

5. Semnale armonice reale și semnale armonice complexe

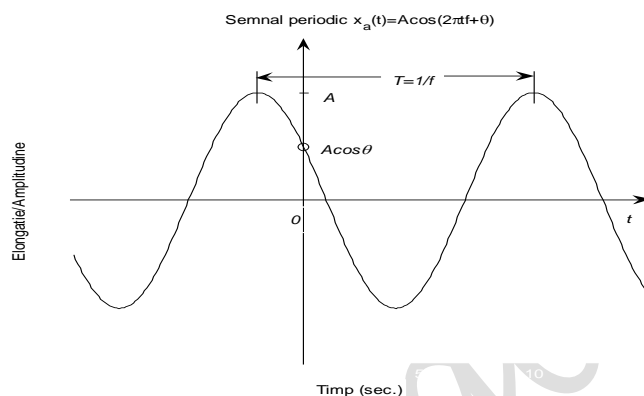
În contextul reprezentării semnalelor periodice prin spectre, în secțiunea anterioară s-au folosit semnale armonice reale. Secțiunea de față extinde discuția referitoare la semnale cu semnalele armonice complexe.

Semnalele sau oscilațiile armonice reale cu care am operat au fost *semnalul periodic sinusoidal bilateral*

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

și *semnalul cosinusoidal bilateral* (v. Figura de mai jos ¹):

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$



Semnalul armonic (2)

$x(t)$ este valoarea momentană a semnalelor. Parametrul x_0 este amplitudinea acestora. Pentru ambele semnale sunt valabile relațiile $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $T = \frac{1}{f}$, în care f reprezintă **frecvența**, ω **pulsția** iar T **perioada** semnalelor.²

De asemenea, în cadrul reprezentării prin serii Fourier s-a operat cu *semnalul armonic complex*:

$$\bar{x}(t) = x_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (3)$$

Semnalele armonice reale pot fi rescrise ca sume de semnale armonice complexe de forma:

$$x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \Im \{ x_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \} = \frac{x_0}{2j} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} - \frac{x_0}{2j} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (4.1)$$

sau

$$x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{x_0}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} + \frac{x_0}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}, \quad t \in \mathbf{R},$$

respectiv

$$x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \Re \{ x_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \} = \frac{x_0}{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \frac{x_0}{2} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4.2)$$

Un semnal armonic complex se reprezintă grafic printr-un vector care se rotește în jurul originii cu viteza unghiulară ω . Un astfel de vector se numește **fazor**. Din (4.1) și (4.2) se observă că un semnal armonic real se

¹ În figură în loc de φ apare notația θ , iar în loc de x_0 apare notația A .

² Unitățile de măsură ale mărimilor care intervin în argumentul funcției sinusoidale sunt: **radianul** (notat în mod curent „rad”) pentru cantitatea $\omega t + \varphi$, numită **fază**, și cantitatea φ numită **fază inițială**, **secunda** (notații alternative „s” sau „sec”) pentru **perioada** T , „**secunda**”⁻¹, denumită în mod uzual Hertz (notații alternative „Hz”, „s⁻¹” sau „sec⁻¹”) pentru **frecvența** f , respectiv „**secunda**”⁻¹, (notații alternative „rad/secundă” etc.) pentru **pulsția** ω . De la caz la caz, în funcție de unitatea de exprimare a timpului, se utilizează și alte unități de măsură.

obține din doi fazori de amplitudine $\frac{x_0}{2}$ care se rotesc în opoziție, cu viteză unghiulară ω , plecând din poziții inițiale bine precizate. Sensul pozitiv fiind cel trigonometric, rezultă că fazorul de viteză unghiulară ω se rotește în sens trigonometric, iar cel de pulsație $-\omega$ în sens orar.

Cu privire la semnalele armonice sunt importante următoarele aspecte utilizate în aplicațiile practice:

- Semnalele armonice de perioade diferite sunt liniar independente.
- Dacă frecvența tinde spre valoarea $f = 0$ se obține o oscilație de perioadă infinită $T = \infty$.
- Din punct de vedere matematic putem considera că f și ω pot lua orice valori reale, atât negative cât și pozitive.

6. Semnale armonice numerice (digitale)

În secțiunea 5 din § 1.1 s-a introdus noțiunea de semnal eșantionat, folosită în principal în accepțiunea de semnal în timp discret provenit prin eșantionarea unui semnal în timp continuu la momente discrete. În acest context, rescriem semnalele armonice reale din secțiunea anterioară sub formele

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \cdot \sin(2\pi f t + \varphi) = x_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) = x_0 \cdot \cos(2\pi f t + \varphi) = x_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Discretizând timpul din aceste relații, cu pasul constant h , la momentele

$$t_k = k \cdot h, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (3)$$

obținem șirurile de eșantioane:

$$x(kh) = x_0 \cdot \sin(\omega kh + \varphi) = x_0 \cdot \sin(2\pi f kh + \varphi) = x_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} kh + \varphi\right), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (4.1)$$

$$x(kh) = x_0 \cdot \cos(\omega kh + \varphi) = x_0 \cdot \cos(2\pi f kh + \varphi) = x_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} kh + \varphi\right), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.2)$$

