

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA**  
**Controle para Sistemas Computacionais - CMC-12**  
**Aluno: Bernardo Hoffmann da Silva**

**Laboratório 3 - Projeto de Servomotor de Velocidade**

## 1 Controlador P + Feedforward

Para um controlador P + feedforward no servomotor de velocidade, a partir do diagrama de blocos, pode-se escrever a função de transferência.  $G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}$ . Pelo princípio da superposição, podemos considerar o distúrbio  $\tau_e$  como zero. Inicialmente, a partir da malha, tem-se:

$$\omega_m = [(r_m - \omega_m)K_p + r_m K_f - \omega_m K_t] \frac{K_t}{Ls + R} \frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}}$$

Escrevendo a equação na forma  $G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}$ , tem-se:

$$G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)} = \frac{K_t(K_p + K_f)}{(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + K_p K_t + K_t^2}$$

Pode-se realizar o processo análogo de determinação da função de transferência para o distúrbio (torque externo), considerando  $r_m$  como zero.

$$G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} = \frac{Ls + R}{N^2 \eta [(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + K_p K_t + K_t^2]}$$

Pode-se, então, definir  $K_p$  e  $K_f$  a partir de uma constante de tempo do sistema  $\tau$  e garantindo erro em regime igual a zero, para entradas do tipo degrau. Para o primeiro caso, em que o distúrbio é desconsiderado, tem-se a relação de erro em regime dado pela equação 1. inicialmente, considerar-se-á o indutor L aproximadamente zero.

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s(R_l - \Omega_l) \\ e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( 1 - \frac{K_t(K_p + K_f)}{s(J_{eq}R) + B_{eq}R + K_p K_t + K_t^2} \right) \cdot R = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{s(J_{eq}R) + B_{eq}R + K_p K_t + K_t^2 - K_t(K_p + K_f)}{s(J_{eq}R) + B_{eq}R + K_p K_t + K_t^2} \right) = \\ &= \left( \frac{B_{eq}R + K_t^2 - K_t K_f}{B_{eq}R + K_p K_t + K_t^2} \right) = 0 \\ B_{eq}R + K_t^2 - K_t K_f &= 0 \\ K_f &= \frac{B_{eq}R + K_t^2}{K_t} \end{aligned} \tag{1}$$

A partir de  $G_R(s)$ , considerando-se  $L = 0$ , pode-se deduzir a constante de tempo  $\tau$  do sistema, e, a partir dela, deduzir o valor de  $K_p$ .

$$\begin{aligned}
G_R &= \frac{K_t(K_p + K_f)}{s(J_{eq}R) + B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2} \\
G &= C \frac{1}{\tau s + 1} \\
\tau &= \frac{RJ_{eq}}{RB_{eq} + K_pK_t + K_t^2} \\
K_p &= \frac{\frac{RJ_{eq}}{\tau} - K_t^2 - RB_{eq}}{K_t}
\end{aligned} \tag{3}$$

Considerando-se o indutor diferente de zero, tem-se a dedução de  $K_p$ . Nota-se que, mesmo considerando os efeitos do indutor, o valor da constante procurada não é alterado.

$$\begin{aligned}
e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s(R_l - \Omega_l) \\
e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( 1 - \frac{K_t(K_p + K_f)}{s^2LJ_{eq} + s(J_{eq}R + B_{eq}L) + B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2} \right) \cdot R = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2LJ_{eq} + s(J_{eq}R + B_{eq}L) + B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2 - K_t(K_p + K_f)}{s^2LJ_{eq} + s(J_{eq}R + B_{eq}L) + B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2} = \\
&= \frac{B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2 - K_t(K_p + K_f)}{B_{eq}R + K_pK_t + K_t^2} = 0 \\
B_{eq}R + K_t^2 - K_tK_f &= 0 \\
K_f &= \frac{B_{eq}R + K_t^2}{K_t}
\end{aligned} \tag{4}$$

A partir da avaliação do sistema de controle Feedforward + P utilizado, pode-se criar os gráficos presentes nas figuras 1, 2 e 3. O início da entrada degrau de referência é em 0,0s e do distúrbio é em 0,1s.

