

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 10

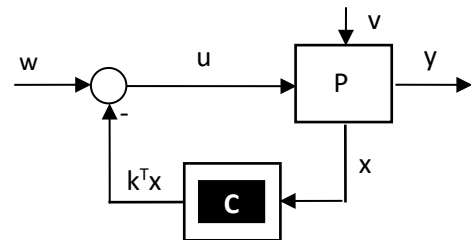
CRITERIUL RĂDĂCINILOR. CRITERIUL DE CONTROLABILITATE KALMAN

1. Obiective

- fixarea unor noțiunilor de bază referitoare la stabilitatea și controlabilitatea sistemelor liniare,
- introducerea unor noțiuni privind stabilizarea prin reacție după stare,
- sublinierea asemănării procedurale, dar și a diferențelor care apar la aplicarea criteriului rădăcinilor pentru sisteme liniare în timp continuu și sisteme liniare în timp discret.

2. Stabilitate, controlabilitate, stabilizare

- *Stabilitatea* reprezintă o proprietate intrinsecă a sistemelor care se manifestă în condițiile perturbării regimurilor lor de funcționare prin variații ale semnalelor de intrare. Dacă la variații persistente ale semnalelor de intrare sistemul ajunge într-un nou regim de funcționare permanent sau dacă la variații de durată limitată a semnalelor de intrare sistemul revine în vechiul regim de funcționare, sistemul se consideră stabil.
- *Controlabilitatea* este o a doua proprietate intrinsecă a sistemelor care constă în faptul că sistemul admite, potențial, semnale de intrare capabile să impună sistemului o tranziție, în orice interval de timp finit dorit, dintr-o stare inițială oarecare într-o stare finală oarecare.
- Dacă un proces condus este instabil, dar controlabil, atunci, din punct de vedere practic prezintă interes generarea unui semnal de intrare care să conducă procesul pe o traiectorie stabilă (într-un regim de funcționare stabil). Acest lucru este posibil, la modul general, prin introducerea unei reacții după starea procesului instabil. Prin introducerea canalului de reacție se completează structura inițială, rezultând un sistem nou, stabil. În acest context vorbim despre *stabilizarea procesului prin reacție după stare*.



Ideea stabilizării prin reacție după stare este exemplificată în Fig. 10.1 în care P este un proces condus, instabil dar controlabil. Mărimile de stare x se consideră măsurabile. Fiind controlabil, el poate fi stabilizat folosind o reacție realizată cu un compensator C. Acesta este un bloc amplificator sumator care efectuează operația $k^T x$, și contribuie la realizarea legii de comandă $u = w - k^T x$.

Fig. 10.1.

Cu toate că structura din figură este în circuit închis, ea nu este considerată un sistem de reglare propriu-zis. Aceasta se datorează faptului că prin adoptarea amplificărilor compensatorului nu se poate controla decât parțial comportarea sistemului în circuit închis în raport cu w și v .

3. Criteriul rădăcinilor

- Criteriul rădăcinilor este un criteriu de analiză a stabilității unui sistem liniar. Aplicarea lui se face parcurgând următorii trei pași:
 - a) Se determină polinomul caracteristic $\mu(\lambda)$ al sistemului (în ipoteza că gradul polinomului caracteristic este egal cu ordinul sistemului). De regulă, $\mu(\lambda)$ se obține ca numitor al f.d.t. (pentru

sisteme de tip SISO) sau ca determinant, $\mu(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, atunci când se cunoaște MM-ISI al sistemului.

b) Se calculează rădăcinile lui $\mu(\lambda)$, adică valorile proprii ale matricei A , și se amplasează în planul complex „s” sau „z”, după cum $\lambda = s$ sau $\lambda = z$.

c) Se aplică criteriul rădăcinilor.

- Pentru STC enunțul **criteriului rădăcinilor** este următorul:

Un sistem linear în timp continuu cu polinomul caracteristic $\mu(s)$ este:

- **asimptotic stabil** atunci când valorile proprii ale lui $\mu(s)$ au partea reală strict negativă,
- **stabil** atunci când unele valori proprii ale lui $\mu(s)$ au partea reală strict negativă iar restul valorilor proprii sunt pur imaginare, dar simple (în acest caz se mai spune că sistemul este “marginal stabil”)

și

- **instabil** în restul cazurilor.

Celor trei situații le corespund reprezentările din Fig. 10.2 care se referă la un sistem de ordinul III.

