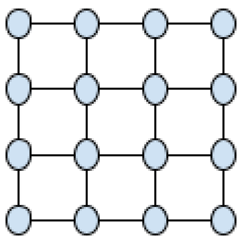
Построение расчетных сеток

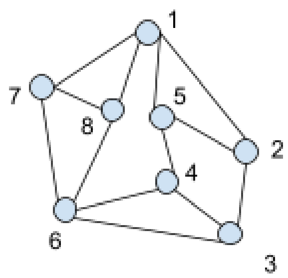
Большинство алгоритмов, связанных с решением задач математической физики, используют так называемые сетки. Например, метод конечных разностей. Он говорит следующее: мы заменяем поиск функции определенной области поиском значений функции в определенных точках, а производные дифференциальных уравнений заменяем на соответствующие разности. Мы должны задать набор точек, но эти точки еще не образуют сетку, однако для того, чтобы составить разность, мы должны указать между какими элементами мы будем производить эту операцию взятие разности, разделенную на шаг соответствующей переменной. Таким образом у нас образуется некая структура сетки.



Простейшим видом сетки является прямоугольная равномерная сетка. По мере того, как задачи усложнялись, усложнялись и виды сеток, например, для обтекания летательных аппаратов.

Равномерная прямоугольная сетка обладает тем свойством, что мы её можем занумеровать индексами i и j. Структура сетки определяется индексом. Такие сетки называют структурированными сетками. У таких сеток ближайшие соседи определяются ее нумерацией. Линии, соединяющие узлы, называются рёбрами. Рёбра образуют ячейки. Эти элементы имеют разную размерность. В трехмерных сетках появляется такое понятие, как грань сетки.

На ряду с структурированными сетками, существуют и неструктурированные сетки. Узлы сетки необходимо занумеровать. В памяти мы должны хранить координаты узлов (x, y).



Координаты ячеек хранить не обязательно. Рёбра необходимо тоже занумеровать. В отличие от структурированных сеток, для неструктурированных сеток не существует правила нумерации.

Для того, чтобы описать такую сетку, существуют способы описания. Мы задаем массив размерностью $k = 1... N_{\text{ребер}}$. Элементы этого массива будут следующие: первыми элементами будут 2 номер узлов, которые являются границами нашего ребра. Между геом. элементами сетки существуют важные соотношения: один элемент является границей другого элемента. Границей ребра являются две точки.
Формальная цепь - формальная сумма элементов.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

Эти формальные цепи можно умножать на числа и складывать между собой.
Для каждого элемента определим целочисленные коэффициенты, которые принимают значения 0, 1, -1, которые называются коэффициентами рецидентности.

$$id(e_1,\ e_2)$$

Этот коэффициент не равен нулю, если размерность второго элемента на единицу меньше размерности первого.

$$de = \Sigma\, id(e_j,\ e_j) e_j \text{ - граница элемента}$$

Если мы возьмём границу от границы, она равна нулю.

$$\Sigma\, id(e_j, e_j) e_j \Sigma\, id(e_j,\ e_k) \equiv 0.$$

В ячейках задаём базис из двух элементов. Этот базис может быть либо левым, либо правым. Если говорить насчет рёбер, можно задавать произвольное направление. Если говорить насчёт ячеек, мы можем задать направление рёбер, чтобы во всех ячейках был правый базис.

К базису ребра присоединяем вектор внешней нормали в начало и смотрим, какой получился базис. Если базис получился правый, то коэффициент рециденции равен единице, если левый - минус единице. Если обход осуществляется против часовой стрелки - то базис правый. Если против часовой стрелки - левый. И в этом случае легко убедится, что граница от границы равна 0.

Необходимо учитывать направленность точек. Будем хранить ребра как две точки - начало ($N_{нач}$) и конец ($N_{кон}$) ребра. Каждое внутреннее ядро граничит с двумя ячейками, а граничное ядро граничит только с одной ячейкой. Если все ячейки имеют правый базис, то тогда один из этих коэффициентов будет положительный, а другой отрицательный. Данная информация хранится как два числа - положительная или отрицательная единица. Если же ребро граничное, то второе число равно нулю.

