LUCRAREA DE LABORATOR NR.5

SEMNALE ARMONICE ALIAS.
ELEMENTUL DE TRANSFER PT_1 ÎN DIFERITE REGIMURI DE FUNCȚIONARE.

1. Obiective

- aprofundarea efectului alias,
- recapitularea unor noțiuni referitoare la regimurile de funcționare ale sistemelor,
- studiul comportării elementului de transfer de tip PT_1 (sistem liniar de ordinul I în timp continuu),
- utilizarea de modele Simulink pentru atingerea obiectivelor anterioare.

2. Semnale armonice alias

- Efectul alias (dedublarea prin eșantionare) este o consecință a eșantionării semnalelor în timp continuu. Efectul constă în faptul că, în anumite situații, în urma eșantionării cu aceeași frecvență f_s a unor semnale în timp continuu diferite se obțin semnale în timp discret identice. Ca urmare, secvențele rezultate prin eșantionare nu ne permit să distingem semnalele în timp continuu din care provin.
- În continuare ne referim numai la semnale armonice alias. Prezentarea se bazează pe aspectele discutate în secțiunea 1 din § 1.3: Efecte ale eşantionării din curs.

În raport cu pasul de eșantionare *h*, respectiv cu *frecvența de eșantionare* $f_s = \frac{1}{h}$, semnalele $x_n(t)$ din familia de semnalele armonice

$$x_n(t) = x_m \cdot sin(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t + \varphi) \text{ cu } t \in \mathbf{R},\ \varphi \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z} \qquad (1)$$

sunt semnale alias. Ele au aceeași fază inițială φ, iar frecvențele lor verifică relația:

$$f_n = \frac{n}{h} + \frac{\omega}{2\pi} = n \cdot f_s + f\ . \qquad (2)$$

(Frecvența f_n diferă față de frecvența $f = \frac{\omega}{2\pi}$ a semnalului $x_0(t)=x_m \cdot sin(\omega t+\varphi)$ cu un multiplu de n frecvențe de eșantionare f_s).

Prin eșantionarea semnalului $x_n(t)$ la momentele $t_k = kh$, $k \in \mathbf{Z}$ rezultă semnalul în timp discret:

$$x_n[k] = x_m \cdot sin(\frac{2\pi}{h} nkh + \omega kh + \varphi) = x_m \cdot sin(2\pi kn+\omega kh+\varphi) = x_m \cdot sin(\omega kh+\varphi). \qquad (3)$$

Rezultatul nu depinde de n. În consecință, toate semnalele eșantionate $\{x_n[k]\}_{k\in Z}$, $n \in \mathbf{Z}$ sunt identice. Faza inițială φ are rol de parametru.

Cea mai mică frecvență în valoare absolută dintre frecvențele f_n se numește *frecvență alias principală* și o notăm cu f_a. Valoarea n_a a lui n pentru care se obține frecvența alias principală se determină din condiția $-\frac{1}{2} f_s < f_n \le \frac{1}{2} f_s$, adică din dubla inecuație:

$$-\frac{1}{2} f_s < \underbrace{f_s \cdot n_a + f}_{f_a} \le \frac{1}{2} f_s\ . \qquad (4)$$

Semnalul sinusoidal de frecvență alias principală este

$$x_a(t)=x_m \cdot sin(2\pi f_a t+\varphi)\ . \qquad (5)$$

- Cele prezentate cu privire la familia de semnale sinusoidale (1) sunt valabile și pentru familia de semnale cosinusoidale

$$x_n(t) = x_m \cdot cos(2\pi \frac{n}{h} t + \omega t + \varphi) \text{ cu } t \in \mathbf{R}\text{ , } n \in \mathbf{Z}\text{ , } \varphi \in \mathbf{R}\text{ .} \qquad (6)$$

Pentru semnalele (1) și (6) relația (4) de calcul a *frecvenței alias principală* se generalizează sub forma

$$f_a = |f_S n_a + f| \ , \qquad (7)$$

n_a fiind soluția dublei inecuații (4).