Cu notațiile

$$\tilde{\omega} = \omega h = \frac{2\pi}{T} h, \quad \tilde{f} = \frac{\tilde{\omega}}{2\pi} = fh, \quad \text{și } x(kh) = x[k], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (5)$$

formulele (4.1) și (4.2), asociate unor semnale în timp discret, $\{x[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$, devin

$$x[k] = x_0 \cdot \sin(\tilde{\omega} k + \varphi) = x_0 \cdot \sin(2\pi \tilde{f} k + \varphi), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (6.1)$$

$$x[k] = x_0 \cdot \cos(\tilde{\omega} k + \varphi) = x_0 \cdot \cos(2\pi \tilde{f} k + \varphi), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (6.2)$$

Semnalele (6) se numesc *semnale armonice numerice (digitale)*. Cantitatea $\tilde{\omega}$, denumită *pulsație discretă* (discrete frequency), se măsoară în radiani (rad sau rad/eșantion). În figura următoare este reprezentat grafic un semnal de pulsație discretă $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{6} \text{ rad / eșantion}$, adică cu frecvența discretă $\tilde{f} = \frac{1}{12}$, și defazajul $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Funcția $x(e^{j\tilde{\omega}})$ fiind periodică de perioadă 2π , este suficientă definirea sa pe intervalul $[-\pi, \pi)$ (interval de bază). Deoarece variabila $\tilde{\omega}$ poate lua o infinitate de valori pe acest interval, o implementare a formulei (1) pe o mașină de calcul nu este posibilă. Pe de altă parte, nici numărul infinit de valori ale semnalului $\{x[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ nu este implementabil pe o mașină de calcul.

În acest context, pentru a realiza analize în domeniul frecvență, în locul transformatei Fourier în timp discret (1) se utilizează *transformată Fourier discretă* (DFT – *Discret Fourier Transform*) la care ne referim în continuare. Definirea ei are în vedere faptul că *semnalele numerice cu care operăm în practică se obțin întotdeauna prin eșantionare pe intervale de timp finite*. Ca urmare, în locul semnalului $\{x[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ cu număr infinit de valori suntem îndreptățiți să considerăm ca punct de plecare semnalul $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$ cu un număr, finit, de p valori. Cele p valori pot fi asociate, de exemplu, unui număr de p momente de eșantionare succesive echidistante, $0, h, \dots, (p-1) \cdot h$, care acoperă uniform intervalul de timp finit al unui semnal $x(t)$.

Aplicând transformata Fourier în timp discret (1) semnalului $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$ obținem

$$x(e^{j\tilde{\omega}}) = \sum_{k=0}^{p-1} x[k] e^{-jk\tilde{\omega}}. \quad (5)$$

Prin discretizarea uniformă a variabilei $\tilde{\omega}$ pe intervalul $[0, 2\pi)$ prin p puncte⁴, $\tilde{\omega}_p = 2\pi \frac{n}{p}$, $n = 0, 1, \dots, p-1$,

din (5) rezultă șirul cu p valori ale lui $x(e^{j\tilde{\omega}})$:

$$\{X[n]\}_{n \in \{0, 1, \dots, p-1\}} \text{ cu } X[n] = x(e^{j\tilde{\omega}_p}) = \sum_{k=0}^{p-1} x[k] e^{-jk2\pi \frac{n}{p}}, \quad n = 0, 1, \dots, p-1. \quad (6)$$

Acest șir, $\{X[n]\}_{n \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$, se numește *transformata Fourier discretă a semnalului* $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$. Inversa transformatei Fourier discrete este:

$$x[k] = \frac{1}{p} \cdot \sum_{n=0}^{p-1} X[n] e^{+jk2\pi \frac{n}{p}}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (7)$$

Se observă că relațiile (6) și (7) leagă vectorii $x_p = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[p-1]]^T$ și $X_p = [X[0] \ X[1] \ \dots \ X[p-1]]^T$ prin relații de forma $X_p = M \cdot x_p$, respectiv $x_p = M^{-1} \cdot X_p$, unde M este o matrice pătratică de numere complexe.

Exemplu: Considerăm semnalul $x(t) = 5 + 2 \sin(2\pi t) + 3 \cos(4\pi t)$, de perioadă $T = 1$ secundă și presupunem că îl eșantionăm cu pasul $h = 0.25$ secunde. Rezultă secvența $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, 2, 3\}}$. Ea corespunde unui număr de 4 momente de eșantionare consecutive ($p = 4$). Efectuând calculele obținem secvența⁵ $x_4 = \{x[k]\}_{k \in \{0, 1, 2, 3\}} = [8, 4, 8, 0]^T$. Atunci, cu formula (6) rezultă transformata Fourier discretă:

$$X[n] = \sum_{k=0}^3 x[k] e^{-jk2\pi \frac{n}{4}} = x[0] + x[1] e^{-j\pi \frac{n}{2}} + x[2] e^{-j\pi n} + x[3] e^{-j3\pi \frac{n}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

Respectiv vectorul $X_4 = \{X[n]\}_{n \in \{0, 1, 2, 3\}} = [20, -4j, 12, 4j]^T$.

