Метод конечной разности. Мы берем прямоугольную сетку, она может быть равномерной или неравномерной и тогда значение функции искомой, которая должна являться решением нашей системы уравнений значений всех функций. Берем дифференциальное уравнение частных производных, строим систему уравнений, которая будет решать наш вычислительный алгоритм, мы изменяем входящие уравнения производной на соответствующие разницы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{u_{(i+1)j} - u_{ij}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\Delta x}$$

Метод конечных объемов.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + divF = 0$$

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_{\Omega} divF * dv = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \int_{\Omega_i} udv + \oint_{\partial \Omega_i} (F, n) dS = 0$$

$$u_i = \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} udv$$

Центр тяжести ячейки = $\frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} xdV, \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} ydV$

$$\frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} udv = \frac{1}{V_i} \int u(\text{в ц. т.}) + (\frac{\partial u}{\partial x})(\text{в ц. т.})(x - x_{\text{ц.т.}}) = \frac{\partial u}{\partial y} (y - y_{\text{ц.т.}}) + O(h^2) dt$$

$$= u(\text{в ц. т.}) + \frac{\partial u}{\partial x} (\text{в ц. т.})(\frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} xdV - x(\text{в ц. т.}))$$

$$= u(\text{в ц. т.}) + \frac{\partial u}{\partial y} (\text{в ц. т.})(\frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} ydV - y(\text{в ц. т.})) + \varepsilon, \text{где } \varepsilon < Mh^2$$

С точностью до второго порядка можно заменить на значение функции в точке центра тяжести. В нашем случае плоские грани, то тогда на каждой грани n имеет постоянные значения.

$Ш_i$ — это шаблон, состоящий из всех соседних ячеек

$$\frac{dU_i}{dt} + \sum_{j \in ш_i} (F_{ij} n_{ij}) S_{ij} = 0$$

Поток к направлению нормали связан со значениями функции в уравнении газовой динамики, в уравнениях электродинамики и т.д., потоки являются: F = F(U). Здесь может быть не одно, а несколько уравнений.В данном случае рассматриваем только одно из них. Поток может зависеть от других неизвестных, например, от плотности, скорости и т.д. Но каждая из этих величин известна в нашей ячейке, потому что мы собираемся ее найти. Если в этой ячейке поток ij. В одной ячейке поток F(U_i), а в другой F(U_j).

$F_{ij} = \frac{F(U_i)+F(U_j)}{2}$ - это самая простая формула, не дающая хорошего результата.

Возьмем линейное уравнение переноса $\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dx} = 0$. Для этого уравнения довольно сложно написать хороший вычислительный алгоритм.

$F(U) = U$

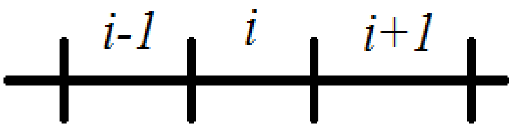
$F(U_i) = U_i$

$F(U_j) = U_j$

Тогда $F_{ij} = \frac{U_i + U_j}{2}$

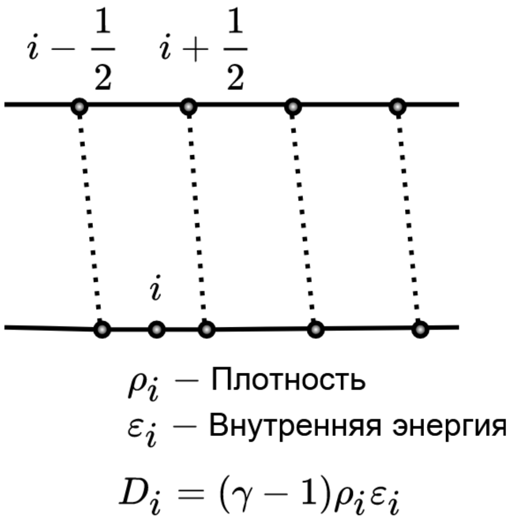
Возьмем F(u_i)=u_i F(u_j)=u_j. Тогда F_{ij}= $\frac{u_i + u_j}{2}$.

