra in loop infinito.

**Definizione 33.** *Definisco formalmente l'**halting problem** con il linguaggio  $H$ :*

$$H = \{M; x \mid M(x) \neq \perp\}$$

*Quindi se la stringa fa parte del linguaggio  $M$  termina, altrimenti no.*

**Teorema 18.** *Si ottiene però che  $H$  non è ricorsivo e quindi l'**halting problem** non è decidibile.*

*Dimostrazione.* **DIMOSTRAZIONE DA SISTEMARE!**

Immaginiamo per assurdo che  $H$  sia ricorsivo e quindi esiste una TM  $M_H$  che prende in input  $(M; x)$  e mi da sempre in output  $M(x)$ , ma così sto facendo la stessa cosa della UTM. Ma  $M_H$  non fa quello che fa la UTM, infatti fa:

$$\begin{cases} Y & \text{se } M(x) \neq \perp \\ N & \text{se } M(x) = \perp \end{cases}$$

Quindi fa qualcosa in più della UTM, perché se finisce in loop deve capire che è in loop infinito, interrompere e restituire  $N$ .

Assumo che  $H$  quindi è ricorsivo e quindi  $M_H$  esiste, anche se magari non la so costruire. Se esiste  $M_H$  deve esserne un'altra, chiamata  $D$ , che presa in input solo  $M$  produce:

$$D(M) \rightarrow M_H(M; M)$$

Dando in input alla TM la descrizione della TM stessa (che è comunque ragionevole). Significa che:

$$M_H(M; M) = \begin{cases} Y & \text{se } M(M) \neq \perp \\ N & \text{se } M(M) = \perp \end{cases}$$

ma voglio una macchina  $D$  per la quale i risultati siano invertiti (è questa la chiave della dimostrazione per assurdo):

$$D(M) = \begin{cases} Y & \text{se } M(M) \neq \perp \rightarrow \infty \\ N & \text{se } M(M) = \perp \rightarrow Y \end{cases}$$

Quindi  $D$  cambia  $N$  in  $Y$  e  $Y$  in  $\infty$ , presa in input una macchina  $M$ .

Provo quindi a dare in input a  $D$   $D$  stessa, ottenendo o il loop o  $Y$ . Ipotizziamo di andare in stato  $Y$ , quindi:

$$M_H(D; D) = N$$

che ci dice se  $D$  su input  $D$  termina e quindi  $M_H$ , per la definizione di  $M_H$  deve rispondere  $N$ , Ma  $M_H$  risponde  $N$  sse  $D(D)$  deve andare in loop infinito. Siamo arrivati ad un assurdo avendo detto che  $M_H(D; D) = N$  accade sse  $D(D) = Y$ .

Inoltre se ipotizziamo che  $D(D)$  va in loop allora  $M_H(D; D) = Y$  che implica che  $D(D)$  termina la computazione, sempre per definizione. Ho ottenuto quindi un'altra contraddizione, confermando la prova per assurdo.  $\square$

Si è dimostrato quindi che anche problemi ben definiti possono non essere decidibili, problemi come il definire il comportamento di un programma dato un input. Il problema comunque non è una potenza limitata della TM ma un limite intrinseco al problema stesso.

**Teorema 19.** *Il linguaggio  $H$  è ricorsivamente enumerabile, ovvero il problema è **parzialmente decidibile**. La macchina quindi riconosce una macchina che termina, altrimenti non si sa.*

*Dimostrazione.* Devo trovare una macchina che termina in  $Y$  che riconosce una stringa appartenente al linguaggio  $H$ .

Costruisco quindi una  $M'_H$  che prende in input una TM generica col suo input e si ha che:

$$M'_H(M; x) = \begin{cases} Y & \text{se } M(x) \text{ termina} \\ N/\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi se non termina non si sa che succede, ma potrebbe anche essere sempre in loop.

Pensando a UTM ho che:

$$UTM(M; x) = \begin{cases} Y & \text{se } M(x) = Y \text{ avendo } M'_H = Y \\ N & \text{se } M(x) = N \text{ avendo } M'_H = Y \\ H & \text{se } M(x) = H \text{ avendo } M'_H = Y \\ \infty & \text{se } M(x) = \infty \text{ avendo } M'_H = \infty \end{cases}$$

Quindi  $M'_H$  è una UTM con gli stati finali leggermente modificati (quindi non più una UTM), avendo solo  $Y$  (se termina) e  $\infty$  (altrimenti). Abbiamo quindi dimostrato che è **parzialmente decidibile**, avendo che la macchina da  $Y$  se la computazione è terminante e va in loop altrimenti.  $\square$

Ho quindi problemi non decidibili che sono parzialmente decidibili. Esistono anche problemi legati a linguaggi **non ricorsivamente enumerabili**, per cui quindi non si può **mai** dare risposta. Si hanno quindi problemi nemmeno parzialmente decidibili. Pensiamo alle coppie  $(M; x)$  che non terminano.

