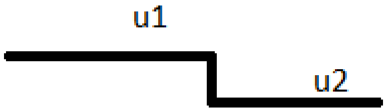
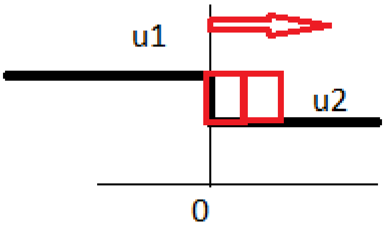
На прошлой лекции мы с вами построили монотонные схемы для уравнения переноса(линейного и для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами) и схему годунова, которая опирается на распад разрыва. Если мы посмотрим монотонные схемы первого порядка для уравнений переноса и для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, то мы увидим, что это монотонные схемы.
Я обещал выписать решение для распада и разрыва для одного уравнения:
$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$.
Его называют нелинейным уравнением переноса. Сейчас напишем всё аккуратно и будем иллюстрировать на самом простом примере, чтобы всё было, так сказать, совсем просто:
$f(u) = \frac{u^2}{2} \qquad (2)$.
Теперь мы накладываем дополнительное условие, что $f''(u) \geq 0(3)$. Я хочу отметить, что это условие приводит к тому, что если возьмем первую производную, то это будет монотонная функция, потому что вторая производная - производная от первой производной и если она положительная, то значит первая производная монотонно возрастает. То есть из условия $u_1 \geq u_2 \Rightarrow f'(u_1) \geq f'(u_2)$.
Теперь решение задачи о распаде произвольного разрыва. Здесь только одно уравнение, и волна будет только лишь одна, поэтому нам не нужно будет состыковывать эти волны, а знать что одна волна. Волна может быть либо разрывом, который движется в соответствии с условиями (скорость движения разрыва $D = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$ (4), где u_1и u_2 - решения на берегах разрыва), либо это будет автомодельное решение, которое зависит лишь от переменной $\xi = \frac{x}{t}$.
Теперь если представить u(x,t) как функцию: $u(x, t) = U(\frac{x}{t})$, то подставив в уравнение (1) мы получим:
$-U'(\xi) * \frac{x}{t^2} + f'(U) * U' * \frac{1}{t} = 0.$
Сократим и получим:
$-U'(\xi) * \xi + f'(U) * U' = 0$ или $U'(\xi) * (f'(U) - \xi) = 0.$
Мы видим, что автомодельные - постоянные решения, которые нам не особо интересны, поскольку у нас и так постоянные берега разрыва и вторая вещь в скобках $f'(U) = \xi$. Здесь уже явный вид зависимости функции f понадобится, в частности, например для уравнения (2) $U - \xi = 0$ или $U = \xi$. Точнее $U = \frac{x}{t}$ и путем проверки можно убедиться, что это уравнение будет выполнено. Для функции f если мы будем брать x в некоторой степени, то нам будет подходить только четная степень. Если f - произвольная функция то она должна удовлетворять условию (3).
В случае степенной функции задача решается довольно просто, но если более хитрая функция - нужно решить это уравнение, чтобы выразить в явном виде $U(\xi)$.
Посмотрим, в каком случае будет реализовываться ударная волна. Для газовой динамики получается два решения уравнения Егорьева и мы выбираем то, которое соответствует возрастанию энтропии. В данном случае энтропии у нас нет, но мы можем придумать энтропии(например u^2). Вспомним теорему, которая говорит о том, что скорость звука за ударной волной больше чем скорость ударной волны, а скорость звука перед ударной волной меньше. Это так, потому что если бы скорость звука была

меньше, то эта ударная волна распалась бы на две ударные волны меньшей интенсивности и одна волна бы отставала от другой. Этим свойством мы воспользуемся.
Рассмотрим два случая:



Начальные данные заданы в таком виде. u1 и u2 могут быть разных знаков, но нас в данном случае будет волновать, какое неравенство выполнено: u1 > u2 или u1 < u2. На рисунке u1 > u2, тогда скорость звука $f'(U)$, значит $f'(u_1) > f'(u_2)$. Значит если мы попробуем применить автомодельное решение, то получится, что первая звуковая волна забежит вперед, а вторая отстанет, и получится трехзначное решение, чего быть не может, поэтому в данном случае автомодельного решения не будет.
Будем называть ударной волной, хотя это просто разрыв. Решение u1 > u2 соответствует ударной волне. Теперь проверим знаки. Скорость ударной волны будет определяться соотношением (4), то есть если D > 0, то ударная волна побежит вперед и следовательно решение задачи распада разрыва будет u1.

