Конспект [1-25 стр].

Каким образом можно получить модуль из задач? Если есть симметрия, то можно упростить. Преобразование зеркального отображения облегчить можно, но не упростить.

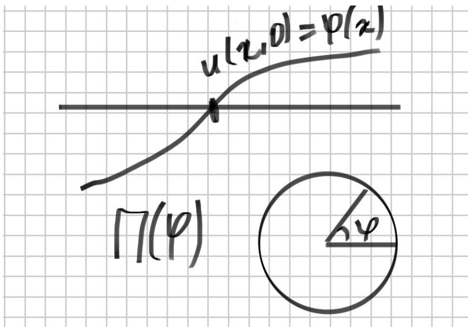
Уравнение струны:

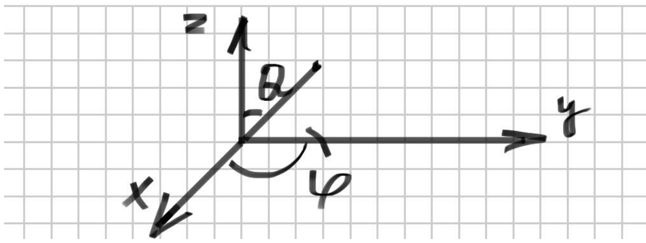
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, t) = \mu(t)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \psi(x)$$





Если ищем функцию u(x,y,z) ⇒ũ(r,Θ,φ) или ũ(r,Θ). $\frac{\partial}{\partial\varphi}$могут быть выкинуты, так как равны нулю.

Способ преобразования связанный с физикой:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0$$

Когда будем решать письменно → $\rho(x, 0) = arctg(x)$

Что обозначают численные величины? Значения плотности.
Необходима система единиц измерения.

$\frac{m}{l^3}$

Если другие единицы измерения, то и плотность может стать другой.
Ключевой момент→ разные системы, но результат одинаков (одно значение).

Набор целый зависит от ряда параметров.

Само уравнение: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho t}{\partial x} = 0$ не будет меняться от одной системы единиц измерений, будет одинаковым.

	см	дм
Если выберем:	г	кг
	сек	10 сек

2 сек , 3 см, 5 г/см^3

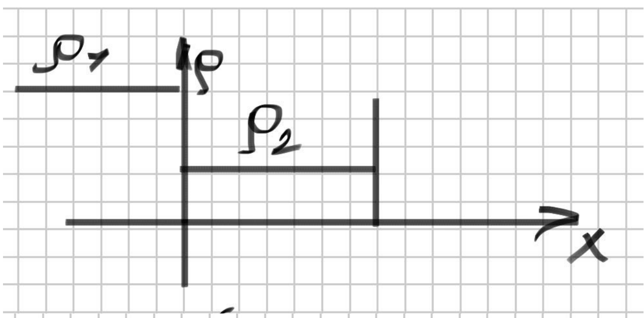
$\rho(2, 3) = 5$

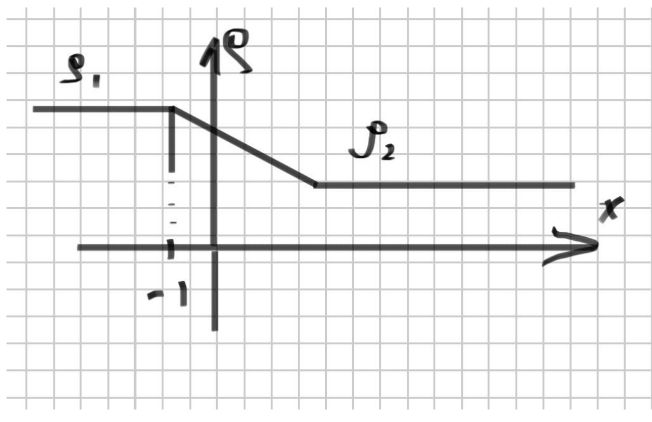
20 см на время 30 см

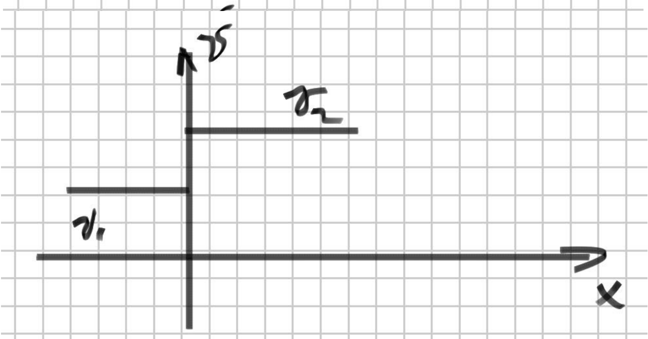
$5\frac{кг}{дм^3} = 5\frac{г}{см^3}$

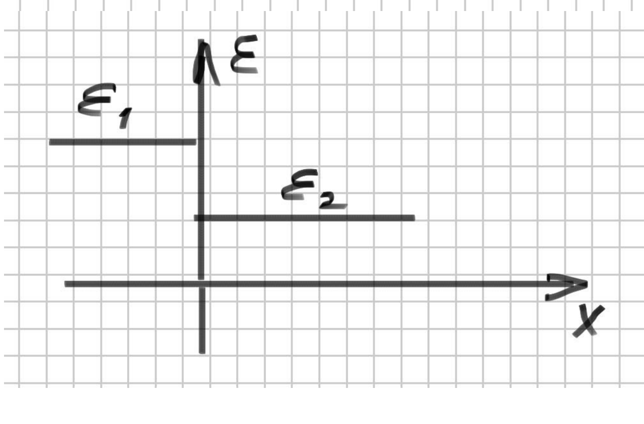
Каждая такая симметрия позволяет уменьшить число переменных на единицу.