În particular, dacă $x(t)$ este periodic, cele p valori $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$ pot să acopere o perioadă a semnalului $x(t)$. În acest caz transformata Fourier discretă mai este denumită și *serie Fourier discretă* (DFS - *Discrete Fourier Series*).

⁴ Numărul de puncte de discretizare a intervalului $[0, 2\pi)$ se alege egal cu numărul de valori reținute din semnalul $\{x[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

⁵ $x[k] = x(k \cdot h)$.

8. Sinopsis⁶ referitor la secțiunile 4 și 7

În secțiunile 4 și 7 s-au prezentat aspecte referitoare la folosirea transformatei Fourier și la spectrele semnalelor în timp continuu și ale semnalelor în timp discret. Cazurile tratate sunt cele din tabel:

Semnale		Semnale în timp continuu	Semnale în timp discret
Modelare Fourier			
Prin serie Fourier	Serie Fourier complexă $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \omega_0 t}$ sau Serie Fourier reală $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \omega_0 t + \varphi_n)$ Serie	Semnale periodice x(t) • Spectre de amplitudine $\{(n \cdot \omega_0, c_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}};$ • Spectre de fază: $\{(n \cdot \omega_0, \arg c_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}.$	Semnale periodice $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$ • Spectrul semnalului: $\{X[n]\}_{n \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$
Prin transformată Fourier	Transformată Fourier $x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$ Transformata Fourier în timp discret $x(e^{j\tilde{\omega}}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\tilde{\omega}}$ Transformată Fourier discretă (denumire alternativă: serie Fourier discretă) $X[n] = \sum_{k=0}^{p-1} x[k] e^{-jk 2\pi \frac{n}{p}}, \quad n = 0, 1, \dots, p-1$	Semnale neperiodice x(t) • Spectru de amplitudine : $ x(j\omega) , \quad \omega \in \mathbb{R};$ • Spectru de fază : $\arg x(j\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$	Semnale neperiodice $\{x[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sau $\{x[k]\}_{k \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$ • Spectrul semnalului: $x(e^{j\tilde{\omega}}),$ respectiv $\{X[n]\}_{n \in \{0, 1, \dots, p-1\}}$

§ 1.3. Efecte ale eșantionării

1. Efectul alias

Efectul alias (dedublarea prin eșantionare) este o consecință a eșantionării semnalelor în timp continuu. El constă în faptul că, în anumite situații, în urma eșantionării cu aceeași frecvență a unor semnale în timp continuu diferite se obțin semnale în timp discret identice. Ca urmare, secvențele rezultate prin eșantionare nu ne permit să distingem semnalele în timp continuu din care provin.

În continuare ne referim la o situație standard, de eșantionare uniformă. Astfel, presupunem că eșantionăm cu pasul h , deci cu *frecvența de eșantionare* $f_s = \frac{1}{h}$, semnalele din familia ($n \in \mathbb{Z}$) de semnalele armonice

$$x_n(t) = x_m \cdot \sin(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t + \varphi) \text{ cu } t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Observăm că semnalele $x_n(t)$ au aceeași amplitudine x_m , aceeași fază inițială φ și că frecvențele lor,

⁶ **SINOPSIS** s. n. 1. Privire generală asupra unei științe sau asupra unui obiect de învățământ. 2. Tablou sinoptic care îmbrățișează toate părțile unei științe. 3. Scurtă expunere asupra subiectului unui film, constituind schița unui scenariu. 4. Rezumat făcut de autorul unui studiu, memoriu, articol etc. (fr., engl., gr. *synopsis*).

$$f_n = \frac{n}{h} + \frac{\omega}{2\pi} = n \cdot f_s + f, \quad (2)$$

diferă în raport cu frecvența $f = \frac{\omega}{2\pi}$ a semnalului $x_0(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$ cu un multiplu, n (număr întreg), al frecvenței de eșantionare f_s .

