

Analisi e Progetto di Algoritmi

UniShare

Davide Cozzi

@dlcgold

Gabriele De Rosa

@derogab

Federica Di Lauro

@f_dila

Indice

1	Introduzione	3
2	Introduzione al corso	4
2.1	Argomenti	4
2.2	Ripasso Algoritmi 1	5
2.2.1	Equazioni di Ricorrenza	5
3	Programmazione Dinamica	10
3.0.1	Basi di Programmazione Dinamica	15
3.0.2	Un Problema di Sequenze	16
3.0.3	Longest Common Substring	16
3.0.4	Il Problema delle Scatole	18
3.1	Longest Common Subsequence	19
3.1.1	Sottostruttura Ottima di una LCS	22
3.1.2	Growing LCS, GLCS	23
3.1.3	Heaviest Common Subsequence (HCS)	24
3.1.4	ALCS	26
3.2	Problemi di Ottimo	26
3.2.1	Problema Knapsack (dello zaino)	26
4	Programmazione Greedy	29
4.1	Subset Sum	29
4.2	Knapsack frazionario	30
4.3	Approfondimento Greedy	31
4.4	Problema dell'Autostrada	32
4.5	TSP	32
4.6	Matroidi	33
4.6.1	Teorema di Rado	34

5	Grafi	35
5.1	Visita di un Grafo	37
5.1.1	Visita in Ampiezza BFS	37
5.1.2	Visita in Profondità DFS	41
6	Cammini Minimi	46
6.1	Cammini Minimi per Tutte le Coppie	49
6.1.1	Algoritmo di Floyd-Warshall	49
6.2	Cammini minimi a Singola Sorgente	52
6.2.1	Algoritmo di Dijkstra	52
6.2.2	Algoritmo di Bellman-Ford	54
7	Strutture Dati per Insiemi Disgiunti	56
7.1	Rappresentazione a Lista Concatenata	57
7.2	Rappresentazione con Foreste di Insiemi Disgiunti	57
8	Minimum Spanning Tree	59
8.1	Algoritmo di Kruskal	61
8.2	Algoritmo di Prim	61
9	Problemi di Flusso Massimo	63
9.1	Metodo di Ford-Fulkerson	64
10	NP-Completezza	66
10.1	Classificazione dei Problemi	66
10.1.1	Identificazione di Problemi NP-Completi	66
10.1.2	Classificazione dei Tempi	68

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlsgold/Appunti>.

Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Introduzione al corso

2.1 Argomenti

Si hanno diversi tipi di problemi:

- **problemi di ottimo** dove si cercano singole soluzioni efficienti (massimi o minimi) tra molte soluzioni possibili. Si usa anche la **programmazione greedy**, dove si sceglie in base ai costi locali per ottenere massimi e minimi senza però guardare i costi complessivi.
- **problemi non risolubili in tempi accettabili**, per i quali si usa la **programmazione dinamica**, che cerca di individuare sotto-strutture ottime per risolvere il problema, cercando la soluzione migliore memorizzando le altre soluzioni e utilizzandole. Si cerca comunque la soluzione meno dispendiosa in termini di tempo.
- **problemi NP-completi**, ovvero problemi per cui non si può trovare un algoritmo o non si può trovare un algoritmo con una complessità asintotica polinomiale. Si useranno anche tecniche non deterministiche. Si cercherà di studiare uno dei 10 problemi più difficili della matematica: $P \subseteq NP$?

Studieremo poi i grafi non pesati con gli algoritmi *BFS* (per cercare in ampiezza) e *DFS* (per cercare in profondità). Studieremo anche i grafi pesati con problemi di cammino minimo.

2.2 Ripasso Algoritmi 1

Innanzitutto due algoritmi con lo stesso scopo si possono confrontare in base a tempo e spazio, scegliendo anche in base alle esigenze hardware. Per lo spazio si calcola quanto spazio viene richiesto da variabili e strutture dati, soprattutto queste ultime che dipendono dalla dimensione dell'input. Per quanto riguarda il tempo si usano le tecniche di conto soprattutto basate sui cicli e, in generale, su tutte operazioni da effettuare. Il tempo si basa sull'input n e si indica con $T(n)$ e si esprime in forma asintotica, interessandoci quindi unicamente all'ordine di grandezza. Si hanno il caso peggiore, indicato con l'O-grande e quello migliore indicato con l'o-piccolo a seconda di n .

Si ricorda poi la tecnica della ricorsione con algoritmi che si muovono su se stessi mediante dei "passi" arrivando ad un caso base di uscita. Per calcolare i tempi di un algoritmo ricorsivo si ha $T(n) = F(n) + T(n - 1)$ con F che rappresenta le istruzioni delle subroutines. Questa equazione di ricorrenza non è facilmente calcolabile ma può essere espansa muovendosi sui passi fino a che non si arriva a qualcosa di calcolabile grazie al caso 0, questo è il metodo iterativo (anche se si ha anche il metodo per sostituzione). Per gli algoritmi ricorsivi si hanno anche i divide et impera (dove il problema P è diviso in sottoproblemi risolti separatamente, con la divide, e poi combinati alla fine, con la combina) dove i tempi non sono sempre calcolabili ma se lo sono si usa il metodo dell'esperto (studiando le tre possibili casistiche).

2.2.1 Equazioni di Ricorrenza

Le equazioni di ricorrenza hanno solitamente la seguente forma:

$$\begin{cases} T(n) = T(n - 1) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Esistono tre metodi per risolvere le equazioni di ricorrenza:

- Iterativo (detto anche Albero di ricorsione)
- Sostituzione
- Esperto (detto anche Principale)

Metodo Iterativo

Si può usare sia per algoritmi ricorsivi e per Divide et Impera. Ad ogni passo si prende il valore a destra dell'uguaglianza e lo si sostituisce, arrivando, dopo k passi ad una formula generale. Sempre k ci darà il caso base. Posso rappresentare questo metodo con l'albero delle chiamate ricorsive, guardando quanto è alto l'albero e quanto impiega ad ogni livello

Esempio 1. *Calcolo i tempi di:*

$$\begin{cases} T(N) = T(n-1) + 8 \\ T(1) = 6 \end{cases}$$

procedo nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 8 = [T(n-2) + 8] + 8 = T(n-2) + 2 \cdot 8 \\ &= [T(n-3) + 8] + 2 \cdot 8 = T(n-3) + 3 \cdot 8 \\ &= [T(n-4) + 8] + 3 \cdot 8 = T(n-4) + 4 \cdot 8 \\ &= T(n-k) + k \cdot 8 \end{aligned}$$

per $k = n-1$ si ha:

$$T[n - (n-1)] + (n-1) \cdot 8 = T(1) + (n-1) \cdot 8 = 6 + (n-1) \cdot 8 = \Theta(n)$$

Altri esempi su sito e appunti di Chiodini

Metodo per Sostituzione

Si ipotizza un tempo di calcolo (si possono usare gli asintotici con O e Ω lo si dimostra per induzione

Esempio 2.

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \\ T(1) & n = 1 \end{cases}$$

Ipotizzo $O(n \cdot \log n)$ e dimostro per induzione:

$$T(n) = O(n \cdot \log n) \leq c \cdot n \cdot \log n$$

Serve una dimostrazione forte: ipotizzo $T(m)$ vera per $1 \leq m \leq n-1$ quindi si ha:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2 \cdot \left[c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} \right] + n \\ &= c \cdot n \cdot \log \frac{n}{2} + n = c \cdot n \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + n \\ &= c \cdot n \cdot \log_2 n - c \cdot n + n \leq c \cdot n \cdot \log n \text{ se } c \geq 1 \end{aligned}$$

Analizzo ora il caso base:

$T(1) = 1$ quindi voglio $1 \leq c \cdot \log_2 1$ ovvero $1 \leq c \cdot 0$ ovvero mai. testo fino a che non trovo $T(3) = 2 \cdot T(1) + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ che mi va bene, infatti $5 \leq c \cdot 3 \cdot \log_2 3$

Metodo dell'Esperto

Posso usare questo metodo solo nel caso di un'equazione di ricorrenza di questo tipo:

$$\begin{cases} T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

dove:

- $a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)$ è l'Impera ed è $\sim n^{\log_b a}$
- $f(n)$ è il divide e il combina (ovvero la parte iterativa)

Si definiscono tre casi:

- **caso 1:** $n^{\log_b a} > f(n)$ quindi $T(n) \sim n^{\log_b a}$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie: $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ (con $\epsilon > 0$) e quindi $T(n) = \Theta(n^{\log_b a - \epsilon})$
- **caso 2:** $n^{\log_b a} \cong f(n)$ quindi $T(n) \sim f(n) \cdot \log n$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ e quindi $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- **caso 3:** $n^{\log_b a} < f(n)$ quindi $T(n) \sim f(n)$. Si hanno le seguenti condizioni necessarie: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ (con $\epsilon > 0$) e $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n)$ (con $k < 1$) quindi $T(n) = \Theta(f(n))$

Esempio 3. *Risolve:*

$$T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Si ha: $f(n) = n$, $a = 9$ e $b = 3$.

Ho che $n^{\log_3 9} = n^2$ quindi ho il primo caso:

$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{2 - \epsilon})$ Posso dire che $\exists \epsilon : O(n^{2 - \epsilon}) = n$?

Si $\forall \epsilon < 1$, per esempio $\epsilon = \frac{1}{2}$. Quindi il Metodo dell'esperto è applicabile (nel primo caso) e si ha quindi $T(n) = \Theta(n)$

Esempio 4. Si può analizzare meglio il MergeSort:

$$T(n) \cong 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Si ha: $f(n) = \Theta(n)$ e $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

Posso applicare il Metodo dell'esperto nel secondo caso avendo così:

$$T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

Esempio 5.

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n \cdot \log n$$

Si ha: $f(n) = n \cdot \log n$ e $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$ e siamo nel terzo caso:

$$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon})$$

se pongo $\epsilon = 1 - \log_4 3$ ottengo n . Il terzo caso richiede una doppia verifica:

$$3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \log \frac{n}{4} \leq k \cdot n \log n$$

che vale per $k = \frac{3}{4}$ infatti si ha:

$$\frac{3}{4} \cdot n \cdot \log \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} \cdot n \cdot \log n$$

Si hanno quindi entrambi i requisiti e si può asserire che $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$

Esempio 6. Calcolo i tempi di:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \cdot \log n$$

Si ha: $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$ e $f(n) = n \cdot \log n$. Provo a procedere col terzo caso, dimostrando che:

$$n \cdot \log n = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = \Omega(n^{1+\epsilon}) = \Omega(n \cdot n^\epsilon)$$

Ma tale ϵ non esiste in quanto $n^\epsilon > \log n$ infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log n}{n \cdot n^\epsilon} = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

Bisogna quindi applicare un altro metodo per risolvere l'equazione di ricorrenza

Esempio 7. Calcolo la seguente equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = 1 & n = 1 \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Quindi avrò un albero binario di soli 1 di profondità 2^k . Quindi $T(n) = \sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$ con $k = \log n$ in quanto si avranno in totale $n = 2^k = 2 \cdot 2^k - 1$. Quindi ottengo $2n - 1$ quindi avrò $\Theta(n)$.

Abbiamo poi visto alcune strutture dati: *array*, *list*, *stack*, *queue*, *tree* (e *binary-tree*) e *heap*.

Capitolo 3

Programmazione Dinamica

Partiamo dall'algoritmo che calcola la lista di Fibonacci:

```
if  $n = 1$  then
    return  $n$ 
else
    return  $FIB(n - 1) + FIB(n - 2)$ 
```

Si vede che non sappiamo calcolarne la complessità, che non è polinomiale ma magari esponenziale o addirittura fattoriale.

Sia $T(n)$ il costo della chiamata alla funzione. Se $n = 0$ o $n = 1$ ho $T(n) = 1$. Andando avanti avrò $T(n) = 1 + T(n - 1) + T(n - 2)$ che non è risolvibile con le tecniche che conosciamo. Vediamo come risolverla: riscriviamo l'equazione non omogenea:

$$T(n) - T(n - 1) - T(n - 2) = 1$$

e facciamo una piccola approssimazione:

$$T(n) - T(n - 1) - T(n - 2) = 0$$

ottenendo un'equazione lineare omogenea a cui sommerò qualcosa per ottenere il risultato della non omogenea. Quindi risolvo l'omogenea ipotizzando un valore per $T(n)$, per esempio $T(n) = r^n$, e testiamolo, diventa:

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$$

moltiplico da entrambe le parti per r^2 perché posso:

$$r^2 \cdot r^n - r \cdot r^n - r^n = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado con soluzioni $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Quindi

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$$

ha due soluzioni:

$$C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$
$$C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

quindi:

$$T_0(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ora cerco la soluzione particolare, sostituisco in:

$$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 1$$

Tutte le $T(\cdot)$ con k ottenendo $k - k - k = 1 \rightarrow k = -1$.

Quindi la soluzione finale è:

$$T(n) = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 = \Theta \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

che è la sezione aurea

Miglioriamo l'algoritmo introducendo un array di n celle F , inizializzarlo e

```
function FIB( $n$ )  
   $F[1 \dots n]$   
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
     $F[i] \leftarrow empty$ 
```

procedere con la ricorsione con annotazione, che scrive i vari step su un array (spreca quindi memoria) e modificando fibonacci per ottenere la versione con annotazione: Quindi se si richiede qualcosa di già usato lo si ritorna prendendolo dall'array. Questo è esponenziale

Iterativamente sarebbe: questo è polinomiale

```

function FIBANN(n)
  if f[n] == empty then
    if n ≤ 1 then
      F[n] ← n
    else
      F[n] = FIBANN(n − 1) + FIBANN(n − 2)
  return F[n]

```

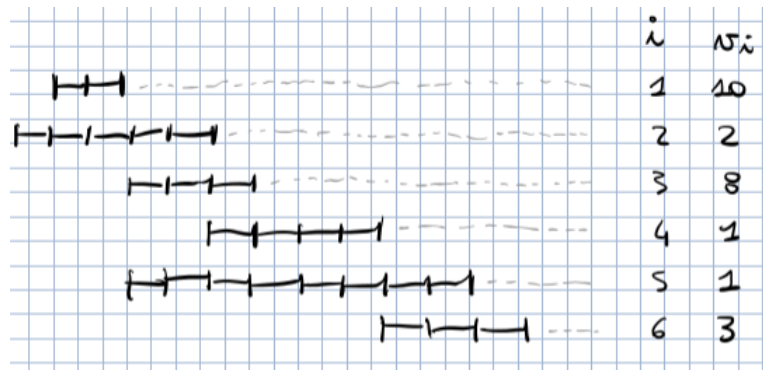
```

function FIBIT(n)
  F[0] ← 0
  F[1] ← 1
  for i ← 2 to n do
    F[i] ← F[i − 1] + F[i − 2]
  return F[n]

```

Un Nuovo Problema

Abbiamo una serie di task che possono essere svolte con un certo costo v_i , che partono in tempi diversi e non possono essere svolte contemporaneamente:



Per ogni attività si ha quindi un s_i , tempo di inizio, un f_i , tempo di fine, e un v_i , il costo, con $i \dots n$ che indica l'attività. Definiamo $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ come l'insieme che contiene attività mutualmente compatibili sse:

$$\forall i, j \in A \quad [s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) \neq \emptyset$$

definiamo anche $comp(A)$:

$$\begin{cases} \text{true} & \text{se mutualmente compatibili} \\ \text{false} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che verifica se dei task sono mutualmente compatibili.

