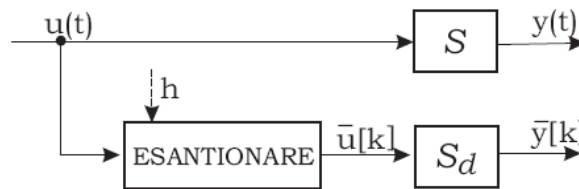


§ 3.5 Discretizarea sistemelor în timp continuu

1. Tipuri de probleme de discretizare

Discretizarea unui sistem în timp continuu reprezintă operația prin care unui sistem în timp continuu S i se asociază un sistem în timp discret S_d care, atunci când i se aplică la intrare secvențele $\{\bar{u}[k]\}$ rezultate prin eșantionarea semnalului de intrare $u(t)$ al sistemului în timp continuu, furnizează la ieșire, pentru momentele $k \cdot h$ de discretizare a timpului, fie exact valoarea mărimii de ieșire a sistemului în timp continuu corespunzătoare eșantionării la momentul kh , adică $\bar{y}[k] = y(t)_{|t=k \cdot h}$, fie o aproximare a valorii respective, adică $\bar{y}[k] \approx y(t)_{|t=k \cdot h}$. Modul de punere al problemei este sugerat prin figura de mai jos.



În primul caz spunem că sistemul în timp discret este o realizare invariantă a sistemului în timp continuu, iar metodele de discretizare le denumim *metode de obținere a realizărilor invariante*. Nu există realizări invariante general valabile. Există realizări invariante valabile numai pentru anumite clase de sisteme și numai în raport cu anumite clase de semnale de intrare. În cazul de față se prezintă doar *metoda de obținere a realizării invariante la semnal treaptă (R.I.S.T) pentru sisteme liniare*.

În al doilea caz vorbim despre *metode de discretizare prin aproximare*. Ele se utilizează atunci când semnalul de intrare este oarecare. Există mai multe tipuri de metode de discretizare prin aproximare. În acest paragraf ne referim numai la cele cunoscute sub denumirea de *metode de substituție*. Aspectul practic care ne interesează este implementarea reguletoarelor numerice proiectate inițial ca reguletoare în timp continuu.

2. Metode de discretizare¹

În vederea prezentării metodelor de discretizare menționate se consideră sistemul în timp continuu (S):

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

și intervalul de timp $[t_0, t_f]$, cu $t_0 = kh$ și $t_f = (k+1)h$, corespunzător unui pas de discretizare h .

Sistemele în timp discret S_d asociate prin discretizare sistemului (1) se obțin prin exprimarea sub forma unei ecuații de recurență ² a răspunsului sistemului (1) pentru un semnal de intrare $u(t)$, dat pe intervalul de timp $t \in [t_0, t_f]$ și pentru condiții inițiale $x(t_0)$ date.

¹ Toate metodele de discretizare prezentate sunt utilizabile prin intermediul funcțiilor disponibile în Matlab: [Continuous-Discrete Conversion Methods - MATLAB & Simulink \(mathworks.com\)](https://www.mathworks.com/help/matlab/continuous-discrete-conversion-methods.html)

² O denumire alternativă, folosită frecvent, este cea de „ecuație cu diferențe”. Se mai folosește și denumirea de „ecuație recursivă”.

A. Obținerea realizării invariante la semnal treaptă în domeniul timp

Se consideră formula de calcul a răspunsului $x(t)$ al sistemului (1):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Particularizând-o pentru intervalul $[t_0, t_f]$ rezultă

$$x((k+1)h) = e^{Ah} \cdot x(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A(kh+h-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (3)$$

În cazul R.I.S.T. ipoteza de lucru este că pe intervalul $[t_0, t_f]$ semnalul $u(t)$ este constant având valoarea $u(t_0) = u(kh)$:

$$u(t) = u(kh), t \in [t_0, t_f]. \quad (4)$$

În această ipoteză (3) devine $x((k+1)h) = e^{Ah} \cdot x(kh) + \left[\int_{kh}^{(k+1)h} e^{A(kh+h-\tau)} d\tau \right] \cdot B u(kh)$, iar prin schimbarea de variabilă $v = (k+1)h - \tau$ obținem:

$$x((k+1)h) = e^{Ah} \cdot x(kh) + \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] \cdot B u(kh). \quad (5.1)$$

