§. 4.3 Stabilitatea sistemelor

1. Conceptul de stabilitate

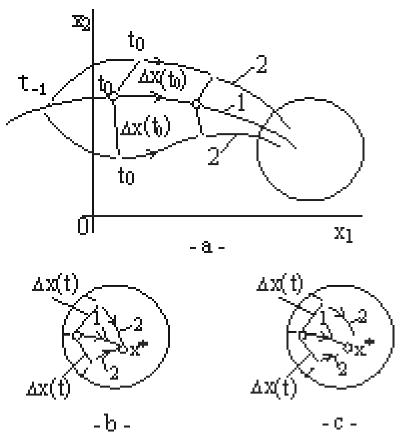
Stabilitatea este o proprietate fundamentală intrinsecă a unui sistem[1]. Ea exprimă două aspecte[2]: *capacitatea sistemului dinamic de a ajunge într-un regim de funcţionare impus prin semnalele de intrare şi capacitatea sistemului de a reveni într-un regim de funcționare, de a „se recupera”, după ce a fost supus unor perturbații pe durată limitată*.

- *Primul aspect al conceptului de stabilitate are în vedere cerinţa ca sistemul să ajungă într-un regim de funcţionare impus prin aplicarea unui semnal de intrare începând cu un moment t_0, în situaţia în care până la momentul t_0 el se găsea într-un alt regim de funcţionare datorat unei forme anterioare de variaţie a semnalului de intrare.*

Pentru exemplificarea primului aspect considerăm figurile de mai jos. Curbele 1 reprezintă traiectorii de stare ipotetice corespunzătoare regimului impus începând cu momentul t_0, iar curbele 2 sunt traiectoriile pe care sistemul evoluează în realitate. *Regimul de funcționare descris prin traiectoria 1 este stabil atunci când traiectoria 2 va tinde spre traiectoria 1.* Trecerea nu este instantanee din cauza inerţiei sistemului.

În situaţia din fig. a traiectoria 2 se apropie de traiectoria 1. Deci regimul de funcționare 1 este stabil. În situaţia din fig. b cerinţa nu este îndeplinită, traiectoria 2 se depărtează de traiectoria 1, deci regimul 1 este instabil.

- *Cel de al doilea aspect al conceptului de stabilitate se referă la revenirea sistemului în regimul de funcţionare de dinaintea apariţiei perturbaţiilor, în ideea că acestea acţionează asupra sistemului pe un interval de timp limitat [t_{-1},t_0]. După încetarea acţiunii perturbaţiilor la momentul t_0 sistemul trebuie să aibă capacitatea de a reveni în regimul de funcţionare impus.*



Alăturat, în fig. *a*, curba 1 reprezintă traiectoria neperturbată (traiectoria pe care sistemul ar evolua dacă asupra lui nu ar acţiona perturbaţii). În realitate, din cauza acţiunii unor perturbaţii care se manifestă începând cu momentul t_{-1}, sistemul ajunge pe una din traiectoriile 2. Perturbaţiile încetează la momentul t_0. Se observă că după acest moment traiectoriile 2 converg spre traiectoria 1. Aceasta înseamnă că regimul de funcţionare reprezentat prin traiectoria 1 este stabil. În medalioane se detaliază două situaţii. În cazul din fig. *b* traiectoriile 2 ajung în final în regim permanent constant (pentru $t \to\infty$)), în starea x*, la fel ca şi traiectoria 1; spunem să *regimul de funcţionare este asimptotic stabil*. În cazul din fig. *c* traiectoriile 2 ajung în final într-o vecinătate a stării x*; spunem că *regimul de funcţionare* este *stabil*. Raționamentul are în vedere faptul că în spațiul stărilor regimului permanent constant îi corespunde un punct.

[1] Conceptul are un sens foarte larg, raportând, întotdeauna, o comportare temporală la o situație de echilibru.

[2] Din punct de vedere matematic cele două aspecte pot fi reduse la unul singur. Astfel, în cazul primului aspect se poate considera că regimul anterior celui impus reprezintă o perturbare a regimului impus, perturbare care încetează la momentul impunerii noului regim.

În prezentarea anterioară conceptul de stabilitate a fost asociat **regim**urilor de funcţionare ale unui sistem, deci prezentarea se referă la *stabilitatea regimurilor de funcţionare*. În general, un sistem poate funcţiona într-un număr foarte mare de regimuri. Unele pot fi stabile, altele instabile. De aceea, vom spune că *un **sistem** este **stabil** numai atunci când toate regimurile de funcţionare ale sistemului sunt stabile*.

- Abordarea de până acum a problemei stabilității a fost de factură calitativă. Plecând de la exemplele date putem trece în continuare la o abordare cantitativă. Astfel:

Un regim de funcţionare al unui sistem este descris prin ansamblul variaţiei mărimilor caracteristice ale acestuia pe un orizont de timp finit sau infinit. Din cauza inerţiei sistemului un regim impus nu se poate instala sau reinstala instantaneu ci doar temporizat, printr-un proces tranzitoriu. Fie $x^*(t)$ şi $y^*(t)$ semnalele de stare şi de ieşire care descriu regimul de funcţionare impus unui sistem în timp continuu prin aplicarea semnalului de intrare $u^*(t)$. Fie x(t) şi y(t) semnalele care descriu variaţiile mărimilor de stare şi de ieşire în regimurile tranzitorii ce urmează momentului impunerii noului regim de funcţionare sau momentului încetării acţiunii perturbaţiilor. În cazul când regimul de funcţionare este stabil, valorile curente, x(t) şi y(t), ale stării şi ieşirii diferă la începutul procesului tranzitoriu faţă de valorile impuse $x^*(t)$ şi $y^*(t)$, dar, odată cu trecerea timpului, ajung în vecinătatea lor. În acest context proprietatea de stabilitate poate fi urmărită prin intermediul diferenţelor $\Delta x(t) = x^*(t) - x(t)$, respectiv $\Delta y(t) = y^*(t) - y(t)$, iar conceptele de ***regim stabil,*** respectiv de ***sistem stabil,*** se pot formula astfel:

> ***Un regim de funcţionare** al unui sistem **este stabil,** respectiv **asimptotic stabil** dacă începând cu un anumit moment t_0 diferenţele $|\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)|$ şi/sau $|\Delta y(t)| = |y^*(t) - y(t)|$ pot fi păstrate între anumite limite, respectiv dacă, mai mult, $\lim_{t\to\infty} |\Delta x(t)| = 0$ şi/sau $\lim_{t\to\infty} |\Delta y(t)| = 0$.*
>
> ***Un sistem este stabil,** respectiv **asimptotic stabil,** dacă această proprietate este valabilă pentru orice regim impus $x^*(t)$ sau $y^*(t)$.*

Atunci când urmărim stabilitatea regimurilor de funcţionare prin intermediul mărimilor de stare *x*, vorbim despre ***stabilitate internă***. Ea este definită prin următorul enunţ cunoscut în literatură sub denumirea de ***stabilitate în sens Liapunov***:

> ***Un regimul impus** $x^*(t)$ **este stabil** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in R$) şi orice $t_0 \in R$ există $\delta(\varepsilon, t_0) \in R$ astfel încât dacă $|\Delta x(t_0)| = |x_0^* - x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ atunci şi $|\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)| < \varepsilon$ pentru t>t_0.*
>
> *Dacă, în plus, pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in R$) există un $\delta_0(\varepsilon)$ astfel încât dacă $|\Delta x(t_0)| < \delta_0(\varepsilon)$ atunci şi $\lim_{t\to\infty} |\Delta x(t)| = 0$, spunem că **regimul impus este asimptotic stabil**.*[3]
>
> *Dacă există cel puţin o stare iniţială x_0 pentru care implicaţia $|\Delta x(t_0)| = |x_0^* - x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ → $|\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)| < \varepsilon$ nu este valabilă, **regimul impus este considerat instabil.***

[3] Dacă în definiţia stabilităţii în sens Liapunov cantitatea $\delta(\varepsilon, t_0)$ nu depinde de momentul iniţial t_0, (notăm acest lucru scriind $\delta(\varepsilon)$), spunem că *regimul impus este invariant stabil în timp* sau că *regimul impus este uniform stabil.*

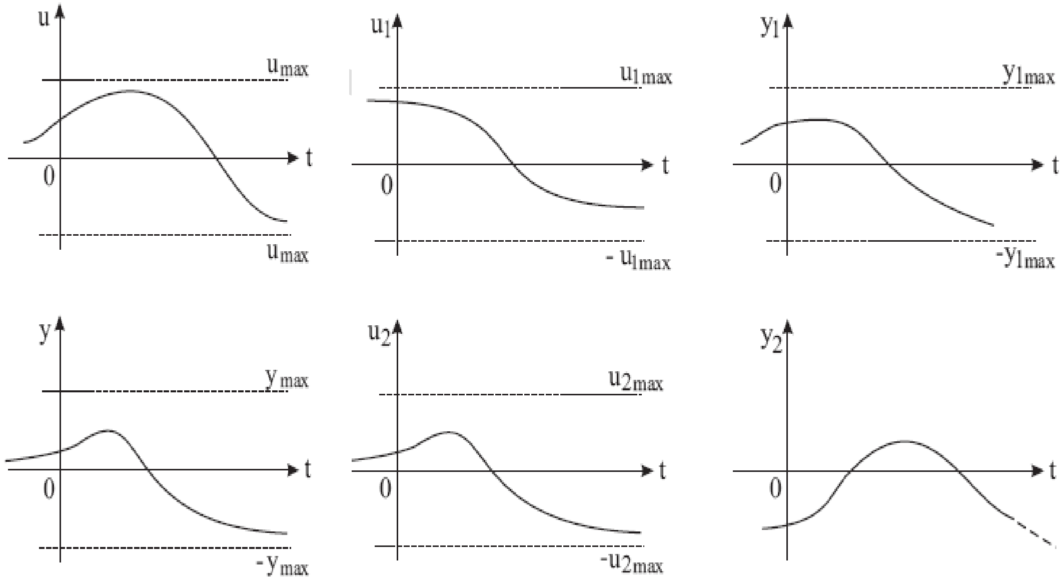
Stabilitatea internă poate fi studiată folosind diferența $\tilde{x}(t) = x^*(t) - x(t)$ ca o nouă variabilă de stare. În acest caz $x(t) \to x^*(t)$ este echivalentă cu $\tilde{x}(t) \to 0$. Astfel problema stabilității interne a unui sistem este redusă la cea a stabilității unui singur regim, regimul $\tilde{x}(t) = 0$.

Stabilitatea internă este un concept deosebit de important din punct de vedere teoretic prin faptul că furnizează mijloace analitice sistematice de investigare a stabilităţii. Din punct de vedere experimental ***stabilitatea internă este însă un concept cu care de cele mai multe ori nu se poate opera.*** Explicaţie: pe de-o parte, nu toate variabilele de stare sunt măsurabile, iar pe de altă parte, provocarea unor situaţii experimentale acoperitoare din punctul de vedere al variabilelor de stare este de regulă imposibilă.

