Автомодельные уравнения:

$(\xi - \nu)R' = RV' \mid \cdot V$

$(\xi - \nu)(RV)' = RVV' + P'$

$(\xi - \nu)(R'V + RV' - R'V) = RVV' - RVV' + P'$

$(\xi - \nu)RV' = P' = A\gamma\rho^{\gamma-1}R'$

$(\xi - \nu)^2 R' = A\gamma R^{\gamma-1}R'$

1) $R' = 0$

2) $(\xi - \nu)^2 = A\gamma R^{\gamma-1}$

$\sqrt{A\gamma}\frac{\gamma+1}{2}R\frac{\gamma-3}{2}R' =\mp 1.$

$(\sqrt{A\gamma}\frac{\gamma+1}{2}\frac{(R\frac{\gamma-1}{2})}{\gamma-1}2)' =\mp 1$

$\xi - V =\mp \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$V = \xi \pm \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$V' = 1 \pm \frac{A\gamma(\gamma-1)R^{\gamma-2}R'}{2\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}} = 1 \pm \frac{\gamma-1}{2}\sqrt{A\gamma}R^{\frac{\gamma-3}{2}}R'$ - подставляем в изначальное уравнение, получим:

$\mp \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}(1 + \frac{\gamma-1}{2})R' = R$

В итоге получаем:

$P = AR^{\gamma-1}$

$V = \xi \pm \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$\pm \xi = I^{\pm} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$\xi =\pm I^{\pm} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$\pm I^{\pm} \mp \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}} = V \pm \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

$\pm I^{\pm} = V \pm \sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}}$

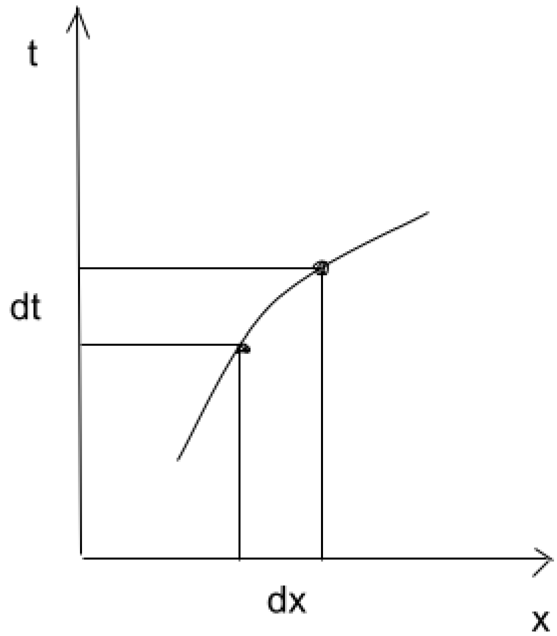
$- 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1-\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma-1}$

$V + \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}} = I^{+}$

$V - \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma R^{\gamma-1}} = I^{-}$

Течения, в которых один из инвариантов является постоянным, называют простыми волнами. В данном случае - центрированная волна.
Мы получили решение для частного случая.

Пусть у нас есть два постоянных течения. Есть два случая: либо это контактный разрыв, либо это ударная волна. В любом случае в точке разрыва должны быть выполнены соотношения Гюголя. Причем должны быть выполнены еще энтропийные неравенства. Теперь если это решение будет волной развешивания, то в точке не будет разрыва, непрерывное решение.
Как движется разрыв производных? И справа и слева уравнения должны быть выполнены в любом случае.



$dx = Ddt$

$(\frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}Ddt)_{I} = (\frac{du}{dt}dt + D\frac{du}{dx})_{II}dt$

