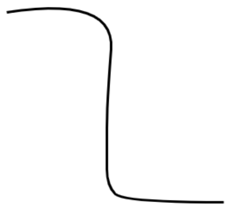
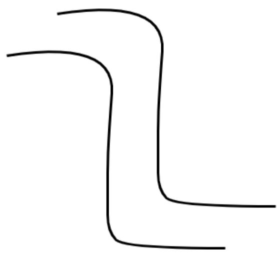
Метод конечных элементов удобен для произвольных сеток и позволяет получать схемы сколь угодного порядка аппроксимации. Достаточно хорошо работает для эллиптических и параболических задач, но для гиперболических задач, где есть волновая картина распространения, он работает, мягко говоря, не очень.
Есть модификации: если воспользуемся уравнением переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

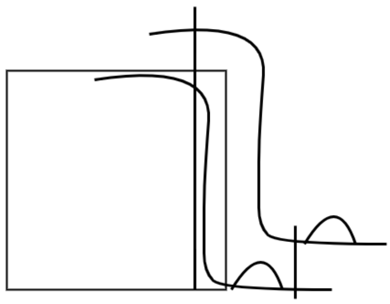
то это уравнение описывает волну, распространяющуюся вправо. В этом случае значения в этот момент и в следующий момент времени могут зависеть только от значения функции, которая находится перед волной, и не зависит от значения функции впереди волны.
То есть, есть какое-то распределение в какой-то момент времени



В следующий момент времени оно просто передвинется



И значения в точках могут зависеть только от функции до волны (обведено в квадрат)

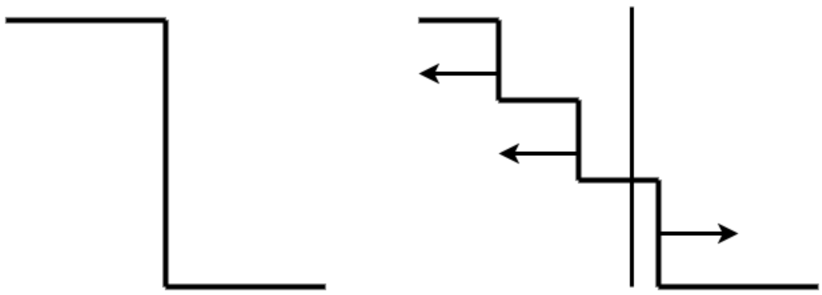


В отмеченных точках значения от волн не зависят, это так называемые направленные потоки. И когда мы аппроксимируем это уравнение схемой первого порядка

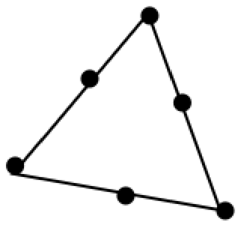
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\partial x} = 0$$

То есть мы выбираем значения сеточных функций в тех точках, от которых решение зависит в точке i. Если взять i-ую точку, то значение в этой точке в следующий момент времени будет зависеть от

Такая вещь называется направленной разностью, или разностью против потока. Например метод Годунова для методов газовой динамики фактически производит расщепление начального разрыва на некоторые волны, которые движутся в соответствующем направлении

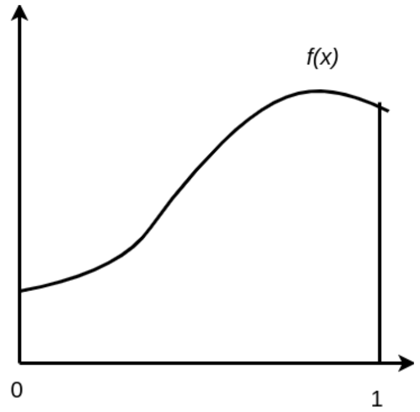


Выбираем значение в этой точке через направленные разности. В методе конечных элементов этого добиться крайне трудно, потому что там никаких выделенных направлений, зависящих от уравнений, нет, всё зависит от выбора элементов. Это первый недостаток метода конечных элементов.
В решениях гиперболических уравнений, в частности уравнения газовой динамики, метод конечных элементов применяется крайне редко, в основном применяются конечные объёмы, разностные методы, которые позволяют эту зависимость учесть, иначе решение получается не физическим.
Вторая особенность метода конечных элементов: возьмём элемент и в этом элементе выберем полиномиальные пространства и придётся потратить много усилий, чтобы сделать функцию непрерывную на сторонах произвольного многоугольника

