§ 1.2 Tipuri de semnale. Caracterizarea semnalelor în domeniul operațional

1. Semnale deterministe. Semnale aleatoare

Se numeşte semnal determinist un semnal ale cărui valori sunt bine cunoscute în orice moment sau un semnal care poate fi descris ca o funcíe de timp luând în fiecare moment o valoare unică. Un semnal determinist este predictibil.

Se numeşte semnal aleator un semnal ale cărui valori sunt incerte în orice moment. Un semnal aleator nu poate fi descris prin funcții de timp. El poate fi modelat doar prin mijloace probabilistice, de exemplu prin probabilităţile de a lua valori într-un interval sau altul de valori (distribuţii de probabilitate ca funcții de timp). Teoretic, unui semnal aleator îi pot fi asociate în fiecare moment o infinitate de valori. Nu este predictibil.

Cu toate că în practică majoritatea semnalelor sunt aleatoare, problemele pot fi abordate de cele mai multe ori folosind semnale deterministe, de aproximare. De aceea, în cele ce urmează lucrăm numai cu semnale deterministe.

2. Semnale standard

Semnalele standard se folosesc pentru a pune în evidenţă modul în care un sistem se comportă în situaţii relevante din punct de vedere tehnic. Dacă comportarea unui sistem în raport cu astfel de semnale corespunde scopului urmărit, sistemul îndeplinindu-și rolul, atunci, potrivit standardelor, se admite că sistemul va avea o comportare corespunzătoare şi în situaţiile reale, mai puţin solicitante, „acoperite” de situaţiile standard considerate.

Pe de altă parte, pentru a putea anticipa comportarea sistemelor în raport cu semnalele standard pe bază modelelor matematice ale sistemelor, semnalele standard trebuie să fie şi uşor manipulabile matematic.

În acest context, principalele semnale standard sunt:

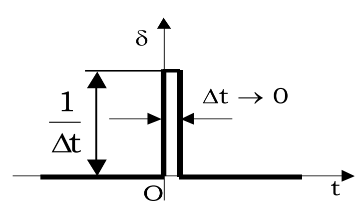
- ✓ semnalul impuls unitar;
- ✓ semnalul treaptă unitară;
- ✓ semnalul rampă unitară;
- ✓ semnalul parabolă unitară;
- ✓ semnalul sinusoidal.

A. Semnale standard în timp continuu

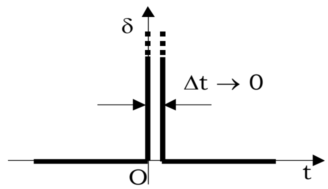
a) Semnalul impuls unitar $\delta(t)$

Este folosit pentru a caracteriza situaţii de solicitare foarte intensă și de foarte scurtă durată a unui sistem.

Pentru perceperea lui considerăm ca punct de plecare *impulsul real normat* din figură, adică un impuls de arie egală cu unitatea și durată Δt foarte mică ($\Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t} = 1$).



Semnalul *impuls unitar $\delta(t)$*, numit și *impuls Dirac*, se consideră că se obţine din impulsul real normat prin trecere la limită pentru $\Delta t\rightarrow 0$. Impulsul Dirac se reprezintă în modul următor:



În mod riguros, impulsul Dirac nu este o funcţie propriu-zisă ci o ***distribuţie*** și anume funcţia generalizată caracterizată prin *proprietatea de extracţie* exprimată prin relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\ ,$$

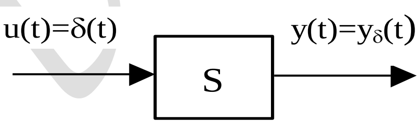
cu $f(t)$ definită pe $\boldsymbol{R}$. Potrivit acestei definiții, combinarea lui $f(t)$ cu distribuţia Dirac $\delta(t-t_0)$ extrage din $f(t)$ valoarea de la momentul t_0, adică pe $f(t_0)$. În particular, pentru $t_0 = 0$ obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t)dt = f(0)\ .$$

În practică se consideră în mod frecvent că impulsul Dirac este o funcție propriu-zisă caracterizată prin relaţiile:

$$\begin{cases}\delta(t)=0,\ t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{dt}=1\end{cases}.$$

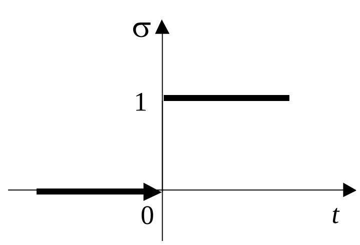
Răspunsul unui sistem la impuls Dirac se numeşte *funcţie răspuns la impuls* sau *funcţie pondere* şi se notează cu $h(t)$ sau $y_\delta(t)$.



Așa cum se va arăta, în cazul sistemelor liniare, $h(t)$ reprezintă un model matematic al sistemului, iar acest fapt întărește și mai mult importanța impulsului Dirac.

b) Semnalul treaptă unitară $\sigma(t)$

Semnalul treaptă unitară serveşte pentru a modela situaţii practice de tip „acţiune intensă de lungă durată”.

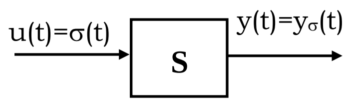


$$\sigma(t) = \begin{cases} 0\,, t < 0 \\ 1\,, t \geq 0 \end{cases}.$$

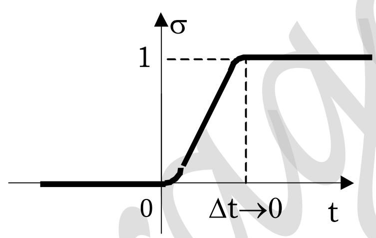
Matematic, există şi alte variante de modelare a semnalului treaptă unitară. De pildă:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0\,, t < 0 \\ \frac{1}{2}\,, t = 0 \\ 1\,, t > 0 \end{cases}.$$

Răspunsul unui sistem la semnalul treaptă unitară, notat cu $y_\sigma(t)$, poartă numele de *funcţie indiceală*.