**Teorema 20.** *Esistono linguaggi **non ricorsivamente enumerabili** avendo quindi problemi non decidibili.*

*Dimostrazione.* Basti pensare che se  $L$  è ricorsivo sse  $L$  è ricorsivamente enumerabile. Quindi, pensando all'halting problem,  $L_H$  non è ricorsivo ma è ricorsivamente enumerabile. Ma allora  $\overline{L_H}$ , il linguaggio complementare non è ricorsivamente enumerabile:

$$\overline{L_H} = \{M; x | M(x) = \perp\}$$

□

### 4.3.2 Problemi decidibili

Studiamo ora i problemi decidibili catalogandoli in base ai tempi, nei casi peggiori. Si hanno:

- algoritmi in tempo polinomiale rispetto alla dimensione dell'input
- algoritmi in tempo esponenziale rispetto alla dimensione dell'input, sono dimostrabilmente intrattabili

Bisogna capire se un problema cade in queste due categorie.

Il tempo di esecuzione viene calcolato tramite il numero di passi della TM.

**Definizione 34.** *Definiamo  $t_M(x)$  come il tempo di calcolo di un TM  $M$  su input  $x$ . Non è un caso peggiore ma dipendente dal singolo input specifico. Il tempo di calcolo è il numero di passi che esegue  $M$  su input  $x$  per dare una risposta. Concentrandosi sui problemi di decisione decidibili avrò sempre  $Y$  o  $N$  se  $x$  fa parte o meno del linguaggio. Ci concentriamo solo sui linguaggi ricorsivi.*

Non si usa comunque il numero di passi nella realtà ma si usa l'O-grande, studiando il caso peggiore, il numero massimo di passi.

**Definizione 35.** *Definiamo  $T_M(n)$  come la **funzione di complessità temporale** come:*

$$T_M(n) = \max\{t_m(x) | |x| = n\}$$

**Definizione 36.** *Definisco la classe  $P$  in base alle TM. La **classe  $P$**  è definita come:*

$$P = \{L | L \text{ è deciso da una DTM in tempo polinomiale } O(p(n))\}$$

Con DTM che indica una TM deterministica, in cui per ogni coppia stato/simbolo la macchina può fare una sola cosa (leggere/\*scrivere/spostarsi di uno) $m$  e con  $p$  una certa funzione polinomiale.

È quindi la classe di problemi che so risolvere velocemente.



**Definizione 37.** Definiamo la classe **time**( $f(n)$ ) come la classe dei linguaggi decisi da una TM entro un tempo  $f(n)$ . Quindi **time**( $n$ ) sono tutti quelli decisi in tempo lineare, ad esempio (ma potrei anche per un qualsiasi  $n^k$ ). Quindi:

$$P = \cup_{i \geq 0} \text{time}(n^i)$$

Infatti  $P$  è l'unione di tutte le classi time con funzioni polinomiali.

La maggior parte dei problemi non supera, per il tempo polinomiale, un esponente pari a 10 ( $N^{10}$ ).

**Teorema 21.** Se un problema è nella **classe**  $P$  allora è risolvibile in un **tempo efficiente**.

Devo anche definire lo **spazio**, oltre al **tempo**.

**Definizione 38.** Definisco lo **spazio di calcolo** come:

$$s_M(x) = \text{numero di celle del nastro usate dalla TM } M \text{ con input } x$$

durante la computazione

Il calcolo non è semplice come per il tempo, avendo anche decrementi. Quindi più che “celle usate” studiamo le “celle visitate”.

**Definizione 39.** Definisco  $S_M(n)$  come la **funzione di complessità spaziale**:

$$S_M(n) = \max\{s_M(x) \mid |x| = n\}$$

Spazio e tempo sono legati per una TM.

Innanzitutto se una computazione dura  $n$  passi (tempo) posso dire che al più ho usato  $n$  celle (spazio), perché magari in qualche passo la testina rimane ferma ma nel caso peggiore si sposta sempre. Si ha quindi:

$$S_M(n) \leq T_M(n) + n$$

con  $+n$  perché sul nastro abbiamo comunque l'input di lunghezza  $n$  (anche se potrebbe non essere letto dalla TM). In alcuni casi non viene nemmeno considerato come spazio usato in quanto non cambia la risposta in merito agli studi di tempo (a meno di studiare tempi inferiori al tempo lineare, dove in caso si specifica a parte di avere un input che occupa spazio  $n$ ).