$[\frac{du}{dt}] = (\frac{du}{dt})_{II} - (\frac{du}{dt})_{I}$

$[\frac{du}{dt}] + D[\frac{du}{dx}] = 0$

$\frac{du}{dt} + \frac{dF(u)}{dx} = 0$

$\frac{du}{dt} + A(U)\frac{du}{dx} = 0$

$[\frac{du}{dt}] + A(U)[\frac{du}{dx}] = 0$

$A(u)[\frac{du}{dx}] = D[\frac{du}{dx}],\ A(U) = \frac{dF(U)}{dU}$

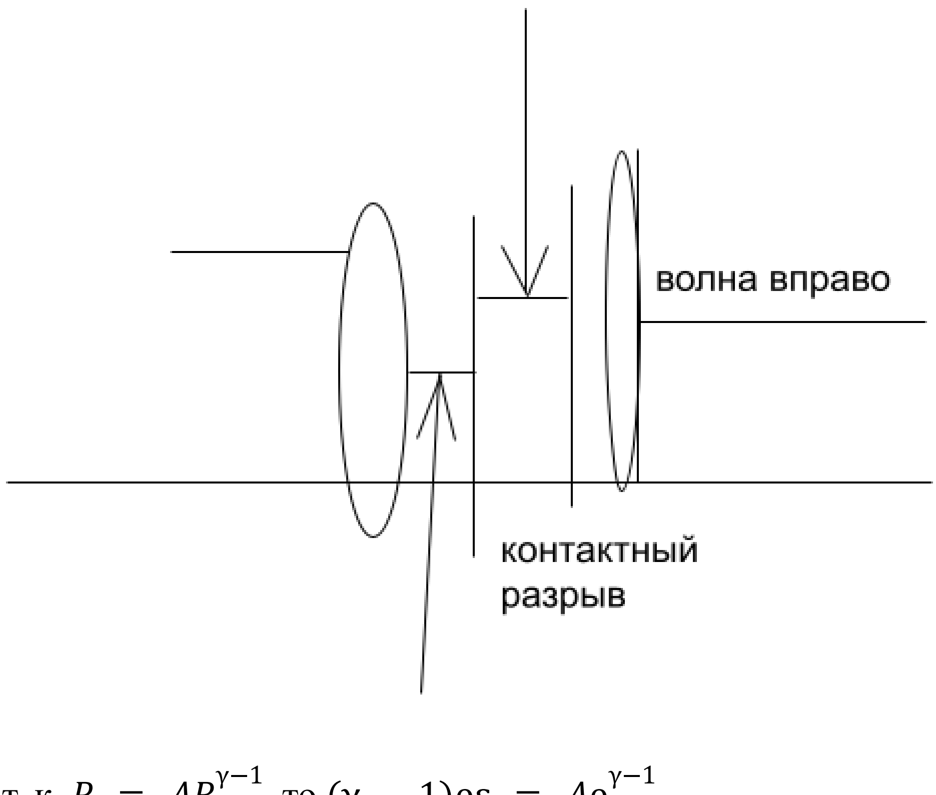
$D_1 = \upsilon + C$

$D_2 = \upsilon$

$D_3 = \upsilon - C$

$C = \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\frac{\gamma\rho}{p}}$

Если у нас есть бегущие волны, ни одна волна не может догонять другую. Между волнами может быть область постоянного течения. Эта область постоянного течения должна сопрягаться с другой областью постоянного течения. Она не может сопрягаться с помощью ударной волны. Второй точкой сопряжения может быть контактный разрыв.



т. к. $P = AR^{\gamma-1}$, то $(\gamma - 1)\rho\varepsilon = A\rho^{\gamma-1}$

$A = \frac{(\gamma-1)\varepsilon}{\rho^{\gamma-1}}$

$\frac{\varepsilon_1}{\rho 1^{\gamma-1}} = \frac{\varepsilon_2}{\rho 2^{\gamma-1}}$

$V_2 + \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_2} = V_1 + \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_1}$

V_2 , то определяем как p(V_2)

В ударный момент давление меняется.

$V_1(p) = V_2(p)$ - контактный разрыв

Поиск в точке:

$\xi - V = \pm \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$

$\frac{x}{t} = V \pm \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$

Но работает только для идеального газа.

Методы построения ММ

$\Phi = \int_a^b L(U, U', x)dx$

Пример натянутой струны:

mgy

$m = dx\rho(x)$

$L = \int \sqrt{1 + (\frac{du}{dx})^2} dx$ - длина струны

$\Pi = (k(\frac{du}{dx})^2 - \rho g u)$dx - суммарная энергия

$\Phi = \int_a^b (k(x)(\frac{du}{dx})^2 - g\rho(x)u)dx$ - функционал

$\Phi(u^T)$, где Т - точная

$\Phi(u^T) < \Phi(u)$

Любое u можно представить в виде $u^T + \Delta u$

$\Delta u = u - u^T$

$\Phi(u^T) < \Phi(u) = \Phi(u^T + \Delta u)$

Формула Т.

