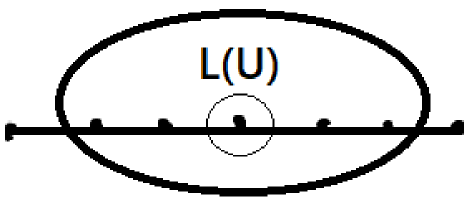
На прошлой лекции мы рассматривали проекционные методы.
В частности это был метод Галёркина, который заключается в том, что у нас задан оператор L(U) = 0, то теперь приближенное решение функции U принадлежит пространству H, U = H (бесконечно-мерному Гильбертову пространству, то мы приближенное решение будем искать $U_N \in H_N \subset H$, тогда значит этот элемент U_N определяем исходя из соотношения, что $(L(U_N), V)$ = 0 для любого V принадлежащему H_N.

Мы с вами говорили, что важную роль играет выбор базиса в пространстве H_N, в частности значит, что если L(U) - дифференциальная операция, то тогда, вообще говорят, значение этого оператора определяется поведением функции U в окрестности той точки, в которой вычисляется L(U) и поэтому когда мы будем производить аппроксимацию например методом конечных разностей, то тогда уравнение соответствующее будет входить только лишь конечное число точек остальных, независимо от того какой размер шага. Размер шага определяется общую размерность пространства H_N.



Получается так, что несмотря на то, что общая размерность может стремиться к бесконечности, то вообще говоря о сходимости этого метода, то мы должны H_N устремить к бесконечности, так чтобы в конце концов мы получили, что любой элемент из H мы можем приблизить элемент из H_N (с любой наперёд заданной точностью - это обязательное условие). Совершенно ясно, что если у нас есть H_N при N → ∞, то должно выполняться такое условие: для любого элемента U $\in$ H должно найти для любого ε > 0 должно существовать такое $N > N_\varepsilon$, где существует V_N в $|| U - V_N|| < \varepsilon$. Очевидно, что размерность пространства должна стремиться к бесконечности. U_ε для U будет стремиться к бесконечности при ε → 0

Но в уравнении L(U) = 0 будет входить только лишь конечное число других элементов. Такого мы хотим добиться и для проекционных методов.

В качестве пространства H_N предлагают брать отрезок ряда Фурье, то есть элементами этого пространства являются отрезками ряда Фурье, то есть это линейная оболочка

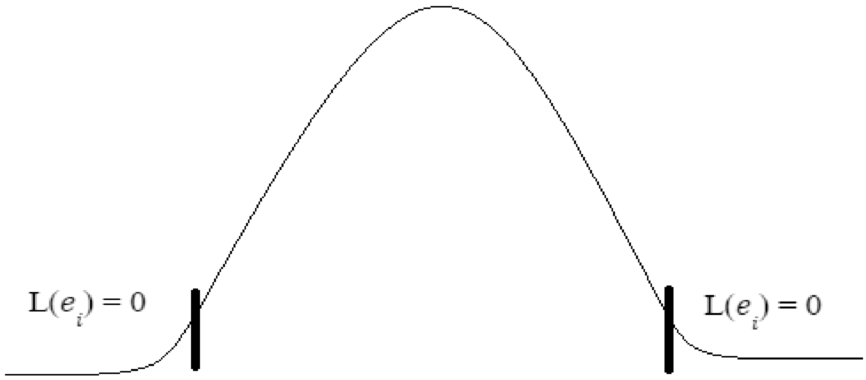
$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{sinnx} \\ \mathrm{cosnx} \end{matrix}\right\}$$
$$n = 0 \ldots N$$

Но если мы такие базисы будем использовать, то свойства будут нарушены и получится, что значение приближенное производной будет зависеть от всех элементов базиса. Вот это обстоятельство привело к тому, что эти проекционные методы долгое время были в загоне.
Через некоторое время был изобретен метод конечных элементов, который заключался в том, что мы элементы базиса e_i i = 1 … n пространства H_N. Любой элемент из H_N можно представить по этим базисам. То есть мы можем записать, что $U_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$. Важным свойством тогда является следующая вещь, что если у нас e_i (а они выглядят как сравнительно безобидные числа) - на самом деле это функция e_i(x).

Тогда для нас важны такие вещи:

1) L(e_i) = 0 . Она отлична от нуля только лишь там, где у нас функция e_i

сама также отлична от нуля. А там где $e_i = 0$, то



2) В том случае, когда у нас обычное произведение функции $(f(x),\ e_i) = 0$. Скалярное произведение - это интеграл от обычного произведения, и поэтому, если в каждой точке у нас есть $f(x) = 0$ или $e_i = 0$, тогда скалярное произведение обращается в 0.

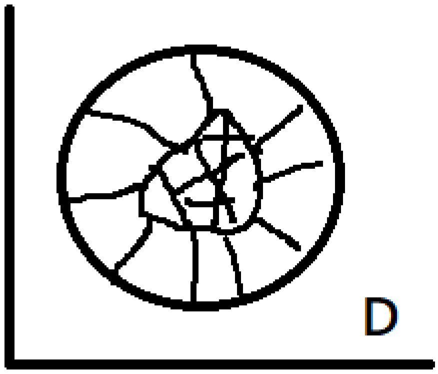
Если мы подберем такой базис $(e_j,\ e_i)\ =\ 0$, то матрица получится разреженной. Количество элементов в каждом уравнении будет ограничено.
Рассмотрим, как можно построить такой базис:

Наша цель следующая: мы хотим построить базис e_i i = 1 … n , такой что

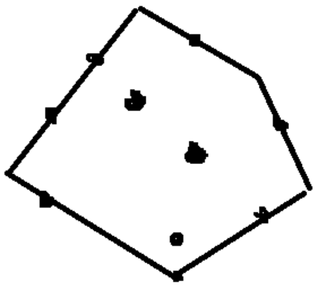
$$\int\limits_D e_i(\overline{x})e_j(\overline{x})d\overline{x} \neq 0, \quad j = j_1(i), j_2(i), \dots j_k(i) \quad \forall N$$

Размерность пространства может увеличиваться, но это число отличных от нуля скалярных произведений остается на прежнем месте. Одна из общих схем, как можно такие базисы строить.