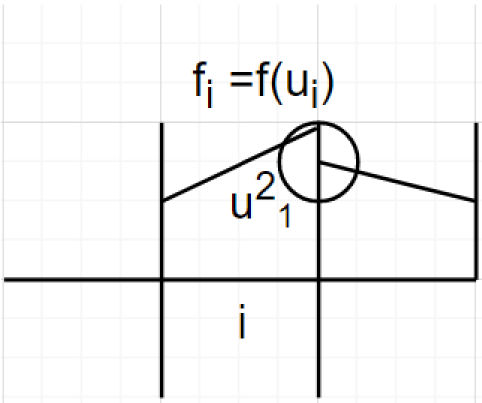


В случае u1 = u2 разрыва нет, поэтому его не рассматриваем.
$U_0 = U1,\ \frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2} > 0$ при u1>u2
$U_0 = U2,\ \frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2} < 0$ при u1>u2 и u1<0
$U_0 = U1,$ u1<u2, u1 > 0 u2 > 0
$U_0 = U2,$ u1<u2, u1 < 0 u2 < 0
Последний случай - когда u1 и u2 разного знака, тогда точка ноль будет попадать внутрь волны разрежения, $f'(U)$ = 0 в этой точке и получается, что если производная 0 а вторая производная строго положительная, то получается минимум функции, следовательно в этом случае если будут разные знаки,
$U_0 = min_u f(u),$ u1 < 0, u2 > 0
Что будет в том случае, если скорость ударной волны будет 0? Тогда f(u1)=f(u2). Нам нужно не только само значение u0, но и f(u0). Для (2) задача решена. Минимум равняется 0.
Перепишем это дело для f(u0)

$f(U_0) = f(U1), u1 > u2,\ \frac{u1+u2}{2} > 0$,

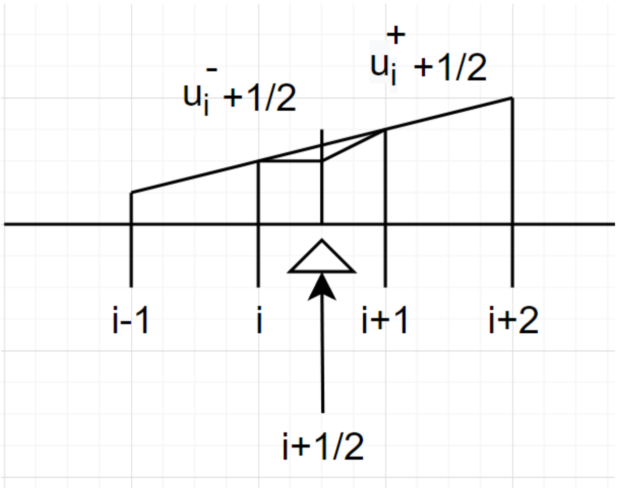
$f(U_0) = f(U2), u1 > u2, \frac{u1+u2}{2} \le 0$,
$f(U_0) = f(U1), u1 < u2, u1 < 0$,
$f(U_0) = f(U2), u1 < u2, u2 < 0$,
$f(U_0) = 0, u1 < u2, u1 < 0, u2 > 0$
Или для (2)
$f(U_0) = \frac{U_1^2}{2}, u1 > u2, \frac{u1+u2}{2} > 0$,
$f(U_0) = \frac{U_2^2}{2}, u1 > u2, \frac{u1+u2}{2} \le 0$,
$f(U_0) = \frac{U_1^2}{2}, u1 < u2, u1 < 0$,
$f(U_0) = \frac{U_2^2}{2}, u1 < u2, u2 < 0$,
$f(U_0) = 0, u1 < u2, u1 < 0, u2 > 0$
Вот решение задачи о распаде разрыва непосредственно для этой задачи.
Теперь как мы попробуем построить монотонную схему?
Есть способы построения монотонной схемы для уравнений нелинейного переноса непосредственно, но она довольно сложная и на практике почти не применяется. Там будут интерполироваться не сами величины u, а будут интерполироваться приращения потоков .