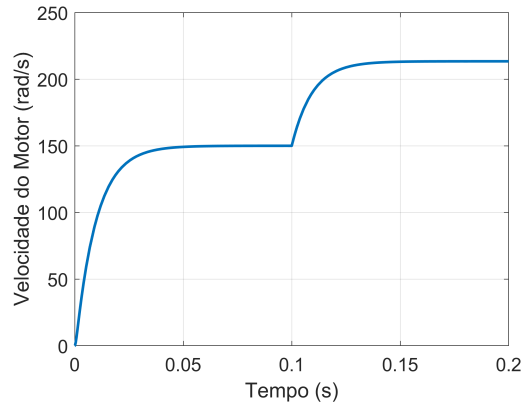


Figura 1: Velocidade do motor com o tempo com início do distúrbio em 0,1s.

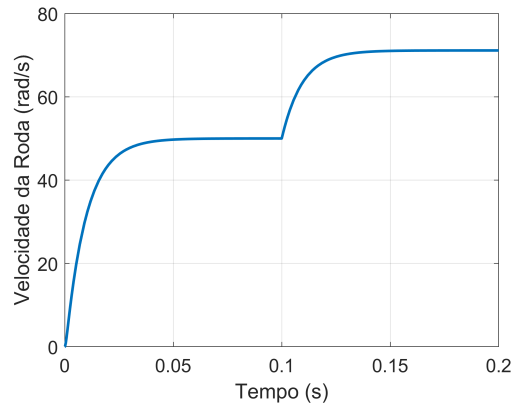


Figura 2: Velocidade da roda com o tempo com início do distúrbio em 0,1s.

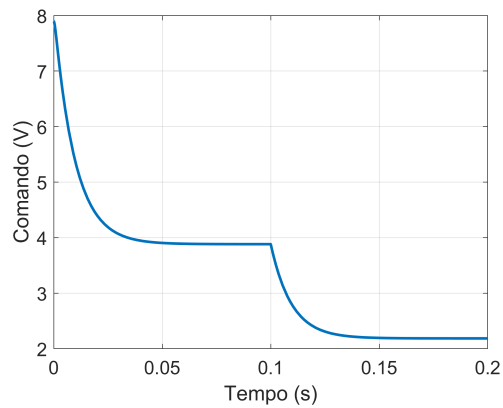


Figura 3: Velocidade do motor com o tempo com início do distúrbio em 0,1s.

Primeiramente, pode-se reparar que utilizando as velocidades assintóticas da roda e do motor, tem-se a relação de 3:1, sendo a velocidade do motor três vezes maior. Isso está de acordo

com o número de dentes da engrenagem explicitada no roteiro do laboratório.

Percebe-se que há a velocidade da roda e do motor apenas crescem assintoticamente a um valor. Isso é uma característica de sistemas de primeira ordem, da forma como  $G_D$  e  $G_R$  são simplificadas, com  $L \simeq 0$ . Outra característica é o erro nulo em regime quando não há distúrbio, já que essa é um dos requisitos do sistema. Quando o distúrbio começa a atuar, o erro em regime passa a existir. Pelo princípio da superposição, é possível reparar que o aumento de velocidade provocado pelo distúrbio é do formato de uma função de transferência de primeira ordem, como de fato é  $G_D$ .

A fim de verificar a saída antes e depois da perturbação teoricamente, pode-se utilizar o princípio da superposição e o teorema do valor final.

$$\begin{aligned}\omega_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{50}{s} \cdot \left( \frac{K_t(K_p + K_f)}{sRJ_{eq} + RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2} \right) \\ \omega_\infty &= \left( \frac{K_t(K_p + K_f)}{RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2} \right) \\ \omega_\infty &= \left( \frac{50 \cdot 0,0255(0,0267 + 0,0258)}{1,2 \cdot 8,122 \cdot 10^{-6} + 0,025 \cdot 0,0267 + 0,0255^2} \right) \\ \omega_\infty &= 50\end{aligned}$$

