§ 3.6 Realizări sistemice

Termenul „realizare sistemică” este folosit în accepţiunea de MM-ISI. MM-ISI permit, spre deosebire de MM-II, o analiză completă a proprietăţilor sistemelor.

Din punct de vedere matematic obţinerea unei realizări sistemice este problema determinării unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I sau a unui sistem de ecuaţii recursive de ordinul I „echivalent intrare-ieşire” unei ecuaţii diferenţiale sau recurente de ordinul n.

În continuare ne referim la problema obţinerii unei realizări sistemice atunci când se cunoaşte MM-II al sistemului. Problema inversă, de obţinere a MM-II din MM-ISI, este deja cunoscută, rezolvarea ei constând în cazul sistemelor liniare în calculul matricei sau funcţiei de transfer din MM-ISI, scrierea dependenţelor intrare-ieşire în domeniul operaţional şi transpunerea rezultatului în domeniul timp. Unui MM-II îi corespund o infinitate de realizări sistemice. Toate furnizează aceeaşi dependenţă intrare-ieşire. Doar câteva dintre realizările sistemice asociate unui MM-II au la nivelul variabilelor de stare semnificaţie fizică.

1. Asocierea unei realizări sistemice unui sistem dat printr-o funcţie de transfer

① Pentru început considerăm *modelele strict cauzale în TC respectiv înTD* redate de ecuaţiile (1), respectiv (2):

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_0 u(t), \tag{1}$$

$$a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \ldots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = b_{n-1} u[t-1] + \ldots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \tag{2}$$

Lor le corespunde în variabile unificate funcţia de transfer:

$$H(\lambda) = \frac{b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0} = \frac{b_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots + b_1\lambda^{-n+1} + b_0 \cdot \lambda^{-n}}{a_n + a_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots + a_1\lambda^{-n+1} + a_0 \cdot \lambda^{-n}} \tag{3}$$

Realizarea sistemică asociată funcţiei de transfer (3) este:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

***Exemplu**: Realizarea sistemică a sistemului de ordinul n = 2,* $\underbrace{5}_{a_2}\ddot{y}(t) + \underbrace{2}_{a_1}\dot{y}(t) + \underbrace{0.5}_{a_0}y(t) = \underbrace{3}_{b_0}u(t)$, *este:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}1 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Matricea A care apare în (4) poartă numele de *matrice companion* (matrice de însoţire, sau de acompaniere) sau *matrice Frobenius*. Prima denumire provine din faptul că ea însoţeşte polinomul caracteristic

$$\mu(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 \tag{5}$$

al sistemul (1) sau (2).

② Un al doilea caz îl reprezintă **sistemele la limita de cauzalitate**, cu f.d.t:

$$H(\lambda) = \frac{b_n{}^*\lambda^n + b^*{}_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b_1{}^*\lambda + b^*{}_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0}. \tag{6}$$

Problema obţinerii realizării sistemice se reduce, printr-o simplă împărţire, la problema anterioară. Astfel, împărţind în (6) numărătorul la numitor obţinem descompunerea:

$$H(\lambda) = \frac{b_n{}^*}{a_n} + \frac{b_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0} \tag{7}$$

Întrucât $y(\lambda) = H(\lambda) \cdot u(\lambda)$, ieşirea acestui sistem are, comparativ cu situaţia din cazul ①, încă o componentă, pe $\frac{b_n{}^*}{a_n}u(\lambda)$. Deci faţă de (4), ecuaţia de ieşire a MM-ISI va avea forma:

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_n{}^*}{a_n} \end{bmatrix} \cdot u \tag{4'}$$

***Exemplu**: Dacă* $H(z) = \frac{2z^2 + 3z + 1}{z^2 + 5z + 2} = 2 + \frac{-7z - 3}{z^2 + 5z + 2}$*, atunci realizarea sistemică asociata este:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \cdot u[t] \end{cases}.$$

2. Realizări sistemice standard

În tehnica prelucrării semnalelor, în sinteza sistemelor de conducere ş.a.m.d. exista metode de proiectare care sunt elaborate plecând de la anumite forme canonice de realizări sistemice. Ele mai sunt denumite *realizări standard*. Pentru a putea aplica metodele menţionate este necesar ca MM al sistemului cu care lucrăm să fie adus la forma standard pentru care a fost elaborată metoda.

În cele ce urmează considerăm trei realizări standard. Toate se aplică sistemelor de tip SISO.

