Определим группу (G, *) как непустое множество объектов G для которого определена бинарная операция $G * G \rightarrow G$ похожая на операцию сложения или операцию умножения.

То есть, каждым двум элементам поставлен в соответствие третий элемент который является, например, произведением этих элементов.

Группа обладает следующими свойствами:

- ☐ Ассоциативность, то есть $\forall a_1, a_2, a_3 \in G$: $(a_1 * a_2)\, a_3 = a_1\, (a_2 * a_3)$
- ☐ Существование правого единичного элемента, то есть $\exists e \in G,\ \forall a \in G: a * e_{\text{правый}} = a$
- ☐ Существование левого единичного элемента, то есть $\exists e \in G,\ \forall a \in G: e_{\text{левый}} * a = a$

Докажем, что левый и правый единичные элементы равны
С одной стороны, произведение $e_{\text{левый}} * e_{\text{правый}}$ должно равняться $e_{\text{левый}}$, так как произведение любого элемента слева на $e_{\text{правый}}$ равняется этому самому элементу согласно свойству правого единичного элемента.

С другой стороны, данное произведение должно равняться $e_{\text{правый}}$, так как произведение любого элемента справа на $e_{\text{левый}}$ равняется этому самому элементу согласно свойству левого единичного элемента.

Следовательно, $e_{\text{левый}} = e_{\text{правый}}$, ч.т.д.

Продолжение доказательства теоремы Нётер из прошлой лекции:

Итак, если мы имеем группу преобразований, зависящую от параметра s

$\bar{q_i} = q_i + s\psi_i(q_i,\ t)$

$\bar{t} = t + s\xi(q_i,\ t)$,

то, при малых значениях s если действие до преобразований и после преобразований не изменяется, а лагранжиан остается прежним, тогда система обладает законом сохранения и сохраняющаяся величина имеет следующий вид:

$$I = L\xi = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i - \xi \cdot \dot{q}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Можем заметить, что это множество удовлетворяет всем условиям группы, например, при s = 0 мы получаем тождественные преобразования, то есть, s = 0 является единичным элементом.

Ассоциативность в данной группе обусловлена линейностью преобразования по параметру s.

Продолжим доказательство.

Так как для малых промежутков времени $(t_2 - t_1)$ справедливо утверждение

$$\int_{t_1}^{t_2} L\partial t \approx L\partial t \,,$$

чем меньше ∂t, тем более точно будет выполняться это утверждение.

то для того, чтобы действие было инвариантным, достаточно равенства следующих лагранжианов

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)\partial t = L(\bar{q}_i, \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{t}}, \bar{t})\partial \bar{t}$$

Сократим dt и подставим в данное равенство следующие формулы

$$\bar{q}_i = q_i + s\psi_i(q_i, t)$$

$$\bar{t} = t + s\xi(q_i, t)$$

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1 + s\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{1+s\frac{\partial \xi}{\partial t}}$$

Получим

$$L(\bar{q}_i, \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{t}}, \bar{t}) = L(q_i + s\psi_i, \frac{\partial}{\partial t}(q_i + s\psi_i)\frac{\partial t}{\partial t}, t + s\xi)(1 + s\frac{\partial \xi}{\partial t})$$

Так как параметр s мы считаем малым, можно пренебречь квадратичными и выше поправками

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{1+s\frac{\partial \xi}{\partial t}} \approx 1 - s\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Следовательно, исходный лагранжиан можно представить в следующем виде

$$L(q_i + s\psi_i, (\dot{q}_i + \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \cdot s)(1 - s \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}), t + s\xi)(1 + s\frac{\partial\xi}{\partial t})$$

Пренебрегая s^2 в силу его малости, получаем

$$L(q_i + s\psi_i, \dot{q}_i + \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \cdot s - \dot{q}_i \cdot s \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}, t + s\xi) + s\frac{\partial\xi}{\partial t}L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Разложим по степеням s:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial L}{\partial q_i}s\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} \cdot s - \dot{q}_i \cdot s \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t})] + \frac{\partial L}{\partial t}s\xi + s\frac{\partial\xi}{\partial t}L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Возвращаясь к исходному равенству, получаем