Após a perturbação:

$$\begin{aligned}\omega_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{50}{s} \cdot \frac{K_t(K_p + K_f)}{sRJ_{eq} + RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2} + \frac{0,2}{s} \cdot \frac{R}{N^2\eta[sRJ_{eq} + RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2]} \right) \\ \omega_\infty &= \left( \frac{50K_t(K_p + K_f)}{RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2} + \frac{0,2R}{N^2\eta[RB_{eq} + K_tK_p + K_t^2]} \right) \\ \omega_\infty &= \left( 50 + \frac{0,2 \cdot 1,2}{9 \cdot 0,94[0,0013274964]} \right) \\ \omega_\infty &= (50 + 21,37) \\ \omega_\infty &= 71,37\end{aligned}$$

Percebe-se que os valores encontrados para a velocidade da roda estão de acordo com o que prevê a teoria.

A tensão comandada, por sua vez, pode também ser prevista pela teoria de acordo com a lei de controle do sistema.

Antes do distúrbio:

$$\begin{aligned}V &= (r_m - \omega_m)K_p + r_mK_f \\ V &= 150 \cdot 0,0259 \\ V &= 3,885\end{aligned}$$

(6)

Após o início do distúrbio:

$$\begin{aligned} V &= (r_m - \omega_m)K_p + r_m K_f \\ V &= (-63, 38) \cdot 0,0268 + 150 \cdot 0,0259 \\ V &= 2,18 \end{aligned}$$

(7)

Nota-se, então, que o valor previsto é condizendo com o encontrado por simulação.

## 2 Controlador PI com pré-filtro

Nesta seção, será implementado um controlador PI com pré-filtro. A partir do diagrama de blocos dos sistema, é possível escrever a equação 8 e deduzir a expressão de  $G_R(s) = \frac{\Omega_l}{R_l}$  e  $G_D(s) = \frac{\Omega_l}{T_e}$ .

$$\omega_m = \left( ((r_m F(s) - \omega_m)C(s) - \omega_m K_t) \frac{K_t}{Ls + R} + \frac{\tau_e}{N\eta} \right) \frac{1}{sJ_{eq} + B_{eq}} \quad (8)$$

Considerando-se o distúrbio como zero, tem-se a função de transferência  $G_R(s)$ .

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{\Omega_l}{R_l} = \frac{F(s)C(s)K_t}{(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + CK_t + K_t^2} = \\ &= \frac{K_i K_t}{s(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + sCK_t + sK_t^2} = \\ &= \frac{K_i K_t}{s^3 L J_{eq} + s^2 (L B_{eq} + R J_{eq}) + s(R B_{eq} + K_t^2 + K_t K_p) + K_t K_i} \end{aligned} \quad (9)$$

Analogamente, tem-se a função de transferência  $G_D(s)$ , considerando-se a entrada como nula.

$$\begin{aligned} G_D(s) &= \frac{Ls + r}{N^2 \eta [(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + \frac{K_p s + K_i}{s} K_t + K_t^2]} = \\ &= \frac{s(Ls + r)}{N^2 \eta [s(Ls + R)(sJ_{eq} + B_{eq}) + K_t K_p s + K_i K_t + sK_t^2]} \\ &= \frac{s(Ls + r)}{N^2 \eta [s^3 L J_{eq} + s^2 (R J_{eq} + B_{eq} L) + s(K_t K_p + R B_{eq} + K_t^2) + K_i K_t]} \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando-se nula a dinâmica da corrente,  $L = 0$ , tem-se um sistema de segunda ordem padrão para  $G_R$ . A partir disso, pode-se determinar as constantes do sistema a partir de requisitos

do domínio do tempo. Projetar-se-á o sistema para um tempo de subida 0 a 100% de 0,02 s e  $M_p = 0,046$ .

$$G_R(s) = \frac{\frac{K_i K_t}{R J_{eq}}}{s^2 + s \frac{(R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p)}{R J_{eq}} + \frac{K_t K_i}{R J_{eq}}}$$

A partir de um sistema padrão, tem-se as seguintes relações para  $\xi$  e  $\omega_n$ .

