LUCRAREA DE LABORATOR NR.6

APLICAȚII LA LECȚIILE DE CURS 01-07

Bibliografie

[1] Dragomir, T. L., Teoria sistemelor – Lecții de curs 2021/2022, UPT.

[2] Girod, B., Signals and Systems, John Wiley & Sons, 2001 [1].

Teme

1. Se consideră elementele de transfer tipizate din tabelul de la pag. 89-90 din lucrarea [1]. Să se calculeze răspunsul la semnal treaptă unitară în condiții inițiale nule (răspunsul indicial) pentru ET-P, ET-I, ET-P, ET-PID, ET-Tm, ET-PDT₁**.**

Răspunsurile cerute pot fi calculate fie prin intermediul calculului operațional, fie prin calcul în domeniul timp. Exemplificăm ambele moduri de calcul prin câte un singur exemplu. Restul cazurilor rămân în sarcina studentului.

a) Calculul răspunsului indicial al ET-PI

MM-II al ET-PI este:

$$y_\sigma(t) = K_i \cdot \int_0^t u(\tau)\cdot d\tau \,\Big|_{u(\tau)=1} + y(0) = K_i \cdot \int_0^t 1\cdot d\tau = K_i \cdot t$$

b) Calculul răspunsului indicial la semnal treaptă unitară a unui ET-PDT$_1$

Trecem MM-II în domeniul operațional. Condițiile inițiale sunt nule:

$$T\cdot\dot{y}(t)+y(t)=K_P\cdot u(t)+K_D\cdot\dot{u}(t)\circ\!-\!\bullet(T\cdot s+1)\cdot y(s)=(K_P+K_D\cdot s)\cdot u(s)\ \rightarrow\ y(s)=\frac{K_P+K_D\cdot s}{T\cdot s+1}\cdot u(s)$$

Calculăm imaginea operațională a semnalului treaptă unitară:

$$u(t)=\sigma(t)\circ\!-\!\bullet u(s)=\frac{1}{s},$$

apoi imaginea semnalului de ieșire, iar din aceasta răspunsul indicial:

$$y_\sigma(s)=\frac{K_P+K_D\cdot s}{T\cdot s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_D}{T}\cdot\frac{\frac{K_P}{K_D}+s}{s\cdot\left(s+\frac{1}{T}\right)}=\frac{K_D}{T}\cdot\left(\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s+\frac{1}{T}}\right)\bullet\!-\!\circ\, y_\sigma(t)=\frac{K_D}{T}\cdot\left(\alpha+\beta\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Descompunerea în fracții simple se realizează astfel:

$$\frac{\frac{K_P}{K_D}+s}{s\cdot\left(s+\frac{1}{T}\right)}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s+\frac{1}{T}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\left.\dfrac{\frac{K_P}{K_D}+s}{s+\frac{1}{T}}\right|_{s=0}=\dfrac{K_P\cdot T}{K_D}\\[2ex]\beta=\left.\dfrac{\frac{K_P}{K_D}+s}{s}\right|_{s=-\frac{1}{T}}=1-\dfrac{K_P}{K_D}\cdot T\end{cases}$$

[1] Link la lucrarea [2]: https://drive.google.com/drive/folders/10vAX8l1YjJIs8PLYcgiFMH7SVdcOeqfl?usp=sharing

Cu valorile lui α și β astfel calculate se obține rezultatul final:

$$y_\sigma(t)=\frac{K_D}{T}\cdot\left(\frac{K_P\cdot T}{K_D}+\left(1-\frac{K_P\cdot T}{K_D}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right)=K_P+\left(\frac{K_D}{T}-K_P\right)\cdot e^{-\frac{t}{T}}=K_P\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)+\frac{K_D}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Rezultatul se poate rescrie în forma:

$$y_\sigma(t)=K_P\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)+\frac{K_D}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}=K_P\cdot\left[\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)+\frac{T_D}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right].$$