Теперь рассмотрим одномерные ячейки.



Для них получим схему с центральной разностью: $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{2\Delta x} = 0$. Из курса ЧМ известно, что подобная схема устойчива только при крайне малом размере шага. Но проблема даже не в этом. При подобном методе задача распадается на (мета?)задачи. Изменение функции в точке i зависят только от изменений в соседних точках - i-1 и i+1, но не от самой i-ой точки. И, очевидно, это не правильный подход, т.к. изменение должно зависеть от точки, в которой оно происходит. Поэтому в данную схему необходимо добавить дополнительный член выражения, который стабилизирует процесс.

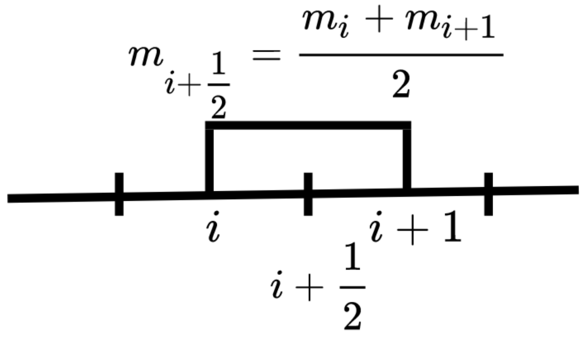
Для того, чтобы поток стал устойчивым, необходимо следующим образом изменить формулу: $F_{ij} = \frac{F(v_i)+F(v_j)}{2} + D_{ij}\ \frac{v_i+v_j}{2}$ - добавить член, похожий на “искусственную вязкость”.



Отступление. Первая задача газовой динамики решается с помощью Лагранжевых переменных. Для области газовой среды точки вычисления пускаем двигаться со скоростью газовой среды. Поэтому мы можем выписать уравнение для производной x по времени: $\frac{dx_{i+1/2}}{dt} = v_{i+1/2}$ (1)
В результате такого подхода, мы получаем тот же метод конечных разностей, но только уже с разнесённой сеткой. Для координат и скоростей имеем одну сетку с серединными точками, а для термодинамических величин - плотности, энергии и давления - другую сетку. Подобная сетка позволяет нам легко построить соответствующие схемы.

Плотность ячейки определяется как $\rho_i = \frac{m_i}{x_{i+1/2}+x_{i-1/2}}$ (2). И, поскольку масса ячейки не меняется из-за отсутствия перетоков вещества через точки i с индексом ½, то данная величина задается в начальный момент времени и остается постоянной. По сути, это уравнение есть уравнение неразрывности лагранжевых координатах.

Теперь возьмём уравнение импульса. По схеме, указанной выше, мы можем рассматривать как ячейки, так и целые точки i. Стоит сказать, что через эти целые точки тоже, с точностью до погрешности аппроксимации, не будет перетекания вещества.



Возьмем скорость как $v_i = \frac{v_{i-1/2}+v_{i+1/2}}{2}$. Если скорости в числителе - настоящие скорости газа, то тогда, с точностью до величин второго порядка малости, это будет скорость в центре ячейки. Но в силу соотношения, указанного выше - $\frac{dx_{i+1/2}}{dt} = v_{i+1/2}$, получим $\frac{d\frac{x_{i-1/2}+x_{i+1/2}}{2}}{dt} = \frac{v_{i-1/2}+v_{i+1/2}}{2}$. И в силу формулы, по которой вычисляем скорость, перетоков через целые точки не будет и масса ячеек будет постоянной.

И теперь, для этого узла с заданной массой, мы можем выписать закон Ньютона - $m_{i+1/2}\frac{dv_{i+1/2}}{dt} = -\ (p_{i+1} - p_i)$ (3). Правая часть идёт с минусом из-за направления действия давлений.