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial L}{\partial q_i}s\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} \cdot s - \dot{q}_i \cdot s \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t})] + \frac{\partial L}{\partial t}s\xi +$$

$$+ s\frac{\partial\xi}{\partial t}L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Преобразуя данное равенство, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial L}{\partial q_i}s\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} \cdot s - \dot{q}_i \cdot s \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t})] + \frac{\partial L}{\partial t}\xi + s\frac{\partial\xi}{\partial t}L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$$

Так как

$$\frac{\partial I}{\partial t} = L\frac{\partial\xi}{\partial t} + \xi\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}(\xi\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \xi\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i) + \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} - \xi\ddot{q}_i -$$

$$\dot{q}_i \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n}(\psi_i + \xi\dot{q}_i)$$

Исходя из уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Произведем замену, сократив при этом слагаемые $\xi\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i$ и $-\xi\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i$, а

также выразим из равенства

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial L}{\partial q_i}s\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} - \dot{q}_i \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t})] + \frac{\partial L}{\partial t}\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}L = 0$$

слагаемое $\frac{\partial L}{\partial t}\xi$ и подставим в получившееся выражение

$$\frac{dL}{dt} = L\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\xi}{dt}L - \left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\frac{d\psi_i}{dt} - \dot{q}_i\frac{d\xi}{dt})\right\} + \sum_{i=1}^{n}\xi\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} +$$

$+\sum_{i=1}^{n}(\frac{d\psi_i}{dt} - \dot{q}_i\frac{d\xi}{dt})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n}(\psi_i - \xi\dot{q}_i)\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ получаем после сокращения, ч.т.д

Это теорема Нётер, сформулированная в простейшем случае для динамических систем с конечным числом степеней свободы. Есть много вариантов данной теоремы: обратные теоремы Нётер, теоремы Нётер для непрерывных систем с бесконечным числом степеней свободы и др.

Первая теорема нам доказала, что законы сохранения связаны с некоторыми симметриями нашего окружающего мира:
Если уравнение допускает определенную симметрию, т.е. определенные преобразования, которые их не отменяют, то отсюда следуют законы сохранения.

Если система обладает законом сохранения, то она допускает симметрию - обратная теорема Нётер.

Перейдем к электродинамике и уравнению, которое определяет проекцию электромагнитных полей.
Как мы знаем, электромагнитное явление связано с наличием электромагнитного поля, которое распадается на электрическое и магнитное. Разделение условное, потому что это зависит от системы координат, в которую мы смотрим. Сейчас мы действуем в рамках классической физики, но также это применимо и для релятивистских теорий с небольшими изменениями.

Закон индукции Фарадея, который говорит, что ЭДС в замкнутом контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока через этот контур, был экспериментальным.

Закон Био-Савара-Лапласа определяет вектор индукции магнитного поля, порождаемого постоянным электрическим током. Он был выведен на основе уравнений Максвелла.

$\frac{1}{c}\frac{dH}{dt} = - rotE$ - закон индукции Фарадея

Множитель $\frac{1}{c}$ в данном случае определяет только размерность

$divE = 4\pi\rho$

$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = rotH + \frac{4\pi}{c}j$

$divH = 0$

$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$ - данный кусок формулы додумался добавить Максвелл

Закон Био-Савара-Лапласа говорит, что если у нас течет ток, когда у нас возникает вихревое магнитное поле, то интеграл по контуру будет равняться току, который протекает через этот контур.
Есть теория, что для описания электромагнитных полей используются два потенциала:
скалярный потенциал $\varphi(x, y, z, t)$
и векторный потенциал $\overline{A}(x, y, z, t)$

