

CAPITOLUL IV: ELEMENTE DE ANALIZĂ A SISTEMELOR LINIARE

§ 4.1 Regimul permanent constant

În *regim permanent constant* (r.p.c.) mărimile caracteristicile ale unui sistem sunt funcții constante în raport cu timpul. Regimul permanent constant este unul dintre cele mai frecvente regimuri de funcționare cerut în practică.

Obiectivul paragrafului îl constituie prezentarea modalităților de obținere a *modelelor matematice de regim permanent constant ale sistemelor liniare*, adică a modelelor care caracterizează comportarea sistemelor liniare în regim permanent constant. Principiul de obținere este următorul: *modelul de regim permanent constant se determină ca și un caz particular de regim dinamic* și anume, cazul când variabilele modelului sunt funcții constante de timp. Particularizările diferă, după cum sistemul este un STC sau un STD. Atunci când lucrăm cu modele operaționale particularizările se fac utilizând teoremele valorii finale.

1. Regimul permanent constant pentru STC

- Considerăm pentru început sistemele date prin modelul intrare-ieșire în domeniul timp:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u^{(0)}(t). \quad (1)$$

Sistemul (1) fiind un STC, particularizarea care conduce la modelul de r.p.c. constă în omiterea derivatelor (derivatele funcțiilor constante sunt nule). În consecință, notând valorile în r.p.c. cu indicele ∞ , din (1) rezultă:

$$a_0 \cdot y_\infty = b_0 \cdot u_\infty. \quad (2)$$

- Analog, în cazul când operăm cu MM-ISI obținem (x_∞ – valoarea variabilei de stare în r.p.c.):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty = 0 \\ y_\infty = C \cdot x_\infty + D \cdot u_\infty \end{cases} \quad (3)$$

- Observație:** Fie $f(t)$ o funcție de timp continuu original pentru care există limita $f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ și fie $f(s) = L[f(t)]$ imaginea Laplace a acestei funcții. Atunci, valoarea f_∞ poate fi calculată din imaginea operațională $f(s)$ cu formula $f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot f(s)$. Rezultatul este cunoscut sub numele de *teorema valorii finale pentru semnale în timp continuu*.

Presupunem un sistem de tip SISO, cu orientarea $u \rightarrow y$ și f.d.t. $H(s)$. Atunci, este valabilă dependența intrare-ieșire $y(s) = H(s) \cdot u(s)$. Din punctul de vedere al r.p.c. corespunzător unui semnal de intrare care se stabilizează la o valoare u_∞ avem în vedere că același regim permanent constant rezultă și în urma aplicării unui semnal treaptă $u(t) = u_\infty \cdot \sigma(t)$. Folosind, în această ipoteză, teorema valorii finale în raport cu $y(s)$ rezultă:

$$u(s) = \frac{u_\infty}{s} \Rightarrow y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \cdot \frac{u_\infty}{s}.$$

Ca urmare, este valabilă formula:

$$y_\infty = \left[\lim_{s \rightarrow 0} H(s) \right] \cdot u_\infty \quad (4)$$

Aprofundăm formula (4) considerând sistemul (1), deci f.d.t. $H(s) = \frac{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$:

- Dacă $a_0 = 0$, atunci f.d.t. admite ca factor pe $\frac{1}{s}$. Întrucât acest factor reprezintă tocmai f.d.t. a unui integrator spunem că sistemul (1) este de **tip I (integrator)**. Pentru sistemele de tip I, $\lim_{s \rightarrow 0} H(s)$ nu

există. Există însă $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{H(s)} = 0$. În acest caz din (4) deducem că $u_\infty = \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{H(s)} \right) y_\infty = 0$.

- Dacă $b_0 = 0$, $H(s)$ avem ca factor la numărător pe s , adică f.d.t. a unui element **derivator**. În acest caz spunem că sistemul (1) este de **tip D (derivator)**. Pentru sistemele de tip D, $H(0) = 0$.
- Dacă $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ spunem că sistemul e de **tip P (proporțional)**. Pentru sistemele de tip P, $H(0) = \frac{b_0}{a_0}$.

În consecință din (2) și (4) rezultă că în r.p.c. avem:

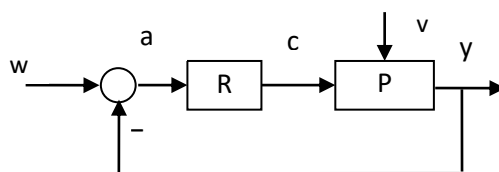
$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip P: } y_\infty = \frac{b_0}{a_0} \cdot u_\infty \quad (5.1)$$

$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip D: } y_\infty = 0 \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip I: } u_\infty = 0 \quad (5.3)$$

- **Ultimul rezultat este deosebit de important din punct de vedere aplicativ.** El se folosește pentru a obține sisteme de reglare cu eroare staționară nulă potrivit schemei bloc de mai jos. Ipotezele de lucru sunt:

- regulatorul R este un subsistem de tip **I**;
- sistemul este stabil și ca urmare poate ajunge în regim permanent constant.



Importanța rezultă din faptul că regulatorul R fiind un subsistem de tip **I** atunci, potrivit relației (5.3), în r.p.c. mărimea lui de intrare este nulă. Deci $a_\infty = 0$. Dar $a_\infty = w_\infty - y_\infty \Rightarrow y_\infty = w_\infty$. **Ca urmare mărimea reglată y are exact valoarea prescrisă prin w.**

¹ Toate relațiile încadrate, de mai sus sau care urmează, reprezintă modele de r.p.c. a căror obținere constiuie obiectul paragrafului.

2. Regimul permanent constant pentru STD

- În acest caz semnalele sunt reprezentate prin șiruri de valori constante. Presupunem că sistemul e dat prin MM-II:

$$a_n \cdot y[t] + a_{n-1} \cdot y[t-1] + \dots + a_0 \cdot y[t-n] = b_n \cdot u[t] + b_{n-1} \cdot u[t-1] + \dots + b_0 \cdot u[t-n]. \quad (6)$$

În r.p.c. MM-II (6) devine:

$$a_n \cdot y_\infty + a_{n-1} \cdot y_\infty + \dots + a_0 \cdot y_\infty = b_n \cdot u_\infty + \dots + b_0 \cdot u_\infty.$$

Dacă notăm $\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $\beta = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$, relația anterioară obține forma:

$$\boxed{\alpha \cdot y_\infty = \beta \cdot u_\infty} \quad (7)$$

- În cazul când sistemul este dat prin MM-ISI avem:

$$\begin{cases} x[t+1] = A \cdot x[t] + B \cdot u[t] \\ y[t] = C \cdot x[t] + D \cdot u[t] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (A-I) \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty = 0 \\ y_\infty = C \cdot x_\infty + D \cdot u_\infty \end{cases}}. \quad (8)$$

- Observație:** Fie semnalul în timp discret $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că există $f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f[t]$ și fie $f(z)$

transformata z a semnalului. Atunci, este valabilă relația $f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})f(z)$, cunoscută sub denumirea de

teorema valorii finale pentru semnale în timp discret.