Из курса ранее возьмём уравнение $\rho(\frac{d\varepsilon}{dt} + v\frac{d\varepsilon}{dx}\ ) + p\frac{dv}{dx} = 0$. В скобках - полная производная, и она совпадает с производной в лагранжевых координатах. Перенося её на нашу сетку получим $\rho_i\frac{d\varepsilon_i}{dt} + p_i\frac{v_{i+1/2}-v_{i-1/2}}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}} = 0$. В знаменателе используем не Δx, а разность из-за того, что сетка не является неподвижной, а смещается со скоростью газа. Отсюда мы можем выразить $\frac{d\rho_i}{dt} = -\frac{m_i}{(x_{i+1/2}-x_{i-1/2})^2}(v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) =$ $= -\frac{m_i}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}\frac{v_{i+1/2}-v_{i-1/2}}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}$. Можно видеть, что первая дробь есть ни что иное, как ρ из формулы (2). Поэтому отсюда можно выразить вторую дробь и подставить в приведённое выше уравнения для нашей сетки: $-\frac{d\rho_i}{dt}\frac{1}{\rho_i} = \frac{v_{i+1/2}-v_{i-1/2}}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}$. Получим $\rho_i\frac{d\varepsilon_i}{dt} - \frac{p_i}{\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt} = 0$ (4).

Таким образом мы получаем полную систему уравнений (1)-(4). И данная система будет хорошо работать в случае рассчёта гладких функций. Но как только мы попытаемся рассчитать ударные волны, этого сделать не удастся.

Дело в том, что дифференциальное уравнение для энергии (4), которое мы пытаемся аппроксимировать с помощью метода конечных разностей, является следствием закона сохранения энтропии. И он действует для гладких решений, но для ударных волна этот закон не работает. И хотя это эквивалентно в качестве дифференциальных преобразований, но как закон сохранения оно не выполняется, т.к. энтропия ударной волны растёт. Но, уравнение (4), которое также можно переписать в виде $\frac{dS_i}{dt} = 0$ (энтропия является константой для ячейки), не даст подняться энтропии и необходимо предусмотреть механизмы, которые смогут повысить энтропию.

Поэтому, в уравнение для скорости (3) мы добавим новый член $\frac{d}{dx}\kappa\frac{du}{dx}$, называемый искусственной вязкостью:

$m_{i+1/2}\frac{dv_{i+1/2}}{dt} =- (p_{i+1} - p_i) + \frac{d}{dx}\kappa\frac{du}{dx}$. И теперь нам необходимо аппроксимировать этот член на нашей сетке.

$m_{i+1/2}\frac{dv_{i+1/2}}{dt} =- (p_{i+1} - p_i) + \frac{(\kappa\frac{du}{dx})_{i+1}-(\kappa\frac{du}{dx})_i}{x_{i+1}-x_i}$. Теперь добавим перед искусственной вязкостью коэффициент α, имеющий порядок аппроксимационных ошибок - $\alpha\frac{d}{dx}\kappa\frac{du}{dx} = \alpha\frac{(\kappa\frac{du}{dx})_{i+1}-(\kappa\frac{du}{dx})_i}{x_{i+1}-x_i}$. И хотя схема имеет второй порядок аппроксимации, для примера снизим порядок α до первого: $\alpha = x_{i+1} - x_i = O(h)$. Тогда уже в формуле с аппроксимацией данный коэффициент сократится с знаменателем, и тогда член искусственной вязкости будет представляться в виде $(\kappa\frac{du}{dx})_{i+1} - (\kappa\frac{du}{dx})_i$, а всё выражение примет вид

$m_{i+1/2}\frac{dv_{i+1/2}}{dt} =- (p_{i+1} - p_i) + (\kappa\frac{du}{dx})_{i+1} - (\kappa\frac{du}{dx})_i$. Теперь необходимо понять, какую размерность должна иметь κ, чтобы всё было в порядке.

