布勒斯基（ Boussinesq ）方程： $\vec{u}=(u, v)$

原始变量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla \rho=0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla \vec{u}+\nabla p=\begin{pmatrix}0\\ \rho\end{pmatrix}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=0$$

流函数 - 涡量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla \rho=0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla \omega=\frac{-\partial \rho}{\partial x}$$

$$-\Delta \psi=\omega$$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}, u=-\psi_y, v=\psi_x$$

傅立叶伪谱方法：

- 使用傅立叶变换计算空间微分算子；
- 在物理空间上计算非线性项；

$$\widehat{\nabla f} = -2\pi i \vec{k} \hat{f}$$

$$\hat{f} \otimes \hat{g} = \widehat{f\,g}$$

作业：

- 在正方形区域上用傅立叶伪谱方法求解 Boussinesq 方程；
- 时间方向使用高阶数值积分算子；
- … …

- 使用 FFTW 一维串行函数；
- 手工实现二维的 FFT 并行；
- 计算规模最低要求 512x512, 期望做到 4096x4096;
- $t\in[0,3.16]$ 初值为

$$\omega(x,y;0)=0$$

$$\rho(x,y;0)=50\,\rho_1(x,y)\,\rho_2(x,y)(1-\rho_1(x,y))$$

其中

$$\rho_1(x,y)=\begin{cases}\exp\left(1-\dfrac{\pi^2}{\pi^2-x^2-(y-\pi^2)}\right), if\ x^2+(y-\pi)^2<\pi^2;\\ 0, otherwize.\end{cases}$$

$$\rho_2(x,y)=\begin{cases}\exp\left(1-\dfrac{(1.95\pi)^2}{(1.95\pi)^2-(x-2\pi)^2}\right), if\ (x-2\pi)^2<(1.95\pi)^2;\\ 0, othersize.\end{cases}$$

练习

编写并行程序求解稀疏线性方程组，来自于离散方程

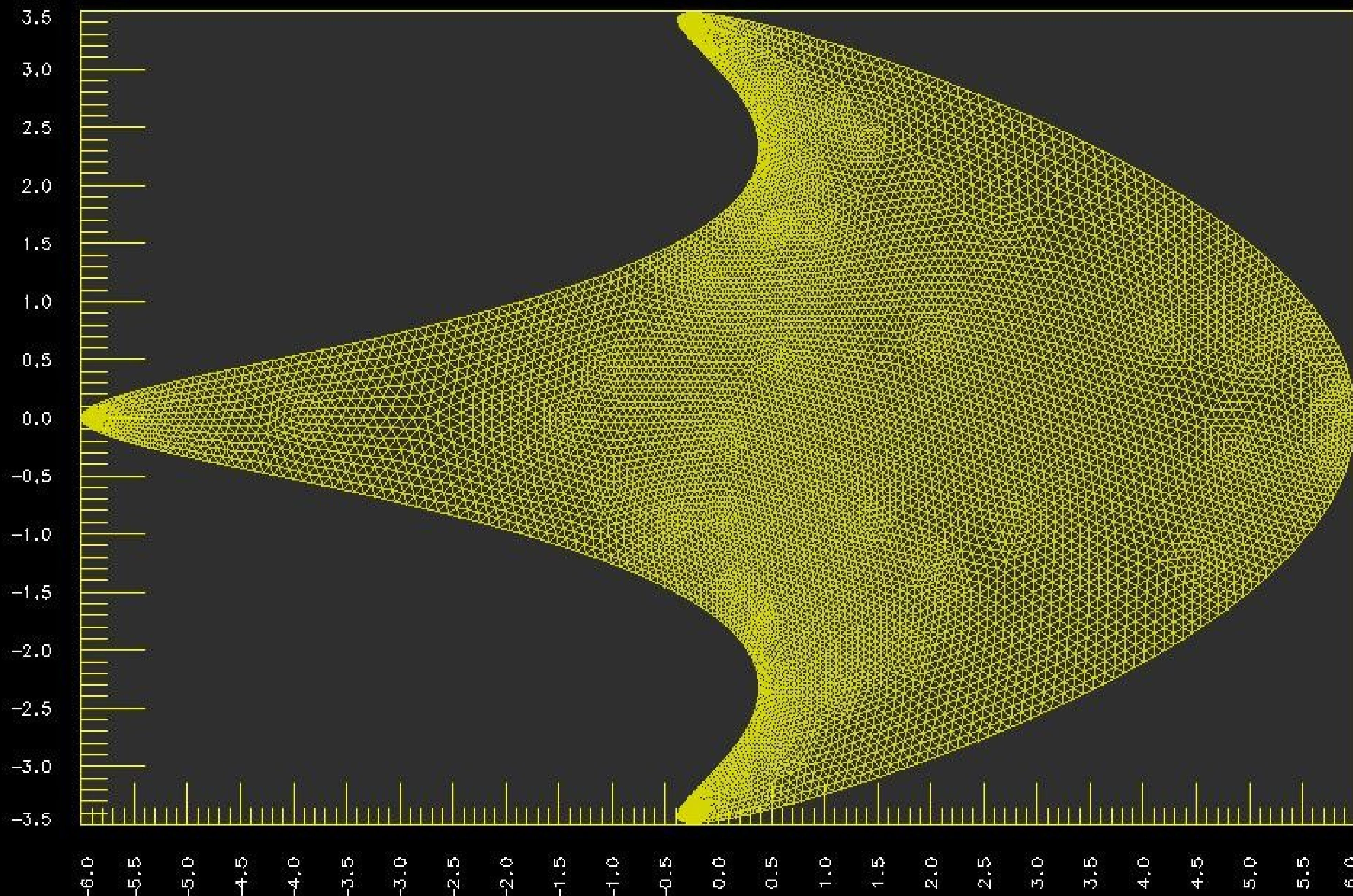
$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot\left(a\nabla u\right)+\vec{b}\cdot\nabla u+c\,u &= f \\
u\big|_{\partial\Omega} &= u_b
\end{aligned}
$$