Итак давайте поставим задачу, с производной разрыва:









$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_1 \; x<0 \\ \hline \rho_2 \; x>0 \end{cases}$

$\rho_1 = 1г/см^3 = 1кг/дм^3$

Скорость:

$\frac{l}{t} = \frac{\alpha l}{\alpha t}$

$\varepsilon \sim \frac{l^2}{t^2}$

$\frac{\alpha^2 l^2}{\alpha^2 t^2} = \frac{l^2}{t^2}$

Получаем систему , где ρравно:

первое уравнение ρ_1 при $x <- 1$

второе уравнение $x\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ при$- 1 \le x \le 1$

третье уравнение ρ_2при $x > 1$

Надо искать возможность, чтобы было меньше всего размерных параметров

$V(x,t) = V_{\;0}$

$V(\alpha x_{\;см}, \alpha t_{\;10\;см}) = V_{\;0}$

$V(10x_{\;см}, 10t_{\;см})$

$V(x,t) = V(\alpha x, \alpha t)$

$\alpha = t$

Если выберем $\alpha = \frac{1}{t}$, тогда получим $V(\frac{x}{t}$,1)= $V(\frac{x}{t})$. (1 - не меняется)

$\xi = \frac{x}{t}$ $\delta = \sqrt{x^2 + t^2 * V_0^2}$

Мы поступим более просто, то есть просто исключим данный факт.

$f(x.t) = \varphi(\frac{x}{t})$

$\alpha = \frac{1}{t_0} = V...$

Как мы будем преобразовывать уравнения:

$\rho(x,t) = \bar{\rho}(\frac{x}{t}) \frac{d\rho}{dt} = - \bar{\rho}' * \frac{x}{t^2}$

$\rho(x,t) = \bar{\rho}\,\bar{V}(\frac{x}{t}) \frac{d\rho V}{dt} = (\bar{\rho}\,\bar{V})' * \frac{1}{t}$

$- \frac{x}{t^2}\bar{\rho}' + \frac{1}{t}(\bar{\rho}\,\bar{U}) = 0\ \xi = \frac{x}{t}$

$- \frac{x}{t}\rho' + (\rho V)' = 0$

$\xi\bar{\rho}' = (\bar{\rho}\,\bar{V})'$

Уравнение для импульса

$\frac{dV}{dt} + V\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0$

$\xi\bar{V}' = V * V' + \frac{1}{\rho}\rho'$

$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \rho V\frac{d\varepsilon}{dx} + \rho\frac{dV}{dx} = 0$

$\xi\bar{\rho}' = (\bar{\rho}\,\bar{V})'$

$\xi\bar{V} = \bar{V}\,\bar{V}' + \frac{1}{\bar{\rho}}\bar{\rho}$

$\xi\bar{\rho}\,\bar{\varepsilon} = \bar{\rho}\,\bar{V}\varepsilon' + \bar{\rho}\,\bar{V}'$

$\xi\rho' = (\rho V)'$

$\xi\rho V' = \rho V V' + (\gamma - 1)(\rho\varepsilon)'$
$\xi\rho\varepsilon' = V\rho\varepsilon' + (\gamma - 1)\rho\varepsilon V'$

$\rho = const = C_1$
$V = const = C_2$
$\varepsilon = const = C_3$

$V' = \frac{(\xi - V)\rho'}{\rho}$
$(\xi - V)^2\rho' = (\gamma - 1)(\varepsilon\rho' + (\xi - V)\rho' = \rho V'$ $\qquad V' = 0$

$+ \rho\varepsilon')$ $\qquad \rho(\xi - V)V' = (\gamma - 1)[\rho'\varepsilon + \varepsilon'\rho]$

$(\xi - V)\rho\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = (\gamma - 1)(\xi - 1)\frac{\rho'}{\rho}$
$(\xi - V)\rho\varepsilon' = (\gamma - 1)\rho\varepsilon V' = (\gamma - 1)\varepsilon(\xi - V)\rho'$
$(ln\,\varepsilon)' = (\gamma - 1)(ln\,\rho)'$
$\varepsilon = B\rho^{\gamma-1}$ $\qquad P = A\rho^{\gamma}$
$V' = (\xi - V)\frac{\rho'}{\rho}$
$(\xi - V)\rho V' = (\gamma - 1)B(\rho^{\gamma-1}\rho' + \rho^{\gamma-1}(\gamma - 1)\rho')$ $\qquad (\gamma - 1)B = \mathrm{A}$
$(\xi - V)\rho V' = A\gamma\rho^{\gamma-1}\rho'$
$(\xi - V)^2 = A\gamma\rho^{\gamma-1}$
$(\xi - V) = \pm\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$

$V = \xi \pm \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$

$\mp\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}\rho' = \rho(1 \pm \sqrt{A\gamma} * \frac{\gamma-1}{2}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}-1}\rho')$

$\pm\sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-3}{2}\frac{\gamma+1}{2}}\rho' = 1$

$[\mp \sqrt{A\gamma} * \rho^{\frac{\gamma-1}{2}-1} \mp \sqrt{A\gamma} * \frac{\gamma-1}{2} - 1]\rho' =$

$\mp \sqrt{A\gamma} * (\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})' \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1$

$(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})' = t\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)\sqrt{A\gamma}}$