Particularizând ecuațiile de ieșire din (1) pentru momentul $t = kh$ avem:

$$y(kh) = C \cdot x(kh) + D u(kh). \quad (5.2)$$

Ecuațiile (5) furnizează *realizarea invariantă la semnal treaptă* căutată. Cu notațiile uzuale pentru semnalele în timp discret: $x[k] = x(kh)$, $x((k+1)h) = x[k+1]$, $u[k] = u(kh)$ și $y[k] = y(kh)$, ecuațiile (5) devin:

$$\mathbf{S}_d : \begin{cases} x[k+1] = e^{Ah} \cdot x[k] + \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] \cdot B u[k] \\ y[k] = C \cdot x[k] + D u[k] \end{cases} \quad (6)$$

Forma realizării invariante la semnal treaptă pe care o folosim în mod obișnuit se obține din (6) și are aspectul:

$$\mathbf{S}_d : \begin{cases} x[t+1] = A_d x[t] + B_d u[t] \\ y[t] = C_d x[t] + D_d u[t] \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

În (7) s-au folosit convenția de notare a argumentului „timp normal”³ și notațiile:

$$A_d = \Phi(h) = e^{Ah}, B_d = \Gamma(h) = \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] B, C_d = C, D_d = D. \quad (8)$$

h este pasul de discretizare a timpului, iar A, B, C și D sunt matricele sistemului în timp continuu (1).

Rezumat: În cazul aplicării metodei de discretizare pentru obținerea unei R.I.S.T. a STC (1) pentru un pas de discretizare a timpului de valoare h , rezultatul îl reprezintă STD (7) ale cărui matrice se calculează cu formulele (8). Sistemul (7) corespunde situației în care semnalul de intrare al sistemului (1) este semnalul scară $u(t) = \sum \{u(kh) [\sigma(t-kh) - \sigma(t-kh-h)]\}$, cu trepte de durată h și amplitudini $u(kh)$, notate în (7) cu $u[t]$. La sfârșitul fiecărui pas de discretizare h semnalele de ieșire ale sistemelor (1) și (7) au aceeași valoare.

³ În loc de $x[k]$, $u[k]$, $y[k]$; $x[k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ notăm $x[t]$, $u[t]$, $y[t]$; $x[t+1]$, $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplu: Să se determine R.I.S.T. pentru sistemul de poziționare

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B=b} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C=c^T} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Soluție: Matricea de tranziție a sistemului este $\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Deci

$$A_d = \Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_d = \Gamma(h) = \left[\int_0^h e^{A_v} dv \right] B = \int_0^h e^{A_v} B dv = \int_0^h \Phi(v) B dv = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^h \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \int_0^h v dv \\ \int_0^h 1 dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix},$$

iar R.I.S.T. asociată sistemului de poziționare este:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

B. Obținerea realizării invariante la semnal treaptă în domeniul operațional

R.I.S.T. (7) a fost asociată sistemului (1) prin calcularea răspunsului sistemului (1) la semnalul de intrare (4). Pentru simplificarea prezentării presupunem că (1) este un sistem de tip SISO cu f.d.t. $H(s)$. Ca urmare, R.I.S.T. (7) este, de asemenea, un sistem de tip SISO. În acest caz f.d.t. $H(z)$ a R.I.S.T. se obține cu formula:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}, \quad (10)$$

în care \mathfrak{Z} reprezintă operatorul de asociere a transformatei z originalului semnalului corespunzător lui $\frac{1}{s} H(s)$ prin eșantionare la momentele kh . În aplicarea formulei se parcurg *trei etape*:

- Se calculează produsul $\frac{1}{s} H(s)$, adică transformata Laplace a răspunsului la semnal treaptă al sistemului S (funcția indicială).
- Se calculează $\mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}$ (transformata z a secvenței rezultate prin eșantionarea funcției indiciale eșantionate la momentele kh), folosind tabelele de transformare.
- Se înmulțește⁴ rezultatul cu $1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$. (De regulă z de la numitor se simplifică întrucât $\mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}$ conține pe z ca factor la numărător).

