

**Laboratório 4 - Projeto de controlador para Multicóptero**

## 1 Projeto de controlador de Arfagem

Inicialmente, pode-se obter a função de transferência  $G_{\theta f}$ .

$$\begin{aligned} ((\Theta_r - \Theta)K_p - \alpha) \frac{K_v \theta}{Js} &= \alpha \\ \alpha &= \frac{(\Theta_r - \Theta)K_p K_v}{Js + K_v} \\ \Theta &= \frac{\Theta_r K_p K_v}{s^2 J + s K_v} - \frac{\Theta K_p K_v}{s^2 J + s K_v} \\ \frac{\Theta}{\Theta_r} &= \frac{K_{p\theta} K_{v\theta}}{s^2 J + s K_{v\theta} + K_{p\theta} K_{v\theta}} \end{aligned} \quad (1)$$

A partir da equação 1, pode-se definir  $K_{p\theta}$  e  $K_{v\theta}$  a fim de ter-se tempo de subida  $M_p = 0,05$  e  $t_r = 0,1s$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (2)$$

$$M_p = 0,05 \rightarrow \xi = 0,06901$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3)$$

$$t_r = 0,1 \rightarrow \omega_n = 32,229$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_{p\theta} K_{v\theta}}{J}$$

$$2\omega_n \xi = \frac{K_{v\theta}}{J}$$

$$K_{v\theta} = 2\omega_n \xi J$$

$$K_{p\theta} = \frac{\omega_n^2 J}{K_{v\theta}}$$

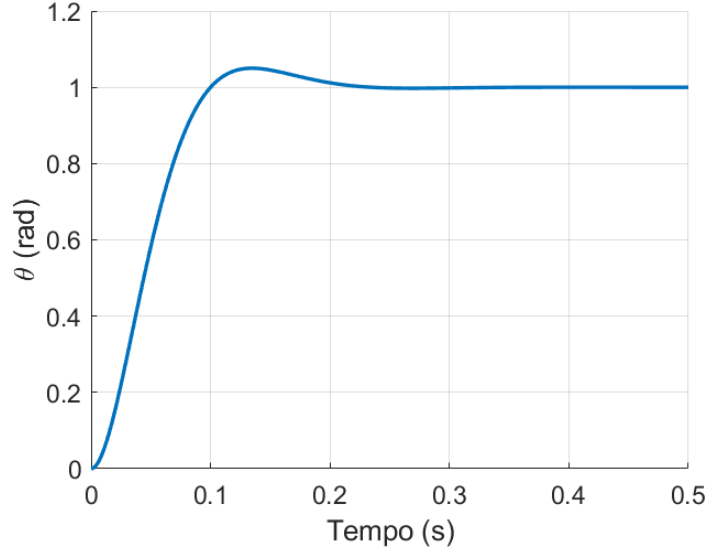


Figura 1: Variação do ângulo com o tempo para os requisitos estabelecidos

Percebe-se que os requisitos são bem atendidos, pois o sistema é um de segunda ordem padrão. Assim, não são necessárias aproximações para determinar os valores dos ganhos a fim de atender os requisitos.

## 2 Projeto de controlador vertical

Pode-se obter a função de transferência  $G_{fz}$ .

$$\begin{aligned}
 Z &= (Z_r F(s) - Z) \frac{C(s)}{ms^2} \\
 \frac{Z}{Z_r} &= \frac{F(s)C(s)}{ms^2 + C(s)} \\
 \frac{Z}{Z_r} &= \frac{\frac{F(s)(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s}}{ms^2 + \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s}} \\
 \frac{Z}{Z_r} &= \frac{F(s)(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{ms^3 + s^2 K_d + s K_p + K_i} \quad (4)
 \end{aligned}$$

A fim de determinar os valores de  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$ , pode-se realizar-se uma aproximação por polos dominantes. Após a aproximação, pode-se tratar o sistema como um de segunda ordem padrão, e, portanto, os valores poderão ser calculados a partir dos requisitos utilizando as equações 2 e 3. Os polos a serem considerados para a aproximação são  $p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ,  $p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$  e  $p_3 = -5\xi\omega_n$ .