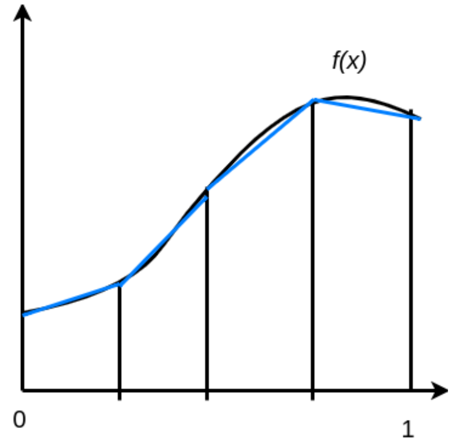


Многочлены в треугольнике непроизвольные, они связаны с многочленами на соседних, а хотелось бы сделать произвольные многочлены, то есть выбрать на этом треугольнике множество многочленов второго порядка.

Иногда задают такой вопрос: если взять многочлены произвольными, то тогда получающаяся конечноэлементная функция будет разрывной. Если же решение исходного уравнения непрерывное, то какой смысл использовать разрывную функцию для аппроксимации непрерывного решения? Смысл есть – например есть задача



Теперь аппроксимируем эту функцию кусочно-полиномиальной функцией. На каждом отрезке будем использовать кусочно-линейную функцию для аппроксимации непрерывной функции. Кусочно-линейная функция это функция вида $a_{i+1/2}x + b_{i+1/2}$.



В каждом отрезке есть два свободных коэффициента, которые можно выбирать, чтобы лучше аппроксимировать функцию. Но если поставить условие непрерывности, то

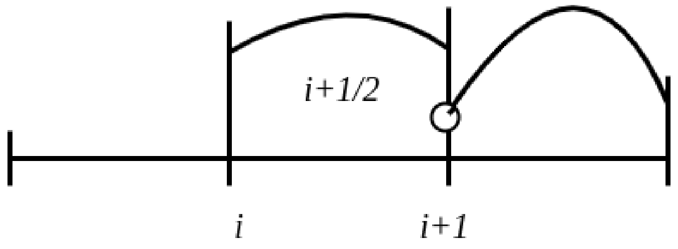
$a_{i-1/2}x_i + b_{i-1/2} = a_{i+1/2}x_i + b_{i+1/2}$

То есть появляется дополнительное соотношение, которое должно выполняться во всех точках, за исключением крайних, и фактически число независимых параметров уменьшилось вдвое.

Таким образом кусочная функция аппроксимирует лучше.

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$.

Разобьём на отрезки и решение будем искать в виде полиномиальной функции на каждом отрезке с возможными разрывами в точке



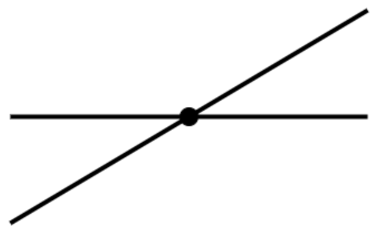
Тогда, если выбрать базис среди кусочно-полиномиальных функций, например в линейном случае

$\phi_{0i+1/2} = 1,\ x \in (x_{i+1}, x_i);\ \phi_{0i+1/2} = 0,\ x \notin (x_{i+1}, x_i)$

$\phi_{1i+1/2} = x - x_{i+1/2}\ ,\ x \in (x_{i+1}, x_i); \phi_{1i+1/2} = 0,\ x \notin (x_{i+1}, x_i)$

Можно рассмотреть такие базисные функции, заданные на всём отрезке, которые обращаются в ноль вне отрезка и которые соответственно равны либо единице либо $x - x_{i+1/2}$ на отрезке. $i + 1/2$ надо для того, чтобы $\int_0^1 \phi_{0i+1/2}\phi_{1i+1/2}dx = 0$

$\int_0^1 \phi_{0i+1/2}\phi_{1i+1/2}dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{1i+1/2}dx$ - линейная функция, которая обращается в ноль в точке $x_{i+1/2}$



Не обязательно выбирать именно такие базисные функции, можно выбрать другие линейно-независимые функции из полиномов первого порядка.