Rezumat: În cazul aplicării metodei de discretizare pentru obținerea unei R.I.S.T. a unui sistem cu f.d.t. $H(s)$ pentru un pas de discretizare a timpului de valoare h rezultatul îl reprezintă sistemul în timp discret cu f.d.t. (10). Rezultatul corespunde situației în care semnalul de intrare al sistemului (1) este semnalul scară $u(t) = \sum [u(kh) [\sigma(t-kh) - \sigma(t-kh-h)]]$, cu trepte de durată h și amplitudini $u(kh)$, iar semnalul de la intrarea sistemului cu f.d.t. $H(z)$ este secvența $\{u(0), u(h), u(2h), \dots, u((k-1)h)\}$

⁴ Înmulțirea echivalează cu o împărțire prin $\frac{z}{z-1}$, adică cu transformata z a semnalului treaptă unitară discretă.

notată sub forma $\{u[0], u[1], u[2], \dots, u[t-1]\}$. La sfârșitul fiecărui pas de discretizare h semnalele de ieșire ale sistemelor cu f.d.t. $H(s)$ și $H(z)$ au aceeași valoare.

Exemplul 1: Să se determine R.I.S.T. pentru sistemul de poziționare din exemplul din secțiunea A, anterioară, folosind f.d.t. a acestuia: $H(s) = \frac{1}{s^2}$.

Soluție: Înlocuind expresia lui $H(s)$ în (10) rezultă: $H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$. Din tabelele de transformare obținem $\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} =$

$$\frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}, \text{ iar prin înlocuire în expresia lui } H(z) \text{ găsim f.d.t. } H(z) = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Este ușor de verificat că f.d.t. a sistemului (9) are expresia de mai sus.

Exemplul 2: Să se calculeze funcția de transfer a realizării invariante la semnal treaptă pentru cazul când $H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$, $h =$

0.2 sec.

Soluție: Se calculează produsul: $\frac{1}{s} H(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$. O expresie de această formă nu apare în tabelele de transformare. Pentru

a folosi tabelele recurgem la descompunerea: $\frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s(s+2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{s^2(s+2)}$ căreia în tabelele de

transformare îi corespund liniile

f(s)	f(z)
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(ah-1+e^{-ah})z^2 + (1-ah)e^{-ah} + e^{-ah}}{(z-1)^2(z-e^{-ah})}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-ah})z}{(z-1)(z-e^{-ah})}$

Aplicând aceste formule pentru $a = 2$, $h = 0.2$ sec rezultă

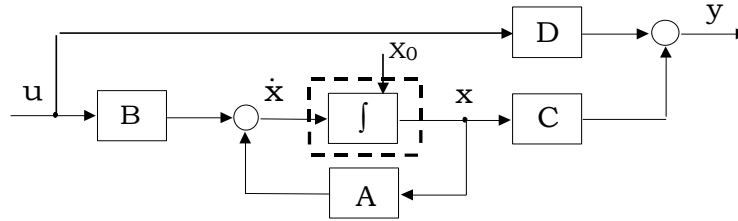
$$\mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s} H(s)\right\} = \frac{(1-e^{-0.4}) \cdot z}{2 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})} + \frac{(-0.6+e^{-0.4}) \cdot z^2 + (1-0.4 \cdot e^{-0.4} + e^{-0.4}) \cdot z}{4 \cdot (z-1)^2 \cdot (z-e^{-0.4})}.$$

În final, cu formula (10) obținem $H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z}\left\{\frac{1}{s} H(s)\right\} = \frac{1-e^{-0.4}}{2 \cdot (z-e^{-0.4})} + \frac{(-0.6+e^{-0.4}) \cdot z + (1+0.6 \cdot e^{-0.4})}{4 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})}$, respectiv

$$H(z) = \frac{(1.4 - e^{-0.4}) \cdot z + 2.6 \cdot e^{-0.4} - 1}{4 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})}.$$

C. Discretizarea prin aproximare folosind metode de substituție

Obținerea MM în timp discret din MM în timp continuu prin metodele de discretizare prin aproximare numite metode de substituție se bazează pe observarea schemei bloc din figură, asociată sistemului (1).



