

Fisica

UniShare

Davide Cozzi  
@dlcgold

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Meccanica</b>	<b>3</b>
2.1	Cinematica . . . . .	4
2.1.1	Moto Rettilineo . . . . .	5
2.1.2	Moto Verticale . . . . .	8
2.1.3	Moto Armonico . . . . .	12
2.1.4	Moto nel Piano . . . . .	14
2.1.5	Moto Circolare . . . . .	20
2.2	Dinamica . . . . .	24

# Capitolo 1

## Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione effettuare una pull request. Link: <https://github.com/dlcgold/Appunti>.

Grazie mille e buono studio!

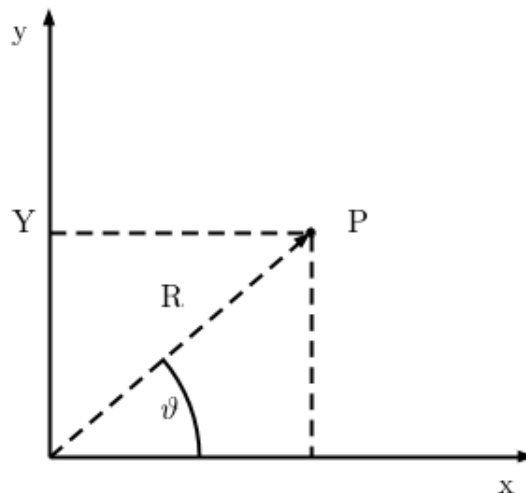
# Capitolo 2

## Meccanica

Si comincia con la Meccanica, la branca della fisica classica che studia il moto dei corpi, esprimendolo con leggi quantitative. Si ha la seguente divisione:

- **Cinematica**, dove si studia il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause
- **Dinamica**, dove si studia l'influenza delle forze nel moto

Si utilizzano i cosiddetti *punti materiali* per semplificare lo studio dei fenomeni. Un punto materiale infatti non ha estensione ma è dotato di una massa. In pratica ha dimensioni trascurabili rispetto allo spazio nel quale si muove. Un altro strumento essenziale per lo studio dei fenomeni è il *sistema di riferimento* mediante gli assi ortogonali:



e si hanno le seguenti formule:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\sin\vartheta = \frac{Y}{R}$$

$$\cos\vartheta = \frac{X}{R}$$

$$\tan\vartheta = \frac{Y}{X}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{Y}{X}$$

e per gli angoli si usano i *radianti* in quanto adimensionali. L'angolo in radianti infatti è:

$$\vartheta_{rad} = \frac{Lunghezza\_arco}{raggio}$$

dove le due unità di misura esprimenti una lunghezza vengono "semplificate".

## 2.1 Cinematica

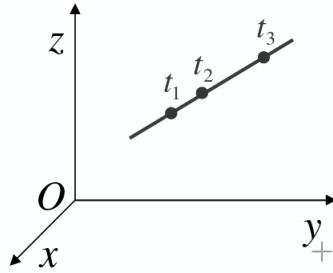
Innanzitutto qualche definizione:

- **Moto:** posizione in funzione del tempo in un dato sistema di riferimento
- **Traiettoria:** luogo dei punti attraversati dal punto materiale in movimento
- **Velocità:** variazione della posizione
- **Accelerazione:** variazione della velocità
- **Quiete:** assenza di movimento in un certo sistema di riferimento

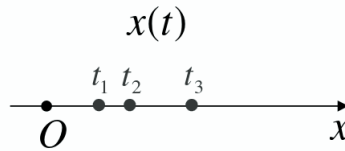
Come grandezze fondamentali del movimento si hanno quindi *posizione*, *velocità* e *accelerazione*, tutte e tre funzioni del tempo.

### 2.1.1 Moto Rettilineo

Si ha la traiettoria più semplice, una retta. Il moto del punto quindi è esprimibile come funzione solo di  $x(t)$ , che sarà la nostra equazione del moto. Si passa quindi da un sistema di riferimento a 3 assi:



ad uno a un asse:



La scelta dell'origine della coordinata spaziale ( $x = 0$ ) e di quella temporale ( $t = 0$ ) sono arbitrari.