Рассмотрим двумерный случай (можно и трёхмерных и четырёхмерный, но двумерных легче рисовать): Дана искомая область D в которой ищется решение уравнения L(U) = 0. Разобьём эту область на произвольное количество кусков, куски могут быть произвольной формы(но, как правило, произвольные куски могут иметь произвольное описание, поэтому приводится разбиение на куски определенной формы):

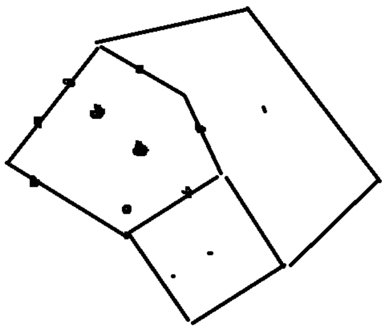


Каждый такой участок называется конечным элементом. В каждом участке есть точки, они могут попадаться и на границах элементов. Каждой точке мы зададим условие, функционал. Этим функционалом будет либо значение функции F либо значение производной.

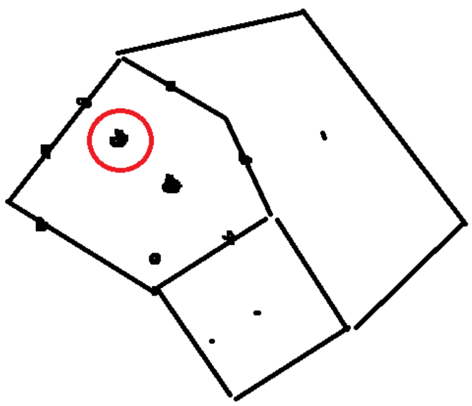


Задача интерполяции должна иметь единственное решение. Надо найти такой полином, который принимает заданные значение и имело бы единственное решение.

Это не единственное требование: теперь зададим каждой точке произвольные значение, в результате получим функцию, определенную во всей области, кроме границы элементов. Потому что на границах элементы могут быть разные значения функции. Требуем, чтобы такого не было. Получившаяся функция должна быть непрерывна.

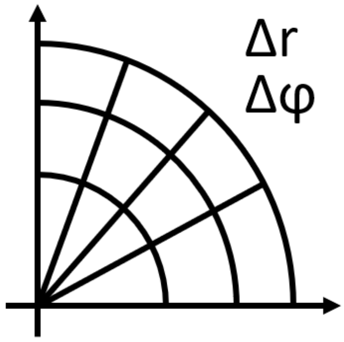
 Поэтому вводятся дополнения. В каждом конкретном случае нужно строить соответственно те расположения, которые мы задаём. И теперь мы образуем базис следующим образом: в каждой точке задано только лишь одно значение. Если точки совпали, то одной приписываем значение равной единице, а остальным значения равным 0. Так называемый базис Лагранжа. Напоминаем, наша задача интерполяции должна иметь единственное решение. И тогда, такой базис будет обладать свойством конечного-элементного типа.

Это дело нужно проверить:
Точка может быть 3-х типов.
1-ый тип: точка, которая попадает внутрь области.



отступление
Напомним, в каждый элемент должно попасть определенное количество точек k. По мере увеличения размерности пространства, мы не будем увеличивать количество точек в одном элементе до бесконечности.

А будем требовать того, чтобы при увеличении размерности пространства в одной точке не сходилось вершинами бесконечное количество элементов. Например, если в сетке в полярных координатах устремлять Δr и $\Delta\varphi$ к нулю то в начале координат сойдется бесконечное количество элементов. Такое разбиение недопустимо.



конец отступления

Продолжим. Если точка попадает внутрь элемента, и мы задали в ней единицу, то во всех остальных точках значение будет равно нулю. Так же и в других элементах значение базисной функции - тождественный ноль, потому что задача интерполяции имеет единственное решение. Таким образом, носителем будет элемент, в который и попала наша точка.

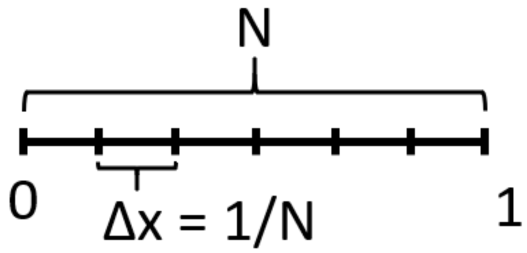
2-й тип: точка попадает на границу двух элементов. В этом случае, аналогично, значения во всех остальных точках будут равны нулю, а носителями будут два элемента, на границу которых попадает точка.

3-й тип: точка попала в вершину. Соответственно носителями будут все элементы, которые сходятся в этой вершине.
Именно поэтому недопустимо бесконечное количество элементов, сходящихся в одной вершине.

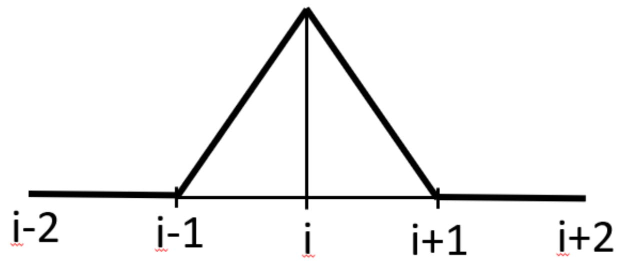
Рассмотрим со сколькими элементами может пересекаться носитель в каждом случае.
В первом случае, очевидно, не больше, чем с k элементами (если границ тоже k и все точки попали на разные границы), так как ранее мы договорились, что точек конечное количество.
Во втором случае по аналогичным рассуждениям - не больше, чем с $2k$.
В третьем случае, если мы договариваемся, что в вершине не может сходиться более l точек, то не больше, чем $l * k$.

Теперь рассмотрим 2 конкретных базиса.
Одномерный: область D - отрезок $[0; 1]$. Равномерно наносим на него N точек. Получаются отрезки, каждый длиной $\Delta x = 1/N$. В каждой точке

задаем функционал. Тогда на каждом отрезке $(i;\ i+1)$ получится множество линейных функций вида $a + bx$.