În cazul în care urmărim stabilitatea sistemului prin diferenţa $|\Delta y(t)| = |y^*(t) - y(t)|$ vorbim despre ***stabilitatea externă a sistemului***. Conceptul de ***stabilitate externă*** se aplică experimental prin raportarea variaţiei semnalului de ieșire $\Delta y(t)$ la variația semnalul de intrare $\Delta u(t)$ sub forma: „*intrarea mărginită implică ieşire mărginită*”. Conceptul este cunoscut sub denumirea de ***BIBO-stabilitate*** (Bounded Input Bounded Output – Stability). El caracterizează comportarea sistemului într-un număr foarte mare de regimuri de funcţionare și se utilizează în practică sub forma următoare:

> *„Se aplică sistemului fizic un semnal de intrare $u^*(t)$ mărginit în amplitudine şi limitat în durată, adoptat astfel încât să solicite sistemul cât mai puternic din punctul de vedere al funcţiei pe care sistemul trebuie să o îndeplinească. Dacă răspunsul sistemului la această solicitare este mărginit atunci se consideră că regimurile de funcţionare cauzate de funcţii de intrare u(t) mai puţin solicitante decât $u^*(t)$ vor fi, de asemenea, mărginite, deci stabile extern.”*

În figurile următoare apar câteva exemple referitoare la BIBO – stabilitate.



- a - - b -

- *Fig. a*: Pentru un sistem de tip SISO sunt ilustrate un semnal de intrare şi răspunsul sistemului la acest semnal. Se observă că $\left|u^*(t)\right| \le u_{max}$ şi că există un y_{max} astfel încât $\left|y(t)\right| \le y_{max}$. În ipoteza că acest tip de comportare este general valabil, vom considera că sistemul este BIBO-stabil.
- *Fig. b*: La intrările unui sistem MIMO, cu două intrări şi două ieşiri, se aplică două semnale de intrare $u_1^*(t)$ și $u_2^*(t)$ mărginite în amplitudine ($\left|u_1^*(t)\right| \le u_{1max}$ și $\left|u_2^*(t)\right| \le u_{2max}$). Răspunsul sistemului, redat de semnalele $y_1(t)$ şi $y_2(t)$, nu verifică în ansamblu condiţiile $\left|y_1^*(t)\right| \le y_{1max}$ şi $\left|y_2^*(t)\right| \le y_{2max}$. A doua condiţie fiind încălcată înseamnă că sistemul nu este BIBO – stabil. Aceasta nu exclude existenţa unor semnale de intrare mărginite la care sistemul să răspundă cu semnale de ieşire mărginite.

Așa cum se arată în continuare în secțiunea 3, *stabilitatea internă asimptotică a unui sistem liniar implică stabilitatea externă a acelui sistem*.

Până aici, în cele prezentate în această secţiune, ne-am referit doar la sisteme dinamice în timp continuu. Conceptele sunt valabile şi pentru *sistemele dinamice în timp discret*. Pentru aceste sisteme urmărirea proceselor care au loc se realizează prin intermediul valorile mărimilor caracteristice numai la momentele de discretizare. Traiectoriile sunt constituite din puncte discrete şi nu din curbe continue.

2. Criteriul rădăcinilor

După cum s-a precizat, „problema stabilităţii interne a unui sistem este redusă la cea a stabilităţii unui singur regim, regimul $\tilde{x}(t) = 0$”. Simplificăm exprimarea vorbind despre „stabilitatea punctului $\tilde{x} = 0$”. În continuare ne referim la stabilitatea sistemelor dinamice liniare din această perspectivă.

- Fie sistemul liniar în timp continuu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad (1)$$

În cazul traiectoriilor notate cu 1 în figurile de la pag. 146, sistemul (1) evoluează sub acțiunea semnalului de intrare u(t) = u*(t), t > t_0, plecând din starea inițială x_0^*. În cazul traiectoriilor notate cu 2 în aceleași figuri sistemul evoluează tot sub acțiunea semnalului de intrare u(t) = u*(t), t > t_0, dar plecând din starea inițială x_0. Ca urmare, $x^*(t)$ și $x(t)$ satisfac relațiile:

$$\left(x^*(t)\right)^{\bullet} = Ax^*(t) + Bu^*(t),\ x(t_0) = x_0^* \quad \text{și} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu^*(t),\ x(t_0) = x_0$$

Scăzându-le membru cu membru și introducând variabila de stare $\tilde{x}(t) = x^*(t) - x(t)$, se obţine sistemul

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0^* - x_0, \quad t \ge t_0 \ . \qquad (2)$$

Polinomul caracteristic al matricei A (matrice de tipul n x n), este

$$\mu(s) = \det(sI - A). \qquad (3)$$

În acest context, plecând de la realizarea standard diagonală (v. cursul 11), se obține următorul rezultat cunoscut sub denumirea de ***criteriul rădăcinilor*** sau *criteriul fundamental al stabilităţii* pentru sistemele liniare în timp continuu:

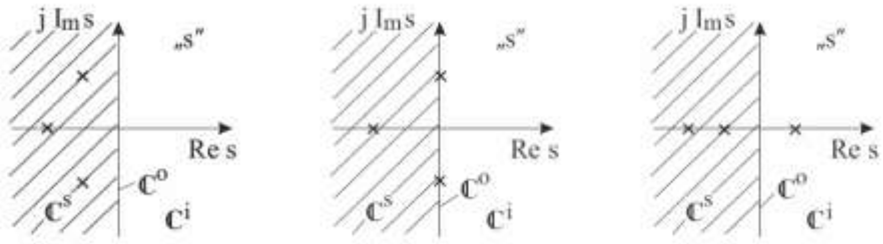
Sistemul (1) este:

- ***asimptotic stabil*** *atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic (3) au partea reală strict negativă,*
- ***stabil*** *atunci când unele valori proprii au partea reală strict negativă iar restul valorilor proprii sunt pur imaginare, dar simple (în acest caz se mai spune că sistemul este "marginal stabil")*

şi

- ***instabil*** *în restul cazurilor.*

Celor trei situaţii le corespund configurațiile de poli din figura de mai jos (stânga – sistem asimptotic stabil, mijloc – sistem stabil, dreapta – sistem instabil). Ele se referă la sisteme de ordinul III.



