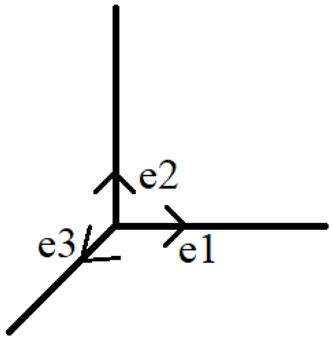
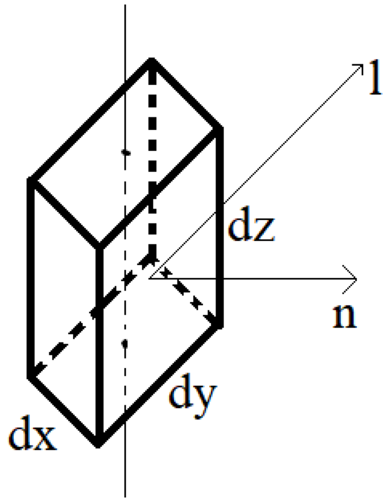
Для описания напряженного состояния среды используются тензорные величины. Например, π - тензор напряжения, который представляет собой нелинейную функцию (по каждому аргументу) двух векторов.

Если взять элемент, площадью $dS$, нормалью $\vec{n}$ и произвольный вектор $\vec{l}$. То значение $\pi(n \cdot dS,\, l)$ - проекция силы, приложенной к элементу $dS$ на вектор $l$.

Для описания нелинейной функции $\pi(a, b)$ достаточно значений $\pi_{ij} = \pi(e_i, e_j)$, где $i, j = 1, 2, 3$ и $e_i, e_j$ - компоненты векторов базиса (например декартова базиса).




Можно показать, что для тензора напряжения выполняется следующее соотношение: $\pi_{ij} = \pi_{ji}$. Иными словами, можно сказать, что тензор напряжения является симметричным тензором. Для доказательства рассмотрим следующий параллелепипед:




Рассмотрим вращающие моменты от сил, действующих на параллелепипед. Пусть $n = e_1$, $dS = dy \cdot dz$. Силу можно считать приложенной к центру прямоугольника, соответствующего элементу площади $dS$. Тогда сила, действующая вдоль плоскости $dy \cdot dz$, равна $\pi(dy \cdot dz \cdot e_1, e_2) = dy \cdot dz \cdot \pi_{1,2}$. Тогда момент данной силы будет равен $M = \frac{dx}{2} \cdot dy \cdot dz \cdot \pi_{1,2}$. Для противоположной грани аналогично. Оба момента "закручивают" тело в одну сторону, поэтому суммарный момент удваивается. Из равенства моментов, получаем следующее равенство: $dx \cdot dy \cdot dz \cdot \pi_{1,2} = dx \cdot dy \cdot dz \cdot \pi_{2,1}$, откуда $\pi_{1,2} = \pi_{2,1}$. Рассмотрев остальные пары сторон параллелепипеда получим аналогичные равенства. Утверждение доказано.

## Закон сохранения импульса.

Рассмотрим произвольный объем $V$ с элементом площади $dS$ и нормалью $\vec{n}$. Тогда полный импульс объема $V$ равен $\vec{I} = \int_V \rho\vec{v}dV$. Сделаем проекции скорости по базисным компонентам: $v_x = (v, e_1)$, $v_y = (v, e_2)$, $v_z = (v, e_3)$. Тогда можно записать проекции импульса тела, объема $V$ вдоль базисных направлений:

$$I_x = \int_V \rho v_x dV, \quad I_y = \int_V \rho v_y dV, \quad I_z = \int_V \rho v_z dV.$$

Изменение компонент импульса может произойти только при взаимодействии с окружающей средой, которая осуществляется через элемент $dS$.