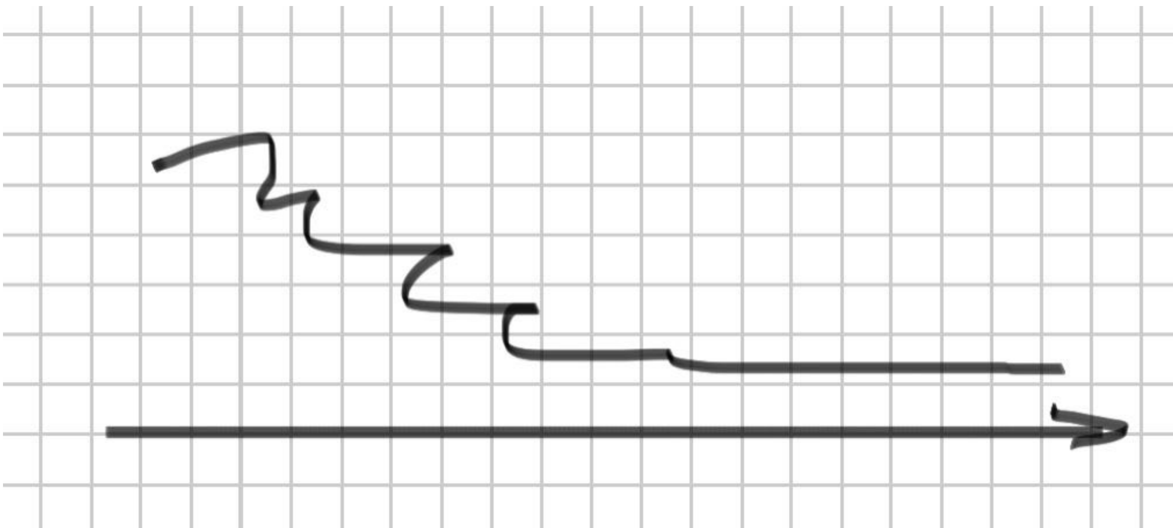
$\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A\gamma}} * \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\xi + D$

$\rho = (\pm \frac{1}{\sqrt{A\gamma}} * \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\xi + D)^{\frac{2}{\gamma-1}}$

Для решения раслада произв. разрыва →склеиваем решение

Если $\gamma \to \infty$, то и $\rho \to \infty$

Почему не склеить из 2-х констант?



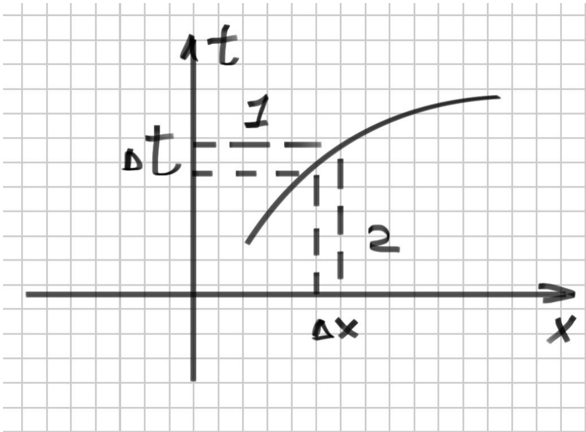
Если решение имеет разрыв, то тогда искомые имеют также разрыв и просто мы не склеим (см. соотн)

Слабые разрывы

Пусть есть система квазилинейных уравнений

$\frac{\partial U}{\partial t} + A(\overline{v})\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$=0

$\frac{dx}{d\tau}$=D



$\Delta x\ =\ D\Delta t$

$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\}\ ->$ непрерывны!

$\frac{\partial U_1}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial U_1}{\partial x}\Delta x\ =\ \frac{\partial U_2}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial U_2}{\partial x}\Delta x$

$\frac{\partial U_1}{\partial t}-\frac{\partial U_2}{\partial t}=\mathrm{D}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)$

$\frac{\partial U_1}{\partial t}+\ A(u)\frac{\partial U}{\partial x}\ =\ 0$

$\frac{\partial U_2}{\partial t}+\ A(u)\frac{\partial U_2}{\partial x}\ =\ 0$

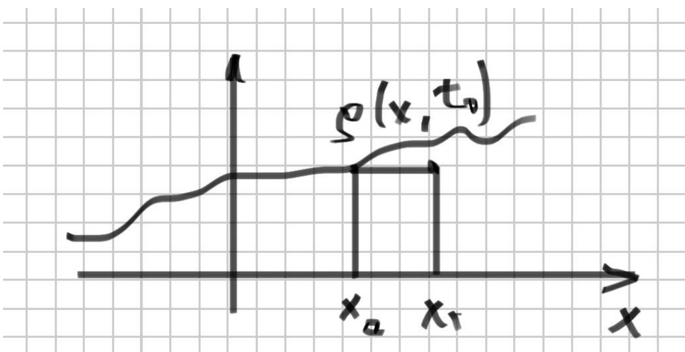
$A(u)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)=\ D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}-\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)$

$A\Delta\ =\ D\Delta$

$P\ =\ A\rho x$

$v\ =\ \xi\ \pm\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$

$\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}=\pm\ \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\xi+\ D^{\pm}$



$x_1\ =\frac{t_0}{t_1}x$

$\rho(x, t_0) = \overline{\rho}\left(\frac{x}{t_0}\right)$

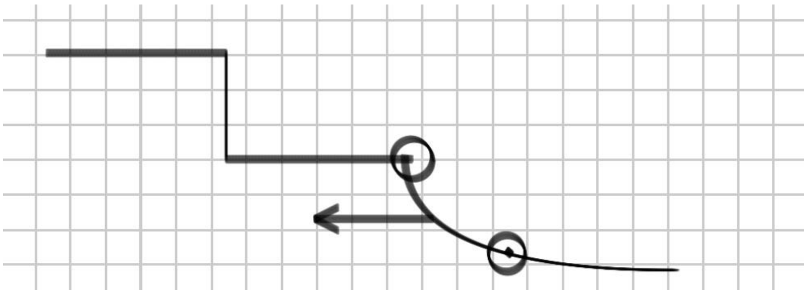
$\rho(x_1, t_1) = \overline{\rho}\left(\frac{x}{t_1}\right)$