- În cazul sistemului în timp discret

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t]\,,\ x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases}, \qquad (4)$$

putem asocia, folosind o relație similară relației (2), sistemul:

$$\tilde{x}[t+1] = A \cdot \tilde{x}[t], \quad \tilde{x}[t_0] = x_0^* - x_0, \quad t \in N,\ t \geq t_0. \qquad (5)$$

El are polinomul caracteristic

$$\mu(z) = \det(zI - A)\,. \qquad (6)$$

De data aceasta este semnificativă amplasarea în planul complex „z” a rădăcinilor lui μ(z) în raport cu cercul de rază unitară $|z| = 1$. ***Criteriul rădăcinilor*** (criteriul fundamental al stabilităţii) pentru sistemele liniare în timp discret este:

Sistemul (5) este:

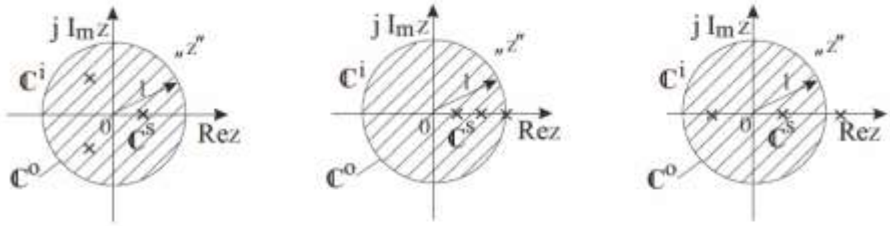
- ***asimptotic stabil*** *atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic (6) sunt în modul subunitare, adică* $|z_i| < 1$, $i = 1; n$*,*

- ***stabil** dacă, cu excepţia unor rădăcini simple amplasate pe cercul* $|z| = 1$*, restul rădăcinilor sunt în interiorul cercului unitar (sistem marginal stabil)*

şi

- ***instabil** în restul cazurilor.*

Celor trei situaţii le corespund (în cazul unui sistem de ordinul III), respectiv, reprezentările următoare:



Se observă că analizarea stabilităţii sistemelor liniare pe baza calculării valorilor proprii (rădăcinilor) se reduce, formal, la identificarea amplasării imaginilor lor în planul complex, faţă de axa imaginară a planului complex „s" în cazul STC, respectiv faţă de cercul de rază unitate $|z| = 1$ din planul complex „z" în cazul STD.

Majoritatea programelor de analiză a stabilităţii sistemelor liniare se bazează pe criteriul rădăcinilor şi pe metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor polinomiale.

3. BIBO – stabilitatea sistemelor liniare, Criteriul răspunsului la impuls.

Limităm prezentarea la cazul sistemelor de tip SISO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \ x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases}, \ t \geq 0 \qquad (7)$$

pentru care răspunsul sistemului la semnalul de intrare $u^*(t), t \geq 0$ este

$$y(t) = c^T \cdot e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau + d \cdot u^*(t). \qquad (8)$$

Potrivit conceptului de BIBO – stabilitate introdus în secţiunea 1 a acestui paragraf, răspunsul y(t) al sistemului (7) la o intrare $u^*(t), t \geq 0$ mărginită trebuie să fie mărginit. Semnalul $u^*(t)$ fiind mărginit deducem că şi termenul $d \cdot u^*(t)$ este mărginit. Deci trebuie să fie mărginită suma $c^T \cdot e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau$.

Întrucât, $x(0)$ şi $u^*(t)$ sunt cantităţi independente, rezultă, pe de-o parte, că răspunsul liber $c^T \cdot e^{At} \cdot x(0)$ trebuie să fie mărginit, iar pe de altă parte că răspunsul forţat $\int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau$ trebuie să fie mărginit. Pentru acesta avem:

$$\left| \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau \right| \leq \int_0^t \left| h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \right| \cdot d\tau = \int_0^t \left| h(t-\tau) \right| \cdot \left| u^*(\tau) \right| \cdot d\tau \leq u_{max} \cdot \int_0^t \left| h(t-\tau) \right| \cdot d\tau .$$

Deoarece inegalitatea $\left|\int_0^t h(t-\tau)\cdot u^*(\tau)\cdot d\tau\right| \le u_{max}\cdot\int_0^t |h(\tau)|\cdot d\tau$ trebuie să fie adevărată pentru orice $t \geq 0$ rezultă că

$$\left|\int_0^\infty h(t-\tau)\cdot u^*(\tau)\cdot d\tau\right| \le u_{max}\cdot\int_0^\infty |h(\tau)|\cdot d\tau . \qquad (9)$$

Ca urmare, termenul $\int_0^t h(t-\tau)\cdot u^*(\tau)\cdot d\tau$ este mărginit atunci când $\int_0^\infty |h(\tau)|\cdot d\tau$ este mărginită, adică:

Pentru ca sistemul (7) să fie BIBO stabil în condiții inițiale nule este suficient ca funcţia răspuns la impuls unitar h(t) să fie absolut convergentă, adică $\int_0^\infty |h(\tau)|\cdot d\tau$ *să ia o valoare finită. (**Criteriul răspunsului la impuls**).*

Întrucât $h(t) = c^T e^{At} b \circ\!\!-\!\!\bullet H(s) = c^T(sI-A)^{-1}b$ iar răspunsul liber are expresia $c^T e^{At}x(0)$, o condiţie suficientă ca h(t) să fie absolut convergentă, respectiv ca răspunsul y(t) dat de (8) să fie mărginit, este ca toate valorile proprii ale matricei A, adică toţi polii funcţiei de transfer H(s), să îndeplinească condiţia $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$. În consecinţă:

Pentru ca sistemul (7) să fie BIBO – stabil, o condiţie suficientă este ca el să fie asimptotic stabil.