Уравнение импульса в интегральной форме:

$$I_{x,t_2} = I_{x,t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial V} (-\ \rho(v, n)v_x + n_x\pi_{11} + n_y\pi_{21} + n_z\pi_{31})dSdt.$$

Пусть $t_2 = t_1 +\ dt$, тогда

$$\frac{dI_x}{dt} + \oint_{\partial V} \rho(n_x v_x^2 + n_y v_x v_y + n_z v_x v_z)dS = \oint_{\partial V} (n_x\pi_{11} + n_y\pi_{21} + n_z\pi_{31})dS.$$

Если объем $V$ "стягивается" в точку, то тогда справедливо, что:

$$I_x = \int_V \rho v_x dV \approx \rho v_x V,$$

$$\frac{d\rho v_x}{dt} + \frac{1}{V}\oint_{\partial V} \rho(n_x v_x^2 + n_y v_x v_y + n_z v_x v_z)dS = \frac{1}{V}\oint_{\partial V} (n_x \pi_{11} + n_y \pi_{21} + n_z \pi_{31})dS$$

,

вне зависимости от того как производится “стягивание” частные в подынтегральной функции имеют предел, поскольку существуют непрерывные частные производные. Используя теорему Гаусса-Остроградского получим, что

$$\int_V \rho(\frac{\partial}{\partial x}v_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_x v_z)dxdydz = \oint_{\partial V} \rho(n_x v_x^2 + n_y v_x v_y + n_z v_x v_z)dS \approx$$

$$\approx \rho(\frac{\partial}{\partial x}v_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_x v_z).$$

По аналогии получаем, что $\oint_{\partial V} (n_x \pi_{11} + n_y \pi_{21} + n_z \pi_{31})dS \approx \frac{\partial}{\partial x}\pi_{11} + \frac{\partial}{\partial y}\pi_{21} + \frac{\partial}{\partial z}\pi_{31}.$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$\frac{d\rho v_x}{dt} + \rho(\frac{\partial}{\partial x}v_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_x v_z) = \frac{\partial}{\partial x}\pi_{11} + \frac{\partial}{\partial y}\pi_{21} + \frac{\partial}{\partial z}\pi_{31}.$$

Аналогично получаем формулы по направлениям $y$ и $z$:

$$\frac{d\rho v_y}{dt} + \rho(\frac{\partial}{\partial y}v_y^2 + \frac{\partial}{\partial x}v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_y v_z) = \frac{\partial}{\partial x}\pi_{12} + \frac{\partial}{\partial y}\pi_{22} + \frac{\partial}{\partial z}\pi_{32},$$

$$\frac{d\rho v_z}{dt} + \rho(\frac{\partial}{\partial z}v_z^2 + \frac{\partial}{\partial y}v_z v_y + \frac{\partial}{\partial x}v_x v_z) = \frac{\partial}{\partial x}\pi_{13} + \frac{\partial}{\partial y}\pi_{23} + \frac{\partial}{\partial z}\pi_{33}.$$

Нужно заметить, что производные $\frac{d}{dt}$ представляют собой ни что иное, как покомпонентное дифференцирование вектора. В таком случае, три выражения, стоящие в правой части уравнений также должны образовывать вектор. Этот вектор называется **дивергенцией тензора второго порядка**. Вычисляется данная величина так:

$$\lim_{T \to a} \frac{1}{V}\oint \pi(n, b)dS = (a,b)$$

В левой части уравнений также находится тензор, называемый тензором произведения двух векторов, равный

$$v \otimes v\,(a, b) = (v, a) \cdot (v, b)$$

Выражения выше можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\rho\overline{v}}{dt} + div(\rho * v \otimes v) = div\,\pi$$

Энергия

Кинетическая энергия движения молекул состоит из 2 частей:

$$E = \sum\frac{m_i v_i^2}{2} = M\frac{v_{cp}^2}{2} + \sum\frac{m_i(v_i - v_{cp})^2}{2},$$

где $v_{cp}$ - средняя скорость движения молекул.

Будем обозначать ε удельную внутреннюю энергию в единице массы. Тогда полная энергия в единице массы равна

$$E = \rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon = \rho(\frac{v^2}{2} + \varepsilon)$$

