§. 3.4 Stabilirea modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme

Una dintre problemele care se pune în mod frecvent cu privire la conexiunile de sisteme este stabilirea MM al unei conexiuni de sisteme atunci când se cunosc MM ale sistemelor componente. În acest context vorbim despre *problema stabilirii modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme*.

Obiectul paragrafului este prezentarea unor metode de stabilire a modelelor conexiunilor. În continuare ne referim numai la situaţia în care sistemele interconectate sunt liniare şi separabile în raport cu modul de interconectare. *Calculul se poate efectua cu MM în domeniul timp sau cu MM operaţionale*. *De fiecare dată, se operează cu variabile unificate*. Din punct de vedere matematic avem de a face cu o problemă de eliminare.

1. Stabilirea MM-ISI pentru conexiunile fundamentale [1].

Conexiunile fundamentale sunt conexiunile serie, derivaţie şi cu reacţie. Problema stabilirii MM-ISI ale acestora se pune astfel:

Se cunosc: *MM-ISI ale sistemelor (strict cauzale) interconectate*:

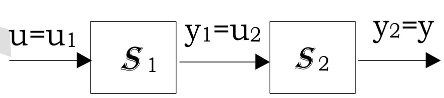
$$(S_1):\begin{cases} x_1' = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (S_2):\begin{cases} x_2' = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Se cere: MM-ISI al conexiunii

$$(S):\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (2)$$

Pentru rezolvare ne folosim de *principiului agregării stărilor* potrivit căruia mulţimea variabilelor de stare ale conexiunii este formată din ansamblul mărimilor de stare ale subsistemelor componente. În consecinţă, *conexiunea are vectorul de stare* $x = [x_1^T \quad x_2^T]^T$, *iar ordinul sistemului rezultat este egal cu suma ordinelor sistemelor componente*.

- MM-ISI al conexiunii serie din figură se obţine eliminând toate variabilele diferite de intrarea u, ieșirea y și vectorul de stare x. Succesiv obţinem:



$$x_1' = A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1u$$
$$x_2' = A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2y_1 = A_2x_2 + B_2C_1x_1$$
$$y = y_2 = C_2x_2$$

Matriceal, rezultatul ia forma:

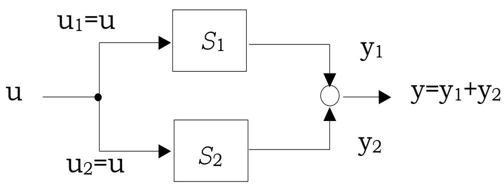
$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}} \qquad (3)$$

[1] Metoda de calcul în acest caz constă în efectuarea de substituţii succesive şi aducerea rezultatului final la forma canonică a MM-ISI.

Polinomul caracteristic al sistemului este egal cu produsul polinoamelor caracteristice $\mu_{A_1}(\lambda)$ şi $\mu_{A_2}(\lambda)$ ale sistemelor (1):

$$\boxed{\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & 0 \\ -B_2C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda)\cdot\mu_{A_2}(\lambda).} \qquad (4)$$

- Pentru conexiunea derivaţie rezultă



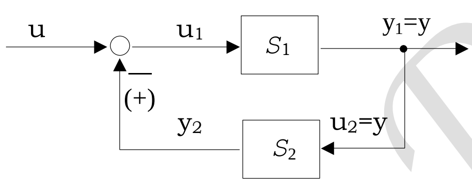
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (5)$$

Şi în acest caz este valabil rezultatul final din (4)

- În cazul conexiunii cu reacţie eliminările se efectuează astfel:

$$\begin{aligned} x_1' &= A_1x_1 + B_1u_1 = A_1x_1 + B_1(u \mp y_2) = A_1x_1 + B_1u \mp B_1C_2x_2 \\ x_2' &= A_2x_2 + B_2u_2 = A_2x_2 + B_2y = A_2x_2 + B_2y_1 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 \\ y &= y_1 = C_1x_1 \end{aligned}$$