Considerăm un STD, de tip SISO, cu f.d.t. $H(z)$. Deci este valabilă relația intrare-ieșire $y(z) = H(z) \cdot u(z)$.

Presupunem că sistemul ajunge în regim permanent constant în urma aplicării secvenței de intrare constante

$\{u[t]\}_{t \in \mathbb{N}}, u[t] = u_\infty$. Ei îi corespunde transformata z : $u(z) = \frac{u_\infty}{1 - z^{-1}}$. Ca urmare:

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{u_\infty}{1 - z^{-1}} \cdot H(z) \Rightarrow \boxed{y_\infty = \left[\lim_{z \rightarrow 1} H(z) \right] \cdot u_\infty} \quad (9)$$

Aprofundăm formula (9) în cazul sistemului (6), deci al f.d.t. $H(z) = \frac{b_n \cdot z^n + \dots + b_1 \cdot z + b_0}{a_n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0}$.

- Presupunem că numitorul lui $H(z)$ admite rădăcina $z = 1$. Deci $\alpha = 0$, iar f.d.t. admite ca factor pe $\frac{1}{z-1}$, expresie care este și f.d.t. a unui element integrator în timp discret cu amplificarea unitară.

$$(\text{În adevăr: } y[t+1] = y[t] + u[t] \iff z \cdot y(z) = y(z) + u(z) \Rightarrow y(z) = \frac{1}{z-1} \cdot u(z).)$$

Spunem că în acest caz, când $\alpha = 0$, sistemul (6) sau sistemul cu f.d.t. $H(z)$ sunt de **tip I**.

- Dacă numărătorul lui $H(z)$ admite rădăcina $z = 1$, adică $\beta = 0$, spunem că sistemul este de **tip D**.
- Dacă $\alpha \cdot \beta \neq 0$ spunem că sistemul este de **tip P**.

În consecință, din (6) și (9) rezultă, la fel ca și în cazul timp continuu, că în r.p.c. avem:

$$\Rightarrow \boxed{y_\infty = \frac{\beta}{\alpha} \cdot u_\infty} \text{ pentru sistemele de tip P,}$$

$\Rightarrow \boxed{y_\infty = 0}$ pentru sistemele de tip D,

$\Rightarrow \boxed{u_\infty = 0}$ pentru sistemele de tip I.

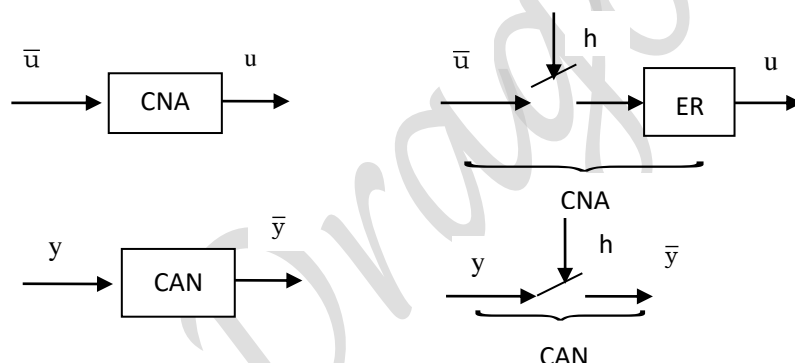
- Ultima relație stă la baza realizării sistemelor de reglare cu eroare de reglare staționară nulă. Principiul este același ca și în cazul STC.

3. Regimul permanent constant pentru sisteme hibride

În contextul acestei secțiuni prin sistem hibrid înțelegem un sistem în care apar interconectate atât subsisteme în TC cât și subsisteme în TD. Interconectarea se realizează prin elemente de interfațare: CNA și CAN conform Fig. 1 de la pag. 115 ². Modelele matematice pentru regimul permanent constant se obțin folosind pentru subsistemele în TC rezultatele din secțiunea 1, pentru subsistemele în TD rezultatele din secțiunea 2, iar pentru elementele de interfațare, reprezentate în figurile de mai jos, următoarele formule:

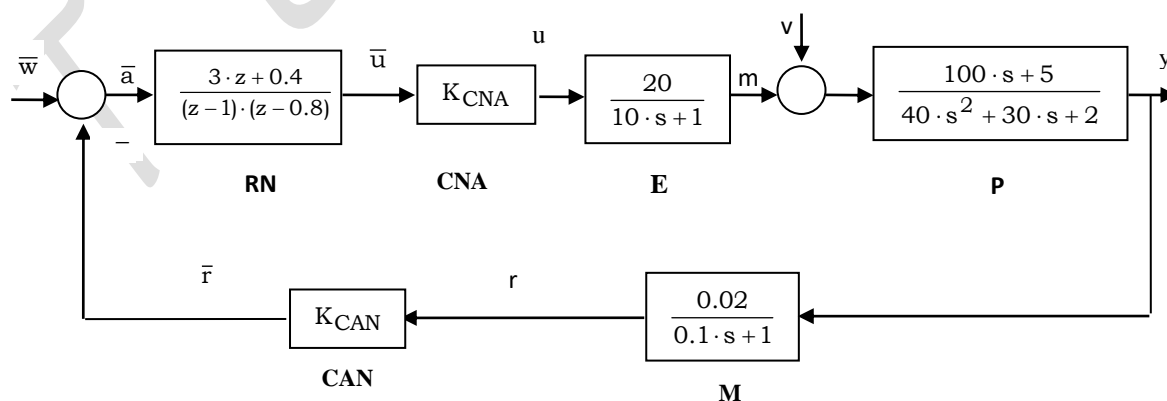
$$\begin{aligned} u_\infty &= k_{\text{CNA}} \cdot \bar{u}_\infty \quad (10); & \text{de ex. } k_{\text{CNA}} &= \frac{10}{2^{n_{\text{CNA}}}} [\text{V/bit}] \text{ dacă } u \text{ se masoară în Volt.} \\ \bar{y}_\infty &= k_{\text{CAN}} \cdot y_\infty \quad (11); & \text{de ex. } k_{\text{CAN}} &= \frac{2^{n_{\text{CAN}}}}{20} [\text{biti/mA}] \text{ dacă } y \text{ se masoară în mA.} \end{aligned}$$

Coeficienții k_{CNA} și k_{CAN} sunt constantele de transfer ale convertoarelor.