Тогда решение $\overline{u} = \sum_i a_{i+1/2}(t)\phi_{0i+1/2} + b_{i+1/2}(t)\phi_{1i+1/2}$

В каждый момент времени приближённое решение на каждом отрезке будет представлять собой линейный полином. А коэффициенты этого полинома будут зависеть от условий непрерывности. С каждой степенью полинома будет увеличиваться точность аппроксимации исходной функции.

Попробуем подставить эту функцию в наше уравнение. Получится следующее:

$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial a_{i+1/2}}{\partial t}\phi_{0i+1/2} + \frac{\partial b_{i+1/2}}{\partial t}\phi_{1i+1/2} + \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x} = \Gamma_N(k, d)$ - Невязка

Если мы хотим применить метод Галёркина, то заметим что если есть разрывы, то вычислить $\frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x}$ будет нельзя, но если бы нам удалось найти какой-то способ вычисления этих производных, то тогда мы могли бы попробовать выписать условия применения метода Галёркина, который заключается в том, что невязка должна быть ортогональна всем функциям из исходного пространства кусочно-полиномиальных функций. Для этого достаточно потребовать, чтобы для любого i она была бы ортогональна функциям ϕ_0 и ϕ_1.

Выпишем скалярное произведение, проинтегрируем, интеграл должен обратиться в ноль:

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial a_{i+1/2}}{\partial t}\phi_{0i+1/2}\phi_{0j+1/2} + \frac{\partial b_{i+1/2}}{\partial t}\phi_{1i+1/2}\phi_{0j+1/2}\right) + \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x}\phi_{0j+1/2} = 0$$

С членом $\frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x}\phi_{0j+1/2}$ наша жизнь будет немножко испорчена.

Разберёмся с первым двумя членами.

$\phi_{0i+1/2}\phi_{0j+1/2}$ отлично от нуля только когда i совпадает с j. В противном случае либо $\phi_{0i+1/2}$ обращается в ноль, либо $\phi_{0j+1/2}$. Тогда

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial a_{i+1/2}}{\partial t}\phi_{0i+1/2}\phi_{0j+1/2} = \frac{\partial a_{i+1/2}}{\partial t}\Delta x_{i+1/2}.$$

$\phi_{1i+1/2}\phi_{0j+1/2}$ тождественно равняется нулю.

Остаётся $\frac{\partial a_{i+1/2}}{\partial t}\Delta x_{i+1/2} + \int_0^1 \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x}\phi_{0j+1/2}dx = 0$

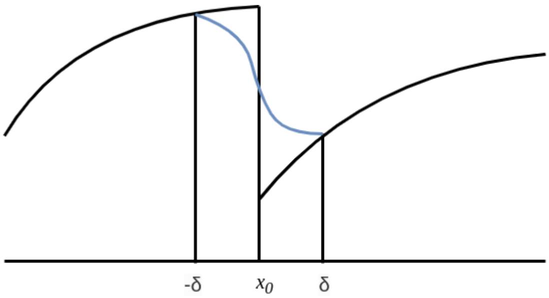
$\frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x}$ будет терпеть разрывы в j-ых точках. В частности, j и $j + 1$.