Inoltre $V(A) = \sum_{i \in A} v_i$ per vedere il costo totale di una serie di task, con:

$$P(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \{true, false\}$$

$$V : P(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Quindi la soluzione sarà un insieme di task tale che:

$$S \subseteq \{1, \dots, n\} \rightarrow comp(S) = true, V(S) = \max\{v(A)\}$$

Definiamo in maniera formale: l'istanza è una $n \in \mathbb{N}$ e $X_n \in \{1, \dots, n\}$. Ad ogni attività $i \in X_n$ ci sono associate il tempo di inizio s_i , di fine f_i e il valore v_i .

La soluzione è un sottoinsieme $S \subseteq X_N$ di attività compatibili secondo la funzione $comp$ e tale che $v(S) = \max_{A \subseteq X_n, comp(A)=TRUE} \{v(A)\}$. La soluzione basata sulla forza bruta (calcolo tutte le combinazioni) è $\Omega(2^n)$ nel caso migliore; non va bene.

Usiamo quindi la programmazione dinamica devo però prima cercare la soluzione in termini ricorsivi, cercando i sottoproblemi. La struttura da "far calare" è X_n a step di $n - 1$ lavorando quindi su $S_{n-1} \subseteq X_{n-1}$ tale che valga quanto sopra.

Il sottoproblema i -esimo sarà $X_i = \{1, \dots, i\}$ con $S_i \subseteq X_i$ con le condizioni di sopra.

Il sottoproblema con $i = 1$ avrà $X_1 = \{1\}$ fatto solo dalla prima attività e quindi avrà $S_1 = \{1\}$ e quindi $v(S_1) = v_1$, ovvero 10 nel nostro caso.

Inoltre se $i = 0$ avrò l'insieme vuoto che ha valore 0.

Quindi $S_1 = \{1\}$, con $V(S_1) = 1$, e $S_0 = \emptyset$, con $v(s_0) = 0$ e questi potrebbero essere i miei casi base.

Ragioniamo su 6, se 6 è soluzione allora sarà insieme alla soluzione delle altre attività compatibili, ovvero quella di 4 essendo la prima compatibile in ordine, o meglio $s_6 = \{6\} \cup S_4$. Per la 5 sarà 1, per la 4 sarà 2, per la 3 sarà 1 e per la 2 non sarà nessuna, come per 1, e quindi sarà 0. Ho appena definito $p(i) = \max\{j | j < i, j \text{ compatibile con } i\}$ assumendo che $\max \emptyset = 0$, quindi l'attività con indice maggiore compatibile precedente a quella in studio.

Questo schema funziona per attività ordinate sull'ordine di fine.

Quindi:

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

e:

$$v(S_i) = \begin{cases} v_i + v(S_{p(i)}) \\ v(S_{i-1}) \end{cases}$$

Il modo di procedere consiste nel calcolare i valori e aggiornare il massimo:

$$v(S_i) = \max\{v_i + v(S_{p(i)}), v(S_{i-1})\}, i > 0$$

sapendo $v(S_1) = 1$ e $v(s_0) = 0$.

Ma in realtà $v(S_1) = 1$ è ricavabile da $v(S_0)$ con la formula quindi avremo solo un caso base: $v(S_0) = 0, i = 0$.

Quindi abbiamo trovato la ricorrenza, considerando anche che:

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } v_i + v(S_{p(i)}) \geq v(S_{i-1}) \\ S_{i-1} & \text{se } v_i + v(S_{p(i)}) < v(S_{i-1}) \end{cases}$$

Quindi ottengo l'algoritmo ricorsivo per calcolare i vari v_i : Ma è ingestibile

```

function  $R\_OPT(i)$ 
  if  $i == 0$  then
    return 0
  else
    return  $\max(v_i + R\_OPT(p[i]), R\_OPT(i - 1))$ 

```

dal punto di vista della complessità. Utilizzo quindi un vettore $M[0..n]$, introducendo la programmazione dinamica, dove in $M[i]$ memorizzo il valore della soluzione del problema di taglia i , ovvero $v(S_i)$.

Facciamo quindi la ricorsione con l'annotazione: che resta una tecnica *top-*

```

for  $j \leftarrow 0$  to  $n$  do
   $M[j] \leftarrow empty$ 
  function  $AR\_OPT(i)$ 
    if  $M[i] == empty$  then
      if  $i == 0$  then
         $M[i] \leftarrow 0$ 
      else
         $M[i] \leftarrow \max(v_i + AR\_OPT(p[i]), AR\_OPT(i - 1))$ 
    return  $M[i]$ 

```

down. Ma solitamente si lavora *bottom-up* nella programmazione dinamica. Quindi non abbiamo di caricare l'array e non abbiamo bisogno di if/else:

```

function PD_OPT(i)
    M[0]  $\leftarrow$  0
    for j  $\leftarrow$  1 to i do
        M[j]  $\leftarrow$  max(vj + M[P[j]], M[J - 1])
    return M[i]

```

ovviamente prima di tutto ho il caricamento di $p[i]$, come è stato descritto sopra.

Ora si ha una complessità pari a $\Theta(n)$ per quest'ultimo algoritmo, che calcola $v(S_i)$ ma bisogna sommare $\Theta(n \log n)$, in quanto bisogna ordinare le attività sul tempo di fine.

Ora devo capire cos'è S_i , uso il **weighted interval scheduling** per stamparlo (usando l'array M), usando un algoritmo ricorsivo che non ripete cose già usare, un algoritmo ricorsivo in coda che quindi è comodo ed efficiente da lasciare ricorsivo: C'è uno step necessità di un teorema:

```

function WIS_PRINT(i)
    if i  $\neq$  0 then
        if  $v_i + M[p(i)] \geq M[i - 1]$  then
            print(i)
            WIS_PRINT(p(i))
        else
            WIS_PRINT(i - 1)

```

Teorema 1. *Siano s_0, \dots, S_{i-1} le varie soluzioni dei sottoproblemi allora:*

$$S_i = \begin{cases} \{i\} \cup S_{p(i)} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

Dimostrazione. Assumo che $i \notin S_i$. Se per assurdo $S_{i-1} \neq S_i$ e non fosse soluzione del problema i -esimo allora sicuramente $v(S_i) > v(S_{i-1})$. Siccome $i \notin S_i$ allora $S_i \subseteq \{1, \dots, i-1\}$ e quindi $comp(S_i) = TRUE$ ma questo comporta un assurdo, infatti so che S_{i-1} è soluzione di $i-1$ ma lo sarebbe anche S_i ma so che $v(S_i) > v(S_{i-1})$ quindi S_{i-1} non sarebbe soluzione di $i-1$; quindi abbiamo un assurdo dato da una contraddizione. **resto della dimostrazione settimana prossima** \square

3.0.1 Basi di Programmazione Dinamica

Un problema di decisione prevede unicamente 2 tipi di risultato: vero e falso. Si ha una distinzione dei problemi:

- **problemi intrattabili**, che potrebbero avere una risposta calcolabile in un tempo indefinito o addirittura che non possono essere dimostrati
- **problemi di ricerca**, che si occupano di trovare una soluzione positiva ad una certa istanza (per esempio dei problemi che trattano i percorsi)
- **problemi di ottimo**, dove si cerca una e una sola soluzione che massimizza o minimizza una certa funzione costo

Si parla di **algoritmi euristici** quando si usa un algoritmo che ci dà una soluzione che magari non è la migliore. A questi si aggiungono **algoritmi di approssimazione** che si occupano di cercare l'ordine di una soluzione rispetto a quella "migliore".

3.0.2 Un Problema di Sequenze

Prendiamo una stringa $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Una sottosequenza di X è un insieme di indici con $i_1 \dots i_k$ con $k \leq n$ e indici strettamente crescenti ma non necessariamente consecutivi. Quindi data una sequenza $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ e una sottosequenza $Z = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$ diciamo che:

$$\exists i_1, \dots, i_k \rightarrow x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k}, \quad i_i > i_{i-1}$$

Si assuma che gli indici partano da 1.

Quindi, per esempio, per la stringa $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ si possono avere le sottosequenze $A_1 = \langle B, C, D, B \rangle$ (con indici 2, 3, 5, 7), $A_2 = \langle A, B, A, B \rangle$ (con indici 1, 2, 6, 7 oppure 1, 4, 6, 7) etc. ...

3.0.3 Longest Common Substring

Si definisce una **sottosequenza comune** Z a due sequenze X e Y se Z è sottosequenza sia di X che di Y (non è necessario che gli indici siano nello stesso ordine).

Cerchiamo ora un algoritmo che trovi la più grande sottostringa comune, appunto **long common substring (LCS)**, con però elementi ordinati in grandezza, quindi *longest increasing subsequence (LIS)*.

Con una soluzione iterativa avremmo $O(2^n)$ quindi pensiamo ad una soluzione con la programmazione dinamica.

Cerchiamo quindi un problema associato, cercando la sottosequenza di X più lunga che termina in una certa posizione i . In questo studio delle sequenze

gli indici aumentano solo se il valore che indicizzano è superiore a quello precedente, altrimenti diminuiscono di una unità (a meno che non sia l'indice 1 che resta uguale), quindi, per esempio, la stringa $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ avrà indici 1, 2, 3, 2, 4, 3, 4.

Definiamo $L[i]$ la lunghezza massima della LIS che termina col carattere in posizione i .

Procedo salvando la lunghezza della sottosequenza più lunga fino a i .

Si definisce X_i la restrizione della sequenza considerando solo i primi i caratteri. Chiamiamo Z_i la più lunga sottosequenza di X che termina con X_i . Salviamo le varie Z in un array $L[1..N]$ con $L[i]$ che è la lunghezza massima della sottosequenza di X che termina con X_i .

Si ha il caso base:

$$L[1] = 1$$

e il caso generale:

$$L[i] = 1 + \max_{1 \leq j \leq i-1} \{L[j] \mid X_j < X_i\}, \quad 1 < i \leq N$$

ricordando che $\max \emptyset = 0$.

La soluzione sarà quindi:

$$\max_{1 \leq i \leq N} \{L[i]\}$$

Scriviamo quindi l'algoritmo: Con la funzione *maxAcc* che calcola il massimo

```

function LIS( $X[1..N]$ )
     $L[1..N]$ 
     $X[0] = -1$ 
     $L[1] = 1$ 
     $L[0] = 0$ 
    for  $i \leftarrow 2$  to  $N$  do
         $R \leftarrow \text{maxAcc}(L[], i, i-1, X[i])$ 
         $L[i] = R + 1$ 
     $RT \leftarrow \max(L[i], 1, N)$ 
    return  $RT$ 

```

degli accettabili. Questo algoritmo è $O(n^2)$.

calcolo $L[i]$ che è la sequenza più lunga che termina col carattere i :

$$L[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1 & i = 1 \\ 1 + \max(L[j] \mid c[j] < c[i], j = 1 \dots i-1) & i > 1 \end{cases}$$

```

function LIS( $S[1..n]$ )
     $L[1] \leftarrow 1$ 
     $maxTot \leftarrow 1$ 
    for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
         $max \leftarrow 0$ 
        for  $j \leftarrow 1$  to  $i - 1$  do
            if  $S[j] < S[i]$  AND  $L[j] > max$  then
                 $max \leftarrow j$ 
             $l[i] \leftarrow L[max] + 1$ 
             $P[i] \leftarrow max$ 
            if  $L[i] > maxTot$  then
                 $maxTot \leftarrow i$ 
    return  $maxTot$ 

```

Scriviamo il vero algoritmo: Con $maxTot$ salva il massimo dell'array delle lunghezze.

Che ha tempo di esecuzione pari a $T(n) = 3c + 5cn + 3c \sum_1^n i = O(n^2)$.

Questa funzione verrà chiamata in una ciclo *for*. Per rendere il tutto più efficiente quindi memorizzo, anzichè memorizzare tutti i valori degli array che si vengono a creare contenenti le sequenze buone, l'indice del $maxTot$ precedente, nella lista P , avendo una complessità di salvataggio sulla memoria pari a $O(n)$.

3.0.4 Il Problema delle Scatole

Ho una tripla $B_i = (a_i, b_i, c_i)$ rappresentanti lunghezza, larghezza e altezza di una scatola. B_i è quindi un insieme di scatole che non possono essere ruotate. Voglio sapere a lunghezza più lunga di scatole che possono essere contenute una dentro l'altra. Cerco quindi il massimo valore di k tale per cui, per una sequenza B_1, \dots, B_i :

$$\exists x \rightarrow B_1, \dots, B_i \mid B_{i1} \subset B_{i2} \subset \dots \subset B_{ik}, \quad i_1 < \dots < i_k$$

Si introduce un vettore z con n elementi tale che $z[i]$ sia la lunghezza massima di una sottosequenza crescente di elementi B_1, \dots, B_i . Quindi:

$$z[i] = \begin{cases} 1 + \max\{z[j] \mid 1 \leq j < i, a_j < a_i, b_j < b_i, c_j < c_i\} & i > 1 \\ 1 & i = 1 \end{cases}$$

inoltre $\max\{\emptyset\} = 0$. Abbiamo quindi il seguente algoritmo:

```

function MAXBOX(B[1..n])
  z[1] ← 1
  for i ← 2 to n do
    max ← 0
    for j ← 1 to i - 1 do
      if aj < ai AND bj < bi AND cj < ci AND z[j] < max then
        max ← z[j]
    z[i] ← max
  return z

```

Si ha complessità pari a $O(n^2)$ mentre lo spazio richiesto è quello per memorizzare il vettore, ovvero $\Theta(n)$.