Если механика может выведена однозначно, то здесь есть некоторые свободы.
Мы можем записать лагранжиан некоторой магнитной системы:
Будем считать, что у нас конечное число зарядов и добавим некоторые энергетические характеристики
Данное уравнение состоит из двух по существу частей: первая часть просто кинетическая энергия заряда, вторая часть связана с взаимодействием заряда с поля. Важно добавить сюда третью часть, связанную с энергией поля:

$$L = \sum\frac{m_i\upsilon_i^2}{2} + \frac{e}{c}(A(x_i, y_i, z_i, t)\,\upsilon_i) - \sum e_i\varphi(x_i, y_i, z_i, t) + L_{\text{поля}}(A, \varphi)$$

Мы будем производить варьирование действий в 2 этапа. Сначала будем считать, что вариации потенциалов у нас равны нулю, а имеется лишь вариация зарядов. В этом случае достаточно рассмотреть 1 заряд.
Забегая вперед, лагранжиан поля будет равен:

$L_{\text{поля}} = \frac{1}{8\pi}^{(E^2-H^2)}$, где E^2 и H^2 - напряженности эл. и магн. полей

Так сразу написать мы не можем, т.к напряженностей у нас еще нет, а есть только потенциалы.
Выпишем функционал действий S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} z dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m\upsilon\delta\upsilon + \frac{e}{c}(\frac{\partial A_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\delta z) \cdot V_x + A_x \delta V_x$$
$$+ (\frac{\partial A_y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_z}{\partial z}\delta z) \cdot V_y + A_y \delta V_y$$
$$+ (\frac{\partial A_z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_z}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_z}{\partial z}\delta z) \cdot V_z + A_z \delta V_z$$
$$- e(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z)]dt$$

Теперь в соответствии с тем как мы раньше делали, мы должны собрать коэффициенты при dx, dy и dz и приравнять их к нулю. Если у нас на ряду с dx, dy и dz присутствуют dOx, dOy и dOz, чтобы от них избавиться и перейти только к dOx, мы вспомним, что:

$$\delta V_x = \frac{d}{dt}\delta x; \ \delta V_y = \frac{d}{dt}\delta y; \ \delta V_z = \frac{d}{dt}\delta z$$

И при интегрировании по частям, с учетом того что координаты к моменту времени t1 и t2 не изменяются и следовательно в dx_i, dy_i, dz_i обращаются в 0. У нас получится следующее:

$$-\frac{dmV_x}{dt} + \frac{e}{c}(\frac{\partial A_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}V_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}V_z - \frac{dA_x}{dt}) - e\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{d}{dt}mV_x + \frac{e}{c}(\frac{\partial A_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}V_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}V_z - \frac{\partial A_x}{\partial x}V_x - \frac{\partial A_x}{\partial y}V_y + \frac{\partial A_x}{\partial z}V_z + \frac{\partial A_x}{\partial t})$$
$$- e\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Сократим и перепишем:

$$\frac{d}{dt}mV_x - \frac{e}{c}((\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y})V_y + (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})V_z) + e(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{e}\frac{\partial A_x}{\partial t}) = 0$$

Вот мы получили уравнение для икса. Уравнение для y и z будут получаться в точности таким же образом и здесь записаны не будут. Хочу обратить внимание на те комбинации которые есть в полученном уравнении. $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y})$ и $(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})$ – есть ничто иное как компоненты ротора вектора А. Давайте в этом убедимся:

$$\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{matrix}$$

$$R_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Перепишем уравнение с учетом этого:

$$\frac{d}{dt} mV_x - \frac{e}{c}((rotA)\ V_y + (rotA)_y V_z\ ) + e(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{e}\frac{\partial A_x}{\partial t}) = 0$$

И чтобы уже окончательно завершить запись этого уравнения в инвариантной форме, обратим внимание на $((rotA)\ V_y + (rotA)_y V_z\ )$.