Dessa forma, tem-se as relações apresentadas nas equações 5, 6 e 7

$$K_d = 7\xi\omega_n m \quad (5)$$

$$K_p = m(10\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2) \quad (6)$$

$$K_i = 5m\xi\omega_n^3 \quad (7)$$

Logo, para  $M_p = 0,1$  e  $t_r = 1$ , pode-se calcular os valores utilizando 2 e 3.

Pode-se realizar a comparação da função de transferência com e sem pré-filtro. A figura 2 representa o gráfico do valor de posição vertical para a função com e sem pré-filtro, ambas para os mesmos requisitos. O pré-filtro  $F(s)$  é um filtro que elimina os zeros da função.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i} \quad (8)$$

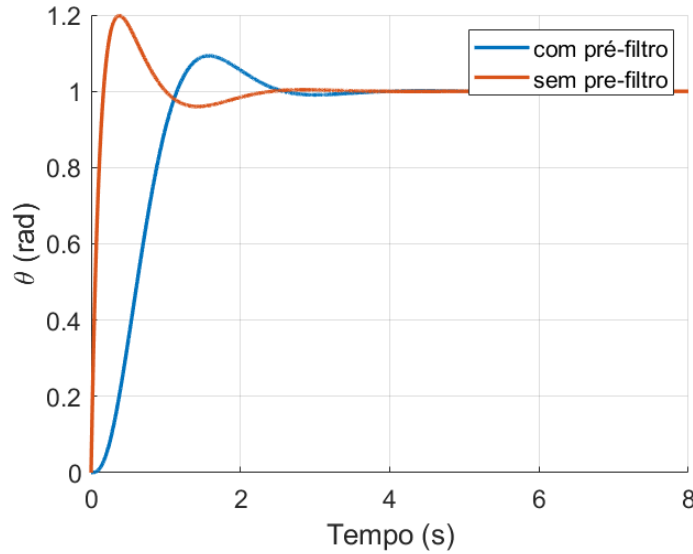


Figura 2: Comparação entre a função de transferência com pré-filtro e sem pré-filtro

Percebe-se que o controlador sem pré-filtro apresenta um tempo de subida muito mais rápido que o especificado, assim como seu *overshoot*. Percebe-se que os zeros na função o tornam mais rápido, porém mais instável. Por fim, nota-se que os requisitos foram melhor atendidos pelo controlador com pré-filtro, apesar do polo ainda gerar uma diferença entre o valor encontrado na simulação e o teórico.

A fim de melhorar ainda mais a resposta do sistema, pode-se realizar uma busca em grade para os requisitos encontrados na simulação serem o mais próximos possível dos valores teóricos desejados. Testou-se valores de  $M_p$  e  $t_r$  de  $0,8M_{p,req}$  a  $1,2M_{p,req}$  e  $0,8t_{r,req}$  a  $1,2t_{r,req}$ .

Para escolher os melhores parâmetros, utilizou-se a equação 9.

$$J_{i,j} = \frac{|t_{r,req} - t_{r,ij}|}{|t_{r,req}|} + \frac{|M_{p,req} - M_{p,ij}|}{|M_{p,req}|} \quad (9)$$

Utilizando-se esse método, pode-se comparar o controlador iterativo com o controlador analítico. A variação de  $Z$  para os requisitos explicitados são apresentados na figura 3.

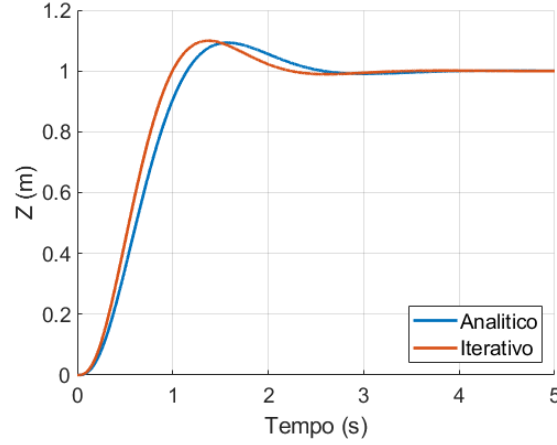


Figura 3: Comparação entre controladores analítico e iterativo para os requisitos  $M_p$  e  $t_r$ .