Prin eșantionarea semnalului $x_n(t)$ la momentele $t_k = kh$, $k \in \mathbf{Z}$ rezultă semnalul în timp discret (termen general):

$$x_n[k] = x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{h} nkh + \omega kh + \varphi\right) = x_m \sin(2\pi kn + \omega kh + \varphi) = x_m \sin(\omega kh + \varphi). \quad (3)$$

Ca urmare, toate secvențele $\{x_n[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $n \in \mathbf{Z}$ cu termenul general (3) sunt identice. Faza inițială φ are rol de parametru. În acest context semnalele familiei $x_n(t)$ se numesc *semnale alias*⁷. Se impun două remarci:

- Pentru semnalele alias secvențele $\{x_n[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $n \in \mathbf{Z}$ fiind identice, nu se poate preciza semnalul armonic în timp continuu din care provine secvența. O secvență care se obține dintr-un semnal de frecvență mare este interpretat, de regulă, ca provenind dintr-un semnal de frecvență mică.
- Efectul alias este dependent de frecvența de eșantionare în sensul că eșantionând semnalele (1) cu altă frecvență, corespunzătoare unui pas de discretizare $h_1 \neq h$, efectul nu se mai produce.

La o primă privire avem impresia că familia de semnale alias $\{x_n(t) | n \in \mathbf{Z}\}$ este reprezentată de semnalul $x_0(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$. Lucrurile nu stau însă așa. Rezultatul depinde atât de valoarea lui f cât și de valoarea lui f_s . Deoarece frecvențele f_n ale semnalelor $x_n(t)$ se găsesc pe axa frecvențelor în puncte echidistante, la distanțe egale cu f_s , rezultă că frecvența f_n cu valoarea absolută cea mai mică se obține determinând pe n din condiția $-\frac{1}{2}f_s < f_n \leq \frac{1}{2}f_s$, adică din dubla inecuație:

$$-\frac{1}{2}f_s < \underbrace{f_s n + f}_{f_n} \leq \frac{1}{2}f_s. \quad (4)$$

Fie n_a soluția acestei duble inecuații, iar

$$f_a = f_s n_a + f \quad (5)$$

valoarea frecvenței corespunzătoare lui n_a . Ea se numește *frecvență alias principală*. După caz, f_a poate fi o valoare pozitivă sau negativă. Semnalul

$$x_a(t) = x_m \sin(2\pi f_a t + \varphi), \quad (6)$$

aparținând mulțimii $\{x_n(t)\}$ și caracterizat de faptul că

$$x_a[k] = x_n[k], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

este cazul particular de semnal $x_n(t)$, cu cea mai mică frecvență în valoare absolută, capabil să furnizeze secvența $\{x_n[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Toate semnalele din familia (1) sunt *semnale alias ale semnalului $x_a(t)$* ⁸.

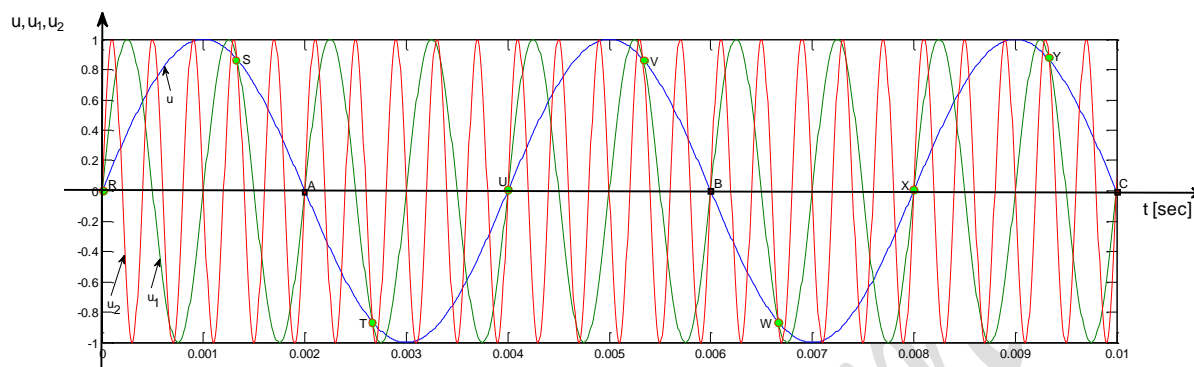
⁷ În limba română termenul alias, provenit din latină, se folosește la situația când ne referim la o persoană sub forma „A zis și numit și B”.

⁸ În statistică și tehnică termenii „alias” și „aliasing” se referă la situațiile în care apar efecte care nu permit ca semnalele în timp continuu implicate să poată fi deosebite. În cazul de față, datorită modului în care s-a făcut eșantionarea, pe baza

Exemplu: Presupunem că eșantionăm semnalele $u_1(t)=\sin(2000\pi t)$ și $u_2(t)=\sin(5000\pi t)$, de frecvențe $f_1=1000$ Hz și $f_2=2500$ Hz, cu frecvența $f_s=750$ Hz. Observăm că ele au aceeași fază inițială și că $f_2 - f_1 = 2 f_s$. În consecință $u_1(t)$ și $u_2(t)$ sunt semnale alias. Aplicând relația (4) pentru $f = f_1$, obținem:

$$-\frac{1}{2}f_s < f_s n + f_1 \leq \frac{1}{2}f_s \rightarrow -375 < 750n + 1000 \leq 375 \rightarrow n = -1 \rightarrow f_a = 750(-1) + 1000 = 250 \text{ Hz}.$$

Rezultă că după eșantionare semnalele $u_1(t)$ și $u_2(t)$ vor fi percepute ca semnale alias provenind din semnalul $u(t)=\sin(500\pi t)$, așa cum se vede în figură.