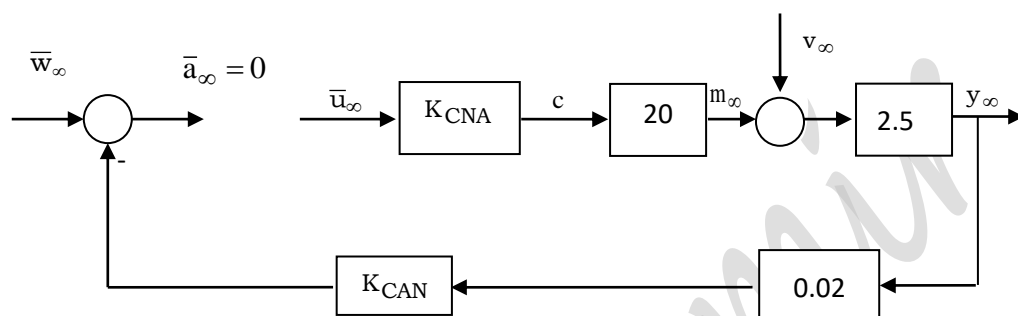
Ilustrăm în continuare, printr-un exemplu, o modalitate de folosire a modelelor de r.p.c.

Exemplu: Să se determine pentru sistemul de reglare din figură dependențele de regim permanent constant $y_\infty = f_1(\bar{w}_\infty, v_\infty)$; $u_\infty = f_2(\bar{w}_\infty, v_\infty)$.



² În prezentarea de la pag. 115 s-a considerat, pentru simplitate, că atât CNA cât și CAN au coeficienți de conversie unitari.

Soluție: Pentru a rezolva problema deducem din schema bloc dată o schemă bloc (de fapt un model) valabilă pentru r.p.c. Observăm că regulatorul este de tip I $\Rightarrow \bar{a}_\infty = 0$. Întrucât în r.p.c. ieșirea regulatorului, \bar{u}_∞ , are o valoare constantă, nenulă și finită, în modelul de r.p.c. calea directă se întrerupe în dreptul regulatorului. Se obține schema din figura următoare în care \bar{u}_∞ apare ca o nouă intrare în sistem. Valoarea \bar{u}_∞ (datorată preistoriei sistemului de reglare, adică funcționării anterioare instalării r.p.c.) rezultă din context (adică din alte calcule specifice structurii particulare considerate). Fiecare bloc din modelul de r.p.c. s-a obținut din schema bloc dată prin enunț efectuând particularizările prezentate în secțiunile 1 și 2.



Observăm că $\bar{a}_\infty = \bar{w}_\infty - k_{CAN} \cdot 0.02 y_\infty$. Totodată, $\bar{a}_\infty = 0$ fiindcă ne găsim în r.p.c.. Egalând cele două expresii ale

lui $\bar{a}_\infty \Rightarrow y_\infty = \frac{50}{k_{CAN}} \cdot \bar{w}_\infty$. Deci $\Rightarrow f_1(\bar{w}_\infty, v_\infty) = \frac{50}{k_{CAN}} \cdot \bar{w}_\infty$. (Rezultatul nu depinde de v_∞ !).

Urmărind calea directă rezultă: $y_\infty = 2.5(v_\infty + 20 \cdot K_{CNA} \cdot \bar{u}_\infty) \Rightarrow \bar{u}_\infty = \frac{0.02}{K_{CNA}} y_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty$.

Folosind expresia lui $y_\infty \Rightarrow \bar{u}_\infty = \frac{1}{K_{CNA} \cdot K_{CAN}} \bar{w}_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty$. Deci,

$$f_2(\bar{w}_\infty, v_\infty) = \frac{1}{K_{CNA} \cdot K_{CAN}} \bar{w}_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty.$$

§ 4.2 Regimul permanent armonic

Un sistem în timp continuu, S, se găsește în regim permanent armonic (denumit și regim permanent sinusoidal) atunci când toate mărimile caracteristice sunt funcții sinusoidale de timp, având aceeași pulsație ω . Amplitudinile și fazele mărimilor caracteristice diferă de la mărime la mărime. Regimul permanent armonic este un regim periodic specific sistemelor liniare în timp continuu. Practic, el se întâlnește în sisteme stabile.

1. Caracteristici de pulsație și caracteristici Bode

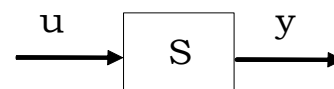
Fie sistemul liniar în timp continuu, S, din figură. Dacă la intrare i se aplică semnalul sinusoidal

$$u(t) = u_m \cdot \sin \omega t, \quad (1)$$

atunci, în regim permanent armonic la ieșire se obține semnalul tot un semnal sinusoidal:

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Canitatea φ reprezintă diferența de fază dintre faza semnalului de ieșire și cea a semnalului de intrare. De regulă $\varphi < 0$. În acest context φ este denumită defazul introdus de sistem sau faza inițială a semnalului de ieșire.



Repetând experimentul pentru diferite valori ale pulsației ω și diferite amplitudini u_m se constată că valorile raportului amplitudinilor $\frac{y_m}{u_m}$ și ale defazajului φ sunt funcții doar de pulsația ω , adică:

$$\frac{y_m}{u_m} = f_1(\omega), \quad \varphi = f_2(\omega) \quad (3)$$

Ansamblul celor două funcții este denumit *caracteristici de pulsație* ale sistemului S.