Può anche essere scritto ricorsivamente ma risulta troppo esoso in termini di spazio.

3.1 Longest Common Subsequence

Ritorniamo al problema di inizio capitolo. Abbiamo due stringhe, $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ con Z sottosequenza comune a X e Y .

Per ragionare secondo la programmazione dinamica identifichiamo le istanze relative ai sottoproblemi come X_i e Y_j che sono $n + 1$ e $m + 1$ prefissi del problema. Un sottoproblema generico è identificato da una coppia di indici e ad ogni sottoproblema è associata una lunghezza. La lunghezza della massima sottosequenza comune K è la maggiore tra tutte le lunghezze delle sottosequenze comuni W . Si ha quindi che:

$$Z_k = LCS(X_i, Y_j)$$

Inoltre si ha che, sapendo che x_i è l'ultimo simbolo:

$$LCS(x_{i-1}, y_{j-1}) \mid x_i \text{ se } x_i = y_j$$

altrimenti, se $x_i \neq y_j$, si ha che:

$$Z_k = LCS(X_i, Y_j) = LCS(X_{i-1}, Y_j) \text{ e } C_{i,j} = C_{i-1,j}$$

mentre, se $x_i \neq y_j$ si ha che:

$$Z_k = LCS(X_i, Y_j) = LCS(X_i, Y_{j-1}) \text{ e } C_{i,j} = C_{i,j-1}$$

Quindi cerco un algoritmo del tipo:

$$LCS(x, y) \rightarrow LCS(x - \{A\}, y - \{A\})$$

Costruisco quindi una matrice C che indica come sono allineate le sequenze con un algoritmo che controlla i primi i caratteri di X e i primi j di Y .

La prima riga e la prima colonna sono fissi 0, e il controllo inizia dalla prima riga di 0. Non appena l'algoritmo trova un match, copia nella casella della matrice corrispondente il valore contenuto nella casella precedente sulla diagonale a sinistra, incrementandolo di 1, mentre se i caratteri confrontati sono diversi viene copiato nella casella il massimo tra il valore a sinistra e il valore sopra. L'ultima casella in basso a destra (quella di posizione (n, m)) rappresenta la lunghezza massima.

Quindi $C[i, j]$ contiene la lunghezza della stringa più lunga tra gli i caratteri di X e i j di Y .

Si ha quindi un caso base sfruttando la prima riga e la prima colonna formate da soli zeri:

$$C[i, j] = 0 \text{ se } i = j = 0$$

e un caos generico:

$$C[i, j] = \begin{cases} C[i-1, j-1] + 1 & \text{se } x_i = y_i \\ \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\} & \text{se } x_i \neq y_i \end{cases}$$

per esempio per $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ avremmo:

X / Y	0	B	D	C	A	B	A
0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1
B	0	1	1	1	1	2	2
C	0	1	1	2	2	2	2
B	0	1	1	2	2	3	3
D	0	1	2	2	2	3	3
A	0	1	2	2	3	3	4
B	0	1	2	2	3	4	4

ottengo quindi:

```

function LCS(X, Y)
    for i  $\leftarrow$  0 to n do
        C[i, 0]  $\leftarrow$  0
    for j  $\leftarrow$  0 to m do
        C[0, j]  $\leftarrow$  0
    for i  $\leftarrow$  1 to n do
        for j  $\leftarrow$  1 to m do
            if X[i] == Y[j] then
                C[i, j]  $\leftarrow$  C[i - 1, j - 1] + 1
            else
                C[i, j]  $\leftarrow$  max(C[i - 1, j], C[i, j - 1])
    return C[n, m]

```

Ho quindi un tempo $\Theta(nm) \sim \Theta(n^2)$ e uno spazio richiesto pari a $\theta(nm)$ che è quello della matrice.

La sottosequenza poi la prendo usando gli indici *i* e *j*

Per risparmiare spazio posso riempire la matrice cancellando le righe inutili, quindi al peggio uso due righe, quella che sto costruendo e quella precedente, raggiungendo $\Theta(2n)$ come uso di spazio ma rendendo più difficile la risalita per ritrovare quale è effettivamente la sequenza, in quanto dovrei risalire la matrice costruendola nuovamente.

L'algoritmo di ricostruzione della stringa è il seguente, prendendo in ingresso le due stringhe e la matrice appena caricata:

```

function buildLCS(X, Y, C)
    result  $\leftarrow$  null
    i  $\leftarrow$  length(X)
    j  $\leftarrow$  length(Y)
    while i > 0 AND j > 0 do
        if X[i] == Y[j] then
            result  $\leftarrow$  X[i] + result
            i  $\leftarrow$  i - 1
            j  $\leftarrow$  j - 1
        else
            if C[i - 1, j] > C[i, j - 1] then
                i  $\leftarrow$  i - 1
            else
                j  $\leftarrow$  j - 1
    return result

```

Quindi parto dall'ultima casella in basso a destra, se corrisponde a due caratteri uguali salvo il carattere e mi sposto indietro sulla diagonale. Altrimenti vedo se il valore sopra è maggiore di quello a sinistra e in quel caso mi sposto su quello, altrimenti mi sposto su quello a sinistra e ricomincio da 0 finchè non arrivo a fine matrice.

Trovo così una sottostringa in quanto se la casella a sinistra è uguale a quella sopra devo prendere entrambe le direzioni, geneando così K LCS tutte corrette.

3.1.1 Sottostruttura Ottima di una LCS

Il problema della LCS gode della **proprietà di sottostruttura ottima**. Si ha infatti che le classi naturali di sottoproblemi corrispondono a coppie di prefissi delle due sequenze in input.

Data infatti una sequenza $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$, definisco l' i -simo prefisso di X come $X_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$, con $i = 1, \dots, m$.

Si ha il seguente teorema:

Teorema 2. *Siano date due sequenze $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ e sia $Z = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$ una qualsiasi LCS delle due sequenze. Si hanno 3 casi:*

1. se $x_m = y_n$ allora $z_k = x_m = y_n$ e Z_{k-1} è una LCS di X_{m-1} e Y_{n-1}
2. se $x_m \neq y_n$ allora $z_k \neq x_m$ e Z è una LCS di X_{m-1} e Y
3. se $x_m \neq y_n$ allora $z_k \neq y_n$ e Z è una LCS di X e Y_{n-1}

Dimostrazione. Si dimostrano le prime due (la terza è immediata a partire dalla seconda):

1. procedo per assurdo. Se si avesse $z_k \neq x_m$ si potrebbe comunque il carattere $x_m = y_n$ a Z per ottenere una LCS di lunghezza $k+1$ ma sappiamo che Z , lunga esattamente k , è la più lunga sottosequenza comune, è quindi un **assurdo**. Si ha quindi sicuramente $z_k = x_m = y_n$. Quindi il prefisso Z_{k-1} è una *sottosequenza comune* di X_{m-1} e Y_{n-1} di lunghezza $k-1$ ma bisogna ancora dimostrare che sia una LCS. Suppongo esista quindi una LCS, W , di X_{m-1} e Y_{n-1} più lunga di $k-1$. Però se si accoda $x_m = y_n$ a W si ottiene una LCS di X e Y di lunghezza maggiore di k , un altro **assurdo**

2. procedo per assurdo. Se si avesse $z_k \neq x_m$ Z sarebbe LCS di X_{m-1} e Y . Si ipotizzi però che esista una LCS di X_{m-1} e Y di lunghezza maggiore a k , in tal caso W sarebbe anche LCS di X_m e Y , contraddicendo l'ipotesi che Z sia LCS di X e Y

□

3.1.2 Growing LCS, GLCS

Cerco una LCS in cui gli elementi sono ordinati in ordine crescente. Suppongo di avere $X = [1, 4, 12, 3, 16, 8]$ e $Y = [12, 1, 3, 17, 8]$. La Z sarebbe quindi $Z = [1, 3, 8]$.

Una soluzione banale è trovare tutte le sottosequenze, calcolando la lunghezza solo di quelle crescenti, ma avrebbe tempo esponenziale.

Sfruttando la programmazione dinamica controllo ogni volta che la sottosequenza comune precedente sia comparibile (che quindi sia crescente) aggiungendo anche un ulteriore carattere. Sfrutto la stessa logica della LCS con la matrice $C[n, m]$ con n lunghezza di X e m lunghezza di Y . Identifichiamo con $C[i, j]$ il numero di caratteri che compongono la più lunga sottosequenza comune crescente che termina con $x_i = y_j$.

Si ottiene la seguente equazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} G[i, j] = 0 & \text{se } x_i \neq y_j \\ G[i, j] = \max\{C[a, b] \mid 1 \leq a \leq i, 1 \leq b \leq m, x_a < x_i, y_b < y_j\} + 1 & \text{se } x_i = y_j \end{cases}$$

Come per LCS le caselle corrispondenti a caratteri che non matchano vengono settate a 0. Quando invece si ha un match tra i due caratteri si inserisce il valore della più lunga sottosequenza comune precedente, che viene ricercata tra tutti i valori precedenti, aggiungendo 1. Alla fine della compilazione della tabella si cerca il massimo tra tutte le caselle. Nel complesso si hanno 4 cicli per la costruzione più altri 2 cicli per la ricerca del massimo. Nel complesso si ottiene $\Theta(n^2m^2) \sum \Theta(n^4)$ con uno spazio pari $\Theta(nm)$.

Prendendo $X = \langle 1, 4, 12, 3, 7, 16, 8, 1 \rangle$ e $Y = \langle 12, 1, 3, 17, 8, 1 \rangle$ ottengo:

X/Y	1	4	12	3	7	16	8	1
12	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	2	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	3	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1

Quindi il massimo è 3.
vediamo quindi l'algoritmo:

```

function GLCS( $X, Y$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
      if  $X[i] \neq Y[j]$  then
         $G[i, j] \leftarrow 0$ 
      else
         $max \leftarrow 0$ 
        for  $a \leftarrow 1$  to  $i - 1$  do
          for  $b \leftarrow 1$  to  $j - 1$  do
            if  $G[a, b] > max$  AND  $x[a] < x[i]$  then
               $max \leftarrow G[a, b]$ 
           $g[i, j] \leftarrow max + 1$ 
         $maxtot \leftarrow 0$ 
        for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
          for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
            if  $G[i, j] > maxtot$  then
               $maxtot \leftarrow G[i, j]$ 
  return  $maxtot$ 

```

3.1.3 Heaviest Common Subsequence (HCS)

Vediamo un'altra variante della LCS, dove ogni elemento delle stringhe X e Y viene associato ad un peso e si cerca la sequenza comune più pesante (che non è necessariamente la più lunga). Analizziamo le stringhe $X = \langle A, B, C, B, A, D, E \rangle$ e $Y = \langle D, A, B, B, A, E \rangle$ dove si hanno i seguenti pesi:

$$pesi = \begin{cases} W(A) = 1 \\ W(B) = 1 \\ W(C) = 2 \\ W(D) = 30 \\ W(E) = 20 \end{cases}$$

L'algoritmo è simile a quello di LCS ma ad ogni aggiornamento della sequenza comune va aggiunto il peso del nuovo elemento.

Definiamo $P[i, j]$ il peso massimo della sottosequenza comune a X e Y ristretta ai primi i caratteri di X e ai primi j di Y .

Si ottiene quindi:

$$P[i, j] = \begin{cases} P[i-1, j-1] + w(X[i]) & \text{se } x_i = y_i \\ \max\{P[i-1, j], P[i, j-1]\} & \text{se } x_i \neq y_i \end{cases}$$

inoltre $P[i, j] = 0$ se entrambi gli indici sono nulli. Come per LCS la soluzione si troverà nell'ultima posizione a destra della matrice, ovvero in $P[n, m]$. Per le stringhe si otterrebbe una matrice così:

X / Y	0	A	B	C	B	A	D	E
0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	30	30
A	0	1	1	1	1	1	30	30
B	0	1	2	2	2	2	30	30
B	0	1	1	2	5	3	30	30
A	0	1	2	2	3	4	30	30
E	0	1	2	2	3	4	30	50

Per ricostruire la sequenza, partiamo dall'ultima casella in basso a destra e controllo se ho migliorato in diagonale (in tal caso quello è un elemento della sottosequenza comune). Altrimenti vado a vedere dove ho preso il massimo in verticale o orizzontale, naturalmente non considerando tali caratteri come appartenenti alla sottosequenza. Vediamo l'algoritmo: L'algoritmo richiede

```

function HCS(X, Y)
  for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do
     $C[i, 0] \leftarrow 0$ 
  for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do
     $C[0, j] \leftarrow 0$ 
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
      if  $X[i] == Y[j]$  then
         $C[i, j] \leftarrow C[i-1, j-1] + w(X[i])$ 
      else
         $C[i, j] \leftarrow C[i-1, j]$ 
        if  $C[i, j-1] > C[i-1, j]$  then
           $C[i, j] \leftarrow C[i, j-1]$ 
  return  $C[n, m]$ 

```

$\Theta(nm)$ sia come tempo che come spazio

3.1.4 ALCS

Parliamo di *Alternating LCS*. Ipotizziamo sequenze numeriche. Cerchiamo la più lunga sottosequenza comune che rispetti una certa alternanza. Per esempio analizziamo il pari e dispari. Parto da LCS e vedo come modificarlo. Creo una matrice $M[i, j]$ che contiene le lunghezze delle LCS alternante considerando i primi i caratteri della prima sequenza X e i primi j di Y .