**Teorema 22.** Se il tempo è limitato allora lo spazio è limitato ma non vale l'opposto (potrei avere banalmente un loop tra poche celle, avendo l'uso limitato di poche celle per un tempo illimitato).

**Teorema 23.** *Se ho una TM  $M$  che lavora in spazio finito e tempo infinito, esiste una TM  $M'$  che fa la stessa cosa di  $M$  in tempo limitato.*

*Quindi se lo spazio è limitato allora il tempo è limitato.*

*Dimostrazione.* Infatti la macchina  $M'$  può trovarsi in un numero finito di stati  $K$  e avendo spazio limitato ho un numero limitato  $S_M(n)$  di celle in cui si trova la testina. Ho anche un numero finito di simboli in alfabeto  $\sigma$  e quindi:

$$S_{M'}(n) \leq |K| \cdot |S_M(n)| \cdot |\Sigma|^{|S_M(n)|}$$

avendo che prima o poi ritorno a stati già visti quindi la macchina se supera la quantità appena definita capisce di essere in loop (questo perché si ha a che fare con insiemi limitati e quindi tale ragionamento non va bene per l'halting problem).  $\square$

# Capitolo 5

## Pattern matching

Il **pattern matching** si occupa di ricercare un pattern  $P$  in un testo  $T$ . Si hanno:

- ricerca esatta
- ricerca approssimata

**Definizione 40.** Definiamo *stringa* come una sequenza di simboli appartenenti ad un dato alfabeto  $\Sigma$ , scritta come:

$$X = x_1, \dots, x_n, \quad \forall x_i \in \Sigma$$

ovviamente non è necessario che la stringa contenga tutti i simboli dell'alfabeto. Diamo alcune definizioni utili:

- $|X|$  indica la lunghezza della stringa
- $\varepsilon$  indica la stringa vuota
- $X[i]$  indica il carattere all'indice  $i$  (partendo da 1 e non da 0)
- $X[i, j]$  indica la sottostringa che parte dall'indice  $i$  e arriva all'indice  $j$  (estremi inclusi). Inoltre se si hanno  $i \neq j$  e  $j \neq |X|$  si ha una **sottostringa propria**.  
(Esempio: per  $X = \text{bbaccbbaac}$  ho la sottostringa  $X[4, 8] = \text{ccbba}$ )
- $X[1, j]$  indico un **prefisso** (estremo finale incluso). Si ha inoltre il **prefisso proprio** se  $j \neq |X|$  e si ha **prefisso nullo** se  $j = 0$  e si indica con  $\varepsilon$ .  
(Esempio: per  $X = \text{bbaccbbaac}$  ho il prefisso  $X[1, 4] = \text{bbac}$ )

- $X[i, |X|]$  indica un **suffisso** della stringa (estremi inclusi), di lunghezza  $k = |X| - i + 1$ , avendo quindi il suffisso  $X[|X| - k + 1, |X|]$ . Si ha inoltre che se ho  $X[|X|, |X| + 1]$  allora ho il **suffisso nullo**, ovvero  $\varepsilon$ .  
(Esempio: per  $X = \text{bbaccbbaac}$  ho il suffisso  $X[8, 10] = \text{aac}$  e il suffisso  $X[11, 10] = \varepsilon$ )

**Definizione 41.** Definiamo il **pattern matching esatto** come la ricerca di tutte le occorrenze esatte di un pattern  $P$  in un testo  $T$ .  
 $P$  occorre esattamente in  $T$ , a partire dall'indice  $i$  in  $T$ , sse:

$$T[i, i + |P| - 1] \text{ coincide con } P$$

Quindi in output ho tutte le posizione  $i$  nel testo tali per cui:

$$T[i, i + m - 1] \text{ coincide con } P$$

**Esempio 18.** Dato il testo  $T = \text{bbaccbbaac}$  e il pattern  $P = \text{cbbb}$  ho un'occorrenza esatta a partire da  $i = 4$  nel testo.

L'algoritmo naive sarebbe quello di prendere una finestra  $W$ , di lunghezza  $P$ , da far scorrere sul testo (avanzando ogni volta di un carattere). Ogni volta tale finestra viene confrontata con  $P$  confrontando tutti i caratteri e, in caso di match, stampando in output l'indice di inizio della finestra sul testo. Questo algoritmo è  $O(|T| \cdot |P|)$  nel caso peggiore.