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{K_t K_i}{R J_{eq}}} \\ \xi &= \frac{(R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p)}{2 \sqrt{K_t K_i R J_{eq}}}\end{aligned}\tag{11}$$

Então, pode-se calcular os valores das constantes a partir dos requisitos solicitados.

$$\begin{aligned}M_p &= \exp\left(-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = 0,0046 \rightarrow \xi = 0,7 \\ t_r &= \frac{1}{\omega_n} \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 0,02 \rightarrow \omega_n = 164.275\end{aligned}\tag{12}$$

A partir dessas relações, pode-se projetar o sistema com os requisitos propostos.

$$\begin{aligned}K_i &= \frac{\omega_n^2 R J_{eq}}{K_t} \\ K_p &= \frac{2 \xi R J_{eq} \omega_n - R B_{eq} - K_t^2}{K_t}\end{aligned}\tag{13}$$

Pode-se demonstra que tal sistema não possui erro em regime para entrada degrau unitária. Logo, basta que o distúrbio, quando o tempo do sistema tender a infinito, tenda a zero para que o sistema tenha erro em regime zero.

Erro em regime para entrada degrau unitário, com distúrbio sendo zero.

$$\begin{aligned}e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( 1 - \frac{K_i K_t}{s^3 L J_{eq} + s^2 (L B_{eq} + R J_{eq}) + s (R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p) + K_t K_i} \right) R_l \\ e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{s^3 L J_{eq} + s^2 (L B_{eq} + R J_{eq}) + s (R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p)}{s^3 L J_{eq} + s^2 (L B_{eq} + R J_{eq}) + s (R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p) + K_t K_i} \right) \\ e_\infty &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

Observa-se que o caso em que  $L = 0$  também gera o mesmo resultado.

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 R J_{eq} + s(R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p)}{s^2 R J_{eq} + s(R B_{eq} + K t^2 + K_t K_p) + K_t K_i} \right) = 0$$

Tendência do distúrbio:

$$\begin{aligned} (\Omega_{l,\infty} = G_D T_e = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s(Ls + R)}{N^2 \eta [s^3 L J_{eq} + s^2 (R J_{eq} + B_{eq} L) + s(K_t K_p + R B_{eq} + K_t^2) + K_i K_t]} \right) T_e = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{s(Ls + R)}{N^2 \eta [s^3 L J_{eq} + s^2 (R J_{eq} + B_{eq} L) + s(K_t K_p + R B_{eq} + K_t^2) + K_i K_t]} \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Portanto, percebe-se que o sistema projetado não possui erro em regime. O mesmo ocorre quando  $L = 0$ .

Tendência do distúrbio quando  $L = 0$ .

$$\begin{aligned} (\Omega_{l,\infty} = G_D T_e = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{sR}{N^2 \eta [s^2 R J_{eq} + s(K_t K_p + R B_{eq} + K_t^2) + K_i K_t]} \right) T_e = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{sR}{N^2 \eta [s^2 (R J_{eq}) + s(K_t K_p + R B_{eq} + K_t^2) + K_i K_t]} \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Com o sistema construído, pode-se realizar uma simulação para verificar as saídas de velocidade do motor e da roda, assim como o comando de tensão. Os gráficos da simulação estão presentes nas figuras 4, 5 e 6. Nesses gráficos, o distúrbio é iniciado a partir de 0,1 segundo de simulação. Percebe-se que o sistema não possui erro em regime, como previsto pela teoria.