Полная энергия не может измениться за счет внутренних взаимодействий. При взаимодействии с поверхностью существует 2 составляющие этих компонент. Первая связана с потоком через поверхность вещества, вторая - внешние силы, изменяющие импульс и совершающие работу. Работа силы равна

$$A = (\overline{F}, \overline{S}) = (F, v)dt = (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)dt =$$

$$= (n_x v_x \pi_{11} + n_y v_x \pi_{21} + n_z v_x \pi_{31} +$$

$$+ (n_x v_y \pi_{12} + n_y v_y \pi_{22} + n_z v_y \pi_{32} +$$

$$+ (n_x v_z \pi_{13} + n_y v_z \pi_{23} + n_z v_z \pi_{33})dSdt$$

$$F_x = dS(\pi(n_x l_1 + n_y l_2 + n_z l_3, l_1)) = dS(n_x\pi_{11} + n_y\pi_{21} + n_z\pi_{31})$$

Конвективный поток:

$$\rho(v, n)(\frac{v^2}{2} + \varepsilon)dSdt$$

Наконец, получаем уравнение полной энергии:

$$\frac{d\rho E}{dt} + \frac{d}{dx}\rho E v_x + \frac{d}{dy}\rho E v_y + \frac{d}{dz}\rho E v_z =$$

$$= \frac{d}{dx}(v_x\pi_{11} + v_x\pi_{12} + v_x\pi_{13}) +$$

$$+ \frac{d}{dy}(v_y\pi_{21} + v_y\pi_{22} + v_y\pi_{23}) +$$

$$+ \frac{d}{dz}(v_z\pi_{31} + v_z\pi_{32} + v_z\pi_{33})$$

В нашем случае, тензор напряжения будет выглядеть следующим образом:

$$\pi(ndS, a) = dS\rho(n, a)$$

Очевидно, что если $a$ будет ортогональна $n$, то $\pi = 0$

$n = e_1,\ a = e_1 \Rightarrow \pi_{11} =-\ \rho$

$n = e_1,\ a = e_2 \Rightarrow \pi_{12} = 0$

$\pi_{13} = 0, \pi_{21} = 0,\ \pi_{22} =-\ \rho, \pi_{23} = 0,\ \pi_{33} =-\ \rho$

Таким образом, тензор напряжения примет следующую форму:

$$\pi = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Существуют термодинамическое величины, связанные с состоянием вещества, давление ρ как раз относится к таким величинам.

**Теорема**. Если вещество однородное и изотропное (все направления одинаковы), то для такого вещества существуют два термодинамических независимых параметра (какое бы значение независимых параметров не задали, мы всегда можем привести вещество к такому состоянию, что эти параметры будут иметь заданную величину).

В качестве независимых параметров возьмем плотность ρ и температуру $T$

Рассмотрим простой случай как одномерную систему уравнений, предположим, что все величины не зависят от $y$ и от $z$. Тогда все производные по $y$ и $z$ у нас будут отсутствовать.

Получим:

$$\frac{d\rho v}{dt} + \frac{d\rho v^2}{dt} =- \frac{d\rho}{dx}$$

Уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho v}{dx} = 0$$

И, наконец, уравнение энергии:

$$\frac{d\rho(\frac{v^2}{2}+\varepsilon)}{dt} + \frac{d\rho(\frac{v^2}{2}+\varepsilon)v}{dx} =- \frac{d\rho v}{dx}$$

Добавим уравнение Клайперона-Менделеева:

$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$

где $\gamma$ - показатель адиабаты ($\gamma$ для каждого газа своя).

**Следствие.**

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \rho v\frac{d\varepsilon}{dx} + (\gamma - 1)\rho\varepsilon\frac{dv}{dx} = 0$$

Сокращаем на ρ:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + v\frac{d\varepsilon}{dx} + (\gamma - 1)\varepsilon\frac{dv}{dx} = 0$$

Подставим:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\rho}(- v\frac{d\rho}{dx} - \frac{d\rho}{dt})$$

Получим:

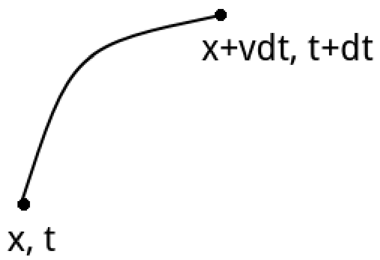
$$\frac{dln(\varepsilon /\rho^{\gamma-1})}{dt} + v\frac{dln(\varepsilon /\rho^{\gamma-1})}{dx} = 0$$

Величину $ln(\varepsilon /\rho^{\gamma-1})$ обозначим σ - удельная энтропия вещества на единицу массы.