1^0 Realizarea standard controlabilă. Ea corespunde f.d.t. a sistemului în forma (8), *ireductibilă*, cu a_n=1:

$$H(\lambda) = \frac{b_n \cdot \lambda^n + b^*_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b^*_1\lambda + b^*_0}{\lambda^n + a_{n-i}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0} = b_n + \frac{b_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b_1\lambda + b_0}{\lambda^n + a_{n-i}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0}. \tag{8}$$

Ca urmare, din (4) rezultă:

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & & & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & . & . & . & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u \end{cases} \tag{9}$$

Realizarea standard controlabilă se obţine astfel: i) se calculează f.d.t. a sistemului plecând de la forma dată inițial; ii) se aduce f.d.t. la o formă ireductibilă, iar aceasta se descompune sub forma (8); iii) se scrie direct sistemul (9) pentru f.d.t. de la punctul ii). Realizarea sistemică astfel obţinută este minimală[1] şi descrie în mod corect numai dependenţa intrare-ieşire.

2

2^0 ***Realizarea standard observabilă.*** Ea are forma

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & -a_2 \\ . & & . & & & & . \\ . & & & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u \end{cases} \tag{10}$$

Observație:

Notând cu indicele „(9)” matricele sistemului (9) şi cu indicele „(10)” matricele sistemului (10), se observă că sunt valabile următoarele relaţii de legătură:

$$A_{(10)} = A_{(9)}^T;\ b_{(10)} = c_{(9)};\ c_{(10)} = b_{(9)}. \tag{11}$$

Sistemele ale căror matrice sunt legate prin relaţii de tipul (11) se numesc *sisteme duale.*

3^0 ***Realizarea standard diagonală.*** Prezentarea se restrânge la cazul când polinomul caracteristic $\mu(\lambda)$, al sistemului, are numai rădăcini simple: $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Se numeşte realizarea standard diagonală o realizare sistemică de forma:

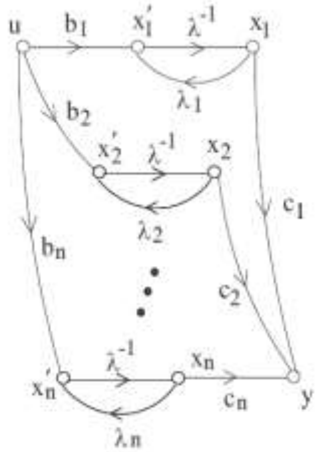
$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x + b \cdot u \\ y = c^T \cdot x \end{cases} \tag{12}$$

[1] Realizare minimală = realizare sistemică cu numărul minim de variabile de stare care corespunde unei dependențe intrare – ieșire date.

În acest caz matricea A este o matrice diagonala care are pe diagonala principala tocmai valorile proprii ale matricei A. Fiecare ecuaţie de stare din (12) este de forma:

$$x_i' = \lambda_i \cdot x_i + b_i \cdot u \ . \qquad (13)$$

Cu alte cuvinte, pentru realizarea standard diagonală dacă $b_i \neq 0$ variabila de stare depinde de ea însăşi şi de mărimea de intrare. Dacă $b_i = 0$ mărimea de intrare nu afectează acea variabila de stare. Funcţia exponenţială $x_i(0) \cdot e^{\lambda_i t}$ sau funcţia putere $x_i[0] \cdot \lambda_i^t$ care, după cum avem un STC sau un STD, reprezintă soluţia unei ecuaţii de stare de forma (13) în regim liber, adică atunci când u = 0, poartă denumirea de „mod asociat valorii proprii λ_i”. Amplitudinea modului depinde numai de condiţiile iniţiale. Modurile se regăsesc şi în regimurile forţate. Sistemului (13) îi corespunde graful din figură.



Observaţie: Cazul prezentat e varianta simplă a cazului general corespunzător sistemelor pentru care polinomul caracteristic are rădăcini multiple. Cazul general este cunoscut sub denumirea de *realizare standard Jordan*.