Т.е. непосредственно сами потоки будут интерполироваться.



Ту процедуру минмакса мы будет производить с потоками, при этом мы получим 2 значения. Интерполированные слева и справа от точки. Дальше решаем задачу распада и разрыва в этой точке.
Более приментиельным является следующая вещь. Для уравнения переноса мы получили монотонную схему следующим образом: мы взяли монотонную схему первого порядка $\frac{du}{dt} + \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = 0$ и вместо потоковых точек подставляем интерполированные значения. Здесь скорость звука равна u и может быть отрицательным.
$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} = 0$ даст одну схему, когда $\frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} = 0$ дает совсем другую схему, которая может быть полученная заменой переменной x на (-x).Ну и нумерация тогда вся изменится, если у нас идут индексы с возрастанием к направлению x, то получится

схема $\frac{du}{dt} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$. Как же значит нам поступить с уравнением переноса, у которого есть и положительные и отрицательные? Мы оба значения вычислим перед интерполированием.



Получили 2 значения в каждой потоковой точке. А теперь для того, чтоб выделить из них нужную правильную, мы решим задачу распада-разрыва не со значениями i и i+1, а со значениями u. При этом выработается какое-то значение в точке разрыва и значение потоковой функции. Такую процедуру можно сделать для любого потока, общие схемы выглядят следующим образом: строим монотонную схему первого порядка для нашего уравнения, а потом в этой монотонной схеме трехточечную схему монотонную первого порядка там для потоков вычисляется u+½ точки вычисляется по двум значениям, а потом подставляем интерполированные значения.

$\frac{du}{dt} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} = 0$, где $f_{i+1/2} = FU_i, U_{i+1}$. Вот такая аппроксимация называется трехточечной. Потому что уравнение для каждой ячейки будет входить 3 значения. Например схема распада разрыва, она даст монотонное решение. И теперь мы строим значения:

$$u^{+}_{i+1/2} = u_{i+1} - \alpha_{i+1/2}(R^{+}_{i+1/2}) * \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} * \frac{\Delta x}{2}$$

$$u^{-}_{i+1/2} = u_{i} + \alpha_{i+1/2}(R^{-}_{i+1/2}) * \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} * \frac{\Delta x}{2}$$

Здесь у нас появились две величины R с плюсом и минусом.

$$R^{-}_{i+1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}$$

$$R^{+}_{i+1/2} = \frac{u_{i+2} - u_{i11}}{u_{i+1} - u_i}$$

Подставляем и получаем:

$$f_{i+1/2} = F(u^{-}_{i+1/2}, u^{+}_{i+1/2})$$

Фактически та же схема, но с другими значениями. Она обладает хорошими свойствами монотонности.

Переходим к базовой динамике.

$\frac{dU}{dt} = \frac{dF}{dx} = 0$, тут F это вектор из трех компонент.

$U = (U_1, U_2, U_3)^t, F = (F_1, F_2, F_3)^t$

Теперь для этой системы мы построим монотонную схему

$$\frac{dU}{dt} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0$$
$$F_{i+1/2} = H(U_i, U_{i+1})$$
$$H(U^-, U^-) = F(U\ )$$

Если оба аргумента у нас постоянные, никакого разрыва между ними нет, значения двух соседних ячеек совпадает. В этом случае поток будет считаться в точности с тем же, что и дифференциальное уравнение, иначе не будет аппроксимации. И теперь дальше мы для каждой компоненты u мы считаем свои r, альфы и тоже самое, но вместо u считается U.

$$U^+_{i+1/2} = U_{i+1} - \alpha\ (R^+_{i+1/2}) * \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} * \frac{\Delta x}{2}$$

Здесь альфа и R - векторные функции.

$$R^+ = (R^+_1, R^+_2, R^+_3)^t$$
$$R^+_1 = \frac{U1_{i+2} - U1_{i+1}}{U1_{i+1} - U1_i}$$
$$R^+_2 = \frac{U2_{i+2} - U2_{i+1}}{U2_{i+1} - U2_i}$$

Для R3 аналогично.

