PROYECTO FINAL

Problema de llenado de Botellas: Cadenas de Márkov
Modelos Computacionales

Adriana Berenice Maldonado
Matricula: 19270904
Yadira Judith Cordero Morales
Matricula:19252862
Docente: Dra. Valeria Soto Mendoza

Universidad Autónoma de Coahuila Facultad de Sistemas

Índice

Descripción general del proyecto

Una cadena de Márkov se define como secuencias de variables aleatorias que representa los estados de un determinado sistema durante una serie de intervalos de tiempo, de tal modo que el estado del sistema en el intervalo actual depende únicamente de su estado en el intervalo inmediato anterior y no de los estados previos.

En muchas de las carreras de ingeniería, las cadenas de Márkov se han aplicado principalmente en el desarrollo de modelos probabilísticos para estimar el deterioro de pavimentos y de otros activos viales.

A continuación, se mostrará un claro ejemplo sobre el tema Cadenas De Márkov, en el cual se utilizaron los temas fundamentales aprendidos en clase, y así tener una visión de lo aprendido, de tal forma ser aplicado en la vida cotidiana.

El proyecto constará en analizar los resultados sobre el proceso de llenado de botellas de agua de una empresa que está ubicada en Ramos Arizpe. El proceso de llenado se puede describir mediante un modelo basado en cadenas de Márkov, que permite analizar y predecir el estado en el que se encuentra el sistema en cada etapa de llenado.

El proceso de llenado se divide en tres estados distintos: S0, S1 y S2. En el estado S0, no se ha llenado ninguna botella, mientras que en el estado S1 se han llenado de 1 a 9 botellas. Por último, el estado S2 representa la situación en la que se han llenado 10 o más botellas.

Utilizando las cadenas de Márkov y las reglas de transición establecidas, se pueden calcular estas probabilidades y obtener información importante sobre el comportamiento del proceso de llenado de botellas en la empresa de Ramos Arizpe.

Metas del proyecto

La meta de este proyecto es analizar y comprender el comportamiento del proceso de llenado de botellas, así como estimar y predecir la distribución de botellas en cada estado, identificar patrones y tendencias en el llenado de botellas a lo largo del tiempo, así como conocer la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado específico después de un cierto número de etapas de llenado.

En resumen, la meta principal de este proyecto escolar es utilizar el modelo de cadenas de Márkov, comprender y analizar el proceso de llenado de botellas, desarrollando habilidades analíticas y de presentación de resultados.

Así mismo, comprender el tema principal de cadenas de Márkov; que tiene como pequeña introducción como de uso probabilístico, ya que, son modelos que se utilizan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de algunos determinados sistemas. Además, se describen métodos alternativos para la obtención de la matriz de probabilidades de transición.

Definición y propiedades de las cadenas de Márkov

El modelo de cadenas de Márkov se refiere a un proceso estocástico con las siguientes propiedades:

- Es discreto en el tiempo.
- Se define en un espacio finito de estados posibles.
- El cambio entre estados está determinado por un conjunto de probabilidades.

Una cadena de Márkov es un proceso en el que:

$$\boxed{\text{Si el estado actual } X_n \text{ y los estados previos } X_1, \ldots, X_{n-1} \text{ son conocidos}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{La probabilidad del estado futuro } X_{n+1}}$$

- No depende de los estados anteriores $X_1, \ldots, X_{n-1}$
- Solamente depende del estado actual X_n

Es decir,

- Para $n = 1, 2, \ldots$
- Para cualquier sucesión de estados $s_1, \ldots, s_{n+1}$

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_n = s_n) = P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n)$$

Su aplicación principalmente es el desarrollo de modelos probabilísticos para estimar el tema de interés, en este proyecto se utilizará para crear una estimación de distintas probabilidades sobre el llenado de botellas

¿Qué es un proceso estocástico?

Una sucesión de observaciones $X_1, X_2, \ldots$ se denomina proceso estocástico

- Si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente
- Pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo.

X_1 : v.a. que define el estado inicial del proceso
X_n : v.a. que define el estado del proceso en el instante de tiempo n

Para cada posible valor del estado inicial s_1 y para cada uno de los sucesivos valores s_n de los estados $X_n, n = 2, 3, \ldots,$ especificamos:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_n = s_n$$

Descripción del modelo, parámetros, uso y ejemplo

El modelo consta una empresa en Ramos Arizpe tiene una máquina que llena botellas de agua durante todo el turno. El proceso de llenado se clasifica en tres estados: estado S0 si no se ha llenado ninguna botella, estado S1 si se han llenado de 1 a 9 botellas y estado S2 si se han llenado 10 o más botellas.