Такая задача имеет единственное решение, так как через две точки можно провести только одну прямую. Тогда, если значение в некоторой точке задаем равное единице, то в остальных значения равны нулю. Получаем непрерывную функцию.



Элемент e_i задается следующим образом:

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{\Delta x}, x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{\Delta x}, x \in [x_i; x_{i+1}] \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим как будет работать метод Галёркина для решения следующей задачи:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

Здесь придется воспользоваться расширением оператора, потому что при нашем e_i вторую производную взять нельзя. Запишем:

$$u_N = \sum_{i=0}^{N} u_i * e_i\,(x)$$

Граничные условия:

$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

Чтобы им удовлетворить, соответствующие элементы будут:

$$u_N(0) = u_0 = 0, u_N(1) = u_N = 1$$

Это первые два наших коэффициента. Далее вычислим невязку.

$$r_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \frac{d^2 e_i}{dx^2} - f(x)$$

Она должна быть ортогональна всем элементам, т.е. скалярное произведение должно быть равно нулю.

$$(r_n, e_i) = 0, \qquad i = 0, \dots, N$$

Посмотрим, что получится сначала для $i = 1, \dots, N - 1$.

$$\int_0^1 r_n e_i dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{N} u_j \frac{d^2 e_j}{dx^2} - f(x), e_i \right) dx - \int_0^1 f(x) e_j dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \left(\frac{d^2 e_j}{dx^2}, e_i \right) dx - \int_0^1 f(x) e_j dx = 0$$

Далее этот интеграл преобразовываем в следующий вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} e_j e_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{de_j}{dx} e_j\right) - \frac{de_i}{dx}\frac{de_j}{dx} \text{ (X)}$$

И теперь, подставляя сюда этот интеграл, мы можем записать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{de_j}{dx} e_i\right) dx = \frac{de_j}{dx} e_i\Big|_1^0 = 0$$

Потому что когда $i \neq 0$, то e_i обращается в ноль, поэтому интеграл и становится равным нулю.

И у нас остаётся только лишь интеграл X.

В чём весь фокус? Для чего это было сделано?
Для того, чтобы избавиться от вторых производных!
Следовательно, у нас получается

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \int_0^1 \frac{de_j}{dx}\frac{de_i}{dx}dx = \int_0^1 f(x)e_i dx$$

Здесь уже у нас вторых производных нет, мы можем это сделать.
Здесь всегда нужно быть очень осторожным с такими преобразованиями.
В данном случае оно верно. И оно будет верно только в том случае, если функции e_i, e_j – непрерывные. В другом случае это у нас будет неверно.
Ну вот, надеюсь, на следующей лекции мы будем говорить про разрывные методы Галёркина, вот там у меня (У КОГО У МЕНЯ……….) подробно объяснено, в чём здесь состоит неприятность: в случае, если функция непрерывна, эти преобразования справедливы. Пока вам придётся поверить мне на слово.

Значит, дальше мы вспомним, что e_i тождественно нулю вне вот этих интервалов:

$x \in [x_{i-1}; x_i)$

$x \in [x_i; x_{i+1})$

Таким образом, в этой сумме останется лишь три члена.
Когда

$j = i - 1$

$j = i$

$j = i + 1$

Тогда у нас получится следующая вещь.
Поскольку

$$\frac{de_i}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & x \in [x_{i-1}; x_i) \\ -\frac{1}{\Delta x} & x \in [x_{i+1}; x_i) \end{cases}$$

и

$$e_{i-1} = \begin{cases} \frac{x - x_{i+2}}{\Delta x} & x \in (x_{i-2}; x_{i-1}) \\ \frac{x_i - x}{\Delta x} & x \in (x_{i-1}; x_i) \end{cases},$$

то по этому отрезку остались интегралы

$$-U_{i-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{de_{i-1}}{dx}\frac{1}{\Delta x}dx + U_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{de_i}{dx}\right)^2 dx - U_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{de_{i+1}}{dx}\frac{de_i}{dx}$$

И это будет равняться

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x-x_{i-1}}{\triangle x}dx \ + \ \int_{x_i}^{x_{i+!}} f(x)\frac{x_{i+1}-x}{\triangle x}dx$$

Вот что мы получили. И теперь нам осталось подставить сюда эти выражения, а для того, чтобы наши производные выкинуть, я напишу, чему равно e_{i+1}:

$$e_{i+1} = \begin{cases} \frac{x-x_i}{\Delta x} \\ \frac{x_{i+2}-x}{\Delta x} \end{cases}$$

Нам остаётся посчитать все производные, а они у нас равны будут либо +1, либо -1, и i сюда подставить.

Т.е. у нас получится

$$U_{i-1}\frac{1}{\triangle x} - \frac{2}{\triangle x}U_i + \frac{1}{\triangle x}U_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x-x_{i-1}}{\triangle\, x}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\frac{x_{i+1}-x}{\triangle x}$$

и

$$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{\triangle x} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x-x_i}{\triangle x}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\frac{x_{i+1}-x_i}{\triangle x}dx$$

Как видите, всё будет то же самое, только правая часть у нас другая. Давайте её исследуем.

Во-первых, мы должны ещё разделить на $\triangle x$, чтобы получить$\triangle x^2$.

Т.е. мы можем записать так:

Поскольку

$$f(x) = f(x_i) + \frac{df}{dx}(x-x_i) + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{(x-x_i)^2}{2},$$

то наш интеграл будет равняться

$$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{\triangle x^2} = \frac{1}{\triangle x}\left(f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{x-x_{i-1}}{\triangle x}dx\right)$$

Тут можно переместить $\triangle x$, тогда получится так:

$$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{\triangle x^2} = \frac{1}{\triangle x}\left(\frac{f(x_i)}{\triangle x}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})dx\right)$$

$$\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x} - \frac{(x-x_{i+1})^2}{2}$$

$$\frac{1}{\triangle x^2}\frac{\triangle x^2}{2}f(x)+f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_{i+1}-x_i}{\triangle x}dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_{i+1}-x_i}{\triangle x}dx = \frac{1}{2}$$

и $\triangle x^2$ сократится, т.е.

$$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{\triangle x^2} = f(x_i)$$

и

$$\frac{df}{dx}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{x-x_{i-1}}{\triangle x^2}(x-x_i)dx$$

$$\frac{df}{dx}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_{i+1}-x}{\triangle x^2}(x-x_i)dx$$

Вообще говоря, можно всё это дело аккуратно посчитать, и можно будет быстрее вычислить эти интегралы.