Самоподобный = автомодельный

Если склеиваем из пост кусочков => контактная волна

Только 1 волна —> раскрывается вправо

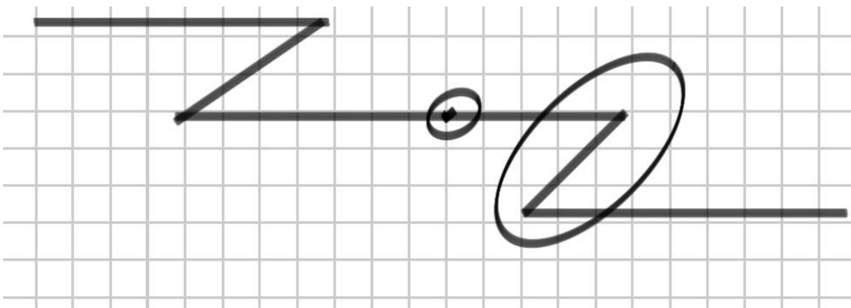
и только 1 волна —> вправо



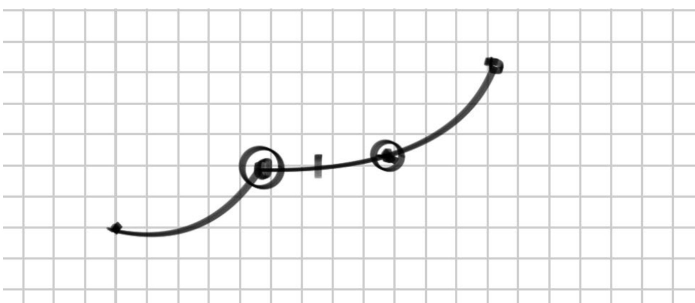
1. Могут ли быть 2е ударные волны, бегущие вправо

-Нет, не могут. Условие

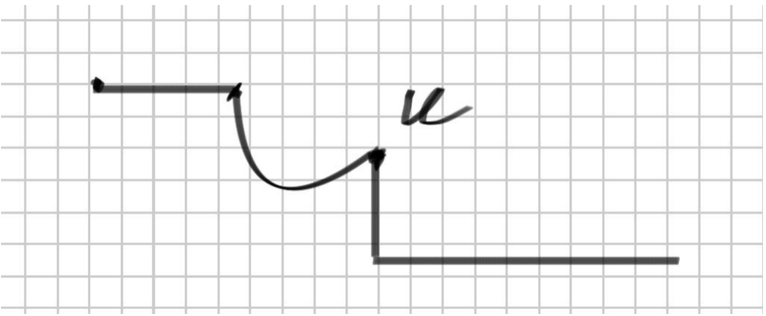
Скорость, размер, звук волн вправо меньше чем влево.

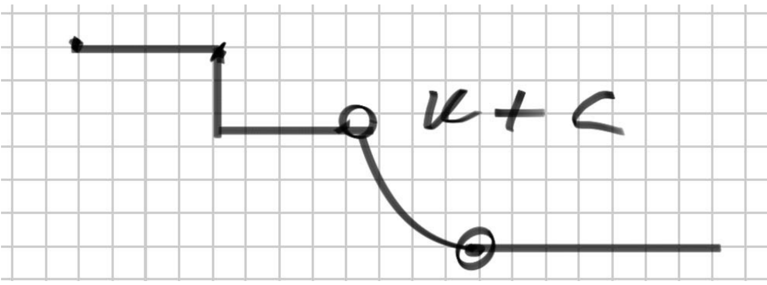


То есть вторая волна будет догонять первую и расстояние со временем будет уменьшаться, чего быть не может.

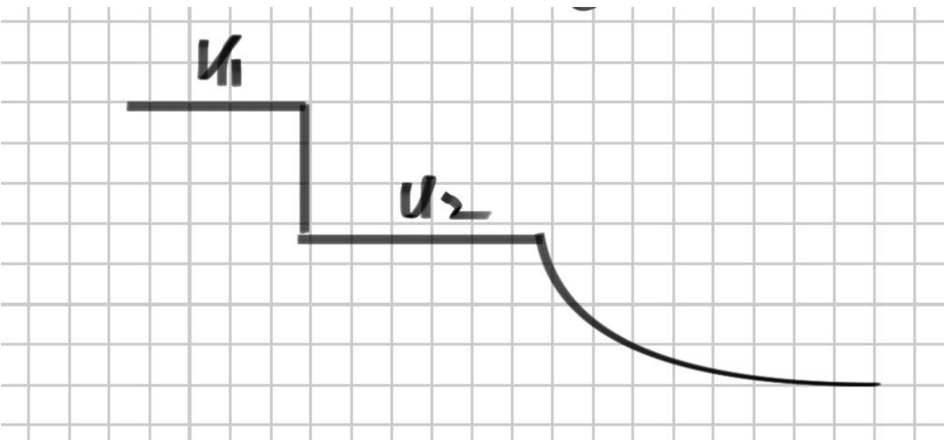


Одна волна не будет догонять, то есть расстояние = const, а оно должно увеличиваться. Поэтому такого быть не может. Если волна разреж -> она будет догонять, чего быть не может.
Сколько может быть контактных разрывов?
Если разрывы на одной плоскости, то расстояние = const, чего быть не может.





Контактных разрывов 2 быть не может.



Двух контактных разрывов быть не может.