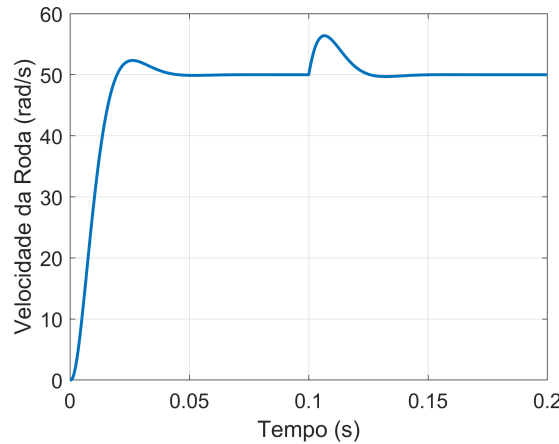


Figura 4: Velocidade da roda para um controlador PI

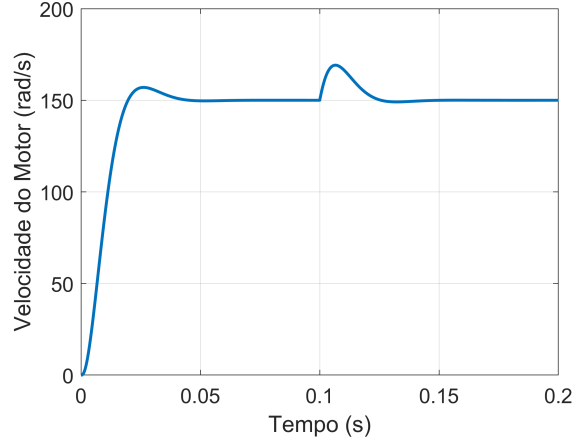


Figura 5: Velocidade de rotação do motor para controlador PI

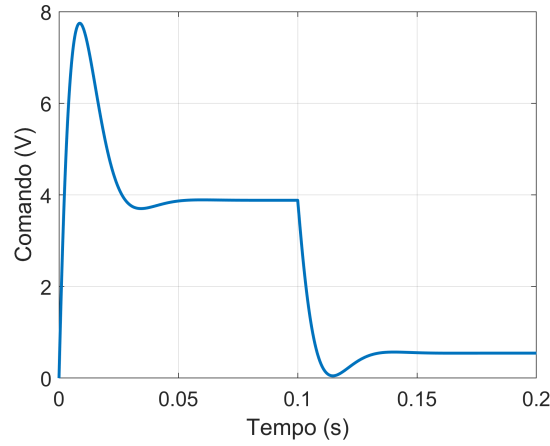


Figura 6: Valor do comando em Volts com o tempo

Percebe-se que o tempo de subida se manteve o esperado de 0,02s e o sobressinal dentro do valor requisitado em sua implementação, com  $Mp = 0,046$ . O erro em regime apresentado é de fato nulo, antes e depois da atuação do distúrbio.

Observa-se que é o termo I do controlador PI que elimina o erro em regime. Isso ocorre devido ao polo extra que é adicionado na função de transferência - esse, na malha fechada, acarreta no zero para o erro quando  $s \rightarrow 0$ . Percebe-se que o comando, após o início do distúrbio, é alterado a fim de compensar a força extra que é adicionada ao sistema. A equação 17 mostra como o controlador PI utiliza o erro para calcular a si mesmo, eliminando esse quando o tempo é suficientemente grande.

$$u = K_p e + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (17)$$

Por fim, percebe-se que a tensão comandada deve cancelar o efeito da perturbação, sendo necessária uma diminuição na tensão quando essa é iniciada, a fim de tornar a velocidade de giro



do motor constante. Além disso, antes de a referência ser atingida, deve-se cancelar o termo de aceleração angular do motor, que se encontra implicitamente na corrente do sistema.

### 3 Aproximação por polos dominantes

A fim de analisar a aproximação feita na seção anterior ( $L \simeq 0$ ), pode-se analisar o efeito do indutor na função de transferência. A figuras 7 representa a comparação entre diferentes saídas do sistema conforme variação do indutor. A figura 8 apresenta os polos de  $G_R$  conforma a variação do valor do indutor.

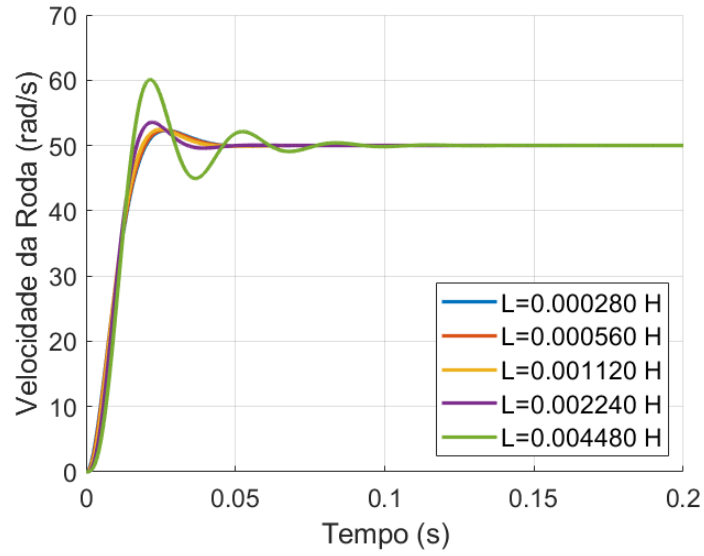


Figura 7: Impacto da variação do indutor para sistema de terceira ordem com controlador PI