Semnalele $u_1(t)$ și $u_2(t)$ din exemplu reprezentate pe intervalul de timp $[0, 0.01]$ secunde. Prin eșantionare cu pasul $h=1/750$ secunde se obțin valorile comune corespunzătoare punctelor R, S, T, U, V, W, X și Y.⁹

Cele prezentate cu privire la familia de semnale (1) sunt valabile și pentru familia de semnale

$$x_n(t) = x_m \cdot \cos(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t + \varphi) \text{ cu } t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}, \varphi \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Pentru semnalele (1) și (8) relația (4) de calcul a *frecvenței alias principale* se generalizează sub forma

$$f_a = |f_s n_a + f|, \quad (9)$$

n_a fiind soluția dublei inecuații (4). Mulțimea frecvențelor alias pozitive se obține cu formula (2) sau cu formula

$$f_a, n f_s \pm f_a, n \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10)$$

Exemplu: Presupunem că eșantionăm semnalul $u(t)=\sin(1600\pi t)$ cu frecvența $f_s=1500$ Hz. Cu formula (10) rezultă șirul de frecvențe alias:

$$\dots -5200 \text{ Hz}, -3700 \text{ Hz}, -2200 \text{ Hz}, -700 \text{ Hz}, 800 \text{ Hz}, 2300 \text{ Hz}, 3800 \text{ Hz}, 5300 \text{ Hz}, \dots$$

Frecvența alias principală asociată lui $f = 800$ Hz și $f_s = 1000$ Hz se obține cu formula (9) după rezolvarea dublei inecuații (4): $-750 < 1500 \cdot n_a + 800 < 750 \rightarrow n_a = -1 \rightarrow f_a = 700$ Hz. Ca urmare, mulțimea frecvențelor alias (pozitive) este: $700, n \cdot 1500 \pm 700, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ adică

$$\dots 700 \text{ Hz}, 800 \text{ Hz}, 2200 \text{ Hz}, 2300 \text{ Hz}, 3700 \text{ Hz}, 3800 \text{ Hz}, 5200 \text{ Hz}, 5300 \text{ Hz}, \dots$$

2. Operația folding (de pliere). Teorema lui Shannon și teorema Nyquist-Shannon

Efectul alias (de dedublare) și consecințele sale pot fi interpretate cu ușurință cu ajutorul spectrelor semnalelor. Ilustrăm unul dintre efecte, cel cunoscut sub denumirea de operație folding (operație de pliere). În acest scop ne

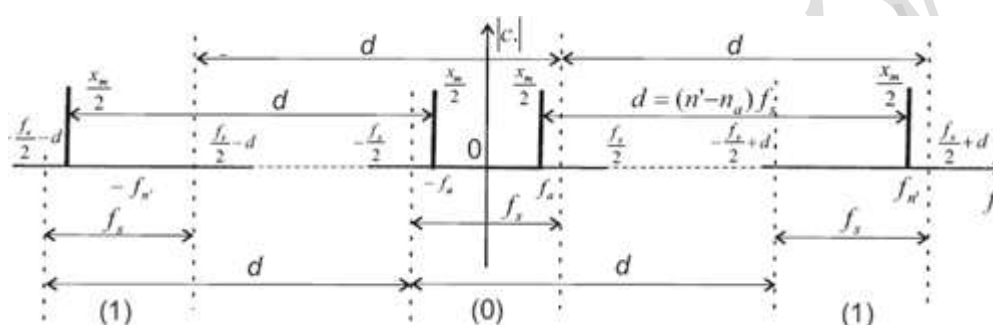
folosim de eșantioanele familiei de semnale alias $x_n(t) = x_m \cdot \sin(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t)$ cu $t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$ obținute prin

eșantionarea cu frecvența $f_s = \frac{1}{h}$.

secvențelor $\{x_n[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$ nu se poate face distincție între semnalele $x_n(t)$. Ca urmare, reconstruind din orice secvență $\{x_n[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$ un semnal în timp continuu va rezulta de fiecare dată doar semnalul $x_a(t)$.

⁹ Semnalele au valoarea comună, 0, și în punctele A, B și C care nu corespund unor momente de eșantionare.