Similar, pentru sistemul în timp discret:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + bu[t]\,,\ x[0] = x_0 \\ y[t] = c^T x[t] + du[t] \end{cases} \qquad (10)$$

este valabilă precizarea:

Pentru ca sistemul (10) să fie BIBO – stabil, o condiţia suficientă este ca el să fie asimptotic stabil. Aceasta înseamnă $|z_i| < 1\,,\ i = 1;n$.

- În locul condiţiei „$\int_0^\infty |h(\tau)|\cdot d\tau$ mărginită”, în cazul sistemului (10) în ***criteriul răspunsului la impuls*** apare condiţia „$\sum_{t=0}^\infty |h[t]|$ mărginită”.

Exemplul 1: *Să se analizeze stabilitatea internă şi existenţa proprietăţii de BIBO – stabilitate pentru sistemul de poziţionare de la pag. 110 (sistem în timp continuu).*

***Soluţie**: Pentru sistemul de poziţionare* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *şi are valorile proprii $s_1 = s_2 = 0$. Deoarece valoarea proprie este pe axa imaginară şi este dublă sistemul este instabil. Pentru a ne pronunţa asupra BIBO-stabilităţii trebuie să examinăm răspunsul la impuls. Întrucât* $b=[0\ 1]^T$ *şi* $c=[1\ 0]$, *se obţine h(t) = t. În consecinţă, condiţia ca* $\int_0^\infty |h(\tau)|\cdot d\tau$ *să fie finită nu poate fi îndeplinită. Deci sistemul de poziţionare nu are proprietatea de BIBO - stabilitate.*

Exemplul 2: *Să se analizeze stabilitatea internă şi existenţa proprietăţii de BIBO – stabilitate pentru sistemul în timp discret*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}\cdot u[t] \\ y[t] = [1 \quad 0]\cdot\begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{cases} .$$

***Soluţie**: Şi în acest caz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *iar valorile proprii sunt $z_1 = z_2 = 0$. Datorită faptului că valoarea proprie este în origine (deci în interiorul cercului de rază unitară) sistemul este asimptotic stabil şi are proprietatea de BIBO - stabilitate.*

4. Criterii de stabilitate pentru sistemele liniare

După cum s-a precizat, metodele numerice de analiză a stabilităţii sistemelor liniare se bazează pe criteriul rădăcinilor. In ingineria reglării se folosesc o serie de alte procedee de analiză a stabilităţii care ocolesc utilizarea criteriului rădăcinii. Ele se numesc *criterii de stabilitate*. Se disting *criterii de stabilitate pentru STC* şi *criterii de stabilitate pentru STD*.

În cazul sistemelor liniare, atât pentru STC cât şi pentru STD avem *criterii de stabilitate algebrice* şi *criterii de stabilitate frecvenţiale*. Primele se referă în mod direct la polinomul caracteristic al sistemului $\mu(s)$, respectiv $\mu(z)$ [4]. Celelalte operează cu caracteristicile de pulsaţie sau cu locurile de transfer ale sistemelor [5].

În continuare ne vom referi numai la două criterii algebrice: *criteriul lui Hurwitz*, pentru STC, şi *criteriul Jury*, pentru STD. Principalul criteriu de stabilitate frecvenţial este *criteriul lui Nyquist* care are versiuni distincte pentru STC şi STD. În încheierea paragrafului vom prezenta o variantă a unei versiuni a criteriului lui Nyquist pentru STC cunoscută sub numele de *criteriul rezervei de fază*.

4.1. Criteriul de stabilitate Hurwitz

Criteriul de stabilitate Hurwitz este un criteriu de tip algebric care se foloseşte pentru STC liniare. El are următorul enunţ:

Un sistem liniar cu polinomul caracteristic

$$\mu(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0 , \tag{11}$$

este intern asimptotic stabil dacă şi numai dacă sunt satisfăcute condiţiile:

i) $a_i > 0$, *pentru* $i = 0\,;n-1$,

ii) $H_i > 0$, pentru $i = 1;n$,

în care $H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$ *este aşa-numitul determinant Hurwitz, iar*

$$H_1 = \left|a_{n-1}\right|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

sunt minorii principali ai determinantului Hurwitz, numiţi şi determinanţi de nord-vest.

Precizări:

a) Pentru aplicarea criteriului Hurwitz $\mu(s)$ trebuie adus în prealabil în forma monică ($a_n = 1$).

Exemplu: *În loc de* $\mu(s) = 7s^3 + 2as^2 + 5bs + 3$ *se operează cu* $\mu(s) = s^3 + \frac{2a}{7}s^2 + \frac{5b}{7}s + \frac{3}{7}$.

b) Se observă că în expresia lui H_n, la parcurgerea diagonalei principale în sens descendent, indicii elementelor de pe diagonala principală se înşiră în ordine descrescătoare, iar la parcurgerea coloanelor în sens

[4] În mod riguros se operează cu polinomul minimal al sistemului. (v. Dragomir, T.L., Teoria sistemelor, Aplicaţii 2, Ed. Politehnica, 2008).

[5] Locurile de transfer sunt reprezentările grafice în raport cu ω a lui $H(j\omega)$ pentru STC sau a lui $H(e^{j\omega h})$ pentru STD.

descendent indicii elementelor de pe fiecare coloană cresc cu câte o unitate. Dacă indicii nu se regăsesc în polinomul caracteristic, atunci elementele respective ale matricei H_n se înlocuiesc cu 0.

c) Dacă condiţia i), $a_i > 0$, i=0;n-1 nu e îndeplinită, atunci nu mai aplicăm condiţia ii).

d) Criteriul lui Hurwitz reprezintă un algoritm care se pretează la programare.

***Exemplul 1**: Să se analizeze stabilitatea sistemului în timp continuu care are polinomul caracteristic* $\mu(s) = 7s^3 + 2s^2 + 5s + 1$.