Questo algoritmo ignora le caratteristiche di testo e pattern, ignorando aspetti che potrebbero accelerare la ricerca, trovabili tramite un'operazione di preprocessing.

**Definizione 42.** Definiamo **distanza di edit** come il minimo numero di operazioni di sostituzione, cancellazione e inserimento di un unico simbolo per trasformare una stringa in un'altra (o viceversa).

La distanza di edit tra due stringhe è simmetrica (anche se le operazioni saranno diverse il loro numero minimo sarà uguale).

**Esempio 19.** Calcoliamo la distanza di edit tra  $X_1 = \text{agtgcgt}$  e  $X_2 = \text{atgtgat}$ .

Partiamo cancellando la  $g$  in indice 2 di  $X_1$ :

$$X_1 = \text{atgcgt}$$

$$X_2 = \text{atgtgat}$$

Inserisco quindi una "a" al penultimo indice di  $X_1$ :

$$X_1 = \text{atgcgat}$$

$$X_2 = atgtgat$$

Infine sostituisco la “c” con una “t” all’indice 4 di  $X_1$ :

$$X_1 = atgtgat$$

$$X_2 = atgtgat$$

Ho quindi una distanza di edit pari a 3.

Per trasformare la seconda nella prima avrei dovuto inserire una “g” all’indice 2 di  $X_2$ , cancellare la “a” al penultimo indice di  $X_2$  e infine sostituire la “t” con una “c” al terzultimo indice di  $X_2$ . Si vede quindi come anche in questo caso avrei distanza di edit pari a 3.

**Definizione 43.** Definiamo il **pattern matching approssimato** come la ricerca di occorrenze approssimate di un pattern  $P$  in un testo  $T$ , con al più un certo errore  $k$ .

Viene usata la distanza di edit, che rappresenta l’errore che si commette nell’eguagliare una stringa con un’altra.

$P$  ha un’occorrenza approssimata in  $T$ , che finisce all’indice  $i$ , se esiste almeno una sottostringa  $T[i - L + 1, i]$  che ha distanza di edit con  $P$  di al più  $k$ .  $L$  è un certo valore non prevedibile in quanto sto ammettendo che il match sia su una stringa di lunghezza diversa da quella del pattern. Ovviamente in questo caso si possono avere più sottostringhe accettabili secondo i parametri richiesti.

In output ho quindi tutte le posizioni  $i$  di  $T$  in cui finisce almeno una sottostringa che ha con  $P$  distanza di edit al più uguale a  $k$ .

**Esempio 20.** Prendiamo il testo  $T = bbaccbbac$  e  $P = ccbb$ .

Impongo  $k = 1$  e vedo che un match è “ccbb” terminante all’indice 6 del testo (avendo errore 1 massimo). Ovviamente “ccbb” terminante all’indice 7 va bene avendo errore nullo.

**Definizione 44.** Definiamo **bordo** della stringa  $X$ ,  $B(X)$ , che è il più lungo prefisso proprio che occorre come suffisso di  $X$ .

**Esempio 21.** Vediamo qualche esempio:

$$X = baacagahabaac \implies B(X) = baac$$

$$X = abababa \implies B(X) = ababa$$

$$X = aaaaaa \implies B(X) = aaaaa$$

$$X = aaaccbbaac \implies B(X) = \varepsilon$$

$$X = aaaaaaaaa \implies B(X) = aaaaaaa$$

Ovviamente può essere  $\varepsilon$  (in primis se ho una stringa di lunghezza 1).

**Definizione 45.** Definiamo concatenazione tra una stringa  $X$  e un simbolo  $\sigma$  come:  $X\sigma$

**Esempio 22.** Dato  $X = bba$  e  $\sigma = d$  ho:

$$X\sigma = bbad$$

## 5.1 Pattern matching con automi

Siamo nell'ambito del pattern matching esatto.

Ho un pattern di lunghezza  $m$  e un testo di lunghezza  $n$ .

Abbiamo una fase di preprocessing in tempo  $O(m|\Sigma|)$  per calcolare la funzione di transizione  $\delta$ .

Definiamo  $\delta$  definita sul pattern  $P$  come:

$$\delta : \{0, 1, \dots, m\} \times \Sigma \rightarrow \{0, \dots, m\}$$

Quindi ad ogni coppia tra un simbolo e un intero tra 0 e  $m$  corrisponde un intero tra 0 e  $m$ . Nel dettaglio si hanno due casi:

1. primo caso:

$$\delta(j, \sigma) = j + 1 \iff j < m \wedge P[j + 1] = \sigma$$

2. secondo caso:

$$\delta(j, \sigma) = k \iff P[j + 1] \neq \sigma \vee j = m, \text{ con } k = |B(P[1, j]\sigma)|$$

Con  $k$  che è la lunghezza del bordo tra il prefisso corrente a cui viene concatenato il carattere  $\sigma$ . Si ha che  $k \leq j$  per definizione (dato che sto calcolando il bordo su una stringa di lunghezza  $j + 1$ ).