- În cele ce urmează se exemplifică câteva din aspectele de mai sus. În toate situațiile se consideră semnale bilaterale (definite pe $\boldsymbol{R}$) eșantionate cu frecvența f_s = 400 Hz.
    - Semnalele $u_1(t) = 70\cdot\sin(300\pi t+0.23)$ și $u_2(t) = 70\cdot\sin(2700\pi t+0.23)$ sunt semnale alias în raport cu f_s întrucât: i) au aceeași fază inițială φ=0.23 rad.; ii) f_2-f_1=3$\cdot f_s$. Frecvența alias principală se poate calcula din oricare dintre frecvențele f_1=150 Hz și f_2=1350 Hz. Astfel, pentru f_1 din (4) avem: $-200 < 400\cdot n_a+150 \leq 200$, respectiv $n_a = 0$ și $f_a = 0\cdot 400 + f_1 = f_1$, iar pentru f_2: $-200 < 400\cdot n_a+1350 \leq 200$, respectiv $n_a = -3$ și $f_a = (-3)\cdot 400 + f_2 = f_1$.
    - Toți divizorii pozitivi ai diferenței f_2-f_1=1200 Hz reprezintă frecvențe de eșantionare în raport cu care semnalele $u_1(t)$ și $u_2(t)$ sunt semnale alias. Frecvența f_s = 400 Hz corespunde unuia dintre divizori.
    - Spectrul de amplitudine al semnalului $u_1(t)$ conține 2 linii cu lungimea de 35 de unități amplasate la frecvențele $-f_1$ și f_1, iar cel al semnalului $u_2(t)$ tot două linii de aceeași lungime amplasate la frecvențele $-f_2$ și f_2. Semnalul compus $u_3(t) = \alpha\cdot u_1(t)+\beta\cdot u_2(t)$ va conține 4 linii spectrale de amplitudini de $35\cdot\alpha$ sau $35\cdot\beta$ amplasate la frecvențele $-f_2$, $-f_1$, f_1 și f_2. Eșantionând pe $u_3(t)$ se obține însă același rezultat ca și când am eșantiona semnalul $u_4(t) = (\alpha+\beta)\ u_1(t)$. Spectrul semnalului $u_4(t)$ conține doar liniile spectrului semnalului $u_1(t)$ înmulțite cu $\alpha+\beta$.
    - Modelul Simulink din Fig. 5.1 permite studierea unora dintre aspectele discutate mai sus.

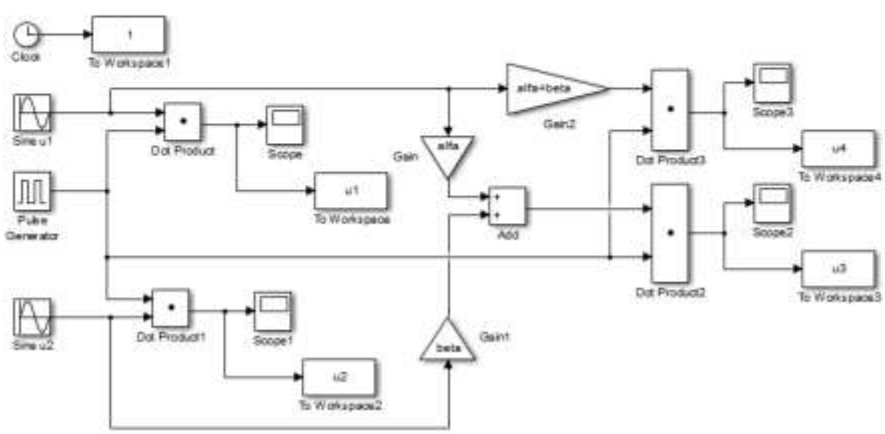

Fig. 5.1

În Fig. 5.2 apar modul de setare a parametrilor generatoarelor de semnale și fișierul script folosit:

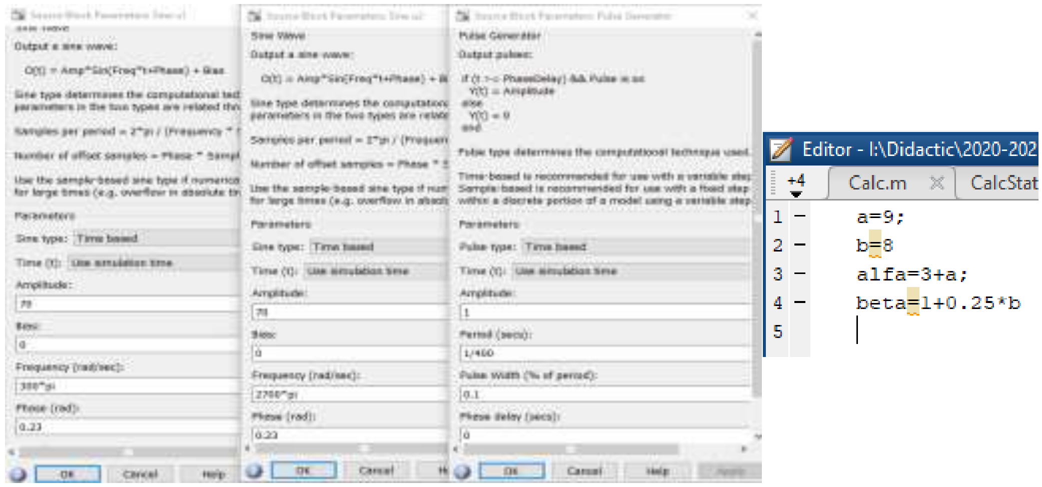

Fig. 5.2

Mai jos, în Fig. 5.3, sunt redate câteva dintre rezultatele obținute (v. denumirile osciloscoapelor):