Si ha quindi innanzitutto che:

$$M[i, j] = \begin{cases} \max\{M[i-1, j], M[i, j-1]\} & \text{se } X_i \neq Y_j \\ 1 + M[i-1, j-1] & \text{se } X_i = Y_j \end{cases}$$

ma non si ha rappresentazione dell'alternanza pari/dispari, diventa quindi cge $M[i, j]$ conterrà la LCS alternante che termina con X_i e Y_j . Diventa quindi:

$$M[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } X_i \neq Y_j \\ 1 + \max\{M[a, b] \mid 1 \leq a \leq i, 1 \leq b \leq j, \text{ and } (x_a \bmod 2 \neq x_b \bmod 2)\} & \text{se } X_i = Y_j \end{cases}$$

La soluzione quindi è il valore più grande contenuto nella matrice:

$$L = \max\{M[i, j] \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

L'algoritmo deriva direttamente dall'equazione di ricorrenza

Per riempire ho tempo $\Theta(n^4)$ e spazio $\Theta(n^2)$

3.2 Problemi di Ottimo

3.2.1 Problema Knapsack (dello zaino)

Sia data una serie di oggetti appartenenti all'insieme $X_n = \{1, \dots, n\}$. $\forall i \in X_n$ si hanno due variabili: v_i corrispondente al valore di un oggetto e w_i corrispondente al peso di quell'oggetto. Il problema da risolvere consiste nel riempire uno zaino di capacità L con la combinazione ottimale di oggetti che massimizzi il valore. Voglio quindi una soluzione $S_n \subseteq X_n$. Avendo in ballo peso e valore useremo una matrice $M[n, L]$, dove $M[i, j]$ rappresenterà il massimo valore ottenibile scegliendo tra i primi i oggetti per avere peso S . Formalmente si avrà:

$$\begin{cases} M[0, j] = 0 \\ M[i, 0] = 0 \\ M[i, j] = \max\{M[i-1, j], M[i-1, j-w_i] + v_i\} \end{cases}$$

E la soluzione sarà il valore contenuto nell'ultima casella $M[n, L]$.
 Vediamo un esempio di matrice, con $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V = \{1, 6, 18, 22, 28\}$,
 $W = \{1, 2, 5, 6, 7\}$ e $L = 11$:

X/L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	6	7	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	6	7	0	18	19	24	25	0	0	0
4	0	1	6	7	0	18	22	24	29	29	0	0
5	0	1	6	7	0	18	22	28	29	34	35	40

Dove la soluzione è appunto 40.

Questo algoritmo lavora in tempo $\Theta(nL)$ e in spazio $\Theta(nL) \sim \Theta(L)$. Questo algoritmo funziona su L comparabile al numero dei pesi nonostante sia *NP-complete*, con tempo esponenziale e di difficile risoluzione negli altri casi.

Vediamo ora l'algoritmo (n è il numero di oggetti):

```

function Knapsack( $X, v, w, L$ )
  for  $j \leftarrow 1$  to  $L$  do
     $M[0, j] \leftarrow 0$ 
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $M[i, 0] \leftarrow 0$ 
  for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
    for  $j \leftarrow 2$  to  $L$  do
      if  $w_i > j$  then
         $M[i, j] \leftarrow M[i - 1, j]$ 
      else
         $M[i, j] \leftarrow \max\{M[i - 1, j], M[i - 1, j - w_i] + v_i\}$ 
  return  $M[n, L]$ 

```

Capitolo 4

Programmazione Greedy

4.1 Subset Sum

Sia dato un insieme di oggetti $X_n = \{1, \dots, n\}$, ognuno con un certo valore v_i . Si ricerca un sottoinsieme che come somma dei valori un certo valore k . Siamo di fronte ad un altro problema *pseudo-polinomiale* (è polinomiale se $k \sim n$).

Come appoggio usiamo una matrice $M[n+1, k]$ di booleani tale che:

$$M[i, j] = \begin{cases} T & \text{se esiste un sottoinsieme dei primi } i \text{ elementi di valore totale } j \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi, dopo aver posto 0 ovunque si ha $i = 0$ (la prima colonna), si ha:

$$M[i, j] = \begin{cases} T & \text{se } v_i = j \\ M[i-1, j] \text{ OR } M[i-1, j-v_i] & \text{se } j - v_i > 0 \end{cases}$$

Cerchiamo ora la soluzione. Se $M[n, k] = 0$ allora non esiste nessun sottoinsieme di valore k . Invece se $M[n, k] = 1$ bisogna risalire la matrice per trovare gli elementi appartenenti alla soluzione.

Quindi si avrà:

```

function SubsetSum( $X, n, k$ )
   $posR \leftarrow n$ 
   $posC \leftarrow k$ 
  while  $posC > 0$  do
    if  $M[posR - 1][posC] == T$  then
       $print(posR)$ 
       $posC \leftarrow posC - v[posR]$ 
   $posr \leftarrow posR - 1$ 

```

4.2 Knapsack frazionario

Vediamo ora un esempio di **programmazione greedy**, ricordando che questa tecnica: Vediamo ora *knapsack frazionario* che, a differenza dell'algoritmo

riguarda problemi che hanno l'obiettivo di arrivare al risultato ottimo utilizzando sottostrutture ottime locali.

originale, prevede che un oggetto possa essere preso anche parzialmente. Si indica con w_i il peso degli oggetti e con v_i il loro valore. Chiamiamo L la capacità dello zaino e con p_i il profitto di un oggetto:

$$p_i = \frac{v_i}{w_i}$$

Cerco quindi di massimizzare il profitto.

Procedo quindi ordinando, usando quindi la tecnica greedy, gli oggetti in ordine decrescente rispetto al profitto e inserendo gli oggetti sfruttando questo ordine fin tanto che il peso dell'oggetto che sto inserendo non è maggiore alla capacità residua. A questo punto frazioniamo l'oggetto (che prende il nome di **oggetto critico**). Si ha quindi il caso migliore nel caso non si debba mai frazionare e si ha tempo $O(n \log n)$ (usando, per esempio, mergesort) per l'ordinamento e $O(n)$ per la scelta.

Si ha quindi (con P vettore dei profitti, W vettore dei pesi, V vettore dei valori, n numero degli oggetti e L peso massimo trasportabile):

```

function Knap_frazionario( $V, W, n, L$ )
     $s \leftarrow 0$ 
     $peso \leftarrow 0$ 
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do

         $R[i] \leftarrow \frac{V[i]}{W[i]}$ 
    mergesort( $R$ )
     $i \leftarrow 1$ 
    while  $peso < L$  AND  $i \leq n$  do
        if  $W[i] + peso \leq L$  then
             $s \leftarrow s + 1$ 
        else
             $s \leftarrow s + \frac{(L-peso)}{W[i]}$ 
         $peso \leftarrow peso + W[i]$ 
         $i \leftarrow i + 1$ 
    return  $s$ 

```

Si ha quindi $O(n \log n)$ e dipende solo dal numero di oggetti, si ha quindi un algoritmo polinomiale.

4.3 Approfondimento Greedy

Come abbiamo visto con knapsack frazionario facciamo una scelta *greedy* nel momento in cui prendo la soluzione che mi sembra migliore in un dato momento, infatti queste scelte sono dette *localmente ottime*.

I problemi di ottimo in cui si riesce ad arrivare ad una soluzione di ottimo mediante una sequenza di soluzioni localmente ottima ammettono sempre una soluzione greedy.

Un algoritmo greedy segue un certo schema. Parto inizializzando un insieme di soluzioni a vuoto, eventualmente calcolo il parametro di selezione, ordino gli elementi in base a quel parametro e infine per ogni elemento vedo se appartiene alle soluzioni. In questo modo si impiega $O(n \log n)$ per ordinare e $O(n)$ per scegliere.

4.4 Problema dell'Autostrada

Si ipotizzi di essere all'inizio di un'autostrada (al kilometro 0) di lunghezza N . Si ipotizzi di avere R kilometri di autonomia e che ci siano n pompe di benzina. Si cerca di minimizzare il numero di soste.

Usiamo la tecnica greedy e ordiniamo il vettore delle soste, sapendo che ci fermeremo sse la stazione successiva è fuori portata. Vediamo quindi l'algoritmo, sapendo che K è il vettore delle soste, S vettore delle soluzioni (si usa notazione insiemistica nello psuedo codice) e R è l'autonomia in kilometri:

```

function Sosta( $K, R$ )
     $S \leftarrow \emptyset$ 
     $pos \leftarrow 0$ 
    mergesort( $K$ )
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
        if  $K[i] \geq pos + R$  AND  $K[i + 1] > pos + R$  then
             $S \leftarrow S \cup K[i]$ 
             $pos \leftarrow K[i]$ 
    if  $K[i] \geq pos + R$  AND  $N > pos + R$  then
         $S \leftarrow S \cup K[N]$ 
         $pos \leftarrow K[N]$ 
    return  $S$ 

```

Ma non stiamo analizzando il caso in cui due stazioni distino più di R , ma questo a livello teorico lo possiamo ovviare dando per scontato ipotizzando che l'input sia corretto (ovvero che K non permetta questa situazione). Come Dimostrato sopra si ha $O(n \log n)$

4.5 TSP

Vediamo il problema del *traveling salesman problem* (*TSP*). Si ha che un viaggiatore deve visitare una e una sola volta tutte le N città in cui deve vendere i prodotti. Vuole minimizzare il costo per fare il giro completo delle città e tornare al punto di partenza. Si ha che ogni città è collegata ad ogni altra con un certo peso (che rappresenta il costo che si deve pagare per spostarsi tra le due città).

Una possibile soluzione greedy consiste nel scegliere sempre il cammino meno "pesante", ma questo rischia di far perdere alcune combinazioni di cammini

che insieme “costerebbero” meno, perdendo quindi la soluzione migliore. Possiamo concludere che non si può risolvere con la programmazione greedy in maniera ottimizzata.

4.6 Matroidi

Con il problema del TSP abbiamo visto che non sempre si può arrivare ad una soluzione con la programmazione greedy. Cerchiamo quindi uno strumento teorico per stabilire a priori se si può arrivare ad una soluzione con la programmazione greedy. Questo strumento è detto **matroide**.

Definizione 1. Si definisce un **sistema di indipendenza** $\langle E, F \rangle$. Si ha che F è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi costruibili a partire dagli elementi di E , che è un insieme finito. F è quindi **l'insieme delle parti** di E . La coppia $\langle E, F \rangle$ è sistema di indipendenza se:

$$\forall A \in F, \exists B \subseteq A \Rightarrow B \in F$$

sarebbe l'ideale d'ordine rispetto alla relazione di inclusione. F contiene quindi tutte le soluzioni di un problema, tra cui le soluzioni di ottimo.

Un sistema di indipendenza $\langle E, F \rangle$ è un matroide se:

$$\forall A, B \in F \text{ con } |A| + 1 = |B| \implies \exists b \in B - A \rightarrow |A| \cup \{b\} \in F$$

Definiamo una funzione di costo per esplicitare il problema di ottimo:

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$w : F \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad w(F) = \sum_{e_i \in F} w(e_i)$$

Il problema di ottimizzazione sarà quindi composto da **istanza**, il sistema di indipendenza $\langle E, F \rangle$ e la funzione di peso w , e **soluzione**. Si hanno due condizioni per le soluzioni:

1. ammissibilità, ovvero che la soluzione deve essere accettabile secondo i criteri del problema
2. massimo, ovvero cerco la soluzione migliore

Un sistema di indipendenza ha una soluzione ottima greedy se e solo se esso è un matroide.

4.6.1 Teorema di Rado

Teorema 3. $\langle E, F \rangle$ è matroide sse $\forall w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ l'algoritmo greedy restituisce l'ottimo per ogni w

Dire che un problema non è un matroide, vuol dire che non tutte le funzioni peso sono associabili a un algoritmo greedy. Non significa che per nessun obiettivo non esiste mai un algoritmo greedy che produce la soluzione ottima

Capitolo 5

Grafi

Ci occupiamo ora della risoluzione di quei problemi che possono essere ricondotti ad un grafo per essere risolti.

Definizione 2. Un **grafo** è un insieme $G = (V, E)$, con V insieme dei vertici e E insieme degli archi. Per ogni archi si ha anche una funzione rappresentante il peso:

$$w : E \rightarrow R$$

Dato un certo $e \in E$ e un certo $i \in V$ un **cappio** viene rappresentato con $e(i, i)$

Definizione 3. Si definisce **grafo sparso** un grafo in cui il numero di archi $|E|$ è molto minore di del quadrato del numero di vertici $|V|^2$.

Si hanno due modi principali di rappresentare un grafo:

1. una collezione di **liste di adiacenza**, da usare quando la cardinalità di E è molto inferiore a quella di V elevata al quadrato:

$$|E| \ll |V|^2$$

Questa rappresentazione consiste in un vettore Adj composto da un numero V di liste (una lista per ogni vertice). $\forall u \in V$ la lista di adiacenza $Adj[u]$ contiene “puntatori” a tutti i vertici $v \in V$ tali che $\exists c(u, v) \in E$, quindi tutti i vertici adiacenti ad $u \in G$. Generalmente i vertici vengono memorizzati in modo arbitrario. Se G è un grafo orientato la somma delle lunghezze di tutte le liste di adiacenza è $|E|$, se non è orientato è $2|E|$ (in quanto un arco appare nelle liste di adiacenza di due vertici).

In ogni caso si ha un uso dello spazio approssimabile a:

$$O(\max\{|V|, |E|\}) = O(|E| + |V|)$$

o, se orientato:

$$O(\max\{|E|, |V|\}) = O(2|E| + |V|)$$

Nel caso di un grafo pesato si salvano insieme vertici e pesi.

Si ha la limitazione che per cercare un arco $e(u, v)$ bisogna cercare v in $Obj[u]$, che è un processo abbastanza lento Le liste di adiacenza permettono di conoscere quali nodi sono collegati al nodo di partenza, ma non necessariamente se ci siano cammini tra più di due di essi.

Per i tempi di accesso si ha un tempo peggiore pari a:

$$O(|V|)$$

un tempo medio di $\Theta(\frac{|V|}{2})$ e uno miglior di $\Omega(1)$

2. una **matrice di adiacenza**. In questo caso si assume che i vertici siano numerati in modo arbitrario. Si ha quindi una matrice A , di dimensione $|V| \times |V|$ e indici i e j , tale che:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } e(i, j) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In un grafo non orientato si ha una simmetria della matrice (in quanto un arco appare nelle liste di adiacenza di due vertici) quindi può essere comodo, in determinati casi, memorizzare i dati solo nella diagonale superiore, quasi dimezzando i tempi di memorizzazione. Con un grafo pesato rappresento il peso di un arco $e(u, v)$ nella casella di indice u, v . Se un arco non esiste si memorizza il valore nullo *NIL*, oppure valori comodi come 0, -1 o ∞ . Se un grafo non è pesato si può addirittura usare un singolo bit per ogni elemento della matrice.