În schemă apar trei tipuri de operații: *însușări, înmulțiri cu constante și integrări*. Procedural, primele două operații se efectuează în același mod pentru STC și pentru STD. Operația de integrare, căreia îi corespunde blocul încadrat cu linie întreruptă, nu are un echivalent exact în timp discret. Ea poate fi însă aproximată folosind diferite formule utilizate în metodele de integrare numerică sau de aproximare a derivatelor prin diferențe. *Ideea discretizării prin aproximare constă în esență în păstrarea primelor două operații și în aproximarea operației de integrare.*

În acest context discuția se restrânge la considerarea formei diferențiale a unui element de transfer integrator cu orientarea $u \rightarrow y$, adică la considerarea modelului matematic⁵

$$\dot{y}(t) = u(t), y(t_0) \text{ dat.} \quad (11)$$

- Un prim grup de relații de substituție se obțin prin aproximarea operației de integrare a acestei egalități în cazul în care se consideră o variație arbitrară a semnalului de intrare $u(t)$ pe intervalul de timp $[kh, (k+1)h]$, având lungimea unui pas de discretizare h (v. figura de mai jos). Prin integrare pe acest interval de timp avem:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \dot{y}(t) dt = \int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt. \quad (12)$$

Integrala din membrul stâng fiind o diferențială exactă o calculăm folosind formula Leibnitz - Newton:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \dot{y}(t) dt = y((k+1)h) - y(kh). \quad (13)$$

Semnalul de intrare având o formă oarecare, integrala din membrul drept se poate evalua numai prin aproximare.

Aproximarea se bazează pe interpretarea grafică a integralei în sens Riemann $\int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt$. Conform figurii ce

urmează, integralei îi corespunde aria $A[\overline{MNPQ}]$ a dreptunghiului curbiliniu \overline{MNPQ} . Pentru valori mici ale lui h ea poate fi aproximată prin ariile:

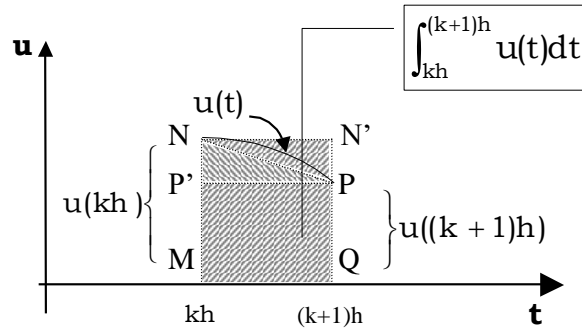
- $A[\overline{MNN'Q}]$, a dreptunghiului $\overline{MNN'Q}$ - caz în care vorbim despre *metoda Euler* (sau *metoda dreptunghiului retardată* (MDR)),
- $A[\overline{MP'PQ}]$, a dreptunghiului $\overline{MP'PQ}$ - când vorbim despre *metoda dreptunghiului* (sau *metoda dreptunghiului avansată* (MDA))⁶,

⁵ Forma diferențială (11) a MM-II a unui ET-I se obține derivând în raport cu timpul forma integrală: $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$.

- $A[MNPQ]$ a trapezului rectiliniu $[MNPQ]$ - caz în care vorbim despre *aproximarea Tustin* (sau *metoda trapezului* (MT)).

Rezultă:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} u(t)dt = A[MNPQ] \approx \begin{cases} A[MNN'Q] = h \cdot u(kh) & \text{(MDR)} \\ A[MP'PQ] = h \cdot u((k+1)h) & \text{(MDA)} \\ A[MNPQ] = \frac{1}{2} h \cdot [u(kh) + u((k+1)h)] & \text{(MT)} \end{cases} \quad (14)$$



Folosirea pentru o problemă dată a uneia dintre cele trei metode - MTR, MDA sau MT – reprezintă opțiunea utilizatorului.