Întrucât graficele caracteristicilor (3) sunt relativ greu de interpretat, se utilizează reprezentări modificate ale acestora (introduse de Bode) și anume:

$$F_1(\omega_{lg}) = 20 \cdot \lg f_1(\omega), \quad (4.1)$$

$$F_2(\omega_{lg}) = f_2(\omega) \quad (4.2)$$

În funcțiile F_1 și F_2 variabila independentă este logaritmul zecimal al lui ω , adică cantitatea $\lg \omega$. Ea este notată cu ω_{lg} . Pentru orice valoare a lui ω funcția F_1 ia valoarea $20 \cdot \lg f_1$, denumită *valoare a lui f_1 în decibeli (dB)*³, și asociază această valoare valorii $\lg \omega$, iar funcția F_2 ia valoarea $f_2(\omega)$ și o asociază tot valorii $\lg \omega$. Valorile lui F_2 se exprimă în radiani sau grade hexagesimale.

Caracteristica (4.1) este o *caracteristică logaritmică*, având logaritmă atât axa absciselor cât și axa ordonatelor.

Caracteristica (4.2) este o *caracteristică semilogaritmică* având logaritmată doar axa absciselor.

Ansamblul caracteristicilor (4) este denumit *caracteristici Bode* sau *caracteristici (logaritmice) de pulsație* ale sistemului S. Caracteristica (4.1) se numește *caracteristică amplitudine-pulsație* (c.a.-p.), iar caracteristica (4.2) *caracteristică fază-pulsație* (c.f.-p.).

În prezentarea de mai sus caracteristicile de pulsație, respectiv caracteristicile Bode, au fost definite *pe baze experimentale*. Teoretic ele se obțin din particularizarea funcției de transfer a sistemului de-a lungul axei imaginare, denumită *funcție răspuns la pulsație*, așa cum se prezintă în continuare.

Fie $H(s)$ f.d.t. a sistemului S. Restricția acesteia la axa imaginară ω , adică particularizarea lui $H(s)$ pentru cazul când $s = j\omega$,

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \quad (5)$$

³ Bel-ul (B) este unitatea de măsură folosită pentru a exprima pentru o mărime fizică pe o scară logaritmică raportul dintre valoarea măsurii și o valoare de referință. Dacă x este valoarea raportului atunci x exprimat în beli este $x_B = \log_{10} x$, iar x exprimat în decibeli (dB) reprezintă multiplul $x_{dB} = 10 \cdot \log_{10} x$. Aceste forme sunt utilizate atunci când x reprezintă raportul a două puteri. În majoritatea situațiilor puterea se calculează ca produs a două mărimi fizice sau cu ajutorul pătratului uneia dintre cele două mărimi; de exemplu, în circuitele electrice liniare avem $p = u \cdot i = u^2 / R = r \cdot i^2$, astfel că raportul de puteri x ia forma $x = y^2$. Ca urmare, $x_B = \log_{10} y^2 = 2 \cdot \log_{10} y$. Plecând de la ultima expresie, în situațiile în care o cantitate x nu este raport de puteri ci raport de alte mărimi fizice folosim o exprimare în decibeli de forma $x_B = 20 \cdot \log_{10} x = 20 \lg(x)$. Acest mod este utilizat și în cazul caracteristicilor Bode.

se numește *funcție răspuns la pulsație* a sistemului S . Cantitatea complexă $H(j\omega)$ se descrie sub formă polară, prin relația:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} \quad (6)$$

Se demonstrează că dacă aplicăm la intrarea unui STC cu f.d.t. $H(s)$ semnalul $u(t) = u_m \cdot \sin \omega t$ atunci în regim permanent armonic se obține semnalul de ieșire

$$y(t) = \underbrace{u_m \cdot 10^{\frac{|H(j\omega)|_{dB}}{20}}}_{y_m} \cdot \sin(\omega t + \underbrace{\arg H(j\omega)}_{\varphi}) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

În consecință, cele două caracteristici Bode, definite prin relațiile (4.1) și (4.2), pot fi obținute și din funcția răspuns la pulsație (6) cu relațiile:

$$F_1(\omega_{lg}) = |H|_{dB}, F_2(\omega_{lg}) = \arg H(j\omega). \quad (8)$$

Relațiile (8) sunt de importanță fundamentală întrucât ele pun în legătură caracteristici definite experimental (f_1 și f_2), transpuse în caracteristicile (F_1 și F_2), cu caracteristici determinabile teoretic ($|H(j\omega)|$ și $\arg H(j\omega)$).

Pentru simplificarea exprimării, în locul notațiilor $F_1(\omega_{lg})$ și $F_2(\omega_{lg})$ se folosesc, în acord cu relațiile (8), notațiile $|H|_{dB}(\omega_{lg})$ și $\varphi_H(\omega_{lg})$ sau doar $|H|_{dB}$ și φ_H .

Notă: Relația (7) reprezintă un caz particular. În general, aplicând la intrarea sistemului S semnalul $u(t) = u_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, la ieșire se obține semnalul $y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \alpha + \varphi)$, iar aplicând semnalul $u(t) = u_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, la ieșire se obține semnalul $y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t + \alpha + \varphi)$. În ambele cazuri y_m și φ au expresiile din (7).

Algebric, $H(j\omega)$ se poate scrie sub forma $H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, $P(\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\}$; $Q(\omega) = \operatorname{Im}\{H(j\omega)\}$. Reprezentarea grafică în planul „H” a perechii ($P(\omega), Q(\omega)$) cu ω parametru cu valori în domeniul $(-\infty, +\infty)$ sau a perechi ($|H(j\omega)|_{dB}, \arg H(j\omega)$), este cunoscută sub denumirea de *hodograf Nyquist* sau *loc de transfer*. Hodograful Nyquist este simetric față de axa reală a planului “H”. Datorită acestui fapt el se trasează de cele multe ori numai pentru $\omega \in [0, \infty)$ sau pentru $(0, \infty)$.

Hodograful Nyquist și caracteristicile Bode sunt utilizate în analiza și sinteza sistemelor, bunăoară pentru analiza stabilității sistemelor și determinarea performanțelor lor, respectiv pentru proiectarea sistemelor de reglare automată. Construcția graficelor lor se poate face în mod exact numai prin puncte. Mediul Matlab permite calculul și reprezentarea grafică a hodografului Nyquist și a caracteristicilor de pulsație ale sistemelor lineare.