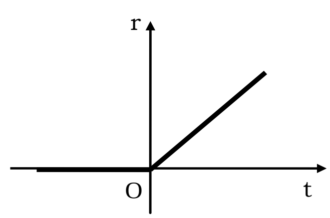
În realitate pot fi aplicate doar semnale treaptă ca şi cel din figura următoare, cu Δt foarte mic (treaptă reală):



Semnalul treaptă este tot o distribuție şi se demonstrează că în domeniul distribuțiilor este valabilă relaţia $\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$. *În mod obişnuit, preluăm această relaţie şi atunci când lucrăm cu funcţii propriu-zise*.

c) Semnalul rampă unitară r(t) **-** se folosește pentru analizarea sistemelor de urmărire sau pentru aproximarea unor semnale (prin semnale în formă de linii frânte):

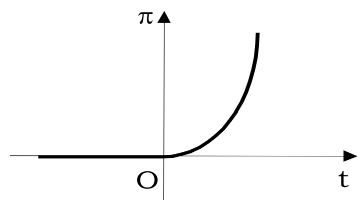
$$r(t) = t \cdot \sigma(t)$$



$$\dot{r}(t) = \sigma(t)$$

d) Semnalul parabolă unitară π(t) – se folosește, de asemenea, pentru analizarea sistemelor de urmărire sau pentru aproximarea unor semnale:

$$\pi(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma(t)$$



$$\dot{\pi}(t) = r(t)$$

e) Semnalul sinusoidal (semnal armonic)

Se foloseşte pentru analiza generală a semnalelor de diferite tipuri și a transferului acestora prin sisteme. Expresia semnalului sinusoidal este:

$$u(t) = U_0 \cdot sin(\omega t + \varphi_0),$$

unde:

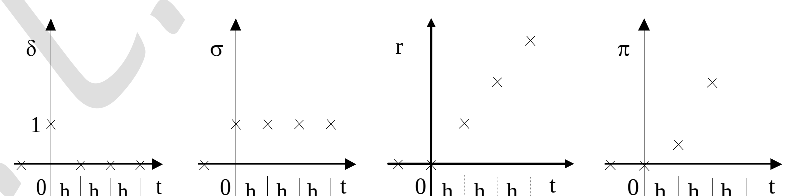
- ✓ U_0 este amplitudinea semnalului;
- ✓ ω este pulsaţia semnalului; $\omega = 2\pi f$, unde f este frecvenţa semnalului;
- ✓ $\omega t + \varphi_0$ este faza semnalului la momentul curent t;
- ✓ φ_0 este faza semnalului la momentul $t = 0$ (faza inițială).

***Observaţie** (cu caracter pregătitor pentru diferite tipuri de semnale folosite în cadrul cursului)*: Fie semnalul în timp continuu $f(t)$. Atunci:

- ✓ $f(t) \cdot \sigma(t)$ reţine din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \geq 0$;
- ✓ $f(t) \cdot \sigma(t - t_0)$ reţine din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \geq t_0$;
- ✓ $f(t)[\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)]$, unde $t_2 > t_1$, reţine din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \in [t_1; t_2]$.

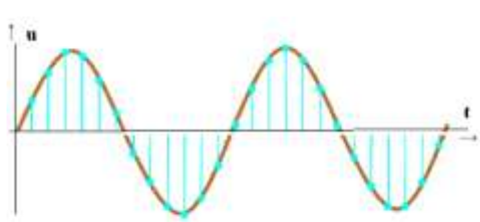
B. Semnale standard în timp discret

Şi în cazul timp discret se folosesc semnale standard. În principal se utilizează omoloagele semnalelor standard în timp continuu, obţinute prin eșantionarea semnalelor standard în timp continuu cu pasul *h* constant. Ele sunt ilustrate în figura de mai jos. Alternativ termenului de semnal, este folosit cel de ***secvență***.



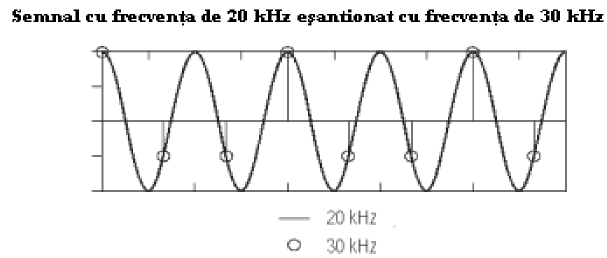
secvența impuls unitar | secvența treaptă unitară | secvența rampă unitară | secvența parabolă unitară

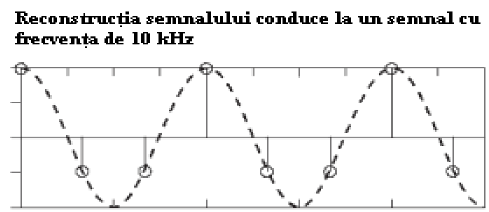
Eşantionarea unui semnal ar trebui să se facă astfel încât din secvența rezultată prin eșantionare să poată fi reconstruit în mod unic semnalul iniţial. Ca urmare, ***adoptarea valorii lui h trebuie făcută astfel încât să se piardă cât mai puţină informaţie prin eşantionare***. În figura alăturată sinusoida *u(t)* este eșantionată corect întrucât ea poate fi refăcută pe baza eșantioanelor (sunt reprezentate prin punctele



colorate). Deci se păstrează informaţia din semnalul eșantionat.

În figura alăturată sinusoida cu frecvența de 20 kHz nu este eșantionată corect. Frecvența de eșantionare, de 30 kHz, este prea mică și ca urmare informaţia reținută din semnalul sinusoidal este puternic distorsionată. În adevăr, la reconstrucţie se obţine un alt semnal sinusoidal decât cel iniţial și anume un semnal cu frecvenţa de 10 kHz. Efectul poartă denumirea de *efect alias*.





Fundamentarea teoretică a modului în care trebuie făcută eşantionarea este dată de *teorema lui Shannon* care exprimă condiția de reconstruire a unui semnal din eșantioanele lui.

Fie f_B frecvenţa de bandă a unui semnal *x(t)* (v. secţiunea 4 din acest paragraf). Teorema afirmă că:

Eşantionarea uniformă cu pasul h a semnalului x(t) cu frecvenţa de bandă egală cu f_B permite reconstruirea semnalului în mod unic dacă şi numai dacă $h < \dfrac{1}{2 \cdot f_B}$.

3. Reprezentarea semnalelor în domeniul imaginilor

În aplicaţiile referitoare la diversele categorii de sisteme, avem de-a face cu prelucrarea unor semnale de intrare cu scopul de a obţine diverse efecte, caracterizate prin forma şi nivelul semnalelor de ieşire. În acest context, *semnalele, ca funcţii de timp, sunt supuse operaţiilor care apar în modelele matematice ale sistemelor, modele ce reprezintă egalităţi operatoriale*. În modele, asupra semnalelor se efectuează alături de operațiile aritmetice și algebrice și operaţii de derivare, integrare sau de calcul recursiv. În acest context spunem că operăm cu *semnale reprezentate în domeniul timp*. În general, operarea cu semnale în domeniul timp este complicată. S-a căutat o alternativă de simplificare. Ea a fost oferită de calculul operaţional, în speţă de *transformata Laplace*, *transformata* z, *transformata Fourier* și transformata Hilbert, care oferă alte modalități de reprezentare a semnalelor.

Atunci când operăm cu transformatele semnalelor spunem că operăm cu semnale în *domeniul imaginilor sau în domeniul operațional*. În continuare ne referim numai la primele două transformări.

A) Reprezentarea semnalelor în domeniul operațional folosind transformata Laplace

Transformata Laplace se aplică semnalelor în timp continuu simple sau compuse prin diverse operații în cadrul modelelor matematice ale sistemelor în timp continuu. Pentru început ne referim numai la semnale.