Коэффициент κ должен иметь ту же размерность, что и p, а размерность p - $\rho\varepsilon\sim\rho u^2$. Одна степень u уже есть, поэтому κ должна иметь размерность скорости, чтобы получить квадрат, а также размерность плотности. В качестве скорости возьмём скорость звука и получим $\kappa = \rho c$, а полный член примет вид $\kappa\frac{du}{dx} = (\rho c)_{i+1}\frac{du}{dx} = (\rho c)_{i+1}\frac{u_{i+1/2}-u_{i-1/2}}{x_{i+1/2}-x_{i-1/2}}$.

Полученный член и называют искусственной вязкостью. И хотя в реальности в природе нет, но мы добавляем её в разностные уравнения. Она имеет порядок не больший, чем порядок аппроксимации. Поэтому на гладких решениях она не приводит к появлению нарушений в аппроксимации.

Конец отступления. Всё это отступление было для того, чтобы показать, что добавочный член в формуле $F_{ij} = \frac{F(v_i)+F(v_j)}{2} + D_{ij}\frac{v_i+v_j}{2}$ является похожим на искусственную вязкость. Если взять D константой, то получим $\frac{du_i}{dt} + \frac{F_{i+1}-F_{i-1}}{2\Delta x} = D\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x}$. Домножив в правую часть на Δx: $D\Delta x\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$ получим вторую производную, в которую и превратиться член $\frac{d}{dx}\text{к}\frac{du}{dx}$, если взять к константой.

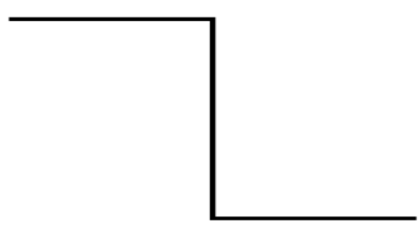
Коэффициент D обычно имеет размерность порядка скорости, но не скорости звука, а скорости распространения малых возмущений. Это нужно, т.к. в лагранжевых переменных звук всегда распространяется относительно газа со скоростью c, а в нашем случае ещё и газ может двигается, поэтому берётся максимальная скорость из $u + c$ и $u - c$.

Теперь перейдём к более детальным способам вычисления потоков и какие принципы индексометрии этих потоков мы должны использовать. Метод конечных объёмов нами уже описан, осталось найти, как эти потоки F рассчитывать, в зависимости от значений u_{ι} и u_{i+1}.

Для того, чтобы определить это, введём понятие монотонной схемы. Как говорилось ранее, уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ - достаточно коварное и его трудно решить правильно, хотя именно для него были в своё время написаны первые разностные схемы. Выпишем несколько простых схем и рассмотрим их качества.

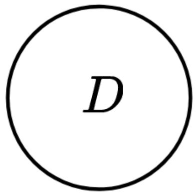
1. $\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\partial t} + \frac{u_i^k-u_{i-1}^k}{\partial x} = 0$ - 1ый порядок аппроксимации, устойчива и вполне работоспособна.
2. $\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\partial t} + \frac{u_{i+1}^k-u_i^k}{\partial x} = 0$ - 1ый порядок аппроксимации, неустойчива и непригодна для вычислений, т.к. любое решение будет разваливаться
3. $\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\partial t} + \frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2\partial x} = 0$ - 2ой порядок аппроксимации, обладает плохой устойчивостью

Возьмём к примеру задачу, в которой в начальный момент времени задана следующая ступенька:



Общее решение данной задачи представимо в виде функции $u = f(x - t)$. Любая функция подобного вида будет являться решением этого уравнения. Если функция - дифференцируема, то это классическое решение. Если нет, как эта разрывная функция на рисунке, то формально её невозможно подставить в уравнение, но она будет являться обобщённым решением.