Sub formă matriceală ecuaţiile devin



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & \mp B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (6)$$

Polinomul caracteristic al sistemului este:

$$\boxed{\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - A_1 & \pm B_1C_2 \\ -B_2C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda)\cdot\mu_{A_2}(\lambda)\cdot|I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)|.} \qquad (7)$$

În urma dezvoltării determinantului din ultima expresie din (7) polinoamele $\mu_{A_1}(\lambda)$ *şi* $\mu_{A_2}(\lambda)$ *se simplifică*. Deci valorile proprii ale conexiunii cu recție sunt date numai de numărătorul determinantului.

2. Algebra schemelor bloc (MM-II)

Prin algebra schemelor bloc se înţelege *un ansamblu de reguli destinate calculului matricelor şi funcţiilor de transfer ale sistemelor complexe atunci când se cunosc: schemele bloc ale sistemelor complexe precum şi matricele şi funcţiile de transfer ale blocurilor componente*. Se disting două categorii de reguli:

- reguli de reducere,
- reguli de reconfigurare.

Regulile de reducere servesc pentru reducerea numărului de blocuri dintr-o schemă bloc iniţială prin înlocuirea diferitelor tipuri de conexiuni printr-un singur bloc având aceeaşi funcţie sau matrice de transfer ca şi conexiunea.

Regulile de reconfigurare servesc pentru modificarea unei scheme bloc date astfel încât să poată fi aplicate regulile de reducere.

Spre deosebire de regulile de reducere care, în principiu, nu introduc modificări sistemice, aplicarea regulilor de reconfigurare se soldează întotdeauna cu modificări sistemice (de exemplu: rezultă un sistem de ordin mai mare) care păstrează neschimbate doar dependenţele intrare-ieşire.

- În continuare se prezintă *trei reguli de reducere*. Ele se referă la conexiunile fundamentale care au făcut obiectul secţiunii anterioare. Se presupun cunoscute matricea de transfer $H_1(\lambda)$ a sistemului $\mathcal{S}_1$ şi matricea de transfer $H_2(\lambda)$ a sistemului $\mathcal{S}_2$. Trebuie determinate matricele de transfer ale conexiunilor.

1°. În *cazul conexiunii serie* :

$$y(\lambda)=y_2(\lambda)=H_2(\lambda)u_2(\lambda)=H_2(\lambda)y_1(\lambda)=H_2(\lambda)H_1(\lambda)u_1(\lambda)=H_2(\lambda)H_1(\lambda)u(\lambda)\,.$$

Comparând acest rezultat cu relaţia de definire a matricei de transfer, $y(\lambda)=H(\lambda)\cdot u(\lambda)$, obţinem următoarea formulă de calcul a matricei de transfer a conexiunii serie a două subsisteme:

$$H(\lambda)=H_2(\lambda)\cdot H_1(\lambda)\ . \qquad (8)$$

Pentru q subsisteme înseriate având f.d.t. $H_i(\lambda)$, i=1;q se obţine formula generală:

$$H(\lambda)=\prod_{i=q}^{1} H_i(\lambda)\ . \qquad (9)$$

Trebuie să observăm că matricea de transfer a conexiunii este egală cu produsul matricelor de transfer ale subsistemelor componente *luate în ordinea de la ieșire spre intrare*. Întrucât calculul a fost făcut pentru cazul MIMO produsul nu este comutativ. Dacă cele q subsisteme sunt de tip SISO atunci, matricele de transfer se reduc la f.d.t., iar produsele din (8) şi (9) sunt comutative.