Fie *f(t)* o funcție bilaterală (un semnal bilateral), adică o funcție definită pe mulțimea ***R***. Se numeşte *integrală Laplace* a acesteia expresia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \, ,$$

în care $s \in C, s = \sigma + j\omega$ (*frecvenţă complexă*). Pentru integrală, *s* joacă rol de parametru. Dacă această integrală improprie este convergentă (poate fi calculată), în urma integrării rezultă o expresie de parametrul *s*. O interpretăm ca funcţie de *s*. Ea se numeşte ***transformată Laplace bilaterală a funcţiei f(t)***. Pentru a simplifica scrierea o notăm cu *f(s)*. Mulțimea valorilor lui *s* pentru care *f(s)* există se numește domeniu de convergență al lui *f(s)*. Deci:

$$f(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\ . \quad (1)$$

În mod obişnuit lucrăm cu semnale şi sisteme cauzale. Pentru acestea, în locul formulei (1) operăm cu ***transformata Laplace unilaterală*** (2) și inversa ei (2'):

$$f(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\ . \quad (2) \qquad\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} f(s)\cdot e^{st}\cdot ds \quad (2')$$

Valoarea α se consideră astfel încât dreapta $s = \alpha + j\omega$ să se situeze integral în domeniul de convergență al lui *f(s)*.

Mulţimea funcţiilor f(t) care au transformate Laplace se numeşte mulţimea funcţiilor original. Mulțimea transformatelor Laplace se numește mulțimea funcțiilor imagine. Corespondența dintre cele două mulțimi este o bijecție. Pentru operația de asociere între *f(s)* și *f(t)*) folosim simbolizarea *f*(*s*) •—o *f*(*t*) (haltera cu bile).

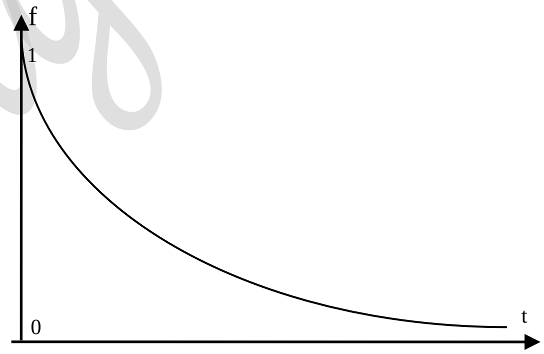
Operarea corectă cu transformata Laplace presupune cunoaşterea, pentru fiecare caz în parte, a domeniului de convergenţă a lui *f*(*s*), adică a domeniului din planul complex pe care este valabil rezultatul.

Exemplu: *Fie funcția* $f(t)=e^{-at}\ ,\ t\geq 0$. *Graficul ei are aspectul din figura alăturată. Calculul transformtei Laplace unilaterale și stabilirea domeniului de convergență al acesteia decurg astfel:*

$$f(s)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{s+a}e^{-(a+s)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}\left(1-\lim_{t\to\infty} e^{-(a+s)t}\right)=$$

$$=\frac{1}{s+a}\quad pentru\ \ a+\sigma>0 .$$



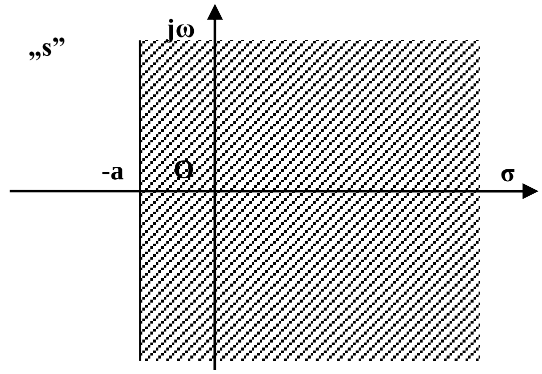
Calcularea limitei s-a făcut având în vedere că:

$$e^{-(a+s)t}=e^{-(a+\sigma+j\omega)t}=e^{-(a+\sigma)t}e^{-j\omega t}=e^{-(a+\sigma)t}(\cos\omega t-j\sin\omega t).$$

În concluzie:

$$f(s)=\frac{1}{s+a},s\in\{\sigma+j\omega|\sigma>-a\}.$$

Domeniul de convergență, {σ+jω / σ > -a}, dat de condiția a+σ > 0, este reprezentat în figura de mai jos prin haşurare:



- Pentru transpunerea operațiilor din domeniul timp în operații din domeniul operaționaal se aplică mai multe teoreme. În lucrarea de față cel mai des se folosesc următoarele teoreme[1]:

✓ *Teorema de liniaritate*:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s),\ \forall\ f_1, f_2 \text{ funcţii original},\ \forall\ c_1, c_2 \in R\ ;$$

✓ *Teorema derivării*:

$$\dot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\cdot f(s) - f(0)$$

$$\ddot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 f(s) - sf(0) - \dot f(0)$$

$$\ldots$$

$f(0)$, $\dot f(0)$ se numesc *condiţii iniţiale ale lui f(t)*. *Ele au sens numai când f(t) este o funcţie cauzală sau unilaterală*. Condiţiile iniţiale sintetizează preistoria semnalului și se asociază fie momentului $t = 0_+$ ($\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t$), fie momentului $t = 0_-$ ($\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} t$). *Pentru o problemă dată se aplică acelaşi mod de tratare a condițiilor inițiale pentru toate semnalele din sistem (de regulă $t = 0_-$). Dacă este vorba de o funcţie bilaterală, atunci, noțiunea de condiții inițiale nu are sens* întrucât nu există un moment inițial iar convergența integralei improprii impune pentru *f(t)* limite egale cu 0 la $\pm\infty$, astfel că relațiile din teorema derivării devin

$$\dot f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s\cdot f(s) \text{ etc. };$$

✓ *Teorema produsului de convoluție*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\cdot d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; f_1(s)\cdot f_2(s),\ (3)$$

$\forall\ f_1(t), f_2(t)$ *funcţii original cu transformatele Laplace $f_1(s)$ și $f_2(s)$, având intersecția domeniilor de convergență nevidă.*

Notă: Convoluția este un procedeu matematic prin care se asociază unei perechi de semnale $\{f_1(t), f_2(t)\}$ un al treilea semnal. Valorile celui de al treilea semnal se obțin pentru orice moment *t* calculând integrala din (3) numită *produs de convoluție*. În cadrul integralei variabila de integrare este τ iar *t* joacă rol de

[1] Pentru a simplifica prezentarea, aspectele referitoare la domeniile convergență pentru care sunt valabile teoremele nu se prezintă.

parametru. Rezultatul integrării este o funcție de parametrul *t*. Produsul de convoluție este comutativ în raport cu perechea de semnale $\{f_1(t), f_2(t)\}$. Convoluția este ce mai importantă tehnica de calcul folosită în procesarea numerică (digital) a semnalelor.

