На прошлой лекции мы рассматривали такое понятие как монотонная схема. Было два определения монотонности, они во многом совпадают.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Монотонная схема - такая схема, которая монотонную функцию переносит в монотонную функцию. А так же выполняется принцип максимума - если есть локальный максимум, он не должен расти. Мы сформулировали и доказали две теоремы Годунова. И в частности вторая теорема говорит нам следующие вещи, что в классе линейных схем для уравнения выше, не существует монотонных схем второго порядка апроксимации и выше. Так же установили факт, что даже для нелинейных схем монотонность будет нарушена, в частности в окрестности экстремума. Вследствие поставлена задача, найти такие линейные схемы, которые были бы монотонны, выполняли принцип максимума, имещюие второй порядок всюду, кроме может быть точек локального экстремума, а так же точек разрыва решения.

Покажем общее решение уравнения выше.

$$u(x,t) = \phi(x-t)$$

Получается путем замены переменных $\xi = x + t$; $\eta = x - t$;

Дело в том, что подставив такую функцию внутрь уравнения, она будет являться решением только тогда, когда функция ϕ является дифференциируемой.

Классическое решение - решение которое удовлетворяет всем нормам и правилам, а также дает тождество при подстановке на всей её области значений. Так же есть обобщенное решение - которое дает тождество при некоторых обстоятельствах.

Особенности построения обобщенного решения:

1. Найти такое свойство решения уравнения, что при подстановке в уравнение, оно всегда будет являться решением уравнения и давать тождество.

2. Если функция удовлетворяет свойству и является дифференциируемой, то она явлется решением уравнения.

3. Если выполняется одно их условий, такое решение называется обобщенным.

Найдем интеграл:

$$\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dt dx = 0$$

Для любой области D высокой гладкости из подмножества областей на декартовом поле x t

Формула Гринна.

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x} dtdx$$

Допустим наше поле D делим на много маленьких квадратиков, как считать такой интеграл? Очень просто, после разбиения поля на квадратики, берем в центре точку, вычисляем там нашу функцию, умножаем на площадь квадратика. Далее суммируем все квадратики, получаем интегральную сумму.

$$\sum(\sum \frac{\partial u}{\partial x} dx)dt$$

$$\sum(\int \frac{\partial u}{\partial x} dx)dt = \sum(u(x_k + dk) - u(x_k - dk))dt$$

$$\int u(x_0, t)dt - \int u(x_1, t)dt = \oint udt$$

$$\int_D (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x})dtdx = \oint -udx + udt = 0$$

Теперь имея дело с контурным интегралом не от производной, а от функции, нам проще его взять когда мы работаем с разрывными функциями.

Доказать второе свойство теперь легко.

Пусть у нас есть некая функция u, для которой выполняется свойство:

$$\oint -udx + udt = 0$$

Для любой области. Следовательно подинтегральное выражение тождественно нулю.

На прошлой лекции мы выписали вот такую разностную схему.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} + B_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = 0$$

Такая схема у нас монотонная.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{2\partial x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{2\partial x}$$

Добавление такого члена называется вязкой добавкой.

Рассмотрим слегка другую версию этой добавки.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\partial x} = \frac{1 - \alpha_{i+1/2}}{2}\frac{u_{i+1} - u_i}{\partial x} - \frac{1 - \alpha_{i-1/2}}{2}\frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x}$$

Если α равна еденице мы получим схему второго порядка. Если нулю, первого порядка.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = -(\frac{\alpha_{i+1/2}}{2}\frac{u_{i+1} - u_i}{\partial x} - \frac{\alpha_{i-1/2}}{2}\frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x})$$

Регулируем α, чтобы наша схема стала монотонной.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} + \frac{\alpha_{i+1/2}}{2}\frac{u_{i+1} - u_i}{\partial x} - \frac{\alpha_{i-1/2}}{2}\frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + [1 + \frac{\alpha_{i+1}}{2}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} - \frac{\alpha_{i-1}}{2}]\frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = 0$$

Если мы сможем подобрать такое α, чтобы выражение в квадратных скобках у нас всегда было положительное.