Таким образом мы задаем полную информацию о структуре сетки. Информацию о сетке мы записываем в виде строки как 4 числа в таком порядке: номер начальной точки, номер конечной точки, номер первой отрицательной ячейки, номер второй отрицательной ячейки.

Построим для нашей сетки некоторые строки. Для первой строки или же первого ребра:
Точки для этого ребра будут равны $N_{нач} = 8$ и $N_{кон} = 6$. Первая ячейка (номер 2 на схеме) будет отрицательная, а второй ячейки у нас нет.
И того получим строку 8 6 2 0
Теперь построим для 5 ребра:
$N_{нач} = 3$ и $N_{кон} = 4$, первая ячейка под номером 7, а вторая - 1.
И того получим строку 3 4 7 1.

Такие операции мы должны провести для всех ребер и получить 16 строк. После заполнения всех строк мы получим полную информацию о нашей сетке. Эта информация нам может понадобиться например для нахождения першин дальней ячейки. Для этого нам надо перебрать все ребра и просмотреть встречается ли эта ячейка среди номеров ячеек, которые связаны с данным ребров. Например ячейка номер 1. Она встречается в ребре 5 и ребре 3. Смотрим вершины всех ребер, которые являются границей данной ячейки. Тем самым мы найдем все вершины. каждая вершина должна встретиться дважды.

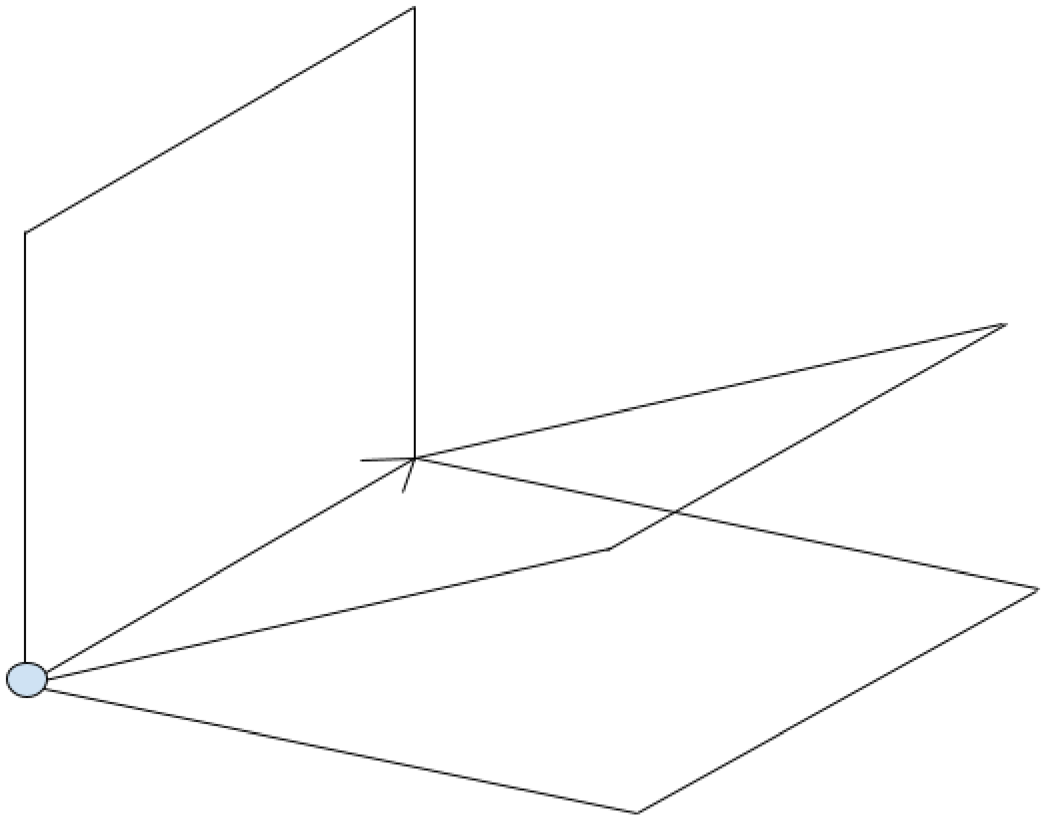
Если много раз будем обращаться к сеточной геометрии, а это придется делать при аппроксимации дифференциальных операторов, то нам выгоднее будет эту информацию заранее просчитать и запомнить. Для этого надо будет создать две таблицы, одна из которых будет связана с ячейками, а другая с узлами.