Si ha tempo costante per accedere alla matrice $O(1)$ ma si ha $O(|V|^2)$ per quanto riguarda lo spazio necessario.

Questa tecnica è molto comoda in presenza di grafi *densi*

5.1 Visita di un Grafo

Si hanno due principali tecniche di visita:

1. visita in ampiezza BFS (*breadth-first search*)
2. visita in profondità DFS

BFS analizza una sola componente del grafo che è connessa alla sorgente, dando informazioni sulle distanze da tutti i vertici (per trovare quella minima), mentre la DFS analizza tutte le componenti dando informazioni su quali vertici sono collegati e quali no.

5.1.1 Visita in Ampiezza BFS

È uno dei modi più semplici di visitare un grafo ma nonostante ciò è alla base di algoritmi importanti come l'**algoritmo di Dijkstra** per i cammini minimi con sorgente singola e l'**algoritmo di Prim** per gli alberi minimi.

Dato un grafo $G(E, V)$ con uno specifico vertice s detto **sorgente** la visita in ampiezza esplora tutti gli archi di G per scoprire che vertici sono raggiungibili da s e ne calcola la distanza (numero di archi necessari per raggiungerlo). Si produce un **BFS tree** che ha s come radice e tutti i vertici raggiungibili da s come nodi. $\forall v$ raggiungibile da s il cammino dell'albero è il cammino minimo.

Per questo algoritmo non si distinguono grafi orientati o meno.

L'algoritmo scopre tutti i vertici distanti k prima di quelli distanti $k + 1$

Per tenere traccia del lavoro all'inizio si "colora" di **bianco** tutti i vertici, che poi possono diventare **grigi** o **neri**. La prima volta che un vertice viene visitato smette di essere bianco. Inoltre vengono distinti i vertici già visitati tra grigi e neri. Se $e(u, v) \in E$ e u è nero allora v è grigio o nero. Ovvero tutti i vertici adiacenti a quelli neri sono già stati scoperti, invece un vertice grigio può avere vertici non ancora scoperti, quindi bianchi, come vertici adiacenti. Quando un vertice bianco v viene scoperto durante la scansione della lista di adiacenza di un vertice u già scoperto vengono aggiunti all'albero sia v che $e(u, v)$. In questo caso u è **padre o predecessore** di v nel BFS tree. Dato un vertice viene scoperto una sola volta si ha che nell'albero ogni vertice ha un solo vertice predecessore.

Vediamo l'algoritmo:

```

1: function BFS(G, s)
2:   for  $\forall u \in V \setminus \{s\}$  do
3:     color[u]  $\leftarrow$  white
4:     d[u]  $\leftarrow \infty$ 
5:     p[u]  $\leftarrow$  NIL
6:   color[s]  $\leftarrow$  gray
7:   d[s]  $\leftarrow$  0
8:   p[s]  $\leftarrow$  NIL
9:   Q  $\leftarrow$   $\emptyset$ 
10:  enqueue(Q, s)
11:  while Q  $\neq \emptyset$  do
12:    u  $\leftarrow$  dequeue(Q)
13:    for  $\forall v \in \text{Adj}[u]$  do
14:      if col[v] == white then
15:        p[v]  $\leftarrow$  u
16:        d[v]  $\leftarrow$  d[u] + 1
17:        color[v]  $\leftarrow$  gray
18:        enqueue(Q, v)
19:    color[u]  $\leftarrow$  black

```

Questo metodo assume che il grafo in input sia rappresentato con liste di adiacenza che mantiene diverse strutture dati aggiuntive associate ad ogni vertice. Con *color* si memorizza il colore, con *p* il predecessore (che può non esserci venendo settato a *NIL*) e con *d* si salva la distanza dal sorgente *s*. Si usa anche una queue *Q* per gestire l'insieme dei vertici grigi. Analizziamo meglio l'algoritmo:

- le righe dalla 2 alla 5 colorano tutti i vertici di bianco, settando la distanza ad un valore simbolico, per esempio ∞ e il predecessore a *NIL*
- la riga 6 colora di grigio il sorgente *s*, che viene infatti “scoperto” subito. Di conseguenza alla riga 7 si setta a 0 la distanza di *s* (dista da se stesso 0 ovviamente) e alla riga 8 si setta il predecessore a *NIL* (in quanto il sorgente non ha predecessori)
- la riga 9 inizializza la queue *Q* e alla riga 10 si inserisce *s* in quanto vertice grigio

- tra le righe 11 e 19 si ha il ciclo principale dell'algoritmo. Il ciclo termina quando non si hanno più vertici grigi (vertici già scoperti le cui liste di adiacenza non sono completamente esaminate), quindi $Q \neq \emptyset$. La riga 11 determina il vertice grigio che si trova in testa alla queue Q . Il ciclo for, tra le righe 13 e 18, esamina ogni vertice v della lista di adiacenza del vertice grigio preso in considerazione. Se v è bianco esso viene “scoperto” tra le linee 15 e 17, colorandolo, e settando la distanza come quella del vertice grigio, che lo ha in lista e quindi è anche il predecessore, $+1$. Viene infine posto in fondo alla queue.
- infine alla riga 19 si “colora” di nero il vertice u in quanto si sono scoperti tutti i vertici adiacenti e si riprende a ciclare fino ad esaurimento della coda

Analizziamo il codice ipotizzando un grafo in input $G = (V, E)$. Dal codice si capisce che ogni vertice viene inserito (e quindi anche eliminato) al massimo una volta nella coda. Le operazioni di inserimento e di eliminazione da una coda hanno costo $O(1)$, quindi il tempo per le operazioni sulla coda è $O(V)$. Sapendo che la somma delle lunghezze di tutte le liste di adiacenza è E il tempo massimo per la scansione totale delle liste è $O(E)$. Quindi il tempo totale per la procedura *BFS* è un tempo lineare:

$$O(E + V)$$

Definizione 4. Si definisce **distanza sul cammino minimo** $\delta(s, v)$ dal vertice sorgente s al vertice v come il numero minimo di archi di un cammino tra i due vertici. L'assenza di un cammino comporta $\delta(s, v) = \infty$

Lemma 1. Sia $G = (V, E)$ un grafo e $s \in V$ un vertice arbitrario. Si ha che:

$$\forall e(u, v) \in E \implies \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Se ipotizziamo poi che si esegua *BFS* dal vertice sorgente s si ha che:

$$\forall v \in V \implies d[v] \geq \delta(s, v)$$

e quindi $d[v]$ è limite superiore di $\delta(s, v)$.

Si supponga inoltre che v_1 sia la testa di Q e v_t il fondo. Si ha che:

$$d[v_t] \leq d[v_1] + 1$$

e:

$$d[v_i] \leq d[v_{i+1}], \quad \forall i = 1, \dots, t-1$$

Dimostrato tutto ciò si ha il **teorema delle correttezza della vista in ampiezza**:

Teorema 4. *Dato un grafo $G = (V, E)$ si supponga di eseguire BFS a partire dalla sorgente s . Durante la sua esecuzione si ha che ogni $v \in V$ raggiungibile da s viene scoperto e al termine si ha:*

$$d[v] = \delta(s, v), \forall v \in V$$

*Inoltre, $\forall v \neq s$ raggiungibile da s si ha che **uno dei cammini minimi da s a v è il cammino minimo da s a $p[v]$ seguito dall'arco $e(p[v], v)$***

Proviamo a vedere una variante di *BFS*, dove si visitano solo i vertici distanti k da s :

```

1: function BFS( $G, s, k$ )
2:   for  $\forall u \in V \setminus \{s\}$  do
3:      $color[u] \leftarrow white$ 
4:      $d[u] \leftarrow \infty$ 
5:      $p[u] \leftarrow NIL$ 
6:    $color[s] \leftarrow gray$ 
7:    $d[s] \leftarrow 0$ 
8:    $p[s] \leftarrow NIL$ 
9:    $Q \leftarrow \emptyset$ 
10:  enqueue( $Q, s$ )
11:  while  $Q \neq \emptyset$  do
12:     $u \leftarrow dequeue(Q)$ 
13:    for  $\forall v \in Adj[u]$  do
14:      if  $col[v] == white$  then
15:         $p[v] \leftarrow u$ 
16:         $d[v] \leftarrow d[u] + 1$ 
17:        if  $d[v] < k$  then
18:           $color[v] \leftarrow gray$ 
19:          enqueue( $Q, v$ )
20:        else
21:           $color[v] \leftarrow black$ 
22:    dequeue( $u$ )
23:     $color[u] \leftarrow black$ 

```

Vediamo ora un algoritmo che stabilisce se un grafo sia connesso (*per ogni coppia di vertici esiste un cammino, relazione di raggiungibilità simmetrica*)

```

function is – connected(G)
    s ← random(V)
    BFS(G, S)
    for v ∈ V do
        if color[v] == white then
            return false
        else
            return true

```

5.1.2 Visita in Profondità DFS

Vediamo ora la **visita in profondità, DFS (*depth-first search*)**. Con questa strategia si esplora il grafo andando ad ogni istante il più possibile in “profondità”. Con questa tecnica gli archi vengono esplorati a partire dall’ultimo vertice scoperto v che abbia ancor archi uscenti non esplorati. Una volta che gli archi di v sono stati esplorati si esplora a ritroso il vertice che aveva v come uscente. Si itera fino a finire i vertici raggiungibili dalla sorgente e, una volta concluso, si impone, eventualmente, un nuovo vertice non raggiungibile dalla sorgente come nuovo sorgente, continuando così a iterare fino a scoprire tutti i vertici.

Anche con questo tipo di visita quando un vertice v viene scoperto durante la scansione di una lista di adiacenza di un vertice u già scoperto la DFS setta $p[v] = u$, formando così un insieme di diversi alberi, uno per sorgente, che formano il **grafo dei predecessori** $G_p = (V, E_p)$, con gli **archi dell’albero**:

$$E_p = \{(p[v], v) : v \in V, p[v] \neq NIL\}$$

Questo insieme di **alberi DFS** è detto **foresta DFS**.

Come la BFS si procede colorando i vertici. Ogni vertice inizialmente è *bianco*, quando viene scoperto diventa *grigio* e *nero* quando la sua lista di adiacenza viene completamente esaminata, garantendo che ogni vertice finisca in un solo albero BFS, che sono quindi *disgiunti* tra loro. Durante la visita si marcano i vertici con alcune informazioni temporanee, un’etichetta $d[u]$ che registra quando u viene scoperto (diventando grigio) e un’etichetta $f[u]$ che registra quando si finisce di esaminare la lista di adiacenza di u (diventando nero). Entrambe queste etichette non sono altro che variabili intere comprese tra 1 e $2|V|$, in quanto ogni vertice può essere scoperto una e una sola volta e può terminare la sua visita una e una sola volta. Si ha che:

$$d[u] < f[u], \forall u \in V$$

Infatti sicuramente un vertice all'inizio è bianco, al tempo $d[u]$ diventa grigio e solo dopo, al tempo $f[u]$, diventa nero.

Vediamo lo pseudocodice, ricordando che con $c[u]$ si indica il colore del vertice:

```

1: function DFS(G)
2:   for  $\forall u \in V[G]$  do
3:      $c[u] \leftarrow white$ 
4:      $p[u] \leftarrow NIL$ 
5:    $time \leftarrow 0$ 
6:   for  $\forall u \in V[G]$  do
7:     if  $c[u] == white$  then
8:       DFS_Visit(u)
9:
10: function DFS_visit(u)
11:    $c[u] \leftarrow gray$ 
12:    $time \leftarrow time + 1$ 
13:    $d[u] \leftarrow time$ 
14:   for  $\forall v \in Adj[u]$  do
15:     if  $c[v] == white$  then
16:        $p[v] \leftarrow u$ 
17:       DFS_Visit(v)
18:    $c[u] \leftarrow black$ 
19:    $time \leftarrow time + 1$ 
20:    $f[u] \leftarrow time$ 

```

Analizziamo l'algoritmo:

- le righe dalla 2 alla 4 colorano i vertici di **bianco** e inizializzano i predecessori da *NIL*
- la riga 5 azzerava il contatore globale del tempo
- le righe dalla 6 alla 8 controllano tutti i vertici di V e visitano tutti quelli bianchi con la procedura *DFS_Visit*. Ogni volta che si fa questa chiamata il vertice u che si sta considerando diventa la radice di un nuovo albero della *foresta DFS*. Alla fine di ogni iterazione il vertice considerato avrà il *tempo di scoperta* e il *tempo di fine visita*

- la riga 11 colora di *grigio* il vertice considerato in quanto è stato “scoperto”
- la riga 12 e la riga 13 memorizzano il tempo di scoperta del vertice incrementando di 1 la variabile globale del tempo e assegnando il valore al tempo di scoperta del vertice considerato
- le righe dalla 14 alla 17 esaminano i vertici adiacenti al vertice considerato e visitano ricorsivamente ogni vertice adiacente *bianco*. Ogni volta che un vertice v adiacente viene preso in considerazione si considera esplorato dalla visita in profondità l’arco $e(u, v)$, con u vertice preso in considerazione dal metodo *DFS_Visit*
- la riga 18 colora il vertice considerato di *nero*, in quanto ogni arco uscente dal vertice considerato è stato esplorato
- le righe 19 e 20 aggiornano la variabile di tempo globale e salvano il tempo di fine visita

Analizziamo ora i tempi. Si hanno due cicli di complessità $\Theta(V)$ ciascuno nel metodo *DFS*. Inoltre il metodo *DFS_Visit* viene chiamato una e una sola volta $\forall v \in V$. Sempre in *DFS_Visit* si ha un ciclo che viene eseguito $|Adj[v]|$ volte. Ma sappiamo che:

$$\sum |Adj[v]| = \Theta(E)$$

che è quindi il costo totale di *DFS_Visit*.