Сначала рассмотрим положительность.

$$\alpha_i \geq 0\alpha_{i+1/2} \leq 2\frac{\alpha_{i+1/2}}{2}\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} \geq 0$$

Тогда нужно выбирать α следующим образом:

$$\alpha_{i+1/2} = \alpha\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}\right)$$

потребуем от этой функции упрощаться в ноль, если аргумент отрицательный. Тогда схема будет монотонная.

Добьемся второго порядка точности во всех точках, кроме окрестности точки экстремума. Окрестность точки экстремума означает, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Рассмотрим величину R:

$$R = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2} + O(\Delta x)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} + O(\Delta x)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} + O(\Delta x)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} + O(\Delta x)}$$

при $\Delta x \to 0$ величина $R \to 1$:

$$i + 1/2 : 1 - \delta \leq R \leq 1 + \delta$$

Осталось потребовать, чтобы α обращалось в единицу при $R = 1$.

$$\alpha_{i+1/2} = \alpha(R_{i+1/2})\alpha(R) = 0,\ R < 0\alpha(R) = 1,\ 1 - \delta \leq R \leq 1 + \delta$$

Посмотрим какие функции α у нас используются. Первая схема: TVD (total variation divilition) (суммарная вариация функции):

$$\alpha(R) = \begin{cases} 0, & \text{R<0} \\ \text{R}, & \text{0<R<1} \\ 1, & \text{R} > 1 \end{cases}$$

ограничитель minmod. Перепишем схему в другом виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\left[u_i + \alpha_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{2}\right] - \left[u_{i-1} + \alpha_{i+1/2}\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} = 0$$

эта схема будет работать в более сложных случаях уравнений переноса. Мы начали со схемы:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = 0$$

Если выполнить следующую замену, то получим как раз нужное уравнение:

$$u_i \to u_i + \alpha_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

Можно уравнение записать в потоковой форме (более общее уравнение):

$$\frac{\partial u}{t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 f(u) = u \ \text{ получим наше уравнение переноса}$$

Также можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} = 0 f_{i+1/2} = u_i f_{i-1/2} = u_{i-1}$$

Выделим $u_{i+1/2}$:

$$u_{i+1/2} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

Во что аппроксимизация переходит при minmod'е, посмотрим разные значения R:

$$R \geq 1,\ \alpha = 1,\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} 0 < R \leq 1,\ \alpha = R = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i},\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} R \leq 0,\ \alpha = 0,\ \Big($$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от знака разности (для того, чтобы R получилось больше единицы):

$$u_i - u_{i-1} \geq 0, \quad |u_{i+1} - u_i| < |u_i - u_{i-1}| u_i - u_{i-1} \leq 0, \quad u_{i+1} - u_i > u_i - u_{i-1}$$

Рассмотрим еще одну функцию, как minmod, только $\alpha(R) = 1, R > 1/2$ (более резкий переход). Тогда получится следующее:

$$R \geq 1/2, \quad \alpha = 10 < R \leq 1/2, \quad \alpha = 2RR \leq 0$$

Разберем подробнее случай $R \geq 1/2$:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \geq 1/22(u_i - u_{i-1}) \geq u_{i+1} - u_i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

Ранее приведенные уравнения были для дифференциальной разности, теперь запишем явную схему:

$$\frac{u_i^{n+1}}{\partial x} + \left[1 + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{2} \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} - \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}}{2}\right] \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = 0$$

Обозначая $\left[1 + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{2} \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} - \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}}{2}\right]$ за $[\cdot]$, можно вынести u_i^{n+1} в правую часть:

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left[-[\cdot] \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1\right] + [\cdot] \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1} = 0$$

Причем должно быть условие, что $\frac{\Delta t}{\Delta x}[\cdot] < 1$, и чем больше значение $[\cdot]$, тем жестче условие.