Если мы будем дифференцировать функцию $\frac{\partial f}{\partial x}$ в этой точке, то мы можем сказать, что в обобщённом смысле это будет представлять собой дельта-функцию Дирака. Допустим, есть одна точка разрыва x_0. У ϕ разрыв в той же точке

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\phi(x)dx = \int_0^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \Delta f \phi(x)$$

Как можно получить такую формулу:

Возьмём окрестность точки x_0 и изменим функцию f в этом отрезке, сделаем её гладкой так, чтобы её можно было бы дифференцировать



Тогда $\overline{f} = f(x),\ x \in x_0 + \delta\ (x_0 - \delta)$

$$\int_0^1 \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\phi(x)dx = \int_0^{x_0-\delta} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0+\delta}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx$$

Рассмотрим предел при $\delta \to 0$:

1. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_0^{x_0-\delta} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx = \int_0^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx;$
2. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\phi dx = \lim\limits_{\delta \to 0} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\varphi(x_0)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\Delta\varphi dx \right)$;
3. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{x_0+\delta}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx = \int_{x_0}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx.$

Найдем верхнюю оценку величины интеграла $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\Delta\varphi dx$:

$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\right|\Delta\varphi dx \le \varepsilon(f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta))$. Следовательно

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\Delta\varphi dx = 0.$$

Теперь вычислим интеграл $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\varphi(x_0)dx = \varphi(x_0)\,(f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta))$.

При $\delta \to 0$ $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\varphi(x_0)dx \to \Delta f\varphi(x_0)$.

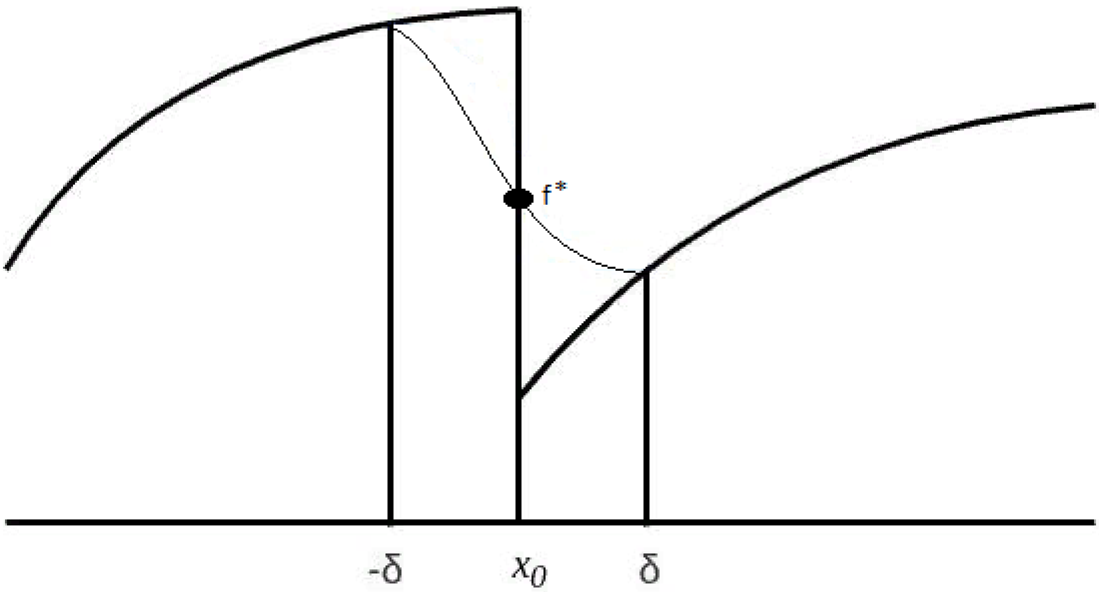
Таким образом,

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{x_0-\delta} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0+\delta}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx \right) = \int_0^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \int_{x_0}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx + \Delta f\varphi(x_0)$$

.

Выберем сглаживающую функцию такую, что она будет либо проходить через точку f^* (в лучшем случае), либо при стремлении δ к нулю сглаживающая функция имела бы предел при x_0, равный f^*.

Пример выбора точки f^*:



Также найдем интегралы $\int\limits_{0}^{x_0-\delta} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx$, $\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx$, $\int\limits_{x_0+\delta}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx$ при $\delta \to 0$.

1. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{0}^{x_0-\delta} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx = \int\limits_{0}^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx$;
2. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx = \lim\limits_{\delta \to 0} \left(\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx \right)$;
3. $\lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{x_0+\delta}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx = \int\limits_{x_0}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}\phi dx$.