#### Velocità

Per ottenere la velocità di un punto materiale ne misuro la posizione in due diversi istanti di tempo. Si ha:

- **Spostamento:**  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$
- **Intervallo di Tempo:**  $\Delta t = t_2 - t_1$

Possiamo quindi definire la **Velocità Media**:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Questa grandezza però non fornisce nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto. Provo a spezzare il moto in più intervalli temporali al fine di studiarne ogni variazione. Si ottiene quindi la **Velocità Istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

La velocità istantanea rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante  $t$  considerata. Il segno della velocità indica la direzione del moto sull'asse delle ascisse. La velocità è a sua volta funzione del tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Se  $v$  è costante si parla di *Moto Rettilineo Uniforme*. Nota quindi l'equazione del moto  $x(t)$  possiamo ricavare  $v(t)$  derivando.

Si può procedere anche al calcolo di  $x(t)$  avendo nota  $v(t)$ . Sappiamo che lo spostamento totale è:  $\Delta x = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n v_{m_i} \Delta t$  e che, per intervalli infinitesimi  $dx = v(t)dt$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \Delta c &= \underbrace{\int_{x_0}^x dx}_{x(t)-x_0} = \int_{t_0}^t v(t)dt \\ &\downarrow \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt \end{aligned}$$

che è l'equazione del moto rettilineo per una velocità qualunque.

Possiamo ora anche riscrivere la forma completa della velocità media, essendo  $x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t)dt$  si ha:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t)dt$$

Possiamo analizzare ora il *moto rettilineo uniforme* con  $v$  costante. Essendo  $v$  costante, e non più dipendente dal tempo, può essere portata fuori dall'integrale:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0)$$

che è l'equazione generale del moto rettilineo uniforme dove lo spostamento varia linearmente col tempo.

La velocità si esprime in metri al secondo ( $\frac{m}{s}$  o  $m/s$ ) o in chilometri all'ora ( $\frac{km}{h}$  o  $km/h$ ). Per passare da  $km/h$  a  $m/s$  divido la grandezza in  $km/h$  per 3,6, per passare da  $m/s$  a  $km/h$  moltiplico la grandezza in  $m/s$  per 3,6

**Accelerazione**

Si ha che in due istanti di tempo diversi abbiamo due diverse velocità:  $v(t_1) = v_1$  e  $v(t_2) = v_2$ . Si definisce l'**Accelerazione Media**:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ora, come per la velocità, analizziamo intervalli di tempo infinitesimi ricordando che anche l'accelerazione è una funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo e si ha che:

- $a = 0$  implica un moto rettilineo uniforme (si deriva una costante,  $v$ , e si ottiene 0)
- $a > 0$  implica una velocità crescente
- $a < 0$  implica una velocità decrescente

Proviamo ora a risalire a  $v(t)$  conoscendo  $a(t)$ . Sappiamo che  $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a(t)dt$ . Risolviamo quindi l'equazione differenziale :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt \rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

che è l'equazione generale per la velocità, dove, nel caso di  $a \neq 0$ , ovvero di accelerazione costante, si ha:

$$v(t) = v_0 + a \int_{t_0}^t dt = v_0 + a(t - t_0)$$

dove si nota come la velocità sia una funzione lineare del tempo se  $t_0 = 0$ , ottenendo  $v(t) = v_0 + at$ .

Cerchiamo ora l'equazione del moto in caso di *moto rettilineo uniformemente accelerato*:

si ha che:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)]dt$$

↓

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0)dt$$



porto fuori le due costanti,  $v_0$  e  $a$

↓

$$x(t) = x_0 + v_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

↓

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

dove, se si ha  $t_0 = 0$ , si ottiene:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}at^2$$

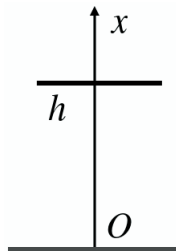
Si nota come sia il termine  $at$  nel caso di  $v(t)$  che il termine  $\frac{1}{2}at^2$  nel caso di  $a(t)$  non dipendono dalle condizioni iniziali.