2°. Pentru *conexiunea derivaţie* se obţine matricea de transfer

$$H(\lambda)=H_1(\lambda)+H_2(\lambda)\ . \qquad (10)$$

Pentru cazul a q subsisteme legate în paralel formula devine:

$$H(\lambda)=\sum_{i=1}^{q} H_i(\lambda)\ . \qquad (11)$$

3°. Pentru *conexiunea cu reacţie* matricea de transfer a conexiunii se determină *considerând ca punct de plecare exprimarea mărimii de ieşire $y(\lambda)$ de pe calea directă şi făcând apoi substituţii succesive până când se obţine un rezultat în funcţie tocmai de $y(\lambda)$ şi de mărimea de intrare $u(\lambda)$*:

$$y(\lambda)=y_1(\lambda)=H_1(\lambda)\cdot u_1(\lambda)=H_1(\lambda)\cdot(u(\lambda)\mp y_2(\lambda))=H_1(\lambda)[u(\lambda)\mp H_2(\lambda)u_2(\lambda)]=H_1(\lambda)[u(\lambda)\mp H_2(\lambda)y(\lambda)]\,.$$

De aici deducem:

$$[I\pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]y(\lambda)=H_1(\lambda)u(\lambda)\rightarrow y(\lambda)=[I\pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda)u(\lambda)\,.$$

Identificând acest rezultat cu formula de definire $y(\lambda)=H(\lambda)u(\lambda)$, obţinem

$$H(\lambda)=[I\pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda)\ . \qquad (12)$$

Dacă $\mathcal{S}_1$ şi $\mathcal{S}_2$ sunt de tip SISO, atunci H_1 şi H_2 sunt funcţii de transfer, deci expresii scalare. Rezultă

$$H(\lambda)=\frac{H_1(\lambda)}{1\pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)}\ . \qquad (13)$$

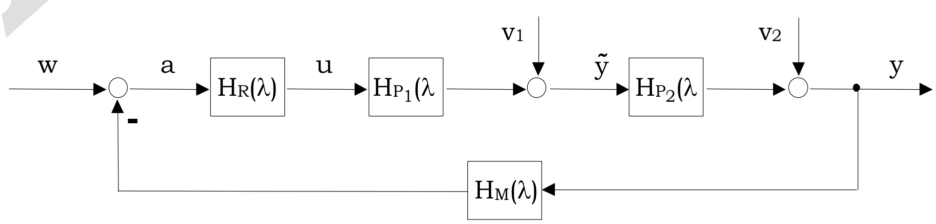
Notăm funcţia de transfer a căii directe $u\rightarrow u_1\rightarrow S_1\rightarrow y$, cu H_d, iar a canalului $u\rightarrow y_1\rightarrow \mathcal{S}_1\rightarrow y\rightarrow \mathcal{S}_2\rightarrow y_2$, denumit sistem deschis, cu $\tilde{H}$. În consecinţă, avem:

$$\begin{aligned}H_d(\lambda)&=H_1(\lambda)\\ \tilde{H}(\lambda)&=H_1(\lambda)H_2(\lambda)\end{aligned}\quad\rightarrow\quad H(\lambda)=\frac{H_d(\lambda)}{1\pm\tilde{H}(\lambda)}\ . \qquad (14)$$

În formulele de calcul ale matricelor şi funcţiilor de transfer pentru conexiunea cu reacţie *semnul* (+) *corespunde reacţiei negative, iar semnul* (–) *corespunde reacţiei pozitive*.

În cazul sistemelor liniare cu mai multe mărimi de intrare dependenţa intrare-ieşire se poate obţine în domeniul imaginilor prin superpoziţie, folosind regulile de reducere de mai sus.

Exemplu: *Să se stabilească dependenţa intrare - ieşire în domeniul imaginilor pentru sistemul (de reglare cu un grad de libertate) din figură, sistemul având orientarea* $\{w, v_1, v_2\}\rightarrow y$.