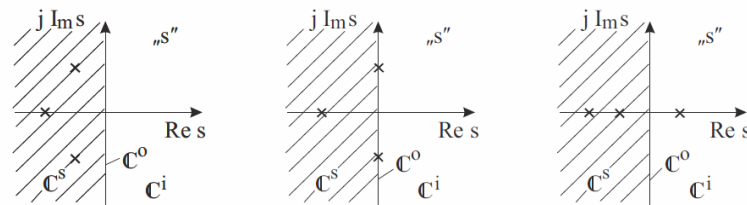


Fig. 10.2.

- Pentru STD enunțul **criteriului rădăcinilor** este următorul:

Un sistem linear în timp discret cu polinomul caracteristic $\mu(z)$ este:

- **asimptotic stabil** atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic $\mu(z)$ sunt în modul subunitare, adică $|z_i| < 1$, $i = 1; n$,
 - **stabil** dacă, cu excepția unor rădăcini simple amplasate pe cercul $|z| = 1$, restul rădăcinilor sunt în interiorul cercului unitar (sistem marginal stabil)
- și
- **instabil** în restul cazurilor.

Celor trei situații le corespund reprezentările din Fig. 10.3 care se referă la un sistem de ordinul III.

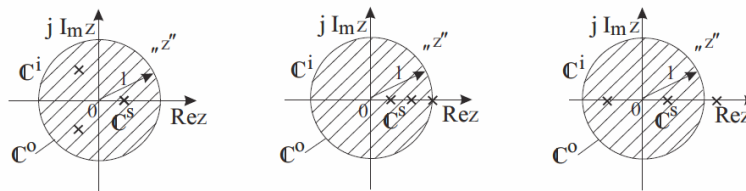


Fig. 10.3.

4. Criteriul de controlabilitate Kalman

- Criteriul de controlabilitate Kalman se referă la sisteme liniare de forma ¹:

¹ Se observă că operăm cu modele cu variabilă unificată. Ca urmare enunțul criteriului se referă simultan atât la STC cât și la STD.

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Cu matricele A și B din (1) se formează următoarea matrice de tipul (n, mn) denumită **matrice de controlabilitate** a sistemului (1):

$$M_c = [B : AB : \dots : A^{n-1}B].^2 \quad (2)$$

- **Criteriul de controlabilitate Kalman are următorul enunț:**

Sistemul liniar (1) este controlabil dacă și numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu ordinul sistemului

$$\text{rang } M_c = n. \quad (3)$$

Pentru sistemele monovariabile la intrare, pentru care $m=1$, M_c este o matrice pătratică de tipul (n,n) , astfel că, echivalent condiției (3), avem:

$$\det M_c \neq 0. \quad (3')$$

5. Studiu de caz

- Procesele studiate în această secțiune sunt sistemele de ordinul II cu f.d.t. $H(\lambda) = \lambda^{-2}$ căreia îi corespunde MM-II (4), respectiv MM-ISI (5):

$$y(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot u(\lambda) \quad (4)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b \cdot \underbrace{u}_u \\ y = \underbrace{[1 \ 0]}_{c^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + b \cdot w \\ y = c^T \cdot x \end{cases} \quad (5)$$

Deși în variabile unificate procesele au aceeași formă, în domeniul timp ele au comportări mult diferite, comportarea procesului în timp continuu diferind de cea a procesului în timp discret. Astfel, sistemul (4) corespunde în timp continuu sistemului de poziționare (sistem dublu integrator) (6), iar în timp discret sistemului de tip FIR (sistem cu răspuns la impuls în timp finit) (7). Pentru amândouă sistemele este valabilă schema bloc din Fig. 10.4.

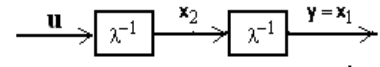


Fig. 10.4

$$y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot u(s) \quad (6) \quad y(z) = z^{-2} \cdot u(z) \quad (7)$$

- Polinomul caracteristic al sistemului (5) este $\mu_o(\lambda) = \lambda^2$. Ca urmare, valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Aplicând criteriului rădăcinilor rezultă că procesul (6), în timp continuu, este instabil, pe când procesul (7), în timp discret, este asimptotic stabil.³
- Matricea de controlabilitate a sistemului (5) fiind invers-diagonală, rezultă că sistemul este controlabil:

² Matricea M_c este o matrice celulară. Simbolurile $:$ sau $|$ servesc ca separatoare pentru delimitarea (în scris a) celulelor. Așadar, lângă prima celulă B , se pune a doua celulă AB , apoi celula A^2B ș.a.m.d.