Про обобщённое решение. Если возьмём это уравнение 1 и проинтегрируем по произвольной замкнутой области D, то в силу формулы Грина мы получим следующее соотношение:



$\oint udt - udx = 0$ (1). Данное соотношение уже не содержит производные, а только сами функции. Поэтому мы для каждой интегрируемой функции можем посмотреть, выполнено это тождество, или нет.

Как говорилось ранее, есть несколько этапов построения обобщённого решения.

1. Выделить такое свойство, которому каждое решение уравнения удовлетворяет. И для нас этим свойством является (1). Если функция $u(x, t)$ является решением этого уравнения, то она удовлетворяет соотношению (1).
2. Если функция удовлетворяет этому соотношению и является дифференцируемой и её можно подставить в уравнение, то она является решением.
3. Обобщённым решением назовём такую функцию, которая удовлетворяет соотношению (1), но в уравнение её подставить нельзя. Примером такой функции и может быть ступенька $u = f(x - t)$.

Рассмотрим уравнение (1) $\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dx} = 0$ - самое простое уравнение в частных производных. Решением этого уравнения является $U = f(x - t)$
Также рассмотрим функцию F(x) = 0, x < 0 и F(x) = 1, x > 0.
Функция F(x) хоть и является классическим решением, представляет собой обобщенное решение. Один из способов решения, который также используется в газовой динамике, заключается в следующем: если взять уравнение (1) и проинтегрировать по произвольной области D, то тогда,

используя формулу Грина, получится такое соотношение

$$\oint U dt \ - \ U dx \ = \ 0$$

В это соотношение входить только лишь сама функция U и не входят никакие производные.
Альтернативное решение: функция, удовлетворяющая соотношению выше, и является дифференцируемой.
Обобщенным решением будем называть функцию, которая удовлетворяет соотношению выше, но не является дифференцируемой и не может быть подставлена в уравнение.
Уравнение (1), несмотря на свою простоту, все же сложно поддается решению.

1 схема: $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\partial t} + \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\partial x} = 0$ - 1ый порядок аппроксимации, устойчива и вполне работоспособна.

2 схема: $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\partial t} + \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\partial x} = 0$ - 1ый порядок аппроксимации, неустойчива и непригодна для вычислений, т.к. любое решение будет разваливаться

3 схема: $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\partial t} + \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\partial x} = 0$ - 2ой порядок аппроксимации, обладает плохой устойчивость.

Если посмотрим на то, какая будет точность решения, то несмотря на то, что формально схема имеет первый порядок аппроксимации, она будет иметь порядок ½.
Если мы решаем трехмерную задачу и получили решение с какой-то точностью, а теперь хотим получить еще какую-то цифру. Например, получили, что какой-то параметр равняется 0,58. Во сколько раз нам нужно будет увеличить вычислительную работу? В этом случае размер нужно увеличить в 100 раз по каждому направлению. Работа увеличится в 100 миллионов раз. Для решения таких сложных задач схема 1 не подходит.
2 схема является еще более неустойчивой и очень быстро развалится.
3 схема не столь неустойчива, как 2, но все равно не даст нужный результат.
Нарушается принципа максимума. Сам он заключается в том, что если в начальный момент есть какая-то температура, есть граничные условия,

которые заключаются в том, что поддерживается определенная температура. Имеем начальную деталь, нагретую до 100 градусов, и на границе поддерживаем 0 градусов, то даже 101 градус не будет увиден. Если мы рассматриваем задачу Коши, то у нас во всех промежутках времени значения функции не будут превосходить максимальное значение в начальный момент времени.

$u_i^{k+1} = u_i^k(1 - \frac{dt}{dx}) + \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k$

$u_i^{k+1} = u_i^k(1 + \frac{dt}{dx}) - \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k$

$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k - \frac{dt}{dx}u_{i+1}^k$

Есть какие-то величины a, b, $c = \alpha a + (1 - \alpha)b$, $a < c < b$. Если альфа будет меньше 1, то величина c будет находиться между величинами a и b. Если взять среднее арифметическое: $c = \frac{a+b}{2}$, это соответствует альфа равное ½.