Каждая компонента вектора R вычисляется по соответствующей компоненте вектора U.

$$\alpha^+ = (\alpha^+_1, \alpha^+_2, \alpha^+_3)^t$$
$$\alpha^+_1 = \alpha(R^+_1)$$
$$\alpha^+_2 = \alpha(R^+_2)$$
$$\alpha^+_3 = \alpha(R^+_3)$$
$$U^-_{i+1/2} = U_{i+1} - \alpha^- * \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} * \frac{\Delta x}{2}$$

Соответственно альфа с плюсом и альфа с минусом имеют точно такие же значения.

$$R^- = (R^-_1, R^-_2, R^-_3)^t$$
$$\alpha^- = (\alpha^-_1, \alpha^-_2, \alpha^-_3)^t$$

Соответственно R с минусом считается по-другому.

$$R^+_1 = \frac{U1_i - U1_{i+1}}{U1_{i+1} - U1_i}$$
$$R^+_2 = \frac{U2_i - U2_{i+1}}{U2_{i+1} - U2_i}$$
$$R^+_3 = \frac{U3_i - U3_{i+1}}{U3_{i+1} - U3_i}$$

Ну и альфа в точности такие же, только вместо + стоит -. Здесь есть одна тонкость, в одном уравнение у нас не было такого. Если вы помните, когда мы делали линейную систему уравнений, там мы просто перешли к другим переменным, каждая из которых является монотонной. Для общего случая, когда зависимость F от U нелинейная, такого преобразования сделать нельзя, не получится. Но многие рекомендуют делать таким образом.

$\frac{du}{dt} + A(u)\frac{dU}{dx} = 0$, где матрица $A = \frac{dF}{dU} = \begin{pmatrix} dF1/dU1 & dF1/dU2 & dF1/dU3 \\ dF2/dU1 & dF2/dU2 & dF2/dU3 \\ dF3/dU1 & dF3/dU2 & dF3/dU3 \end{pmatrix}$

Если я умножу матрицу А на $\begin{pmatrix} dU1/dx \\ dU2/dx \\ dU3/dx \end{pmatrix}$, то получим первую строку нашего уравнения.

Введем новые переменные: возьмем матрицу А в точке $i + \frac{1}{2}$ $A_{i+1/2} = A\left(\frac{U_i+U_{i+1}}{2}\right)$, полусумму матриц $\frac{1}{2}(A(U_i) + A(U_{i+1}))$. Вычислим собственные вектора $A_{i+1/2}$ и сделаем преобразования переменных. Соответственно, потоки(R^{-}) тоже преобразуются, будут вычисляться от преобразованных переменных. После интерполяции для этих величин сделаем обратный переход и получим соответствующую схему.

Разберем случай с многомерной системой уравнений. Если сетка двумерная (прямоугольная, равномерная), то всё остаётся на своих местах. Интерполируем используя одномерные схемы. Если сетка неравномерная, то вместо разностей мы будем считать уже производные: $R_{i+n} = \frac{\frac{U_i-U_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}}}{\frac{U_{i+1}-U_i}{\Delta x_{i+1/2}}}$, $\Delta x_{i+1/2} = 1/2(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$.

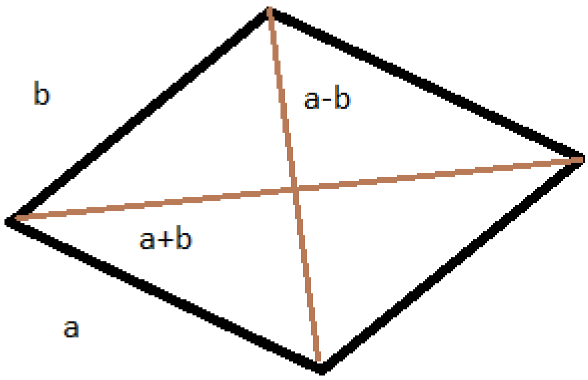
Если сетка не прямоугольная (изогнутая), если мы считаем, что линии сетки представляют собой некоторую прямолинейную систему координат, то тогда можно вычислять произовдные вдоль каждого направления координат.
Но если сетка совсем произвольная, неструктурированная - данный метод неприменим. Используем прием “одномерные конструкции”. Так как кажое ребро граничит с двумя ячейками можем найти расстояние между центрами соседних ячеек (k-ой и i-ой). $\frac{U_k-U_i}{l_{ki}}$ - производная в данном направлении. Продлив ее до пересечения с границей еще одной ячейки (p-ой). Теперь Мы можем при помощи интерполяции получить значение в этой точке. Тогда мы можем вычислить ещё одну производную вдоль этого направления и соответственно осуществить лимитирование (выбрать из двух наклонов минимальный) для интерполяции на грань. В центр грани мы можем не попасть.
По-другому: по всем окружающим ячейку центры соединяют треугольники, тогда линия соединяющая с центром грани попадёт внутрь одного из треугольников. По значениям в узлах треугольника можем вычислить значения всех производных. Теперь делаем одномерную конструкцию, продлевая до противоположной грани (линия попадёт в другой из треугольников), в этом треугольнике возьмем соответствующие интерполяции. В итоге у нас получится две производных, из них мы выберем меньшую и с этой меньшей производной продолжим решение в следующей точке.