Teorema produsului de convoluție consemnează faptul că transformata Laplace a produsului de convoluție este egală cu produsul algebric al transformatelor Laplace ale funcțiilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$.

B) Reprezentarea semnalelor în domeniul operațional folosind transformata z

*Transformata **z** se aplică semnalelor în timp discret simple sau compuse prin diverse operații în cadrul modelelor matematice ale sistemelor în timp în timp discret*. Semnalele în timp discret sunt şiruri de valori definite pe mulţimea numerelor întregi sau naturale (sau pe altă mulţime discretă inclusă în acestea). Semnalelor în timp discret li se pot asocia imagini operaționale sub formă de funcții analitice folosind transformata **z.**

Fie semnalul unilateral în timp discret $\{f[t]\}_{t\in N} = \{f[0].f[1], f[2],\cdots, f[n],\cdots\}$ şi parametrul $z \in C$. Se consideră suma:

$$\sum\nolimits_{f,n} = f[0] + f[1]\cdot z^{-1} + f[2]\cdot z^{-2} + \cdots + f[n]\cdot z^{-n} . \quad (4)$$

În caz de convergenţă rezultatul este o funcţie de parametrul z. Se numeşte ***transformată z a şirului (semnalului)*** $\{f[t]\}_{t\in N}$ (*transformata **z** unilaterală*) funcţia de variabilă **z** care rezultă prin trecere la limită pentru n→∞ în suma de mai sus:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{f,n} .$$

Domeniul de valori al lui z pentru care limita există se numeşte *domeniu de convergenţă al transformatei z*.

Semnalelor (şirurilor) bilaterale ($\{f[t]\}_{t\in Z}$), li se asociază în mod asemănător ***transformata z bilaterală***, ca limită a sumei:

$$\sum\nolimits_{f,Z} = \sum_{k\in Z} f[k] z^{-k} . \quad (5)$$

La fel ca și în cazul timp continuu, în mod frecvent operăm cu semnale cauzale $\{f[t]\}_{t\in N} = \{f[0].f[1], f[2],\cdots, f[n],\cdots\}$ sau unilaterale, respectiv cu transformata **z** unilaterală. Inversa acesteia este (*C* este un contur închis raportat la domeniul de convergență al transformtei **z**):

$$f[t] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)\cdot z^{t-1}\cdot dz \quad (5')$$

Pentru operația de asociere a transformatei **z** funcției de timp $\{f[t]\}_{t\in N/Z}$ și invers, folosim simbolizarea

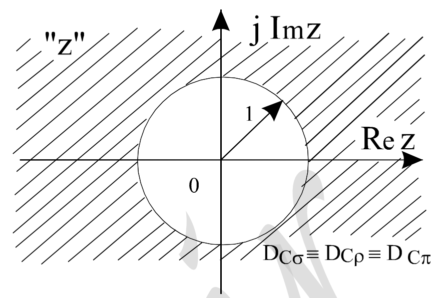
$\{f[t]\}_{t\in N/Z}$ ▯━▮ *f*(*z*) (haltera cu discuri).

Exemplu: Să se calculeze transformata **z** a şirului $\{f[t]\}_{t\in N}$, unde $f[t] = e^{-aht}$. (Provenienţa termenului general este următoarea: $f(t) = e^{-at}, f(kh) = e^{-akh} \;\rightarrow\; f[k] = e^{-ahk}$, respectiv $f[t] = e^{-aht}$). Succesiv avem:

$$\sum_{f,N} = f[0] + f[1]z^{-1} + \ldots + f[n]z^{-n} = 1 + e^{-ah}z^{-1} + e^{-2ah}z^{-2} + \ldots + e^{-nah}z^{-n} = \frac{1-(e^{-ah}z^{-1})^n}{1-e^{-ah}z^{-1}}$$

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(e^{ah}z)^{-n}}{1-e^{-ah}z^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-ah}z^{-1}}, \left|e^{ah}z\right| > 1 \quad (6)$$

$$f(z) = \frac{z}{z-e^{-ah}}, |z| > e^{-ah}$$



Domeniul de convergenţă este exteriorul cercului de rază e^{-ah} și este reprezentat haşurat în figura alăturată. El rezultă din condiția $\left|e^{ah}z\right| > 1$, de existență a limitei din (6).

- Și în cazul transformatei **z,** se folosesc, de asemenea, diferite proprietăţi ale acesteia pentru a înlocui calculul în timp discret cu calcul algebric în domeniul operațional. Ne vom referi la: ***proprietatea de liniaritate, teoremele de translatare la stânga*** şi ***la dreapta*** (teorema de translatare diferă după cum operăm cu transformata **z** unilaterală sau bilaterală) și ***teorema convoluției*** (sau ***teorema sumei de convoluție***)[2].

- ***Teorema de liniaritate***:

$$c_1\{f_1[t]\} + c_2\{f_2[t]\} \longmapsto c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z),\ \forall\{f_1[t]\},\{f_2[t]\} \text{ funcţii original, } \forall\, c_1, c_2 \in R\ .$$

- ***Teorema translatării (deplasării) la dreapta***: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original bilaterală dreapta sau unilaterală având asociate condiții inițiale nule (semnal cauzal), și f(z) este imaginea acesteia ($\{f[t]\} \longmapsto f(z)$), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t\in N} = \{f[t-n]\}_{t\in N}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la dreapta (n întreg pozitiv), atunci

$$\{f[t-n]\} \longmapsto z^{-n}\cdot f(z)\ .$$

În enunțul de mai sus, prin condiții inițiale se înțelege șirul de valori: $f[-1]$, $f[-2]$, …, $f[-n]$.

- ***Teorema translatării (deplasării) la stânga***: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original unilaterală (semnal cauzal) și f(z) este imaginea acesteia ($\{f[t]\} \longmapsto f(z)$), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t\in N} = \{f[t+n]\}_{t\in N}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la stânga (n întreg pozitiv), atunci

$$\{f[t+n]\} \longmapsto z^{n}\cdot\{f(z) - f[0] - f[1]\cdot z^{-1} - f[2]\cdot z^{-2} - \ldots - f[n-1]\cdot z^{-(n-1)}\}.$$

- ***Teorema sumei de convoluție***:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_1[t-\tau]\cdot f_2[\tau] \longmapsto f_1(z)\cdot f_2(z)\ .$$

$\forall\{f_1[t]\},\{f_2[t]\}$ funcţii original cu $f_1(z)$ și $f_2(z)$, transformate z având intersecția domeniilor de convergență nevidă.

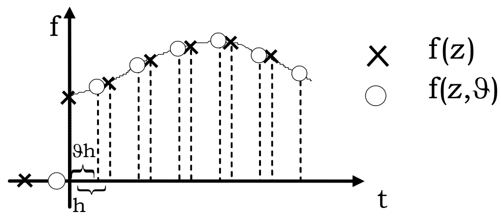
Teorema sumei de convoluție consemnează faptul că transformata **z** a sumei de convoluție este egală cu produsul algebric al transformatelor **z** ale funcțiilor $\{f_1[t]\}$ și $\{f_2[t]\}$.