Percebe-se que o controlador iterativo atendeu melhor aos requisitos de tempo de subida e *overshoot*. Isso ocorre pois a grade de busca encontra os melhores valores para que a simulação tenha o melhor resultado, já que o cálculo dos ganhos é feito de forma aproximada por polos dominantes. Assim, é possível observar um modo de utilizar outros valores de "requisitos" a fim de atingir os melhores resultados.

### 3 Projeto de controlador horizontal

Pode-se obter a função de transferência  $G_{fx}$  a partir do diagrama de blocos.

$$\begin{aligned}
 X &= (X_r F(s) - X) C(s) G_{f,\theta} \frac{g}{s^2} \\
 \frac{X}{X_r} &= F(s) \frac{C(s) G_{f,\theta} g}{s^2 + C G_{f,\theta} g} \\
 C &= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \\
 G_{f,\theta} &= \frac{K_{p\theta} K_{v\theta}}{s^2 J + s K_{v\theta} + K_{p\theta} K_{v\theta}} \\
 \frac{X}{X_r} &= F(s) \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i) K_{p\theta} K_{v\theta} g}{J s^5 + s^4 K_{v,\theta} + s^3 K_{p\theta} K_{v\theta} + K_{p\theta} K_{v\theta} g (K_d s^2 + K_p s + K_i)} \quad (10) \\
 F(s) &= \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Inicialmente, vamos considerar  $G_\theta$  como 1, de forma que seu controlador é muito mais rápido que a malha externa X. De maneira análoga ao controlador horizontal, pode-se considerar

efeito dos polos dominantes a fim de realizar uma aproximação para os ganhos, dados requisitos determinados. Para  $M_p = 0,1$  e  $t_r = 1,0$  e as eq. 2 e 3 tem-se as equações de  $K_d$ ,  $K_p$  e  $K_i$ .

$$K_d = \frac{7\xi\omega_n}{g}$$

$$K_p = \frac{10\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2}{g}$$

$$K_i = \frac{5\xi\omega_n^3}{g}$$

Ademais, pode-se realizar um procedimento semelhante ao feito no controlador vertical a fim de minimizar os erros de aproximações do controlador. Utilizando os mesmos critérios do controlador vertical, encontrou-se  $M_p$  e  $t_r$  que minimizam a função de custo 9.

Por fim, comparou-se o controlador analítico com o iterativo, a o resultado é apresentado na figura 4.

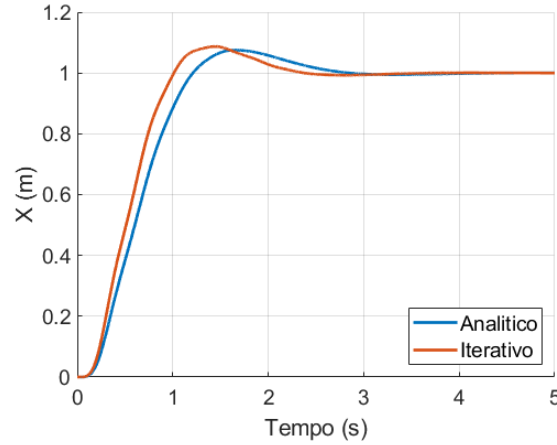


Figura 4: Comparação entre o controlador analítico e o iterativo para os requisitos desejados.

Percebe-se que o controlador iterativo atendeu melhor os requisitos do sistema, tendo um tempo de subida aproximadamente a 1 e um *overshoot* de 10%. O melhor atendimento aos requisitos se deve ao fato de que a grade de busca iterativa corrige possíveis erros de aproximação gerados pelo polo a mais no denominador, assim como os efeitos da função de controle da arfagem.

#### 4 Avaliação do sistema de controle do Multicóptero

A partir do sistema de controle então construído, pode-se simular o multicóptero por inteiro para diferentes experimentos.

Inicialmente, fez-se um voo de 10s com  $x_r = 0$  e  $z_r = 1$ , apresentado nas figura 5.

