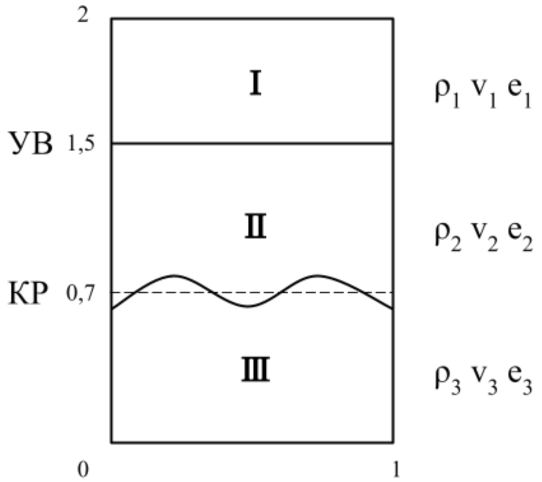
<u>Инструкция по курсовой</u>

Объединяемся в группы по три человека, т.е. одно задание на троих.
Варианты будут различаться заданием параметров.

Физическая постановка задачи:
Предлагается смоделировать развитие гидродинамической неустойчивости.
В течениях жидкостей и газов возникают различного рода неустойчивости, которые приводят к тому, что изначально маленькие возмущения начинают расти и в конце концов развиваются так называемые зоны перемешивания.

Постановка задачи (единая для всех вариантов):
Возьмем прямоугольную область, которая будет разделена на три области.
В каждой из этих зон зададим некоторое постоянное значение гидродинамических параметров:
ρ — плотность газа,
v — скорость газа,
e — удельная внутренняя энергия.
Значения ρ_2, v_2, e_2 и ρ_3, v_3, e_3 будут исходно заданы.
Значения ρ_1, v_1, e_1 необходимо определить.



Граница между областями I и II — это разрыв. Поскольку справа и слева разные значения гидродинамических величин этим разрывом является ударная волна.

Изогнутая раница между областями II и III — контактный разрыв. При контактном разрыве постоянные значения нормальных скоростей и давления.
Во всех вариантах $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ (эти газы будут покоиться).
Для ударной волны будет задано значение числа Маха, которое определяет скорость движения волны:
$M = \frac{u}{c_2}$,
u — скорость движения ударной волны,
c_2 — скорость звука.
Тогда значение скорости ударной волны:
$u = c_2 M$
Таким образом, входными параметрами, которые будут описывать гидродинамические величины (которые будем рассчитывать), определяются следующим образом:
$M,\ \rho_2,\ \varepsilon_2,\ \rho_3,\ \gamma,\ \alpha,\ n$ — заданы
$v_2 = 0$
Значение ε_3 определяется из условия равенства давлений:
$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$
$\rho_2\varepsilon_2 = \rho_3\varepsilon_3$
$\varepsilon_3 = \frac{\rho_2}{\rho_3}\varepsilon_2$

Размеры области могут быть произвольными, поскольку единица измерения длины не определена.
Пусть $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 2$ для всех вариантов.
Положение ударной волны $y_{\text{ув}} = 1.5$.
Положение контактного разрыва $y_{\text{ср.кр}} = 0.7$.
Контактный разрыв представим, как косинусоидальное возмущение:
$y_{\text{кр}}(x) = 0.7 + \alpha\, cos(n\pi x)$

Чтобы завершить вычисление начальных данных, прямоугольник разобьем сеткой. В начальный момент необходимо определить значения гидродинамических величин в каждой ячейке сетки. Чтобы границы $y_{ув}$ и $y_{ср.кр}$ точно прошли по границам ячеек:

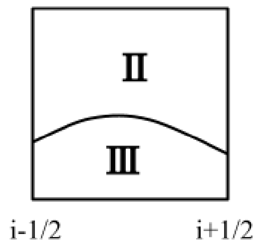
$\Delta y = \frac{0.1}{k}$ — размеры ячеек;

$N_y = \frac{2}{\Delta y}$ — число ячеек.

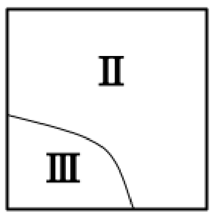
Ячейки по x могут быть произвольными, но желательно $N_x = N_y$, чтобы ячейки были квадратные.

Если ячейка целиком попадает в одну из областей I, II, III, то тогда значения таких ячеек соответственно равны или ρ_1, v_1, e_1, или ρ_2, v_2, e_2, или ρ_3, v_3, e_3.