Если мы возьмём и сделаем такую замену переменных

$x-x_i=\tilde{x}$

$dx = d\tilde{x}$

Базаргармаев - 1:15 - 1:22, 1:41 - 2:00

Таким образом, в уравнении выше у нас получится:

$x = \bar{x} + x_i$

Следовательно:

$$\int_{-\Delta x}^{0}\frac{\bar{x}+\Delta x}{\Delta x^2}\bar{x} + \int_{0}^{\Delta x}\frac{\Delta x-\bar{x}}{\Delta x^2}\bar{x}dx$$

Пусть $\bar{\bar{x}} =- \bar{x}$. Тогда:

$$\int_{0}^{\Delta x}\frac{\Delta x-\bar{x}}{\Delta x^2}\bar{x}dx = \int_{0}^{-\Delta x}\frac{\Delta x+\bar{\bar{x}}}{\Delta x^2}d\bar{\bar{x}} = -\int_{-\Delta x}^{0}\frac{\Delta x+\bar{\bar{x}}}{\Delta x^2}d\bar{\bar{x}}$$

$$\int_{-\Delta x}^{0}\frac{\bar{x}+\Delta x}{\Delta x^2}\bar{x} - \int_{-\Delta x}^{0}\frac{\Delta x+\bar{\bar{x}}}{\Delta x^2}d\bar{\bar{x}} = 0$$

Значит, в уравнении $f(x)$ отсутствует часть $\frac{df}{dx}(x - x_i)$.

Теперь предположим, что максимальное значение модуля второй производной меньше M: $max|\frac{d^2f}{dx^2}| \leq M$. Тогда модуль интегралов выше будет меньше или равен:

$$\frac{1}{\Delta x^2} M \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (\frac{x-x_i}{2})^2 (x - x_{i-1}) dx.$$

Заметим, что $|\frac{x-x_i}{2}| \leq \Delta x$ и $|x - x_{i-1}| \leq \Delta x$. Тогда $|(\frac{x-x_i}{2})^2 (x - x_{i-1})| \leq \Delta x^3$. Проинтегрируем выражение в пределах от x_{i-1} до x_i и получим $\frac{1}{\Delta x^2} MO(\Delta x^4) = MO(\Delta x^2)$.

Следовательно:

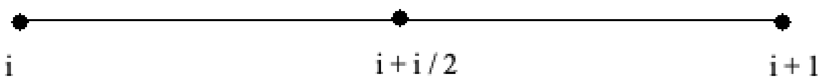
$$\frac{u_{i+1} - ?u_i + u_{i-1}}{dx^2} = f(x_i) + MO(\Delta x^2).$$

Получаем, что функция будет отличаться от значения функции соответствующей точки с тем же порядком точности, с которым аппроксимирована вторая производная. Граничные условия будут выполнены.

Получается конечно-разностная аппроксимация, и, поскольку каждый элемент пересекается с носителями трех других элементов, номер которых совпадает с номером самого элемента, то в уравнение вошло три величины.

За счет метода конечных элементов мы можем повышать порядок точности наших схем сравнительно легко.

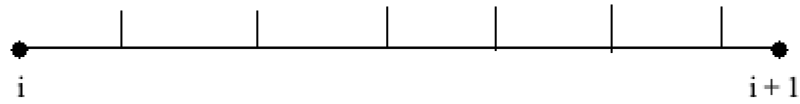
Покажем как строится базис конечных элементов.



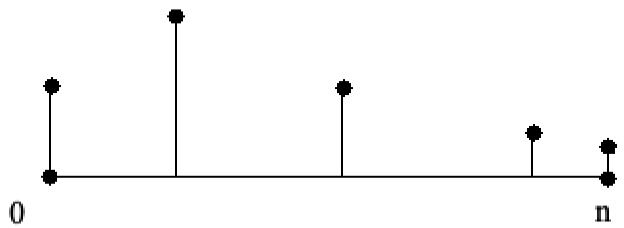
Поместим на отрезке точку в центре. Порядок полиномов на каждом элементе изменится. Теперь у нас три функционала и три коэффициента в линейной функции: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Суть заключается в том, что квадратичными элементами мы можем представить нашу функцию точнее, чем линейными элементами. Задача интерполяции имеет единственное решение, но теперь точность получаемых схем на порядок выше.

Далее если от точки i до $i + 1$ ввести разбиение (см. рис.) и в каждой точке задать функцию, то порядок полинома станет k, где k - число точек разбиения:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$.



Сколько бы точек мы ни брали, все равно получится излом производных. Тогда возникает вопрос: можем ли мы построить такие элементы, которые не будут иметь излома производных. Для этой цели мы не только задаем значение функции в определенных точках, но и задаем значение производной.
Но если мы зададим на отрезке $[i;\ i + 1]$ значения функции f, а в точке $i + i/2$ зададим значение производной f', то система получится вырожденной, а решение будет не всегда возможно и не всегда единственное; а там, где возможно - не единственно.
Есть способ избежать такой ситуации - использовать интерполяцию Эрмита. У нас есть два способа приближения функции: методом интерполяции и формулами Тейлора.
Давайте рассмотрим, что такое интерполяция. У нас задано определенное количество точек и мы строим полином степени не выше n, который в каждой заданной точке принимает заданное значение функции:

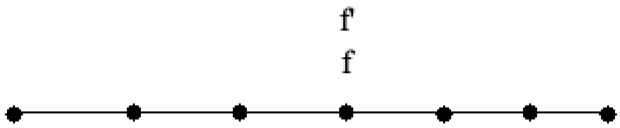


Формула Тейлора в некотором смысле прямая противоположность: у нас есть одна единственная точка, и в этой точке мы задаем три значения:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x_0}(x - x_0) + \frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + o((x - x_0)^2)$$