?. в. ?. в.
← к. р. →

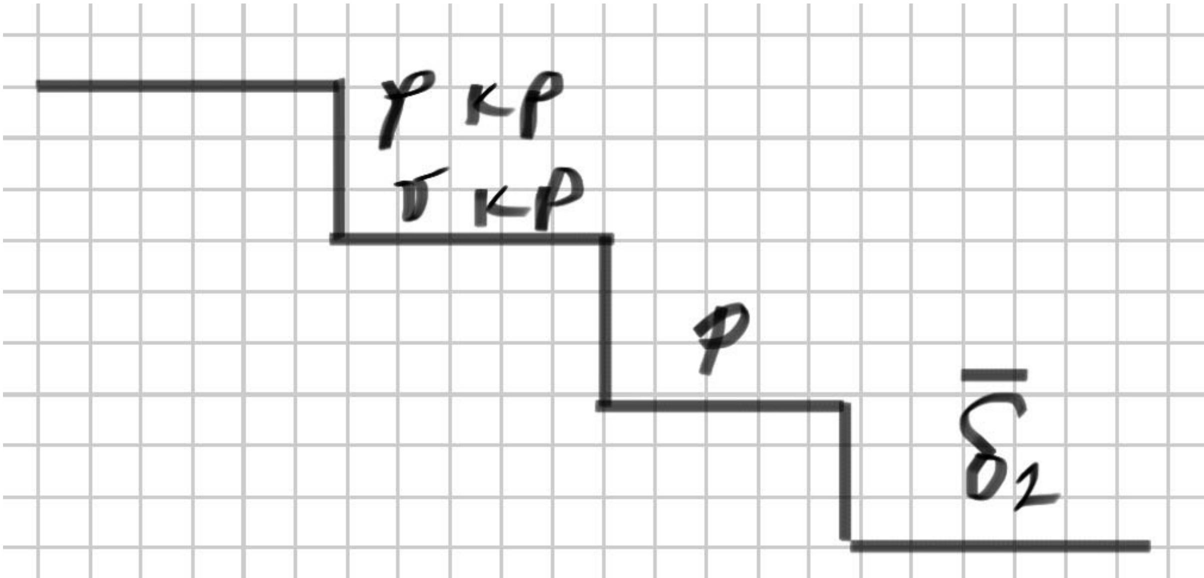
в. р.   в. р.

Нарушение точности течения

В.Р. Вакуум В.Р

Рассмотрим эти случаи.

Скорость и давление → постоянны



Три параметра задано → осталось (?) 4

Четвёртый известен → осталось (?) 3

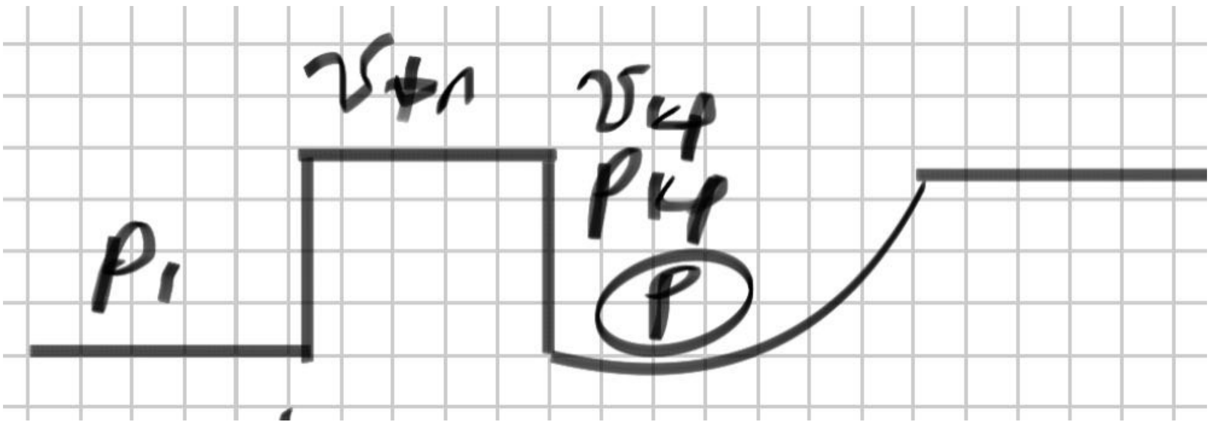
$V_{ФП} = V_{ФП}(P_{ФП})$

$V_{ФЛ} = V_{ФЛ}(P)$

И они должны быть равны, получим

$V_{ФП}(P) = V_{ФЛ}(P) \curvearrowright P > P_1, P > P_2$

Если будет нарушена хоть одна часть, то уравнения несовместны, то есть волны разреженнее (?).



$$\pm\ \xi\ =\ \sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\overline{D}^{\pm}$$

$$\xi\ =\ \mp\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\mp D^{\pm}$$

$$V\ =\ \mp\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ \pm\ D^{\pm}\ \pm\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}$$

$$V\ =\ \mp\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-1\right)\pm\ D^{\pm}$$

$$V\ \pm\ \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}=\overline{D}^{\pm}$$

$$V\ \pm\ \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\,\gamma\rho^{\gamma-1}}=D^{\pm}$$