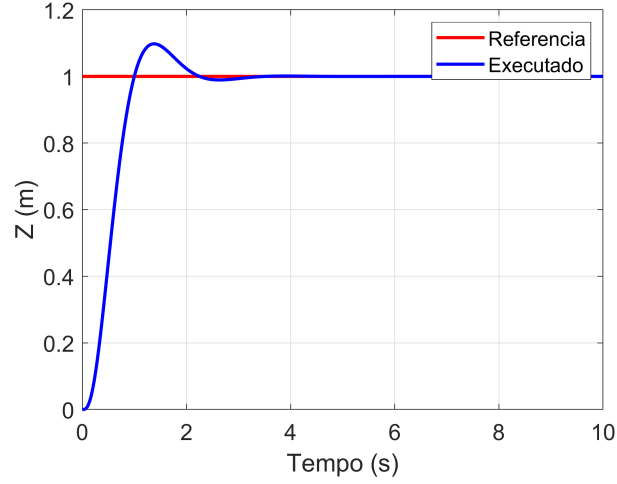


Figura 5: Posição vertical em função do tempo para referência de 1m

Percebe-se que, nesse experimento, os requisitos foram atingidos de forma precisa, tanto o tempo de subida quanto o *overshoot*. O controlador utilizado verticalmente foi o que encontra os ganhos com a grade de busca, então nota-se que o erro pequeno era o esperado.

As figuras 6 e 7 apresentam um voo cuja referência inicial é  $x = 0$  e  $z = 1$ . Após 1 segundo, esta muda para  $x = 1$  e  $z = 1$ .

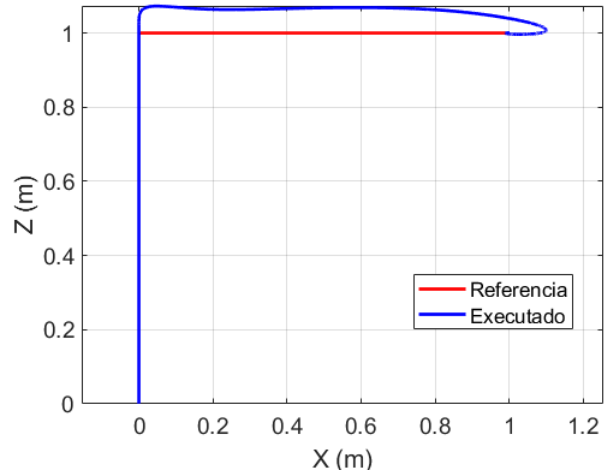


Figura 6: Posição do multicóptero para o segundo experimento

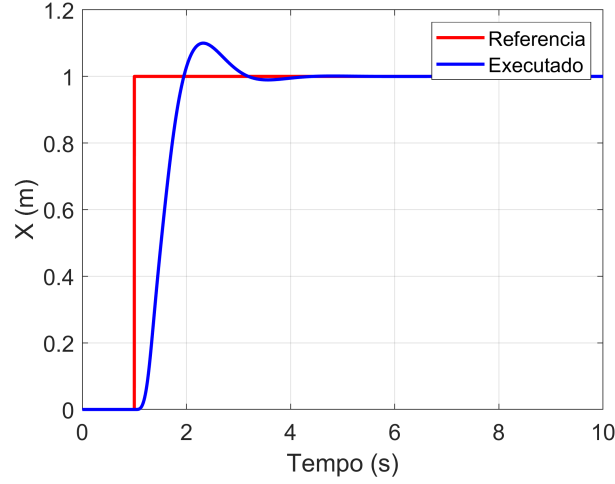


Figura 7: Posição horizontal do multicóptero conforme o tempo

Nota-se que o multicóptero chegou ao ponto de referência com o *overshoot* vertical e horizontal de acordo com a especificação, chegando a aproximadamente 10% do valor, até estabilizar na referência. Já o tempo em que chega na referência horizontal é o tempo de subida requisitado, a partir do momento em que a referência em  $x$  muda.

A figura 8 e 9 apresentam os resultados de simulação na qual a referência se mantém em  $x = 0$  e  $z = 1$  por 1 segundo e, após esse período, é comandada velocidade constante  $\dot{x} = 1m/s$ .