Итог:

$\frac{d\rho\sigma}{dt} + \frac{d\sigma\rho v}{dx} = 0$ - уравнение Закона сохранения (энтропия не меняется в процессе движения).

Чтобы это увидеть, введём понятие стационарной производной (производной Лагранжа в координатах). Она показывает, как изменяется величина в выделенной частице газа или жидкости. Если частные производные показывают, как меняется величина например плотности в точке $x,\ t$,




то стационарная производная показывает, как изменяется величина плотности данной частицы, перемещающейся со временем в другое положение. Если рассмотреть момент времени $t$ и момент времени $t + dt$, то новое положение частицы будет $x + vdt$ и новое состояние $w(x + vdt, t + dt)$.

Вычитая $w(x + vdt, t + dt) - w(x, t) = (\frac{\partial w}{\partial x}v + \frac{\partial w}{\partial t})dt$

получим $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x}$

Уравнение $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$ (удельная энтропия) выражает, что стационарная производная от σ равна нулю, т.е. газовая частица не изменяет свою энтропию в процессе движения, пока движение остаётся гладким.

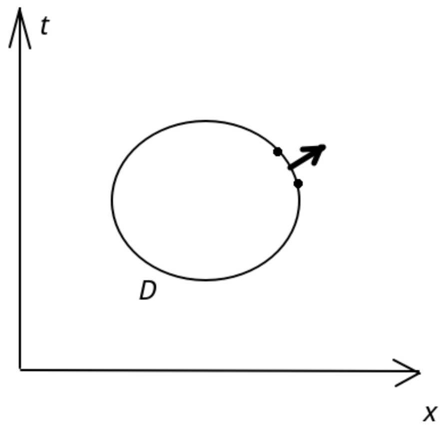
В процессе движения сплошной среды могут иметь место разрывы. Самый простой пример разрыва — поверхность воды в стакане. Между воздухом и водой толщина слоя на котором вещество меняется — это несколько молекулярных слоёв, это приближение механики сплошной среды тождественно равно нулю. Это т.н. контактный разрыв. Есть другие разрывы, в частности ударные волны.

Вспомним, как получаются обобщённые уравнения. Главное:

1. Для уравнения найти такую формулировку, что если функция является решением уравнения, то она удовлетворяет этим условиям
2. Если функция удовлетворяет условиям и является непрерывной и дифференцируемой, то она удовлетворяет нашему уравнению

Если функция, необязательно непрерывная и дифференцируемая, удовлетворяет этим условиям, то это обобщённое уравнение.

Для уравнения как $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0$ берётся плоскость, в ней берётся область $D$. Если функция является решением этого уравнения и обладает



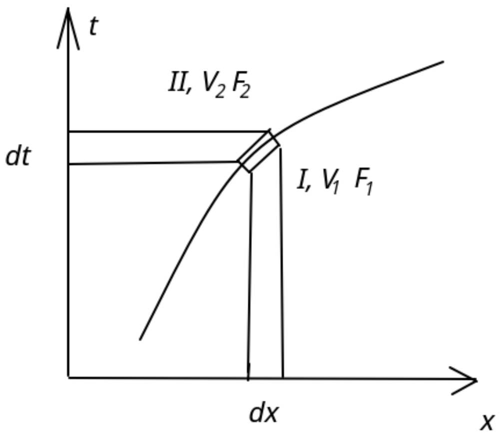
соответствующими производными, то проинтегрировав это уравнение по области, получим, что $\int_D (\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}) dxdt = \oint (n_t u + n_x F) dl, \quad n_x, n_t -$ компоненты вектора нормали. Обычно записывают $\oint - \, udx + Fdt = 0$.

Условие $\oint udx - Fdt = 0$ можно принять за определение обобщённого решения. Если функция такая, что удовлетворяет этому условию для любого $D$, то эта функция представляет собой обобщённое решение нашего закона сохранения. В самом деле, если всё дифференцируемо, она удовлетворяет самому уравнению, если она удовлетворяет этому.
Но есть функции, которые не являются дифференцируемыми, но удовлетворяют таким уравнениям.

Нет точного определения, которые удовлетворяют этому условию, но мы можем их использовать.