Это тоже похоже на какой то ротор, только ротора уже нет. Роль ротора играет векторное произведение.

$$\begin{matrix} i & j & k \\ (rotA)_x & (rotA)_x & (rotA)_x \\ V_x & V_y & V_z \end{matrix}$$

Возьмем i-тую компоненту и получим:

$$\frac{d}{dt} mV_x - \frac{e}{c}(rot\overline{A} \times \overline{V})_x + e(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{e}\frac{\partial A_x}{\partial t}) = 0$$

И придадим этому классический вид:

$$\frac{d}{dt} mV_x = e[\frac{1}{c}(\overline{V} \times rot\overline{A}) - \frac{1}{e}(\frac{\partial A}{\partial t} + grad\varphi)_x]$$

Вот мы получили уравнение, которое определяет динамику электрического заряда в электромагнитном поле.
Если же мы теперь сравним это дело с законом Ньютона, то мы видим, что с левой стороны стоит ускорение электрического заряда, а с правой стороны должна стоять сила, которая на него действует. Это сила, которая действует на заряд со стороны электромагнитного поля. Ее называют

силой Лоренца. Она пропорциональна заряду. Мы замечаем, что на о электромагнитном поле мы можем судить только по его действию на частицы. Оно включает лишь $rot\overline{A}$ и $\frac{1}{e}$ $(\frac{\partial A}{\partial t} + grad\varphi)_x$. Они называются соответственно напряженностью магнитного поля (H) и напряженностью электрического поля (E). Это тоже условные названия. Можно было назвать наоборот, но назвали вот так.
Теперь из такого определения наших полей мы сразу можем выразить некоторое уравнение. Во первых возьмем дивергенцию от аш:

$$divH = 0$$

Это глубокое физическое свойство, которое как не странно связано с геометрией.
Если мы возьмем множество, круг, то у его нет концов, у сферы нет границ. И вот это вот свойство переводится на функции. И тогда взятие операции границы от геометрического объекта приводит к некоторой дифференциальной операции во множестве функций. Теоремы Остроградского-Гаусса, Стокса, Ньютона-Лейбница связывают как раз интегрирование со значением функции на границы. Границы от границы всегда равны нулю. rot(div) и div(rot) всегда равны 0, так же как rot(grad).
Получим: $rot(E) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rotA = \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$ - второе уравнение Максвелла.
Вот мы применяя принцип наименьшего действия и опираясь на теорию потенциалов получили закон индукции фарадея. Не экспериментально, наблюдая, а выведя.
Но это первый этап, первые 2 уравнения Максвелла. Как я уже говорил их 4. Для того чтобы вывести остальные, мы уже одними зарядами не отделаемся. Введем такие функции как плотность заряда. Вот если бы заряды были распределены непрерывным образом, мы бы могли определить плотность заряда, как заряд, находящейся в каком-то малом объеме, деленный на этот объем. И это бы была бы функция $\rho = \frac{e_v}{V}$.
Однако заряды у нас точечные, поэтому такого предела у нас не получится. Мы будем использовать для описания, так называемые обобщенные функции. Какой смысл этой плотности? Смысл плотности заключается в

том, что если я возьму $\int\limits_V \rho(x,\ y,\ z,\ t)dxdydt$ то должен получить полный электрический заряд, который содержится в этом объеме e_v.

Такую настоящую функцию с числовыми значениями мы не можем использовать, но мы будем считать что функция такая есть. И эту функцию мы будем записывать как:

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t)\ =\ \sum e_i\delta(x\ -\ x_i(t),\ y\ -\ y_i(t),\ z\ -\ z_i(t))$$

δ - дельта функция дирака
легко видеть что если мы проинтегрируем эту функцию по всему объему то тогда у нас интеграл от тех точек которые попали внутрь объема будут равны единице, а тех которые не попали - 0.
И поэтому это будет просто сумма e_i , что и будет равно заряду, находящемуся в объеме.
Теперь имея функцию плотности мы можем связать с этой функцией функцию тока:

$$j\ = \sum e_i\rho v_i\ = \sum e_i\delta(x\ -\ x_i,\ y\ -\ y_i,\ z\ -\ z_i)v_i$$