$(\frac{d\Phi}{du})_{u^T}\Delta u + \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{du^2}\Delta u^2 > 0$

$\frac{d\varphi}{du}\delta u$ - называют первой вариацией функционала

Доказательство:

Пусть $|\frac{d^2\varphi}{du^2}| < M$, тогда $(\frac{d\Phi}{du})_{u^T}\Delta u + \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{du^2}\Delta u^2 < M\frac{\delta u^2}{2}$

Пусть $\frac{d\varphi}{du}\delta\hat{u}$= A, A < 0. Возьмем тогда $\alpha\hat{u}$. Она будет равна αA, при этом

$\alpha A + MA\alpha^2 <= (\frac{d\Phi}{du})_{u^T}\Delta u + \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{du^2}\Delta u^2$

$\Phi(\alpha\hat{u}) <= \alpha A + M\frac{\alpha^2}{8}$. Выбираем такое α > 0, чтобы все это выражение было меньше нуля.

$\frac{\alpha}{8} < \frac{M}{A}, \alpha < \frac{\delta M}{A}$.

Условие первой вариации функционала служит для получения уравнения математической модели

$$\int_a^b k(x)(\frac{du}{dx})^2 - \rho(x)gu\,dx = min.$$

$$\int_a^b k(x)(\frac{du^T}{dx} + \frac{d\delta u}{dx})^2 - \rho g(u_p + \delta u)dx =$$

$$\int_a^b k(x)(\frac{du^T}{dx})^2 + 2k(x)\frac{du^T}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + k(x)(\frac{d\delta u}{dx})^2 - \rho g u^T - \rho g\delta u dx$$

Части, которые содержат линейные члены δu (отмечено желтым), являются первой вариацией функционала

$$\int_a^b 2k(x)\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} - \rho g\delta u dx = 2k(x)\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx}\Big|_a^b - \int_a^b 2\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} + \rho g\delta u dx$$

= 0

Мы должны задать краевые условия. Положение струны не может быть однозначно определено, если не определено однозначно положение ее концов. Зададим самые простые: $u(a) = u_1;\ u(b) = u_2;$

Тогда δu на концах не может быть производной - она должна обращаться в нуль. Но если δu = 0 на концах, то от верхнего уравнения остается:

$$\int_a^b 2\left(\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} + \rho g\right)\delta u dx = 0$$

В любой внутренней точке подинтегральное выражение обращается в нуль.

$$\frac{d}{dx}k(x)\frac{du}{dx} + \frac{\rho(x)g}{2} = 0$$

Принцип наименьшего действия. Теорема Нётер.

Предположим, есть механическая система. Она характеризуется конечным набором параметром $q_1,\ q_2,\ ...\ q_n$. Эти величины зависят от времени (q = q(t)). Введем обозначение $\dot{q}_i(t) = \frac{dq_i}{dt}$

Такие величины q называют обобщенными координатами механической системы, а q’ - обобщенными скоростями.

Пример: материальная точка. В пространстве характеризуется тремя координатами - x, y и z. Обобщенные координаты совпадают с декартовыми координатами. Обобщенная скорость - обычная скорость.

Пример 2: математический маятник. У нее меньше степеней свободы, чем у материальной точки, поэтому можно не использовать координаты для ее описания, достаточно использовать угол отклонения φ. φ определяет полностью систему. Обобщенная скорость - угловая скорость.

Пример 3: двойной маятник. У него уже есть два угла отклонения - следовательно, две обобщенные координаты.

Если система замкнута и предоставлена самой себе, то ее положение можно описать функцией Лагранжа $L(q_1 ... q_n,\ q'_1 ... q'_n)$, которая зависит от обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Если функция Лагранжа определяет положение механической системы, то она определяет и все законы, которые двигают эту систему. Если она зависит от времени, то это означает, что физ. законы тоже зависят от времени.

Функция Лагранжа равна разности между кинетической и потенциальной энергией. Пусть у нас имеется МС, которая характеризуется своим набором координат в t_1, в t_2 характеризуется другим. Как будет двигаться

система из перехода t_1 в t_2? Мы можем составить много возможных траекторий из одной точки в другую, но истиная среди них лишь одна, которой система пойдет на самом деле.
Принцип наименьшего действия Гамильтона-Остроградского говорит следующее:

Составим функционал $S = \int_{t1}^{t2} \mathrm{L}dt$. Верная траектория та, при которой S - наименьшая.
У верной траектории первая вариация функционала всегда равна нулю.
Потенциальная энергия не зависит от скоростей, но зависит от координат.
Кинетическая - и от скоростей, и от координат.
Для МС кинетическая энергия должна быть квадратичной функции обобщенных скоростей порядка 2, т.е. туда должны войти квадраты скоростей.
$\frac{\delta K}{\delta \dot{q}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}$ - обобщенный импульс.