La o realizare diagonala de forma (12) se ajunge de la o formă iniţială oarecare:

$$\begin{cases} x^{*'} = A^* \cdot x^* + B^* \cdot u \\ y = C^* \cdot x^* \end{cases} \qquad (14)$$

printr-o transformare de stare de forma

$$x = \mathcal{T} \cdot x^* \qquad (15)$$

în care, matricea transformării $\mathcal{T}$ are forma

$$\mathcal{T} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad \theta_n]^{-1} \ . \qquad (16)$$

θ_i este vectorul propriu asociat valorii proprii λ_i . Aceasta înseamnă că θ_i este soluţia ecuaţiei vectoriale

$$A^* \cdot \theta_i = \lambda_i \cdot \theta_i \ . \qquad (17)$$

(12) se obţine din (14) folosind relaţiile :

$$A = \mathcal{T} \cdot A^* \cdot \mathcal{T}^{-1}, \ B = \mathcal{T} \cdot B^*, \ C = C^* \cdot \mathcal{T}^{-1} \ . \qquad (18)$$

Practic, matricea A nu mai trebuie calculată întrucât se ştie că rezultatul are forma diagonală din (12).

Observaţie:

Ecuaţia (17) reprezintă un sistem liniar nedeterminat de n ecuaţii cu n necunoscute care are, întotdeauna, un grad de libertate întrucât valorile proprii s-au presupus simple. Forma matricei A obţinută cu formula (18) nu depinde, evident, de utilizarea acestor grade de libertate. Alegerea lor influenţează doar coeficienţii care apar in matricele B si C calculate conform relaţiilor (18).

Exemplu: *Să se aducă în forma standard diagonală sistemul*

$$\begin{cases} x^*[t+1] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot x^*[t] + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot x^*[t] \end{cases} .$$

Soluție: $\mu(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)\cdot(\lambda + 1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$.

Pentru $\underline{\lambda_1 = -1}$: $A^* \cdot \theta_1 = \lambda_1 \theta_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5\theta_{11} = -\theta_{11} \\ 2\theta_{11} - \theta_{12} = -\theta_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{11} = 0 \\ \theta_{11} = 0 \end{cases}$. *Deci*

$\theta_{12} = \text{arbitrar} = \alpha \quad \text{parametru} \Rightarrow \theta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \Re^*$.

Pentru $\underline{\lambda_2 = 5}$: $A^*\theta_2 = \lambda_2 \theta_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5\theta_{21} = 5\theta_{21} \\ 2\theta_{21} - \theta_{22} = 5\theta_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \theta_{21} = 3\theta_{22} \end{cases}$. *Deci*

$\theta_{22} = \text{arbitrar} = \beta \quad \text{parametru} \Rightarrow \theta_2 = \begin{bmatrix} 3\beta \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \Re^*$.

În consecinţă matricea de transformare este

$$\mathscr{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3\alpha\beta}\begin{bmatrix} \beta & -3\beta \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{3\beta} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathscr{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

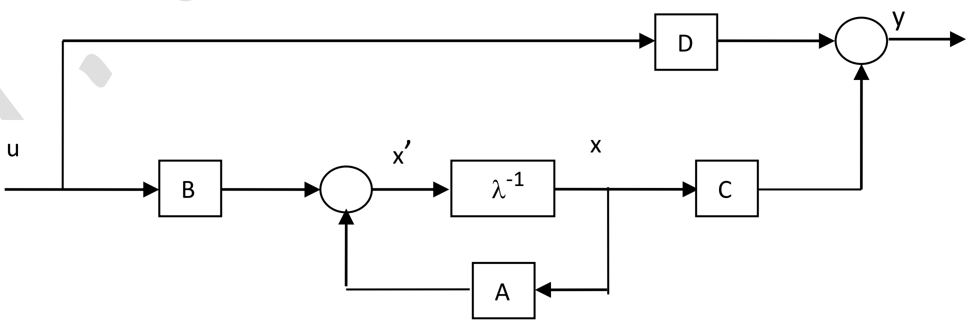
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{2}{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ și } C = \begin{bmatrix} \alpha & 4\beta \end{bmatrix}$$

Valorile parametrilor α, β *se adoptă astfel încât* $\alpha\beta \neq 0$, *iar B şi C să aibă forme favorabile pentru aplicaţia care necesită forma diagonală.*

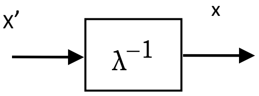
3. Asocierea de realizări sistemice pe baza schemelor bloc