То есть для каждой точки задается значение функции в данной точке и множество производных.
Интерполяция Эрмита объединяет в себе преимущества формулы Тейлора и интерполяции. То есть в каждой точке задается функция и определенное

количество производных. Сам метод заключается в том, что мы строим полином, производные которого во всех точках вплоть до определенного порядка и его значения совпадают со значениями производной исходной функции.
Теперь вернемся к изначальному разбиению. И в каждой точке зададим две величины f и f':



Теперь если мы возьмем отдельный элемент, то мы получим, что там четыре заданные величины: f_i, f_i', f_{i+1}, f_{i+1}':

То есть у нас будет четыре условия на коэффициенты полинома, коэффициентов полинома, для того, чтобы решение было единственным, должно быть четыре. Получается кубическая функция:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

В того, что было сказано про интерполяцию Эрмита, такая функция всегда существует и единственна.
Если мы построим такие элементы, соответствующие базису Лагранжа, то мы получим непрерывную функцию, у которой также будут непрерывные производные, так как значения производных слева и справаа будут одинаковыми.
Мы также можем задавать производные старшего порядка в точках, но нужно помнить, что с каждой новой производной порядок полинома будет возрастать на две степени.
Для чего нужны гладкие производные? Предположим, что у нас есть уравнение четвертого порядка: $\frac{d^4 u}{dx^4} = f(x)$.

Если попытаться сделать по аналогии со второй производной, то есть умножить на е и раскрыть:

$\frac{d^2u}{dx^2}e = \frac{d}{dx}e\frac{du}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{de}{dx}$

То получим:

$\frac{d^4u}{dx^4}e = \frac{d}{dx}e\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx}$

Мы не можем вычислить $\frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx}$, если u не непрерывная функция.

Поэтому распишем следующее выражение:

$\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2u}{dx^2}e = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3u}{dx^3}e + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{de}{dx}\right) = \frac{d^4u}{dx^4}e + 2\frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2e}{dx^2}$

Выражаем производную:

$\frac{d^4u}{dx^4}e = \frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2u}{dx^2}e - 2\frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2e}{dx^2}$

Проведём аналогичную процедуру для $\frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx}$:

$\frac{d^3u}{dx^3}\frac{de}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{de}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2e}{dx^2}$

Подставляем полученное выражение и получаем конечный результат:

$\frac{d^4u}{dx^4}e = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2}e\right)\right) - 2\frac{d}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{de}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2e}{dx^2}$

В полученном выражении все слагаемые вычисляются.

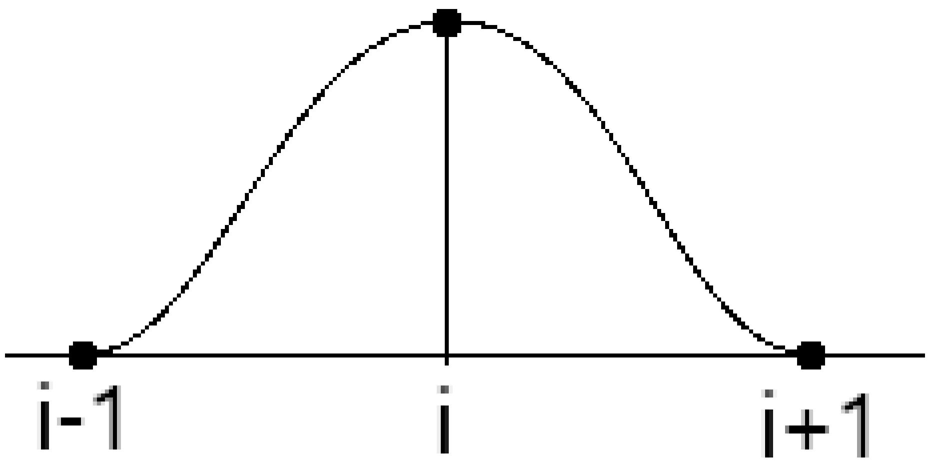
Можно не проводить такие вычисления, а свести уравнение $\frac{d^4u}{dx^4} = f(x)$ к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{dx^2} = f(x), \\ \frac{d^2u}{dx^2} = v \end{cases}$$

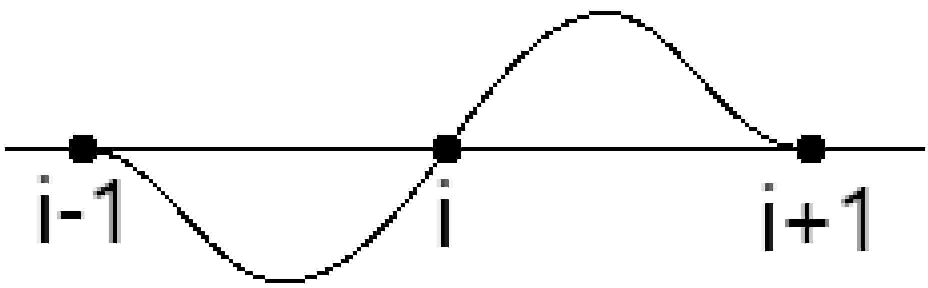
У данного подхода есть недостаток. Оператор четвёртой производной, записанный в явном виде, является самосопряжённым, потому при вычислении матрицы будут получаться симметричными. Если аппроксимировать через систему, то матрицы будут не симметричными.