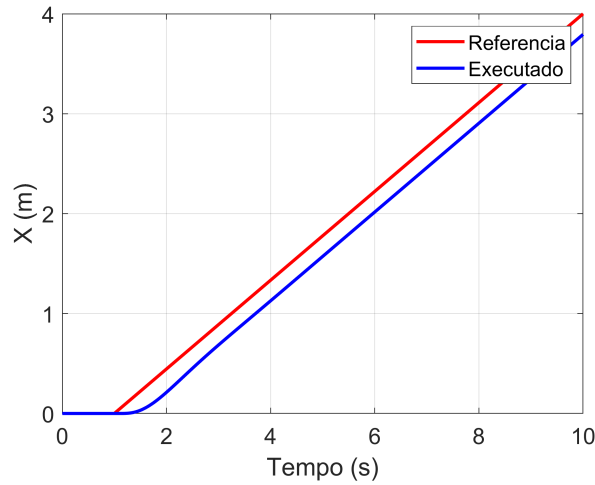


Figura 8: Posição horizontal por tempo no terceiro experimento

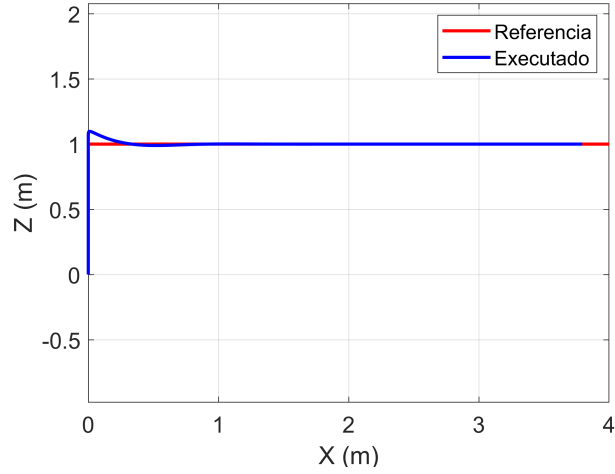


Figura 9: Posição X e Z do multicóptero para a terceira simulação

Nota-se que o multicóptero realizou os comandos feitos, respeitando os requisitos de posição vertical, conforme figura 9. Já para a posição horizontal, conforme referência da velocidade, nota-se que não houve *overshoot*, e há uma transição suave entre a velocidade atual no instante  $t = 1$  e o instante que a velocidade de referência é atingida.

As figuras 10 e 11 representam um experimento em que a referência é constante em  $x_r = 0$  e  $z_r = 1$ , mas no segundo  $t = 3$ , uma carga de 0,2 kg é colocada sobre o multicóptero.

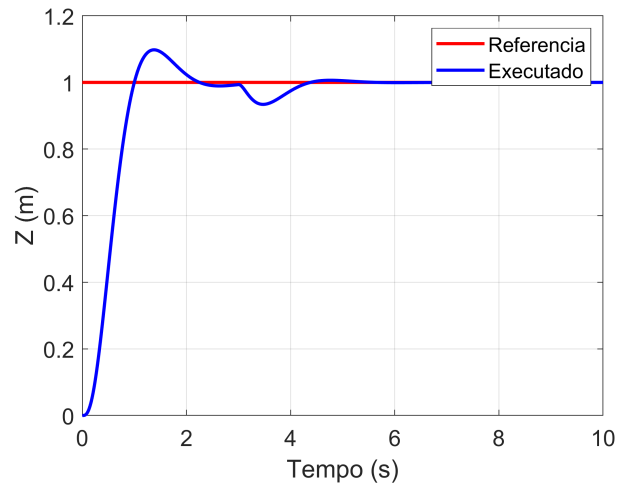


Figura 10: Posição vertical pelo tempo quando uma carga é colocada sobre o multicóptero