În primă instanță considerăm doar două semnale din familie: semnalul $x_a(t) = x_m \cdot \sin(2\pi f_a t)$ și un semnal oarecare $x_{n'}(t)$, $n' > 0$. În figura de mai jos sunt redată în același sistem de axe, având în abscisă frecvența f , spectrele de amplitudine ale celor două semnale obținute conform exemplului 1 de la pagina 27. Împărțim planul figurii în fâșii de lățime f_s , delimitate de perpendiculare pe axa frecvențelor duse prin punctele $\dots -5f_s/2, -3f_s/2, -f_s/2, f_s/2, 3f_s/2, 5f_s/2, \dots$. Perpendicularele sunt reprezentate cu linie întreruptă. Spectrul semnalului $x_a(t)$ este alcătuit din două linii spectrale amplasate în fâșia (0), iar spectrul semnalului $x_{n'}(t)$ din liniile spectrale amplasate în fâșiile (1). Efectului alias, de identitate a eșantioanelor obținute din $x_a(t)$ și din $x_{n'}(t)$, îi corespunde faptul că, prin plieri succesive ale planului figurii de-a lungul liniilor reprezentate cu linie întreruptă, fâșiile (1) ajung să se suprapună peste fâșia (0), iar liniile spectrale din fâșiile (1) să se suprapună peste cele două linii spectrale din fâșia (0). Ca urmare, după pliere se obține o reprezentare cu doar două linii spectrale corespunzătoare semnalului $2x_a(t)$. Afirmatia are un caracter general fiind valabilă pentru orice valoare n' . În felul acesta am pus în evidență în mod grafic efectul alias.



Spectrele de amplitudine ale semnalelor $x_a(t) = x_m \cdot \sin(2\pi f_a t)$ și $x_{n'}(t) = x_m \cdot \sin(2\pi \frac{n'}{h} t + \omega t)$

Notă: Atunci când pentru familia de semnale $x_n(t) = x_m \cdot \sin(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t)$ se folosește mulțimea de frecvențe (10), plierea planului se face după perpendicularele pe axa frecvențelor duse prin punctele $f_s, 2f_s, 3f_s, 4f_s, 5f_s, \dots$, soldată, de asemenea, cu suprapunerea liniilor spectrale din fiecare fâșie. Aceasta modalitate de pliere este frecvent întâlnită în literatura de specialitate.

Operația folding permite interpretarea situațiilor reale, mai complexe decât situația prezentată. În cele ce urmează investigăm problema în mod gradual.

■ Fie $y(t)$ un semnal în timp continuu compus din mai multe componente armonice alias (cu frecvențe alias în raport cu o frecvență de eșantionare f_s corespunzătoare unui pas de discretizare h) de amplitudini diferite. Prin eșantionare se obține o secvență $\{y[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Ca urmare a operației de pliere valoarea eșantionului, $y[k]$, este egală cu suma valorilor componentelor armonice alias ale lui $y(t)$ la momentul $k \cdot h$ și nu ne permite să distingem cota parte corespunzătoare fiecărei componente armonice. Încercând să refacem semnalul $y(t)$ din semnalul eșantionat $\{y[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ obținem un semnal $y'(t) \neq y(t)$.

În domeniul spectral acestei situații îi corespunde faptul că spectrul semnalului $y'(t)$ apare ca și cum ar proveni dintr-un singur semnal având frecvența egală cu frecvența alias principală și un spectru amplasat integral în intervalul $(-f_s/2, f_s/2]$, deci diferit spectrul semnalului $y(t)$. Liniile spectrului semnalului $y'(t)$ au o lungime egală cu suma lungimilor liniilor spectrelor componentelor lui $y(t)$. Același efect se obține după suprapunerea fâșiilor de tipul (1) peste fâșia de tipul (0) și însumarea lungimilor liniilor spectrale.

■ Fie, acum, un semnal $z(t)$ neperiodic. Spectrul acestuia este unul continuu. Presupunem că eșantionăm semnalul $z(t)$ cu pasul h . Datorită efectului de aliasing spectrul semnalului $z(t)$ se va concentra, după pliere, în intervalul $(-f_s/2, f_s/2]$ și va corespunde unui alt semnal $z'(t) \neq z(t)$. Această situație are drept consecință, la reconstrucția din eșantioane, un semnal $z'(t)$ distorsionat în raport cu semnalul $z(t)$. Frecvența $f_s/2$ se numește *frecvență Nyquist sau frecvență de pliere*.

În mod natural se pune întrebarea: *cum ar trebui să se facă eșantionarea semnalelor astfel încât să nu se producă efectul folding și să fie posibilă reconstrucția lor* ? Răspunsul se bazează pe faptul că din considerente energetice¹⁰ spectrul semnalelor reale este distribuit într-o bandă (interval) de frecvențe cu extensie limitată. Fie $(-f_B, f_B]$ această interval. Frecvența f_B este denumită *frecvență de bandă*. Dublul ei, $f_N = 2 \cdot f_B$, se numește *rată Nyquist*.

Atunci, din discuția anterioară se desprinde concluzia că dacă $(-f_B, f_B] \subset (-f_s/2, f_s/2]$ efectul folding nu se mai produce întrucât prin pliere spectrul rezultat coincide cu cel inițial. Această condiție poate fi rescrisă sub forma:

$$2f_B < f_s \quad \text{sau} \quad h < \frac{1}{2 \cdot f_B}. \quad (1)$$

Rezultatul, cunoscut sub denumirea de *teorema eșantionării* (sau *teorema lui Shannon*), se enunță astfel:

Dacă spectrul semnalului $z(t)$ nu conține componente de frecvență mai mare decât o valoare f_B , atunci semnalul $z(t)$ este complet determinat de secvența care rezultă prin eșantionarea lui cu un pas h de valoare mai mică decât $1/(2 \cdot f_B)$.