$\varphi(x)$ - разрывная функция, имеющая различные значения левого и правого пределов для точки x_0.

По аналогии раскладываем ϕ на две компоненты: $\phi = \varphi(x_0) + \delta\overline{\varphi}$:

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\varphi(x_0 - 0) dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\delta\overline{\varphi} dx$$

Модуль интеграла не превосходит интеграла модуля:

$$\left| \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\delta\overline{\varphi} dx \right| \le \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right| \cdot |\delta\overline{\varphi}| dx \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\varphi(x_0 - 0)dx = \varphi(x_0 - 0)(f^* - f(x_0 - 0))$$

Таким образом $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx = \varphi(x_0 - 0)(f^* - f(x_0 - 0))$.

Аналогично получаем, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx = \varphi(x_0 + 0)(f(x_0 + 0) - f^*)$.

Подводя промежуточные итоги, запишем чему равен предел следующего интеграла

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\phi dx = \varphi(x_0 - 0)(f^* - f(x_0 - 0)) + \varphi(x_0 + 0)(f(x_0 + 0) - f^*).$$

Запишем интеграл по непрерывной части:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial f(\hat{u})}{\partial x}\phi_0(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial f(\hat{u})}{\partial x}dx = f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0).$$

Слагаемое, получаемое от разрывов разбиения кусочков x_i:

$$(f(\hat{u}(x_i + 0) - f^*_{i+1/2}) + (f^*_{i+1} - f(\hat{u}(x_{i+1} - 0)).$$

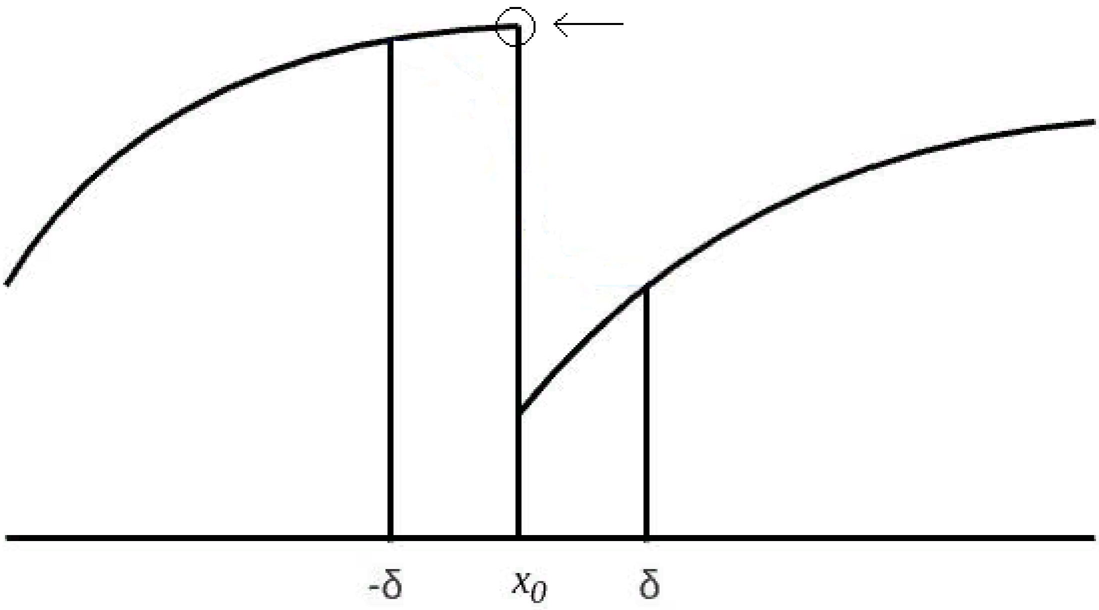
Сложив обе части и подставив в исходное уравнение, получим

$$\frac{\partial a_{i+1}}{\partial t} + \frac{f^*_{i+1} - f^*_{i+1/2}}{\Delta x} = 0$$

Разрывный метод Галеркина отличается от классических проекционных методов, где не требуется аппроксимации, но необходимо вычислять оператор уравнения от интеграла кусочно-полиномиальной функции. f^* называется потоком; имеет размерность потока; имеет значение функции потока в точке, где он имеет разрыв.