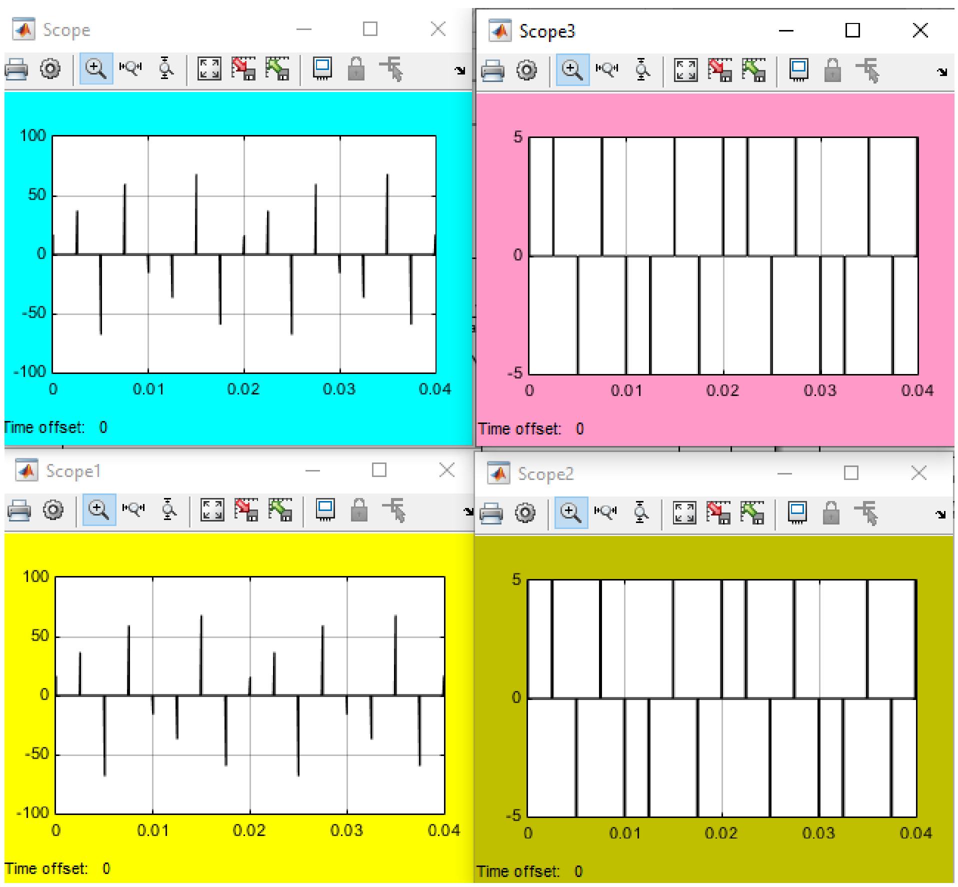

Fig. 5.3

3. Regimuri de funcționare

- Prin *regim de funcţionare al unui sistem fizic* se înţelege un mod de comportare în timp al sistemului destinat realizării unei anumite operații. În acord cu principiul cauzalităţii, un regim de funcţionare al unui sistem este determinat de un anumit semnal de intrare şi/sau de o stare iniţială de echilibru, sau dezechilibru, a sistemului și este caracterizat printr-o succesiune continuă sau discretă de puncte de funcţionare în "spaţiul" coordonatelor, succesiune numită *traiectorie asociată regimului de funcţionare*.
- Din punctul de vedere al variaţiilor în timp ale semnalelor dintr-un sistem distingem două tipuri de regimuri:
  - *regimuri permanente*, caracterizate prin faptul că semnalele variază în timp după funcţii tipizate (*treaptă unitară, rampă unitară, parabolă unitară, semnal armonic)* sau după alte funcții bine precizate, de exemplu funcții periodice;
  - *regimuri tranzitorii*, caracterizate prin faptul că variabilele informaţionale variază în timp după funcţii netipizate, sistemul trecând de regulă de la un regim permanent la altul.
- Principalele tipuri de regimuri permanente sunt**:**
  1) *Regimul staţionar sau permanent constant* - este caracterizat prin faptul că variabilele informaţionale ale mărimilor caracteristice sunt constante pe subintervale de timp suficient de lungi.
  2) *Regimul permanent proporţional* - este caracterizat de faptul că variabilele informaţionale asociate mărimilor caracteristice variază în timp, pe subintervale de timp suficient de lungi, după funcţii rampă.
  3) *Regimul permanent parabolic* - este caracterizat de faptul că variabilele informaţionale asociate mărimilor caracteristice variază în raport cu timpul, pe subintervale de timp suficient de lungi, după funcţii parabolice.
  4) *Regimul permanent sinusoidal*, numit şi *regim armonic* sau *regim sinusoidal cvasistaţionar* - este caracterizat prin aceea că toate mărimile caracteristice, coordonate ale punctului de funcţionare, variază în timp după funcţii armonice.
- În practică sunt importante și următoarele situații particulare: *regimul forțat* și *regimul liber*. Fie un sistem cu orientarea $u \to y$ având condițiile inițiale y(0). Atunci:
  - regimul forțat are loc când $u(t) \neq 0$ și $y(0) = 0$,
  - regimul liber are loc când $u(t) = 0$ și $y(0) \neq 0$.

  În cazul sistemelor liniare și doar în acest caz, un regim oarecare declanșat de un semnal de intrare u(t) și de condiții inițiale $y(0) \neq 0$ se poate obține prin superpoziția regimului forțat ($u(t) \neq 0$ și $y(0) = 0$) cu regimul liber ($u(t) = 0$ și $y(0) \neq 0$).

4. Elementul de transfer PT_1

- Denumirea de element de transfer PT_1 (ET-PT_1) este o denumire alternativă pentru sistemul liniar (8), de ordinul I, cu orientarea $u \to y$:

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t) . \qquad (8)$$

K și T sunt parametrii modelului, în același timp și coeficienți: K – amplificare, T – constantă de timp.[1]
Răspunsul sistemului la un semnal de intrare u(t), $t \in R_+ = [0, \infty)$ și condiții inițiale y(0) date se poate obține prin integrarea ecuației diferențiale (8), sau folosindu-ne de calcule în domeniul operațional. În al doilea caz avem:

[1] Sistemul (8) este considerat că realizează un transfer de informație intrare-ieșire în contextul prelucrării semnalului de intrare u(t). Atributul „proporțional" este dat de membrul drept, $K \cdot u$ fiind o cantitate proporțională cu u, iar atributul „temporizare de ordinul I" este dat de membrul stâng, în care ordinul de derivare este 1 (inerția este dată de un singur proces de acumulare).

