un automa a stati finiti ha un insieme di stati e un controllo che si muove da stato a stato in risposta a input esterni. Si ha una distinzione:

- **automi deterministici:** dove l'automa non può essere in più di uno stato per volta
- **automi non deterministici:** dove l'automa può trovarsi in più stati contemporaneamente

0.0.1 Automi deterministici

Un automa a stati finiti deterministico (*DFA*), un automa che dopo aver letto una qualunque sequenza di input si trova in un singolo stato. Il termine *deterministico* concerne il fatto che per ogni input esiste un solo stato verso il quale l'automa passa dal suo stato corrente. Un automa a stati finiti deterministico consiste nelle seguenti parti:

- un insieme finito di stati, spesso indicato con Q
- un insieme finito di simboli di input , spesso indicato con Σ
- una funzione di transizione, che prende come argomento uno stato e un simbolo di input e restituisce uno stato. La funzione di transizione sarà indicata comunemente con δ. Nella rappresentazione grafica informale di automi δ è rappresentata dagli archi tra gli stati e dalle etichette sugli archi. Se q è uno stato e a è un simbolo di input, $\delta(q, a)$ è lo stato p tale che esiste un arco etichettato con a da q a p^2
- uno stato iniziale, uno degli stati in Q
- un insieme di stati finali, o accettanti , F. L'insieme F è un sottoinsieme di Q

Nel complesso un DFA è rappresentato in maniera concisa con l'enumerazione dei suoi elementi, quindi con la quintupla:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

con A nome del DFA, Q insiem degli stati, Δ rappresentante i simboli di input, δ la sua funzione di transizione, q_0 il suo stato iniziale e F l'insieme degli stati accettanti.
Vediamo come decidere se accettare o meno una stringa (sequenza di caratteri) in input mediante un DFA.
Ho una sequenza in input $a_1...a_n$. Parto dallo stato iniziale q_0, consultando

la funzione di transizione δ, per esempio $\delta(q_0, a_1) = q_1$ e trovo lo stato in cui il DFA entra dopo aver letto a_1. Poi passo a $\delta(q_1, a_2) = q_2$ e così via, $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$ fino a ottenere q_n. Se q_n è elemento di F allora $a_1...a_n$ viene accettato, altrimenti viene rifiutato.

Esempio 1. *specifico DFA che accetta tutte le strighe binarie in cui compare la sequenza 01:*

$L = \{w|w \text{ è della forma x01y, con x e y pari a 0 o 1}\} = \{01, 11010, 100011, ...\}$

o anche:

$$L = \{x01y|x, y \in \{0,1\}^*\}$$

abbiamo quindi:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

ragioniamo sul fatto che A:

1. *se ha "già visto" 01, accetterà qualsiasi input*
2. *pur non avendo ancora visto 01, l'input più recente è stato 0, cosicché se ora vede un 1 avrà visto 01*
3. *non ha ancora visto 01, ma l'input più recente è nullo (siamo all'inizio), in tal caso A non accetta finché non vede uno 0 e subito dopo un 1*

la terza condizione rappresenta lo stato iniziale. All'inizio bisogna vedere uno 0 e poi un 1. Ma se nello stato q_0 si vede per primo un 1 allora non abbiamo fatto alcun passo verso 01, e dunque dobbiamo permanere nello stato q_0, $\delta(q_0, 1) = q_0$. D'altra parte se nello stato iniziale vedo 0 siamo nella seconda condizione, uso quindi q_2 per questa condizione, si avrà quindi $\delta(q_0, 0) = q_2$. Vedo ora le transizoni di q_2, se vedo 0 ho che 0 è l'ultimo simbolo incontrato quindi uso nuovamente q_2, $\delta(q_2, 0) = q_2$, in attesa di un 1. Se arriva 1 passo allo stato accertante q_1 corrispondente alla prima condizione, $\delta(q_2, 1) = q_1$. Ora abbiamo incontrato 01 quindi può succedere qualsiasi cosa e dopo qualsiasi cosa accada potremo nuovamente aspettarci qualsiasi cosa, ovvero $\delta(q_1, 0) = \delta(q_1, 1) = q_1$. Si deduce quindi che:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \text{ e } F = \{q_1\}$$

quindi:

$$A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$$

con in totale le seguenti transizioni:

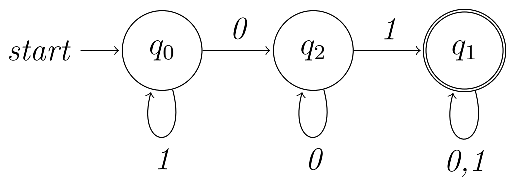
$$\delta(q_0, 1) = q_0$$

$$\delta(q_0, 0) = q_2$$
$$\delta(q_2, 0) = q_2$$
$$\delta(q_2, 1) = q_1$$
$$\delta(q_1, 0) = q_1$$
$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

posso rappresentarle in maniera tabulare, con lo stato inizale indicato da $\rightarrow$ e quelli accettanti con $*$:

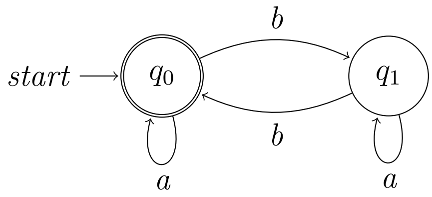
δ	*0*	*1*
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
$* q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

o col diagramma di transizione:



Esempio 2. *Trovo automa per:*

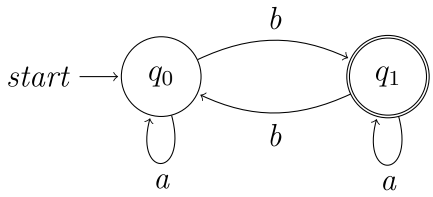
$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } b\}$$



ovvero se da q_0 vado a q_1 sono obbligato ab generare due b, dato che il nodo accettnate è q_0. In entrambi i nodi posso generare quante a voglio.

Esempio 3. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero dispari di } b\}$$



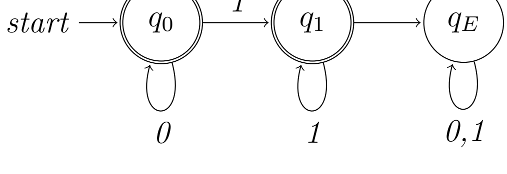
ovvero se da q_0 vado a q_1 sono obbligato ab generare una sola b, dato che il nodo accettnate è q_1. In entrambi i nodi posso generare quante a voglio e posso tornare da q_1 a q_0 per generare altre b.

Esempio 4. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* | w = 0^n 1^m\}$$

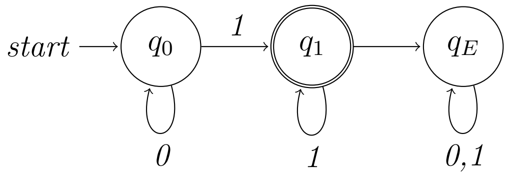
vediamo i vari casi:

- $n, m \geq 0$*:*

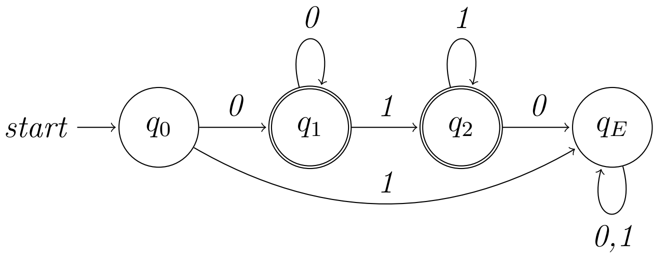
  ovvero posso non generare nulla e uscire subito con q_0, generare solo un 1 e passare a q_1 e uscire oppure generare 0 e 1 a piacere con l'ultimo stato o generare 0 a piacere dal primo e 1 a piacere dal secondo.