$$V\ \pm\ \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}=D^{\pm}$$

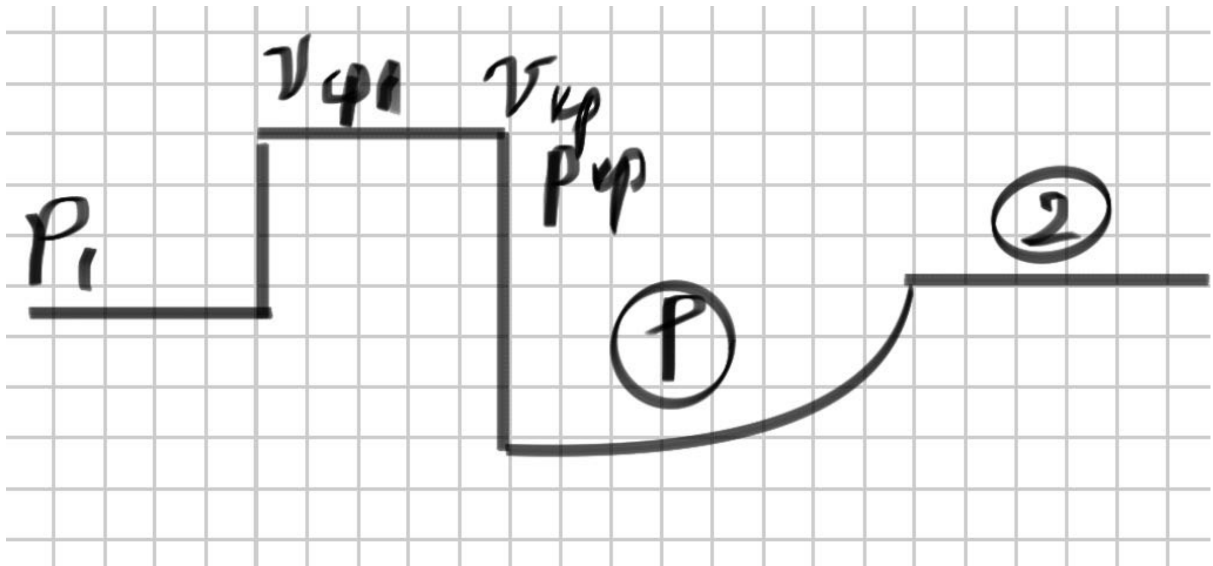
$$\frac{P}{\rho^{\gamma}}=A$$

$$\frac{P_2}{\rho^{\gamma}{}_2}=\frac{P}{\rho^{\gamma}{}_{ФП}}$$

$$\rho_{ФП}\ =\left(\frac{P}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}P_2$$

Нужно получить скорость

$$V_{ФП}+\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma\frac{P}{P_{ФП}}}=\ V_2+\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma\frac{P_2}{\rho_2}}$$



$V^{R}_{p_0}(P) = V_{\text{ФЛ}}(P)$

$V^{\text{УВ}}(P)$

Как избежать перебирания (я хз че там за слово) ?

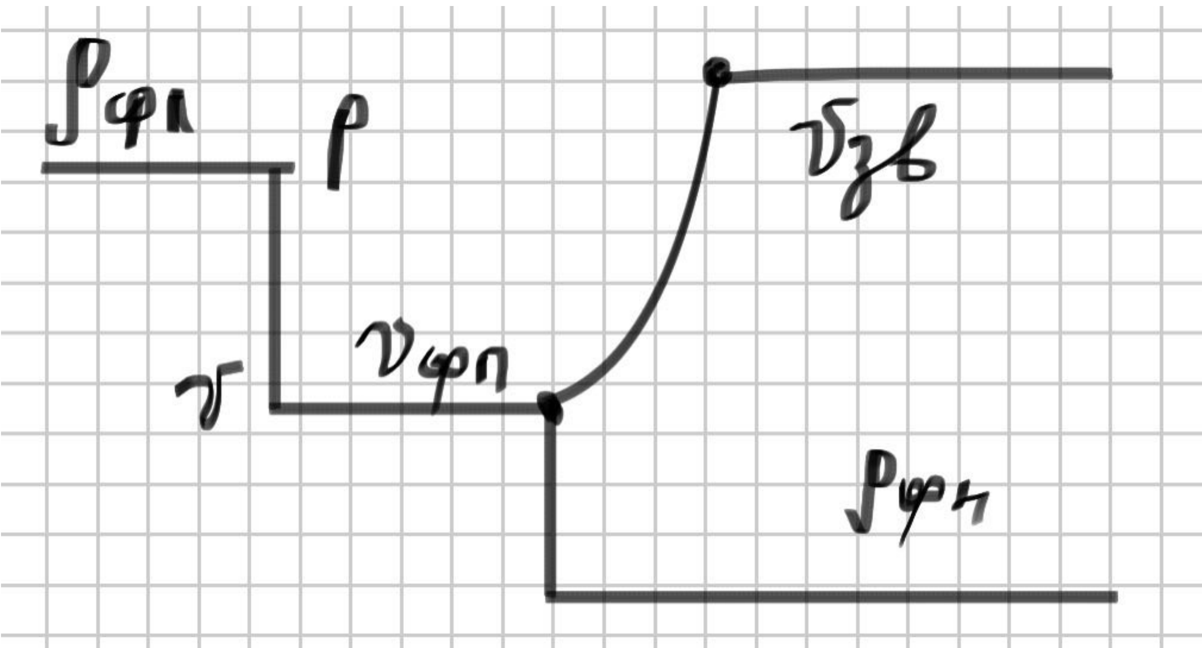
$V_{\text{ФП}} = V_{\text{ФП}}(P) =$ система $V^{\text{У}}_{\text{ФП}}(P),\ P \geq P_2\ \ V^{k}_{\text{ФП}}(P),\ P < P_2$

