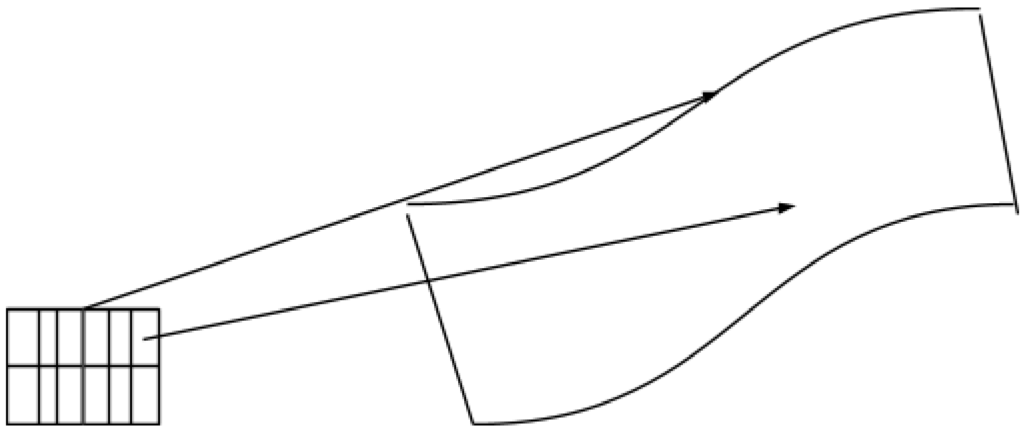
На прошлой лекции мы рассмотрели использование конформных отображений, в частности отображений для построения сетки в криволинейном четырехугольнике:



Выше представлен один из первых методов построения сеток, называемый Метод Winslow. Смоделируем ситуацию, когда каждой точке криволинейного четырехугольника ставится в соответствие точка единичного квадрата. В данном случае обратное отображение даст нам необходимые для нас отображение прямоугольной сетки. Решим задачу нахождения стационарного распределения температур в криволинейном четырехугольнике:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Необходимо выделить единственное решение, для этого нам не хватает дополнительных условий. Например:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ - решение определяется с точность до константы и если мы такое условие зададим, то решение определиться однозначно - это условие коши. Также зададим :

$\frac{\partial\ u}{\partial t^2} = 1$, из этого следует, что движение равноускоренное. Для определения положения точки в момент времени t нам также следует задать начальное положение, а также константы в нулевой момент времени.

$u(0) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = 1$, предположим, что при t = 1, $u(1) = 2$

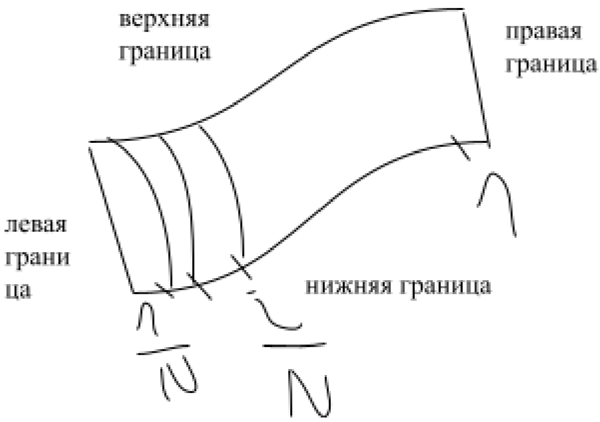
Таким образом выше представлены краевые условия для поставленной нами задачи.

Для уравнений с частными производными ситуация несколько иная. Решение определяется набором соответствующих констант, которое равно порядку системы. Чем выше порядок уравнений, чем больше констант. Например для уравнения второго порядка нам необходимо две константы.
Запишем уравнение теплопроводности для частных производных:
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x}$, давайте посмотрим, что произойдет, если мы будем искать решение одновременно нескольких точек. В таком случае мы получим систему дифференциальных уравнений.

$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}$, решение уравнений в частных производных определяется с точностью до некоторых функциональных зависимостей. Необходимо задать некоторые функции. В рассмотрении находится задача Коши, однако с краевыми условиями ситуация аналогична. Для решения задачи необходимо задать u на границах криволинейного четырехугольника.
Левая и правая граница u = 0 и 1 соответственно.