- În tehnică asociem de cele mai multe ori transformata **z** semnalelor în timp discret obţinute prin eşantionarea unor semnale în timp continuu, *f(t),* cu pas constant, la momente de eşantionare $t_k = kh$.[3] Informația conținută de

[2] Și de data aceasta, pentru a simplifica prezentarea, aspectele referitoare la domeniile convergență pentru care sunt valabile teoremele nu se prezintă.

[3] Transformata **z** nu se referă strict la această situație.

semnalele *f(t)* între momentele de eşantionare poate fi păstrată folosind ***transformata z modificată***. Ea este asociată prin formule similare cu (4) și (5) unor şiruri de eşantioane prelevate la momente diferite de momentele $t_k = kh$, anume la momentele $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$, unde $\vartheta \in [0,1)$.



Transformata **z** modificată este notată cu $f_\vartheta(z)$ şi corespunde şirului de valori decalate în timp cu ϑ h (punctele expandate prin cercuri). Modificând pe ϑ în intervalul $[0,1)$ se poate baleia înteg semnalul *f(t)*. Pentru $\vartheta = 0$ se obține transformata **z** propriu-zisă.

C) Tabele de transformare

În practică se lucrează cu transformate Laplace şi cu transformate **z** precalculate disponibile în tabele de transformare. Tabelele permit și operația inversă, de obținere a funcției original a semnalului în timp continuu atunci când se cunoaște transformata Laplace, respectiv obținerea expresiei termenului general al semnalului în timp discret atunci când se cunoaște transformata **z** a semnalului în timp discret.

În cadrul cursului operăm cu tabele de transformare care au structura de mai jos.

(1)	(2)	(3)	(4)
f(t), t≥0	*f(s)*	$f(z) = \mathcal{Z}\{f(s)\}$	$f_\vartheta(z) = \mathcal{Z}_\vartheta\{f(s)\}$

- În coloana (1) *f(t)* este o funcţie original de timp continuu, cauzală (unilaterală).
- În coloana (2) *f(s)* este transformata Laplace a lui *f(t)* din coloana (1), anume *f(s)* •—◦ *f(t).*
- În coloana (3), apare transformata **z** a şirului care se obţine din *f(t)* din coloana (1) prin eșantionare la momentul *t=kh*. Prin notaţia $\mathcal{Z}\{f(s)\}$ facem următoarea asociaţie de idei: *f(z) este transformata* **z** *asociată şirului de valori care se obţine prin eşantionarea originalului lui f(s) la momentele* t_k*=kh.*

Exemplu: *Presupunem că un semnal are transformata Laplace* $f(s) = \frac{1}{s+2}$. *Atunci, din tabelul de transformări interesează linia în care apare* $f(s) = \frac{1}{s+a}$ *:*

(1)	(2)	(3)	(4)
f(t), t>0	*f(s)*	$f(z) = \mathcal{Z}\{f(s)\}$	$f_\vartheta(z) = \mathcal{Z}_\vartheta\{f(s)\}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$	$\frac{ze^{-a\vartheta h}}{z-e^{-ah}}$

Întrucât a=2, potrivit tabelului semnalul (funcția original) este $f(t) = e^{-2t}$.

Termenul general al semnalului în timp discret care se obține prin eșantionarea lui f(t) cu pasul 0.01 secunde este: $\{f[t]\}_{t\in \mathrm{N}} = \{f(\mathrm{k}\cdot \mathrm{h})\}_{\mathrm{k}\in \mathrm{N}} = \{e^{-a\cdot h\cdot k}\}_{\mathrm{k}\in \mathrm{N},\mathrm{h}=0.01} = \{e^{-2\cdot 0.01\cdot k}\}_{\mathrm{k}\in \mathrm{N}} = \{e^{-0.02\cdot t}\}_{t\in \mathrm{N}}$ *. În ultima egalitate s-a înlocuit k cu t. El are transformata* ***z:*** $f(z) = \dfrac{z}{z - e^{-0.02}}$.

Să ne imaginăm că în urma unui calcul se obține $f(z) = \dfrac{z}{z - e^{-0.02}}$ *.Comparând această expresie cu cea din coloana (3) rezultă că a·h=0.02, iar termenul general al semnalului în timp discret este* $\{f[t]\}_{t\in \mathrm{N}} = \{e^{-0.02\cdot t}\}_{t\in \mathrm{N}}$ *. Dar, cărui semnal în timp continuu îi corespunde secvența* $\{f[t]\}_{t\in N} = \{e^{-0.02\cdot t}\}_{t\in N}$ *, respectiv imaginea* $f(z) = \dfrac{z}{z - e^{-0.02}}$ *? Presupunem că se cunoaște valoarea lui h. Atunci,* $a = \dfrac{0.02}{h}$ *și* $f(t) = e^{-\frac{0.02}{h}\cdot t}$*. Ca urmare,* $f(z) = \dfrac{z}{z - e^{-0.02}}$ *poate proveni din orice exponențială* $f(t) = e^{-\frac{0.02}{h}\cdot t}$ *eșantionată cu pasul h. Soluția nu este unică.*

- În coloana (4) apare transformata **z** modificată a semnalului *f(t).* Ea este transformata **z** asociată şirului care se obţine din *f(t)* prin eşantionare la momentele $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$.

Observaţii:

- ✓ Extrasul de tabel de transformare din exemplul anterior atrage atenţia asupra faptului că, numeric, rezultatul obţinut prin transformata Laplace este unic, pe când cel obţinut cu transformata **z** depinde de mărimea pasului de discretizare h (în formulele din colanele (3) și (4) apare parametrul *h*).
- ✓ Prin trecerea la limită pentru $\vartheta \to 0$, rezultatul din coloana (4) conduce la expresia din coloana (3).
- ✓ Cu câteva excepţii, transformatele **z** sunt funcţii raţionale, ale căror numărători se divide prin z.

Folosind calculul operaţional, simplificăm rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare sau a ecuaţiilor recursive liniare, algebrizându-le. În teoria sistemelor aceste tipuri de ecuații sunt cele folosite pentru modelarea sistemelor.

4. Spectrele semnalelor în timp continuu

În secțiunile anterioare s-a procedat la caracterizarea semnalelor în domeniul timp și în domeniul operațional. În continuare prezentăm un *al treilea mod de caracterizare a semnalelor: caracterizare în domeniul frecvență*.