***Soluţie**: Sistemul fiind liniar problema se rezolvă aplicând principiul superpoziţiei. Fie $H_w(\lambda)$, $H_{v1}(\lambda)$ şi $H_{v2}(\lambda)$ f.d.t. prin care se exprimă influenţa mărimilor de intrare asupra mărimii de ieşire. Ele se obţin din schema bloc dată, prin particularizări, astfel:*

$$H_w(\lambda) = \left.\frac{y(\lambda)}{w(\lambda)}\right|_{\substack{v_1(\lambda)=0\\ v_2(\lambda)=0}} = \frac{H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \tag{15.1}$$

$$\begin{aligned} H_{v_1}(\lambda) &= \left.\frac{y(\lambda)}{v_1(\lambda)}\right|_{\substack{w(\lambda)=0\\ v_2(\lambda)=0}} = \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 - H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)(-1)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} = \\ &= \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} \end{aligned} \tag{15.2}$$

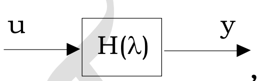
$$\begin{aligned} H_{v_2}(\lambda) &= \left.\frac{y(\lambda)}{v_2(\lambda)}\right|_{\substack{w(\lambda)=0\\ v_1(\lambda)=0}} = \frac{1}{1 - H_M(\lambda)(-1)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_R(\lambda)} = \\ &= \frac{1}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \end{aligned} \tag{15.3}$$

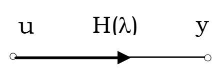
Aplicând principiul superpoziţiei, rezultă dependenţa intrare-ieşire:

$$y(\lambda) = H_w(\lambda)w(\lambda) + H_{v_1}(\lambda)v_1(\lambda) + H_{v_2}(\lambda)v_2(\lambda)\,. \tag{16}$$

3. Regula lui Mason (MM-II)

Un mijloc de calcul facil, alternativ algebrei schemelor bloc, îl reprezintă *folosirea grafelor de fluenţă*.[2]

Considerăm numai cazul sistemelor de tip SISO. Schemele bloc ale acestora se pot înlocui prin grafe care pot fi citite şi utilizate cu uşurinţă. Astfel, dependenţei $y(\lambda) = H(\lambda)\cdot u(\lambda)$, îi este ataşată schema bloc 

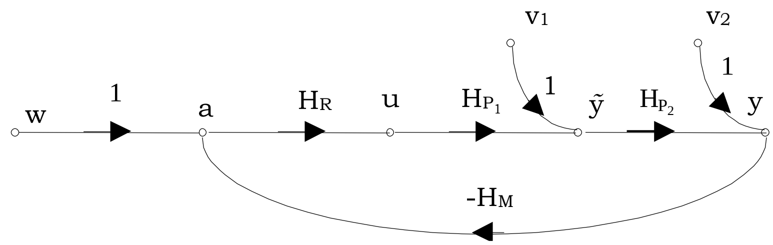
, respectiv graful de fluenţă 

. Spre deosebire de schema bloc, în care mărimilor de intrare şi de ieşire li se asociază săgeţi, în cazul grafului celor două mărimi li se asociază noduri. Funcţiei de transfer din interiorul blocului îi corespunde în cazul grafului *transmitanţa arcului* care leagă nodurile.

Odată înlocuită o schemă bloc printr-un graf sau odată ataşat un graf unui model matematic scris sub formă operaţională, funcţiile de transfer care interesează pot fi calculate folosind aşa-numita *regulă a lui Mason*.

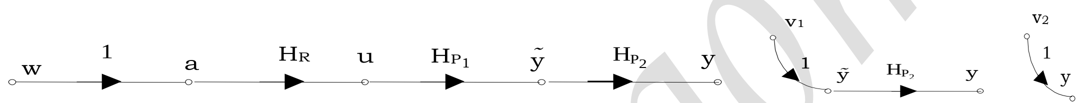
[2] Graful reprezintă o *reţea de ramuri dirijate* interconectate în puncte numite *noduri* şi care definesc în mod univoc un sistem de ecuaţii algebrice liniare. Fiecare nod corespunde unei variabile. Fiecare ramură are asociată o anumită mărime numită *transmitanţa ramurii*. Un nod din care toate ramurile diverg (au sensuri de plecare din nod) se numeşte *nod de intrare*. Un nod în care toate ramurile converg (au sensuri de intrare în nod) se numeşte *nod de ieşire*. Celelalte noduri, în care apar atât ramuri convergente cât şi ramuri divergente, se numesc *noduri ordinare*. Nodurile de intrare reprezintă variabilele independente ale sistemului, iar celelalte noduri variabilele dependente (de ieşire sau interne). Semnalul dintr-un nod ordinar sau dintr-un nod de ieşire este egal cu suma produselor dintre transmitanţele ramurilor convergente şi semnalele nodurilor din care aceste ramuri pleacă. Semnalul dintr-un nod de intrare se consideră dat.