Рассмотрим уравнения более общего вида – нелинейные уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Или для сложных систем уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

где

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} f_1(u_1 \dots u_n) \\ \vdots \\ f_n(u_1 \dots u_n) \end{bmatrix}$$

Схемой вида:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial F_{i+\frac{1}{2}}-F_{i-\frac{1}{2}}}{2x}=0$$

Имеют свойство консервативности.

Необходимо построить монотонную схему первого порядка. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

Потребуем, что система в данном случае – гиперболическая. Тогда будем строить схемы для гиперболических задач. В гиперболической системе матрица A имеет полный набор собственных векторов. Т.е. $\exists L : LA = \Lambda L$, где Λ – диагональная матрица собственных значений A. Домножим линейную схему на L:

$$\frac{\partial LU}{\partial t}+LAL^{-1}L\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

Если приравнять $S = LU$, то получаем схему:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

Для каждого уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ из системы выпишем схему, причем эта схема будет зависеть от знака коэффициента a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a\frac{u_i-u_{i-1}}{\partial x}=0, a>0$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a\frac{u_{i+1}-u_i}{\partial x}=0, a<0$$

Пронумеруем значения в Λ так, чтобы существовал k такой, что $\exists k : \forall i \le k\ \lambda_i > 0$ и $\forall j > k\ \lambda_j \le 0$. Т.е. существовал такой индекс, что значения всех λ до и включая его было строго положительно, а все последующие – не строго отрицательные. Возможно, что все значения $\lambda_i \le 0$. В таком случае нумерация произвольна.

Такая нумерация гарантирует, что все схемы до k включительно соответствуют схеме при $a > 0$, а последующие – схеме при $a < 0$.

$$\frac{\partial s_i^1}{\partial t}+\lambda_1\frac{s_i^1-s_{i-1}^1}{\partial x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial s_i^k}{\partial t} + \lambda_k \frac{s_i^k - s_{i-1}^k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s_i^{k+1}}{\partial t} + \lambda_{k+1} \frac{s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}}{\partial x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial s_i^n}{\partial t} + \lambda_n \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{\partial x}$$

Сделаем обратное преобразование $U = L^{-1}U$. Если в прошлой схеме правую часть разбить на две, домножив на L^{-1}, то получается:

$$L^{-1}\Lambda L L^{-1} \begin{pmatrix} \frac{s_i^1 - s_{i-1}^1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{s_i^k - s_{i-1}^k}{\partial x} \\ 0\vdots \\ 0 \end{pmatrix} + L^{-1}\Lambda L L^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1} \\ \vdots \\ s_{i+1}^n - s_i^n \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $LA = \Lambda L$, сумма равна:

$$AL^{-1} \begin{pmatrix} s_i^1 - s_{i-1}^1 \\ \vdots \\ s_i^k - s_{i-1}^k \\ s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1} \\ \vdots \\ s_{i+1}^n - s_i^n \end{pmatrix} = A \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\partial x}$$

Правая часть – решение задачи распада разрыва схемы, которое получается в точке $+\frac{1}{2}$. Тогда получаем такую схему, называемую схемой Гуменовского(?) типа:

$$\frac{U_i}{\partial t} + A \frac{U_{i+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = 0$$

Предположим, что мы научились решать задачу о распаде разрыва для любой системы уравнений. Тогда общая схема будет иметь вид:

$$\frac{U_i}{\partial t} + A \frac{F(U_{i+\frac{1}{2}}) - F(U_{i-\frac{1}{2}})}{\partial x} = 0$$

Такая схема в линейных системах уравнений будет монотонной. Для нелинейных говорить что-либо трудно, но можно рассмотреть схему для одного нелинейного уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Тогда скорость движения разрыва равна:

$$D = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i}$$

Решение для нелинейного уравнения общего вида будет позже.