Din punctul de vedere al periodicității semnalelor în raport cu timpul, distingem *semnale periodice* şi *semnale neperiodice*. Pentru a le putea estima efectele în diverse circumstanțe se folosesc pe larg, ca modele alternative, spectrele lor. Caracterizarea în domeniul frecvență, adică caracterizarea semnalelor prin spectre[4], reprezintă un mijloc de descriere a semnalelor bazat pe *seria Fourier*, respectiv *transformata Fourier*. Potrivit teoriei lui Fourier, orice semnal în timp continuu poate fi reprezentat ca o sumă de semnale sinusoidale de diferite amplitudini și faze. La modul general, o astfel de reprezentare este denumită *reprezentare în domeniul frecvență a semnalului* sau *spectrul semnalului*. De regulă reprezentarea spectrală operează, așa cum se arată în continuare, cu mulțimea amplitudinilor și mulțimea fazelor sinusoidelor componente, denumite *spectru de amplitudine*, respectiv *spectru de fază*.

[4] Cuvântul „spectru” provine din limba latină: spectrum (plural spectra), având sensul de „apariție” sau „imagine”. În fizică el a fost introdus de Isaac Newton, în optică, cu referire la gama de culori observate la dispersia luminii albe printr-o prismă.

Spectrele semnalelor periodice sunt discrete. Ele se obțin descompunând semnalul în serie Fourier. Spectrele semnalelor neperiodice se obțin folosind transformata Fouriei. Ele sunt continue.

A) Semnale periodice

Fie $x(t)$ un *semnal periodic* de perioadă T_0, deci de frecvenţă $f = \frac{1}{T_0}$ şi pulsaţie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Un astfel de semnal poate fi descompus în serie Fourier în mai multe moduri. Distingem:

- Forma complexă a seriei Fourier, adică descompunerea:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} \qquad (1)$$

- Forma reală a seriei Fourier, adică descompunerea:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot cos(n\omega_0 t + \varphi_n)\,. \quad (2)$$

Coeficienţii c_n sunt numere complexe şi se numesc ***coeficienţi ai seriei Fourier complexe***. În cazuri simple, ei pot fi determinaţi prin aducerea expresiei lui $x(t)$ la forma (1)[5]. Dacă funcţia x(t) este absolut integrabilă pe durata unei perioade T_0 (integrala modulului, $|x(t)|$, este finită), atunci coeficienţii seriei Fourier complexe se pot obţine cu formula

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot n\omega_0 t} dt\,, \quad n \in Z\,. \qquad (3)$$

În reprezentare polară coeficienţii c_n (numere complexe) se scriu sub forma $c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot arg\, c_n}$.
Legătura dintre coeficienții seriei Fourier complexe și coeficienții formei reale a seriei Fourier este dată de formulele

$$A_n = \begin{cases} |c_0|\,, n = 0 \\ 2 \cdot |c_n|, n \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi_n = arg\, c_n\,, \quad n \in N\,. \qquad (4)$$

Se numesc: ***spectru de amplitudine***, respectiv ***spectru de fază ale semnalului x(t) corespunzătoare formei complexe a seriei Fourier***, mulţimea de valori $\{|c_n|\}_{n \in Z}$, respectiv mulțimea de valori $\{arg\, c_n\}_{n \in Z}$ asociate cu mulţimea de pulsaţii $\{n \cdot \omega_0\}_{n \in Z}$, iar ***spectru de amplitudine***, respectiv spectru de fază ale semnalului x(t) corespunzătoare formei reale a seriei Fourier, mulţimea de valori $\{A_n\}_{n \in N}$, respectiv mulțimea de valori $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ asociate cu mulţimea de pulsaţii $\{n \cdot \omega_0\}_{n \in N}$.

Reprezentarea grafică a spectrului de amplitudine înseamnă reprezentarea mulţimilor de puncte de coordonate $\{(n \cdot \omega_0, |c_n|)\}_{n \in Z}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, A_n)\}_{n \in N}$, iar ***reprezentarea grafică a spectrului de fază*** înseamnă reprezentarea mulţimilor de puncte de coordonate $\{(n \cdot \omega_0, arg\, c_n)\}_{n \in Z}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, \varphi_n)\}_{n \in N}$ într-un sistem de axe cartezian (cu $\omega = n \cdot \omega_0$ în abscisă). Adeseori, în loc de puncte se reprezintă segmente (*spectru de linii*) de amplitudine $|c_n|$ sau A_n, respectiv $arg\, c_n$ sau φ_n, distanța dintre două linii consecutive fiind de ω_0 unități (v. exemplele ce urmează).

[5] Metoda este folosită în exemplele 1 și 2 prezentate în continuare.

Spectrele semnalelor periodice pot fi considerate și ca funcţii de variabila discretă *n*, caz în care distanța dintre două linii consecutive este de o unitate.

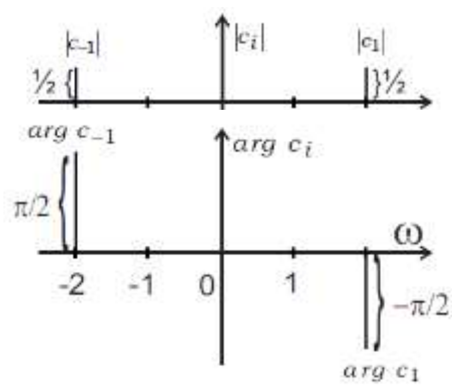
De remarcat că spectrul de amplitudine al semnalului $x(t)$ asociat pe baza formei reale a seriei Fourier diferă de spectrul de amplitudine al semnalului $x(t)$ asociat pe baza seriei Fourier complexe prin omiterea componentelor corespunzătoare lui n<0 și dublarea valorilor componentelor corespunzătoare lui n > 0 (se însumează $|c_n|+|c_{-n}|=2|c_n|$), și că spectrul de fază al semnalului $x(t)$ asociat pe baza seriei Fourier reale reține din cel asociat pe baza seriei Fourier compleze, doar valorile corespunzătoare lui $n \in N$.

Exemplul 1: *Să se determine spectrul de amplitudine şi spectrul de fază ale semnalului x(t)=sin2t. (Se observă că* $\omega_0 = 2\ sec^{-1}$*).*

Soluţie: Folosind formula lui Euler $\sin\alpha = \frac{1}{2j}\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right)$*, expresia lui x(t) devine:*

$$x(t) = \frac{1}{2j}(e^{j\cdot 2t} - e^{-j\cdot 2t}) = -\frac{1}{2j}\cdot e^{-j\cdot 2t} + \frac{1}{2j}\cdot e^{j\cdot 2t} = \frac{1}{2}\,j\cdot e^{-j\cdot 2t} - \frac{1}{2}\,j\cdot e^{j\cdot 2t} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}}_{c_{-1}}\cdot e^{-j\cdot 2t} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}}_{c_1}\cdot e^{j\cdot 2t}\ .$$