L'accelerazione si esprime in metri al secondo quadrato ( $\frac{m}{s^2}$ ,  $m/s^2$  o  $ms^{-2}$ )

### 2.1.2 Moto Verticale

Sperimentale si scopre come un qualunque corpo lasciato libero di cadere nei pressi della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante  $g \simeq 9.81 ms^{-2}$  (si trascurano attrito dell'aria e si trattano piccole altitudini). Il valore di  $g$  non è costante in ogni parte del mondo ma può variare fino a circa il 0.6%.

Impostiamo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  crescente verso l'alto e quindi con  $a = -g = -9.81 ms^{-2}$ . Si avrà un corpo in caduta libera da un'altezza  $h$ :



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $v_0 = 0$

Con queste premesse otteniamo:

- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↓

$$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + a t$$

↓

$$v(t) = -g t$$

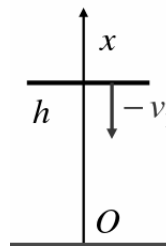
Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo  $x = 0$  nell'equazione del moto:

$$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = v(t_c) = -g t_c = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Imponiamo ora una velocità iniziale  $-v_1$ , quindi verso il basso:



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = h$
- $v_0 = -v_1$

- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = -v_1 - g t$$

Posso quindi ottenere il tempo di caduta, ponendo  $x = 0$  nell'equazione del moto:

$$h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2} g t^2 + v_1 t - h = 0$$

$$\downarrow$$

$$t_c = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$$

ma  $t < 0$  non è una soluzione fisica, quindi tengo solo la soluzione col +

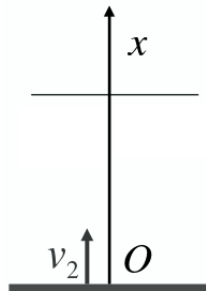
$$t_c = -\frac{v_1}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

e posso ottenere la velocità al suolo:

$$v_c = -v_1 - g t_c = -v_1 - g \left[ -\frac{v_1}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{v_1^2 + 2gh} \right] = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

Con una velocità iniziale verso il basso avremo un tempo di caduta inferiore e una velocità al suolo maggiore rispetto alla partenza da fermo.

Analizziamo ora il moto verticale di un punto materiale lanciato dal basso verso l'alto con velocità  $v_2$ :



Si hanno le seguenti condizioni iniziali:

- $t = t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $v_0 = v_2$
- **Equazione del moto:**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

↓

$$x(t) = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- **Equazione della velocità:**

$$v(t) = v_0 + a t$$

↓

$$v(t) = v_2 - g t$$

Inizialmente si ha  $v > 0$ , finché il punto sale verso l'alto, fino a fermarsi. Con  $v = 0$  si ha l'altezza massima. Si ha quindi:

$$v = v_2 - g t = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{v_2}{g}$$

e quindi:

$$x_{max} = x(t_{max}) = v_2 \frac{v_2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_2^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g}$$

raddoppiando la velocità iniziale avrò quindi un'altezza 4 volte superiore. Da questp momento in poi di avrà la caduta libera da  $h = x - max$  con  $v_0 = 0$ :

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \left( \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g} \right)} = \frac{v_2}{g}$$

e quindi si avrà:

$$t_{tot} = t_{max} + t_c = \frac{2v_2}{g}$$

### 2.1.3 Moto Armonico

Si ha la seguente equazione del moto per un *moto armonico semplice* lungo un asse rettilineo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

con:

- $A$  ampiezza, espressa in  $m$  e costante
- $\omega$  pulsazione, espressa in  $s^{-1}$  e costante
- $\varphi$  fase iniziale
- $\omega t + \varphi$  è detta fase

Si ha inoltre:

- $\sin(\omega t + \varphi)$  che è la traiettoria e si ha che  $-1 \leq \sin(\omega t + \varphi) \leq 1$
- $x_0 = x(0) = A \sin \varphi$  è la posizione iniziale generica

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  è una funzione periodica con periodo  $T = 2\pi$  (la posizione si ripete dopo ogni periodo  $T$ ). Consideriamo  $T = t_2 - t_1 = 2\pi$ . Si ha quindi che:

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_1) \\ \downarrow \\ A \sin(\omega t_2 + \varphi) &= A \sin(\omega t_1 + \varphi) \\ \downarrow \\ (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) &= 2\pi \\ \downarrow \\ \omega(t_2 - t_1) &= 2\pi \\ \downarrow \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Si ha quindi che:

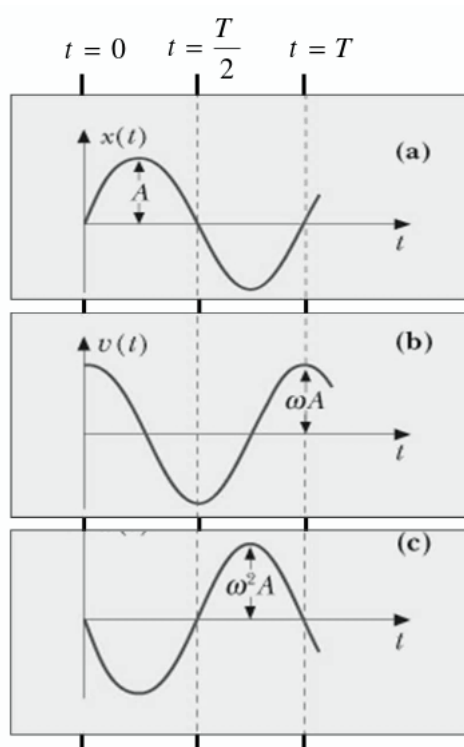
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , la pulsazione è inversamente proporzionale al periodo
- **Frequenza:**  $\nu = \frac{1}{T}$  quindi  $\omega = 2\pi \nu$

Pulsazione e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza.

Posso ora trovare velocità ed accelerazione dall'equazione del moto  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ :

- **velocità:**  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$
- **accelerazione:**  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

Ampiezza di  $v(t)$  e  $a(t)$  dipendono dalla pulsazione. Le tre curve  $x(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  hanno lo stesso andamento ma sono sfasate tra loro. Ricordando che  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$  e che  $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$  notiamo che  $v(t)$  è sfasata di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto a  $x(t)$  (*quadratura di fase*) e che  $a(t)$  è sfasata di  $\pi$  rispetto a  $x(t)$  (*opposizione di fase*)



### 2.1.4 Moto nel Piano

Si passa ora al moto in 2 dimensioni quindi con una traiettoria curva (e non più una retta).

Si introducono le coordinate cartesiane  $(x(t)$  e  $y(t))$  e quelle polari  $(r(t)$  e  $\vartheta(t))$ . Si hanno le seguenti formule per il passaggio da coordinate cartesiane a polari:

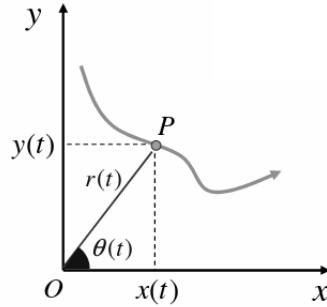
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \vartheta = \frac{y}{x}$$

e le seguenti per il passaggio da coordinate polari a cartesiane:

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta$$

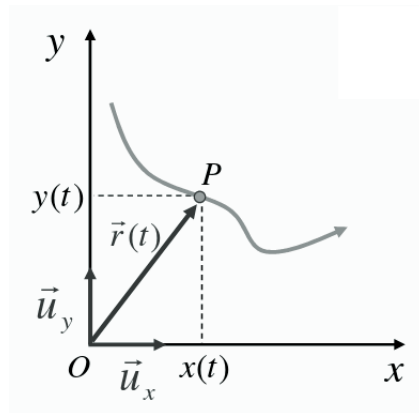


Il moto di  $P$  è descritto attraverso l'evoluzione del vettore posizione:

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$$

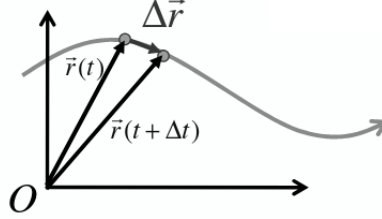
Si introducono inoltre i versori degli assi  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ , ricordando che  $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_y| = 1$  e che i versori restano fissi nel tempo. Si ottiene quindi:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$



Suppongo ora la traiettoria fissata e nota a priori. Fissata un'origine  $O$ , una posizione  $s(t)$  e la velocità  $v = \frac{ds}{dt}$  si ha che il moto è completamente determinato. Si ha una generalizzazione del moto rettilineo su una traiettoria curva.