În figură este ilustrat graful echivalent schemei bloc din exemplul din secţiunea anterioară:

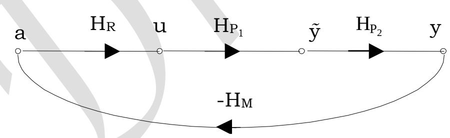


Terminologia asociată utilizării formulei lui Mason este următoarea:

- *Cale elementară* - un subgraf în circuit deschis alcătuit din arce simple care leagă un nod de intrare de un nod de ieşire fără a utiliza un acelaşi nod de două ori. ***Transmitanţa unei căi elementare este egală cu produsul transmitanţelor arcelor componente***. În graful din figură apar trei căi elementare;;



- *Buclă* - un subgraf în circuit închis, alcătuit din arce simple, care porneşte dintr-un nod şi revine în acelaşi nod fără a parcurge orice alt nod de două ori. *Transmitanţa unei bucle este egală cu produsul transmitanţelor arcelor componente*. În figură apare o singură buclă.;



- *Elemente confluente ale unui graf* - două căi elementare, două bucle sau o cale elementară şi o buclă care au în comun cel puţin un nod.
- *Elemente disjuncte ale unui graf* – două bucle, două căi elementare, o buclă şi o cale elementară care diferă cel puţin printr-un arc.

Notăm cu T_i, i = 1; n_{ce} - transmitanţa unei căii elementare „i” care leagă o intrare u de o ieşire y şi cu T'_j, j = 1; n_b transmitanţa unei bucle oarecari „j” a grafului. Cu n_{ce} şi n_b s-au notat, respectiv, numărul căilor elementare disjuncte de la u la y şi numărul buclelor disjuncte din graf.

Formula lui Mason furnizează funcţia de transfer corespunzătoare canalului care leagă o mărime (un nod) de intrare u de o mărime (un nod) de ieşire y . Ea are următoarea expresie:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{ce}} T_i \Delta'_i}{\Delta} \qquad (17)$$

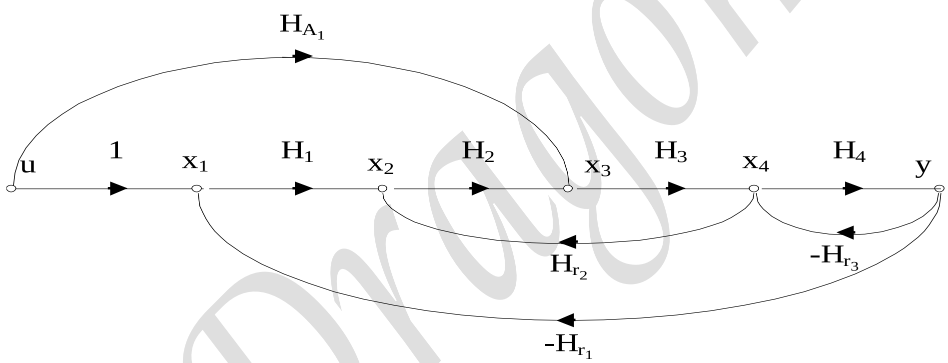
În această formulă[3]

$$\Delta = 1 - \sum T_i' + \sum T_i' T_j' - \sum T_i' T_j' T_k' + \ldots \qquad (18)$$

este ***determinantul grafului***, iar Δ'_i ***minorul asociat căii elementare*** „i”. Minorul Δ'_i se obţine din Δ înlocuind în expresia acestuia cu 0 toate transmitanţele corespunzătoare buclelor confluente cu calea elementară „i”.