Introducând rata Nyquist, prima inegalitate din (1) devine:

$$f_N < f_s. \quad (2)$$

Acest rezultat, completat cu aplicarea de formule de interpolare asupra secvențelor care se obțin prin eșantionarea semnalului $z(t)$, este cunoscut sub denumirea de *teorema Nyquist-Shannon*. Enunțul ei este următorul:

Fie $z(t)$, $t \in \mathbf{R}$, un semnal al cărui spectru se situează în intervalul de pulsații simetric față de origine $[-\omega_B, \omega_B] = [-2\pi f_B, 2\pi f_B]$ (semnal de bandă limitată¹¹), frecvența $f_B = \omega_B/(2\pi)$ (frecvență de bandă) reprezentând cea mai mare frecvență din spectrul semnalului $z(t)$.

*Dacă frecvența de eșantionare f_s a semnalului $z(t)$ este astfel încât $f_s > f_N$, unde $f_N = 2f_B$, atunci semnalul $z(t)$ poate fi **reconstruit** (teoretic) perfect din secvența $\{z[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$ folosind relația (de reconstrucție):*

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z[k] \cdot \text{sinc}[f_s(t - kh)]. \quad (3)$$

Dacă $f_s < f_N$ informația din semnalul $z(t)$ nu mai poate fi reconstruită complet din secvența $\{z[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$.

În (3) se utilizează funcția *sinus cardinal normală* $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

¹⁰ • Energia totală a unui semnal bilateral în timp continuu este dată de relația $E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. Dacă $E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ spunem că semnalul $x(t)$ este de energie finită. Puterea medie a unui semnal bilateral în timp continuu este dată de relația

$P_X = \lim_{t_L \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_L} \int_{-t_L}^{t_L} |x(t)|^2 dt$. Pentru semnalele periodice de perioadă T puterea medie se poate calcula cu formula

$P_X = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} |x(t)|^2 dt$ sau, folosind coeficienții seriei Fourier complexe, cu formula $E_X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$.

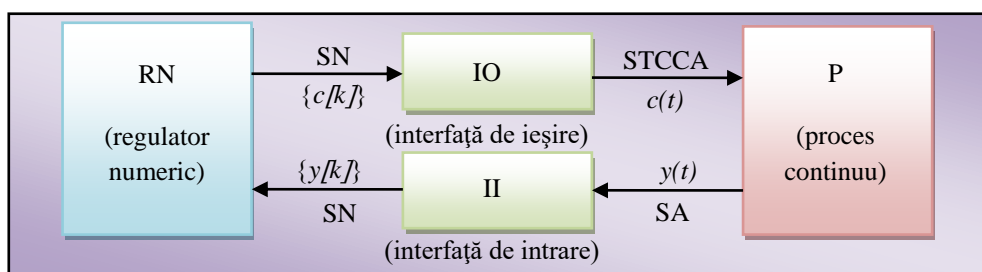
• Energia totală a unui semnal bilateral în timp discret este dată de relația $E_X = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |x[t]|^2$. Dacă $E_X = \sum_{t=-\infty}^{\infty} |x[t]|^2 < \infty$ spunem că

semnalul $\{x[t]\}$ este de energie finită. Puterea medie a semnalului $\{x[t]\}$ este dată de relația $P_X = \lim_{n_L \rightarrow \infty} \frac{1}{2n_L + 1} \sum_{t=-n_L}^{n_L} |x[t]|^2$.

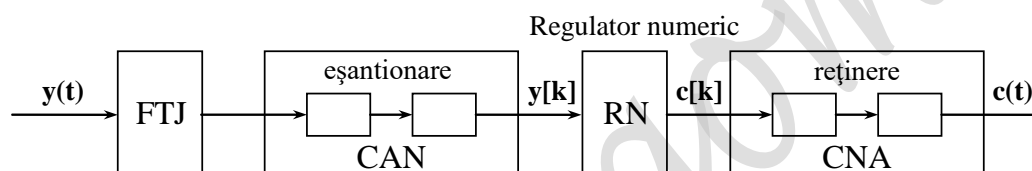
¹¹ Un semnal de bandă limitată este un semnal a cărui transformată Fourier ia valori nule în exteriorul benzii.

3. Filtre anti-aliasing și reconstrucția semnalelor

În cazul aplicațiilor de control automat numeric (digital), conștientizarea efectului alias datorat eșantionării și a modului în care trebuie realizate reconstrucțiile de semnale pentru a contracare efectele nedorite sunt deosebit de importante. Pentru a discuta acest aspect revenim la structura de sistem de conducere în circuit închis de la pag. 10.