Prendiamo ora in considerazione il seguente caso:



si ha il vettore spostamento:

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

e il vettore velocità media:

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

e il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

al limite  $\Delta t \rightarrow 0$  lo spostamento infinitesimo si dispone sulla tangente alla traiettoria nel punto  $P$ :

$$d\vec{r} = ds \vec{u}_T$$

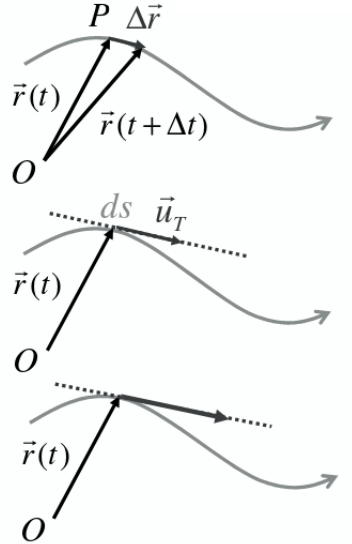
con  $|\vec{u}_T| = 1$  versore della tangente che indica una direzione variabile nel tempo. Per il vettore velocità avremo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T$$

con  $v$  indicate il modulo della velocità e  $\vec{u}_T$  la direzione.



Quanto appena descritto è visualizzabile nelle seguenti immagini:



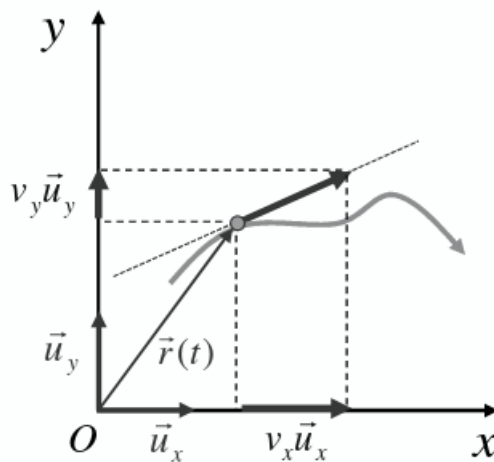
Analizziamo ora meglio la velocità nelle componenti cartesiane. Essendo  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  e  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$  si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

con il modulo della velocità:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



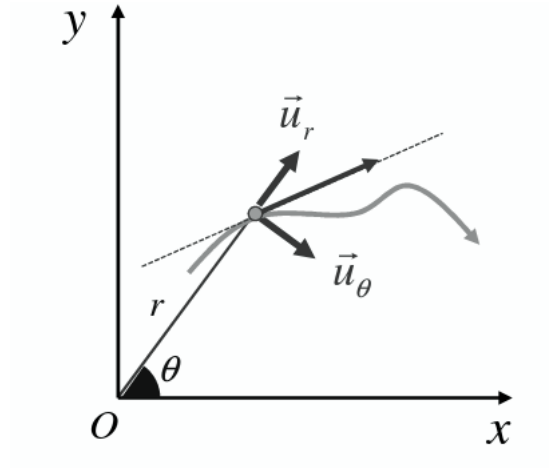
Passiamo alle componenti polari. Essendo  $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  e  $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$  (col vettore  $\vec{u}_r$  mostrato in figura) si ottiene:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta$$

in quanto solitamente la derivata di un vettore è:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{u}(t+dt) - \vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_\perp$$

Ecco un'immagine di quanto detto:



Possiamo approfondire ancora lo studio della velocità in componenti polari infatti:

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v}_r} + r \underbrace{\frac{d\vartheta}{dr}\vec{u}_\vartheta}_{\vec{v}_\vartheta}$$

con:

- $\vec{v}_r$  è la **velocità radiale** e  $|\vec{v}_r| = \frac{dr}{dt}$  è la variazione di  $r$
- $\vec{v}_\vartheta$  è la **velocità trasversa** e  $|\vec{v}_\vartheta| = r\frac{d\vartheta}{dt}$  è la variazione della direzione