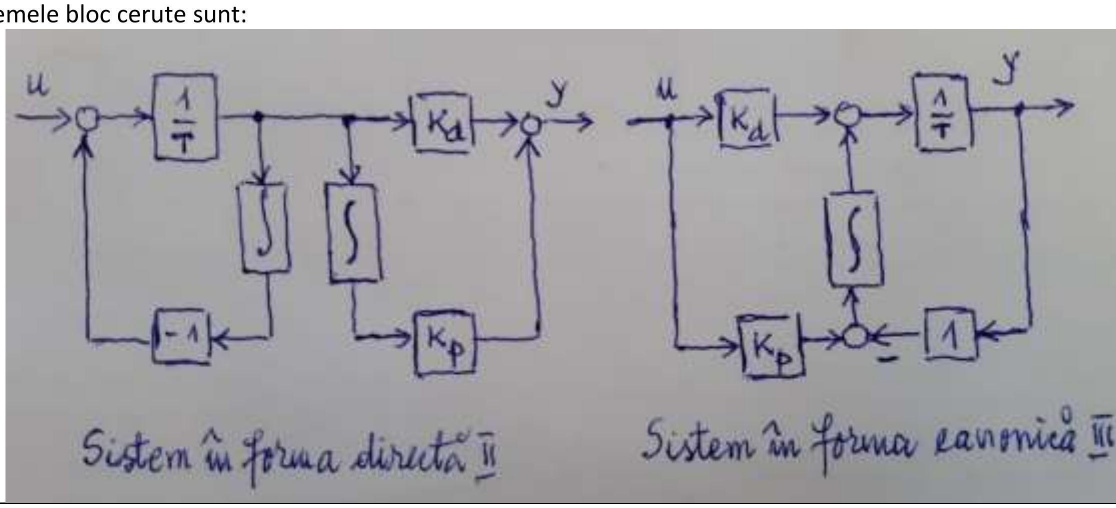
2. Pentru sistemul (2.3)[2] din lucrarea [2], pag. 19, sunt valabile schemele bloc din figurile 2.3 (pag. 23) și 2.5 (pag. 26) denumite „sistem în forma directă II”, respectiv „sistem în forma canonică III”.

i) Să se particularizeze aceste structuri pentru , ET-PDT$_1$.

ii) Să se conceapă un model Simulink care să implementeze structurile obținute la i) și să calculeze răspunsul sistemelor la semnalul impuls $u(t)=10\cdot[\sigma(t-1)-\sigma(t-3)]$, condiția inițială fiind nulă.

i)

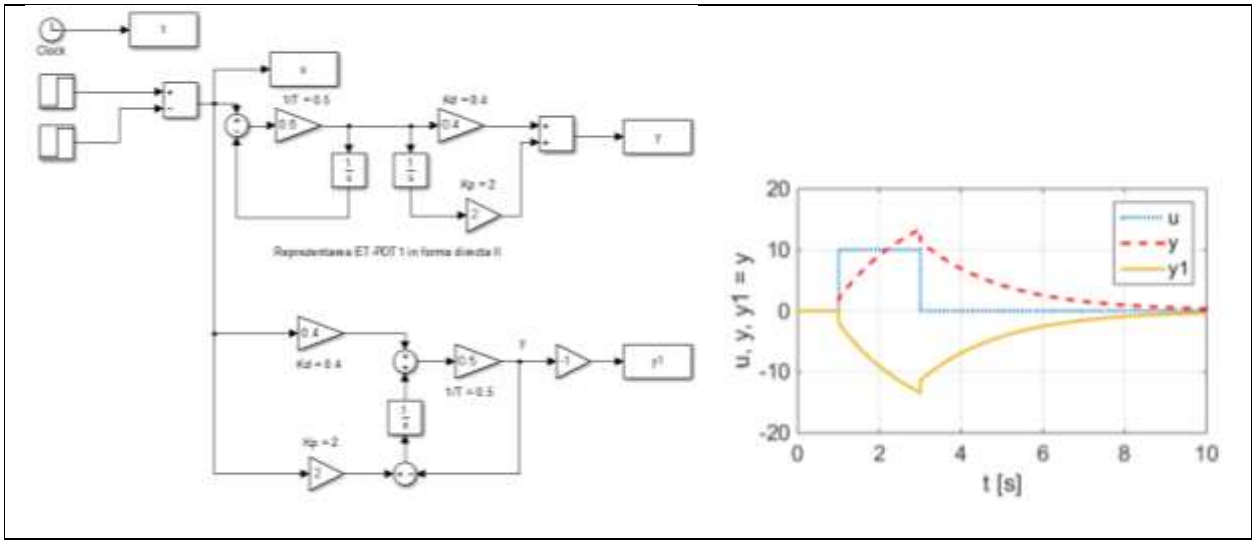
ET-PDT$_1$ este un sistem de ordinul I. În carte, forma canonică a MM-II pentru astfel de modele este: $a_0\cdot\dot{y}(t)+a_1\cdot y(t)=b_0\cdot\dot{u}(t)+b_1\cdot u(t)$. Comparând această expresie cu MM-II al ET-PDT$_1$, $T\cdot\dot{y}(t)+1\cdot y(t)=K_d\cdot\dot{u}(t)+K_p\cdot u(t)$, rezultă: a_0 = T, a_1 = 1, b_0 K_d, b_1 = K_p. Odată identificați coeficienții, schemele bloc cerute sunt:



ii)

Schema Simulink care implementează schemele bloc de la punctul i) este redată în figura din stânga. În schema din dreapta sunt redate: semnalul de intrare u(t), răspunsul primei scheme y(t), și opusul răspunsului celei de a doua scheme y1(t).

[2] Sistemul indicat corespunde sistemului (1) de la pag. 78 din lucrarea [1].

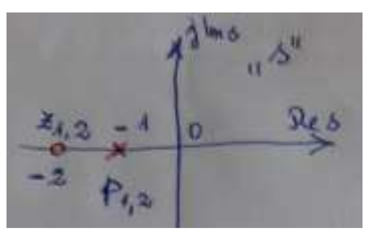


3. Să se rezolve exercițiile 6.3, 6.4 și 6.5 din lucrarea [2] (pag. 124).

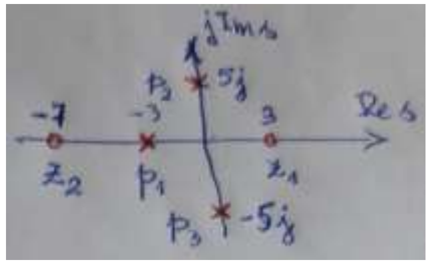
6.3.a)	6.3.b)	6.3.c)	6.3.d)
Potrivit diagramei poli-zerouri date, sistemul are polii și zerourile următoare:			
$p_{1,2} = -1 \pm j$, $z_{1,2} = 1 \pm j$	$p_{1,2} = \pm j$, $p_3 = 1$	$p_{1,2} = \pm 2$, $z_1 = -1$	$p_1 = -3$, $p_2 = 0$, $z_1 = 4$
Pe baza numărului de poli rezultă că sistemul are ordinul			
II	III	II	II
si are f.d.t.			
$H(s) = \frac{b_2}{a_2}\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$	$H(s) = \frac{b_0}{a_3}\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$	$H(s) = \frac{b_1}{a_2}\frac{s-z_1}{(s-p_1)(s-p_2)}$	$H(s) = \frac{b_1}{a_2}\frac{s-z_1}{(s-p_1)(s-p_2)}$
$= K\frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2}$	$= K\frac{1}{s^3-s^2+s-1}$	$= K\frac{s+1}{s^2-4}$	$= K\frac{s-4}{s(s+3)}$

6.4. Ambele MM-II permit scrierea imediată a f.d.t. Valorile numerice ale coeficienților permit calculul polilor și zerourilor, respectiv descompunerea imediată în factori și construcția diagramei poli-zerouri.

$$H_1(s) = \frac{s^2+4s+4}{s^2+2s+1} = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}$$



$$H_2(s) = \frac{s^2+4s-21}{s^3+3s^2+25s+75} = \frac{(s-3)(s+7)}{(s+3)(s^2+25)}$$



6.5. Din diagrama poli-zerouri dată rezultă că sistemul este un sistem liniar de ordinul III având polii $p_1 = -2$, $p_{2,3} = -1 \underline{+} 5j$ și zeroul $z_1 = 1$. Deci funcția lui de transfer are forma:

$$H(s) = \frac{b_1}{a_3} \cdot \frac{s - z_1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{b_0}{a_3} \cdot \frac{s-1}{(s+2)(s^2+2s+26)}$$

$$H(0) = 1 \;\rightarrow 1 = \frac{b_1}{a_3} \cdot \frac{-1}{2 \cdot 26} \;\rightarrow\; \frac{b_1}{a_3} = -52$$

În consecință:

$$H(s) = \cdot \frac{-52 \cdot (s-1)}{(s+2)(s^2+2s+26)} \; .$$