Rezultatul obținut poate fi utilizat în mai multe moduri. Unul dintre ele, denumit *metoda substituției*, se bazează pe înlocuirea în (12) a dezvoltărilor din (13) și (14). Aplicând convenția de notare a argumentului „timp normal”, rezultă succesiv:

$$y[t+1] - y[t] = \begin{cases} h \cdot u[t] \\ h \cdot u[t+1] \\ \frac{1}{2} h \cdot (u[t] + u[t+1]) \end{cases}, t \in \mathbf{T}, \quad (15)$$

respectiv

$$\{y[t+1]\}_{t \in \mathbf{T}} - \{y[t]\}_{t \in \mathbf{T}} = \begin{cases} h \cdot \{u[t]\}_{t \in \mathbf{T}} \\ h \cdot \{u[t+1]\}_{t \in \mathbf{T}} \\ \frac{1}{2} h \cdot (\{u[t]\}_{t \in \mathbf{T}} + \{u[t+1]\}_{t \in \mathbf{T}}) \end{cases} \quad \text{---} \quad (z-1)y(z) = \begin{cases} h \cdot u(z) \\ h \cdot zu(z) \\ \frac{1}{2} h \cdot (1+z)u(z) \end{cases}.$$

În consecință, pentru aproximarea comportării unui ET-I cu funcția de transfer $H(s) = \frac{1}{s}$, se pot folosi un sistem în timp discret cu orientarea $u(z) \rightarrow y(z)$ și funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \begin{cases} \frac{h}{z-1} & \text{(MDR)} \\ \frac{h \cdot z}{z-1} & \text{(MDA)} \\ \frac{1}{2} h \cdot \frac{z+1}{z-1} & \text{(MT)} \end{cases} \quad (16)$$

⁶⁾ Atributele “retardată” și “avansată” se referă la faptul că dreptunghiurile considerate au în comun cu trapezul curbiliniu latura din stânga, corespunzătoare momentului kh (aflat în “urmă”), respective latura din dreapta, corespunzătoare momentului (k+1)h (aflat “înainte”).

Pe această bază, având în vedere remarca privitoare la tipul operațiilor care apar în schema bloc asociată sistemului

(1), f. d. t. $\frac{1}{s}$ a blocului integrator se va substitui prin una din expresiile de mai jos:

$$\frac{1}{s} \cong \begin{cases} \frac{h}{z-1} & (\text{MDR}) \\ \frac{h \cdot z}{z-1} & (\text{MDA}) \\ \frac{\frac{1}{2}h \cdot z+1}{z-1} & (\text{MT}) \end{cases} \quad (17)$$

Notă: Se știe că pentru sistemele în timp continuu caracterul integrator este asociat cu prezența polului $p = 0$, iar caracterul derivator cu cea a zeroului $z = 0$. Se observă că potrivit relațiilor (17) polului $p = 0$ din cazul STC îi corespunde pentru STD polul $z = 1$.

Rezumat: Aplicarea metodei de discretizare prin aproximare prin metoda substituției constă în folosirea uneia dintre formulele comasate în (17) prin efectuarea substituției corespunzătoare în funcția de transfer $H(s)$ a STC care trebuie discretizat. Sistemul în timp discret rezultat, de f.d.t. $H(z)$, furnizează în fiecare moment de discretizare a timpului o valoare de aproximare a răspunsului sistemului în timp continuu la momentele de discretizare.

Exemplu: i) Să se determine STD asociat prin metoda dreptunghiului avansată sistemului în timp continuu $5\dot{u}(t) + 2u(t) = 3a(t)$. ii) Să se determine f.d.t. a STD asociat prin metoda dreptunghiului retardată algoritmului de reglare cu

f.d.t. $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$. În ambele cazuri pasul de discretizare a timpului este h .