Canalul informațional $y(t) - II - \{y[k]\} - RN - \{c[k]\} - IO - c(t)$ al acestei structuri este detaliat în figura de mai jos. Interfața de intrare II apare prin blocurile FTJ și CAN, iar interfața de ieșire IO prin blocul CNA.



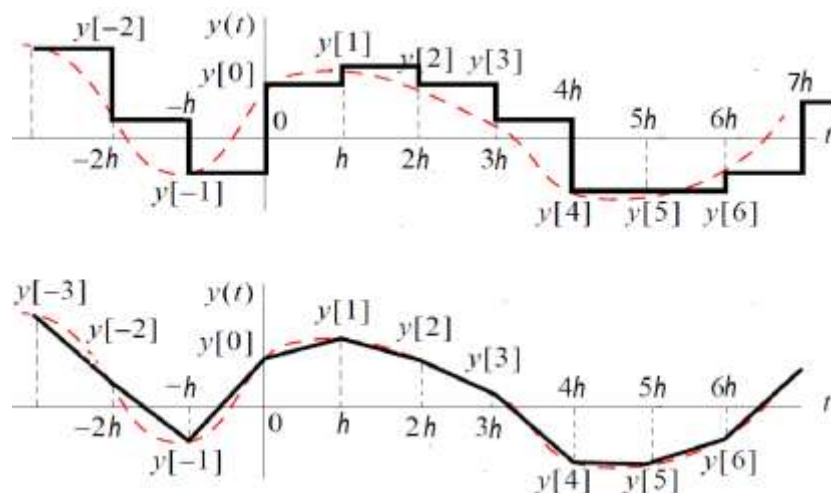
Referitoare la amplasarea unui filtru anti-aliasing (FTJ) în raport cu un regulator numeric (RN).

Importanța contracarării efectului alias se explică prin faptul că semnalul de ieșire al procesului condus, $y(t)$, care trebuie procesat de regulatorul numeric, RN, pentru a genera mărimea de comandă $c(t)$, este un semnal analogic care conține, de regulă, pe lângă componenta utilă provenită de la proces și componente parazite (zgomote) datorate modului în care se efectuează conexiunile și transmisia. Spectrele celor două tipuri de componente sunt amplasate în benzi de frecvență disjuncte: *în timp ce spectrul componentei utile respectă teorema eșantionării, spectrul componentelor parazite se găsește în afara frecvențelor Nyquist uzuale.*

Pentru a nu permite semnalelor parazite să afecteze prin efect alias semnalul $\{y[k]\}$ rezultat prin eșantionare se introduce, în aval de convertorul analog-numeric (CAN), un filtru analogic de tip trece-jos (FTJ) denumit *filtru anti-aliasing*. El este conceput astfel încât să rejeteze sau să atenueze considerabil componentele parazite. În acest mod semnalul de comandă analogic $c(t)$, transmis procesului condus, se obține practic numai din componenta utilă a lui $y(t)$. Eșantionarea semnalului $y(t)$ se face din punctul de vedere al componentei utile, respectând teorema lui Shannon. Astfel se elimină suprapunerea, prin pliere, a componentelor parazite peste componenta utilă.

Obținerea semnalului $c(t)$ din semnalul $\{c[k]\}$ poartă numele de operație de *reconstrucție*.

Teoretic, reconstrucția se poate realiza folosind formula din teorema Nyquist-Shannon. Numărul infinit de termeni cu care trebuie să se opereze în scopul reconstrucției face imposibilă aplicarea directă a acestei formule. Practic, când reconstrucția nu este destinată reglării, se folosesc algoritmi de reconstrucție fizic realizabili, derivați din teorema Nyquist-Shannon. În buclele de reglare se folosesc algoritmi mai simpli care realizează extrapolări între valorile semnalului $\{c[k]\}$. Cel mai folosit este extrapolatorul de ordinul zero cunoscut sub denumirea de *zero-order hold (ZOH)*. În unele cazuri se folosește și extrapolatorul de ordinul I (*first-order hold (FOH)*). Modul de lucru este exemplificat în figurile următoare.



Referitoare la reconstrucția realizată folosind algoritmi ZOH și FOH

Figura se referă la reconstrucția unui semnal în timp continuu $y(t)$, reprezentat cu linie roșie întreruptă, din secvența $\dots, y[-3], y[-2], y[-1], y[0], y[1], y[2], y[3], y[4], y[5], y[6], y[7], \dots$. În partea de sus a figurii este redat semnalul reconstruit folosind algoritmul ZOH. Rezultatul este un semnal scară. În partea de jos apare semnalul reconstruit folosind algoritmul FOH. Rezultatul este o linie frântă. Fiecare segment al acestuia realizează o interpolare liniară între două valori consecutive ale semnalului în timp discret $\{y[k]\}$, $k \in \mathbb{Z}$.