$$(8) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T\cdot(s\cdot y(s)-y(0))+y(s)=K\cdot u(s)\ ,$$

deci

$$y(s)=\frac{K}{T\cdot s+1}\cdot u(s)+\frac{T}{T\cdot s+1}\cdot y(0)\,. \quad (9)$$

Pentru modelarea ET-PT1 în Simulink/Xcos se poate folosi atât modelul bazat pe operația de integrare în raport cu timpul care rezultă din (8),

$$y(t)=\int_0^t\left[\frac{1}{T}(-y(\tau)+K\cdot u(\tau))\right]\cdot d\tau+y(0)\,, \qquad (10)$$

sau MM-ISI de ordinul I (11)

$$\begin{cases}[\dot{x}(t)]=\left[-\frac{1}{T}\right]\cdot[x(t)]+\left[\frac{K}{T}\right]\cdot[u(t)],\ x(0)=y(0)\\ [y(t)]=[1]\cdot[x(t)]+[0]\cdot[u(t)]\end{cases}, \qquad (11)$$

cât și modelul operațional (12), bazat pe relația (9):

$$y(s)=F_1(s)\cdot u(s)+F_2(s)\cdot\frac{y(0)}{s}\,, \qquad (12)$$

pentru care $F_1(s)=\frac{K}{T\cdot s+1}$ și $F_2(s)=\frac{T\cdot s}{T\cdot s+1}$ se modelează folosind blocuri „Transfer Fcn”, iar $\frac{y(0)}{s}$ se obține ca ieșire a unui bloc „Gain” a cărui intrare se leagă la un generator de semnal treaptă unitară.

Cele trei variante sunt reprezentate în figurile următoare. Schema Simulink din Fig. 5.4 permite studierea comportării ET-PT$_1$ la aplicarea de semnale treaptă, rampă și parabolă unitară (ieșirile „treapta”, „rampa” și „parabola”).

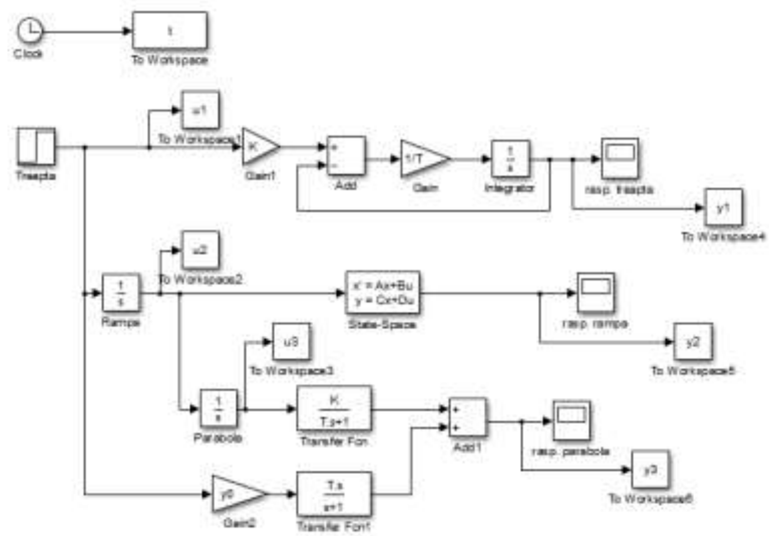

Fig. 5.4

Răspunsurile obținute și interfața blocului State-Space sunt următoarele (Fig. 5.5):