На нижней и верхней границе в точках u = i/N, где i є [1,N]. N - количество отрезков на границе.

Для решения задачи необходимо также построить изотермы:



После решения данной задачи, мы также решим сопряженную задачу, которая будет уже тоже определяться распределением температур.

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Решение уравнение Лапласа в произвольной области аналитически не решаются. Мы можем решать задачу численно и для этого необходима сетка, а сетку нам нужно построить. Из этого замкнутого круга есть выход - мы можем построить отображение, где из каждого квадрата сетки ставится в соответствие точка из сетки единичного квадрата.
Если отображение взаимно однозначное, то есть и краевое отображение. Другими словами u и v являются независимыми координатами на новой плоскости и мы их можем рассматривать, как независимые переменные.

Предположим, что мы получили систему уравнений 1:

$u(x, y) = u_0$

$v(x, y) = v_0$

Система выше будет иметь единственное решение.

$u(x_0, y_0) = u_0$

$v(x_0, y_0) = v_0$

Решение системы уравнений номер 1.

$x(u_0, v_0) = x_0$

$y(u_0, v_0) = y_0$

Теперь посмотрим каким уравнениям будут удовлетворять выше функции.

Рассмотрим такое отображение, при котором u, v являются аргументами, а x,y функциями. Для этого необходимо получить значение производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial y}$ из функций x,y. Запишем соотношение:

$x(u_0, v_0) = x_0$

$y(u_0, v_0) = y_0$

Соотношения выше мы также можем записать в виде:

$x(u_0(x_0, y_0), v_0(x_0, y_0)) = x_0$ - математическое выражение того, что два этих отображения являются взаимно обратными.

Продифференцируем отображения по x_0, y_0 и получим следующее:

$\frac{\partial x}{\partial u_0} * \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x_0} = 1$

$\frac{\partial x}{\partial u_0} * \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0,$ поскольку x и y независимые переменные.

Для того, чтобы выразить неизвестные переменные нам необходимо продифференцировать $y(u_0(x_0, y_0), v_0(x_0, y_0)) = y_0$ по x_0, y_0 . В результате получится четыре отображения.

$\frac{\partial y}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x_0} = 0$

$\frac{\partial x}{\partial u_0} * \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial x_0} = 1$

$\frac{\partial x}{\partial u_0} * \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0,$

$\frac{\partial y}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial u} * \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$

Первые два уравнения мы можем рассматривать, как систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$ и решить их.

Решение : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{j}\frac{\partial y}{\partial v}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$ = - $\frac{1}{j}\frac{\partial y}{\partial u}$. $j = \frac{\partial x}{\partial u} * \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} * \frac{\partial y}{\partial u}$.

Мы также раньше говорили, о таком подходе где решение задачи нахождения уравнения лапласа сводится к минимизации функционала интеграла:

$\iint_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \partial x \ \partial y$ = min , при условии, что на границе у нас функции заданы. Этот функционал называется задачей дирихле или иначе 1-я краевая задача. Если температуру можем задавать произвольную, то

тепловой поток не можем, так как хотим получить стационарное решение. Суммарный тепловой поток должен равняться 0. Это задача Неймана - 2-я краевая задача.
В задачу дирихле входят производные первого порядка. Можем подставить полученное решение и поставить задачу минимизации функционала выше.

$$\int\int_{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) \partial x\ \partial y = \min$$

Оба функционала положительны.
Рассмотрим также функционал:

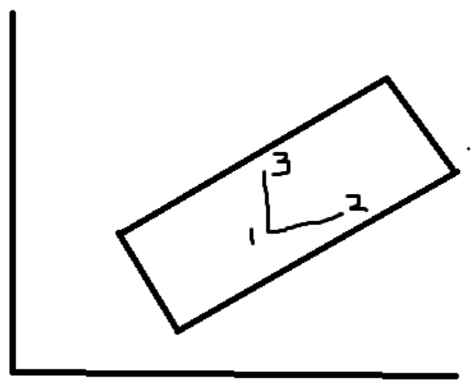
$$f(u, v) = \int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \partial x\ \partial y + \int\int_{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) \partial x\ \partial y = min$$