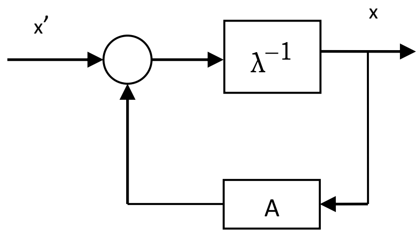
În problemele practice sistemele sunt date prin scheme bloc în care apar f.d.t. ale obiectelor componente. Subiectul acestei secţiuni este prezentarea unui procedeu de obţinere a unei realizări sistemice a unui sistem plecând de scheme bloc. *În esenţă este vorba de o metodă de obţinere a câte unei ecuaţiei de stare pentru fiecare variabilă de stare asociată pe baza schemei bloc.*

Din punct de vedere teoretic metoda are la bază inspectarea schemei bloc din figura următoare, corespunzătoare sistemului $\begin{cases} x' = A\cdot x + B\cdot u \\ y = C\cdot x + D\cdot u \end{cases}$.

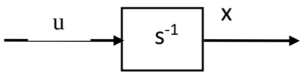


În schemă poziţia variabilelor de stare poate fi interpretată în două moduri: i) ca mărimi de ieşire ale blocurilor cu f.d.t. λ^{-1}, ii) ca mărimi de ieşire ale conexiunii cu reacţie proporţională relizată prin matricea A în jurul blocurilor cu f.d.t. λ^{-1}. Celor două moduri de interpretare (observare) le corespund următoarele figuri:





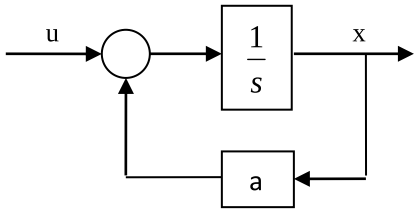
Utilizarea acestei observații decurge astfel:



În cazul STC avem $\lambda = s$, iar primei scheme bloc îi corespund egalitățile:

$$x(s) = \frac{1}{s} \cdot u(s). \rightarrow \; s \cdot x(s) = u(s) \bullet\!\!-\!\!-\!\!\circ \boxed{\dot{x}(t) = u(t)}.$$

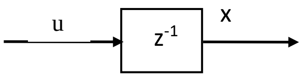
Cea de a doua schemă bloc ia forma:



Ei ii corespund egalităţile

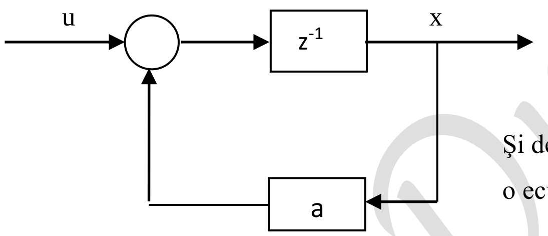
$$x(s) = \frac{1}{s-a} \cdot u(s) \Rightarrow s \cdot x(s) = a \cdot x(s) + u(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \boxed{\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + u(t)}$$

Fiecare dintre egalităţile încadrate reprezintă o ecuaţie de stare.



În cazul STD, în mod similar, avem:

$$x(z) = z^{-1} \cdot u(z), \; z \cdot x(z) = u(z) \;\blacksquare\!\!-\!\!\square\; \boxed{x[t+1] = u[t]}$$



$$x(z) = \frac{1}{z-a} \cdot u(z), \; z \cdot x(z) = a \cdot x(z) + u(z)$$

$$\blacksquare\!\!-\!\!\square\; \boxed{x[t+1] = a \cdot x[t] + u[t]}$$

Şi de data aceasta fiecare dintre egalităţile încadrate reprezintă o ecuaţie de stare.

Calculele de mai sus au în primul rând valoare metodologică cu privire la obținerea ecuațiilor de stare.

Metoda de asociere a unei realizări sistemice pe baza schemelor bloc constă în parcurgerea următoarelor *etape*:

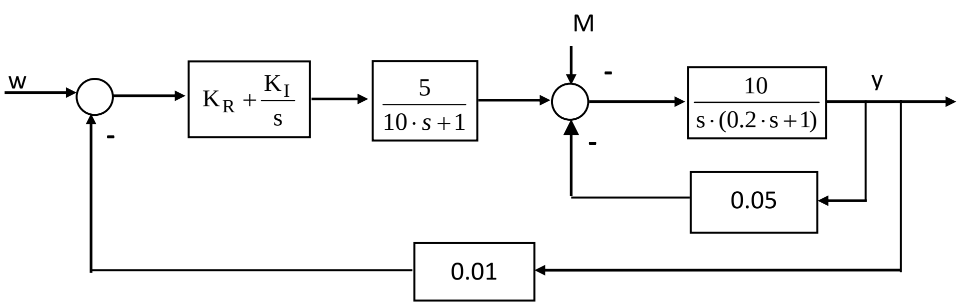
i) Schema bloc dată se aduce la o formă în care să apar doar operaţii de înmulţire cu constante, operaţii de însumare şi *blocuri cu funcţii de transfer de tipul* λ^{-1}*, fără sau cu reacţie de tip proporţional*. In acest scop poate fi folosită algebra schemelor bloc.