Если ячейка не целиком попадает в область, то необходимо рассчитать объем части ячейки, которая находится под границей косинуса.



$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} y(x)dx$$



В данном случае необходимо решить уравнение (то есть нужно определить все точки пересечения кривой с линиями сетки):

$$0.7 + \alpha\, cos(n\pi x) = y_{j-1/2}$$

$$cos(n\pi x) = \frac{y_{j-1/2} - 0.7}{\alpha}$$

Важно убедиться, что $\left|\frac{y_{j-1/2} - 0.7}{\alpha}\right| \le 1$, иначе решения нет.

Таким образом, определим каждый объем каждой такой смешанной ячейки. Далее нужно определить гидродинамические величины: скорости, плотности и удельные внутренние энергии.

Переходим в газовую динамику.
У нас есть уравнение для U
$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, где

$U =$ $F =$ (векторы)

Для этой системы построим монотонную схему.
Уравнение:
$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{-1/2}}{\Delta x} = 0$, где $F_{i+1/2}$ на схеме первого порядка будем считать как некоторую потоковую функцию $H\,(U,\ U_{i+1})$

Здесь выполнено условие согласования потока функция H тоже будет векторной функцией.
В данном случае $H(\overline{U}, \overline{\upsilon}) = F(\upsilon)$.
В этом случае поток должен считаться в точности тем же что и в дифференциальном уравнении

$$U^t_{i+1/2} = U_{i+1} - \alpha^+ \left(R^+_{i+1/2}\right) * \frac{U_{i+1} - \tilde{U}_r}{\Delta x} * \frac{\Delta F}{2}$$

Здесь α тоже векторная функция и R векторная функция, которая считается как

$$R = \begin{pmatrix} R_1^+ \\ R_2^+ \\ R_3^+ \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$R^+_1 = \frac{U_{1\,i+2} - U_{1\,i+1}}{U_{1\,i+1} - U_{1\,i}},$$

то есть каждая компонента вектора R вычисляется по каждой соответствующей компоненте вектора U.

$$\alpha^+ = \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_2^+ \\ \alpha_3^+ \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$\alpha_1^+ = \alpha(R_1^+); \alpha_2^+ = \alpha(R_2^+); \alpha_3^+ = \alpha(R_3^+)$

Все аналогично для

R^- и т.д.

Если сетка у нас неравномерная, то:

$$R_{i+n} = \frac{\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_i}}{\frac{U_{in} - U_n}{\Delta x_{i+1/2}}} \quad \Delta x_{i+1/2} = 1/2(\Delta x_i + \Delta x_{i+1/2})$$

Если сетка не прямоугольная, то есть когда линии сетки представляют собой некоторую криволинейную систему координат, тогда необходимо вычислять производные по направлению заданной системы координат.

В тех методах, которые мы рассматриваем, метод конечных разностей, конечных объемов, мы прибегаем к такой процедуре как аппроксимация. Мы аппроксимируем либо интегралы, потоки и т.д. Существует другой подход к построению вычислительных алгоритмов, которые не связаны с аппроксимацией. Рассмотрим это в общем виде.
Пусть у нас есть оператор $L(n) = f$
Пусть функция $U \in H$

Скорость которая возникает при распаде разрыва заменяем на скорость звуковых волн.

Для вычисления схемы второго порядка, для ячейки ij, рассматриваем ячейки справа и слева.
Интерполируем точку. Всегда интерполируем по меньшему наклону, если знаки наклонов одинаковые, если знаки наклонов разные полагаем равными 0 для непрерывного перехода.

$$\varphi^-_{i+1/2j} = \varphi_{ij} + \alpha(R^-_{i+1/2j})\frac{\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij}}{2}$$

$$R^- = \frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i+1j}}{\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij}}$$

Аналогично интерполируем с другой стороны $\varphi^{+}_{i+1/2j}$.

$ij \rightarrow i^{-} + 1/2, i + 1j \rightarrow i^{+} + 1/2$

Остается запрограммировать и определится с производной по времени
Для внутренних ячеек процедура определена, но для граничных ячеек должны быть поставлены граничные условия. Один из способов заключается в следующем: нашу исходную сетку обрамляем искусственными ячейками, и выберем значения в ячейках таким образом, чтобы выполнялись граничные условия.

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} = L_{ij}(\Phi_{i})$$

Для этой системы уравнений использовать модифицированный метод Эйлера.
Остается задать конкретные значения.