Теперь необходимо подставить наши производные и произвести замену переменных x и y. При замене производных переменных интеграл будет записан следующим образом:

$$f(x_i, y_i) = \frac{S_i}{б_i} б_i$$

$$f(x(u, v),\ y(u, v) = \frac{S_i}{б_i} б_i$$

Теперь нам нужно выяснить чему равняется отношение $\frac{S_i}{б_i}$, т. е. чему равняется отношение площади куска на исходной плоскости к площади куска на преобразованной плоскости.
Покажем, что это отношение будет равно якобиану Ꞙ:
На исходной плоскости (x, y) мы можем разбивать область на любые куски, у которых площади и размеры стремятся к 0. Возьмём область:



, где 1, 2, 3 - точки
1 - (x_0, y_0)
2 - $(x_0 + dx, y_0)$

3 - $(x_0, y_0 \ + \ dy)$

Они перейдут в следующие точки соответственно:

1 - $(u(x_0, y_0),\ v(x_0, y_0))$

2 - $(u(x_0 + \ dx, y_0),\ v(x_0 + \ dx, y_0))$

3 - $(u(x_0, y_0 + \ dy),\ v(x_0, y_0 + \ dy))$

Если куски dx и dy маленькие, то их можно считать прямыми. Остаётся посчитать чему равняется эта площадь.

Вектор 12 будет иметь координаты:

$u(x_0 + \ dx, y_0)$ - $u(x_0, y_0) \approx \frac{\partial u}{\partial x}dx$

$v(x_0 + \ dx, y_0)$ - $v(x_0, y_0) \approx \frac{\partial v}{\partial x}dx$

Вектор 13 будет иметь координаты:

$u(x_0, y_0 + \ dy)$ - $u(x_0, y_0) \approx \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$v(x_0, y_0 + \ dy)$ - $v(x_0, y_0) \approx \frac{\partial u}{\partial y}dy$

Искомая площадь будет равна модулю векторного произведения векторов 12 и 13:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

= k $(\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial y}\ - \ \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y})$

В итоге отношение площадей будет равно якобиану преобразования.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial y}\ - \ \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y} = \ \frac{1}{Ꞩ} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

Проверим второе равенство.

$\frac{1}{Ꞩ^2}(\frac{\partial y}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial u}$ - $(-\frac{\partial x}{\partial v})(-\frac{\partial y}{\partial u}))$

Таким образом, чтобы записать функционал

$\int\limits_{\Omega}\int(\frac{\partial u}{\partial x})^2 \ + \ (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \partial x\ \partial y \quad + \ \int\limits_{2}\int(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y})\ \partial x\ \partial y$ в терминах интегрирования по u и v, взяв их как независимые переменные, надо записать следующее:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right) J \, du\, dv$$

Один якобиан сократится и мы получим функционал, который будем называть функционалом Винслоу и который имеет следующий вид:

$$\phi(u,\ v) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right)\ du\, dv$$

Мы должны минимизировать этот функционал и получить функции x и y, и сразу вычисляя их в точках равномерной прямоугольной сетки на единичном квадрате, мы получим узлы нашей сетки, у которой структура вполне определена.

Минимизация будет происходить с помощью следующих квазилинейных уравнений:

$$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$$

$$\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} + \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$$

Мы должны получить дискретный функционал. Для начала разобьем функционал, который представляет из себя интеграл по единичному квадрату на сумму интегралов по ячейкам:

$$\phi(u,\ v) = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right)\ du\, dv\ =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}}\int_{v_j}^{v_{j+1}} \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right)\ du\, dv$$

$=$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} < \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right) > du\, dv,$$

где $< \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right) >$ - среднее значение подынтегрального выражения, которое необходимо вычислить.