Soluție: i) Sistemului îi corespunde funcția de transfer $H(s) = \frac{3}{5s+2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{s}}{5+2 \cdot \frac{1}{s}}$, iar în conformitate cu (17) rezultă

$$H(z) = H(s) \Big|_{\frac{1}{s} = \frac{hz}{z-1}} = \frac{3 \cdot \frac{hz}{z-1}}{5+2 \cdot \frac{hz}{z-1}} = \frac{3hz}{(5+2h)z-5} = \frac{3h}{5+2h-5z^{-1}}.$$

Întrucât $H(z) = \frac{\bar{u}(z)}{\bar{a}(z)}$, avem $\frac{\bar{u}(z)}{\bar{a}(z)} = \frac{3h}{5+2h-5z^{-1}}$, respectiv $(5+2h) \cdot \bar{u}(z) - 5z^{-1} \cdot \bar{u}(z) = 3h \cdot \bar{a}(z)$.

În consecință, modelul în timp discret este $\bar{u}[t] = \frac{5}{5+2h} \cdot \bar{u}[t-1] + \frac{3h}{5+2h} \cdot \bar{a}[t]$.

ii) $H(s)$ se rescrie sub forma $H(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+2\frac{1}{s}+5\frac{1}{s^2}}$, deci

$$H(z) = H(s) \Big|_{\frac{1}{s} = \frac{h}{z-1}} = \frac{\frac{h^2}{(z-1)^2}}{1+2\frac{h}{z-1}+5\frac{h^2}{(z-1)^2}} = \frac{h^2 z^{-2}}{1-2(1-h)z^{-1}+(1-2h+5h^2)z^{-2}}.$$

➤ Un al doilea grup de relații de substituție se obține considerând cantitățile $f(t+h)-f(t)$, respectiv $f(t)-f(t-h)$, numite *diferență înainte* (forward difference) sau în avans, respectiv *diferență înapoi* (backward difference) sau în întârziere ale unei funcții $f(t)$ derivabile în raport cu timpul. Cantitatea h este pasul de discretizare al timpului. Derivata $f'(t)$ se poate aproxima cu ajutorul lor astfel:

$$\dot{f}(t) \cong \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \quad \dot{f}(t) \cong \frac{f(t)-f(t-h)}{h} \quad (18)$$

Pentru derivatele de ordin mai mare se pot deduce formule de aproximare de ordin superior pornind de la relațiile (18). Un exemplu este formula de aproximare de ordinul II centrată:

$$\ddot{f}(t) \cong \frac{\dot{f}(t) - \dot{f}(t-h)}{h} = \frac{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} = \frac{f(t) - 2 \cdot f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

Pentru discretizarea prin aproximarea a MM ale sistemelor liniare în timp continuu sunt suficiente relațiile (18). Ele pot fi aplicate în mod direct sau prin substituție. Formulele de substituție se obțin plecând de la egalitatea (11). Folosind (18), din (11) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= u(t) \rightarrow y[t+1] - y[t] = h \cdot u[t] \Rightarrow y(z) = \frac{h}{z-1} \cdot u(z) \\ \frac{y(t) - y(t-h)}{h} &= u(t) \rightarrow y[t] - y[t-1] = h \cdot u[t] \Rightarrow y(z) = \frac{h \cdot z}{z-1} \cdot u(z) \end{aligned} \quad (19)$$

Se observă că s-au regăsit primele două formule de substituție (17).

3. Utilizarea metodelor de discretizare în cazul sistemelor de reglare numerică

Sistemele de reglare numerică sunt structuri hibride în care procesul condus este de regulă de tip analogic, iar regulatorul este tip numeric. În Fig. 1 se prezintă o astfel de structură de reglare.

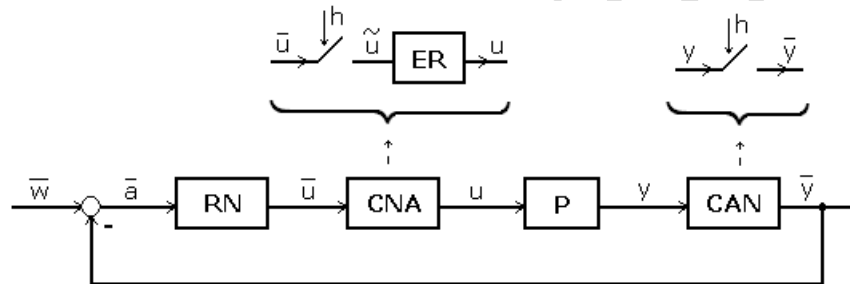


Fig. 1. Structură convențională de reglare numerică.