Будем считать, что решение представляет собой кусочно-непрерывную функцию, гладкую в областях своей непрерывности и имеет конечное число разрывов, которые представляют собой гладкие линии.

Пусть есть плоскость и траектория разрыва.




Возьмём контур, длина которого стремится к нулю. Будем сжимать его таким образом, чтобы поперечная величина имела порядок малости больше, чем продольная, чтобы при достаточно сильном сжатии мы могли пренебречь интегралом по этой штуке.

Вычислим интеграл $\oint udx - Fdt = 0$. Отрезок можем считать прямым и его уравнение $dx = Ddt$

$V_1 Ddt - F_1 dt - V_2 Ddt + F_2 dt = 0$

$D[V_2 - V_1] = F_2 - F_1 -$ **соотношение Гюгонио.** Оно определяет собой закон сохранения, если решение является разрывным. Изначально придумал Риман, но назвали в честь Гюгонио, потому что он исправил ошибку.

Для газовой динамики есть три основных закона: масса, импульс и энергия

$D(\rho_2 - \rho_1) = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1$

$D(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1) = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 + \rho_2 - \rho_1$

$D(\rho_2(\frac{V_2^2}{2} + \varepsilon_2) - \rho_1(\frac{V_1^2}{2} + \varepsilon_1) = \rho_2 V_2(\frac{V_2^2}{2} + \varepsilon_2) + \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1(\frac{V_1^2}{2} + \varepsilon_1) - \rho_1 V_1$

То, что записал Риман:

$D(\rho_2 \sigma_2 - \rho_1 \sigma_1) = \rho_2 \sigma_2 v_2 - \rho_1 \sigma_1 v_1$

Это не выполняется, если выполняются предыдущие три.

Закон сохранения энтропии нарушается на ударных волнах, потому что там происходят необратимые процессы.

Возьмём простое нелинейное уравнение

$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} = 0$

Продифференцируем

$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

Умножим на $u^2$

$\frac{\partial u^3/3}{\partial t} + \frac{\partial u^4/4}{\partial x} = 0$

Умножим на 3

$\frac{\partial u^3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{4}u^4) = 0$

Обозначим $v = u^3$

$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{4}v\sqrt[3]{v}) = 0$

Для последнего уравнения поток будет $v\sqrt[3]{v}$, для первого $u^2$

Соотношение Гюгония запишется как $D(u_2 - u_1) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$ или $D = \frac{u_2 + u_1}{2}$ или $u_2 = 2D - u_1$.

Пусть $D = 2,\ u_1 = 1$, тогда $u_2 = 3$

В терминах $v$: $v_2 = 8,\ v_1 = 1,\ D = 2$

Проверим: $7 \cdot 2 = \frac{3}{4}(8 \cdot 2 - 1)$ — не выполняется

Энтропийное условие превращается в энтропийное неравенство в общем случае. Можно записать $\oint \rho\sigma dx - \rho v\sigma dt \le 0$. Равняется нулю в случае, если нет разрывов.

Важную роль играет решение тестовых задач, которыми можно смоделировать решение настоящих задач, но которые имеют определённые упрощения.
Покажем одно из таких упрощений и решим задачу о распаде разрыва.

Важное уточнение к соотношению Гюгонио:

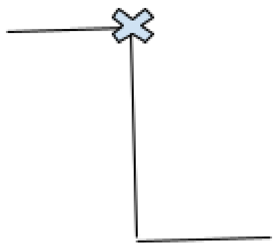
Разрывы бывают 2 типов:

$$D(\rho_2 - \rho_1) = \rho_2 \nu_2 - \rho_1 \nu_1$$

$$(D - \nu_2)\rho_2 = (D - \nu_1)\rho_1$$

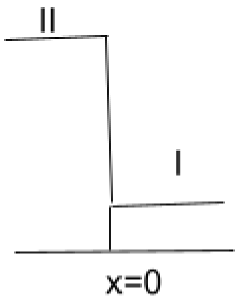
Два выражения представляют собой массу газов, которые проходят через разрыв слева и справа.
Контактный разрыв:
$D = \nu_1$ и $D = v_2$, то $v_1 = v_2$ и тогда
$D(\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1) = \rho_2 v_2^{\ 2} - \rho_1 v_1^{\ 2} + \rho_2 - \rho_1$и $\rho_2 = \rho_1$