Possiamo quindi dire che il tempo di esecuzione complessivo è:

$$\Theta(V + E)$$

La *DFS* ha proprietà interessanti:

- il sottografo dei predecessori G_p forma effettivamente una foresta di alberi DFS, quindi $u = p[v]$ sse *DFS_Visit* è stata chiamata durante la visita delle liste di adiacenza di u
- i tempi di scoperta e fine visita, se sostituiti da parentesi formano un’espressione ben formata, ovvero sono perfettamente bilanciate.

Infatti si ha il **teorema delle parentesi**:

Teorema 5. *In ogni DFS di $G = (V, E)$ per ogni coppia di vertici u e v si soddisfa una e una sola delle seguenti condizioni:*

- gli intervalli $[d[u], f[u]]$ e $[d[v], f[v]]$ sono completamente disgiunti
- l'intervallo $[d[u], f[u]]$ è interamente contenuto in $[d[v], f[v]]$ e u è discendente di v nell'albero DFS
- l'intervallo $[d[v], f[v]]$ è interamente contenuto in $[d[u], f[u]]$ e v è discendente di u nell'albero DFS

- si ha il **corollario degli intervalli dei discendenti**:

Corollario 1. *Un vertice v è un **discendente proprio** di un vertice u nella foresta DFS di un grafo G sse:*

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$$

- si ha il **teorema del cammino bianco**

Teorema 6. *In una foresta DFS di un grafo $G = (V, E)$ un vertice v è discendente di u sse, al tempo $d[u]$ di scoperta di u , v è raggiungibile da u con un cammino fatto solo di vertici bianchi*

Gli archi in un grafo visitato con DFS possono essere così etichettati:

- **tree-edge**, che sono gli archi della foresta DFS. Un arco (u, v) è arco dell'albero se v è stato scoperto esplorando quell'arco
- **back-edge**, che sono gli archi (u, v) che connettono un vertice u ad un antenato v in un albero DFS. I cappi sono considerati back-edge
- **forward-edge**, che sono gli archi (u, v) che non sono archi dell'albero e che connettono un vertice u ad un discendente di v in un albero DFS
- **cross-edge**, che sono i vertici non appartenenti alle categorie sopra. Questi archi possono connettere vertici nello stesso albero DFS, purché un vertice non sia antenato di un altro. Possono connettere vertici in alberi DFS distinti.

In questa distinzione ci aiutano i colori:

- se v è white allora (u, v) è un tree-edge
- se v è gray allora (u, v) è un back-edge

- se v è black allora (u, v) è un forward-edge o cross-edge (se il tempo di scoperta di u è minore del tempo di scoperta di v allora è un arco in avanti, altrimenti è un arco trasversale)

Nel caso di grafo non orientato il primo tra (u, v) e (v, u) che viene etichettato viene usato per etichettare nello stesso modo l'altro.

Vediamo l'algoritmo che modifica la *DFS_visit* stampando le tipologie di arco:

```

function DFS_visit( $v$ )
     $time \leftarrow time + 1$ 
     $d[v] \leftarrow time$ 
     $c[v] \leftarrow gray$ 
    #si rimuove  $P[v]$  solo se il grafo non è orientato
    for  $a \in Adj[v] \setminus P[v]$  do
        if  $c[a] == white$  then
             $print((v, a), "tree")$ 
            DFS_visit( $a$ )
        else if  $c[a] == gray$  then
             $print((v, a), "back")$ 
        else if  $c[a] == black$  then
            if  $d[a] < f[a]$  then
                 $print((v, a), "forward")$ 
            else
                 $print((v, a), "cross")$ 

```

Ordinamento Topologico

Usando la DFS posso effettuare l'ordinamento topologico di grafi orientati aciclici (**DAG**). Tale ordinamento è un ordinamento lineare di tutti i suoi vertici tale che G contiene un arco (u, v) , allora u compare prima di v nell'ordinamento (questa cosa è possibile solo grazie al fatto che è aciclico). Tale ordinamento può essere visto quindi come un ordinamento dei suoi vertici lungo una linea orizzontale in modo che tutti gli archi orientati vadano da sinistra a destra. Si procede così:

- si chiama DFS e si calcolano i tempi di fine visita su ogni vertice v
- dopo aver visitato un vertice lo si inserisce in testa ad una lista concatenata e infine si ritorna la lista

Capitolo 6

Cammini Minimi

Sia un grafo pesato e orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni arco un peso sotto forma di valore reale. Si definisce il peso di un cammino $p = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ la somma dei pesi degli archi che lo costituiscono:

$$w(p) = \sum_{i=1}^n w(v_{i-1}, v_i)$$

si definisce il **peso di cammino minimo** da u a v come:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : p = \langle u, \dots, v \rangle\} & \text{se esiste un cammino da } u \text{ a } v \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un **cammino minimo** tra u e v è un qualunque cammino p con peso $w(p) = \delta(u, v)$.

Si possono avere archi con pesi negativi ma in tal caso, se ci sono cicli di peso negativo, su un cammino da s a v si definisce $\delta(s, v) = -\infty$.

Spesso si vogliono calcolare anche i vertici dei cammini minimi. Si procede quindi mantenendo $\forall v \in V$ un predecessore $p[v]$ (che può essere un altro vertice o *nil*). Gli algoritmi per il calcolo del cammino minimo utilizzano il predecessore in modo tale che la catena dei predecessori che parte da un vertice v segua in direzione inversa un cammino minimo tra s e v . Si calcola il sottografo dei predecessori $G_p = (V_p, E_p)$ indotto dai valori di p , con:

$$V_p = \{v \in V : p[v] \neq \text{nil}\} \cup \{s\}$$

$$E_p = \{(p[v], v) \in E : v \in V_p \setminus \{s\}\}$$

Si dimostra che G_p è un **albero di cammini minimi**, ovvero un albero radicato che contiene un cammino minimo da una sorgente s ad ogni vertice raggiungibile da s . Quindi è un sottografo $G' = (V', E')$, con $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, tale che:

- V' è l'insieme dei vertici raggiungibili da $s \in G$
- G' forma un albero con radice s
- $\forall v \in V'$ l'unico cammino semplice (ovvero senza nodi ripetuti) da s a $v \in G'$ è un cammino minimo da s a v in G

Quando si parla di cammini minimi con sorgente singola si ha la tecnica del **rilassamento**, cioè un metodo che diminuisce ripetutamente un limite superiore al reale peso di cammino minimo ad ogni vertice fino a che questo limite superiore non diventa uguale al peso di cammino minimo stesso. Si parte dal seguente lemma:

Lemma 2. *Sia dato un grafo pesato e orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, con sorgente in s e sia $p = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ un cammino minimo tra v_1 e v_k allora $\forall i, j \implies 1 \leq i \leq j \leq k$ sia $p_{i,j} = \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ il sottocammino tra v_i e v_j . Si ha che $p_{i,j}$ è un cammino minimo tra v_i e v_j . Quindi **sottocammini di cammini minimi sono cammini minimi***

Si ha quindi il seguente corollario:

Corollario 2. *Si supponga che un cammino minimo p da s a v sia scomponibile in un cammino tra s e u e tra u e v allora il cammino minimo tra s e v è:*

$$\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$$

Si ha anche il seguente lemma:

Lemma 3. *Sia dato un grafo pesato e orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, con sorgente in s . Allora $\forall e(u, v) \in E$ si ha che:*

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

Con la tecnica del rilassamento si ha quindi un attributo $d[v]$ che è un limite superiore al peso di un cammino minimo tra s e v . Il valore $d[v]$ viene chiamato **stima di cammino minimo**. Si ha quindi una procedura che inizializza le stime di cammino minimo e i predecessori:

```

function Inizialize-Single-Source( $G, s$ )
  for every  $v \in V$  do
     $d[v] \leftarrow \infty$ 
     $p[v] \leftarrow nil$ 
   $d[s] \leftarrow 0$ 

```

Il processo di *rilassare* un arco consiste nel verificare se si può migliorare il cammino minimo per v trovato fino a quel momento passando per u e in caso aggiornare $d[v]$ (diminuendo il valore della stima del cammino minimo) e $p[v]$, tutto ciò si ottiene in un passo di rilassamento così implementabile:

```

function Relax( $u, v, w$ )
  if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  then
     $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
     $p[v] \leftarrow u$ 

```

Si ha il seguente lemma:

Lemma 4. *Dopo la procedura di Relax(u, v, w) si ha che:*

$$d[v] \leq d[u] + w(u, v)$$

e si ha anche il seguente lemma:

Lemma 5. *Si proceda con l'inizializzazione tramite Inizialize-Single-Source(G, s). Allora $d[v] \geq \delta(s, v)$, $\forall v \in V$ e questa proprietà si mantiene da qualunque sequenza di passi di rilassamento. Inoltre se $d[v]$ raggiunge il limite inferiore $\delta(s, v)$ non cambia più. Inoltre ad un qualunque istante prima della chiamata di Relax(u, v, w) si ha che $d[u] = \delta(s, u)$ allora in qualunque istante successivo si avrà $d[v] = \delta(s, v)$*

Si hanno poi alcuni lemmi per quanto riguarda gli alberi di cammini minimi.

Lemma 6. *Sia dato un grafo pesato e orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, con sorgente in s . Si assuma che non ci siano cammini negativi. Allora dopo l'inizializzazione tramite Inizialize-Single-Source(G, s) il sottografo dei predecessori forma un albero con radice s e qualunque sequenza di passi di rilassamento sugli archi di G mantiene questa proprietà invariante*

Si ha anche che:

Lemma 7. *Sia dato un grafo pesato e orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, con sorgente in s . Si assuma che non ci siano cammini negativi. Allora dopo l'inizializzazione tramite Inizialize-Single-Source(G, s) e una qualunque sequenza di passi di rilassamento che produca $d[v] = \delta(s, v)$, $\forall v \in V$, il sottografo dei predecessori è un albero di cammini minimi radicato in s*

6.1 Cammini Minimi per Tutte le Coppie

6.1.1 Algoritmo di Floyd-Warshall

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ e una funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, che associa gli archi del grafo ad un valore reale, si cerca il cammino di peso minimo tra due vertici u e v dove il peso del cammino è la somma dei pesi degli archi del cammino. Si assume che possano esserci archi di peso negativo ma non cicli negativi. Questo algoritmo sfrutta una matrice M^n (di programmazione dinamica ???) che è la matrice delle distanze calcolate utilizzando al massimo i nodi da 1 a n come nodi intermedi. All'inizio la matrice contiene le distanze tra i vertici adiacenti:

$$M^0[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi ho una matrice $n \times n$ con l'elemento (i, j) che contiene il peso di un cammino minimo tra i vertici i e j .

Il sottografo indotto dalla i -esima riga dalla matrice sarà un albero di cammini minimi con radice i e definisco la matrice dei predecessori:

$$P[i, j] = \begin{cases} nil & \text{se } i = j \vee (i, j) \notin E \\ p[\cdot, j] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definisco il sottografo dei predecessori per il vertice i -esimo come:

$$G_{p,i} = (V_{p,i}, E_{p,i})$$

con:

- $V_{p,i} = \{j \in V : p[i, j] \neq nil\} \cup \{i\}$
- $E_{p,i} = \{(p[i, j], j) : j \in V_{p,i} - \{i\}\}$

L'algoritmo suppone che i vertici siano numerati da 1 a n e considera un sottoinsieme di vertici da 1 a k , con ovviamente $k < n$. Per ogni coppia di vertici considera tutti i cammini possibili tra i due vertici i cui vertici intermedi siano nel sottoinsieme di vertici da 1 a k e sia p un cammino di peso minimo fra di essi:

- se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono compresi tra 1 e $k-1$. Di conseguenza, un cammino minimo da i a j con i vertici intermedi compresi tra 1 e $k-1$ è ancora un cammino minimo da i a j con i vertici compresi tra 1 e k

- se k è un vertice intermedio spezzo p in due sottocammini p_1 (da i a k) e p_2 (da k a j) e opero come nel passo precedente, dimostrando che i due sottocammini sono minimo e rimangono tali anche con l'aggiunta di un vertice k

Quindi si ha che:

$$M^k[i, j] = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } k = 0 \\ \min\{M^{k-1}[i, j], M^{k-1}[i, k] + M^{k-1}[k, j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

La matrice $M^n[i, j]$ mi darà le soluzioni per ogni coppia di vertici $i, j \in V$. Vediamo l'algoritmo:

```

function FloydWarshall( $G$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
      if  $(i, j) \notin E$  then
         $M[0, i, j] = \infty$ 
      else
        if  $i == j$  then
           $M[0, i, j] = 0$ 
        else
           $M[0, i, j] = w_{i,j}$ 
  for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
      for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
         $M[k, i, j] = \min\{M[k-1, i, j], M[k-1, i, k] + M[k-1, k, j]\}$ 
  return  $M[n, n, n]$ 

```

Abbiamo quindi un tempo pari a $O(n^3)$

Costruzione del Cammino minimo

Uno dei metodi per costruire il cammino minimo è partire dalla matrice $M[n, \cdot, \cdot]$ e costruire la matrice dei predecessori. Questo calcolo viene fatto a partire dalle varie $M[k, \cdot, \cdot]$ definendo una matrice P con il seguente caso base:

$$P[0, i, j] = \begin{cases} i & \text{se } i \neq j \vee w_{i,j} = \infty \\ NIL & \text{se } i = j \wedge w_{i,j} < \infty \end{cases}$$

mentre per il caso passo si ha:

$$P[k, i, j] = \begin{cases} P[k-1, i, j] & \text{se } M[k-1, i, j] \leq M[k-1, i, k] + M[k-1, k, j] \\ P[k-1, i, j] & \text{se } M[k-1, i, j] > M[k-1, i, k] + M[k-1, k, j] \end{cases}$$

In pratica controllo a ritroso come ho ottenuto il cammino minimo per assegnare il predecessore in base al fatto che ho k come vertice intermedio o meno

Chiusura Transitiva di un Grafo Orientato

Si vuole determinare l'esistenza di un cammino minimo tra due vertici in un grafo orientato G .

Definizione 5. Si definisce **chiusura transitiva** di G il grafo $G^* = (V, E^*)$ dove:

$$E^* = \{(i, j) : \text{esiste un cammino dal vertice } i \text{ al vertice } j \text{ in } G\}$$

Per calcolare la chiusura transitiva si assegna peso 1 ad ogni arco e, alla fine dell'algoritmo se si ha $M[n, i, j] < n$, altrimenti si avrebbe $M[n, i, j] = \infty$ (nell'ultima matrice ho un valore sensato).