Рассмотрим схему вида:

$$\frac{U_i}{\partial t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\partial x} = 0$$

И возможные монотонные функции $F_{i\pm\frac{1}{2}}$, одна из которых была рассмотрена ранее ($F(U_{i\pm\frac{1}{2}})$). Пусть $F_{i+\frac{1}{2}} = C_1U_{i+1} + C_2U_i$ – трехточечный поток. Для того чтобы была выполнена аппроксимация, необходимо условие, которое называют условием согласования потоков. Оно выбирает следующий $F_{i+\frac{1}{2}} = H(U_i, U_{i+1})$, куда, если подставить $H(U, U)$, получается $F(U)$.

Получим общий вид линейного потока, согласованного с матрицей A:

Из условия согласованности $C_1U + C_2U = AU$ получаем $C_1 = A - C_2$

$$F_{i+1} = AU_{i+1} - C_2U_{i+1} + C_1U_i = A\frac{U_{i+1} + U_i}{2} - (2C_2 - A)\frac{U_{i+1} - U_i}{2}$$

$C_2 - A = B$, получим $A\frac{U_{i+1}+U_i}{2} - B\frac{U_{i+1}-U_i}{2}$

Запишем схему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (A\frac{u_{i+1} + u_i}{2} - B\frac{u_{i+1} - u_i}{2})/\partial x - (A\frac{u_i + u_{i-1}}{2} - B\frac{u_i - u_{i-1}}{2})/\partial x = 0$$

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + (\Lambda\frac{s_{i+1} + s_i}{2} - L^{-1}BL\frac{s_{i+1} - s_i}{2})/\partial x - (\Lambda\frac{s_i + s_{i-1}}{2} - L^{-1}BL\frac{s_i - s_{i-1}}{2})/\partial x = 0$$

Схема будет монотонной в том случае, если все матрицы будут диагональными $L^{-1}BL = D$

$$(\Lambda\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2}) - (D\frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{2})$$

$$\frac{\partial s_i^k}{\partial t} + \frac{(\Lambda_k - D_k)}{\partial x}\frac{s_{i+1}^k - s_i^k}{2} + \frac{(-\Lambda_k - D_k)}{\partial x}\frac{s_i^k - s_{i-1}^k}{2} = 0,$$

$-D_k < \Lambda_k < D_k$

$-D_k < \lambda_k < D_k$

При этом $D_k \geq 0$ и $|D_k| \geq |\lambda_k|$. Тогда неравенство $\lambda_k - D < 0$ можно записать так $\lambda_k + D_k < 0$. В результате решения мы должны прийти к тому, что $D_k \geq |\lambda_k|$. Посмотрим на написанное ранее исходя из этого предположения. Если оно верно, то диагональная матрица должна быть больше чем матрица L. Собственные числа матрицы В должны быть положительными, и тогда ее вязкость будет положительной. Также они должны быть больше собственных чисел матрицы А. Поэтому предположим, что $D_k = |\lambda_k|$ и получим, что вышеописанная схема является схемой Годуновского типа. Кроме того, есть другой способ это установить. Предположим, что $M = max|\lambda_k|$ и $D_k = M$. Тогда матрица D будет похожа на единичную матрицу, а в утверждении $B = L^{-1}DL$ матрицы L и L^{-1} при умножении так же дают единичную матрицу. Тогда $B = M\widehat{E}$. За счет этого преобразования схема становится проще и такой поток называют схемой Русанова Лакса Фридрихса. В газовой динамике эта схема интересна сама по себе в том числе и для нелинейных задач. Для линейных же задач мы уже описали полную схему.

Перейдем к описанию нелинейных задач. Получим саму схему Годунова оригинальным способом. Она самая распространенная из всех схем в газовой динамике, которые используются для решения прикладных задач как стационарных, так и нестационарных.