Относительно ячеек и узлов существует еще понятие двойственности. Двойственность - элементы, размерности которых в сумме составляют исходную размерность пространства. Например для элемента размерности 1 двойственными будут являться элементы размерности 1.

Для описания связи связи между ячейками нам понадобится массив строк с индексами K = 1…N (N - число ячеек). Для каждой ячейки мы должны указать количество и номера ребер, которые составляют нашу ячейку. Ребро указывается со знаком +, если коэффициент рецензентности положительный, и с - в противном случае. Например для ячейки список ребер будет выглядеть следующим образом: 4 (кол-во) 5 3 -6 -7(список ребер). Если отсутствует реберное описание, то для каждого ребра надо указать начальную и конечную точку.

Для описания связи связи между ячейками нам понадобится массив строк с индексами K = 1…N (N - число узлов). Для каждого узла мы должны указать количество и номера ребер, которые сходятся в этой точке, или же указать ребра, для которых узел является граничным. Тут так же, как и при описании ребер ячеек, необходимо учитывать коэффициент рецензентности. Например для 1 узла список ребер будет выглядеть так: 3 (кол-во) 13 -15 -14 (список ребер).

В трехмерной структуре двухмерного массива нам будет недостаточно. По сложности описание будет таким же. Нарисуем схему.



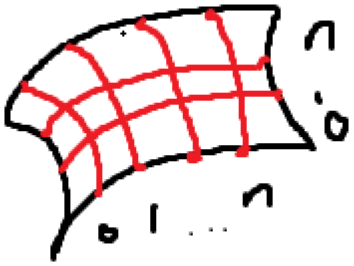
Рассматриваемое ребро изображено стрелкой. У нас по прежнему будет две точки - начала и конца. У них также будут знаки. Обозначим эти точки как $N_{у1}$ и $N_{у2}$. Теперь мы должны определить кол-во граней, которые сходятся в этом узле, например это будут $N_{г1}$, $N_{г2}$,..., $N_{гn}$.

Двойственное описание грани. Грань разделяет две ячейки, если она не граничная. Значит у нас должно быть два номера ячеек, для которых эта грань является границей. Здесь так же, одна ячейка будет отрицательной, а другая положительной.

Часто вместе с обычной сеткой используют двойственную. В каждой ячейке можно отметить центр тяжести, или другие величины. Если соединить такие точки, то возникнет связанное с этой парой ячеек ребро новой сетки. Вокруг каждой ячейки образуется еще одна ячейка. Так образуется двойственная сетка. Такие сетки часто используются в УМФ.

Блочно-структурированные сетки. Эти сетки достаточно гибкие для описания формы области, но не всегда на них хорошо применяется аппроксимация. Если есть область сложной структуры, то ее можно разбить на более простые области, в каждой из областей можно построить свою структурированную сетку. Сейчас для расчета сложных областей применяют либо неструктурированные сетки, либо блочно-структурированные. Внутри каждого элемента области строится своя структурированная сетка.

В блочно-структурированных сетках часто встречаются такие элементы как криволинейные четырехугольники. На каждой стороне задано некоторое кол-во узлов, на противоположных сторонах кол-во узлов одинаковое, мы должны провести линии сетки.



Возьмем решетку из упругих нитей, связанных между собой, а затем растянем ее так, чтобы узлы попали в начальные точки на криволинейном четырехугольнике.