Si può però risparmiare complessità spaziale e temporale lavorando con i booleani e gli operatori bitwise, l'*and logico* \wedge e l'*or logico* \vee . Si ha quindi $M[k, i, j] = 1$ se esiste un cammino tra i e j con i vertici intermedi nell'insieme $\{1, \dots, k\}$ e $M[k, i, j] = 0$ altrimenti.

Si costruisce la chiusura transitiva ponendo l'arco (i, j) in E^* sse $M[n, i, j] = 1$ (quindi se ho 1 nell'ultima matrice). Si ha quindi la seguente equazione di ricorrenza per il caso base:

$$M[0, i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \notin E \\ 1 & \text{se } i = j \vee (i, j) \in E \end{cases}$$

col seguente caso passo:

$$M[k, i, j] = M[k-1, i, j] \vee (M[k-1, i, k] \wedge M[k-1, k, j])$$

Vediamo l'algoritmo (con costo $O(n^3)$):

```

function FloydWarshallClosure(G)
  for i  $\leftarrow$  1 to n do
    for j  $\leftarrow$  1 to n do
      if i == j  $\vee$  (i, j)  $\in$  E then
        M[0, i, j] = 1
      else
        M[0, i, j] = 0
  for k  $\leftarrow$  1 to n do
    for i  $\leftarrow$  1 to n do
      for j  $\leftarrow$  1 to n do
        M[k, i, j]  $\leftarrow$  M[k - 1, i, j]  $\vee$  (M[k - 1, i, k]  $\wedge$  M[k - 1, k, j])
  # ritorno l'ultima matrice
  return M[n]

```

6.2 Cammini minimi a Singola Sorgente

6.2.1 Algoritmo di Dijkstra

Questo algoritmo risolve il problema dei cammini minimi con sorgente singola su un grafo orientato e pesato $G = (V, E)$ con pesi non negativi.

L'algoritmo di Dijkstra mantiene un insieme S che contiene i vertici con peso di cammino minimo dalla sorgente s già determinati, ovvero:

$$\forall v \in S \implies d[v] = \delta(s, v)$$

L'algoritmo seleziona ripetutamente il vertice $u \in V \setminus \{s\}$ con la minima stima di cammino minimo, inserisce u in S e *rilassa* gli archi uscenti da u . Nell'implementazione si mantiene una queue di minima priorità Q con tutti i vertici $V \setminus \{s\}$ usando come chiave i rispettivi $d[v]$ (in modo che si estragga il nodo più vicino con al funzione *Extract-Min*). Si usa la rappresentazione con liste di adiacenza:

```

function Dijkstra( $G, w, s$ )
  Initalize-Single-Source( $G, v$ )
   $S \leftarrow \emptyset$ 
   $Q \leftarrow V$ 
  while  $Q \neq \emptyset$  do
     $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$ 
     $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
    for every  $v \in \text{Adj}[u]$  do
      Relax( $u, v, w$ )

```

Dato che l'algoritmo di Dijkstra sceglie sempre il vertice in $V \setminus S$ più *leggero/vicino* da inserire in S diciamo che è un algoritmo greedy e quindi in teoria non per forza ottimale. Si dimostra invece che questo algoritmo calcola effettivamente i cammini minimi, dimostrando che quando un vertice u viene inserito in S si ha $d[u] = \delta(s, u)$. Si ha quindi il **teorema della correttezza di Dijkstra**:

Teorema 7. *Se si esegue l'algoritmo di Dijkstra su un grafo orientato e pesato $G = (V, E)$ con pesi non negativi, funzione peso w e sorgente s , allora:*

$$\forall u \in V \implies d[u] = \delta(s, u)$$

a cui segue il seguente corollario:

Corollario 3. *Al termine dell'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra il sotto-grafo dei predecessori G_p è un albero di cammini minimi con radice s*

Analizziamo ora i tempi. Si ha che ogni operazione *Extract-Min* richiede tempo $O(|V|)$. Avendo $|V|$ chiamate a *Extract-Min* si ha tempo $O(|V|^2)$. Inoltre ogni vertice viene inserito in S esattamente una volta e ogni arco nella lista di adiacenza viene esaminato esattamente una volta. Avendo $|E|$ archi nella lista di adiacenza e avendo $|E|$ iterazioni col ciclo *for* (quindi $|E|$ chiamate alla *relax* e quindi alla *decrease-key*), che contiene operazioni di peso $O(1)$, si ha $O(|E|^2)$, ottenendo in totale:

$$O(|V|^2 + |E|^2) = O(|V|^2)$$

essendo $|V| > |E|$.

Se il grafo è sufficientemente sparso, ovvero $|E| = o(\frac{|V|^2}{\log |V|})$ si ha che la coda di priorità minima può essere implementata con un **min-heap binario** (aggiungendo il dettaglio implementativo in cui i vertici devono mantenere dei puntatori ai corrispondenti elementi dell'heap e viceversa). In questo

modo *Extract-Min* richiede tempo $= (\log |V|)$ (avendo per di più sempre $|V|$ operazioni). Ricordiamo che il min-heap binariosi costruisce in $O(|V|)$. Raggiungo quindi un tempo di $O(|E| \log |V|)$. Usando gli **heap i fibonacci** ottengo addirittura $O(|V| \log |V| + |E|)$

6.2.2 Algoritmo di Bellman-Ford

Questo algoritmo risolve il problema di cammini minimi con sorgente singola nel caso generale in cui i pesi degli archi possono essere negativi.

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$, con sorgente s e funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'algoritmo di Bellman-Ford restituisce un booleano che indica se esiste un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente. Se e solo se non esiste tale ciclo l'algoritmo produce i cammini minimi e i loro pesi.

Si usa la tecnica del *rilassamento*, diminuendo progressivamente una stima $d[v]$ del peso di un cammino da s a $v \in V$ fino a raggiungere il peso reale del cammino $\delta(s, v)$. L'algoritmo restituisce *TRUE* sse il grafo non ha un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente:

```

function BellmanFord( $G, w, s$ )
  Initalize-Single-Source( $G, v$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $|V| - 1$  do
    for every  $e(u, v) \in E$  do
      Relax( $u, v, w$ )
  for every  $e(u, v) \in E$  do
    if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  then
      return FALSE
  return TRUE

```

Si ha un tempo di $O(|V| \cdot |E|)$. La validità dell'algoritmo si basa innanzitutto sul seguente lemma:

Lemma 8. *Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e pesato con sorgente s e funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Assumendo che G non contenga cicli di peso negativo raggiungibili da s si ha che al termine dell'esecuzione dell'algoritmo Bellman-Ford $d[v] = \delta(s, v)$ per tutti i vertici v raggiungibili da s*

Ne segue il seguente corollario:

Corollario 4. *Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e pesato con sorgente s e funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $\forall v \in V$ esiste un cammino da s a v sse al termine dell'algoritmo Bellman-Ford si ha $d[v] < \infty$*

Si ha quindi il **teorema della correttezza dell'algoritmo di Bellman-Ford**:

Teorema 8. *Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato e pesato con sorgente s e funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Se G non contiene cicli di peso negativo raggiungibili da s allora l'algoritmo restituisce *TRUE* e $\forall v \in V$ si ha $d[v] = \delta(s, v)$ e il sottografo dei predecessori G_p è un albero di cammini minimi con s come radice. Se il grafo contiene cicli di peso negativo si restituisce *False**

Capitolo 7

Strutture Dati per Insiemi Disgiunti

Si ha che alcune applicazioni devono raggruppare n elementi distinti in una collezione di insiemi disgiunti. Studiamo quindi strutture dati che permettano di mantenere una collezione di insiemi dinamici disgiunti,

$S = \{S_1, \dots, S_n\}$. Si ha quindi che, $\forall i, j \in [1, n], i \neq j \rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$. Si definisce **rappresentante di un insieme** un dato membro di quell'insieme (imponendo che la funzione che cerca il rappresentante restituisca sempre lo stesso). Ovviamente un elemento si troverà solo in uno degli insiemi della collezione. In determinati casi un rappresentante è l'elemento più piccolo o più grande etc. . .

Si definiscono 3 operazioni fondamentali:

1. **Make-Set(x)**, che crea un nuovo insieme il cui unico elemento (e quindi rappresentante) è x , che però non deve essere già in un insieme della collezione
2. **Union(x, y)**, che unisce due insiemi dinamici che contengono x e y nell'insieme unione. Si presuppone che i due insiemi S_x e S_y che contengono rispettivamente x e y siano disgiunti a priori. Il rappresentante di $S_x \cup S_y$ può, eventualmente, essere x o y . Alla fine dell'operazione i due insiemi vengono rimossi dalla collezione e si restituisce il rappresentante dell'unione
3. **Find-Set(x)**, che restituisce un puntatore al rappresentante dell'unico insieme contenente x

7.1 Rappresentazione a Lista Concatenata

Con questa rappresentazione si rappresenta ogni insieme come una lista concatenata, il cui primo elemento, a cui punta *head*, è il rappresentante dell'insieme. Ogni oggetto nella lista contiene un elemento dell'insieme, un puntatore al rappresentante e un puntatore all'oggetto successivo. Ad eccezione del primo elemento non si hanno regole per l'ordine degli elementi nella lista. Con questa rappresentazione *Make-Set*(x) e *Find-Set*(x) sono semplici da realizzare in tempo $O(1)$. Infatti la prima operazione crea una lista con un solo oggetto mentre per la seconda basta seguire il puntatore a head dell'oggetto x e poi ritornare l'elemento a cui punta head.

Vediamo ora *Union*(x, y). Si procede appendendo la lista di x alla fine di quella di y , avendo quindi y come nuovo rappresentante. Bisogna però aggiornare tutti i puntatori al rappresentante agli oggetti che prima erano nella lista di x , in tempo lineare, in $O(n^2)$. Questo succede perché potremmo appendere una lista più lunga a una lista più corta e dovremmo aggiornare il puntatore al rappresentante per ogni membro della lista più lunga. Supponiamo invece che ogni rappresentante includa anche la lunghezza della lista e che si appenda sempre la lista più corta a quella più lunga. Con questa *euristica* si arriva a $\Omega(n)$ se tutti gli insiemi hanno $\Omega(n)$ elementi. Infine si ha il seguente teorema:

Teorema 9. *Una sequenza di m operazioni tra le 3 sopra descritte (di cui n sono *Make-Set*(x)) impiega tempo $O(m + n \log n)$*

7.2 Rappresentazione con Foreste di Insiemi Disgiunti

Con questa rappresentazione gli insiemi sono alberi radicati dove ogni nodo contiene un elemento. Si ha quindi una foresta di insiemi disgiunti dove ogni elemento ha puntatore solo al padre e dove le radici contengono il rappresentante (e un puntatore a se stesse). L'operazione *Make-Set*(x) si ottiene creando un albero con un solo nodo (che è radice e quindi rappresentante). L'operazione *Find-Set*(x) si esegue controllando i puntatori al padre fino alle radici (chiamando questi cammini *cammini di accesso*). Per la (*union*(x, y)) si ha che la radice di uno dei due insiemi punta alla radice dell'altro. Allo stato attuale non si hanno miglioramenti di tempo rispetto alle liste concatenate. Si introduce quindi un'euristica, detta **unione per rango**, per la quale l'albero più basso punta alla radice di quello più alto. Per ogni nodo si memorizza un *rango*, ovvero un limite superiore dell'altezza del nodo. Con

l'unione per rango quindi si fa quindi puntare la radice col rango più piccolo viene fatta puntare a quella col rango più grande.

Si ha anche un'altra euristica, detta **compressione dei cammini**, usata durante la *Find-Set* per far sì che ogni nodo sul cammino di accesso punti direttamente alla radice.

Capitolo 8

Minimum Spanning Tree

Definizione 6. *Un albero di copertura o albero di connessione o albero di supporto di un grafo, connesso e con archi non orientati, è un albero che contiene tutti i vertici del grafo e contiene soltanto un sottoinsieme degli archi, cioè solo quelli necessari per connettere tra loro tutti i vertici con uno e un solo cammino. Infatti ciò che differenzia un grafo da un albero è che in quest'ultimo non sono presenti cammini multipli tra due nodi.*

Minimum Spanning Tree è un problema di copertura di grafi non orientati dove ad ogni arco viene associato un peso. Un minimum spanning tree è un cammino senza cicli che colleghi tutti i nodi (connesso) con peso totale minimo.

Si assuma quindi di avere un grafo non orientato e connesso $G = (V, E)$ con una funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si ha innanzitutto un algoritmo greedy generico che gestisce un insieme A che è sempre sottoinsieme di un qualche albero di copertura minimo. Ad ogni passo si determina un arco $e(u, v)$ che si aggiunge ad A in modo che $A \cup \{e(u, v)\}$ sia ancora un sottoinsieme di copertura minimo. In tal caso $e(u, v)$ è detto *arco sicuro*.