- *În consecință, seria Fourier complexă a lui x(t) este* $x(t) = \sin 2t = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}}_{c_{-1}}\cdot e^{-j\cdot 2t} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}}_{c_1}\cdot e^{j\cdot 2t}$*, ceea ce înseamnă că spectrele de amplitudine și fază au doar câte două linii corespunzătoare punctelor* $\left\{-\omega_0, |c_{-1}|\right\} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ *și* $\left\{\omega_0, |c_1|\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$*, respectiv* $\left\{-\omega_0, \arg c_{-1}\right\} = \left\{-2, \frac{\pi}{2}\right\}$ *și* $\left\{\omega_0, \arg c_1\right\} = \left\{2, -\frac{\pi}{2}\right\}$*. Dacă operăm cu valori raportate ale pulsației, adică cu n în loc de* $n\omega_0$*, liniile corespund punctelor* $\left\{-1, |c_{-1}|\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ *și* $\left\{1, |c_1|\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$*, respectiv* $\left\{-1, arg\ c_{-1}\right\} = \left\{-1, \frac{\pi}{2}\right\}$ *și* $\left\{1, arg\ c_1\right\} = \left\{1, -\frac{\pi}{2}\right\}$*. Spectrele din al doilea caz sunt reprezentate în figura alăturată.*



- *Seria Fourier reală a lui x(t) este* $x(t) = \sin 2t = \cos(2t - \frac{\pi}{2})$*, spectrele de amplitudine și fază având doar câte o singură linie corespunzătoare punctelor* $\left\{\omega_0, A_1\right\} = \left\{2, 1\right\}$ *și* $\left\{\omega_0, \varphi_1\right\} = \left\{2, -\frac{\pi}{2}\right\}$*. Dacă operăm cu valori raportate ale pulsației, adică cu n în loc de* $n\omega_0$*, liniile corespund punctelor* $\left\{1, A_1\right\} = \left\{2, 1\right\}$*, respectiv* $\left\{1, \varphi_1\right\} = \left\{1, -\frac{\pi}{2}\right\}$*.*

Exemplul 2: *Să se determine spectrul de amplitudine şi spectrul de fază complexe ale semnalului* $x(t) = 2a\sin^2 2\pi\cdot f\cdot t + b\sin 4\pi\cdot f\cdot t$*, cu* $a, b > 0$ *parametri reali.*

Soluţie: Observăm că x(t) este un semnal periodic de pulsaţie $\omega_0 = 4\pi f$ *. Îl supunem unor transformări matematice succesive, după cum urmează:*

$$x(t)=a(1-\cos 4\pi\cdot f\cdot t)+b\sin 4\pi\cdot f\cdot t$$

$$x(t)=a-a\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi\cdot f\cdot t}+e^{-j4\pi\cdot f\cdot t}\right)+\frac{b}{2j}\left(e^{j4\pi\cdot f\cdot t}-e^{-j4\pi\cdot f\cdot t}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(-a-\frac{1}{j}b\right)e^{-j4\pi\cdot f\cdot t}+a-\frac{1}{2}\left(-a+\frac{1}{j}b\right)e^{j4\pi\cdot f\cdot t}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}(-a+jb)e^{-j4\pi\cdot f\cdot t}+ae^{j\cdot 0}+\frac{1}{2}(-a-bj)e^{j4\pi\cdot f\cdot t}$$

$$x(t)=\underbrace{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}e^{j\left(\pi-arctg\frac{b}{a}\right)}e^{-j4\pi\cdot f\cdot t}}_{c_{-1}}+\underbrace{a}_{c_0}e^{j\cdot 0}+\underbrace{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}e^{j\left(\pi+arctg\frac{b}{a}\right)}e^{j4\pi\cdot f\cdot t}}_{c_1}$$

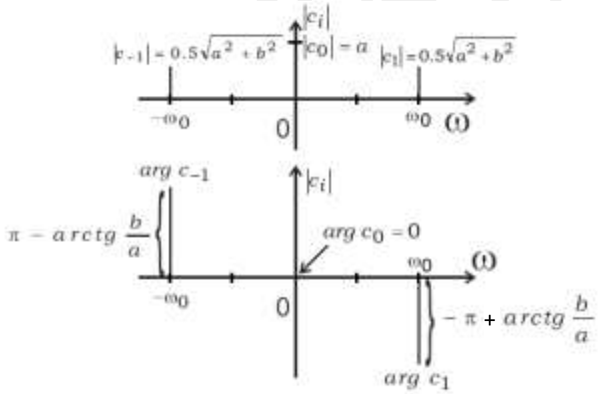
De data aceasta spectrul de amplitudine şi cel de fază sunt formate din câte trei puncte:

$$\left\{-\omega_0,|c_{-1}|\right\}=\left\{-4\pi f,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right\},\ \left\{0,|c_0|\right\}=\left\{0,a\right\}\ \text{şi}\ \left\{\omega_0,|c_1|\right\}=\left\{4\pi f,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right\},$$

în cazul spectrului de amplitudine, respectiv

$$\left\{\omega_0,\arg c_{-1}\right\}=\left\{-4\pi f,\pi-arctg\frac{b}{a}\right\},\ \left\{0,\arg c_0\right\}=\left\{0,0\right\},\left\{\omega_0,\arg c_1\right\}=\left\{4\pi f,-\pi+arctg\frac{b}{a}\right\}$$

în cazul spectrului de pulsaţie. Aspectul celor două spectre este redat în figurile de mai jos.



B) Semnale neperiodice

Semnalele neperiodice *x(t)* absolut integrabile sunt caracterizabile prin transformarea Fourier (bilaterală):

$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt\,.$$

Seria Fourier nu este utilizabilă pentru acest caz deoarece unui semnal neperiodic, extins pe întreaga axă reală, îi corespunde o perioadă $T_0\to\infty$, respectiv o pulsaţie $\omega_0\to 0$. Pe de altă parte, dacă $\omega_0\to 0$ rezultă că spectrul semnalelor neperiodice ar trebui să fie unul continuu. Această cerinţă este îndeplinită de *transformata Fouriei x(jω)*.

Funcţia $|x(j\omega)|$, $\omega\in R$ reprezintă spectrul de amplitudine al semnalului x(t), iar funcţia $\arg x(j\omega)$, $\omega\in R$ reprezintă spectrul de fază al semnalului x(t).

Domeniul de pulsaţii pe care $x(j\omega)\neq 0$ se numeşte ***bandă de pulsaţii***. Fie $[-\omega_B, \omega_B]$ banda de pulsaţii a unui semnal[6]. Atunci, frecvența $f_B=\dfrac{\omega_B}{2\pi}$ se numeşte ***frecvenţă de bandă***, iar dublul ei, $f_s=2\cdot f_B$, ***rată Nyquist***.

În continuare se exemplifică determinarea spectrelor semnalelor neperiodice pe cazul unui semnal impuls dreptunghiular amplasat în poziții diferite în raport cu momentul t=0.

Exemplul 3*. Să se determine spectrul de amplitudine şi spectrul de fază ale impulsului dreptunghiular* $x(t)=a\cdot[\sigma(t+t_0)-\sigma(t-t_0)]$, $t_0>0$.