***Soluţie**: Se operează cu* $\mu(s) = s^3 + \frac{2}{7}s^2 + \frac{5}{7}s + \frac{1}{7}$. *Observăm că prima condiţie de stabilitate Hurwitz este îndeplinită (coeficienţii sunt strict pozitivi). Pentru a investiga îndeplinirea celei de a doua condiţii calculăm*:

$$H_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 1 & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} \Rightarrow \qquad H_1 = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7} > 0; \qquad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{10}{49} - \frac{1}{7} = \frac{3}{49} > 0.$$

$$H_3 = \frac{1}{7}H_2 = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\left(\frac{10}{49} - \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{343} > 0.$$

H_1, H_2 *şi* H_3 *îndeplinesc a doua condiţie de stabilitate Hurwitz => Sistemul este asimptotic stabil.*

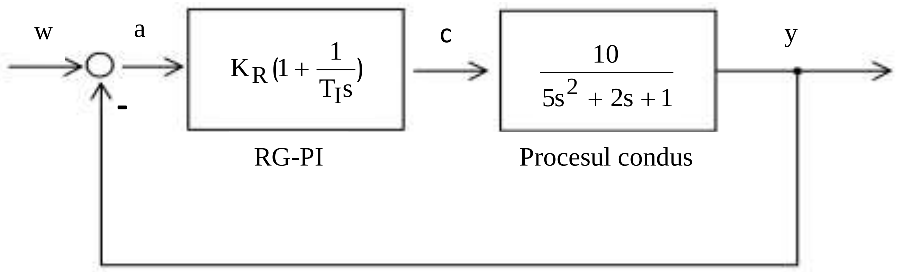
***Exemplul 2**: Se consideră familia de sisteme de ordinul al 2-lea cu polinoamele caracteristice de forma* $\mu(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, *cu* a_2, a_1, a_0 *de acelaşi semn. Să se demonstreze că aceste sisteme sunt asimptotic stabile.*

Soluţie: $\mu(s) = s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}$. *Prima condiţie de stabilitate Hurwitz este îndeplinită deoarece toţi coeficienţii au acelaşi semn =>* $\frac{a_1}{a_2} > 0$, $\frac{a_0}{a_2} > 0$. *Privind a doua condiţie observăm că determinantul Hurwitz fiind* $H_2 = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_2} & 0 \\ 1 & \frac{a_0}{a_2} \end{vmatrix}$ =>

$H_1 = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| > 0$, $H_2 = \frac{a_1}{a_2}\frac{a_0}{a_2} > 0$ => *sistemele sunt asimptotic stabile.*

- In practică problema proiectării sistemelor de reglare automată se reduce din punct de vedere matematic, odată ales tipul de regulator, la problema determinării parametrilor regulatorului. O prima condiţie pe care parametrii trebuie să o îndeplinească este aceea de a conferi stabilitate asimptotică sistemului închis (sistemului de reglare).

***Exemplul 3**: Să se determine domeniul de stabilitate al sistemului din figură în planul* $< K_R, T_I >$ *al parametrilor regulatorului, având în vedere că* K_R, T_I *> 0.*



Soluţie: *Sistemul are ordinul n = 3. Pentru canalul* $w \to y$ *avem f.d.t.*

$$H(s)=\frac{K_R(1+\frac{1}{T_I s})\frac{10}{5s^2+2s+1}}{1+K_R(1+\frac{1}{T_I s})\frac{10}{5s^2+2s+1}}=\ldots=\frac{10(K_R T_I s+K_R)}{5T_I s^3+2T_I s^2+T_I(1+10K_R)s+10K_R}.$$

Polinomul caracteristic îl vom folosi sub forma $\mu(s)=s^3+0.4s^2+0.2(1+10K_R)s+2\frac{K_R}{T_I}$.

Deoarece $K_R>0$, $T_I>0$ => *coeficienţii polinomului sunt strict pozitivi => prima condiţie a criteriului Hurwitz este îndeplinită. Pentru a investiga respectarea celei de a doua condiţii, calculăm*:

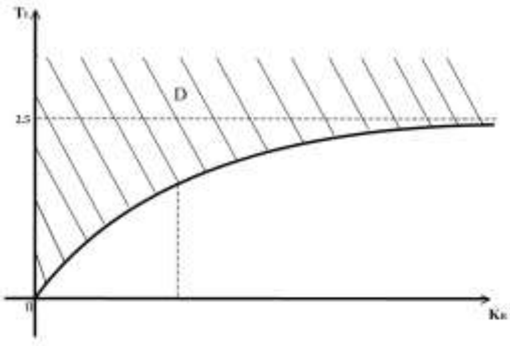
$$H_3=\begin{vmatrix}0.4 & 2\frac{K_R}{T_I} & 0\\ 1 & 0.2(1+10K_R) & 0\\ 0 & 0.4 & \frac{2K_R}{T_I}\end{vmatrix} \Rightarrow H_1=|0.4|=0.4>0,\ H_2=\begin{vmatrix}0.4 & \frac{2K_R}{T_I}\\ 1 & 0.2(1+10K_R)\end{vmatrix},\ H_3=\frac{2K_R}{T_I}H_2.$$

Deci, pentru ca sistemul să fie asimptotic stabil este necesar şi suficient să avem $H_2=0.08(1+10K_R)-\frac{2K_R}{T_I}>0$ *sau*

$$0.08(1+10K_R)-\frac{2K_R}{T_I}>0 \Rightarrow 0.08(1+10K_R)>\frac{2K_R}{T_I} \Rightarrow T_I>\frac{K_R}{0.08(1+10K_R)}=\frac{25K_R}{1+10K_R}.$$

Notăm $f(K_R)=\frac{25K_R}{1+10K_R}$. *Funcţia f are graficul din figură: un arc de hiperbolă.*