În figură **P** este procesul condus (sistem în timp continuu), iar **RN** este regulatorul numeric (sistem în timp discret). Cele două părți interacționează prin intermediul convertorului numeric-analogic **CNA** și al convertorului analogic-numeric **CAN**. Semnalele notate cu litere supraliniate sunt semnale eșantionate, adică semnale în timp discret ne-cuantizate în amplitudine, iar cele notate cu litere ne-supraliniate sunt semnale analogice. RN comandă procesul prin semnalul de comandă \bar{u} și se „informează” despre situația procesului condus prin semnalul de reacție \bar{y} obținut prin eșantionarea și conversia analogic-numerică a mărimii de reglate y . Prin semnalul de referință \bar{w} se prescrie pentru y un regim de funcționare dorit.

În scopul dezvoltării unor modele matematice utilizabile pentru sinteza sistemului de reglare, **CNA** și **CAN** se înlocuiesc, în contextul precizat în

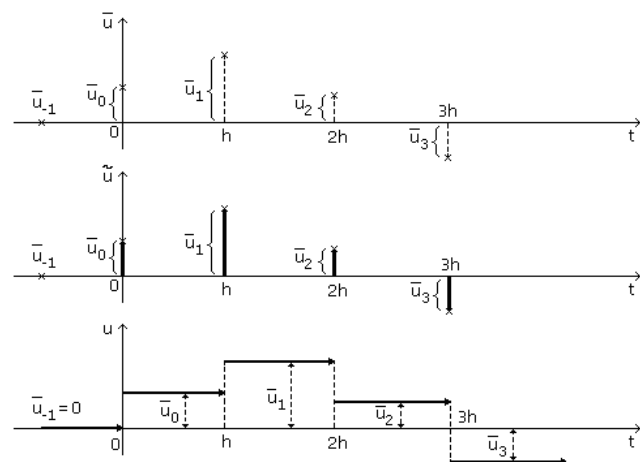


Fig.2. Semnalele asociate în modelarea CAN.

continuare, cu modelele reprezentate în Fig.1 deasupra acoladelor. Modelele conțin două întrerupătoare care se închid sincron și periodic, cu perioada h , pe intervale de timp infinit mici și un element de reținere (**ER**)⁷ cu rol de element de memorare. Intervalele de timp mici servesc pentru transmiterea semnalelor eșantionate.

- **CNA** convertește șirul de numere $\{\bar{u}[k]\}$ generat în **RN** la momentele kh , $k \in \mathbb{Z}$, într-un semnal în timp continuu $u(t)$ de tip scară cu trepte de durată h (Fig.2). Operația este pusă pe seama unei structuri seriale alcătuită dintr-un convertor – generator de impulsuri, simbolizat prin întrerupător și din elementul de reținere **ER**. Convertorul generator de impulsuri, imaginat ca element ce prezintă facilitățile de conversie N/A și de generare de impulsuri Dirac, asociază la ieșirea lui fiecărei valori $\bar{u}[k] = \bar{u}_k$ din secvența de intrare $\{\bar{u}[k]\}$, aplicată la intrarea lui la momentul kh , un impuls Dirac $\bar{u}_k \cdot \delta(t - k \cdot h)$ rezultând semnalul în timp continuu $\tilde{u}(t)$ de tip pieptene (distribuție δ periodică)⁸.

Elementul de reținere produce din fiecare impuls Dirac $\bar{u}_k \cdot \delta(t - k \cdot h)$ o treaptă de durată h și cu aceeași amplitudine și polaritate ca ale impulsului, rezultând semnalul scară $u(t)$.

- **CAN** este modelat printr-o structură care conține un singur element: eșantionatorul - convertor, simbolizat tot printr-un întrerupător. Se consideră că eșantionatorul – convertor efectuează periodic, la momentele kh , atât operația de eșantionare cât și operația de conversie analogic-numerică a valorilor eșantioanelor, furnizând la ieșire semnalul eșantionat $\{\bar{y}[k]\}$, $\bar{y}[k] = y(k \cdot h) = y_k$ ⁹. În Fig. 3 sunt ilustrate semnalele asociate CAN.