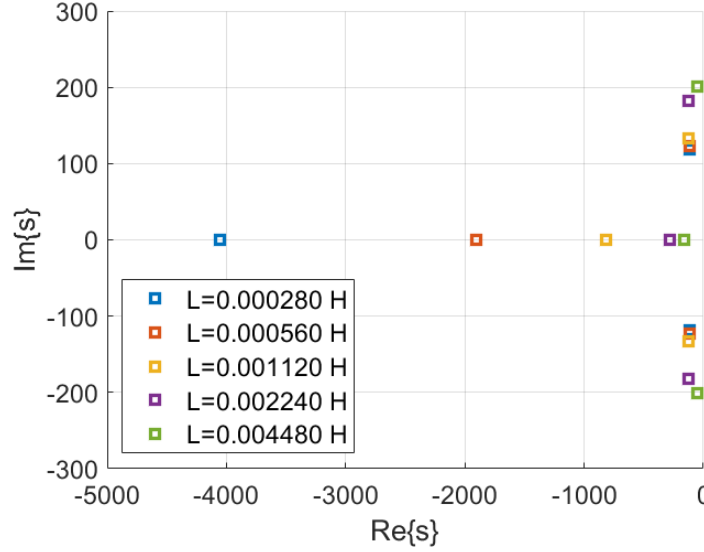


Figura 8: Locais dos polos da função de transferência de terceira ordem conforme variação do indutor

Nota-se que as posições dos polos complexo-conjugados, conforme o valor do indutor diminui, está de acordo com o previsto. Isto é, conforme  $L$  decresce, a distância do polo real à origem é tende a ser muito maior que a distância dos pontos complexos à origem. Isso é uma forma de determinar quando é possível realizar a aproximação por polos dominantes, diminuindo a ordem do sistema. Isso se traduz, na realidade, em uma dinâmica do indutor muito mais rápida que as demais do sistema, podendo ser considerada instantânea para o restante do controlador.

Percebe-se que, conforme  $L$  aumenta, a resposta à entrada degrau se torna mais instável, com tempo de convergência e *overshoot* maior. Isso ocorre pois a posição dos polos nesse caso está mais próxima ao eixo  $y$ , o que configura uma função de transferência mais instável. Caso existisse polos no semiplano positivo, o sistema divergiria.

É possível analisar como o tempo de subida afeta a posição dos polos e também a resposta do sistema. As figuras 9 e 10 apresentam a velocidade da roda conforme variação do tempo de subida e a posição dos polos conforme mesma variação, respectivamente.