$V_{\text{ФП}}(P) = V_{\text{ФЛ}}(P)$

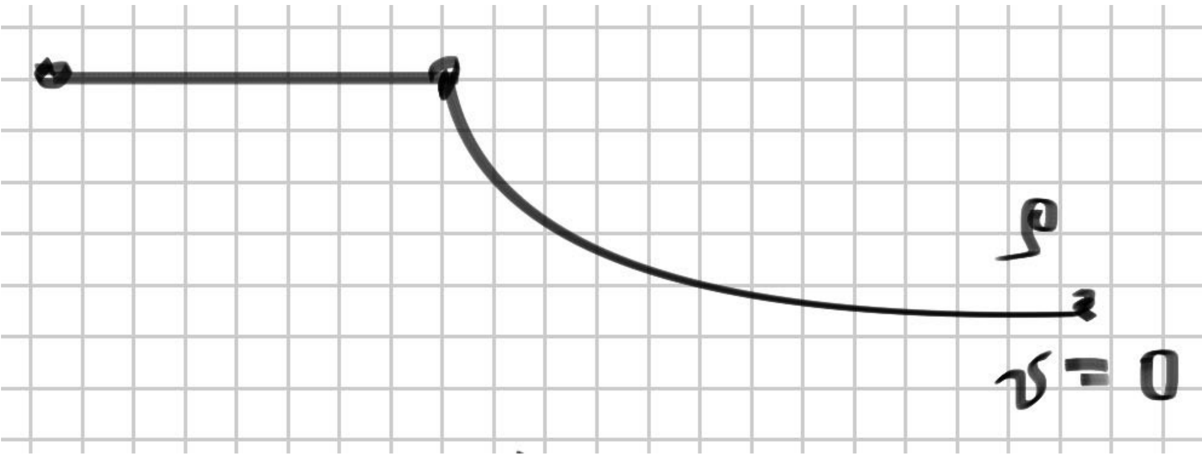
Решается легко, так как функция гладкая (см. задачу Римана (?))

Распространяется вправо $\rightarrow P_2$ участвует

Выписываем значения для ударной волны, что распространяется влево.



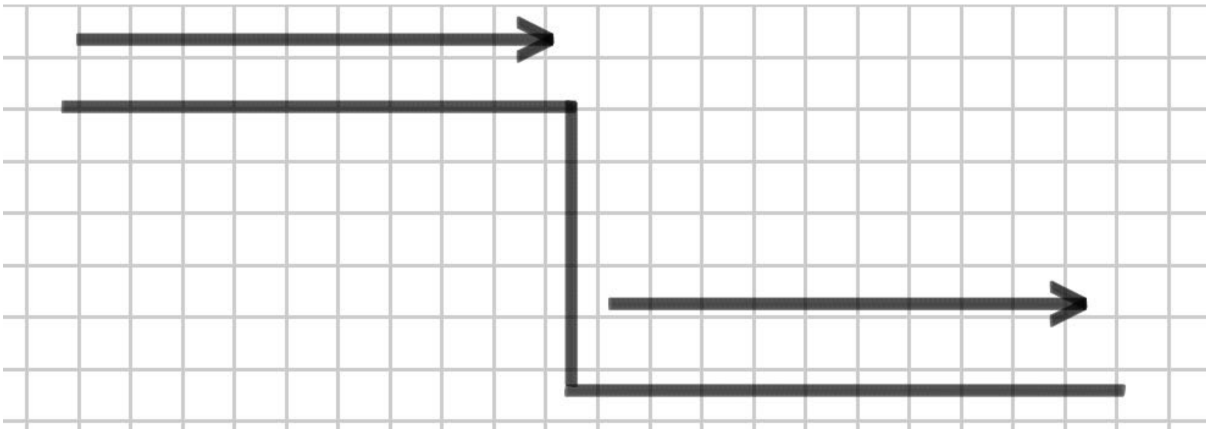
Еще один случай



$V \pm \frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}} = D^{\pm}$

$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = A$

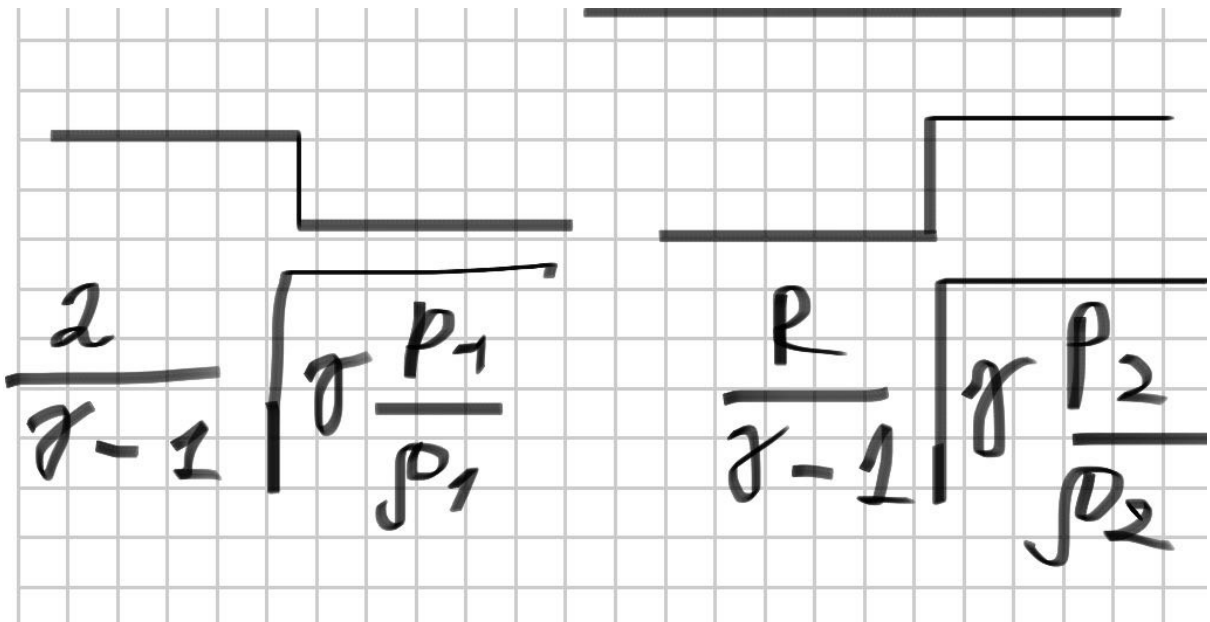
$\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\gamma\frac{P_0}{\rho_0}} = V_{\text{нач ?}}$



Инерциальная система с полусуммой скоростей

$v_1 - v_2 \rightarrow$ если достаточно велика, то среда (?)