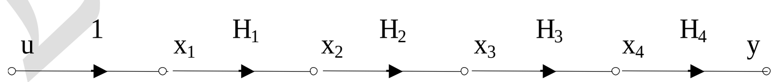
În (18) $\sum T_i' = \sum_{i=1}^{n_b} T'$ reprezintă suma transmitanţelor tuturor buclelor din graf, $\sum T_i' T_j'$ suma produselor transmitanţelor tuturor perechilor de bucle neconfluente din graf, iar $\sum T_i' T_j' T_k'$ suma produselor transmitanţelor tuturor tripletelor de bucle neconfluente două câte două din graf ş.a.m.d.

Exemplul : *Să se calculeze f.d.t. pentru un sistem cu orientarea* $u \to y$ *redat de graful din figură (s-a omis scrierea argumentului operaţional* λ*).*

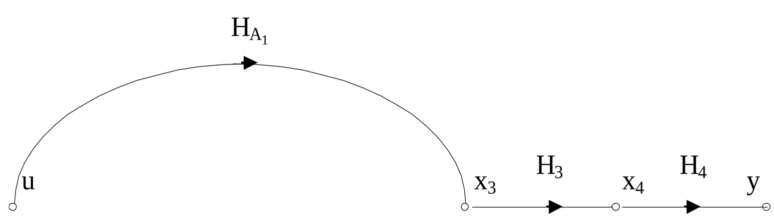


Soluţie : *Nodul de intrare şi nodul de ieşire sunt interconectate prin intermediul a două căi elementare care diferă prin porţiunile cuprinse între nodurile u şi* x_3*. Ele sunt:*

Calea elementară 1 cu transmitanţa $T_1 = H_1 H_2 H_3 H_4$ *:*



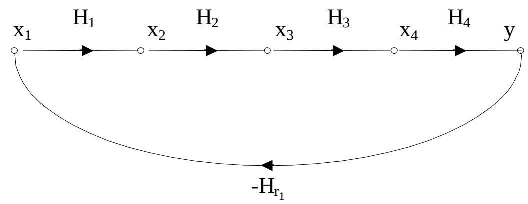
Calea elementară 2 cu transmitanţa $T_2 = H_{A_1} H_3 H_4$ *:*



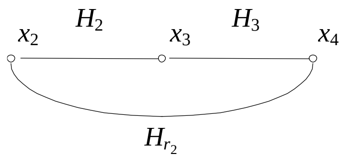
[3] De observat alternanţa semnelor în formula (18) !

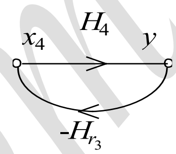
Graful conţine trei bucle:

Bucla 1 are transmitanţa $T_1' = -H_1H_2H_3H_4H_{r_1}$ *:*



Buclele 2 şi 3 au transmitanţele $T_2' = H_2H_3H_{r2}$, $T_3' = -H_4H_{r3}$:





Întrucât toate perechile de bucle sunt confluente determinantul sistemului este $\Delta = 1-(T_1'+T_2'+T_3')$. *Totodată, buclele fiind confluente cu ambele căi elementare minorii asociaţi acestora sunt egali cu 1:* $\Delta_1' = 1$, $\Delta_2' = 1$.

Folosind formula lui Mason rezultă:

$$H(\lambda) = \frac{T_1\Delta_1' + T_2\Delta_2'}{1-T_1'-T_2'-T_3'} = \frac{(H_1H_2+H_A)H_3H_4}{1+H_1H_2H_3H_4H_{r_1} - H_2H_3H_{r_2} + H_4H_{r_3}} .$$