Выберем один из 4 способов аппроксимации $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$, где

$$\frac{\partial x}{\partial u} \approx \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\Delta u},\ \frac{\partial x}{\partial v} \approx \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \approx \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{\Delta u},\ \frac{\partial x}{\partial v} \approx \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}}{\Delta v}$$

По y выберем такую же аппроксимацию, как для x. Получим:

$$\frac{\left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{\Delta u}\right)^2+\left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j}}{\Delta v}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{\Delta u}\right)^2+\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\Delta v}\right)^2}{(x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i+1,j}-y_{i,j})-(x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j})}$$

В знаменателе имеем якобиан. Искомая площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, которая в свою очередь будет равняться модулю векторного произведения:

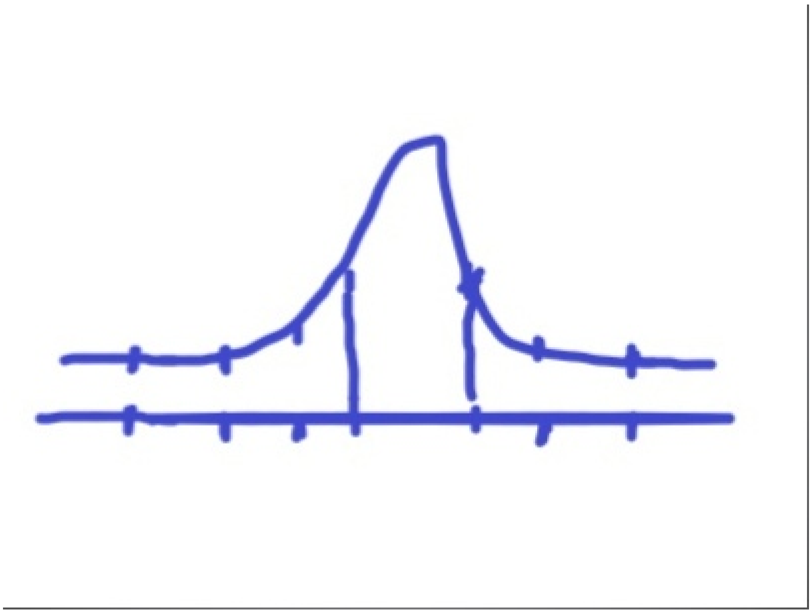
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{i+1,j}-x_{i,j} & y_{i+1,j}-y_{i,j} & 0 \\ x_{i,j+1}-x_{i,j} & y_{i,j+1}-y_{i,j} & 0 \end{vmatrix}$$

$= k\,((x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j}) - (x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j}-y_{i,j}))$

Ячейки при минимизации функционала начинают двигаться. Однако перейти в треугольник точки не могут, т. к. в этом случае знаменатель будет равен 0. Рано или поздно, как только площадь треугольника станет достаточно малой, точка остановится. Это свойство называется барьерным свойством функционала.

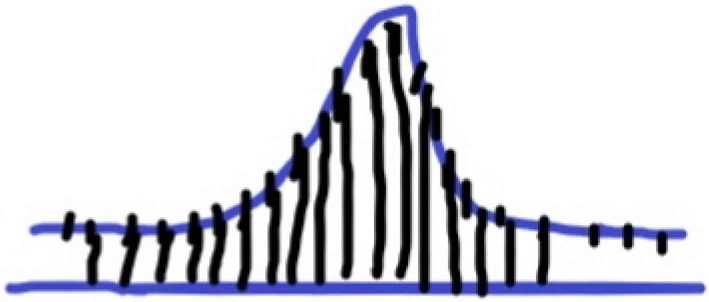
Адаптивная сетка

В сетка которые мы строили, они достаточно равномерны, т.е. точки распределены достаточно равномерно. Но на практике эта ситуация довольно общая. Например:



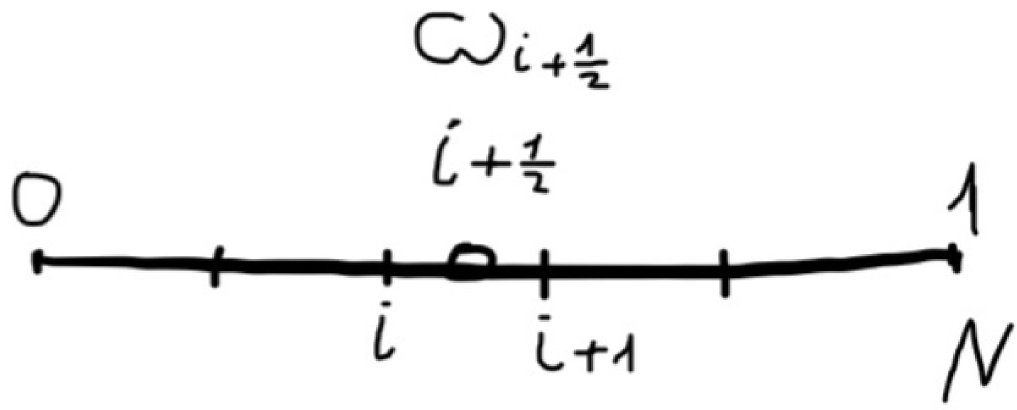
Если у нас имеется какая-то функция с резким пиком, то при расчете значения функции на равномерной сетке, то мы увидим, что “Пик”