Сумма импульсов помноженных на обобщенную скорость равна двойной кинетической энергии.

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\mathrm{K}$

Это свойство мы будем использовать ниже.

Первая вариация:

$$\delta S = \int_{t1}^{t2} [L(\overline{q}, \overline{\dot{q}}, t) - L(\overline{q} + \overline{\delta q}, \overline{\dot{q}} + \overline{\delta \dot{q}}, t)]\mathrm{d}t = \ldots$$

Если t встречается, закон сохранения будет нарушен.

$\overline{\delta q}$ и $\overline{\delta \dot{q}}$ - векторный набор, каждый из них независим.
Разложим с использованием формулы Тейлора:

$$\ldots = \int_{t1}^{t2} [L(\overline{q}, \overline{\dot{q}}) - L(\overline{q_i}, \overline{\dot{q}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i] dt \quad = \ldots$$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

$$\ldots = \int_{t1}^{t2} [(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}) \delta q_1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{d}{dt} + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta q_i)] dt = \ldots$$

Координаты здесь зафиксированы, поэтому $\delta q_{1.}$ не может быть никаким, кроме нуля.

В результате получим:

$$\ldots = \int_{t1}^{t2} [(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta q_{i.}^{\bullet}})\delta q_{i.}]dt = 0$$

Отсюда мы получаем уравнения Лагранжа 2-го рода. Их выполнение равносильно принципе наименьшего действия.

Принцип наименьшего действия заключается в том, что поведение механической системы описывается уравнения Лагранжа 2-го рода.

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta q_i^{\bullet}} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0$$

i = 1 … n

Старую механику данные уравнения не опровергают. Рассмотрим поведение материальной точки в силе тяжести. Есть три координаты x1, x2, x3 и сила тяжести (-g), действующая вдоль x3. Тогда кинетическая энергия точки массы m равняется:

$$K = m\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3}{2}$$

Потенциальная энергия П будет равняться:

$$П = mgx_3$$

$$L = m\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{2} - mgx_3$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_1^{\bullet}} = mx_1^{\bullet}, \frac{\delta L}{\delta x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}mx_1^{\bullet} = 0$$

В направлении x1 точка сохраняет равномерное движение.

$\frac{d}{dt}m\frac{dx_1^{\bullet}}{dt} = 0$ - данная запись правильна в теории относительности.

Относительно x2 и x3 точно аналогично.

$$\frac{\delta L}{\delta x_2^{\bullet}} = mx_2^{\bullet}, \frac{\delta L}{\delta x_2} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_3^{\bullet}} = mx_3^{\bullet}, \frac{\delta L}{\delta x_3} = -mg$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -g$$

Следовательно, никакого нарушения законам Ньютона нет.

Выполнение принципа наименьшего действия и уравнения Лагранжа 2-го рода приводят к закону сохранения энергии.

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta x_i} \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta K}{\delta x_i} \dot{x}_i - L = 2K - K + \Pi = K + \Pi$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta x_i}\dot{x}_i + \frac{\delta L}{\delta x_i}\dot{x}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta x_i}\dot{x}_i + \frac{\delta L}{\delta x_i}\dot{x}_i - \frac{\delta L}{\delta t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta x_i} - \frac{\delta L}{\delta x_i}\right) x_i - \frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\delta L}{\delta t}$$

Теорема Нортона

Предположим, что у нас есть $q_i,\ t$. Введем другие координаты $\overline{q}_i(s),\ \overline{t}$(s).

$$\overline{q}_i = q_i$$

$$\overline{t} = t + s$$

Требуется, чтобы множество преобразований, зависящих от параметры S, образовывали параметрическую группу. Также она должна быть непрерывной группой, то есть если s будет очень маленьким, то мы практически не сдвинемся с места. Преобразование с малым параметром s называют инфинита земального преобразования.