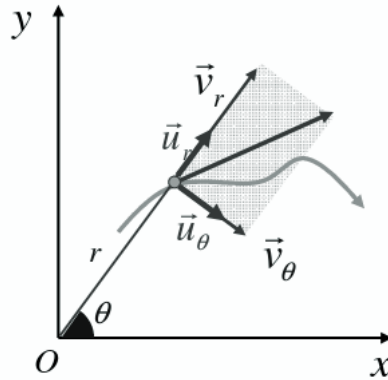
quindi:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta$$

e quindi:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}$$

Ecco un'immagine che spiega quanto detto:



Passiamo ora all'accelerazione nel piano. Essa è, come sappiamo, la variazione della velocità  $\vec{v} = v\vec{u}_T$  ma, se nel moto rettilineo è solo la variazione del modulo, nel moto del piano si ha anche la variazione della direzione. Iniziamo sapendo che  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Quindi:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

ricordando la derivata di un versore si ottiene:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$$

con:

- $\vec{u}_N$  versore perpendicolare al versore tangente
- $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$  variazione del modulo velocità, detta  $\vec{a}_T$  **accelerazione tangenziale**
- $v\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_N$  variazione della direzione, detta  $\vec{a}_N$  **accelerazione normale o centripeta**

quindi:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

procedendo con l'analisi della traiettoria si nota come essa possa essere approssimata da una circonferenza con un certo raggio  $R$  che può essere usato come raggio di curvatura. Si ha quindi  $ds = R d\phi$  e quindi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

Posso quindi sostituire  $\frac{d\phi}{dt}$  nella formula precedentemente trovata dell'accelerazione ottenendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

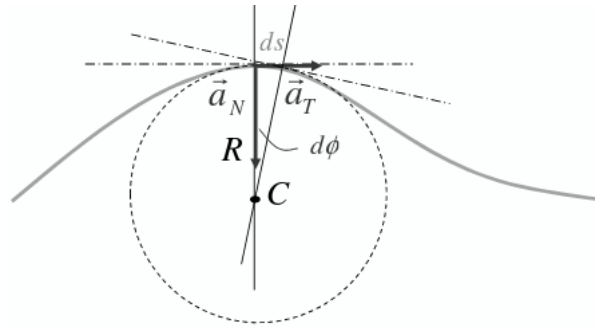
quindi  $\vec{a}_N$  può anche essere indicata con  $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$ . Da questi ultimi due risultati si intuiscono due cose:

1. se  $r \rightarrow \infty$  si ha  $\vec{a}_N = 0$  e quindi un moto rettilineo
2. se  $\frac{dv}{dt} = 0$  si ha  $\vec{a}_T = 0$  e quindi un moto curvilineo uniforme con solo il cambiamento della direzione

Si ha infine il modulo dell'accelerazione:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

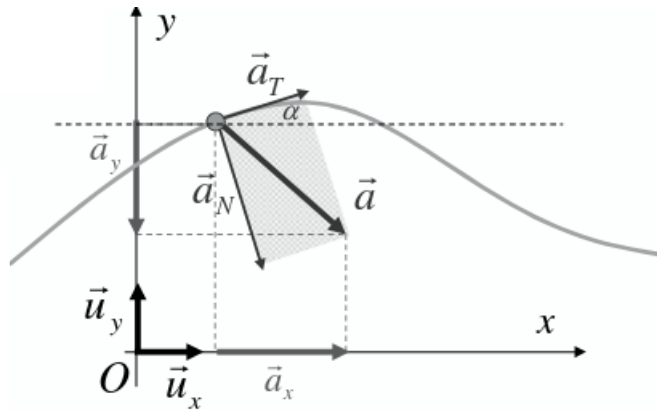
Ecco un'immagine di quanto detto:



Proiettiamo ora l'accelerazione sugli assi del sistema cartesiano:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$$

analizziamo anche quanto succede sul piano:



Possiamo ora scrivere le componenti cartesiane in funzione di quella tangenziale e di quella centripeta:

- per l'ascisse:

$$a_x = (a_T)_x + (a_N)_x = a_t \cos \alpha + a_n \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{R} \sin \alpha$$

- per l'ordinata:

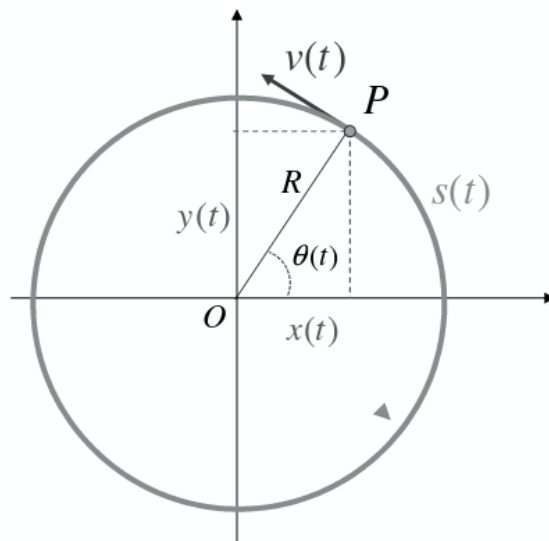
$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin \alpha - \frac{v^2}{R} \cos \alpha$$

### 2.1.5 Moto Circolare

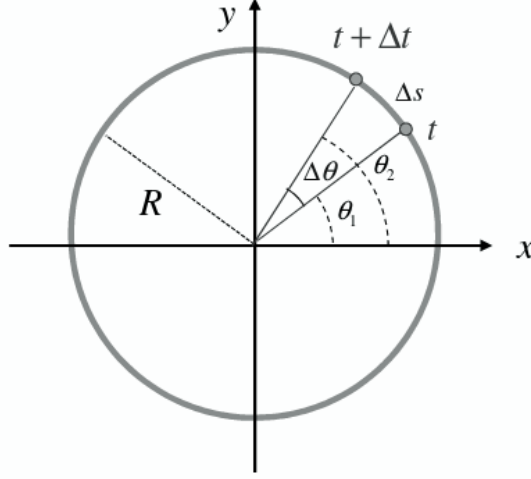
Si tratta di un caso particolare di moto curvilineo nel piano. In generale si ha il modulo della velocità non uniforme. Si hanno quindi:

- *coordinate polari*:
  - angolo  $\theta(t)$
  - raggio  $r(t) = R = \text{costante}$
- *coordinate curvilinee*:
  - posizione misurata lungo la traiettoria  $s(t) = R\theta(t)$
- *coordinate cartesiane*:
  - $x(t) = R \cos \theta(t)$
  - $y(t) = R \sin \theta(t)$

ovvero:



Iniziamo ad analizzare il moto circolare. Considero il punto  $P$  in due istanti  $t$  e  $t + \Delta t$ . Quindi avrò  $\theta(t) = \theta_1$  e  $\theta(t + \Delta t) = \theta_2$ . Nel complesso si ha  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ :



Si definisce innanzitutto la velocità angolare media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

mentre per la velocità angolare istantanea si ha:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Si indica ora la velocità angolare in funzione di  $v$  e  $R$ , ricordando che  $ds = R d\theta$ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

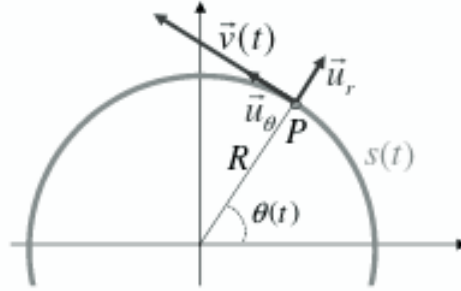
quindi la velocità angolare è proporzionale al modulo della velocità ed inversamente proporzionale al raggio. Inoltre  $v = \omega R$ . Partiamo da qui per approfondire la velocità nel moto circolare. Sappiamo che in generale nel moto curvilineo si ha:  $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ . Si ha che  $\frac{dr}{dt} = 0$  quindi:

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta$$

in quanto  $R$  è costante e quindi si ha come modulo della velocità:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \omega(t)R$$

graficamente si ha:



Si ha inoltre che se si parla di moto circolare uniforme si ha che  $v = \omega R$  è costante in quanto  $\omega$  è costante.