Для кусочно-постоянных функций (полиномы нулевого порядка) получаем задачу о распаде разрывов.

Если поток $f(u) = u$, то $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. В качестве базовой точки возьмем верхнюю:



Тогда производная по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ в данной точке не будет зависеть от предыдущих точек перед ней. Поэтому, если положить $f^*_{i+1/2} = u_i$, то получится схема с направленной разностью.

Для второй компоненты: $\int_0^1 (\sum \frac{\partial a_{i1/2}}{\partial t} \varphi_{0i+1/2} + \frac{\partial b_{i1/2}}{\partial t} \varphi_{1i+1/2} - \frac{\partial f}{\partial x}) \varphi_{1j+1/2} dx$

Если i не совпадаем с j, то получим ноль. Иначе

$$\frac{\partial b_{j+1/2}}{\partial t} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi^2_{1j+1/2} dx + \int_0^1 \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x} \varphi_{1j+1/2} dx.$$

Второй интеграл будет равняться

$$\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x} \varphi_{1j+1/2} + \varphi_1(x_j + 0)(f(u(x_j + 0)) - f^*_{j-1/2}) +$$
$$+ \varphi_1(x_{j+1} - 0)(f^*_{j+1/2} - f(u(x_{j+1} - 0))).$$

$\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x} \varphi_{1j+1/2}$ является интегралом от непрерывных функций, поэтому можем воспользоваться формулой интегрирования по частям:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial f(\widehat{u})}{\partial x} \varphi_{1j+1/2} = f(u(x_{j+1} - 0))\varphi_1(x_{j+1} - 0) - f(x_j + 0)\varphi_1(x_j + 0).$$

Подставим этот результат в предыдущее выражение:

$$- \varphi_{1j+1/2}(x_j + 0)f^*_{j-1/2} + \varphi_1(x_{j+1} - 0)f^*_{j+1/2} - \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(\widehat{u})dx.$$

Заметим, что в точке $j + 1$

$$\varphi_{1j+1/2}(x_j + 0) = -\frac{\Delta x}{2};$$

$$\varphi_1(x_{j+1} - 0) = \frac{\Delta x}{2}.$$

Подставим все найденные значения в первое выражение:

$$\frac{\Delta x^3}{12}\frac{\partial b_{i+1/2}}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2}(f^*_{i+1/2} + f^*_{i-1/2}) - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(a_{i+1/2} + b_{i+1/2}(x - x_i))dx = 0 .$$

В результате получили уравнение для эволюции коэффициентов a и b. Зная значения a и b на n-ом слое, можем получить значения на $n + 1$-ом слое. При этом можно использовать любую формулу для решения системы линейных дифференциальных уравнений, например, метод Рунге-Кутта соответствующего порядка. Такая процедура называется разрывным методом Галёркина.

Рассмотрим для системы уравнений

$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$, где $U = (\rho \;\; \rho u \;\; \rho(\varepsilon + \frac{u^2}{2}))^T$

и вектор потоков $F = (\rho u \;\; \rho u^2 + \pi \;\; u(\rho\varepsilon + \frac{m}{2}) + \pi)^T$

тогда

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{\rho_i+\frac{1}{2}}\varphi_{0,\rho_i+\frac{1}{2}} + b_{\rho_i+\frac{1}{2}}\varphi_{1,\rho_i+\frac{1}{2}})$$

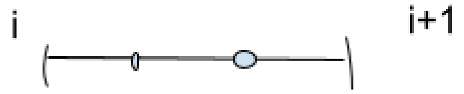
$$\rho u = \sum_{i=1}^{n-1} (u_{\rho u_i +1}\varphi_{0,\rho u_i +1} + b_{\rho u_i+1}\varphi_{1\, u_i})$$

$$\rho E = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{\rho E_i +\frac{1}{2}}\varphi_{0,\, u_i} + b_{\rho E_i+1}\varphi_{1\, ,u_i})$$

В случае если функция потока достаточно сложная, то входит вектор потоков входит интеграл:

$$\int\limits_{x_i}^{x_n} f(a_{in}b_{i+1}(x - x_{in}))dx$$

поскольку функция является гладкой, то используются квадратурные формулы высокого порядка (формула Гаусса). В одномерном случае находятся Гауссовы точки и интеграл вычисляется приближенно. Порядок точности с двумя точками дает аппроксимацию четвертого порядка точности.