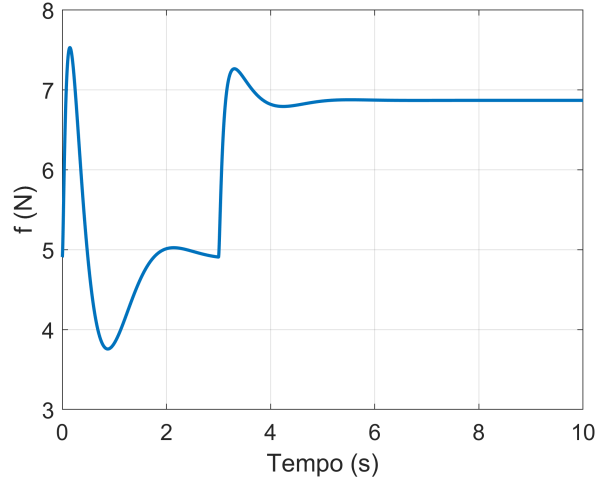


Figura 11: Força do motor do multicóptero conforme o tempo

Nota-se que o multicóptero estava quase se estabilizando na posição de referência quando o peso é colocado. Após isso, pela figura 11, nota-se que há um aumento considerável na força realizada, a fim de retornar à posição de referência e também equilibrar o peso a mais. Percebe-se que o *overshoot* é consideravelmente menor, e o tempo de subida a partir do momento da alteração na massa é ligeiramente maior que o tempo requisitado.

As figuras 12, 13 e 14 apresentam os resultados de um experimento em que a velocidade horizontal constante é comandada após 1 segundo. Porém um vento atua contra o movimento, a partir de 3 segundos. O vento tem força de  $3N$ .

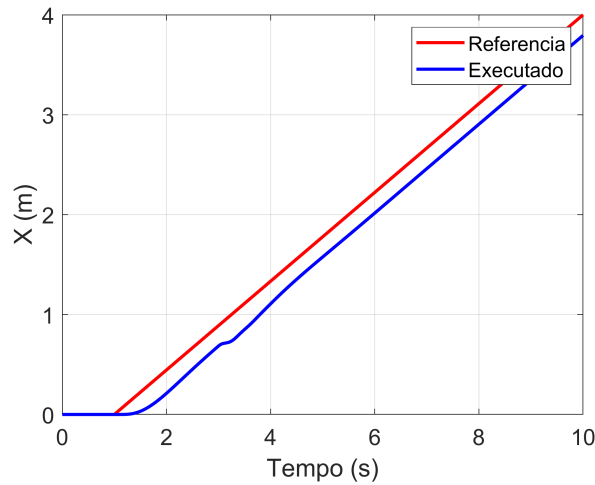


Figura 12: Posição horizontal conforme o tempo

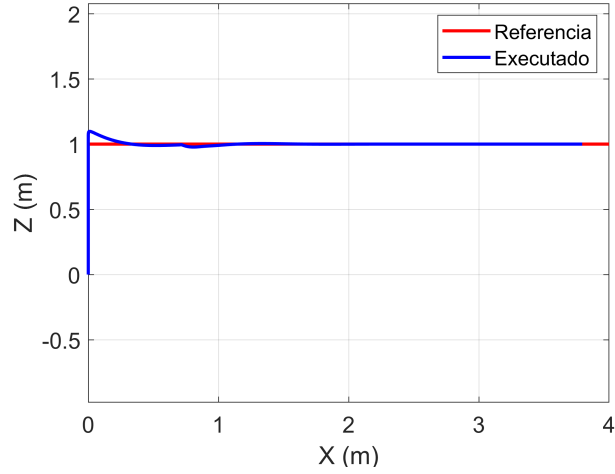


Figura 13: Posição do multirótor para o experimento

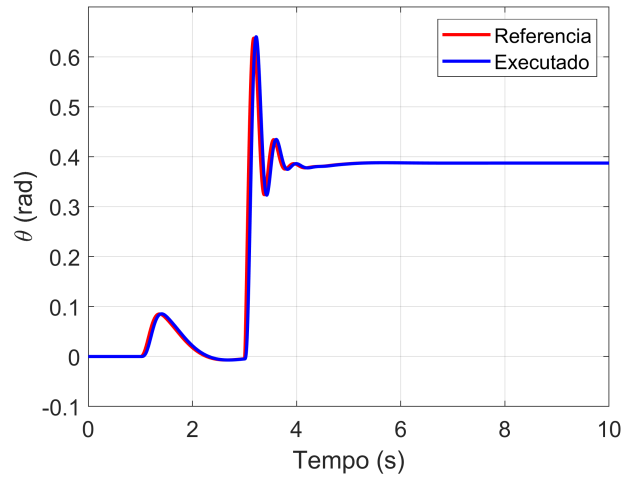


Figura 14: valor do ângulo com a horizontal conforme o tempo

Nota-se que a velocidade, mesmo com o vento atuando, é pouco perturbada, assim como a posição horizontal do multirótor. O fator que mais é alterado é ângulo. A fim de se manter estável, o ângulo altera-se consideravelmente quando comparada à simulação sem vento. Percebe-se que o *overshoot* do ângulo é muito maior que o especificado nos requisitos quando o agente externo atua.