³ Orice sistem de tip FIR este asimptotic stabil.

$$M_c = [b : A \cdot b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rang } M_c = 2 \quad (8)$$

- Procesul (6) fiind instabil dar controlabil, el este stabilizabil prin reacție după stare. Reacția după stare se poate folosi și în cazul sistemului (6), caz în care sistemul rezultat nu mai este un sistem de tip FIR. În cazul de față pentru structura cu reacție după stare putem opera cu oricare din schemele bloc din Fig. 10.5:

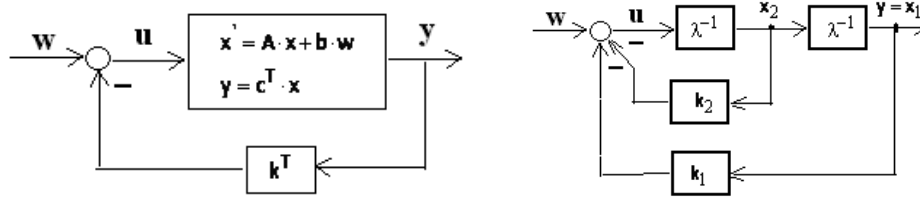


Fig. 10.5.

Așa cum se observă din schemele bloc reacția după stare se realizează folosind compensatorul $k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, respectiv legea de comandă în circuit închis

$$u = -k^T \cdot x + w \quad (9)$$

Semnalul w este semnalul de conducere al sistemului. Înlocuind (9) în ecuațiile de stare din (5) rezultă

$$x' = A \cdot x + b \cdot (-k^T \cdot x + w) = \underbrace{(A - b \cdot k^T)}_{\bar{A}} \cdot x + b \cdot w, \quad (10)$$

respectiv sistemul în circuit închis (11) cu polinomul caracteristic (12).

$$\begin{cases} x' = \bar{A} \cdot x + b \cdot w \\ y = c^T \cdot x \end{cases} \quad (11), \quad \mu(\lambda) = \lambda^2 + k_2 \cdot \lambda + k_1. \quad (12)$$

Sistemul (5) fiind controlabil, lui i se pot impune pe baza teoremei alocării, prin reacție după stare, orice pereche de poli $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, reali sau complex-conjugați. În adevăr, impunând perechea de poli $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, constatăm că sistemului în circuit închis i se impune polinomul caracteristic (13):

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2. \quad (13)$$

Expresiile (12) și (13) ale lui $\mu(\lambda)$ trebuind să fie identice, rezultă că amplificările compensatorului se calculează cu formulele:

$$k_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad k_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (14)$$

- În primul fișier Simulink dat, asociat acestei lucrări, se găsesc modele intrare-ieșire, respectiv intrare-stare-ieșire pentru sistemul dublu integrator cu reacție după stare, reprezentate în Fig. 10.6. Modelele se referă la cazul timp continuu. Amplificările compensatorului au fost indexate suplimentar cu indicele „c”. La fel, indexăm cu „c” și valorile proprii.

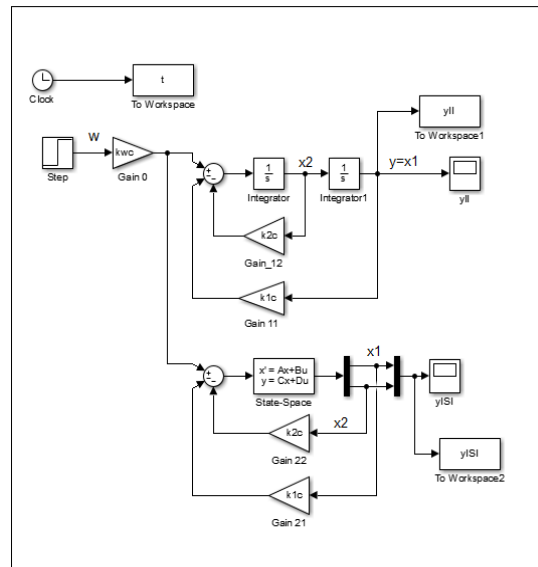


Fig. 10.6.

În mod suplimentar față de prezentarea teoretică, în modelul sistemului s-a prevăzut pe canalul mărimii de conducere o amplificare k_{wc} .