Предположим, что начальный размер решетки сильно меньше размера нашей области, тогда она подвергается сильному растяжению.
Получим дискретное уравнение и будем использовать принцип того, что потенциальная энергия системы в положении равновесия будет принимать минимальное значение. Потенциальная энергия всей системы складывается из потенциальной энергии ее узлов. Узлы сетки заномируем двумя индексами от 0 до n.

По закону Гука, энергия растянутого тела выражается как

$$\Pi = k\frac{(l-l_0)^2}{2}$$

Предположим что k для всех элементов одинаковы.
Так как l_0 значительно меньше l, то формулу можно записать в виде

$$\Pi = k\frac{l^2}{2}$$

Есть два типа элементов: горизонтальные и вертикальные
Длина элемента сетки задается как $\Delta x^2 + \Delta y^2$

Для получения полной потенциальной энергии надо просуммировать потенциальные энергии всех элементов сетки

$$\Pi = \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} k\frac{(x_{i+j}-x_{i})(y_{i+j}-y_{i})^2}{2} + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(x_{i+j}-x_{i})(y_{i+j}-y_{i})^2}{2}$$

Если зафиксировать узлы, то достаточно выписать условие минимума потенциальной энергии

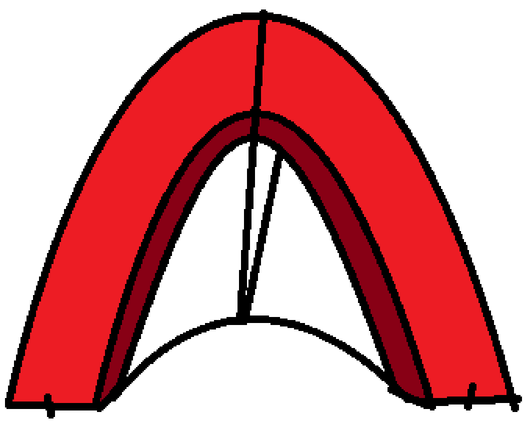
$$\frac{\delta\Pi}{\delta x_{ij}} = 0 \quad \frac{\delta\Pi}{\delta y_{ij}} = 0$$

Решая первое уравнение получим:

$$\frac{\delta\Pi}{\delta x_{ij}} =$$
$$(x_{i+j} - x_{i}) - (x_{i+j} - x_{j}) + (x_{i+j} - x_{i}) - (x_{i+j} - x_{j}) = 0$$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta y_{ij}} = (y_{i+j} - y_{i}) - (y_{i+j} - y_{j}) + (y_{i+j} - y_{i}) - (y_{i+j} - y_{j}) = 0$$

Возьмем случай сильной выпуклости. В таком случае траектория от точки А до точки В тоже должна быть довольно вытянутой. Однако, за счет силы упругости она сократится. На рисунке ниже изображен такой случай. Вертикальные линии тянут наверх, горизонтальные - вниз. Коэффициенты жесткости у линий одинаковые.



В случае малого кол-ва вертикальных линий и большого кол-ва горизонтальных линий мы не получим сетку.

Из формулы

$$П = \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} k_x \frac{(x_{i+j}-x_i)^2+(y_{i+j}-y_i)^2}{2} + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1} k_y \frac{(x_{i+j}-x_i)^2+(y_{i+j}-y_i)^2}{2}$$

Выберем k_x и k_y таким образом, чтобы потенциальные энергии горизонтальных и вертикальных линий были одинаковые:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} k_x \frac{(x_{i+j}-x_i)^2+(y_{i+j}-y_i)^2}{2} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1} k_y \frac{(x_{i+j}-x_i)^2+(y_{i+j}-y_i)^2}{2}$$

$$\frac{k_x}{k_y} = \frac{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} l^2_{ij+0.5}}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1} l^2_{ij-0.5}}$$

Коэфы определяются с точностью до остатка, поэтому можем предположить, что $k_x k_y = 1$

Отсюда k_x и k_y однозначно определяются соотношениями.

$$k_x k_y = 1 \Rightarrow \quad k_y = 1/k_x \Rightarrow k_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} l^2_{ij+05}}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1} l^2_{ij-0.5}}}$$