Если для инфинита земальных преобразований некоторая величина остается постоянной, то она останется постоянной для любого преобразования.

$$\overline{q}_i = q_i + s\psi(q_i, t)$$

$$\overline{t} = t + s\xi(q_i, t)$$

Теорема Нортона утверждает, что если действие остается инвариантным при любом начальном значении q и t и малого параметра s, то тогда система обладает законом сохранения.

$$I = L\xi - \sum_i (\dot{\psi}_i - \xi \dot{q}_i)\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}$$

$$L - \xi\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

Условия теоремы - действие должно остаться прежним при преобразованиях (см. выше).

Действие это: $Ldt = \overline{Ldt}$

$$d\bar{t} = \bar{t}(t + dt) - \bar{t}(t) = t + dt + S\xi(q_i(t + dt_i t + dt) - t - S\xi(q_i(t)_i t) =$$

$$= dt + S(\xi(q(t)_i t)(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} + \frac{\delta\xi}{\delta\alpha})_t - S\xi(q(t)_i t) =$$

$$= dt + S(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} q_i + \frac{\delta\xi}{\delta t})dt \ (1)$$

Подставим в прошлое уравнение и получим равенство:

$$z = \bar{z}(1 + S(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} q_i + \frac{\delta\xi}{\delta t}))$$

$$\bar{z}(\bar{q}_i, \overline{\dot{q}}_i, t) = z(q_i + S\psi_i(q_i, t))$$

$$\overline{\dot{q}}_i = \frac{d}{dt}\bar{q}_i = \frac{d}{dt}(q_i + S\psi_i(q_i, t)) = \frac{d}{dt}(q_i + S\psi_i(q_i, t)) * \frac{dt}{d\bar{t}}$$

Найдем $\frac{dt}{d\bar{t}}$: Разделим ур-е (1) на $d\bar{t}$

$$1 = \frac{dt}{d\bar{t}} + S(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} q_i + \frac{\delta\xi}{\delta t})\frac{dt}{d\bar{t}}$$

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{1 + S\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} q_i + \frac{\delta\xi}{\delta t}}$$

Разложим знаменатель по степеням S

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = 1 - S(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} q_i + \frac{\delta\xi}{\delta t})$$

Тогда,

$$\overline{\dot{q}}_i = \dot{q}_i + S(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\psi_i}{\delta q_k}\dot{q}_k + \frac{\delta\psi}{\delta t})(1 - S(\sum_{i=k}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_k} q_k + \frac{\delta\xi}{\delta t}))$$

$$\overline{\dot{q}}_i = \dot{q}_i + \mathrm{S}\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\psi_i}{\delta q_k}\dot{q}_k - \sum_{i=k}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_k} q_k + \frac{\delta\psi}{\delta t} - \frac{\delta\xi}{\delta t}$$

Мы нашли $\overline{\dot{q}}_i$, тогда

$$\overline{z}(\overline{q}_i, \overline{\dot{q}}_i, t) =$$

$$z(q_i + S\psi_i(q_i, t), \dot{q}_i + S\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\psi_i}{\delta q_k}\dot{q}_k - \sum_{i=k}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_k} q_k + \frac{\delta\psi}{\delta t} - \frac{\delta\xi}{\delta t}, t + S\xi(q_i t))$$

Получим

$$z = z + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta q_i} S\psi_i(q_i, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta q_i} S(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(\psi_i - \xi)}{\delta q_i}\dot{q}_k + \frac{\delta\psi\xi}{\delta t}) + \frac{\delta z}{\delta t} S\xi(q_i, t) +$$

$$+ zS(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_i} + \frac{\delta\xi}{\delta\alpha})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta q_i}\psi_i + \frac{\delta z}{\delta q_i}(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(\psi_i - \xi)}{\delta q_i}\dot{q}_k + \frac{\delta\psi\xi}{\delta t}) + \frac{\delta z}{\delta t}\xi = D$$

Формулировка теоремы : $\frac{\delta t}{\delta \overline{t}} = 0$

$$\frac{\delta z}{\delta t}\xi + z\frac{\delta\xi}{\delta t} - \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\psi_i}{\delta q_k}\dot{q}_k + \frac{\delta\psi}{\delta t} - \xi\dot{q}_i - (\sum_{i=k}^{n} \frac{\delta\xi}{\delta q_k}\dot{q}_k + \frac{\delta\xi}{\delta t})\dot{q}_i)\frac{\delta z}{\delta q_i} +$$

$$+ (\psi_i - \xi\dot{q}_i)\frac{\delta}{\delta t}\frac{\delta z}{\delta q_i} = 0$$

Если все проделать без ошибок, то все сократится и получится 0.