Presupunem că dorim să alocăm sistemului în circuit închis valorile proprii $\lambda_{1c} = -1-j \cdot 0.2$ și $\lambda_{2c} = -1-j \cdot 0.2$. Atunci, cu formulele (14) obținem $k_{1c} = 1.04$, $k_{2c} = 2$. Pentru $k_{wc} = 1$, răspunsul la semnalul treaptă unitară $u(t) = \sigma(t-1)$, $t \geq 0$ are aspectul din Fig. 10.7. Caracterul stabilizator, imprimat prin reacția după stare este evident. Regimul staționar se instalează după cca. 8 s.

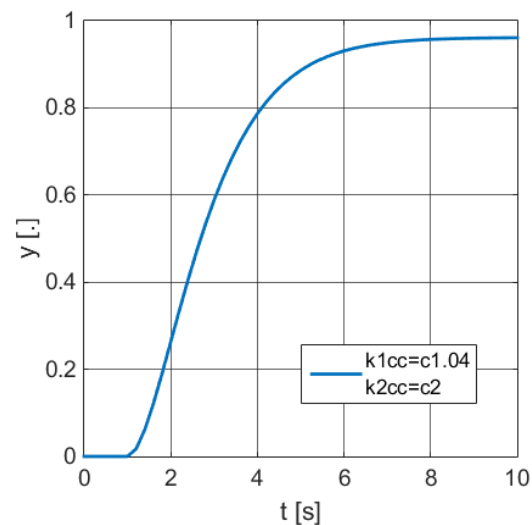


Fig. 10.7.

- În al doilea fișier Simulink dat, asociat acestei lucrări, se găsesc modele intrare-ieșire, respectiv intrare-stare-ieșire pentru sistemul cu dublă întârziere unitară, fără și cu reacție după stare, reprezentate în Fig. 10.8. Amplificările compensatorului au fost indexate suplimentar cu indicele „d”. La fel, indexăm cu „d” și valorile proprii.

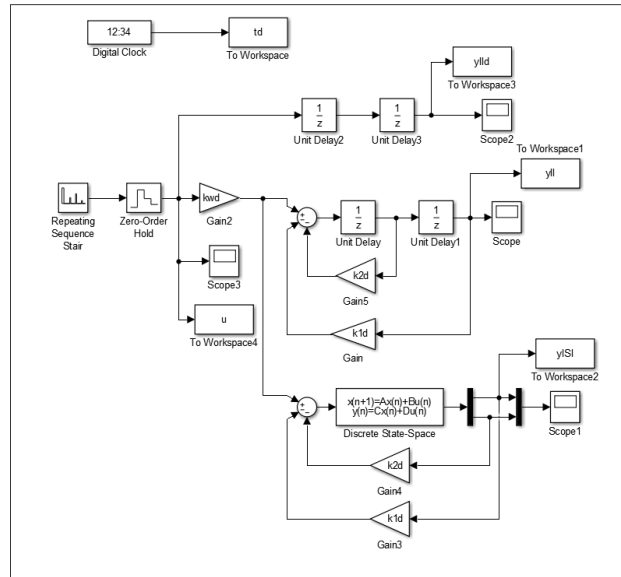


Fig. 10.8.

La intrarea tuturor sistemelor din model se aplică semnalul scară generat prin aplicarea secvenței repetitive care apare în interfața din Fig. 10.9. Presupunem că dorim să alocăm sistemului în circuit închis valorile proprii $\lambda_{1d} = -0.5$ și $\lambda_{2c} = 0.5$. Cu formulele (14) obținem $k_{1d} = -0.25$ și $k_{2d} = 0$. Se consideră $k_{wd} = 1$ și pasul de discretizare $h = 0.1$ s.

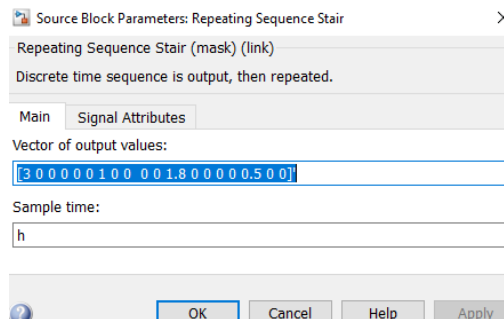


Fig. 10.9.