Не всегда в центре сетки значение потенциальной энергии равно нулю. Допустим $Ф(x, y) = 0$. Тогда перемещение узлов должно быть связано следующим соотношением: $Ф(x(y), y) = 0$. Продифференцировав соотношение получаем:

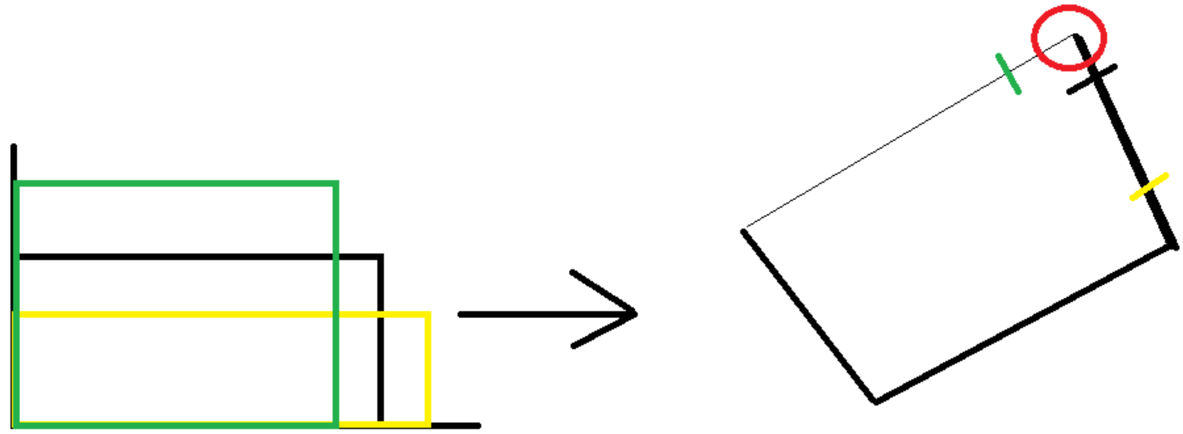
$\frac{\delta Ф}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta y} + \frac{\delta Ф}{\delta y} = 0$. Отсюда $\frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{\frac{\delta Ф}{\delta y}}{\frac{\delta Ф}{\delta x}}$

В частности, $\frac{\delta П}{\delta x_{0j}}\frac{\delta x_{0j}}{\delta y_п} + \frac{\delta П}{\delta y} = 0$

$$\frac{\delta П}{\delta x_{0j}}\frac{\delta Ф}{\delta y_п}\Big|_{x_{0j}y_{0j}} - \frac{\delta П}{\delta y_{0j}}\frac{\delta Ф}{\delta y_п}\Big|_{x_п y_п} = 0$$

Возьмем на плоскости некоторый прямоугольник с соотношением сторон, равному $\sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N-1} l^2_{ij+05}}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-1} l^2_{ij-0.5}}}$.

Попробуем его конформно отобразить в криволинейную плоскость. Для начала отобразим три заранее выбранные точки. Тогда существует лишь единственное отображение четвертой точки, чтобы отображенный четырехугольник совпадал с изначальным.



Конформное отображение определяется в виде двух гармонических функций, каждое удовлетворяет уравнению Лапласа. Можно показать, что эти функции являются минимумом следующего функционала

$$\int_0^{l_a}\int_0^{1/l_a} \left(\frac{\delta x}{\delta a}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta b}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta b}\right)^2 dadb$$

Найдем соотношение $\frac{l_a}{l_b} = \varkappa$, в нашем случае $l^2_a = \varkappa$. Подставим соотношение в верхний интеграл:

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\delta x}{\delta a}\right)^2 + l^2_a\left(\frac{\delta x}{\delta b}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)^2 + \frac{1}{l^2_a}\left(\frac{\delta y}{\delta b}\right)^2 dadb$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\delta x}{\delta a}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)^2 dadb}{\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\delta x}{\delta b}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta b}\right)^2 dadb}$$