пропустили и фактически - решения не получили, особенно если нам важны точки максимума.
Если же мы будем измельчать сетку:



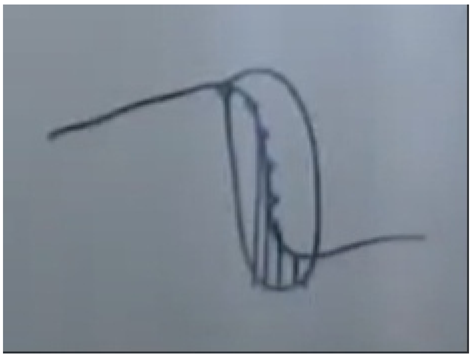
то такой ситуации уже не будет, но будем выполнять много лишней вычислительной работы т.к. в дополнительных краевых точках мы не нуждаемся.
И логичным решением будет сделать сетку густой в области “Пика” и более крупные ячейки сбоку. Такие сетки, которые подстраиваются к решению исходной задачи называются Адаптивными сетками.

Рассмотрим случай получения таких сеток в одномерном случае:
Способ распределения равно-весовой функции.
У нас имеется отрезок с ячейками



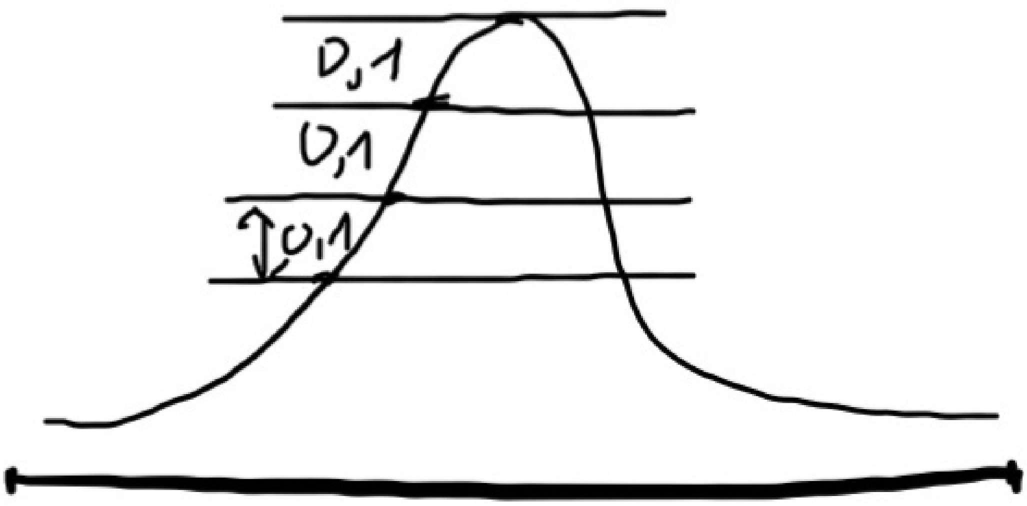
Зададим некоторую функцию в центре ячейки $\omega_{i+1/2}$, за счет неё будем регулировать размер ячеек и потребуем выполнения условий:
$\omega_{i+1/2}(x_{i+1} - x_1)$=const=c, тогда

$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_1 = \frac{c}{\omega_{i+1/2}}$ и соответственно, от значения функции будет меняться размер ячейки- большая или маленькая.
Для избавления от const c, просуммируем:
$\sum_{i=0}^{N-1}\Delta x_{i+1/2}$=1 (длине отрезка) =c $\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\omega_{i+1/2}}$, отсюда c равно
$c=\frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1}\omega_{i+1/2}}$
Также при вычитании из исходного уравнения, мы получаем:
$\omega_{i+1/2}(x_{i+1} - x_1)$-$\omega_{i+1/2}(x_1 - x_{i+1})$=0 оно схоже с ур-ем Лапласа, но об этом позже.
$\Delta x_{i+1/2} = \frac{c}{\omega_{i+1/2}}$, как мы и говорили ранее сетка должна быть мелкой в областях особенности решения.