În Fig. 10.10 sunt redat succesiv oscilogramele semnalului de intrare u , semnalele de ieșire y_{II} , y_{II} și $x_1 = y_{II}$ împreună cu x_2 . Comparând semnalele u și y_{II} se observă că sistemul FIR transmite la ieșire integral semnalul aplicat la intrare cu o întârziere de doi pași de discretizare. Comparând semnalele u și y_{II} se constată că după fiecare impuls al secvenței de intrare sistemul în buclă închisă are o acțiune stabilizatoare, încercând să aducă semnalul de ieșire la valoarea 0 (între două impulsuri semnalul de intrare are valoarea 0). Această tendință apare mai clar în reprezentarea semnalului y_{II} .

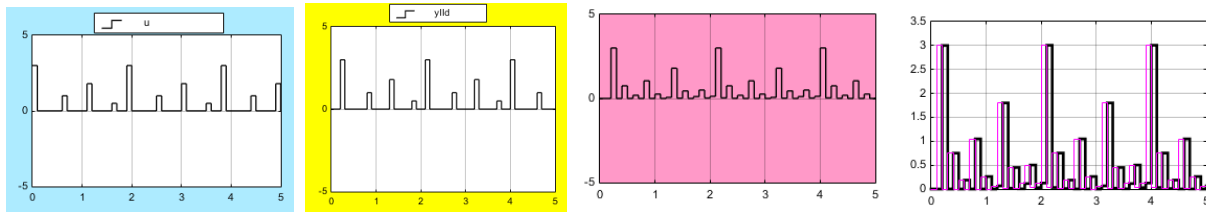


Fig. 10.10.

În cadrul temei de casă se aprofundează aspecte din această secțiune pentru alte date numerice.

6. Tema de casă Nr. 10⁴

Nume și prenume	Nr. matricol	$S_1 = \text{suma cifrelor numărului matricol}$	$a = (S_1 + 4) \bmod 7$	Data completării formularului

TEMA DE CASĂ NR. 10

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

- 1.1. Se consideră modelul Simulink/Xcos folosit pentru sistemele în timp continuu din studiul de caz din secțiunea 5. Să se studieze, modificând parametrul β , influența poziționării valorilor proprii $\lambda_{1c} = -\beta \cdot (a+1) + j \cdot 0.2$ și $\lambda_{2c} = -\beta \cdot (a+1) - j \cdot 0.2$ în raport cu axa reală asupra comportării sistemului cu reacție după stare, pe baza răspunsului la semnalul de intrare $u(t) = \sigma(t)$. Se vor considera următoarele 4 cazuri: i) $\beta = 0.5$, ii) $\beta = 1$, iii) $\beta = 2$, iv) $\beta = -0.1$. Intervalele de timp de simulare se adaptează la situația creată.

i)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
ii)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
iii)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
iv)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
v)	Se analizează răspunsurile de la punctele i) – iv) din punctul de vedere al stabilității sistemului și al vitezei de stabilizare.

- 1.2. Se consideră modelul Simulink/Xcos folosit pentru sistemele în timp discret din studiul de caz din secțiunea 5.. Să se studieze, modificând parametrul β , influența poziționării valorilor proprii $\lambda_{1d} = 0.1 \cdot (a+1) \cdot e^{j\beta}$ și $\lambda_{2d} = 0.1 \cdot (a+1) \cdot e^{-j\beta}$ pe cercul de rază „0.1·(a+1)” pe baza răspunsului sistemului la semnalul de intrare $u[t] = \sigma[t]$. Se vor considera următoarele 4 cazuri: i) $\beta = \pi/9$, ii) $\beta = \pi/4$, iii) $\beta = \pi/3$, iv) $\beta = -\pi/3$. Intervalele de timp de simulare se adaptează la situația creată. Pentru h se păstrează valoarea setată în model.

i)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
ii)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.
iii)	Se inserează graficul răspunsului sistemului.

⁴ Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS_II-CTI_TC_10.docx.

iv)	<i>Se inserează graficul răspunsului sistemului.</i>
v)	<i>Se analizează răspunsurile de la punctele i) – iv) din punctul de vedere al stabilității sistemului, al oscilațiilor care apar și al vitezei de stabilizare.</i>

2. Să se analizeze controlabilitatea sistemelor cu reacție după stare din Fig. 10.5 considerând ca variabile parametrii compensatoarelor. Sistemele au orientarea $w \rightarrow y$.

Se va verifica dacă sistemele sunt controlabile sau nu sunt controlabile considerând k_{1c} , k_{2c} , k_{1d} și k_{2d} parametri reali.