Astfel, calculul celor două componente P și Q ale lui $H(j\omega)$ se poate face cu funcția: *nyquist* folosind instrucțiunea

$$[P,Q]=nyquist(num,den,omega),$$

în care *num* și *den* definesc numitorul, respectiv numărătorul funcției de transfer $H(s)$, iar

$\omega = \text{logspace}(d1, d2, N)$

definește domeniul pulsațiilor $\omega \in [10^{d1}, 10^{d2}]$, discretizat la scară logaritmică prin N puncte echidistante.

Calculul caracteristicilor Bode se poate face folosind funcția *bode* prin instrucțiuni ce folosesc aceleși argumente și sunt de forma

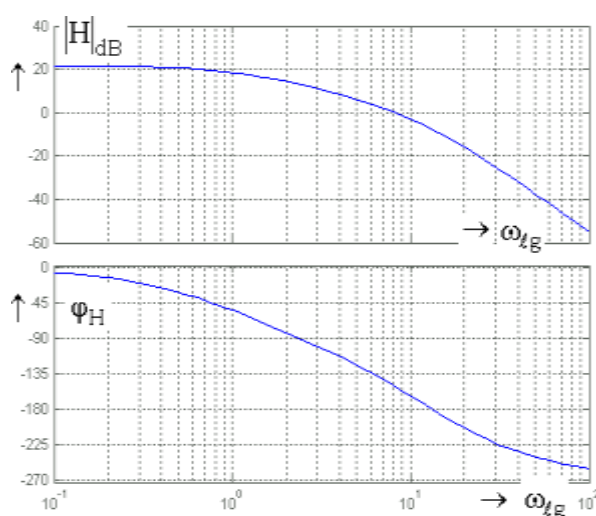
$[Am, fi] = \text{bode}(\text{num}, \text{den}, \omega);$

$HdB = 20 \cdot \log_{10}(Am),$

unde $HdB = F_1(\omega_g)$ iar $fi = F_2(\omega_g)$.

Cu titlu de exemplu, în figura de mai jos sunt reprezentate caracteristicile Bode obținute pe această cale pentru

un sistem cu f.d.t. $H(s) = \frac{1800}{(s+1) \cdot (s+10) \cdot (s+15)}$.



Cu privire la figură trebuie reținut în primul rând modul de gradare al axelor. Abscisa este o axă logaritmică notată prin valorile lui ω , din decadă în decadă (decada este intervalul dintre două pulsații aflate în raportul 1:10). Ordonata caracteristicii amplitudine-pulsație este notată din 20 în 20 de decibeli, iar ordonata caracteristicii fază-pulsație în grade sau radiani.

Caracteristicile reprezentate evidențiază câteva din trăsăturile generale ale caracteristicilor Bode ale sistemelor inerțiale: i) La pulsații mari caracteristicile Bode sunt monoton descrescătoare. Acesta denotă caracterul inerțial al sistemului; ii) La pulsații mari panta caracteristicii amplitudine-pulsație și asimptota orizontală a caracteristicii fază pulsație sunt egale cu $-20 \cdot \partial \text{ dB/dec}$, respectiv $90^\circ \cdot \partial$, unde ∂ reprezintă excesul polilor față de zerouri din expresia lui $H(s)$, adică diferența dintre numărul de poli și de zerouri.

Dacă pentru un sistem se cunosc caracteristicile Bode, atunci cu ajutorul lor și al relației (7) putem calcula răspunsul sistemului în regim permanent armonic la un semnal armonic de intrare dat.

Spre exemplu, dacă sistemului din figura anterioară i se aplică semnalul $u(t) = 4.5 \cdot \sin 2t$, atunci, din diagramele Bode „citim” pentru $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$, valorile $|H(j\omega)|_{dB} = 15 \text{ dB}$ și $\arg H(j\omega) = -85^\circ$, iar la ieșire vom obține

$$y(t) = 4.5 \cdot 10^{\frac{15}{20}} \cdot \sin(2t - 85 \frac{\pi}{180}) = 4.5 \cdot 5.62 \cdot \sin(2t - 1.4835) = 96.94956 \cdot \sin(2t - 1.4835).$$

2. Domeniul de reprezentare al caracteristicilor Bode

Legat de caracteristicile Bode, una dintre problemele care ne interesează din punct de vedere practic este modul în care stabilim domeniului de pulsații pe care acestea se reprezintă. Răspunsul depinde de scopul în care urmează să fie folosite caracteristicile. Întotdeauna este vorba despre prelucrare de semnale. Din această perspectivă se disting două situații, după cum *nu dispunem de informații despre semnalele de intrare* (a) sau *dispunem de informații despre semnalele de intrare* (b).

(a) *Dacă nu dispunem de informații despre semnale de intrare*, caracteristicile Bode se trasează pe un domeniu care trebuie să acopere toate pulsațiile de frângere asociate constantelor de timp din f.d.t. a sistemului.

Dacă T este o constantă de timp (de întârziere sau de anticipare) care apare în f.d.t. a sistemului S , atunci ei i se asociază prin relația $\omega_0 = \frac{1}{T}$ o pulsație ω_0 numită *pulsație de frângere*. Fie $\{\omega_{0i}\}$ – mulțimea tuturor pulsațiilor de frângere ω_0 , iar ω_{0min} și ω_{0max} cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre valorile ω_{0i} care apar. Caracteristicile Bode se reprezintă pe un interval care include în mod obligatoriu domeniul $[0.1 \cdot \omega_{0min}, 10 \cdot \omega_{0max}]$.

(b) *Atunci când dispunem de informații despre semnalul de intrare sub formă de spectru*, domeniul de reprezentare al caracteristicilor Bode se adoptă în funcție de acest spectru. În concret, caracteristicile Bode se reprezintă pe acel domeniu de pulsații pentru care spectrul semnalului de intrare ia valori care nu sunt neglijabile, adică pe domeniul $[-2\pi f_B, 2\pi f_B]$ unde f_B este frecvența de bandă a semnalului de intrare, sau pe un domeniu mai larg care include intervalul $[-2\pi f_B, 2\pi f_B]$.

3. Construcția caracteristicilor Bode

Din punct de vedere practic se disting două situații:

- cazul când sunt necesare construcții exacte ale caracteristicilor Bode,
- cazul când sunt suficiente construcții aproximative ale caracteristicilor Bode.

În prima situație se folosesc programe de calcul, de exemplu facilitățile oferite de mediul Matlab-Simulink (v. Secțiunea 1 din acest paragraf).

În continuare ne referim la cea de a doua situație pentru care, de regulă se folosește metoda grafo-analitică.