Проекционные методы.
Пусть у нас имеется оператор $L(u) = f$. Функция представляет собой элемент бесконечномерного функционального пространства и описать ее с помощью конечного числа информации мы не сможем. Мы должны сделать переход от бесконечномерного пространства в пространство конечномерное.
Пусть функция $U \epsilon H$ - для простоты Гильбертову пространству.
Отступление:
Пространство функций $f(x)$. Эти функции образуют линейное пространство, т.к. я могу сложить функции из данного пространства или умножить функцию на число С. В линейном пространстве вводится понятие нормы элемента - длина вектора как отрезка. Соответственно и здесь можно ввести понятие нормы функции.
Кроме того в линейном пространстве справедливо:
$C(f_1 + f_2) = Cf_1 + Cf_2$;
$0 + f = f$;
$1 * f = f$;
и т.д.
Метрическое пространство - множество элементов таких, что определена функция $\rho(f_1 f_2)$ расстояния между двумя элементами, которая обладают следующими свойствами:
$\rho(f_1 f_2) \geq 0$;
$\rho(f_1 f_2) = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$;
$\rho(f_1 f_3) \leq \rho(f_1 f_2) + \rho(f_2 f_3)$.
Пусть $g = cf$. Тогда если заданы произвольные ε, то я могу указать такие δ, что если $\left|\hat{c} - c\right| < \delta$, $\rho(f_1 h) < \delta \rightarrow \rho(\hat{c}h, g) < \varepsilon$ (определение непрерывности).
Это будет автоматически выполняться, если расстояние я введу следующим образом: для каждой функции я введу такое понятие как норма функции.
Для каждой функции я введу число $||f||$ - малое f. Ограничения для этого числа:
$||f|| \geq 0$;
$||f|| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$;
$||cf|| = |c| \, ||f||$;
$||f_1 + f_2|| \leq ||f_1|| + ||f_2||$.
Такое пространство называют нормированные пространством. Тогда расстояние между элементами этого пространства можно определить как норму:
$\rho(f, g) = ||f - g||$
Пространство может быть полным и неполным, мы используем только полные.
Фундаментальная последовательность:
$a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \dots$ (N)
$|a_n - a_m| < \varepsilon;\ n, m > N$
Необходимо вспомнить теорему Коши из матанализа, которая говорит о том, что любая фундаментальная последовательность сходится. Такие функциональные пространства, когда любая фундаментальная последовательность сходится, называются полными. Наиболее известное такое пространство - пространство непрерывных функций.

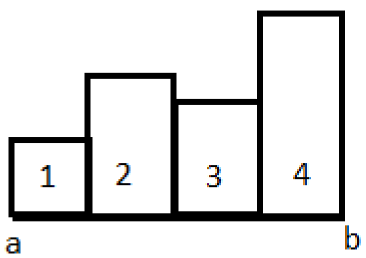
||f|| = max_x|f| - такая норма удовлетворяет всем основным нормам. Известно, что если последовательность непрерывных функций равномерно сходится, то она сходится к непрерывной функции.
Определим ортогональность. Математически она определяется так:
(a,b) = 0
Свойства ортогональности:

- линейность
  (a,b+c) = (a,b) + (a,c)
  (a, kb) = k(a,b)
  $(a, a) \geq 0;\ (a, a) > 0 \Rightarrow a \equiv 0$