Если у нас некая функция, то вот эта область, где она быстро меняется, для решения её с помощью сетки, нужно много мелких ячеек. Тогда рассмотрим случай когда:
$\omega_{i+n} = |\frac{\partial f}{\partial x}|$
$\frac{\partial f}{\partial x}$ - функция должна быть всегда положительной, по этому $|\frac{\partial f}{\partial x}|$,
мы ее можем заменить $\omega_{i+n} = |\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x_{i+1/2}}|$, тогда исходное выражение будет иметь вид:
$|f_{i+1} - f_i|$-$|f_i - f_{i-1}|$=0 или $|f_{i+1} - f_i|$=$|f_i - f_{i-1}|$
Рассмотрим геометрический смысл этого уравнения:

Если нарисовать график функции f такого вида:

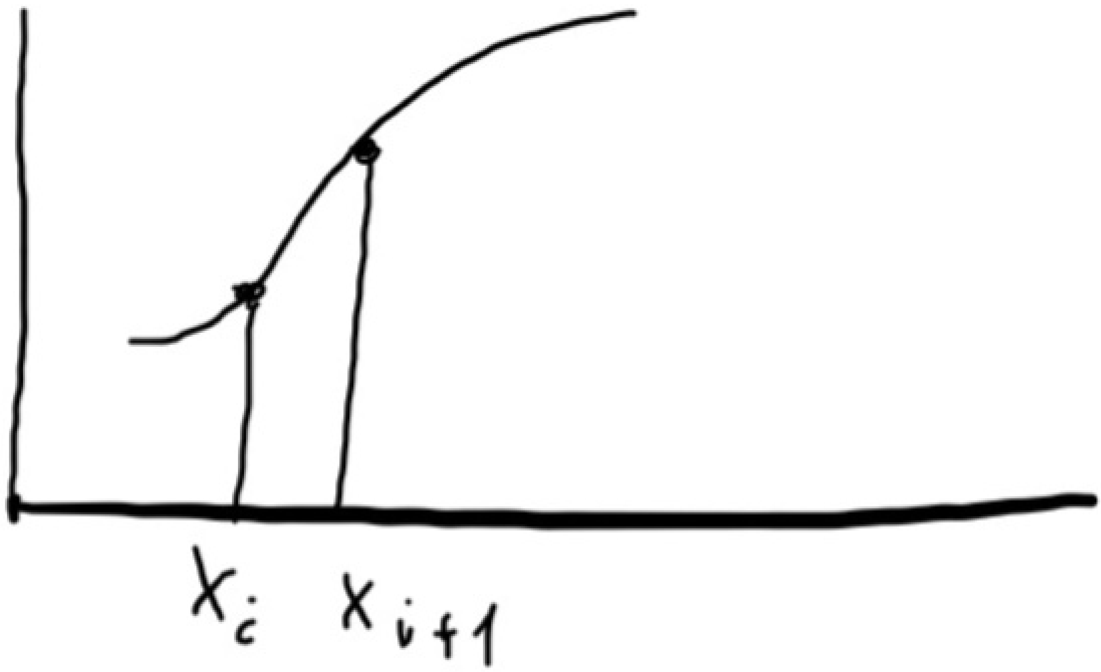


мы увидим что расстояния одинаковы. Тогда искомой задачи по сгущению сетки в необходимой области мы добились. Но на практике ситуация сложнее. Т.к. в области изменения функции сгущения мы добились, но в местах где функция практически постоянна мы не будем иметь константы. И это нас устраивает только когда функция f является единственным решением, а для уравнения газовой динамики у нас 3 неизвестных величины (плотность, скорость и температура) и в них при выборе одной постоянной, другие могут меняться.
По этому в областях где наша функция не изменяется, нам нужно поставить точки. Для этой цели сделаем следующее:

$\omega = |\frac{\partial f}{\partial x}| = \sqrt{|\frac{\partial f}{\partial x}|^2 + \varepsilon}$, где ε - числовое значение, тогда

$$\omega_{i+1/2}(\Delta x_{i+1/2}) = \sqrt{(f_{i+1} - f_i + \varepsilon(f_i - f_{i-1})^2} = \sqrt{(f_i - f_{i+1})^2 + \varepsilon(f_i - f_{i-1})}$$

Это выражение на плоскости x и f:

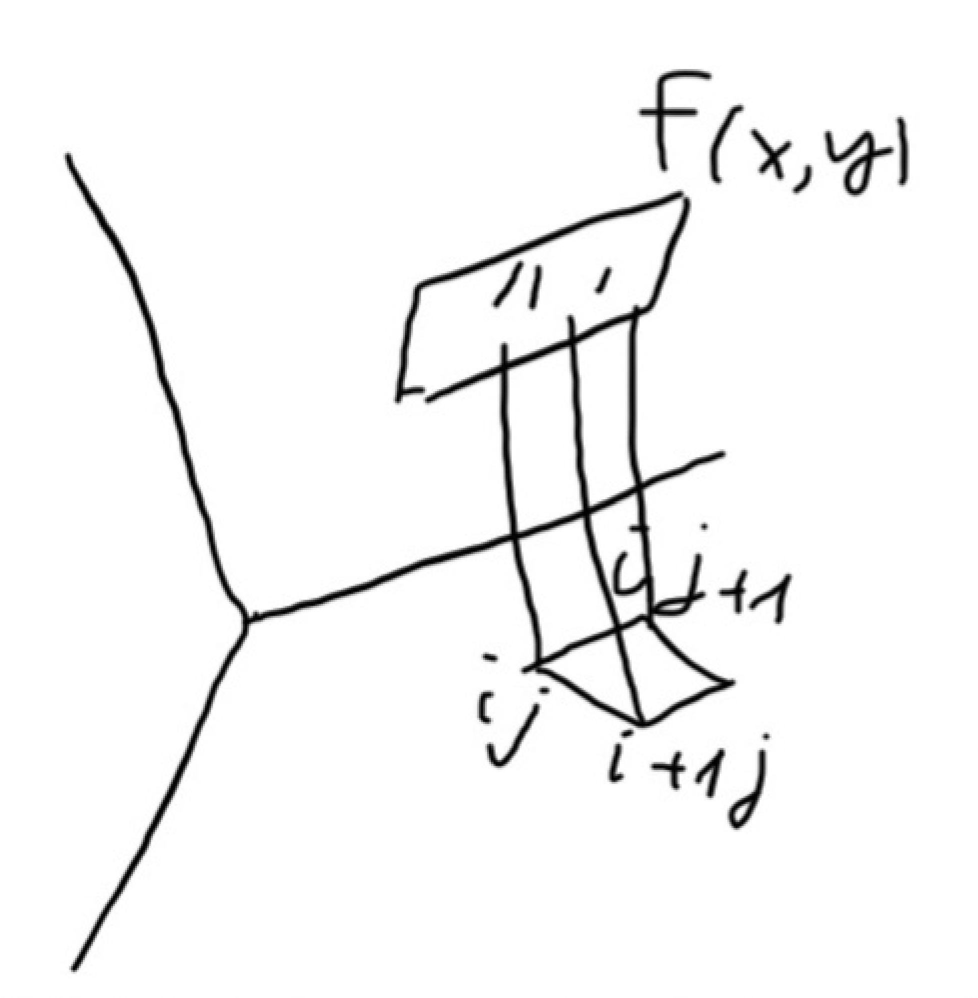


если мы возьмем 2 точки, то представляет собой длину этого отрезка. Таким образом мы перешли от равномерной сетки, к сетке на графике функции.

