Programmazione Lineare

Metodo del Simplesso

```
MAX cx = MIN -cx

    Problema di MIN

b = colonna termini noti
Variabile NB = Variabile non in base
Variabile B = Variabile in base



PickEP {
    CP=c <<; c<0
    RP=b_i / c_i <<; c_i > 0
    # Se tutti i rapporti b_i/c_i sono negativi,
    #  il problema è illimitato
    ElementoPivot = (RP,CP)
}

prepareSimplex {
    # I termini noti devono essere >= 0
    # Tutti i vincoli del tipo <= (Min) o >= (Max)
    # La matrice aggiunta delle variabili di Slack
    #  deve essere una matrice sidentità
    # Sopra la matrice identità, i coefficienti
    #  devono essere 0 (due fasi)
    # Se il problema è di Massimo,
    #  invertire i coefficienti sulla riga 0
```

```
}

prepareSimplex()
while(!(coeff su Riga0 tutti >= 0)) {
    PickEP()
    # La variabile sulla colonna CP va in base,
    #  sostituendo quella precedente sulla RP.
    RP = RP / EP
    for each (riga i con (i,CP) > 0):
        R_i = R_i + |(i,CP)|*RP
    foreach (riga i con (i,CP) < 0):
        R_i = R_i - |(i,CP)|*RP
    foreach (riga i con (i,CP) = 0):
        R_i = R_i
    }l
BFS = (Variabili NB = 0, i-esima variabile B = b_i)
```

Problemi di PL

Var non di base var uguale a 0

Var di base var di qualsiasi valore le cui colonne formano una matrice identità

Sol aumentata tutte le variabili

Sol di base sol aumentata che sta su un vertice

Sol di base degenere sol di base con qualche var di base $= 0$

Sol non di base sol aumentata che non sta su un vertice (senza variabili di slack)

Una soluzione NON di base di un problema di PL può appartenere alla regione ammissibile?

Vero, la regione ammissibile è semplicemente definita dai vincoli. Una soluzione di base soddisfa tutti i vincoli, ma non è su uno dei vertici.

Quante variabili possono assumere valore diverso da zero in una soluzione di base?

Sia n il numero di vincoli funzionali del problema di PL, n variabili sono di base e dunque potranno assumere valori non nulli.

In una soluzione di base ammissibile, tutte le variabili nulle sono necessariamente fuori base?

Falso, le variabili di base possono assumere valore nullo. In particolare, se qualche variabile di base vale 0 in una soluzione di base ammissibile, essa si dice *degenere*.

Dare la definizione di soluzione di base

Soluzione ammissibile è una soluzione che soddisfa il sistema di equazioni dela forma aumentata e che ha tutte le variabili non negative.

Soluzione di base È un vertice a cui sono stati aggiunti i corrispondenti valori delle variabili di slack. Gode delle seguenti proprietà:

- Ogni variabile è una variabile di base o non di base;

- Il numero delle variabili di base è uguale al numero di vincoli funzionali. Numero di variabili non di base = numero delle variabili - numero vincoli funzionali;
- Le variabili non di base sono poste a 0;
- I valori delle variabili di base sono le soluzioni del sistema di equazioni.
- Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una BFS.

Soluzione aumentata È una soluzione per la quale alle variabili originali sono aggiunte le variabili di slack

Soluzione di base ammissibile (BFS) è un vertice ammissibile cui sono stati aggiunti i corrispondenti valori delle variabili di slack

Una soluzione di base con le variabili di base che soddisfano i vincoli di non negatività è una BFS.

Dire se la soluzione ottimale di un problema di PL può essere non di base, giustificando la risposta

Vero, potrebbero esserci più di una BFS collegate da un segmento che danno vita dunque a infinite combinazioni convesse dei due vertici.

Sensitività

Quale è il tasso di variazione della funzione obiettivo al variare dei termini noti?

Il tasso di variazione coincide con i prezzi ombra.

Il prezzo ombra *i* può variare di una quantità δ definita dalla seguente disequazione, mantenendo la soluzione attuale ottima.

Sia CS_i la colonna della variabile di slack *i* (esclusa riga 0) e *b* la colonna di termini noti:

$b + \delta CS_i \geq 0$

Quali sono gli intervalli di variazione di ciascuna risorsa affinchè la soluzione ottima rimanga ammissibile?

$b + \delta CS_i \geq 0$

Intervalli di variazione del costo dell'attività x_i affinchè la soluzione ottima rimanga tale:

Sia R la riga che sulla colonna di x_i ha coefficiente 1:

Per tutti i coeff $\neq 0, 1$ su R:

$coeff_i(R_0) + \delta coeff_i(R) \geq 0$

Data una soluzione ottima corrente, determinare se è opportuno introdurre una nuova attività x_6. Se sì, calcolare la nuova soluzione ottima.