ii) Se adoptă ca variabile de stare ieşirilor tuturor blocurilor cu denumirile subliniate.

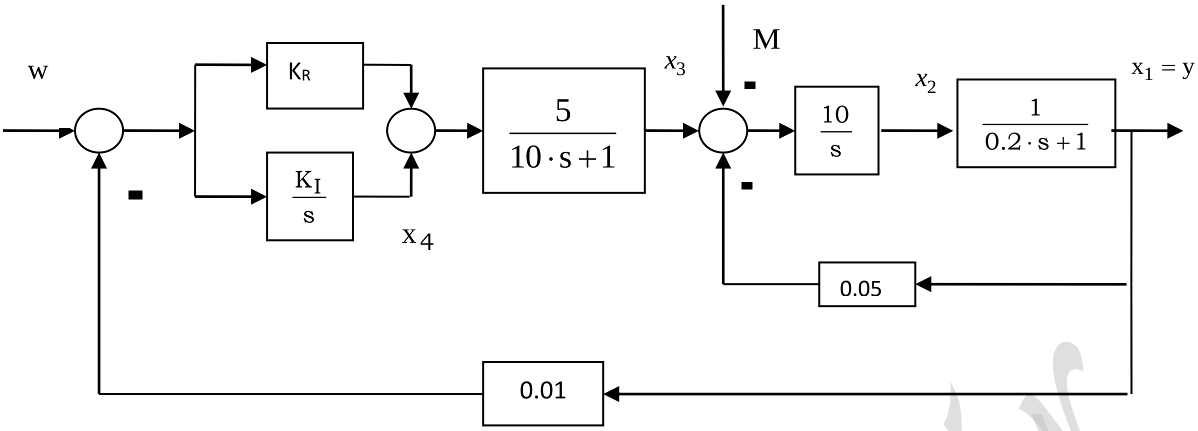
iii) Tuturor blocurilor din etapa ii) li se asociază ecuaţiile de stare potrivit exemplelor de mai sus.

iv) Se ordonează ecuațiile de stare şi se alcătuieşte MM-ISI al sistemului.

***Exemplu**: Să se determine o realizare sistemică pentru sistemul din figură:*



Observăm că în schemă apar 2 blocuri care nu corespund tipurilor menţionate. Ca urmare, schema se reconfigurează astfel:



S-au definit variabilele de stare de la $x_1 \to x_4$ *ca ieşiri ale blocului cu f.d.t. de tip PT₁* , $\left(\frac{K}{Ts+1}\right)$, *şi de tip integrator,* $\left(\frac{K}{s}\right)$*. Succesiv, avem:*

$$x_1(s) = \frac{1}{0.2+1}x_2(s) \Rightarrow sx_1(s) = -5x_1(s) + 5x_2(s) \bullet\!-\!\circ \ \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 5x_2(t),$$

$$x_2(s) = \frac{10}{s}\cdot\left[-M(s) + x_3(s) - 0.05x_1(s)\right] \bullet\!-\!\circ \ \dot{x}_2(t) = -0.5x_1(t) + 10x_3(t) - 10M(t),$$

$$x_3(s) = \frac{5}{10s+1}\cdot\left[x_4(s) + K_R(w(s) - 0.01x_1(s))\right] \bullet\!-\!\circ \ \dot{x}_3(t) = -0.1x_3(t) + 0.5x_4(t) + 0.5K_R w(t) - 0.005\cdot K_R x_1(t),$$

$$x_4(s) = \frac{K_I}{s}(w(s) - 0{,}01x_1(s)) \bullet\!-\!\circ \ \dot{x}_4(t) = K_I\cdot w(t) - 0.01\cdot K_I\cdot x_1(t),$$

$$y(s) = x_1(s) \ \bullet\!-\!\circ \ y(t) = x_1(t)$$

În consecinţă rezultă:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 5 & 0 & 0\\ -0.5 & 0 & 10 & 0\\ -0.005\cdot K_R & 0 & -0.1 & 0.5\\ -0.01\cdot K_I & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -10\\ 0.5\cdot K_R & 0\\ K_I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w(t)\\ M(t)\end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}.$$