Базис Лагранжа будет состоять из двух типов элементов:

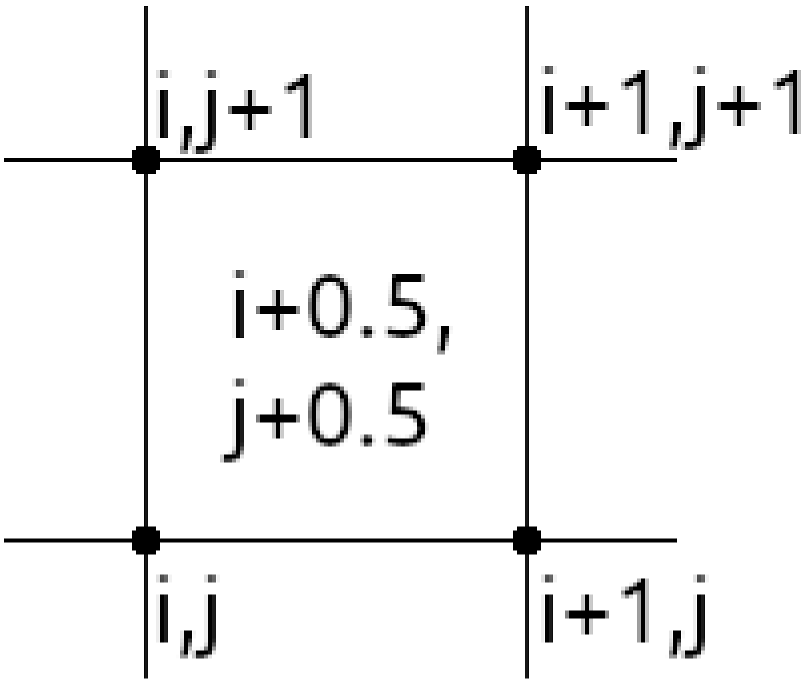
1) В точке i значение функции равно 1, а значения производных равны 0, а в остальных точках значения и функции, и производных равны 0.



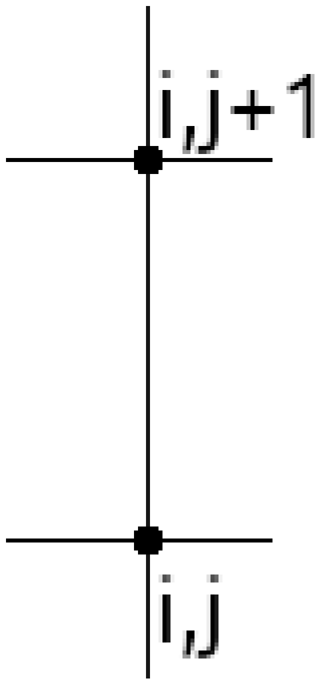
2) В точке i значение первой производной равно 1, а значения функции и остальных производных равны 0, а в остальных точках значения и функции, и производных равны 0.



Перейдём к двумерному случаю. Рассмотрим прямоугольную сетку. Зададим значения функции в узлах сетки.

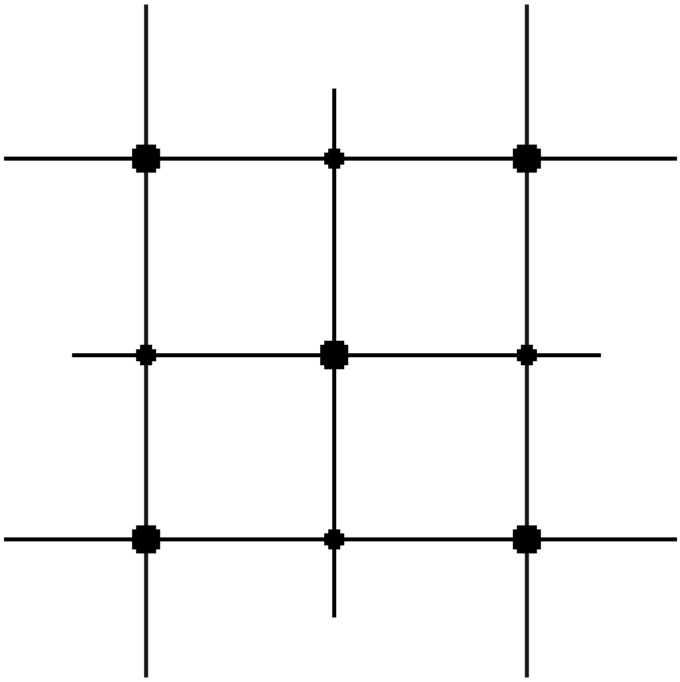


Получаем четыре точки. Следовательно, необходим полином с четырьмя коэффициентами. Но линейный полином $a_0 + a_1x + a_2y$ содержит лишь три коэффициента.
Поэтому, рассмотрим полилинейные функции. Функция является полилинейной, если она линейна по любому одному аргументу при фиксированных остальных аргументах.
Например, полином $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$. Если $y = 1$, то тогда будет $a_0 + a_2 + (a_1 + a_3)x$ – линейная функция по x.
В силу полилинейности, значения функций ячеек будут совпадать не только в узлах, но и на границах. Рассмотрим вертикальную границу:



Здесь $x = const$, потому функция будет линейна по y. Линейная функция определяется двумя точками однозначно.

Если добавить узел внутрь ячейки, то получим как минимум квадратичный полином и непрерывность на границах нарушится. Чтобы сохранить непрерывность на границах для квадратичных полиномов, необходимы минимум три точки на границах.

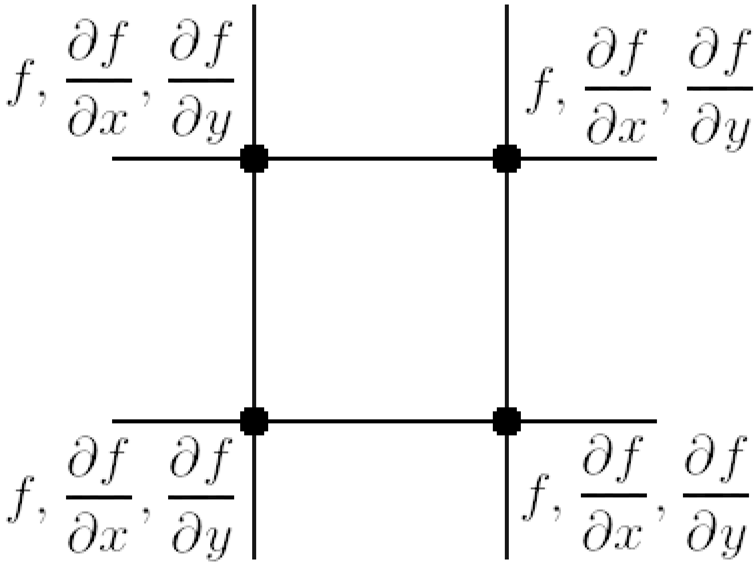


Получаем 9 точек. Но у квадратичного полинома $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$ всего 6 коэффициентов. По аналогии с полилинейной функцией, построим полином, остающийся квадратичным при одном фиксированном аргументе:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