Возьмем альфа равное ¼, тогда получится $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$. В начале возьмем среднее арифметическое, а потом взять еще среднее арифметическое от прошлого и от b.

Возьмем $(\frac{a+b}{2})1/2 + \frac{b}{2}$

$\alpha = 3/4$

$(\frac{a+b}{2})1/2 + \frac{a}{2}$

Альфа везде получается средней. Средними арифметическими доходим до нужного показателя. С точки зрения непрерывности будем утверждать, что любое действительное значение альфа даст нам такой результат.

Каждый раз коэффициенты будут положительные (сколько раз не делай среднее арифметическое).

$(\frac{a+b}{2})1/2 + \frac{b}{2}$

$(\frac{a+b}{2})1/2 + \frac{a}{2}$

Как только один из коэффициентов станет отрицательным (например αотрицательный или >1) мы сразу же получим нарушение этого принципа.

Например если числа a и b разных знаков (например a=1; b=-1) и один из коэффициентов отрицательный например α в $c=\alpha a+(1-\alpha)b$ (другой всегда будет положительным так как их сумма равна 1).

Необходимым и достаточным условием чтобы α была >0 и <1. То же самое можно утверждать и про комбинацию из трех чисел.

Комбинация αa+βb+(1-α-β)c будет удовлетворять принципу максимина только в том случае если α и b положительные и их сумма не меньше 1.

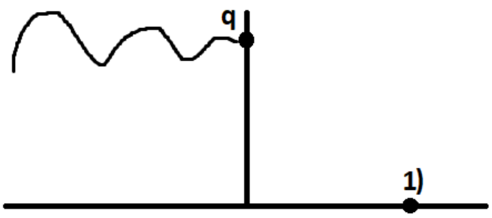
Для $u_i^{k+1} = u_i^k(1 - \frac{dt}{dx}) + \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k$ Ui всегда будет находится между величинами Ui на n-ном слое и Ui-1 на на n-ном слое.

$u_i^{k+1} = u_i^k(1 + \frac{dt}{dx}) - \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k$ здесь появляется отрицательный коэффициент.

$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{dt}{dx}u_{i-1}^k - \frac{dt}{dx}u_{i+1}^k$ здесь нарушена монотонность.

Получается следующий вид, что единственный сфера которая приемлема с точки зрения монотонности это сфера 1 порядка. Обратим внимание на то что понятие монотонности тесно связано с направлением движения волн.

В первой схеме волна направлена вправо и разность направлена против движения волны. Вторая схема получилась неустойчивой, потому что устойчивость связана с областями зависимости решения. поскольку волна движется влево, то значение в какой-то точке (q) не может зависеть от значения в точке 1), потому что в нее попадут точки только слева



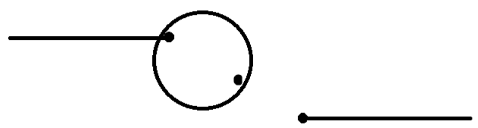
Когда мы поставим сюда Ui+1, условие нарушается и как только условие нарушено, схема не может быть устойчивой ($\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\partial t} + \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\partial x} = 0$). Условия необходимы для получения гладких монотонных решений. Было много попыток найти схемы, которые имели 2 порядок и были бы монотонные, но все попытки не увенчались успехом. Нет монотонных схем 2 порядка точности, это установил Годунов.

Теорема Годунова:

Очевидно что значение u^{k+1} не выйдет за пределы максимального значения в начальный момент, но и за пределы трех остальных значений. Изначально Годунов по другому сформулировал понятие монотонности.