A. Principiul metodei grafo-analitice de construcție a caracteristicilor Bode

Principiul construcției este cel al “jocului de lego” în sensul realizării unei construcții prin îmbinarea unui număr limitat de tipuri de piese. În cazul de față: *caracteristicile Bode ale unui sistem se obțin prin compunere, folosind ca piese caracteristicile Bode ale unor elemente de transfer tipizate.*

Compunerea se realizează pe baza următorului rezultat: *caracteristicile Bode ale unei conexiuni serie se obțin prin însumarea, punct cu punct, a caracteristicilor Bode ale subsistemelor (componentor) înseriate.*

Afirmația poate fi argumentată cu ușurință. Astfel, pentru conexiunea din figură avem $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$, respectiv

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega). \quad (9)$$



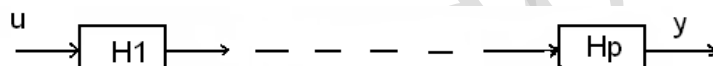
Întrucât

$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \arg H(j\omega)}$, $H_1(j\omega) = |H_1(j\omega)| \cdot e^{j \arg H_1(j\omega)}$, $H_2(j\omega) = |H_2(j\omega)| \cdot e^{j \arg H_2(j\omega)}$, prin înlocuire în (9) obținem egalitățile

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| \cdot |H_2(j\omega)| \\ \arg H(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_2(j\omega) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} = |H_1|_{dB} + |H_2|_{dB} \\ \phi_H = \phi_{H_1} + \phi_{H_2} \end{cases} \quad (10)$$

Interpretarea rezultatului: *caracteristicile Bode ale conexiunii, $|H|_{dB}$, ϕ_H , se obțin prin însumarea punct cu punct a caracteristicilor Bode ale celor două subsisteme înseriate, $|H_1|_{dB}$, ϕ_{H_1} și $|H_2|_{dB}$, ϕ_{H_2} .*

Generalizăm rezultatul considerând conexiunea serială din figură, alcătuită din p sisteme de tip SISO:



Sistemul, în ansamblu, are funcția de transfer $H(s) = \prod_{i=1}^p H_i(s)$, respectiv funcția răspuns la pulsație $H(j\omega) =$

$\prod_{i=1}^p H_i(j\omega)$. Această egalitate se rescrie sub forma: $|H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} = \prod_{i=1}^p (|H_i(j\omega)| e^{j \arg H_i(j\omega)})$. Rezultă că;

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \prod_{i=1}^p |H_i(j\omega)| \\ \arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^p \arg H_i(j\omega) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} |H|_{dB} = \sum_{i=1}^p |H_i|_{dB} \\ \phi_H = \sum_{i=1}^p \phi_{H_i} \end{cases} \quad (11)$$

Deci, caracteristicile Bode ale unei conexiuni serie se obțin prin însumarea punct cu punct a caracteristicilor Bode ale subsistemelor înseriate.

Reciproc, acest rezultat poate fi folosit în următoarea idee:

- i) Presupunem că avem o funcție de transfer $H(s)$ pe care o descompunem în factori sub forma:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod (T_j s + 1)}{\prod (T_i s + 1)} \frac{\prod (T_l''^2 s^2 + 2\zeta_l T_l'' s + 1)}{\prod (T_k''^2 s^2 + 2\zeta_k T_k'' s + 1)} \cdot e^{-T_m s} \quad (12)$$

- ii) Interpretăm expresia (12) ca funcție de transfer a unei conexiuni serie realizată prin asocierea a câte unui element de transfer tipizat pentru fiecare factor (aceste elemente de transfer sunt piesele jocului de lego!).
- iii) Se reprezintă caracteristicile Bode ale elementelor de transfer asociate factorilor identificați.
- iv) Se determină caracteristicile Bode ale conexiunii însumând punct cu punct caracteristicile Bode de la punctul iii).

Problema reprezentării grafice poate fi simplificată și mai mult folosind noțiunea de element de transfer invers.

Astfel, dacă un sistem are f.d.t. $H(s)$, atunci un sistem cu funcția $\frac{1}{H(s)}$ se numește *element de transfer invers*.

Simplificarea se bazează pe faptul că sistemul cu f.d.t. $H(s)$ și elementul de transfer invers asociat au caracteristicile Bode simetrice în raport cu axa ω_{lg} (axa logaritmică a pulsației). De exemplu, caracteristicile Bode ale ET-PD sunt simetrice în raport cu axa ω , față de caracteristicile Bode ale ET-PT₁ corespunzător, iar caracteristicile Bode ale ET-PD₂ sunt simetrice în raport cu axa ω față de caracteristica ET-PT₂ corespunzător.

Bibliografie: Dragomir, T. L., Teoria Sistemelor - Aplicații 2, Ed. Politehnica, 2008. (v. Explicațiile din culegerea de probleme).

B. Caracteristici Bode pentru elemente de transfer tipizate

1. **ET-P** Deoarece $H(s) = k$, avem: $\begin{cases} |H(j\omega)| = k \\ \arg H(j\omega) = 0 \end{cases}$, respectiv

$$\begin{cases} |H|_{dB} = 20 \lg k = |k|_{dB} \\ \varphi_H = 0 \end{cases}$$

Reprezentarea grafică este cea din figura alăturată.

2. **ET-I** $H(s) = \frac{1}{s}$ $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j(\pi/2)}$

$$\text{Deci: } |H| = \frac{1}{\omega} \rightarrow |H|_{dB} = -20 \lg \omega = -20 \omega_{lg}$$

$$\text{iar } \arg H = -\frac{\pi}{2}; \rightarrow \varphi_H = -\frac{\pi}{2}$$

Diagramele au aspectul din figura alăturată.

3. **ET-D** $H(s) = s$

Caracteristicile Bode ale ET-D se construiesc având în vedere că ET-D este inversul ET-I.⁴⁾



⁴⁾ Spațiile libere se completează la curs.

4. **ET-Tm** $H(s) = e^{-\tau s} \rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ $\begin{cases} |H(j\omega)| = 1 \Rightarrow |H|_{dB} = 0 \\ \arg H(j\omega) = -\omega\tau = -\tau \cdot 10^{\lg\omega} = -\tau \cdot 10^{\omega_{lg}}, 1) \end{cases}$

5. **ET-PT₁** $H(s) = \frac{K}{Ts+1} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} e^{-j\arctg(\omega T)}$

Deci $|H| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ iar $\arg H = -\arctg \omega T$.