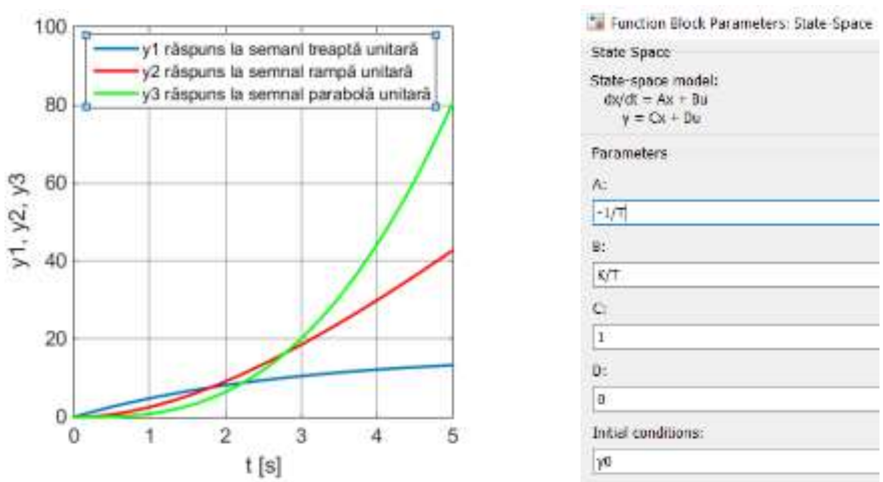

Fig. 5.5

- Din (9) rezultă că expresia răspunsului ET-PT1 la un semnal treaptă unitară în condiții inițiale nenule este:

$$y(s)=\frac{K}{T\cdot s+1}\cdot\frac{1}{s}+\frac{T\cdot y(0)}{T\cdot s+1}\bullet\!-\!\circ\; y(t)=\underbrace{K\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})}_{raspuns\ fortat}+\underbrace{y(0)\cdot e^{-\frac{t}{T}}}_{raspuns\ liber}\quad. \qquad (13)$$

Primul termen conține răspunsul forțat, iar al doilea termen răspunsul liber. Potrivit acestei relații, răspunsul sistemului ajunge, teoretic, în regim permanent pentru $t\to\infty$. Practic, se consideră însă că regimul permanent se atinge în momentul de la care începând răspunsul se încadrează într-o plajă de $\pm$ p% din valoarea K.

Este ușor de verificat că răspunsul forțat ajunge în plaja de p = $\pm$ 5% după $\approx 3\cdot T$ secunde, în plaja de p = $\pm$ 2% după $\approx 3.9\cdot T$ secunde, iar în plaja de p = $\pm$ 1% după $\approx 4.6\cdot T$ secunde.

Fig. 5.6 evidențiază faptul că pentru T = 2.8 secunde și K = 16 răspunsul ajunge în plaja de p = $\pm$5 % după $\approx$ 3 T = 8.4 secunde și în plaja de p = $\pm$ 2% după 3.9 T = 10.92 secunde. Totodată, figura redă o proprietate importantă a graficului răspunsului: *în orice punct M de pe grafic lungimea subtangentei aste egală cu T.*

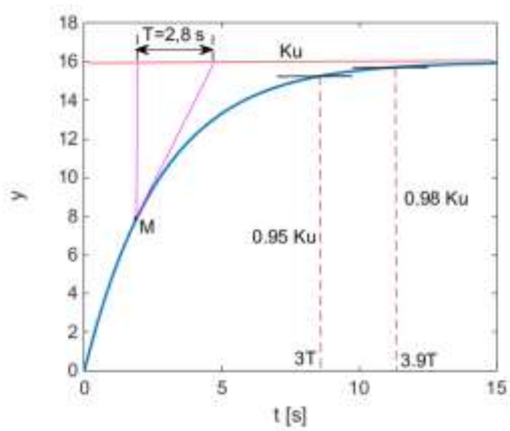

Fig. 5.6

Fig. 5.7 ilustrează influența parametrilor K și T asupra răspunsului la semnal treaptă unitară $y_\sigma(t)$ (denumit și funcție indicială)[2]. Astfel: i) sistemul fiind liniar mărirea lui K de m ori se soldează cu mărirea valorilor răspunsului de m ori în orice moment t; ii) creșterea/scăderea valorii lui T face răspunsul mai lent/rapid.