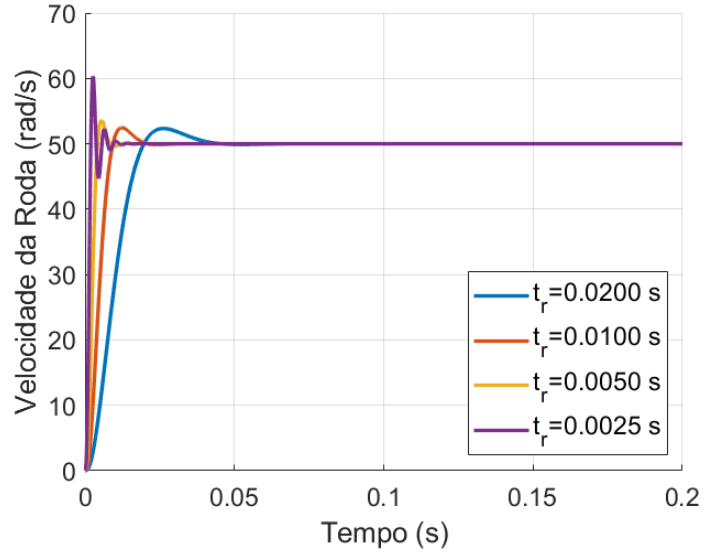


Figura 9: Saída do sistema conforme variação do requisito do tempo de subida

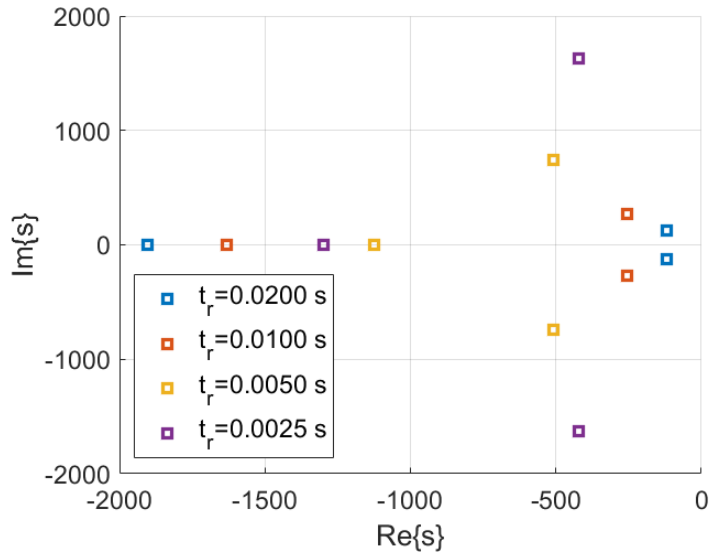


Figura 10: Variação dos polos para função de transferência de terceira ordem conforme variação do requisito do tempo de subida

Percebe-se que a mudança do tempo de subida altera, além do tempo de subida inicial, o tempo de acomodação da resposta ao sistema. Conforme o tempo de subida diminui, o tempo de convergência para uma faixa de estabilidade diminui também, "movendo" os polos da função de transferência para longe do eixo  $y$ , o que implica uma estabilidade maior. Porém, essa movimentação também leva o polo real para um ponto mais próximo da origem, o que acarreta mais erros para a aproximação por polos dominantes.

## 4 Implementação Digital

É possível discretizar as funções de transferência para o controlador PI, a fim de realizar as operações de controle em um microcontrolador ou computador. Para isso, implementou-se o compensador e o pré-filtro discretizados, representados nas equações 18 e 19, respectivamente.

$$u[k] = u[k-1] + (K_p + \frac{K_i T}{2})e[k] + (-K_p + \frac{K_i T}{2})e[k-1] \quad (18)$$

$$y[k] = \frac{(y[k-1] + \frac{K_i}{K_p} T u[k])}{1 + T \frac{K_i}{K_p}} \quad (19)$$

A partir dessas equações, pode-se realizar a simulação para diferentes frequências e demais parâmetros utilizados. A velocidade da roda e o comando são apresentados nas figuras 11 e 12.