point.dat:
n # number of point
x y

matrix.dat:
n # number of lines
(nr nc) entry

rhs.dat
n # number of lines
value

solution.dat
n # number of lines
value



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−6.0
−5.5
−5.0
−4.5
−4.0
−3.5
−3.0
−2.5
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0

非重叠区域分解

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)=0, in \quad \Omega$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=u_b$$

整个区域分成两个部分

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$$

$$\Gamma_{in}=\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2$$

$$a^{ij}=\begin{cases} a_1 I, in \quad \Omega_1 \\ a_2 I, in \quad \Omega_2 \end{cases}$$

在子区域的交界面上有

$$\left(a_1 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{+} - a_2 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{-} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(a^{ij} \nabla u \right) v \, dx, \ \forall \ v \in C_0^{\infty}(\Omega) \\ &= \int_{\Gamma_{in}} \left(a_1 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{+} - a_2 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{-} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \, v \, ds - \int_{\Omega} a^{ij} \nabla u \nabla v \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a^{ij} \nabla u \nabla v \, dx = 0 \\ \int_{\Gamma_{in}} \left(a_1 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{+} - a_2 I \nabla u \Big|_{\Gamma_{in}}^{-} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \, v \, ds = 0 \end{cases}$$

求解方案

1．在 Ω_1 上求解 $Dirichlet$ 边值问题

$$\nabla \cdot \left(a^{ij} \nabla u \right) = 0$$

$$u \big|_{\partial \Omega \cap \overline{\Omega}_1} = u_b$$

$$u \big|_{\Gamma_{in}}^{+} = u \big|_{\Gamma_{in}}^{-}$$

2．在 Ω_2 上求解混合边值问题

$$\nabla \cdot \left(a^{ij} \nabla u \right) = 0$$

$$u \big|_{\partial \Omega \cap \overline{\Omega}_2} = u_b$$

$$a_2 I \nabla u \big|_{\Gamma_{in}}^{-} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = a_1 I \nabla u \big|_{\Gamma_{in}}^{+} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$$

3．回到1；

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$\Omega_1 = (0,1/2) \times (0,1), \Omega_2 = (1/2,1) \times (0,1)$$

$$a_1 = 1, a_2 = 10$$

$$u_b = 0, f = 1$$

要求:

- 两个节点并行;
- 使用五点中心差分格式;
- 子区域内部矩阵求解方法自选;

笛卡儿拓扑分区的情况

0,0	0,1	0,2	0,3
1,0	1,1	1,2	1,3
2,0	2,1	2,2	2,3
3,0	3,1	3,2	3,3

i+j= 奇数

i+j= 偶数

交替进行

i+j= 奇数：内边界上使用 Dirichlet 边界条件；
i+j= 偶数：内边界上使用 Neumann 边界条件；

事实上，只需要在每条内边界的两边，分别使用不同的边界条件就可以了。