Domeniul de stabilitate este domeniul în care este îndeplinită condiţia $T_I>\frac{25K_R}{1+10K_R}$. *El este reprezentat haşurat şi notat cu D.*

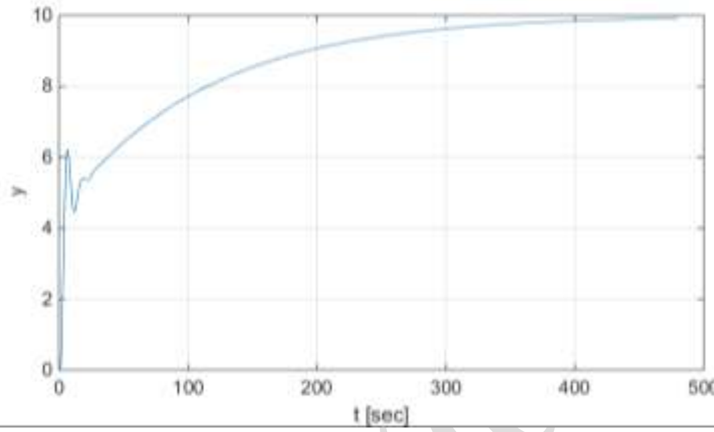


Observație:

Analiza stabilității unui sistem reprezintă, de regulă, doar o parte a unei probleme de sinteză a unui sistem de conducere. În această ordine de idei analiza stabilității sistemului de mai sus este inclusă în problema de sinteză a regulatorului, problema având ca obiectiv determinarea parametrilor K_R și T_I ai regulatorului PI. Problema poate fi soluționată pe mai multe căi. În continuare prezentăm etapizat una dintre ele.

- Având în vedere că procesul condus are polinomul caracteristic $\mu_P(s)=5s^2+2s+1$, deci o amortizare de $\zeta_P=0.447$ impunem pentru polinomul caracteristic al sistemului de reglare forma $\mu(s)=(s^2+2\cdot\zeta\cdot\omega_n s+\omega_n^2)\cdot(s+\omega_a)$ cu $\zeta=0.8$. Această formă asigură un pol real și doi poli complecși conjugați stabili.

- Coeficienţii celor două expresii ale polinomului caracteristic al sistemului de reglare $\mu(s)$ trebuind să fie identici, rezultă egalitățile $1.6\cdot\omega_n+\omega_a=0.4$, $\omega_n^2+1.6\cdot\omega_n=0.2(1+10K_R)$ și $\omega_n^2\cdot\omega_a=2\dfrac{K_R}{T_I}$.
- Pe baza primei egalităţi adoptăm $\omega_n=0.2\,\sec^{-1}$, $\omega_a=0.08\,\sec^{-1}$. Atunci, din a doua egalitate se obține K_R=0.08, iar din a treia T_I=50 sec. Valorile lui K_R și T_I corespund unui punct din domeniul de stabilitate.
- În figură este ilustrat răspunsul sistemului la un semnal treptă w(t) cu amplitudinea de 10 unități. Intervalul de timp considerat este de 480 secunde (este vorba de un proces lent).



- Dacă rezultatul nu convine, problema se reia cu adoptarea valorilor ω_n, ω_a .

4.2. Criteriul de stabilitate Jury

Este un criteriu algebric de stabilitate pentru STD liniare având polinomul caracteristic.

$$\mu(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0\,. \qquad (12)$$

Aplicarea criteriului constă în verificarea satisfacerii mai multor inegalităţi dintre care o parte se referă la cantităţi generate cu ajutorul aşa-numitei *scheme a lui Jury*. Schema are aspectul:

[J]						
	a_0	a_1	…	a_{n-1}	a_n	**perechea de linii i=1**
$b_1=a_0/a_n$	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0	
	j_{31}	j_{32}	…	j_{3n}		**perechea de linii i=2**
$b_2=j_{31}/j_{3n}$	j_{3n}	$j_{3,n-1}$	…	j_{31}		
…	…	…	…	…		

i) Schema are n perechi de linii. Elementul de pe linia *k* şi coloana ℓ se notează cu $j_{k\ell}$.

ii) Fiecare pereche de linii se caracterizează prin faptul că cea de a doua linie a perechii o reproduce pe prima în ordine inversă.

iii) Prima linie a primei perechi de linii conţine coeficienţii lui *μ(z)* în ordinea crescătoare a indicelui.

iv) Fiecărei perechi de linii *i* se asociază pe a doua linie un coeficient b_i, trecut în stânga barei, calculat cu relaţia $b_i=\dfrac{j_{2i-1,1}}{j_{2i,1}}$. Coeficienţii b_1, b_2, … se numesc *coeficienţi Jury* (coloana [J]).

v) Începând cu perechea a doua de linii, prima linie a fiecărei perechi de linii *i* se calculează în funcție de elementele perechii de linii anterioare *i-1* cu formula

$$j_{2i-1,\ell}=j_{2(i-1)-1,\ell+1}-b_{i-1}\cdot j_{2(i-1),\ell+1}\ ,\ \ell=1;\varsigma-1\ , \qquad (13)$$

în care ς este numărul elementelor de pe o linie a perechii de linii *i-1*.