Modulul $|H|$ se poate aproxima astfel:

$$|H| \approx \begin{cases} 1, & \text{daca } \omega T < 1; \\ \frac{1}{\omega T}, & \text{daca } \omega T > 1. \end{cases} \quad (13)$$

Se introduce notația:

$$\omega_0 = \frac{1}{T}, \quad (14)$$

unde ω_0 se numește *pulsație de frângere*. Atunci relația (13) devine:

$$|H| \approx \begin{cases} 1, & \text{daca } \omega < \frac{1}{T}; \\ \frac{1}{\omega T}, & \text{daca } \omega > \frac{1}{T}; \end{cases} \rightarrow |H|_{dB} \cong \begin{cases} 0, & \text{daca } \omega < \omega_0; \\ 20 \cdot (\omega_{0lg} - \omega_{lg}), & \text{daca } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a caracteristicilor Bode este cea din figură. S-a considerat $\varphi_H = -\arctg \omega T$.

Exemplu 1: Să se determine caracteristicile Bode ale sistemului din figură considerând că $R=10k\Omega$ și $C=0.01 \mu F$.

Cuadripolul are modelul matematic: $RCy^{(1)}(t)+y(t)=u(t)$, respectiv f.d.t.

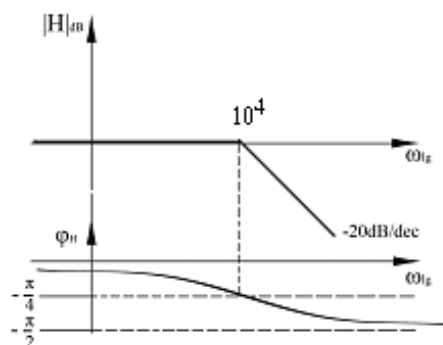
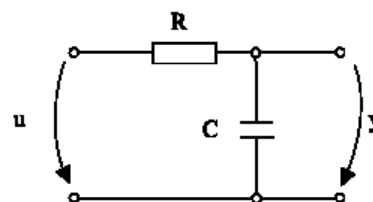
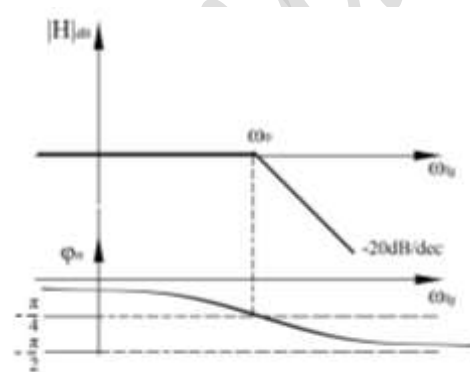
este: $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$. Constanta de timp a sistemului este $T = RC = 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ sec} = 0.1 \text{ msec}$.

Rezultă pulsația de frângere $\omega_0 = \frac{1}{T} = 10^4 \text{ sec}^{-1}$.

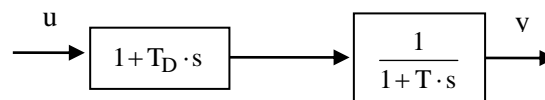
Pentru reprezentarea grafică a caracteristicilor Bode particularizăm construcția din cazul general folosindu-ne de ω_0 și de pantele c.a.p..

6. **ET-PD** $H(s) = K \cdot (1 + T_D \cdot s)$

ET-PD este ET invers al ET-PT₁.



Exemplul 2. Ca aplicație la cele prezentate se consideră $\boxed{\text{ET-PDT}_1}$. El are f.d.t. $H(s) = K \cdot \frac{1 + T_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$. Pentru simplitate adoptăm $K=1$. Elementului de transfer i se poate asocia schema bloc din figură, adică o structură în care apar înseriate un ET-PD și un ET-PT₁.



Se disting 2 cazuri $T_D > T \Rightarrow$ ET cu anticipare-întârziere (lead-lag);

$T > T_D \Rightarrow$ ET cu întârziere anticipare (lag-lead).

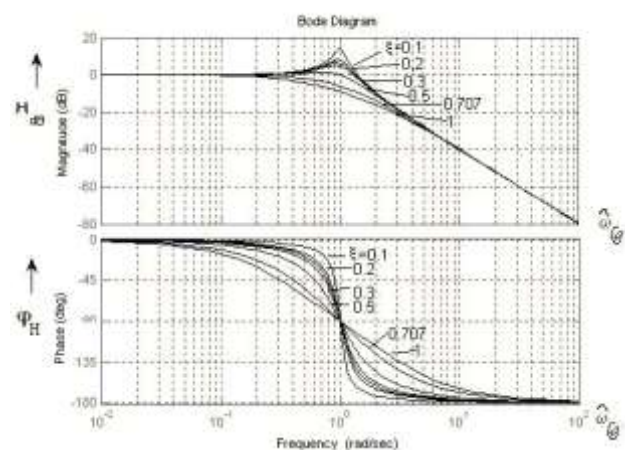
7. $\boxed{\text{ET-PT}_2}$...F.d.t. este $H(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2\xi T \cdot s + 1}$

sau $H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$. Formulele sunt

legate prin relația $\omega_n = \frac{1}{T}$.

În figura alăturată sunt reprezentate caracteristicile Bode ale ET-PT₂. S-a considerat $K = 1$. În abscisă

s-a utilizat variabila $\hat{\omega}_{lg} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)_{lg}$, numită



pulsăție raportată, în loc de ω_{lg} , denumită în acest context *pulsăție absolută*. Amortizarea ξ joacă rol de parametru. Ca urmare, spre deosebire de cazurile anterioare, nu mai avem două caracteristici ci două

familiei de caracteristici corespunzătoare diferitelor valori ale lui ξ . Familia de c.a-p. redă faptul că pentru ξ foarte mică apare un *vârf de rezonanță*, cu atât mai pronunțat cu cât valoarea lui ξ este mai redusă.

8. **ET-DT₂** $H(s) = K \cdot (T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)$. Întrucât pentru $K = 1$ cele două elemente de transfer de la punctele 7 și 8 sunt inverse, caracteristicile Bode din acest caz sunt în principiu simetrice în raport cu axele ω_{lg} sau

$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{lg}$ față de cele de la punctul 7.