Запишем схему самого общего вида для решения задачи Коши для этого уравнения. Будем рассматривать схему на равномерной сетке для простоты. Каждую точку занумеруем индексом i. Временные шаги занумеруем индексом n. И тогда самую общую схему можно записать в следующем виде: $U_i^{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_{i-k}^n$. Здесь рассматриваются схемы однородного счета. Все элементы a_k не зависят от номера i. Эти схемы, связанные с отслеживанием ударной волны (там где расчет в окрестности ударной волны ведется по одним формулам, а вне ударной волны по другим мы не рассматриваем). Это означает что мы можем выразить значение функции на n+1 слое через значение на n-ном слое и выражается оно всегда по одним формулам поскольку уравнение одинаково во всех точках. Сдвиг на одну точку ничего не меняет.

Понятие монотонности по Годунову: если функция монотонна на n-ном слое(например если на n-ном слое выполнено $u_i^k >= u_{i-1}^k$ для всех i), то тогда на n+1 слое схема монотонна.
Если у нас ф-ии монотонны на трех точках, то тогда мы можем продолжить ее константой и получить то, что монотонная ф-ия переходит в монотонную.



* Если $u_i^k <= u_{i-1}^k$, то следует, что $u_i^{k+1} <= u_{i-1}^k$.
Мы видели, что схемы монотонны, если коэффициенты положительны.
Докажем, что это св-во выполнено и для таких представлений.
1 Теорема Годунова(необходимым и достаточным условием монотонности схемы в виде * является то, что все коэффициенты a_k>0)

$$U_i^{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_{i-k}^n$$

$$U_{i-1}^{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_{i-1-k}^n$$

U_i^{n+1}-U_{i-1}^{n+1}=$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(u_{i-k}^n - u_{i-1-k}^n)$

Достаточность: если все a_k>0 и все разности имеют определенный знак, то тогда так как индексы произвольные то монотонные функции переходят в монотонные.

Необходимость: если хотя бы 1 коэффициент отрицательный, то найдется хоть одна монотонная ф-ия которая будет переведена в немонотонную.

U_i^0=1, если i<k_0; U_i^0=0, если i>=k_0 тогда только одна разность отлична от 0($u_{k0} - u_{k0-1} = 1$) все остальные разности тождественно обращаются в 0.

i-k=k0

U_{2k0}^{n+1}-U_{2k0-1}^{n+1}=$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(u_{2k0-k}^n - u_{2k0-1-k}^n)$

Условие монотонности схемы является равенство положительности коэффициентов.

И дальше вторая теорема Годунова, которая утверждает следующее, что среди схем такого класса не существует монотонной схемы такого порядка апроксимации.

Давайте посмотрим что такое порядок апроксимации.

Нужно предположить что у нас коэффициент α_k убывает достаточно быстро или еще лучше если только конечное число этих коэффициентов отлично от 0.

Запишем разложение

$$u_{i-k}^n = u(x_{i-k}) = u(x_i + k\Delta x) = u_{i-k}^n(x_i + (\frac{du}{dx})_i^n k\Delta x + (\frac{d^2u}{du^2})_i^n k\frac{\Delta x^2}{2} + \theta(\Delta x^3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (\frac{du}{dt})_i^n \Delta t + (\frac{d^2u}{dt^2})_i^n \frac{\Delta t^2}{2} + \theta(\Delta t^3)$$

И подставим в формулу, тогда получится у нас следующее

$$u_i^n = \frac{du}{dt}\Delta t + \frac{d^2u}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \theta(\Delta t^3) = u_i\sum\alpha_k + \alpha\frac{du}{dx}\sum k\alpha_k + \frac{du}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2}\sum k^2\alpha_k + \sum\alpha_k\theta(\Delta x^3)$$

Сократим полученную формулу.