Рассмотрим две? вторые? задачи

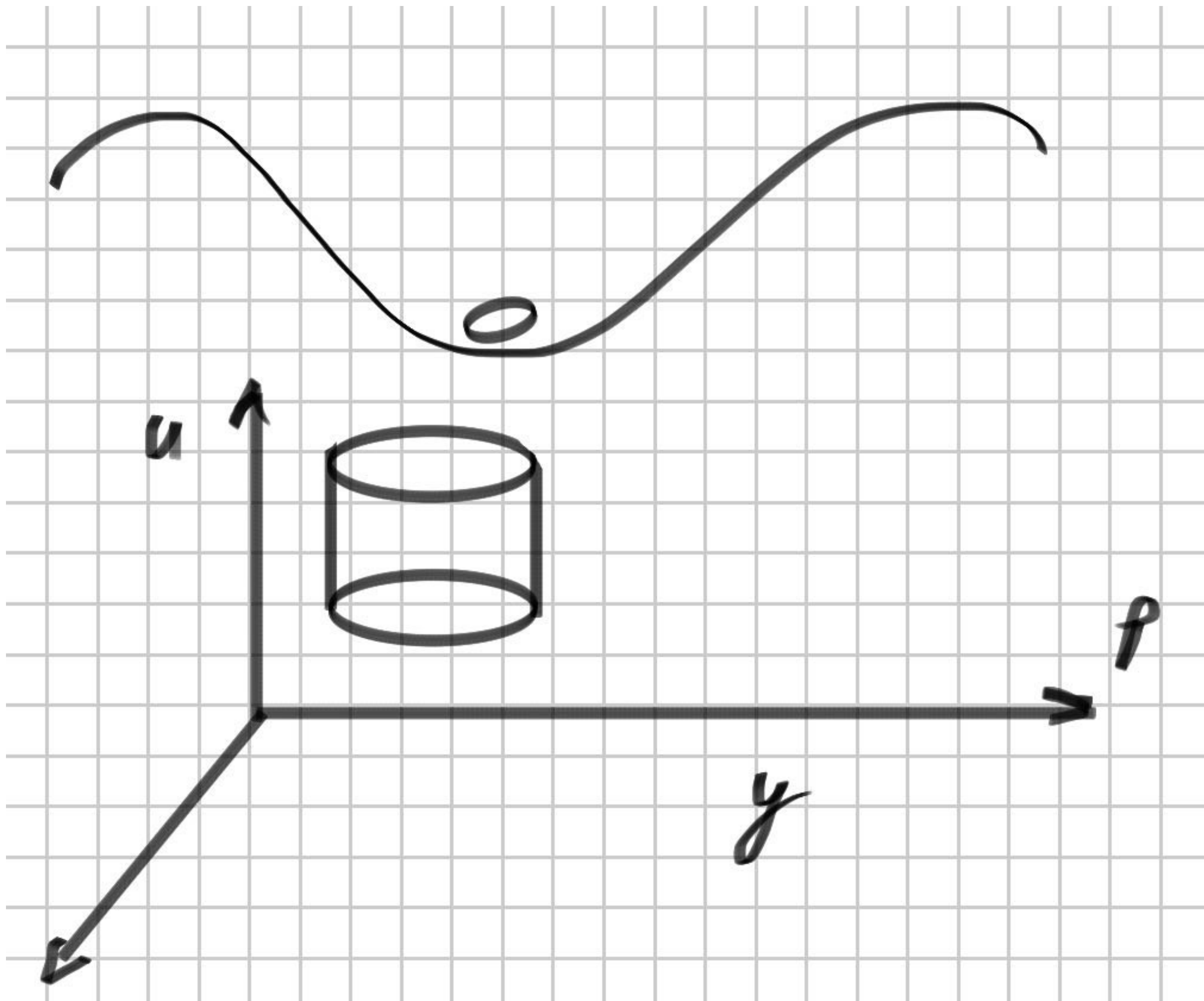


Передний движется со скоростью звука, второй движется в два раза быстрее

2γ…

$$v_1 - v_2 > \frac{2}{\gamma-1}\left(\sqrt{\gamma\frac{p_1}{\rho_1}} + \sqrt{\frac{p_2}{\rho_2}}\right)$$

Вариационные? принципы постоянных математических моделей



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u|_p = u_0(x, y);\ x, y \in P$$

$$\int_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]\, dx\, dy = ?$$

$$\bar{u}$$

$$\int_D [(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})^2]\, dx\, dy \le \int_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]\, dx\, dy$$ ⊜

$$u - \bar{u} = \delta u$$

$$u = \bar{u} + (u - \bar{u}) = \bar{u} + \delta u$$

⊜ $$\int_D [(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} + (\frac{\partial \delta u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta u}{\partial y^2}]\, dx\, dy$$

$$2\int_D \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_D \left[\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geq 0$$

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \leq \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \ominus$$

$$\alpha A + \alpha^2 B$$

$$\alpha < \frac{A}{B}$$

$$\alpha = \frac{-A}{2B}$$

$$\alpha = -\frac{A}{B} \text{ (?)}$$

$$\frac{-A^2}{2B} + \frac{A^2}{4B} = -\frac{A^2}{2B}$$

$$\delta u / \Gamma = 0 \text{ (?)}$$

Преобразуем интеграл

$$\ominus \int \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial y}\right] dx\,dy =$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\right) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\delta u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\delta u\right) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\delta u\right] dx\,dy =$$

$$= \text{зачеркнуто...} - \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots\right) dx\,dy$$

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \delta u\, dx\,dy = 0 \text{ (так как } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0\text{)}$$

$$2\int_D \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_D \left[\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geq 0$$

На следующей лекции уравнение Максвелла

На основе экспериментальных исследований (ВСЛ (?), Кулона, Индукция Фарадея) - чего-то не хватало.