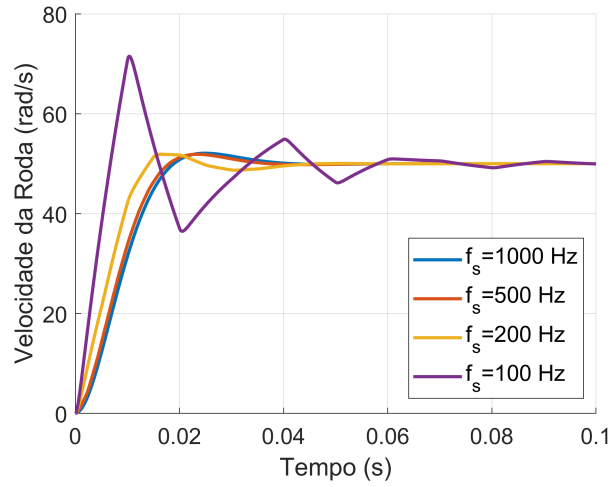


Figura 11: Velocidade da roda para o controlador PI discreto

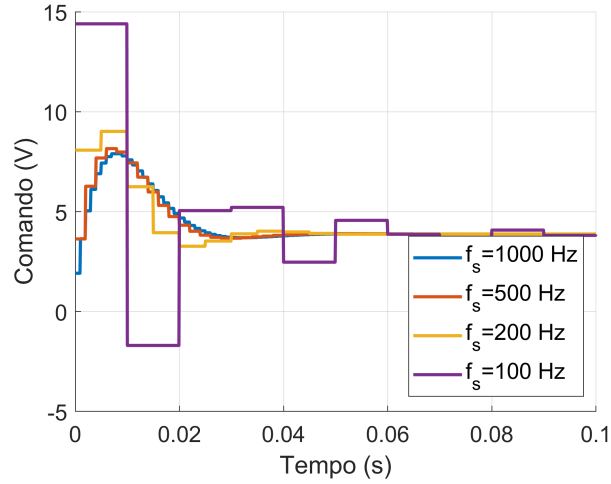


Figura 12: Comando do controlador PI discreto

Percebe-se que a simulação se torna mais suave conforme a frequência aumenta, conforme o esperado. Nota-se também que os requisitos não são completamente atingidos, principalmente quando a frequência é menor e a resposta do sistema a seus próprios valores se torna mais lenta. Por exemplo, com frequência de 100Hz, o *overshoot* se tornou muito maior, assim como o tempo de convergência para a referência.

## 5 Projeto de Anti-windup

Esta seção trata de um método para evitar o efeito de windup, que ocorre na saturação do controlador, quando o integrador acumula mais erros do que deveria. As figuras 13 e 14 representam a velocidade da roda e o comando do controlador, comparando as situações com e sem anti-windup.

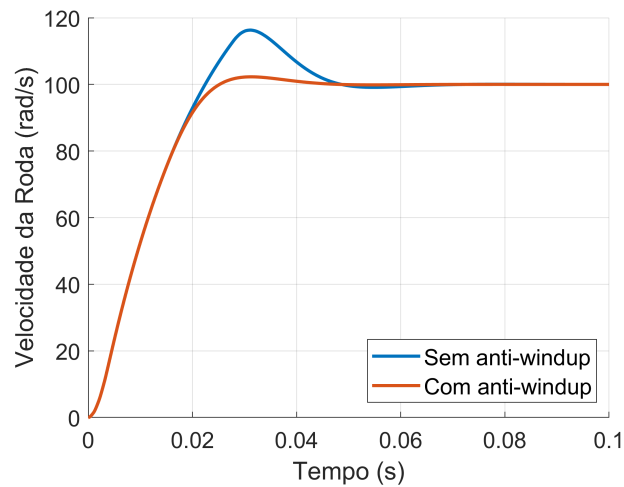


Figura 13: Comparação da velocidade da roda em sistema com e sem anti-windup

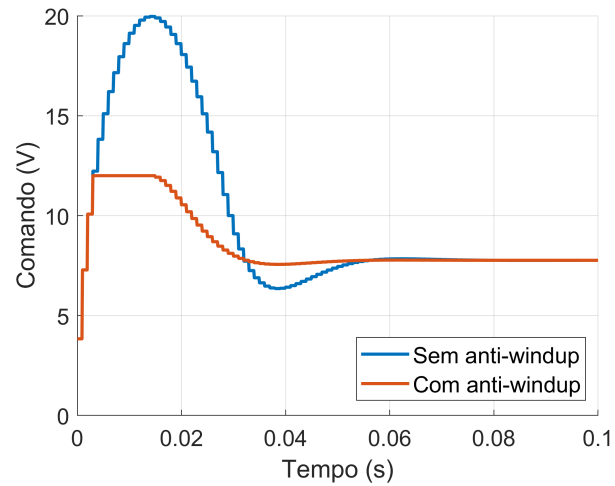


Figura 14: Comparação do comando em sistema com e sem anti-windup

Percebe-se que o anti-windup diminuiu o *overshoot* do sistema e aumentou a velocidade na qual a referência é atingida. Assim, os principais problemas do anti-windup foram realmente mitigados com essa limitação do controlador. Assim, além de melhorar os requisitos, pode-se limitar o comando para valores reais de tensão que o motor pode receber.