Теперь рассмотрим в двумерном случае провести эти же операции.
У нас уже несколько отрезков и сама сетка не является равномерной(т.к. построена методом Винслоу:

$$\phi(u,\ v) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \right)\ du\, dv$$

Возьмем функцию f(x,y) и ячейку i,j



Тогда наши $(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2$ будут длины рёбер нашей сетки или же:

$$\frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}{\Delta u^2}\Delta u^2$$

$$\frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}{\Delta v^2}\Delta v^2$$

Тогда подставим и будет следующая величина:

$$\varepsilon\frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}{\Delta u^2}\Delta u^2 + \frac{(f_{i+1,j} - f_{i,j})^2}{\Delta u^2}\Delta u^2$$

Теперь найдем Δf:

$$f(x_{in,j}, y_{i,nj}) - f(x_{i,j}, y_{i,j}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{(x_{in,j} - x_{i,j})}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{(y_{in,j} - y_{i,j})}{\Delta u})\Delta u$$

$$\varepsilon(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + (\frac{\partial f}{\partial y})^2(\frac{\partial y}{\partial u})^2)\Delta u$$

$$\Phi_A = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{J} ((\varepsilon \ +$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2)(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} \ + (\varepsilon \ + \ (\frac{\partial f}{\partial y})^2)(\frac{\partial y}{\partial u})^2 +$$

$$(\varepsilon \ + (\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} \ + (\varepsilon \ + \ (\frac{\partial f}{\partial y})^2)(\frac{\partial y}{\partial u})^2)) \ du\, dv$$

Эти квадраты длин векторов могут считаться квадратами следующим образом, когда мы берем скалярное произведение (x, y) = $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

Линейный оператор от y умножить на некоторую матрицу (Ay, x) и чтобы стало скалярным произведением нам необходимо:

1. Чтобы матрица A была симметричная. (оператор самосопряженный (Ay, x) = (y, Ax).
2. Матрица была положительно-определенный.

Если мы возьмем матрицу A в виде:

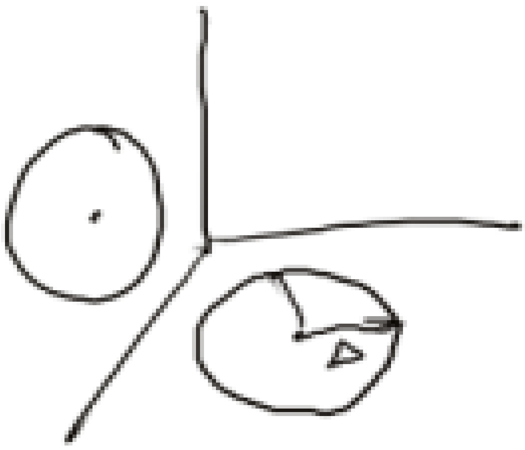
$$A = \left(\varepsilon \ + \ (\frac{\partial f}{\partial x})^2 \ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \ \ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \ \varepsilon \ + \ (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \right)$$

То из этого получим функционал Φ_A

Матрица A определяет новые длины векторов.

Первый вектор представляет собой градиент функции. Градиентом функции f называется вектор grad f = $(\frac{\partial f}{\partial x})$.

В этом направлении функция растет максимально быстро .



$\Delta x^{2} + \Delta y^{2} = \Delta$

$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}\ \Delta y$

$(\frac{\partial f}{\partial x})^2\ \Delta x + 2\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\ \Delta x\ \sqrt{(\Delta)\ -\ \Delta x^2)} +\ (\frac{\partial f}{\partial y})^2\ (\Delta - \Delta x)^2$

$2(\frac{\partial f}{\partial x})^2\ \Delta x + 2\ \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \Delta x\ \sqrt{(\Delta)^2\ -\ \Delta x^2)} +\ 2\ \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{2\Delta x}{\sqrt{(\Delta)^2 - \Delta x^2)}}$,

Дальше получаем биквадратное уравнение и решаем его.

Из значений полученных в квадратном уравнении, если есть

$A = \varepsilon\ (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )\ + \left((\frac{\partial f}{\partial x})^2\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\ \ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\ \ (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \right)$

Дальше получаем квадратное уравнение

Если есть симметричная матрица, значит есть два собственных вектора.
Эти собственные векторы можно выбрать ортогонально.
Если оба вектора положительны, то значение будет положительным.
В результате:
сетку делаем вытянутой вдоль градиента
W = AgradT $\rightarrow$ среда азеотропная, где W - тепловой поток