Мы видим, что снова только заряды попавшие внутрь объема будут создавать ток.
Замечаем что j это не функция, а она будет выражать для нас только интеграл.
И тогда наш лагранжиан можно будет записать в таком виде. Раньше была сумма а теперь интеграл:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V \frac{e}{c}(jA)\ -\ \rho\varphi\ +\frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2)dxdydzdt$$

Беря интеграл мы представляем, что все заряды находятся в ограниченной области (локальная компактность). Мы будем варьировать лишь только компоненты поля, а компоненты координат зарядов не будем. Поэтому первый член с кинетической энергией куда входит только скорости зарядов он у нас не будет давать вариации.
Первый член интеграла исходит из:

$\sum \frac{e}{c}(A_i, v_i) = \frac{e}{c} \int\limits_V (jA) dxdydz$

Второй член:

$- \sum \varphi e_i = - \rho\varphi$

Третий член переписываем лагранжиан.

Теперь полученный интеграл нам нужно проваривать, чтобы получить оставшиеся два уравнения. Одно уравнение векторное, когда мы будем варьировать компоненты векторного потенциала. Второе скалярное, когда мы будем варьировать компоненты скалярного потенциала.
Начнём со скалярного. Подставим вместо E H подставить выражение через потенциал. Стоит также отметить вещь как калибровочная инвариантность. Потенциалы не сами входят в уравнение. Не каждая компонента. А входит лишь в векторы комбинаций. Имеем:
$H = rotA$
$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - grad\varphi.$
Мы можем указать целую серию различных потенциалов, которые будут давать нам одинаковый эффект. То есть, любой потенциал будет правильно описывать наше явление. Например, возьмем $A + gradf(x, y, z, t)$, то H не изменится. То есть, если мы возьмем $H' = A + gradf$, то H’ = H.
Если мы возьмем скалярный потенциал равный $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{dt}$, то
$E' = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$
$- \frac{1}{c}\frac{\partial grad\varphi}{\partial t} - grad\varphi + \frac{1}{c}grad\frac{\partial f}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - grad\varphi = E'$, то есть получили то же самое.
Тогда, учитывая это, возьмем одну вещь. Мы можем выбрать такую калибровку, в котором скалярный потенциал равен 0. Тогда запишем наш интеграл в следующем виде:

$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V \frac{e}{c}(jA) - \rho\varphi + \frac{1}{8\pi}((\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + grad\varphi)^2 - rotA \cdot rotA)dVdt$

Теперь, если мы дадим дельта φ, то получится:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V$$

$$-\ \rho\delta\varphi\ +\frac{2}{8\pi}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}+grad\varphi\right)\ \cdot grad(\delta\varphi)dVdt\ =\int_{t_1}^{t_2}\int_V(-\ \rho\delta\varphi\ +\frac{1}{4\pi}divE)\delta\varphi dVdt$$

Так как интеграл по границам пространства равен 0. Мы считаем что на бесконечности нет не магнитных, не электрических полей, не зарядов.
Тогда

$$-\ \rho\delta\varphi\ +\frac{1}{4\pi}divE\ =\ 0$$

$4\pi\rho\delta\varphi\ =\ divE$ (закон кулона)

И теперь остается последнее из уравнений Максвелла. Мы будем варьировать А. Тогда:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\frac{e}{c}(j,\delta A)\ +\frac{1}{4\pi}\left(\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}-\ grad\varphi,\ \ -\frac{1}{c}\frac{\partial\delta A}{\partial t}-\ (rotA\ \cdot rot\delta A)\right)\right)dVdt$$

Производную по времени мы перебрасываем через интеграл по времени. Тогда:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\frac{e}{c}(j,\delta A)\ +\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial E}{\partial t},\ \delta A\right)\ -$$

Далее мы будем перебрасывать ротор. Для этого воспользуемся дифференцированием произведений.