Soluție: Transformata Fourier a lui x(t) este: $x(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=a\cdot\int_{-t_0}^{t_0}e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt$. *Dezvoltând, integrala obţinem:*

$$x(j\omega)=\frac{a}{\omega}\cdot(\sin\omega t+j\cdot\cos\omega t)\Big|_{-t_0}^{t_0}=\frac{2a}{\omega}\cdot\sin\omega t_0\,,$$

respectiv spectrele

$$|x(j\omega)|=2a\cdot\left|\frac{\sin\omega t_0}{\omega}\right|=2a\cdot t_0\cdot|si(\omega t_0)|\,,\qquad (3)$$

$$arg\ \ x(j\omega)=\begin{cases}0\,,\ \omega t_0\in\{[(2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi)\,|\,k\in Z_-^*\}\cup\{[2k\pi,\ (2k+1)\pi)\,|\,k\in Z_+\}\\ \pi,\ \text{în rest}\end{cases}.$$

Exemplul 4*. Să se determine spectrul de amplitudine şi spectrul de fază ale impulsului dreptunghiular* $x(t)=a\cdot[\sigma(t)-\sigma(t-2t_0)]$, $t_0>0$. *Acest semnal rezultă din cel din exemplul anterior prin translatare la dreaptă cu t_0 secunde.*

Transformata Fourier a lui x(t) este:

$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=a\cdot\int_{0}^{2t_0}e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt\,.$$

Dezvoltând integrala, obţinem:

$$x(j\omega)=\frac{a}{\omega}\cdot(\sin\omega t+j\cdot\cos\omega t)\Big|_{0}^{2t_0}=\frac{a}{\omega}\cdot\left[\sin 2\omega t_0+j\,(\cos 2\omega t_0-1)\right]=\frac{2a\sin\omega t_0}{\omega}\cdot e^{-j\omega t_0}\,.$$

În acest caz spectrul de amplitudine şi spectrul de fază sunt date de funcţiile:

$$|x(j\omega)|=2a\cdot\left|\frac{\sin\omega t_0}{\omega}\right|=2a\cdot t_0\cdot|si(\omega t_0)|\,,\qquad (4)$$

$$arg\ \ x(j\omega)=\begin{cases}-\omega t_0\,,\ \omega t_0\in\{[(2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi)\,|\,k\in Z_-^*\}\cup\{[2k\pi,\ (2k+1)\pi)\,|\,k\in Z_+\}\\ \pi-\omega t_0,\ \text{în rest}\end{cases}.$$

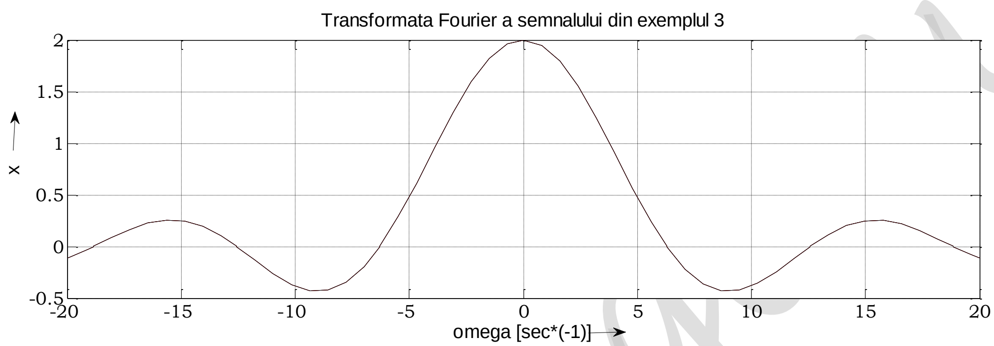
În (3) și (4) s-a utilizat funcția $si(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

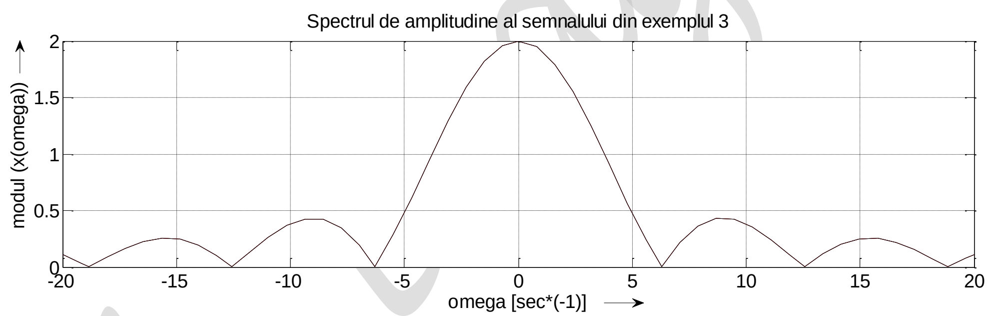
---

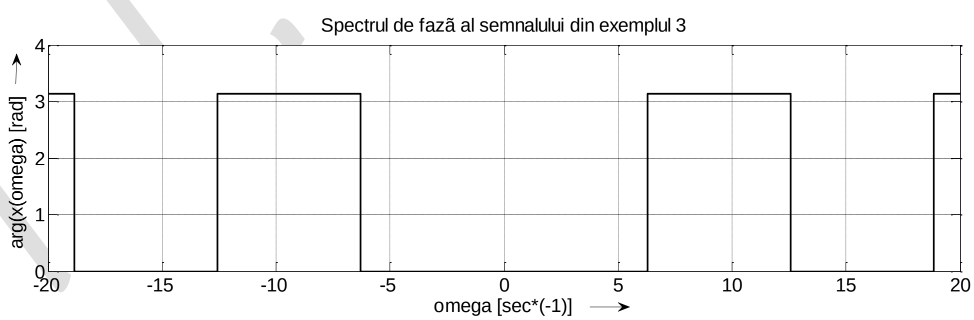
[6] De regulă banda de pulsații se consderă simetrică în raport cu $\omega=0$.

Exemplul 5*. Un caz important în tehnică este semnalul impuls Dirac. Fie f(t) = $A\cdot\delta(t)$ un impuls Dirac de amplitudine A. El are transformata Fourier f(jω) = A. În consecință spectrul de amplitudine este* $|f(j\omega)| = A$*, iar spectrul de fază* $arg\ f(j\omega) = \begin{cases} 0\,,\ daca\ A > 0 \\ \pi\,,\ daca\ A < 0 \end{cases}$*. Rezultatul este important prin faptul că spectrul de amplitudine fiind constant (bandă de pulsații infinită) rezultă că un impuls Dirac aplicat la intrarea unui sistem excită toate frecvențele proprii ale sistemului.* ***Ca urmare, el poate servi la caracterizarea sistemului la intrarea căruia se aplică.*** (V. și precizările de la pag. 16).

Temă: a) Să se arate în continuarea exemplului 3 că transformatei Fourier și celor două spectre le corespund reprezentările grafice din figurile de mai jos.







b) Să se reprezinte grafic spectrele de amplitudine și de fază pentru exemplul 4 de mai sus.