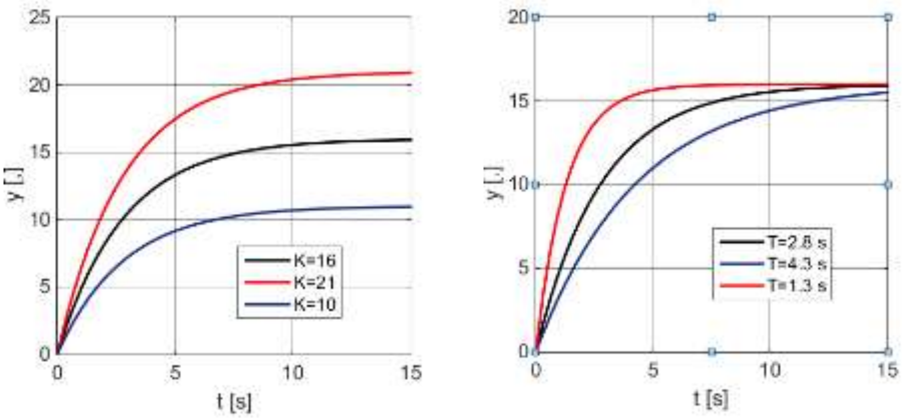

Fig. 5.7

5. **Tema de casă Nr. 5** [3]

Nume și prenume	*Nr. matricol*	*S_1 = suma cifrelor numărului matricol* *S_4 = suma cifrelor pare din numărul matricol*	*a = S_1mod7* *b = S_4mod3*	*Data completării formularului*

TEMA DE CASĂ NR. 5

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

1.1. Reprezentați spectrele de amplitudine și fază ale semnalului $u(t)=70\cdot\sin(300\pi t+0.23)+70\cdot\sin(2700\pi t+0.23)$.

Se inserează spectrul de amplitudine. Atenție la notarea axelor!
Se inserează spectrul de fază. Atenție la notarea axelor!

1.2. Reprezentați grafic, prin adaptarea modelului Simulink dat în lucrare, semnalele care rezultă prin eșantionarea componentelor semnalului u(t) și a lui u(t) cu frecvența $f_s = 2^a\cdot3\cdot5^b$. Explicați rezultatul.

Se inserează 3 grafice sau oscilograme cu cele 3 semnale eșentionate.
Se formulează explicația cerută.

1.3. Construiți un model Simulink care să permită calculul lui y(t) potrivit formulei (13). Reprezentați pe aceeași figură pe y(t) și componentele sale (răspunsul forțat și răspunsul liber). Se consideră T = (a+1)/5 secunde, K = b+1, y(0) = a – b.

[2] Pentru K s-au considerat valorile 16, 21, 26, iar pentru T valorile 1.3 s, 2.8 s și 4.2 s.
[3] Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS_II-CTI_TC_05.docx.

Se inserează o figură cu modelul Simulin cerut.
Se inserează figura cu cele 3 grafice. Atenție la notarea axelor!

1.4. Pentru modelul Simulink din secțiunea 3 a lucrării se consideră la intrare, în locul semnalului treaptă unitară din figură, semnalul u(t) = σ(t) + 2$\cdot\sigma$ (t-3). Condițiile inițiale se consideră nule, y(0) = 0. Reprezentați pe aceeași figură, pentru intervalul de timp [0, 6] secunde semnalele $y_1(t)$ și $y_2(t)$. Comentați rezultatul. Se consideră T = (a+1)/5 secunde, K = b+1.

Se inserează separat sau pe o singură figură răspunsurile $y_1(t)$ și $y_2(t)$.
Se inserează un comentariu de interpretare a răspunsurilor.

2. Să se demonstreze că răspunsul indicial al ET-PT$_1$ ($T\cdot\dot{y}(t)+y(t)=K\cdot u(t)$, T > 0, K > 0) dat de relația $y_\sigma(t)=K\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})$ are proprietatea $\frac{y_\sigma(t+T)-y_\sigma(t)}{y_\sigma(\infty)-y_\sigma(t)}=1-e^{-1}$. Să se calculeze $\frac{y_\sigma(t+k\cdot T)-y_\sigma(t)}{y_\sigma(\infty)-y_\sigma(t)}$, $k\in N$ și să se interpreteze rezultatul. S-a notat $y_\sigma(\infty)=\underbrace{\lim}_{t\to\infty} y_\sigma(t)$.

Se inserează demonstrația relației $\frac{y_\sigma(t+T)-y_\sigma(t)}{y_\sigma(\infty)-y_\sigma(t)}=1-e^{-1}$.
Se înscrie rezultatul calculului cerut și interpretarea rezultatului.