Si ha quindi l'algoritmo generico:

```
function Generic_MST( $G, w$ )  
   $A \leftarrow \emptyset$   
  while  $A$  non forma un albero di copertura minima do  
    seleziona un arco  $a \in E$  sicuro per  $A$   
     $A \leftarrow A \cup \{a\}$   
  return  $A$ 
```

Prima di procedere sono necessarie alcune definizioni:

- un **taglio** $(S, V - S)$ in un grafo non orientato $G = (V, E)$ è una partizione di V . Un arco $e(u, v) \in E$ attraversa il taglio $(S, V - S)$ se uno dei suoi estremi è in S e l'altro in $V - S$. Si dice che un taglio **rispetta** un insieme A di archi sse nessun arco di A attraversa il taglio
- un arco che attraversa un taglio è detto **arco leggero** sse il suo peso è minimo tra quelli che attraversano il taglio (potrebbero esserci più archi leggeri di egual peso)

Si ha quindi il seguente teorema:

Teorema 10. *Si assuma quindi di avere un grafo non orientato e connesso $G = (V, E)$ con una funzione peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $A \subseteq E$ contenuto in qualche albero di copertura minimo per G . Sia $(S, V - S)$ un qualunque taglio che rispetta A e sia $e(u, v)$ un arco leggero che attraversa $(S, V - S)$. Si ha quindi che $e(u, v)$ è un **arco sicuro** per A*

inoltre si ha il seguente corollario:

Corollario 5. *Sia T un albero nella foresta $G_A = (V, A)$. Se $e(u, v)$ è un arco leggero che connette T ad un altro albero di G_A allora $e(u, v)$ è sicuro per A*

8.1 Algoritmo di Kruskal

Con questo algoritmo si individua un arco sicuro da aggiungere alla foresta scegliendo un arco $e(u, v)$ di peso minimo tra tutti gli archi che connettono due distinti alberi della foresta, che chiamo T_1 e T_2 . Essendo $e(u, v)$ un arco leggero che connette T_1 ad un altro albero si ha che esso è un arco sicuro (per il corollario sopra). L'algoritmo di Kruskal è quindi un algoritmo greedy che ad ogni passo aggiunge alla foresta l'arco col minor peso possibile. Nell'implementazione si usa una struttura dati per insiemi disgiunti di modo che gli elementi restino appunto disgiunti e si ha in input $G = (V, E)$:

```

function MSTKruskal( $G, w$ )
     $A \leftarrow \emptyset$ 
    for every  $v \in V$  do
        Make-Set( $v$ )
    # ordino  $E$  in ordine non decrescente secondo  $w$ 
    mergesort( $E, w$ )
    for every  $e(u, v) \in E$  do
        if Find-Set( $u$ )  $\neq$  Find-Set( $v$ ) then
             $A \leftarrow A \cup \{e(u, v)\}$ 
            Union( $u, v$ )
    return  $A$ 

```

Avendo un grafo connesso si ha che $|E| \geq |V| - 1$. L'inizializzazione richiede $O(|V|)$, l'ordinamento $O(|E| \log |E|)$ quindi il tempo totale è $O(|E| \log |E|)$. D'altro canto $|E| < |V|^2$ quindi $\log(|E|) = O(\log |V|)$ quindi si ha che il tempo dell'algoritmo è scrivibile come $O(|E| \log |V|)$

8.2 Algoritmo di Prim

Questo algoritmo opera in modo simile all'algoritmo di Dijkstra. Si ha la priorità che gli archi nell'insieme A formano sempre un albero singolo. Questo albero inizia da un vertice radice, detto r , scelto in maniera arbitraria, e si sviluppa fino a coprire tutti i vertici in V . Ad ogni passo si aggiunge un arco leggero all'albero A che collega A con un vertice isolato (ovvero un vertice che non sia estremo di qualche arco in A). Aggiungo quindi solo sicuri per A , in modo che al termine si ottiene un albero di connessione minimo. Si ha quindi un algoritmo *greedy*, infatti l'albero cresce includendo ad ogni passo un arco che contribuisce con la quantità più piccola possibile a formare

il peso dell'albero.

Si cerca quindi un modo veloce per trovare l'arco da aggiungere ad $|A|$. L'algoritmo prende in input un grafo connesso G e la radice r dell'albero di connessione che si vuole costruire. Tutti i vertici che non si trovano in A risiedono in una queue di minima priorità Q con un campo *key*, con $key[v]$, $\forall v \in V$, che rappresenta il peso minimo di un arco qualsiasi arco che collega v ad un vertice nell'albero (per definizione se tale arco non esiste si ha che $key[v] = \infty$). Con $p[v]$ si definisce il predecessore di v come il padre di v nell'albero. Nella pratica quindi, durante l'algoritmo si ha che:

$$A = \{(v, p[v]) : v \in V - \{r\} - Q\}$$

mentre alla fine sarà:

$$A = \{(v, p[v]) : v \in V - \{r\}\}$$

In pratica parto da un nodo e lo inserisco in A . Inserisco poi in A il nodo adiacente collegato con l'arco di peso minimo, aggiornando comunque tutte le *key* dei nodi adiacenti. Continuo poi aggiornando le keys dei nodi adiacenti al nodo raggiunto con l'arco minimo all'iterazione precedente e muovendomi verso il nodo presente in Q raggiungibile con chiave minima (indipendentemente dal nodo posto in A che si vuole considerare). Ogni nodo raggiunto viene inserito in A e tolto dalla coda di minima priorità. Ci si ferma ad esaurimento di Q . Vediamo l'algoritmo:

```

function Prim( $G, w, r$ )
  for every  $u \in V$  do
     $key[u] \leftarrow \infty$ 
     $p[u] \leftarrow NIL$ 
   $p[r] \leftarrow 0$ 
   $Q \leftarrow V$ 
  while  $Q \neq \emptyset$  do
     $u \leftarrow ExtractMin(Q)$ 
    for every  $v \in Adj[u]$  do
      if  $v \in Q$  AND  $w(u, v) < key[v]$  then
         $key[v] \leftarrow w(u, v)$ 
         $p[v] \leftarrow u$ 

```

Dove con l'*ExtractMin* si identifica un vertice su un arco leggero che attraversa un taglio $(V - Q, Q)$.

Se la coda viene implementata con un min-heap si ha tempo apri a $O(|E| \log |V|)$ mentre se implementata con heap di Fibonacci si ha $O(|E| + |V| \log |V|)$

Capitolo 9

Problemi di Flusso Massimo

Non trattata a lezione

Partiamo con la seguente definizione:

Definizione 7. Una **rete di flusso** è un grafo orientato in cui ogni arco ha una capacità non negativa ed è attraversato da un flusso, ovvero un numero compreso fra 0 e la capacità dell'arco

Il **problema di flusso massimo** chiede semplicemente quale sia la velocità massima con cui si può passare dalla sorgente al pozzo senza violare vincoli di capacità.

Diamo prima una definizione formale di **rete di flusso**:

Definizione 8. Una rete di flusso è un grafo $G = (V, E)$ orientato in cui ogni arco $e(u, v) \in E$ ha una capacità non negativa $c(u, v) \geq 0$. Se $e(u, v) \notin E$ allora $c(u, v) = 0$. Si definiscono un vertice sorgente s e uno pozzo t e che ogni vertice giace in un cammino tra s e t . Si ha quindi un grafo connesso con $|E| \geq |V| - 1$

Diamo quindi una definizione formale di **flusso**:

Definizione 9. Un flusso in G è una funzione $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\forall u, v \in V \implies f(u, v) \leq c(u, v)$, è il **vincolo di capacità**
- $\forall u, v \in V \implies f(u, v) = -f(v, u)$, è la proprietà di **antisimmetria**
- $\forall u \in V \setminus \{s, t\} \implies \sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u)$, questa è la **conservazione del flusso**

Con $f(u, v)$ indichiamo il flusso da u a v e il valore di un flusso f è definito come:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

sapendo che il flusso entrante nella sorgente è nullo nella maggior parte dei casi, ovvero:

$$\sum_{v \in V} f(v, s) = 0$$

9.1 Metodo di Ford-Fulkerson

Si parla di metodo in quanto è la base per avere diverse implementazioni con tempi differenti. Questo metodo si basa su 3 importanti idee:

- **reti residue**, ovvero la rete residua G_f è composta da archi con capacità che rappresentano come si può modificare il flusso negli archi di G . Un arco della rete di flusso può accettare una quantità di flusso aggiuntivo pari alla capacità dell'arco meno il flusso su tale arco. Se tale valore è positivo inserisco l'arco in G_f con una capacità residua pari a:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

In G_f si trovano quindi solo archi di G che accettano più flussi e in ogni caso non archi con capacità pari al loro flusso. Inoltre in G_f si possono avere archi che non si trovano in G . Si possono avere archi con flusso opposto fino a *pareggiare* il flusso di un certo arco. Formalmente quindi si ha che la capacità residua è definita come:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{se } (u, v) \in E \\ f(u, v) & \text{se } (v, u) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la **rete residua** di G indotta da f come $G_f = (V, E_f)$ con l'insieme degli **archi residui**:

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$$

Si ha che $|E_f| \leq 2 \cdot |E|$

- **cammini aumentanti**. Si ha che un cammino aumentante è un cammino semplice da s a t nella rete residua G_f . Quindi si può aumentare il flusso di un arco $e(u, v)$ in un cammino aumentante fino a $c_f(u, v)$ senza violare il vincolo di capacità $\forall e(u, v) \in G$

- **tagli delle reti di flusso**, che sono partizioni di $V \in S$ e $T = V - S$ tali che $s \in S$ e $t \in T$. Si ha che un **flusso netto per un taglio (S, T)** è definito come:

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

e si definisce la **capacità del taglio** come:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

e un **taglio minimo** di una rete è un taglio la cui capacità è minima rispetto a tutti i tagli della rete

Il metodo di Ford-Fulkerson consiste quindi in:

```

function Ford-Fulkerson-Method( $G, s, t$ )
  inizializza il flusso a 0
  while esiste un cammino aumentante  $p$  nella rete residua do
    aumenta il flusso  $f$  lungo  $p$ 
  Return  $f$ 

```

Vediamo quindi l'implementazione base del metodo:

```

function Ford-Fulkerson( $G, s, t$ )
  for every  $(u, v) \in E$  do
     $f[u, v] \leftarrow 0$ 
     $f[v, u] \leftarrow 0$ 
  while esiste un cammino aumentante  $p$  nella rete residua do
     $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v \in p)\}$ 
    for every  $(u, v) \in p$  do
       $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$ 
       $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$ 

```

Capitolo 10

NP-Completezza

10.1 Classificazione dei Problemi

Si ha una serie di problemi detti **NP-Completi**, il cui stato non è noto: sebbene non sia ancora stato scoperto un algoritmo di risoluzione in tempo polinomiale, nessuno ha finora dimostrato che non possa esistere. Questa è la cosiddetta questione $P \neq NP$. Nel dettaglio si hanno 3 classi:

1. **classe P**: ovvero la classe dei problemi risolvibili in tempo polinomiale, che quindi ossono essere risolti nel tempo $O(n^k)$ per qualche costante k , dove n è la dimensione dell'input
2. **classe NP**: ovvero la classe dei problemi verificabili in tempo polinomiale, ossia è possibile verificare la correttezza di una soluzione per quel problema in tempo polinomiale nella dimensione dell'input del problema. Un problema di classe P è contenuto nella classe NP (infatti possiamo risolverlo anche senza certificarlo in tempo polinomiale) ma ancora non si è dimostrato che $P \subseteq NP$
3. **classe NPC**: ovvero la classe dei problemi NP-Complete. Sono problemi che appartengono alla classe NP ed è “difficile” da risolvere come un qualsiasi problema NP. La proprietà che caratterizza i problemi NPC è che se un qualsiasi problema NPC può essere risolto in tempo polinomiale, allora tutti i problemi in NP hanno un algoritmo di risoluzione in tempo polinomiale.

10.1.1 Identificazione di Problemi NP-Completi

Le tecniche per identificare i problemi NPC sono particolari in quanto si basano innanzitutto sul quantificare quanto difficile sia un determinato pro-

blema, cercando di dimostrare che è poco probabile che esista un algoritmo efficiente per un dato problema.

Nello studio della NP-Completezza si hanno alcuni concetti fondamentali:

- tra i problemi più interessanti si hanno i **problemi di ottimizzazione** dove viene ricercata una soluzione ottima. Tuttavia lo studio della NP-Completezza di basa su **problemi di decisione**, dove al più si hanno due esiti: 0 o 1. Si cerca quindi di dimostrare che è un problema è NPC solamente in questo range di problemi, nonostante problemi di decisione e di ottimizzazione siano fortemente legati dal fatto che si può trattare un problema di ottimizzazione come uno di decisione semplicemente imponendo dei vincoli ai valori fs ottimizzare. Quindi se si può dimostrare che un problema di decisione (più semplice da analizzare) è difficile si può asserire che lo sia anche il problema di ottimizzazione correlato, paragonando quindi un problema di decisione ad uno di ottimizzazione
- si possono anche confrontare due problemi di decisione tra di loro, cercando di dimostrare che un problema non è più o meno difficile di un altro. Si consideri infatti un problema A di decisione da risolvere in tempo polinomiale con una certa istanza (ovvero l'input) α . Supponiamo ci sia un altro problema B , con istanza β , che sappiamo risolvere in tempo polinomiale. Si supponga di avere quindi una funzione che trasforma un'istanza α di A in una β di B tale che la trasformazione avvenga in tempo polinomiale. Ovviamente le soluzioni devono essere le medesime dopo la trasformazione. Tale procedura è detta **algoritmo di riduzione con tempo polinomiale** e consiste in:

1. data un'istanza α di A trasformarla in tempo polinomiale in un'istanza β di B
2. eseguire l'algoritmo di decisione, in tempo polinomiale, per B su β
3. utilizzare la soluzione di β come soluzione per α

Ovviamente si dimostra che se A non può essere risolto in tempo polinomiale non può esistere nessun algoritmo B che possa essere risolto in tempo lineare a cui "ridursi". D'altro canto provando che B è NPC solo in base al fatto che lo sia A non possiamo avere la certezza che non esista una soluzione in tempo polinomiale per A .

10.1.2 Classificazione dei Tempi

Si danno semplicemente alcune definizioni formali:

Definizione 10. Definiamo formalmente la classe P come la classe dei linguaggi L accettati da una macchina di Turing M in tempo $P(n)$, ossia il numero di operazioni $T_M(n) = O(P(n))$, con $P(n)$ polinomio in n . In poche parole la classe dei problemi risolvibili in tempo lineare dalla macchina ad accesso casuale è la stessa di quelli risolvibili in tempo polinomiale nelle macchine astratte di Turing.

Definizione 11. Definiamo formalmente la classe P come l'insieme dei linguaggi L accettati da una macchina non deterministica di Turing M in tempo $P(n)$, ossia il numero di operazioni $T_M(n) = O(P(n))$, con $P(n)$ polinomio in n .

Una prima osservazione da quanto detto è $P \subseteq NP$, dato che ogni macchina di Turing deterministica è una macchina di Turing non deterministica che può eseguire una sola operazione alla volta. Intuitivamente, questo accade perché una macchina di Turing non deterministica che opera in tempo polinomiale ha la capacità di verificare un numero esponenziale di soluzioni possibili, ciascuna in tempo polinomiale, operando in parallelo.

Definizione 12. Sia L un linguaggio. Diciamo che L è NPC se i seguenti enunciati sono veri:

- L è in NP
- per ogni linguaggio L' in NP esiste una riduzione in tempo polinomiale di L' a L