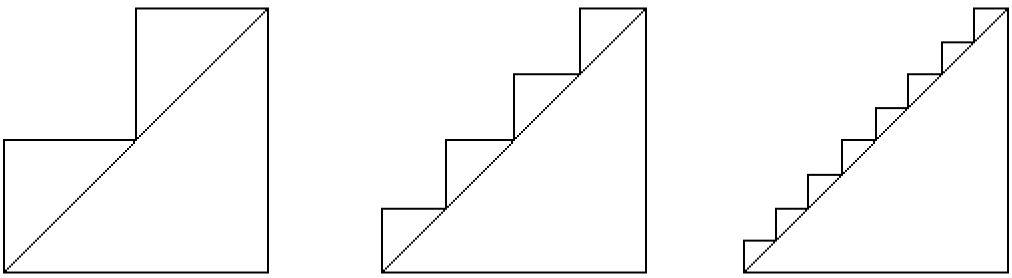
В общем случае, если ячейку разбить на n частей по горизонтали и вертикали, то всегда можно построить полином, остающийся полиномом n-степени при фиксированном одном аргументе.

Чтобы добиться непрерывности производных, зададим в узлах значения функции и частных производных.



Получается 12 условий. В данном случае можно построить кубический полином. На каждой границе будет по 4 условия, которые однозначно определяют кубический полином на границе, потому функция и её производные будут непрерывными.

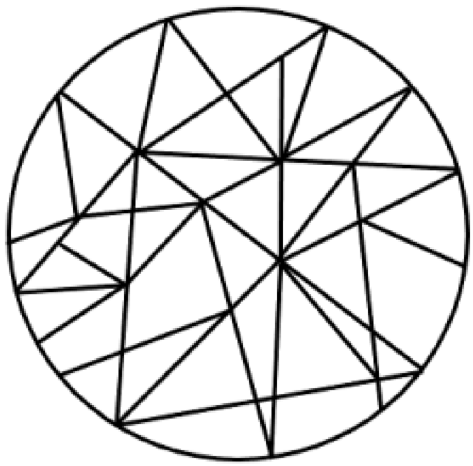
Для произвольных областей на плоскости используются треугольные сетки. Сетки бывают структурированными и неструктурированными. Если область аппроксимировать элементами прямоугольной сетки, то будут возникать ступенчатые границы.



Длина гипотенузы равна $\sqrt{2}$, а длина ступенчатой линии равна 2 на всех шагах приближения. В уравнении движения газа трение зависит от длины границы, потому подобный недостаток прямоугольных сеток является критическим.

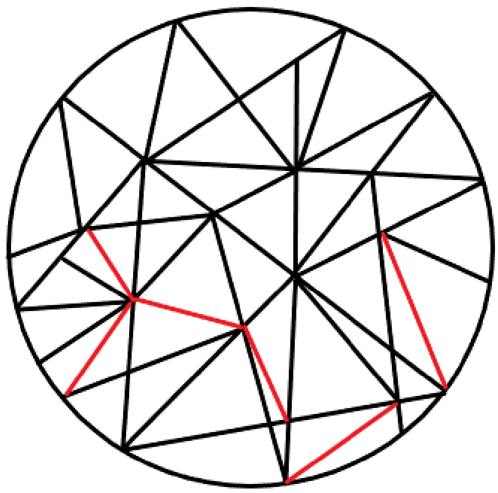
Можно построить элементы прямоугольной сетки внутри области, а на границах построить ячейки, повторяющие контур границы области. Но подобные сетки сложны в построении.

Поэтому можно попробовать задать произвольное разбиение сеток, как это показано на примере:



Такие сетки называют неструктурированными. Узлы такой сетки нельзя занумеровать, используя индексы i и j.

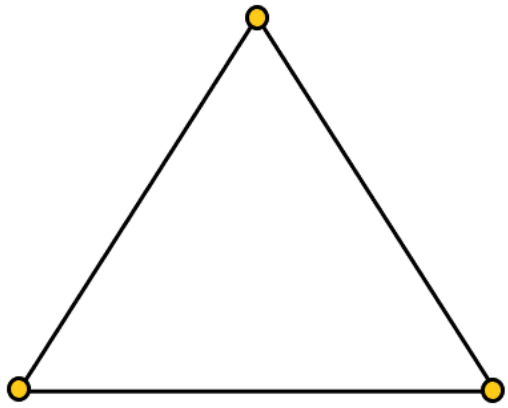
Любой произвольный многоугольник можно разбить на треугольники. Таким образом из предыдущей сетки мы можем получить уже треугольную сетку (красным цветом выделены добавленные разбиения):



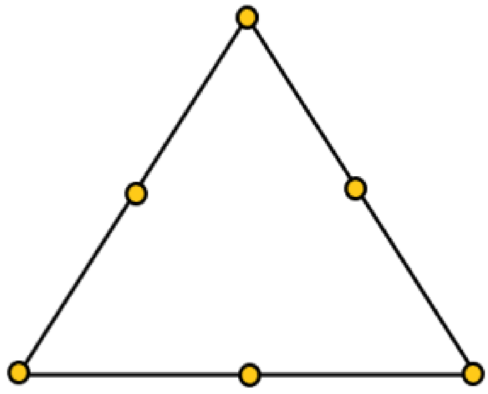
Такая сетка также является неструктурированной, но состоит только лишь из одних треугольников. Такое разбиение не всегда удобно, но оно

позволяет упростить метод конечных элементов - при произвольном разбиении каждый многоугольник потребует своих базисных функций, своих формул, и метод конечных элементов станет очень громоздким и непонятным.
В общем случае для упрощения обычно используют несколько различных элементов: в двумерном случае достаточно четырех- и треугольников, в трехмерном случае необходимо иметь как минимум три элемента - шестигранник, тетраэдр и четырехугольную пирамиду (часто также добавляют и треугольную призму, но, по мнению (нашего лектора) Тишкина В.Ф., это не обязательно).