Если используем полиномиальную функцию первого порядка, то аппроксимация функции нелинейным функциями будет второй порядок точности.

Рассмотрим функцию $u = x^3$ на отрезке от 1 до 1+Δx

Аппроксимируем a+bx, найдем минимум $(x^3 - a - bx)^2$

$$\int_1^{1+\Delta x} x^6 - 2x^3 a - 2x^3 b - a^2 + 2abx + bx^2 = \frac{x^7}{7}\Big|_1^{1+\Delta x} - 2\frac{x^4}{4}\Big|_1^{1+\Delta x} a - 2\frac{x^5}{5}\Big|_1^{1+\Delta x} b +$$

$$+ a^2\Delta x + 2ab\frac{x^2}{2}\Big|_1^{1+\Delta x} + b^2\frac{x^3}{3}\Big|_1^{1+\Delta x}$$

дифференцируем полученный интеграл по d(a):

$$-\frac{x^4}{2}\Big|_1^{1+\Delta x} + 2a\Delta x + bx^2\Big|_1^{1+\Delta x} = 0 \Rightarrow$$

$2a\Delta x + b(2\Delta + \Delta x^2) = \frac{1}{2}(4\Delta x + 6\Delta x^2 + 4\Delta x^3 + \Delta x^4)$ 1-ое уравнение

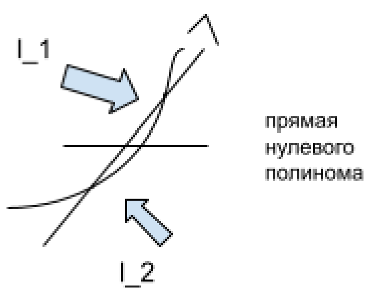
дифференцируем полученный интеграл по d(b):

$$\frac{2}{5}(5\Delta x + 10\Delta x^2 + 10\Delta x^3 + 5\Delta x^4 + \Delta x^5) = a(2\Delta x + \Delta x^2) + b\frac{2}{3}(3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta$$

2-ое уравнение

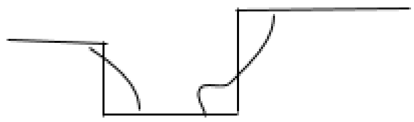
Найдем a и b из полученной системы уравнений и вычислим чему будет равняться на концах отрезка и середине отрезка разность искомой функции и линейного полинома, полученный результат будет порядка Δx^2.

Если будут использоваться квадратичные полиномы, то порядок аппроксимации будет второй.



Наилучшее приближение от l_1 до l_2 будет как на графике(величина будет порядка Δx^2), если взять нулевой полином то величина будет порядка Δx

Таким образом каждое добавление степени свободы позволяет убрать один коэффициент в разложении по x.



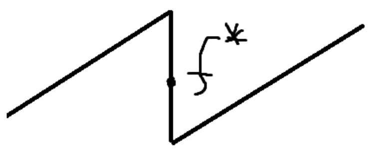
Поток считаем при нулевом порядке полинома, то тогда мы получим схема Годунова, а если возьмем распад разрыва, то в таком случае считаем значения распадов разрыва и используем их в качестве потоков, то в результате получаем следующее: решаем точную задачу распада разрывов, а потом ее проектируем на пространство кусочно-постоянных функций, аналогично можно попробовать с кусочно-полиномиальной функцией.

Теперь будем брать не пространства кусочно-постоянных функций, а пространства кусочно-линейных функций. Исходные данные проектируем на пространство кусочно-линейных функций, решаем точную задачу о распаде разрыва и опять проектируем её на то же пространство кусочно-линейных функций.