Sia (x) la soluzione ottima corrente, controllare che $(x, 0)$ sia ancora valida e ottima:

- Validità: sostituire nei vincoli
- Ottimalità: il costo ridotto (coefficiente sulla riga 0) di x_6 deve risultare non negativo

Sia

- $c_b B^{-1}$ vettore riga 0 variabili ombra
- A_i vettore colonna tecnologico nuova attività *i*
- c_i costo unitario nuova attività *i*

Costo ridotto $x_6 = c_b B^{-1} A_6 - c_6$

Se il costo ridotto è ≥ 0, significa che la soluzione $(x, 0)$, dove **non** si svolge x_6 $(x_6 = 0)$ è accora ottima, dunque non è conveniente aggiungerla.

Se il costo ridotto risultasse < 0, non svolgere l'attività non sarebbe più una soluzione ottima, quindi è conveniente aggiungerla.

Per calcolare la nuova soluzione, si ripete il simplesso aggiornando il tableau in questo modo:

- Sulla riga 0, il coefficente della nuova attività è il costo ridotto calcolato prima
- La colonna della nuova variabile si calcola moltiplicando la matrice delle variabili di slack (escludendo sempre la riga 0) per il vettore colonna tecnologico della nuova attività: $B^{-1} * A_6$

(???) Calcolare il vettore colonna relativo all'introduzione di una nuova attività x_c con costo ridotto 3 e vettore variabili tecnologiche A = (3,2,1)

```
Vettore Variabili Ombra = Vettore coefficienti variabili
CR = Costo Ridotto
A = Vettore variabili tecnologiche

VVO * A - CR = Vettore Colonna nuova attività x_c
```

Dualità

Impostare le relazioni di complementarietà che le soluzioni ottime del primale e del duale devono soddisfare

Sia:

- x_i le variabili del primale;
- u_j le variabili del duale;
- b_j il j-esimo termine noto del primale;
- Ax_j i termini del j-esimo vincolo funzionale del primale;
- c_i l'i-esimo termine noto del duale;
- yA_i i termini dell'i-esimo vincolo funzionale del duale.

$u_j(b_j - Ax_j) = 0$

$(yA_i - c_i)x_i = 0$

Teorema di dualità debole

Data una coppia Primale-Duale min $c^T x : Ax \geq d, x \geq 0$, max $u^T d : u^T A \leq c^T, u \geq 0$:

Sia X la regione d'ammissibilità di P ed U quella di D, per ogni $x \in X$, $u \in U$ risulta: $c^T x \geq u^T d$

Teorema di dualità forte

Se il primale ha soluzione ottima finita:

1) anche il suo duale ha soluzione ottima finita;
2) i valori della due soluzioni sono uguali.

Dare un esempio di utilizzo del teorema di dualità

Le proprietà del problema duale definite dal teorema di dualità ci interessano perchè:

- Il problema duale può essere più facile da risolvere (meno vincoli, conviene)
- Il problema duale corrisponde ad una diversa visione dello stesso problema
- Molti algoritmi utilizzano aspetti della dualità, quali il Simplesso Duale, Primale/Duale, alternativi al Simplesso utili per certe classi di problemi
- Il problema duale fornisce bounds utili per risolvere problemi a variabili intere (Branch and Bound)
- Condizioni di ottimalità

Dato il grafo delle precedenze tra le attività di un progetto e la loro durata media, come si determinano le loro attività critiche?

`t_min` di un'attività è il tempo minimo entro cui si possono terminare tutte le fasi necessarie per iniziarla. Le prime hanno $t\_min = 0$, per ogni altra attività sequente A, tmin(A) è la massima somma tra tmin(P)+durata(P) dei predecessori, con P predecessore con tale massimo valore.

`t_max` di un'attività è il massimo tempo entro cui devo iniziare l'attività stessa, pena un aumento del tempo minimo per completare il progetto. L'ultima attività ha `t_min=t_max`, per ogni altra tmax è la differenza minima tra la durata di P e tmax di un successore A.

Un'**attività critica** è un'attività che ha `slack = 0`. `Slack = t_max - t_min`. Un percorso critico è la sequenza più lunga di attività critiche.

Perchè sono dette critiche?

Un'attività è detta *critica* è un'attività il cui inizio non può essere ritardato nemmeno di un'unità di tempo, altrimenti l'intera durata minima del progetto in esame verrebbe aumentata.

Programmazione non lineare

Elencare le condizioni di ottimalità di KKT

1. Ad ogni vincolo, associare una delta_i.
2. Vincoli di *ammissibilità duale* relativi ai delta_i (inverto segni, = variabile senza vincoli)
3. Condizioni di *complementarietà*

   delta_i (i-esimo vincolo) = 0
4. Condizioni sul *gradiente*

   (dFO/dx, dFO/dy) - delta_i (dVi/dx, dVi/dy) = 0 (per tutte le i)
5. Definire 2^n sviluppi, combinando le condizioni