4. Tipuri de probleme în care se folosesc caracteristici Bode

A. Filtre

Transmiterea, generarea sau prelucrarea de semnale este afectată în general de perturbații. Pentru prelucrarea semnalelor afectate de perturbații se interpun, în aval de receptor filtre. Filtrele sunt subsisteme destinate prelucrării semnalelor de intrare astfel încât semnalele de la ieșirea lor să rețină numai o parte din componentele semnalului de intrare (sau din spectrul semnalului de intrare). Cu ajutorul filtrelor:

- i) pot fi eliminate componentele parazite ale semnalului de intrare, atunci când acesta este afectat de perturbații parazite, reținându-se semnalul util (semnalul purtător de informație);
- ii) pot fi selectate componente dintr-o bandă îngustă din semnalul de intrare necesare pentru prelucrări ulterioare (filtre selective) sau dintr-o bandă largă (filtre trece jos, - trece bandă sau -trece sus), componentele din afara plajei fiind rejectate.

Principalul mod de caracterizare al filtrelor îl reprezintă f.d.t. și caracteristicile Bode asociate.

Cu titlu de exemplu, ne referim la trei filtre de ordin 2 care apar frecvent în aplicații. De obicei amortizarea lor

are valoarea $\xi_F = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pulsăția ω_F este pulsăția

proprie a filtrului. Reprezentăm doar c.a-p.

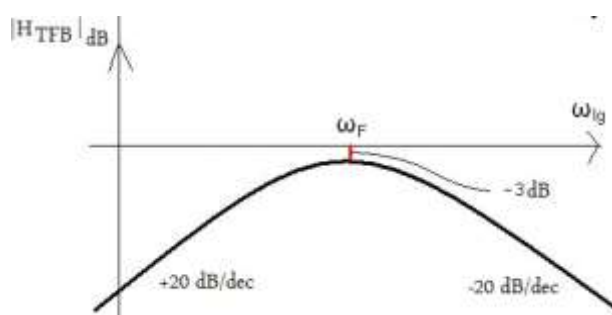
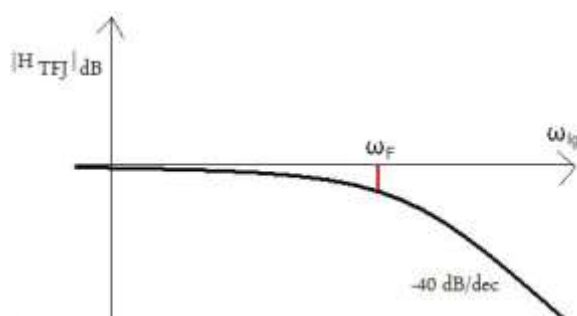
a) *Filtrul trece-jos* cu f.d.t.

$$H_F(s) = \frac{1}{T_F^2 s^2 + 2\xi_F T_F s + 1} \text{ sau}$$

$$H_F(s) = \frac{\omega_F^2}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2};$$

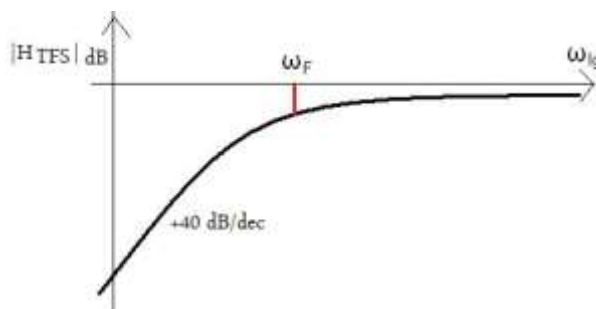
b) *Filtrul trece-bandă* cu f.d.t.

$$H(s) = \frac{s\omega_F}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2};$$



c) *Filtrul trece-sus* cu f.d.t.

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta_F \omega_F s + \omega_F^2}$$



B. Definirea unor indicatori de calitate ai sistemelor cu ajutorul caracteristicilor Bode

În tehnică, pentru evaluarea diverselor aparate destinate prelucrării de semnale sau pentru evaluarea unor sisteme de reglare, se utilizează pe lângă indicatorii de calitate definiți în §.2.1, și indicatori definiți pe baza caracteristicilor Bode ale aparatelor, respectiv ale sistemelor de reglare.

De regulă se consideră că atenuările semnificative se produc atunci când $|H| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Aceasta înseamnă

$$|H|_{dB} < 20 = \lg \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \Leftrightarrow |H|_{dB} < -3 \text{ dB}.$$

În acest context pe c.a.-p se definesc două mărimi: *banda de pulsație* și *pulsația de bandă*. Modul în care sunt definite rezultă din figură. *Banda de pulsație* este notată cu Δ_b și reprezintă domeniul de valori ale lui ω pentru care $|H|_{dB} \geq -3 \text{ dB}$. Banda de pulsație este mărginită superior de valoarea ω_b numită *pulsația de bandă*.

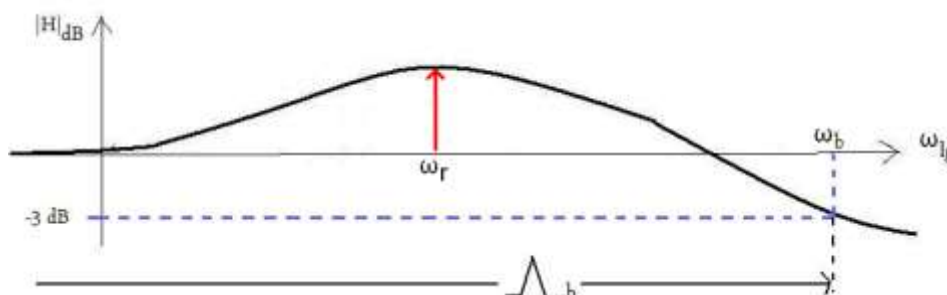


Figura evidențiază și posibilitatea producerii unor procese rezonante. Ele se manifestă față de componentele sinusoidale ale semnalului de intrare de pulsații apropiate de ω_r , pe care le amplifică foarte mult.

Banda de pulsații, pulsația de bandă și $|H(j\omega_r)|_{dB}$ sunt considerate *indicatori de calitate* ai sistemelor. De regulă se cere ca primii doi să aibă valori cât mai mari, iar cel de al treia să tindă spre valoarea 0 dB.