Ricerca Operativa

Problemi di PL

Var non di base var uguale a 0

Var di base var di qualsiasi valore le cui colonne formano una matrice identità

Sol aumentata tutte le variabili

Sol di base sol aumentata che sta su un vertice

Sol di base degenere sol di base con qualche var di base = 0

Sol non di base sol aumentata che non sta su un vertice (senza variabili di slack)

Quale è il tasso di variazione della funzione obiettivo al variare dei termini noti?

Il tasso di variazione coincide con i prezzi ombra.

Il prezzo ombra i può variare di una quantità δ definita dalla seguente disequazione, mantenendo la soluzione attuale ottima.

Sia CS_i la colonna della variabile di slack i (esclusa riga 0) e b la colonna di termini noti:

$b + \delta CS_i \geq 0$

Quali sono gli intervalli di variazione di ciascuna risorsa affinchè la soluzione ottima rimanga ammissibile?

$b + \delta CS_i \geq 0$

Intervalli di variazione del costo dell'attività x_i affinchè la soluzione ottima rimanga tale:

Sia R la riga che sulla colonna di x_i ha coefficiente 1:

Per tutti i coeff $\neq 0, 1$ su R:

$coeff_i(R_0) + \delta coeff_i(R) \geq 0$

Impostare le relazioni di complementarietà che le soluzioni ottime del primale e del duale devono soddisfare

Sia:

- x_i le variabili del primale;
- u_j le variabili del duale;
- b_j il j-esimo termine noto del primale;
- Ax_j i termini del j-esimo vincolo funzionale del primale;
- c_i l'i-esimo termine noto del duale;
- yA_i i termini dell'i-esimo vincolo funzionale del duale.

$u_j(b_j - Ax_j) = 0$

$(yA_i - c_i)x_i = 0$

Una soluzione NON di base di un problema di PL può appartenere alla regione ammissibile?

Vero, la regione ammissibile è semplicemente definita dai vincoli. Una soluzione di base soddisfa tutti i vincoli, ma non è su uno dei vertici.

Quante variabili possono assumere valore diverso da zero in una soluzione di base?

Sia n il numero di vincoli funzionali del problema di PL, n variabili sono di base e dunque potranno assumere valori non nulli.

In una soluzione di base ammissibile, tutte le variabili nulle sono necessariamente fuori base?

Falso, le variabili di base possono assumere valore nullo. In particolare, se qualche variabile di base vale 0 in una soluzione di base ammissibile, essa si dice *degenere*.

Data una soluzione ottima corrente, determinare se è opportuno introdurre una nuova attività x_6. Se sì, calcolare la nuova soluzione ottima.

Sia (x) la soluzione ottima corrente, controllare che $(x, 0)$ sia ancora valida e ottima:

- Validità: sostituire nei vincoli
- Ottimalità: il costo ridotto (coefficiente sulla riga 0) di x_6 deve risultare non negativo

Sia

- $c_b B^{-1}$ vettore riga 0 variabili ombra
- A_i vettore colonna tecnologico nuova attività i
- c_i costo unitario nuova attività i

Costo ridotto $x_6 = c_b B^{-1} A_6 - c_6$

Se il costo ridotto è ≥ 0, significa che la soluzione $(x, 0)$, dove **non** si svolge x_6 $(x_6 = 0)$ è accora ottima, dunque non è conveniente aggiungerla.

Se il costo ridotto risultasse < 0, non svolgere l'attività non sarebbe più una soluzione ottima, quindi è conveniente aggiungerla.

Per calcolare la nuova soluzione, si ripete il simplesso aggiornando il tableau in questo modo:

- Sulla riga 0, il coefficente della nuova attività è il costo ridotto calcolato prima
- La colonna della nuova variabile si calcola moltiplicando la matrice delle variabili di slack (escludendo sempre la riga 0) per il vettore colonna tecnologico della nuova attività: $B^{-1} * A_6$

Dato il grafo delle precedenze tra le attività di un progetto e la loro durata media, come si determinano le loro attività critiche?

`t_min` di un'attività è il tempo minimo entro cui si possono terminare tutte le fasi necessarie per iniziarla. Le prime hanno t_min = 0, per ogni altra attività sequente A, tmin(A) è la massima somma tra tmin(P)+durata(P) dei predecessori, con P predecessore con tale massimo valore.

`t_max` di un'attività è il massimo tempo entro cui devo iniziare l'attività stessa, pena un aumento del tempo minimo per completare il progetto. L'ultima attività ha `t_min=t_max`, per ogni altra tmax è la differenza minima tra la durata di P e tmax di un successore A.

Un'**attività critica** è un'attività che ha `slack = 0`. `Slack = t_max - t_min`. Un percorso critico è la sequenza più lunga di attività critiche.

Perchè sono dette critiche?

Un'attività è detta *critica* è un'attività il cui inizio non può essere ritardato nemmeno di un'unità di tempo, altrimenti l'intera durata minima del progetto in esame verrebbe aumentata.

Teorema di dualità debole

Data una coppia Primale-Duale min $c^T x : Ax \geq d, x \geq 0$, max $u^T d : u^T A \leq c^T, u \geq 0$:

Sia X la regione d'ammissibilità di P ed U quella di D, per ogni $x \in X$, $u \in U$ risulta: $c^T x \geq u^T d$

Teorema di dualità forte

Se il primale ha soluzione ottima finita:

1) anche il suo duale ha soluzione ottima finita;
2) i valori della due soluzioni sono uguali.

Dare un esempio di utilizzo del teorema di dualità

Dare la definizione di soluzione di base

Dire se la soluzione ottimale di un problema di PL può essere non di base, giustificando la risposta

Vero, potrebbero esserci più di una BFS collegate da un segmento che danno vita dunque a infinite combinazioni convesse dei due vertici.

Programmazione non lineare

Elencare le condizioni di ottimalità di KKT

1. Ad ogni vincolo, associare una delta_i.

2. Vincoli di *ammissibilità duale* relativi ai delta_i (inverto segni, = variabile senza vincoli)

3. Condizioni di *complementarietà*

   delta_i (i-esimo vincolo) = 0

4. Condizioni sul *gradiente*

   (dFO/dx, dFO/dy) - delta_i (dVi/dx, dVi/dy) = 0 (per tutte le i)

5. Definire 2^n sviluppi, combinando le condizioni