Passiamo all'accelerazione nel moto circolare uniforme. Si ha solo l'accelerazione centripeta in quanto  $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{U}_N$$

con  $v^2$  costante e si ha il modulo dell'accelerazione pari a:

$$a = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = \omega v$$

Quindi per il moto lungo la traiettoria si ha:

- $s(t) = s_0 + vt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

e nel moto circolare uniforme si può notare un moto periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

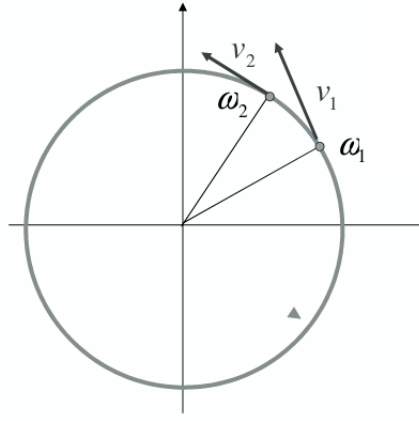
vediamo ora l'accelerazione in caso di moto non uniforme, quindi con  $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$  e con  $v(t) = \omega(t)R$ . Definisco un'accelerazione angolare media:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

e l'accelerazione angolare istantanea, si ricorda che  $\omega = \frac{v}{r}$ :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{R} a_T$$

visivamente:



Possiamo quindi riscrivere accelerazione normale e tangenziale in funzione di quantità angolari:

- $a_N = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{v=\omega R} a_N = \omega^2 R$
- $a_T = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=\omega R} a_T = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$

quindi:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + \omega^2 R \vec{u}_N = R(\alpha \vec{u}_T + \omega^2 \vec{u}_N)$$

quindi infine:

- $\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha dt = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^t dt = \omega_0 + \alpha t$  in quanto  $t_0 = 0$
- $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \theta_0 + \int_{t_0}^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ , dove si nota l'analogia con l'accelerazione nel moto rettilineo
- $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

Diamo nuovamente un'occhiata alla velocità angolare  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$ . Si ha che è una quantità scalare. Studiamo ora la notazione vettoriale di  $\vec{\omega}$ . Questo vettore ha direzione ortogonale alla circonferenza e, visto dalla punta di  $\vec{\omega}$  il moto appare antiorario. Si ha quindi che  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$  e:

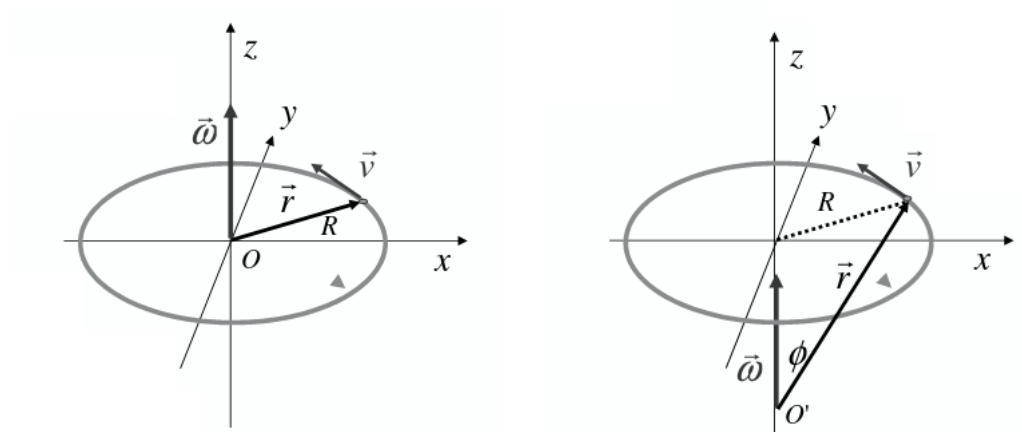
$$|\vec{v}| = \omega R \sin \frac{\pi}{2} = \omega R$$

anche se il vettore  $\vec{\omega}$  si può applicare a qualunque punto dell'asse  $z$ , ottenendo:

$$|\vec{v}| = \omega R \sin \phi = \omega R$$



graficamente si ha a sinistra il caso con applicazione sull'origine normale e a destra il caso applicazione in un punto a scelta:



## 2.2 Dinamica