Рассмотрим элементы, которые мы имеем на треугольниках (они очень похожи на те, которые были показаны для прямоугольников):

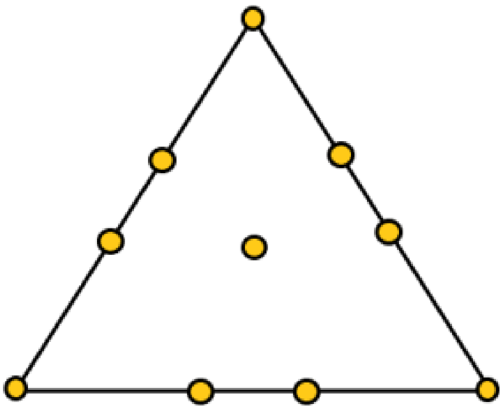


Три значения (отмечены желтыми точками) - три коэффициента линейной функции: $a_0 + a_1x + a_2y$.
Далее добавим три точки на границе:



Добавляем три соответствующих коэффициента и получаем квадратичную функцию: $a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$.

Далее, если мы хотим получить кубическую функцию, нам необходимо добавить еще три элемента на границах, плюс один элемент в центре треугольника:

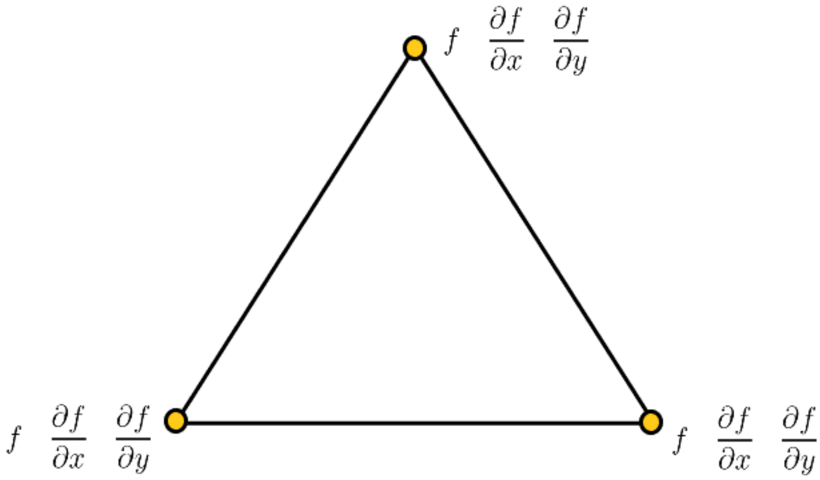


В итоге получим:

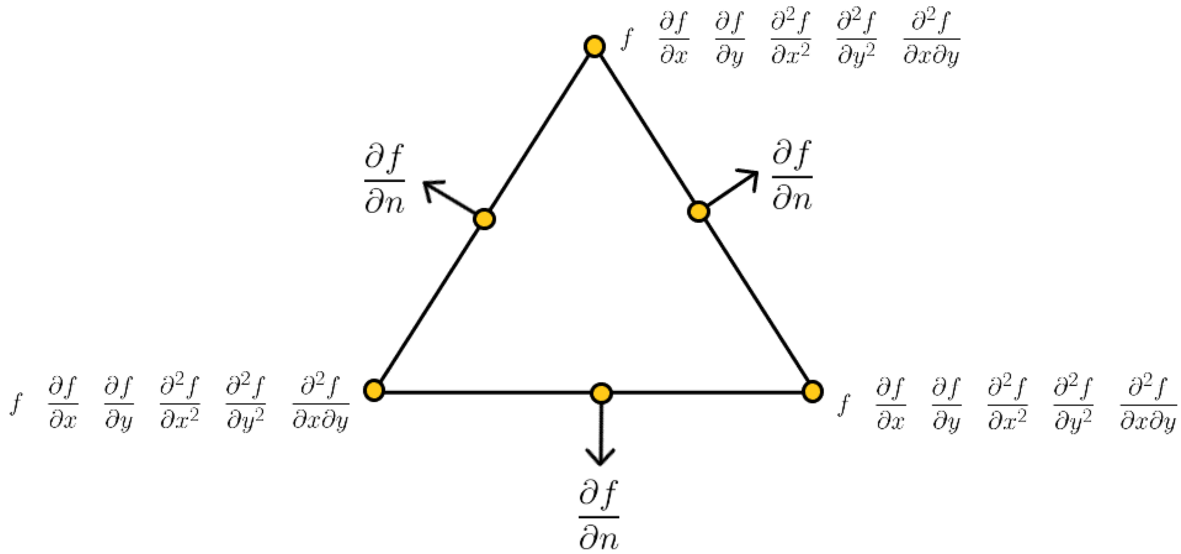
$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3.$

Аналогично можно продолжать и дальше, чтобы получить полиномы высших степеней: каждый раз добавляем по три точки на границу (три коэффициента в полином), плюс точки внутри треугольника для оставшихся коэффициентов в полиноме.

Теперь обсудим, как обеспечить непрерывность производных функции на треугольной сетке.
Будем действовать последовательно: для того, чтобы производные были непрерывны, очевидно в каждой точке необходимо задать значение функции и ее частных производных:



Всего получим девять значений. Однако полином
$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$
имеет десять членов, поэтому мы должны добавить дополнительные элементы: на границе добавим значения нормальных производных, а в вершинах треугольника также добавим значения вторых частных производных функции:



Итого, получим $6 * 3 + 3 = 21$ значение, каждое из которых соответствует одному из 21-го коэффициента полинома пятой степени:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 +$$
$$+ a_{10}x^4 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4 + a_{15}x^5 + a_{16}x^4y + a_{17}x^3y^2 +$$

$$+ a_{18}x^2y^3 + a_{19}xy^4 + a_{20}y^5.$$

Таким образом, каждое из значений однозначно определяет заданный полином, и потому функция и её производные будут непрерывными.