As figuras 15 e 16 representam um último experimento, no qual o multirótor é comandado para  $z_r = 2$  por 1 segundo e, após isso, por uma curva de Lissajous. Para a figura 15, o período da curva de Lissajous é 8 segundos. Para a figura 16, o período é de 16 segundos.

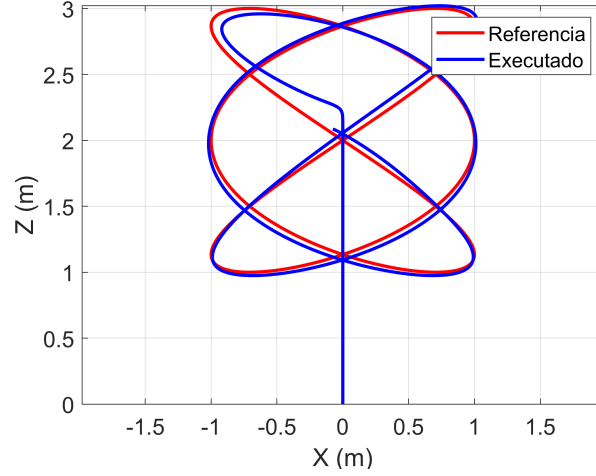


Figura 15: Posição do multicóptero para o experimento, com período de 8 segundos

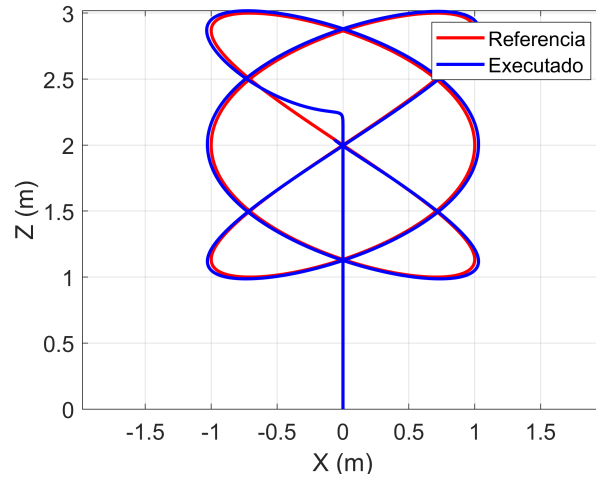


Figura 16: Posição do multicóptero para o experimento, com período de 16 segundos

Percebe-se que o multicóptero realiza a curva de Lissajous de forma mais próxima da referência para o período maior. Isso ocorre devido ao fato de que a referência estar sempre movendo-se abre espaço para uma acomodação mais difícil da posição do multicóptero. Ao mover a referência rapidamente, a resposta do sistema para de processar a posição anterior e já visa a nova referência. Logo, a curva se torna menos fidedigna à real.

É possível construir animações a partir desses experimentos do multicóptero. Para o experimento no qual o peso de 0,2 kg é adicionado (d), nota-se que não há erro em regime tanto antes quanto após a perturbação. Percebe-se que o overshoot é maior na primeira estabilização, e que a massa altera essa característica do controlador. Nota-se os vetores força das hélices aumentando de tamanho.

Para o experimento no qual a referência é a velocidade horizontal e o vento atua após 3s (e), percebe-se que a velocidade horizontal não é alterada, assim como, em geral, a posição vertical. Após um grande desequilíbrio no ângulo, o multicóptero estabiliza-se em um ângulo mais acentuado que o de movimentação original.

Para o experimento da curva de Lissajous com período 8 (f), percebe-se que o controlador realiza a curva com um certo atraso, mas mantendo-se fiel à posição, dentro do comando instantâneo.