# Seminar 7. Calcul diferențial.

## Derivabilitate funcțiilor de o singură variabilă

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'$.

**Definiția 1**

Spunem că funcția $f$ este **derivabilă în punctul** $a$, dacă există şi este finită limita

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Definiția 2**

Spunem că funcția $f$ este **derivabilă pe A**, dacă funcția $f$ este derivabilă în fiecare punct din $A$.

**Definiția 3**

Spunem că funcția $f$ este **de clasă** $C^k$ pe intervalul $A$, dacă funcția $f$ are toate derivatele până la ordinul $k$ pe $A$ şi derivata de ordinul $k$ este continuă pe $A$.

**Teorema 1 - Formula lui Leibniz**

Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt de $n$ ori derivabile pe $A$, atunci şi $f \cdot g$ este de $n$ ori derivabilă pe $A$ şi

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + ... + C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + ...+ \\ + C_n^{n-1} f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + f(x) \cdot g^{(n)}(x),$$

oricare ar fi $x \in A$, unde $C_n^k,\ k = \overline{0, n}$ sunt coeficienții binomiali.

# Derivate parțiale ale funcțiilor de mai multe variabile reale

**Definiția 1**

Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ o funcție şi $a = (a_1, a_2, ..., a_p)$ din interiorul mulțimii $A$. Spunem că $f$ este **derivabilă parțial** în raport cu variabila $x_i,\ i = \overline{1,p}$, în punctul $a$, dacă există şi este finită limita

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)}{x_i - a_i},$$

notată prin $f'_{x_i}(a)$. În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ este numită **derivata parțială** a funcției $f$ în $a$ în raport cu variabila $x_i$.

**Definiția 2**

Spunem că funcția $f$ este **derivabilă parțial pe mulțimea** $A$, dacă funcția $f$ este derivabilă parțial în fiecare punct din $A$.

**Definiția 3**

Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este **de clasă** $C^k$ pe intervalul $A$, dacă funcția $f$ are toate derivatele parțiale până la ordinul $k$ pe $A$ şi derivatele parțiale de ordinul $k$ sunt continue pe $A$.

**Definiția 4**

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție cu derivatele parțiale continue. Aplicația

$$\nabla f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,$$

$$(\nabla f)(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right),$$

oricare ar fi $a \in A$, se numeşte **gradientul lui** $f$ **în** $a$.

**Definiția 5**

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă şi $f = (f_1, f_2, ..., f_k) : A \to \mathbb{R}$ o funcție cu derivatele parțiale continue. Aplicația

$$div f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

$$(div f)(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a),$$

oricare ar fi $a \in A$, se numeşte **divergența lui** $f$ **în** $a$.

**Definiția 6**

Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă şi $f = (P, Q, R) : A \to \mathbb{R}^3$ o funcție cu derivatele parțiale continue. Aplicația

$$rot f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$(rot f)(a) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(a),$$

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^3$, se numeşte **rotorul lui** $f$ **în** $a$.

**Definiția 7**

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă, $a \in A$ şi $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \to \mathbb{R}^m$,

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_k), f_2(x_1, x_2, ..., x_k), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_k)),$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix},$$

se numeşte **matricea jacobiană a funcției** $f$ **în punctul** $a$.

# Exerciții propuse

1. Calculați derivatele de ordin unu și doi ale funcțiilor:

   (a) $f(x) = (1+x)^\alpha$;

   (b) $f(x) = (1+x^2)\arctan x$.

2. Găsiți derivata de ordin $n$ pentru funcția: $f(x) = \ln(2x+1)$.

3. Calculați $f^{(12)}(x)$ unde $f(x) = e^{2x}x^3$.

4. Calculați derivatele parțiale de ordin unu și doi în următoarele cazuri:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 5xy^2 - 4xy^4 + y^5$;

   (b) $f(x,y,z) = x^2yz + \alpha x^2z^2 - 2x^3y^3$.

5. Aflați matricea Jacobi și determinantul său(dacă este posibil):

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z) = (x^3 - xy^\alpha z, x^2 + \alpha yz^2 - \beta z^2), \quad \alpha, \beta > 1.$$

6. Arătați că funcția

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   este continuă în $(0,0)$, dar $f$ nu are derivate parțiale în raport cu $x$ în $(0,0)$.

7. Arătați că funcția

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   are derivate în $(0,0)$ în raport cu vectorul $v = (v_1, v_2)$, dar $f$ nu este continuă în $(0,0)$.

8. Demonstrați că funcția $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$ verifică următoarea ecuație:

$$xy^2\frac{\partial f}{\partial x} + x^2y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+y^2)f(x,y).$$

9. Calculați gradientul funcției $f(x,y,z) = xy + 2yz$ în punctul $a = (2,3,-4)$.

10. Calculați $div(F)$ și $rot(F)$ unde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (x+z, y+z, x^2+z)$.