Пусть есть разрыв и он возмутился. Отщепилось маленькое возмущение, которое будет двигаться со скоростью распространения малых возмущений, что есть скорость звука. И тогда будет устойчивым если возмущение будет догонять волну и опять с ней сольется и получится новая волна. Если же она будет отставать, то отсюда появится еще одно возмущение. То есть скорость распространения малых возмущений за фронтом ударной волны, должна быть больше чем скорость распространения малых возмущений перед фронтом ударной волны. Скорость ударной волны за фронтом должна быть больше скорости ударной волны, а скорость ударной волны должна быть больше чем максимальная скорость возмущений, которые перед волной.



Задача о распаде разрыва.

Задано для I и II $\rho_1, \rho_2 - \frac{г}{см^3}, \nu_1, \nu_2 - \frac{см}{c^2}, \xi_1, \xi_2 - \frac{см^2}{c^2}$




из условий

$\overline{m} = \alpha m$

$\overline{t} = \alpha t$

$\overline{l} = \alpha l$

$f(x, t) = f(\alpha x, \alpha t) = f(\frac{x}{t}, 1) = f(5, 1)$

$\alpha = \frac{1}{t}, \xi = \frac{x}{t}$

$$\rho(x, t) = R(\xi)$$
$$\nu(x, t) = V(\xi)$$
$$\varepsilon(x, t) = E(\xi)$$

$$R' \frac{\partial \xi}{\partial t} + (RV)' \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \xi v}{\partial x} + P \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$$

Получим 3 уравнения:

$$\xi R' = (RT)'$$

$$\xi(RV)' = (RV^2)' + (\gamma - 1)(RE)'$$

$$\xi(RE)' = (REV) + (\gamma - 1)RET'$$

Решим их

$$E(\xi - V)R' = ERV'$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{V'}{\xi - V}$$

$$\xi(RE)' = REV' + V(RE)' + (\gamma - 1)E(\xi - V)R'$$

1 уравнение умножим на E и вычтем из 3

$$\xi RE' + \xi ER' = E(RV)' + RVE' + (\gamma - 1)REV'$$

$$\xi RE' = RVE' + (\gamma - 1)REV'$$

$$(\xi - V)RE' = (\gamma - 1)REV'$$

$$(\xi - V) = \frac{E'}{E} = (\gamma - 1)RV' = (\gamma - 1)(\xi - V)R'$$

$$(\xi - V)\frac{E'}{E} = (\gamma - 1)V' - (\gamma - 1)(\xi - V)\frac{R'}{R}$$

$$\frac{E'}{E} = (\gamma - 1)\frac{R'}{R}$$

$$(ln\, E)' = (\gamma - 1)(ln\, R)' = (ln\, R'\ )^{(\gamma - 1)}$$

тогда

$$\frac{E}{R^{\gamma - 1}} = A$$

$$E = AR^{\gamma - 1}$$

$$P = (\xi - 1)AR^{\gamma}.$$

Обозначим $(\xi - 1)A$ за Ã. Тогда

$$P = \tilde{A}R^{\gamma}.$$

Получили уравнение, которое характеризует собой постоянство энтропии. Если сжатие адиабатическое, т.е. $A$, одна из переменных энтропии, фиксирована, то давление растет как $R^{\gamma}$. Итак, первое соотношение получено.

Теперь получим второе соотношение, которое будет характеризовать собой движение в автомодели. Рассмотрим первое и второе уравнение. Во второе сразу подставим найденное выражение для *P*. Получаем

$$(\xi - V)R' = RV'$$

$$(\xi - V)(RV)' = RVV' + \tilde{A}\gamma R^{\gamma - 1}$$

Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на $V$

$$(\xi - V)(R'V + RV' - R'V) = RVV' + \tilde{A}\gamma R^{\gamma-1} - RVV'$$

$$(\xi - V)\, RV' = \tilde{A}\gamma R^{\gamma-1}$$

Выразим из первого уравнения $V'$

$$V' = \frac{(\xi - V)R'}{R}$$

и подставим в последнее

$$(\xi - V)^2\, R' = \tilde{A}\gamma R^{\gamma-1}.$$

Полученное уравнение можно проинтегрировать.