- $n \geq 0$ $m > 0$*:*



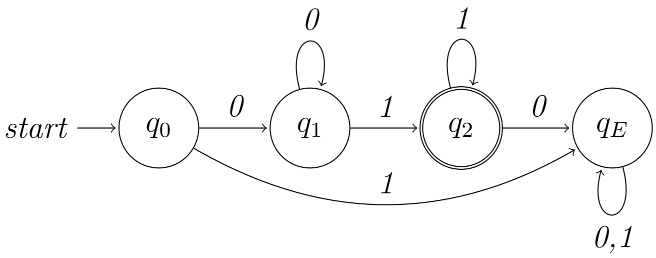
ovvero come l'esempio sopra solo che non posso uscire in q_0 *in quanto almeno un 1 deve essere per forza generato*

- $n > 0$ $m \geq 0$*:*



CHIARIRE

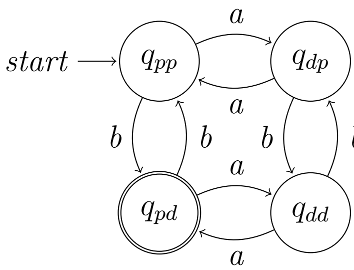
- $n, m > 0$*:*



CHIARIRE

Esempio 5. *Trovo automa per:*

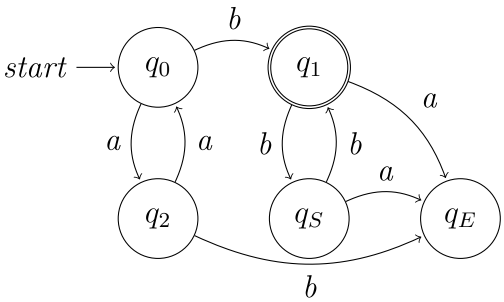
$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ e dispari di } b\}$$



Esempio 6. *Trovo automa per:*

$$L = \{w \in \{a, b\}^* |\ w \text{ che contiene un numero pari di } a \text{ seguito da uno dispari di } b\}$$

$$L = \{a^{2n} b^{2k+1} | j, k \geq 0\}$$

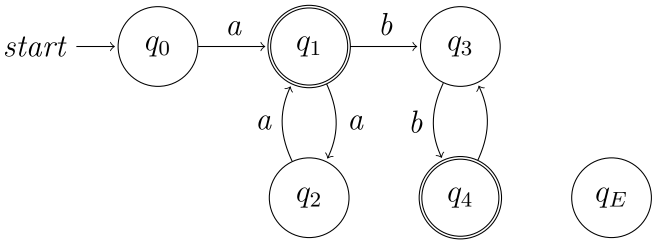


ovvero in tabella:

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_0	q_E
$* q_2$	q_E	q_3
q_S	q_E	q_2
q_E	q_E	q_E

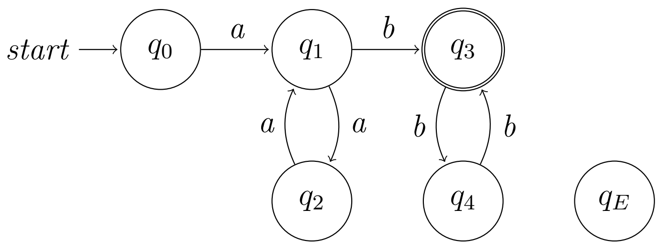
Esempio 7. *Trovo automa per:*

$$L = \{a^{2k+1} b^{2h} |\ h, k \geq 0\}$$



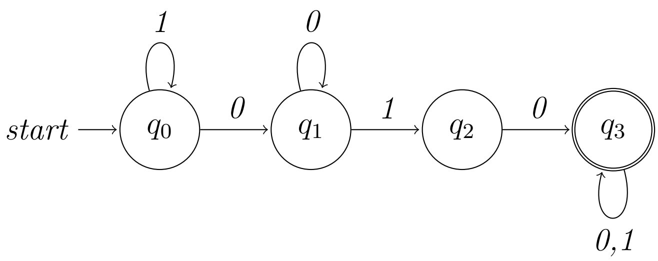
Esempio 8. *Trovo automa per:*

$$L = \{a^{2n+1}b^{2k+1} |\, n, k \geq 0\}$$



Esempio 9. *Trovo automa per:*

$$L = \{x010y |\, x, y \in \{o, 1\}^*\}$$



0.0.2 Automi non deterministici

In sigla *NFA* sono delle quintuple $A = (Q, \Sigma, \delta, q, F$ ma ora la delta prende uno stato e un simbolo e ci manda in un insieme di stati:

$$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$$

delta è delta cappuccio

$$DFA: \;\; L(A) = \{w \in \Sigma^* |\, \delta(q_0, w) \in F\}$$

$$NFA: \;\; L(A) = \{w \in \Sigma^* |\, \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$