$\sum\alpha_k = 1 \quad \sum k\alpha_k = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$\frac{du}{dt} =- \frac{du}{dx}$

$\frac{d^2u}{dt^2} =- \frac{d}{dt}\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{du}{dt} =- \frac{d^2u}{dx^2}$

$$u_i(1 - \alpha_k) + \frac{du}{dt}(\Delta t + \Delta x \sum k\alpha_k) + \frac{d^2u}{dt^2}(\frac{\Delta t^2}{2} - \frac{\Delta x^2}{2}\sum k^2\alpha_k) = \theta(\Delta t^3 + \Delta x^3)$$

Отсюда мы получаем условие, для того чтобы второй порядок апроксимации выполнялся требуется:

$\sum \alpha_k = 1$

$\sum k\alpha_k =- \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$\sum k^2\alpha_k = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$

Предположим что у нас сумма монотонная, в таком случае они быть выполнены не могут(за исключением одного триллиардного случая), так как если схема монотонная то все α_k равны 0. Тогда равенству следует записать следующий вид.

$$\sum k\ \alpha_k = \sum k\ \sqrt{\alpha_k}\ \sqrt{\alpha_k} =- \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Это представляет собой скалярное произведение двух бесконечных векторов, один из которых $k\ \sqrt{\alpha_k}$, а второй $\sqrt{\alpha_k}$. Вспомним про неравенство Коши-Буняковского, скалярное произведение отрезков равно произведению длин на косинус угла между ними. Важные свойства такого, что косинус угла всегда меньше единицы поэтому скалярное произведение будет всегда меньше чем произведение длин самих векторов.

$$| - \frac{\Delta t}{\Delta x}| = \frac{\Delta t}{\Delta x} = |\sum k\ \sqrt{\alpha_k}\ \sqrt{\alpha_k}| \leq \sqrt{\sum k^2\alpha_k}\sqrt{\sum \alpha_k} = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Казалось бы, противоречия никакого нету(это то самый вырожденный случай когда у нас равенство), но равенство имеет место быть только в одном случае - когда косинус равен $\pm\ 1$. Следовательно угол равен 180(0) градусов. Единственный случай когда может быть такое, это когда все α_k обращаются нуль кроме одного. Тогда схема будет записана в таком виде:

$u_i^{n+1} = u_{i-k_0}^n$, где при k_0 все α_k обращаются нуль кроме одного.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Если мы выберем $\Delta t = \Delta x$, то знаменатели сократятся и мы получим

$$u_i^{n+1} - u_i^n + u_i^n - u_{i-1}^n = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$$

Это соответствует тому, что шаг по времени волны равен одной ячейке.Тогда мы получаем точное решение, но это вырожденный случай, который бывает редко.

Схемы линейные : $U_i^{n+1} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_{i-k}^n$

Для решения линейных уравнений можно применять также и нелинейные схемы, которые имеют второй порядок аппроксимации и при этом являются монотонными.

Приведем к следующей ситуации. Временную переменную будем продолжать считать непрерывной, все внимание сосредоточим на пространственной аппроксимации.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Рассмотрим произвольную дифференциально разностную схему:

$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (Lu)_i = 0$, где Lu - произвольный оператор.

Потребуем условие, что если $u_i \geq u_{i+1}$, $u_i \geq u_{i-1} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} < 0$.

Выполняется и обратное условие $u_i \leq u_{i+1}$, $u_i \leq u_{i-1} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} > 0$.

Возьмем простую функцию $u = (x - t)^2$, в этом случае L(u_i)>0 , а погрешность аппроксимации будет равна $2(x - t) + (Lu_i)$

Нелинейная схема дифференциально разностная такого вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_i(u_i - u_{i-1}) + B_i(u_{i+1} - u_i) = 0$$

Если $A_i \geq 0$, $B_i \leq 0$, то такая схема является монотонной.

Достаточное условие доказывается очень просто, если точка локального максимума, то $A_i(u_i - u_{i-1}) + B_i(u_{i+1} - u_i)$ такая сумма будет положительной и при переносе в правую часть приобретает знак минус и действительно максимальная точка у нас всегда “едет” вниз. Точно также и в обратную сторону, для локального минимума сумма $A_i(u_i - u_{i-1}) + B_i(u_{i+1} - u_i)$ будет отрицательной, а при переносе а правую часть уравнения будет со знаком плюс. Минимальная точка “поедет” всегда вверх.