4. Transformări de stare

Se consideră sistemul liniar (Atenţie! Se lucrează cu variabile unificate.)

$$\begin{cases} x` = A\cdot x + B\cdot u \\ y = C\cdot x + D\cdot u \end{cases}, \tag{19}$$

cu $x\in\mathbf{R}^n$,$u\in\mathbf{R}^m$, $y\in\mathbf{R}^p$. Fie $\mathscr{T}$, (n,n) o matrice pătratică nesingulară $\Rightarrow \exists\ \mathscr{T}^{-1}$ şi egalitatea:

$$x^* = \mathscr{T}\ x. \tag{20}$$

Spunem că relaţia (20) realizează o transformare de stare în sensul că *x* reprezintă vechea variabilă de stare iar x^* - noua variabilă de stare. Pentru noua variabilă de stare rezultă că $x^*\in\mathbf{R}^n$. Fiecare componentă a lui x^* e o combinaţie liniară în raport cu componentele lui x. În consecinţă, *de cele mai multe ori componentele lui x^* nu au sens fizic*.

Prin transformare de stare înţelegem transpunerea MM-ISI (19) de variabila de stare x într-un MM-ISI de variabilă de stare x^*. Transformarea decurge astfel:

$x' = A \cdot x + B \cdot u \;|\mathcal{T}$ ▪ (Se înmulţeşte egalitatea, la stânga, cu matricea $\mathcal{T}$) $\rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{T} \cdot x' = \mathcal{T} \cdot A \cdot x + \mathcal{T} \cdot B \cdot u \tag{21}$$

(20) $\Rightarrow$ $x = \mathcal{T}^{-1} \cdot x^*$. Deci

$$(21) \Rightarrow \quad x^{*\prime} = \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^{-1} \cdot x^* + \mathcal{T} B u \tag{22}$$

Analog, din a doua egalitate din (19) rezultă

$$y = C \cdot x + D \cdot u = C \cdot I \cdot x + D \cdot u = C \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T} x + D \cdot u \Rightarrow y = C \mathcal{T}^{-1} \cdot x^* + D \cdot u .$$

În consecinţă, noul MM-ISI (noua realizare sistemică) este:

$$\begin{cases} x^{*\prime} = A^* \cdot x^* + B^* \cdot u \\ y = C^* \cdot x^* + D \cdot u \end{cases} \tag{23}$$

în care $A^* = \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^{-1}$; $B^* = \mathcal{T} \cdot B$; $C^* = c \cdot \mathcal{T}^{-1}$.

Precizări:

1) Calculele făcute sunt valabile atât pentru STC cât şi pentru STD.

2) De cele mai multe ori folosim o transformare de stare pentru a ajunge la anumite forme canonice, adică la realizări sistemice, pentru care A^*, B^*, C^* trebuie să aibă anumite forme bine precizate cerute de diferite metode de rezolvare a unor probleme concrete.

3) Transformarea de stare de tipul (20) conservă proprietăţile sistemului (19), adică (23) are aceleaşi proprietăţi ca şi (19). Afirmaţia se bazează pe faptul că (23) şi (19) au aceleaşi matrice de transfer (altfel spus aceeaşi dependenţă intrare-ieşire). In adevăr, din (23) succesiv rezultă:

$$H^*(\lambda) = C^* \cdot (\lambda \cdot I - A^*)^{-1} \cdot B^* + D = C \mathcal{T}^{-1} \underbrace{\underbrace{\underbrace{(\lambda \underbrace{I}_{\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}} - \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^{-1})}_{\mathcal{T}(\lambda \cdot I - A)\mathcal{T}^{-1}}}}_{(\mathcal{T}^{-1})^{-1}(\lambda \cdot I - A)(\mathcal{T}^{-1}}{}^{-1} \mathcal{T} B + D$$

$$\rightarrow H^*(\lambda) = C \cdot \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T}(\lambda \cdot I - A)^{-1} \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T} B + D$$

$$\rightarrow H^*(\lambda) = C \cdot (\lambda \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D = H(\lambda) .$$