Укажем начальное условие. $M = max|\lambda_k|$ и $D_k = M$, также $D_k = |\lambda_k|$. Уравнение газовой динамики: $\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Вектор консервативных переменных:

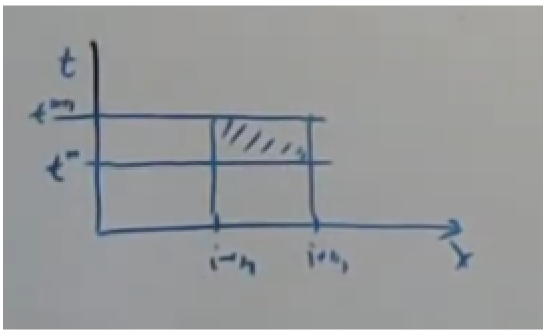
$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho\left(\frac{U^2}{2} + \epsilon\right) \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U^2 + p \\ \rho\left(\frac{U^2}{2} + \epsilon\right)U + pU \end{pmatrix}$$

Допустим, что в начальный момент у нас есть некоторое распределение всех консервативных величин. На его графике отметим сетку и с точностью величиной шага сетки заменим имеющееся начальное распределение на более простое: заменим непрерывную функцию на ступенчатую. При этом масса, которая была заключена в каждом участке

сетки, осталась постоянной: $\rho_i \Delta x = \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho(x)dx$. Это операция ортогонального проектирования, при нем длина проекции всегда будет меньше длины исходного вектора. При других видах проекций это не так.
Пример ортогонального проектирования в пространстве функций: имеем функции $\rho(x) \in H$ исходного Гильбертового пространства и $\overline{\rho}(x) \in \overline{H} \subset H$ какого-то подпространства $\overline{H}$. Требуется найти такую $\overline{\rho}(x)$, что $\rho(x) - \overline{\rho}(x) \perp \varphi \in U$. Из условия ортогональности следует $\int\limits_{x_1}^{x_2} (\rho(x) - \overline{\rho}(x))\varphi(x)dx = 0$.

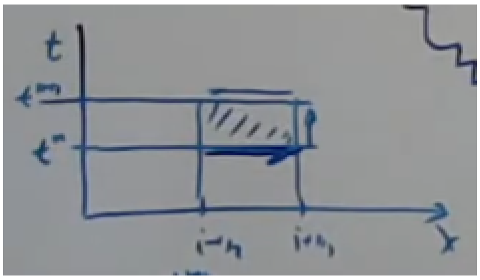
Для любой кусочно-постоянных функции такой интеграл должен обращаться в 0. Для этого достаточно, чтобы базис обращался в 0. $\varphi(x)$ равна нулю везде. Тогда, получим $\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\rho(x) - \overline{\rho}(x))dx = 0$. Если любой такой интеграл равен нулю, значит, мы нашли проекцию. Найти проекцию, значит определить значение в точке $\overline{\rho}(x)$.

В задачах распада разрыва гидродинамики, в кусочной функции распады распространяются с конечной скоростью.
Точное решение задачи $D_{i+1/2} + D_{i-1/2}\Delta t <= \Delta x$.
Рассмотрим прямоугольник:



Должно быть выполнено условие, что интеграл по замкнутому контуру $\oint \rho dx - \rho u dt = 0$

Данный интеграл состоит из четырех:



$$\rho^n_i \Delta x + \int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} (\rho u(x_{i+1/2}; t)dt \ + \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (\rho u(x \ ; x^{n+1})dx \ - \int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} (\rho u(x_{i-1/2}; t)dt \ = \ 0$$

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^{n}}{\Delta t} + \frac{\rho u(x_{i+1/2};t) - \rho u(x_{i-1/2};t)}{\Delta x} = \ 0$$

Получили стандартную потоковую схему:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^{n}}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{i+1/2} - (\rho u)_{i-1/2}}{\Delta x} = \ 0$$

Поток:

$$\frac{F(U_{i+1}) + F(U_i)}{2} - \ D_{i+1} \frac{U_{i+1} + U_i}{2}$$