$div\varphi A\ =grad\varphi\ \cdot\ A\ +\ \varphi divA$

Дивергенция действует как дифференциальный оператор. Здесь вектор понимается, как двумерный элемент.

$div(A\ \times\ B)\ =\ (rotA,\ B)\ -\ (rotB,\ A)$

Знак минус зависит от размерности пространства и элементов. Здесь вектор понимается как два одномерных элемента.

Применим формулу Гаусса-Остроградского. Дивергенция поверхности интеграла уйдет в ноль. Тогда:

$(rotB,\ A)\ =\ (rotA,\ B)$

В нашем случае:

$rotA\ =\ B;\ rot\delta A$

$Brot\delta A\ =(rotB,\delta A\ )$

Тогда получим:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \frac{e}{c}(j, \delta A) + \frac{1}{4\pi}[(\frac{\partial E}{\partial t}, \delta A) - (rotrotA, \delta A)]dVdt$$

Коэффициент при скалярном произведении δA должен превратится у нас в ноль. Получаем:

$$\frac{e}{c}j + \frac{1}{4\pi}[\frac{\partial E}{\partial t} - rotrotA] = 0$$

Имеем уравнение:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = rotH - \frac{4\pi}{c}j$$

Это 4 уравнение Максвелла. Получили ток смещения самопроизвольно, без предположений.

Дальше получим закон сохранения полной энергии. Для этого вспомним уравнение:

$$\frac{dmv}{dt} = e(\frac{1}{c}(v \times H) + gradE)$$

Домножим на v

$$\frac{d}{dt}m\frac{v^2}{2} = e(gradE, v)$$

Запишем, проинтегрировав по объёму:

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum\frac{d}{dt}m_i\frac{v_i^2}{2} + \int_V(E, j)dV$$

Здесь у нас понятие кинетической и потенциальной энергии размыты. Поэтому использовать преобразования Лежандра нехорошо.

E претендует на роль кинетической энергии. Производная во времени от потенциала входит лишь сюда. Но если взять E в классической форме:

$$E =- \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - grad\varphi$$

То E^2 и будет квадратичной функцией от скоростей потенциалов.

В итоге. Потенциал скалярный

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f = \int_0^t c\varphi dt$$

Тогда тождественный потенциал обратится в ноль. f любая функция.

Векторный потенциал будет пересчитан. Тогда

$$E =- \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

А Н так и останется. И теперь можно применить преобразование лежандра:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A}{\partial t}} \frac{\partial A}{\partial t} - \mathcal{L} \ =$$

Н от $\frac{\partial A}{\partial t}$ не зависит. Значит:

$$E^2 = \frac{1}{c^2} (\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial t})$$

Вычисляем производную

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A}{\partial t}$$

И умножаем ещё раз на $\frac{\partial A}{\partial t}$ и получаем удвоенную кинетическую энергию.

И так получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A}{\partial t}} \frac{\partial A}{\partial t} - \mathcal{L} \ = \frac{1}{8\pi} (2E^2 - E^2 + H^2) \ =- \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$$

Получаем полную энергию самого поля. Теперь выразим $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial \mathrm{H}^2 + \mathrm{E}^2}{\partial t} =- \ rot\, \mathrm{EH} \ + \ rot\, \mathrm{H}E \ - \frac{4\pi}{c} (j \ \cdot \mathrm{E} \ )$$

Интегрируем по конечному объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{v} \frac{1}{2c} (\mathrm{H}^2 + \mathrm{E}^2) \partial V \ = \int\limits_{v} div(\mathrm{H} \times \mathrm{E}) \partial V \ - \int\limits_{v} \frac{4\pi}{c} (j \ \cdot \mathrm{E} \ ) \partial V$$

Интеграл от дивергенции - поверхностный интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{v} \frac{1}{8\pi} (\mathrm{E}^2 + \mathrm{H}^2) \partial V \ = \oint \frac{(\mathrm{H} \times \mathrm{E}) n}{4\pi} \cdot \mathrm{c} \ - \int (j \ \cdot \mathrm{E} \ ) \partial V$$