При $\Delta t \to 0$ будем ближе приближаться к решению системы уравнений вида:

$$\frac{\partial A_{i+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \Phi(A_{i+\frac{1}{2}}(t)) = 0$$

Таким образом, мы можем брать поток, совпадающий с потоком Годунова.



Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то полученное значение и будет равняться f^*:

$$f^*(f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)) = R(x_0 + 0), \text{ если } f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$$

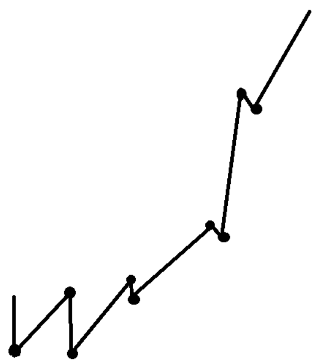
Ортогональное проектирование:

Пусть у нас есть семейство функций, например, кусочно-постоянной функции или кусочно-линейной. Если мы берём функцию f и вычитаем из неё проекцию ф, то получившаяся разность $f - \phi$ должна быть ортогональна любой кусочно-постоянной функции $(f - \phi, \Psi) = 0$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (\Psi - \phi)dx = 0 \qquad \phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Лимиторы:

Пусть мы получили векторы решений на n+1 слое



$$a_{i+\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2}}(x - x_0)$$

$$b_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Зададим коэффициент α: $2 \geq \alpha \geq 1$.

$$\widehat{b}_{i+\frac{1}{2}} = 0, \text{ если } (a_{i+1} - a_i) \times (a_i - a_{i-1}) \leq 0$$

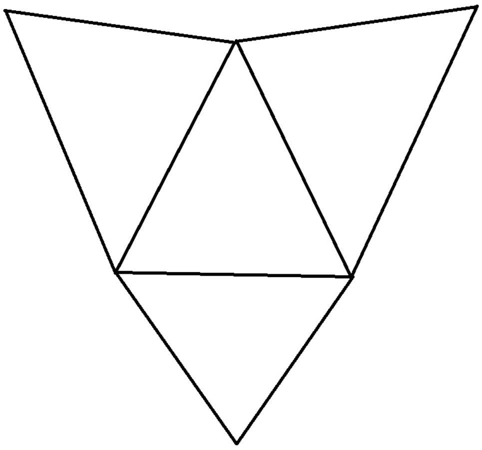
$$\widehat{b}_{i+\frac{1}{2}} = \alpha * sign(a_i - a_{i-1}) * min(\left|\frac{a_{i+1} - a_i}{\Delta x}\right|, \left|\frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta x}\right|),$$

если $\left|b_{i+\frac{1}{2}}\right| > \alpha * min(\left|\frac{a_{i+1} - a_i}{\Delta x}\right|, \left|\frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta x}\right|)$ и $(a_{i+1} - a_i) \times (a_i - a_{i-1}) > 0$

$$\widehat{b}_{i+\frac{1}{2}} = b_{i+\frac{1}{2}}, \text{ если } (a_{i+1} - a_i) \times (a_i - a_{i-1}) > 0$$

и $\left|b_{i+\frac{1}{2}}\right| < \alpha * min(\left|\frac{a_{i+1} - a_i}{\Delta x}\right|, \left|\frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta x}\right|)$

Рассмотрим случай треугольных сеток.



$$a_i + b_i(x - x_i) + c_i(y - y_i)$$

Возьмем уравнение непрерывной разрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

и подставим в него выражение сверху, получим:

$$\int_\Omega \frac{\partial a_i v}{\partial t} + \frac{\partial b_i(x - x_i)}{\partial t} + \frac{\partial c_i(y - y_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial}{}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} S_i + \oint (\rho u) n_x + (\rho v) n_y dS \longrightarrow \frac{\partial a_i}{\partial t} S_i + \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega (\rho u)_{ik} n_{x_{ik}} + (\rho v)_{ik} n_{y_{ik}} dS$$

Вычислим поток в одной точке, и умножим его на длину стороны:
Получим систему уравнений, связанную с тем фактом, что

$$\int_\Omega (x - x_i)(y - yi) dxdy \neq 0$$