Para poder hacer el cálculo de las probabilidades agregamos las reglas que también nos ayudan al momento de definir la matriz de transición que usaremos en nuestra cadena de Márkov, las cuales son las siguientes:

- Si el sistema se encuentra en el estado S0, hay una probabilidad del 100% de pasar a la siguiente etapa.
- Si el sistema se encuentra en el estado S1, hay una probabilidad del 50% de permanecer en el mismo estado S1 y una probabilidad del 50% de avanzar al estado S2 en la siguiente etapa.
- Una vez que el sistema se encuentra en el estado S2, no hay posibilidad de regresar al estado S1. Existe una probabilidad del 100% de permanecer en el estado S2 en la siguiente etapa.

Por lo que todos estos datos se emplean para conocer distintas probabilidades, las cuales son las siguientes:

i) La probabilidad de que después de 5 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S2.

ii) La probabilidad de que después de 3 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S1, dado que en la etapa inicial se encontraba en el estado S0.

iii) La probabilidad de que después de 2 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S0, dado que en la primera etapa se encontraba en el estado S1 y en la segunda etapa se encontraba en el estado S2.

Imagen de referencia de la máquina de llenado de botellas

Código

```{r}
library(markovchain)
```

Proyecto Final: Problema de llenado de botellas

Una empresa en Ramos Arizpe tiene una máquina que llena botellas de agua durante todo el turno. El proceso de llenado se clasifica en tres estados: estado S0 si no se ha llenado ninguna botella, estado S1 si se han llenado de 1 a 9 botellas y estado S2 si se han llenado 10 o más botellas. Las siguientes reglas se aplican al proceso de llenado:

Si el sistema se encuentra en el estado S0, hay una probabilidad del 100% de pasar a la siguiente etapa.
Si el sistema se encuentra en el estado S1, hay una probabilidad del 50% de permanecer en el mismo estado S1 y una probabilidad del 50% de avanzar al estado S2 en la siguiente etapa.
Una vez que el sistema se encuentra en el estado S2, no hay posibilidad de regresar al estado S1. Existe una probabilidad del 100% de permanecer en el estado S2 en la siguiente etapa.
Se desean determinar las siguientes probabilidades:

$$
Estados\ \ \ S0\ \ \ \ S1\ \ \ \ S2\ \ \ \ \ \\
P=\
   \begin{bmatrix}
   0 & 1 & 0\\\
   0.5 & 0 & 0,5 \\
   0 & 0 & 1 \\
   \end{bmatrix}
$$

```{r}
#Esta cadena de Markov es para poderla imprimir en el plot
stateNames = c("S0","S1","S2")
mc<-new ("markovchain", transitionMatrix=matrix (c (0,1,0,
                                  0.5,0,0.5,
                                  0,0,1), byrow = TRUE, nrow = 3, dimnames = list (stateNames,
stateNames)))
```

```{r}
#Y esta matriz es para poder hacer las operaciones
P <- matrix (c (0, 1, 0,
           0.5, 0, 0.5,
           0, 0, 1), nrow = 3, byrow = TRUE,
         dimnames = list (c ("S0", "S1", "S2"), c ("S0", "S1", "S2")))
```

```{r}
#Ahora dibujamos el diagrama de transición de estados
plot(mc)
```

```{r}
#Usamos summary para ver el conjunto de datos que tenemos
summary(mc)
```

i) La probabilidad de que después de 5 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S2.

```{r}
#Calculamos la probabilidad
prob_i <- P %*% P %*% P %*% P %*% P
prob_i <- prob_i [1, 3]
prob_i
```

La probabilidad de que después de 5 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S2 es del 75%

ii) La probabilidad de que después de 3 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S1, dado que en la etapa inicial se encontraba en el estado S0.

```{r}
prob_ii <- P %*% P %*% P
prob_ii <- prob_ii [1,2]
prob_ii
```

La probabilidad de que después de 3 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S1, dado que estaba en el estado S0 es del 50%

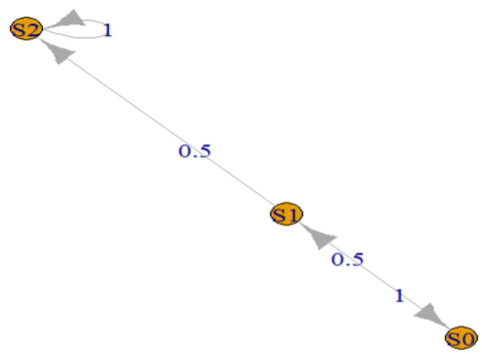
iii) La probabilidad de que después de 2 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S0, dado que en la primera etapa se encontraba en el estado S1 y en la segunda etapa se encontraba en el estado S2.

```{r}
prob_iii <- P %*% P
prob_iii <- prob_iii [2, 1] * P [3, 2]
prob_iii
```