$||a|| = \sqrt{(a, a)}$
Равенство параллелограмма:



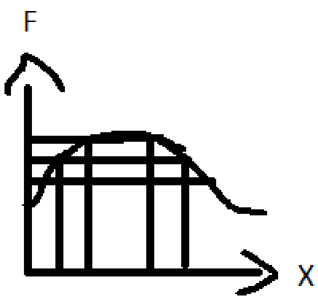
$(a + b,\ a + b) + (a - b,\ a - b) = 2((a, a) + (b, b))$
$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$
Если скалярное произведение введено и нормы вычисляются по этим принципам, то пространство - Гильбертово.
Рассмотрим множество функций на отрезке ab:



$\int_a^b f(x)g(x)dx$
при подсчете
$dx(f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 + f_4g_4)$
Зададим произвольную $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$
Строим отрезки:
$\frac{1}{2^{n+1}};\ \frac{1}{2^{n+2}};\ \ldots\ -\ \text{суммарная длина отрезков}\ \frac{1}{2^n}$

Можно по разному пронумеровать части на отрезке от 0 до 1. Сначала ограничимся только целыми - получится последовательность 0;1.
Если половинными долями: 0; $\frac{1}{2}$; 1.

Третями: 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $1.$
Итак, мы определились, у нас есть пространство со скалярным произведением $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и оно является Гильбертовым. Стоит отметить, что здесь интегрирование проводится по Лебегу, а не по Риману, чтобы предел не получался неинтегрируемой функцией , например - функция Дирихле. В её случае с определением по Риману интегральная сумма на отрезке будет равна либо 0 либо 1, чередуя такие выборы и устремляя $\Delta \to 0$ получаем, что предел не существует. Значит, функция Дирихле не интегрируема (по Риману). В случае с интегрированием по Лебегу такой проблемы нет, разбиение делается не иксам, а по изменениям функции и суммируются именно изменения функции. Вводится некая мера соответствующего множества(длина).



С введением интеграла Лебега наше пространство получается полным, его называют L_2 : $||f||_{L2} = \int_a^b f(x)^2dx$
Пусть решение $U \in L_2$. Будем искать приближенные решение следующим образом: выберем конечномерное подпространство H_n размерности n. Если взять тригонометрический базис, это означает конечное количество синусов и косинусов. Наше решение U будем принадлежать нашему подпространству H_n . В нашем подпространстве есть базис $e_1 \dots e_n$. U_n может быть представлена в виде $U_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Мы предполагаем, что оператор L мы умеем вычислять, в том числе и от базисных функций. Остается найти коэффициенты α. $L(U_n) - f = r_n$, r_n - невязка. Будем работать с этой невязкой, подберем коэффициенты таким образом, чтобы невязка была минимальной.
Выберем коэффициенты так, что : $||r_n|| = \min$. Такой подход называется метод минимальных невязок.
Другой метод - метод коллокаций. Невязка так же является функцией, потребуем, чтобы она равнялась нулю в нескольких точках:
$r(x_i) = 0$; $i = 1, \dots, n$. x_i называются точками коллокаций.
Третий метод - метод Галеркина. В этом методе мы требуем от невязки следующее: $(r_n, g) = 0$ для $g \in H_n$. Получаем n уравнений для n коэффициентов: $(r_n, e_1) = 0$, $(r_n, e_2) = 0$, … $(r_n, e_n) = 0$.

$(L(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n), e_i) = (f, e_i)$; $i = 1, \ldots n$.

Покажем выгоду метода Галеркина по сравнению с минимальными невязками .
Уравнение будет иметь вид $AU = f$; $A = |a_{ij}|$
Подставим U : $\Sigma\alpha_i Ae_i = \Sigma f_i e_i$, $\Sigma\alpha_i Ae_i - f_i e_i = r_n$.
Запишем скалярное произведение:
$0 = (\Sigma\alpha_i Ae_i - f_i e_i, e_k)$.
$\Sigma\alpha_i(Ae_i e_k) - f_k = 0$.
$Ae_i e_k = a_{ik}$. Таким образом мы избегаем умножения на A^*, которое сильно усложнило наше решение задачи