Criteriul de stabilitate Jury are următorul enunţ:

Un sistemul liniar invariant în timp cu polinomul caracteristic (13) este intern asimptotic stabil dacă şi numai dacă toţi coeficienţii Jury sunt în modul subunitari, adică

$$|b_i| < 1 \ , \ i = 1;n \,. \qquad (14)$$

De observat că relaţia (14) conţine n duble inegalităţi, adică 2n inegalităţi simple:

$$|b_i| < 1 \ , \ i = 1;n \quad \Rightarrow \quad -1 < b_i < 1 \ , \ i = 1;n \,.$$

Un al doilea enunţ, cunoscut sub denumirea de *varianta simplificată a criteriului Jury*, utilizează aşa-numita *schemă Jury redusă*, care diferă de schema Jury de mai sus prin absenţa ultimei perechi de linii. Pentru acest caz, când schema are numai n-1 perechi de linii, este valabil următorul enunţ:

Un sistemul liniar invariant în timp, având polinomul caracteristic (13), este intern asimptotic stabil dacă şi numai dacă sunt satisfăcute condiţiile:

$$\mu(1) > 0 \ , \ (-1)^n \mu(-1) > 0 \ , \ |b_i| < 1 \ , \ i = 1;n-1 \,. \qquad (15)$$

Şi de data aceasta avem în total tot *2n* inegalităţi simple.

***Exemplul 1**: Să se analizeze stabilitatea unui sistem cu* $\mu(z) = z^2 - 0.36z + 0.5$.

***Soluţie**: i)* $\mu(1) = 1 - 0.36 + 0.5 > 0$*; ii)* $(-1)^2\mu(-1) = 1 + 0.36 \_ 0.5 > 0$*; iii) Schema Jury este*

[J]			
-	0.5	-0.36	1
$b_1 = 0.5$	1	-0.36	0.5

Deoarece $|b_2| = |0.5| < 1$ *=> sistemul este asimptotic stabil.*

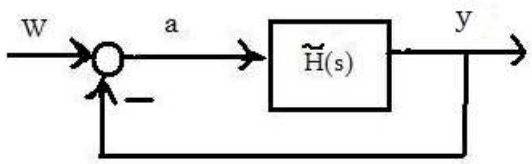
***Exemplul 2**: Să se analizeze stabilitatea sistemului:* $\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot x[t] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x[t] \end{cases}$.

Soluţie: $\mu(z) = \begin{vmatrix} z+1 & 0 & -2 \\ -1 & z+1 & -0.5 \\ 0 & 2 & z-0.5 \end{vmatrix} = (z+1)^2(z-0.5) + 4 + (z+1) = z^3 + 1.5z^2 + z + 4.5$.

Deci: i) $\mu(1) = 1 + 1.5 + 4.5 > 0$*, ii)* $(-1)^3\mu(-1) = -(-1 + 1.5 - 1 + 4.5) < 0$ *=> sistemul este instabil.*

4.3. Criteriul de rezervei de fază

Criteriul rezervei de fază este o variantă a criteriului de stabilitate al lui Nyquist. Ambele criterii se referă la structura cu reacţie unitară negativă din figura următoare pentru care $H(s) = \dfrac{\widetilde{H}(s)}{1 + \widetilde{H}(s)}$.



În aplicarea criteriului rezervei de faza se folosesc caracteristicile Bode ale sistemului deschis. Presupunem că acestea au aspectul din figura de mai jos.

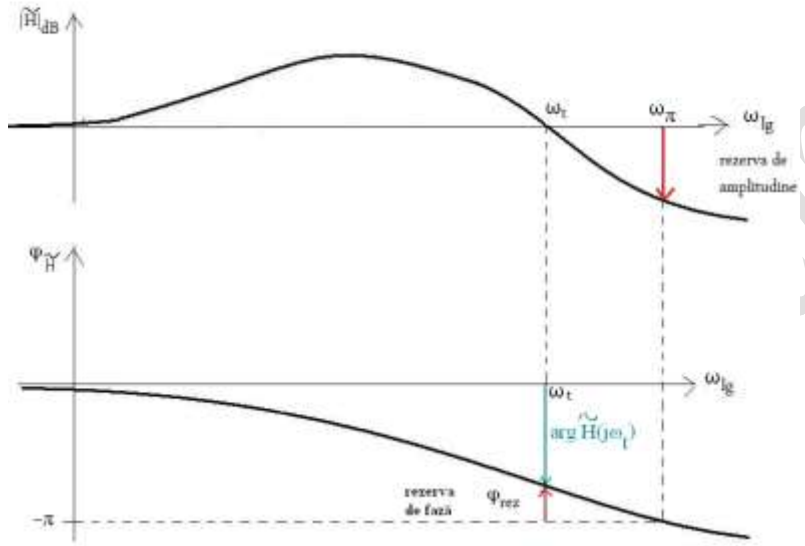


Figura introduce următoarele mărimi:

ω_t (pulsaţia de trecere sau de tăiere) - este pulsaţia pentru care $|\tilde{H}(j\omega)| = 1$ sau $|\tilde{H}|_{dB} = 0$;

φ_{rez} - rezerva de faza, $\varphi_{rez} = \pi + \arg(\tilde{H}(j\omega_t))$.

Criteriul rezervei de fază se referă la cazul când $\tilde{H}(s)$ este de forma

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{K}}{s^q} \cdot \frac{1 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \ldots + a_{n-q} s^{n-q}} \cdot e^{-\tau s} \quad , \qquad (16)$$

cu $\tilde{K} > 0$, $q \in \{0,1,2,3\}$, m<n , $\tau \geq 0$, $1 + b_1 s + \ldots + b_m s^m$ şi $1 + a_1 s + \ldots + a_{n-q} s^{n-q}$ polinoame Hurwitz coprime.

Enunţul criteriului rezervei de fază este următorul:

Sistemul în circuit închis cu reacţie unitară negativă având funcţia de transfer a sistemului deschis de forma (16) este asimptotic stabil dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia:

$$\varphi_{rez} > 0 \text{ [6]}. \qquad (17)$$

În practică trebuie să ne asigurăm faţă de impreciziile de determinare a lui $\tilde{H}(s)$. Acest lucru se face prin modificarea membrului drept din relația (17) sub forma:

$$\varphi_{rez} > \frac{\pi}{9} \ . \qquad (18)$$

[6] Aplicând criteriul pentru situaţia de la pag. 156 rezultă că sistemul este asimptotic stabil.