La probabilidad de que después de 2 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S0, dado que en la primera etapa se encontraba en el estado S1 y en la segunda etapa se encontraba en el estado S2 es 0, ya que dado el sistema no hay forma de que el sistema pueda volver al estado S0 en la siguiente etapa

Pantallas de datos y ejecución

El modelo emplea una cadena de Márkov con el cual se saca la probabilidad de que el estado del llenado de botellas cambie y se encuentre en uno diferente dependiendo de cuantas etapas de llenado se hagan, aquí se muestran las pantallas de ejecución.



Cadena de Márkov donde se muestran cómo es la interacción

```
i) La probabilidad de que después de 5 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S2.
```{r}
#Calculamos la distribucion estacionaria
stationary_dist <- steadyStates(mc)

#Usamos los steadyStates para calcular la probabilidad
prob_i <- P %*% P %*% P %*% P %*% P
prob_i <- prob_i[1, 3]
prob_i
```

 [1] 0.75

La probabilidad de que después de 5 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S2 es del 75%
```

Resultado de la primera probabilidad

```
ii) La probabilidad de que después de 3 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S1, dado que en la etapa inicial se encontraba en el estado S0.
```{r}
prob_ii <- P %*% P %*% P
prob_ii <- prob_ii[1,2]
prob_ii
```

 [1] 0.5

La probabilidad de que después de 3 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S1, dado que estaba en el estado S0 es del 50%
```

Resultado de la segunda probabilidad

```
iii) La probabilidad de que después de 2 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S0, dado que en la primera etapa se encontraba en el estado S1 y en la segunda etapa se encontraba en el estado S2.
```{r}
prob_iii <- P %*% P
prob_iii <- prob_iii[2, 1] * P[3, 2]
prob_iii
```

 [1] 0

La probabilidad de que después de 2 etapas de llenado el sistema se encuentre en el estado S0, dado que en la primera etapa se encontraba en el estado S1 y en la segunda etapa se encontraba en el estado S2 es 0, ya que dado el sistema no hay forma de que el sistema pueda volver al estado S0 en la siguiente etapa
(Top Level) ÷   R Markdown ÷
```

Resultado de la tercera probabilidad

Conclusión

En este proyecto, hemos analizado el proceso de llenado de botellas de agua en una empresa de Ramos Arizpe utilizando conceptos de cadenas de Márkov. Definiendo los estados y reglas de transición, hemos calculado diferentes probabilidades relacionadas con el estado del sistema después de un número determinado de etapas.

Llegamos a la conclusión que las cadenas de Márkov son una herramienta muy útil para crear cualquier tipo de predicciones, en el caso de nuestro equipo nos ayudó para conocer cómo funcionan las probabilidades de que suceda el llenado de botellas, los resultados obtenidos nos brindan una comprensión cuantitativa de las probabilidades asociadas con el proceso de llenado de botellas de agua. Esta información puede ser útil para tomar decisiones y planificar la producción en la empresa, así como para comprender mejor el comportamiento del sistema en diferentes etapas de llenado.

También ayuda en nuestro desarrollo como futuros ingenieros, para describir y analizar sistemas en los que un evento depende únicamente del estado actual y no de eventos anteriores. Por otro lado, podemos utilizar estos modelos en diversas áreas, como la teoría de juegos, economía e la informática.

Las cadenas de Márkov tienen varias propiedades interesantes y fueron desarrolladas en este proyecto, como un estado futuro y puede simplificar análisis de problemas.

Gracias a este proyecto es posible obtener información sobre comportamientos a lo largo de varios sistemas con sus evoluciones.

En resumen, este proyecto nos ha permitido aplicar conceptos de cadenas de Márkov para analizar y calcular probabilidades en el proceso de llenado de botellas de agua.

Referencias

Sucesión De Observaciones X, U. (n.d.). *Capítulo 10 Cadenas de Márkov PROCESOS ESTOCÁSTICOS*. https://www.ugr.es/~bioestad/_private/cpfund10.pdf

Resumen boletines. (n.d.). Instituto Mexicano Del Transporte. https://imt.mx/resumen-boletines.html?IdArticulo=391&IdBoletin=148

User, S. (n.d.). *Universidad Nacional de Colombia: Clase 23. Aplicaciones: Cadenas de Markov.* https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/25-clase-23-aplicaciones-cadenas-de-markov.html