Con questa transizione posso, eventualmente, andare “indietro” nel pattern ma comunque “in avanti” nell'automata.

La transizione dallo stato  $j$  allo stato  $\delta(j, \sigma)$  avviene attraverso il simbolo  $\sigma$ . Posso quindi passare allo stato  $j + 1$  o allo stato  $k$ .

Nell'automata avremo quindi gli archi etichettati coi simboli e i nodi etichettati con gli indici da 0 a  $m$ .

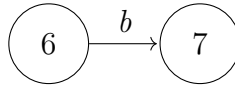
Nella stringa gli indici partono comunque da 1 quindi l'indice 0 nelle formule rappresenta una sorta di posizione prima dell'inizio della stringa. Qualora  $k$  sia pari a 0 per la seconda formula mi sposto effettivamente in questo indice posto prima della stringa (anche se avrò due stati diversi etichettati come 0 nell'automata).

**Esempio 23.** Prendiamo il pattern:

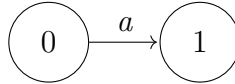
$$P = acacbabbaabac$$

calcoliamo:

- $\delta(6, b) = 7$  in quanto ho effettivamente  $b$  come simbolo all'indice successivo a 6, uso quindi la prima formula

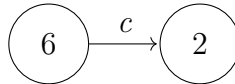


- $\delta(0, a) = 1$ , in quanto  $a$  è il primo carattere, uso quindi la prima formula



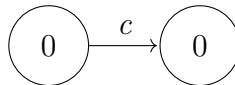
- $\delta(6, c) = 2$  in quanto devo usare la seconda formula e avere:

$$|B(P[1, 6]c)| = |B(acacbac)| = |ac| = 2$$



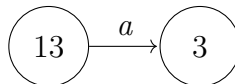
- $\delta(0, c) = 0$  in quanto devo usare la seconda formula e avere:

$$|B(P[1, 0]c)| = |B(c)| = |\varepsilon| = 0$$



- $\delta(13, a) = 4$  in quanto devo usare la seconda formula e avere:

$$|B(P[1, 14]a)| = |B(acacbabbaabaca)| = |aca| = 3$$



Facciamo due osservazioni:

1. dallo stato 0 si arriva allo stato 0 per qualsiasi simbolo  $\sigma \neq P[1]$  e quindi si arriva allo stato 1 attraverso  $\sigma = P[1]$
2. dallo stato  $m$  si arriva sempre ad uno stato  $k \leq m$  e da uno stato  $m$  si può arrivare di nuovo ad uno stato  $m$

**Esempio 24.** Se ho  $P = aaaaaa$ :

$$\delta(6, a) = 6$$

in quanto:

$$l = |B(aaaaaa)| = |aaaaaa| = 6$$

**Esempio 25.** Sia dato un pattern  $P = acacbac$ , con  $m = 7$  e  $\sigma = \{a, b, c\}$ . Si hanno le seguenti transizioni  $\delta(j, \sigma)$ , calcolate solo sulla base delle formule. Parto con  $\delta(j, \sigma) = j + 1$ :

$j \backslash \sigma$	a	b	c
0	1		
1			2
2	3		
3			4
4		5	
5	6		
6			7
7			

Proseguo con  $\delta(j, \sigma) = k$ :

$j \backslash \sigma$	a	b	c
0	1	0	0
1	1	0	2
2	3	0	0
3	1	0	4
4	3	5	0
5	6	0	0
6	1	0	7
7	3	0	0

In realtà algoritmo procede per induzione di riga in riga, riempiendo la riga basandosi con quella precedente, in  $O(m|\Sigma|)$ .



**Esempio 26.** Sia dato un pattern  $P = acacbac$ , con  $m = 7$  e  $\sigma = \{a, b, c, d\}$ . Aggiungo quindi un simbolo non appartenente al pattern, si ottiene:

$j \backslash \sigma$	a	b	c	d
0	1	0	0	0
1	1	0	2	0
2	3	0	0	0
3	1	0	4	0
4	3	5	0	0
5	6	0	0	0
6	1	0	7	0
7	3	0	0	0

Si aggiunge quindi una colonna di soli 0