Последний интеграл равен -$\frac{\mathrm{E}_{\text{кин}}}{\partial t}$, поэтому получаем далее:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\int \frac{\mathrm{E}^2 + \mathrm{H}^2}{8\pi} \partial V \ + \mathrm{E}_{\text{кин}}] \ = \oint \frac{\mathrm{c}}{4\pi} ((\mathrm{H} \ \times \mathrm{E} \ ), n) \partial V$$

Получается, что полная энергия в замкнутом объеме связана только с поверхностным интегралом. А вектор потока в правой части - вектор Пойнтинга. Здесь предполагается, что ни одна частица не покидала объем. А если бы покидала, то она бы уносила с собой кинетическую энергию и этот процесс тоже надо было бы учитывать.

Теперь посмотрим, к каким последствиям привели системы уравнений Максвелла. Главное следствие - обнаружение электромагнитных волн,

которые были предсказаны этим уравнением и которые потом были экспериментально обнаружены.
Посмотрим на уравнение Максвелла. Несмотря на то, что поле порождается зарядами, на самом деле оно может существовать и в отсутствии зарядов. Рассмотрим такой случай:

$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = - rot\, E$

$div\, H = 0$

$div\, E = 0$

$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = rot\, H$

Запишем в терминах потенциалов.

$A' = A + grad\,(f + g)$

$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial(f+g)}{\partial t}$

При добавлении g скалярный потенциал не изменяется.

И попробуем добиться равенства: $divA = 0$
Если в начальный момент $divA = 0$, то тогда уравнение $div\, E = 0$ перейдет в уравнение:

$\frac{\partial}{\partial c}\frac{div\, d \quad divA}{\partial t} = 0$

Функцию g выберем таким образом, чтобы $div\, H' = 0$

$A'' = A' + grad\, g$

$divA' + div\, grad\, g = 0$

Это уравнение Пуассона для функции g.

Теперь рассмотрим $\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = rot\, H$ из него следует:

$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = - c^2 rot\, rot\, A + grad\, div\, A = \Delta A$ Это оператор Лапласа от А.
Проверим.

$R_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$

$R_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$

$$R_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \Delta A$$

Аналогичное уравнение можно получить для E

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \Delta H$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E$$

Это уравнение определяет распространение волн (волновое уравнение). Решение этого уравнения дает формула Кирхгофа. Также константа **c** имеет физический смысл и играет роль скорости распространения волн в пространстве. Именно это свойство уравнений Максвелла привело к теории относительности.

Рассмотрим более подробно одномерное движение. Предположим, что у нас есть волна, все параметры которой зависят только от координаты ***x***:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Тогда из уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Поэтому в плоской волне:

$$H_x \equiv 0$$

$$E_x \equiv 0$$

Электрическое и магнитные поля направлены перпендикулярно направлению движения волны.

Идем далее. Уравнение $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \Delta A$ запишется как: $\frac{\partial A_x}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$. Из этого следует, что $A_x = const$

Теперь возьмем уравнение $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

Это уравнение имеет решение: $E_y = \varphi(x + ct) + \Psi(x - ct)$.

Одна из этих функций представляет волну, которая распространяется вправо(с минусом), а вторая распространяется влево(с плюсом). Будем рассматривать одну из волн: $\Psi(x - ct)$.

$E_y = \Psi_y(x - ct)$

$E_z = \Psi_z(x - ct)$

Аналогично для H:

$H_y = \xi_y(x - ct)$

$H_z = \xi_z(x - ct)$

Подставим в уравнение Максвелла:

$$-\xi_y' = -\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Отсюда получаем: $\xi_y = \Psi_z$

Аналогично получаем : $\xi_z = -\Psi_y$

Получается следующее: $(H, E) = 0$

В плоской волне магнитное поле всегда ортогонально электрическому.