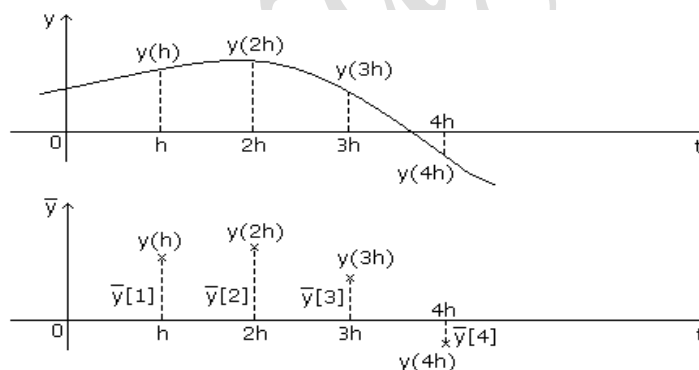


Fig.3. Semnalele asociate în modelarea CAN.

⁷ Elementul de reținere reprezintă extrapolator de ordinul zero (zero order holder (ZOH), cel mai simplu element de refacere a semnalelor în timp continuu.

⁸ Maniera în care au fost modelate procesele care au loc în CNA are acoperire doar în ceea ce privește dependența dintre intrare și ieșire. Semnalul $\tilde{u}(t)$ nu există în realitate. În convertoarele reale informația $\bar{u}[k] = \bar{u}_k$, generată secvențial, este reținută în registre ale căror conținuturi sunt modificate la momentele $k \cdot h$ și folosite pentru comanda adecvată a unui sistem de comutatoare ale unor circuite electronice. La ieșirea acestora rezultă un semnal $u(t)$ cuantizat în amplitudine. În mod obișnuit, datorită valorii foarte mici a cuantelor, se face abstracție de această cuantizare considerând, în acord cu cele menționate, semnale eșantionate. Prin aceasta se simplifică modelarea și calculele de proiectare.

⁹ Și de data aceasta, maniera în care au fost modelate procesele dintr-un CAN are acoperire doar în ceea ce privește dependența dintre intrare și ieșire. În realitate fenomenele sunt complexe și se desfășoară într-un ansamblu alcătuit dintr-un circuit de eșantionare și reținere și din convertorul analog-numeric propriu-zis. Circuit de eșantionare și reținere funcționează alternativ în regim de sistem de urmărire a semnalului de intrare și în regim de eșantionare la momentele $k \cdot h$, durata procesului de conversie fiind considerată foarte mică. După conversie rezultă semnalul $\{\bar{y}[k]\}$, $\bar{y}[k] = y(k \cdot h)$ cuantizat în amplitudine. Datorită valorii foarte mici a cuantelor, în mod obișnuit se face abstracție de cuantizarea în amplitudine, ceea ce conduce la simplificarea modelării și a calculelor de proiectare.

Făcând în Fig.1 înlocuirile menționate se obține structura din Fig.4.

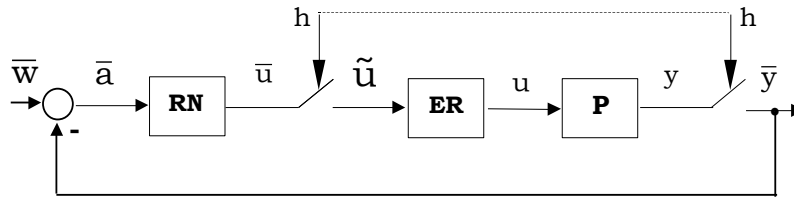


Fig.4.

Regulatorul **RN** intervine asupra lui **P** prin **ER** la a cărei ieșire rezultă un semnal scară cu trepte de durată h (lungimea unui pas de discretizare a timpului). Nivelurile treptelor semnalului scară depind de modul de variație în timp a mărimii de comandă $\{\bar{u}[k]\}$ așa cum sugerează Fig.2.

O altă caracteristică a schemei din Fig.4 este faptul că evoluția mărimii de ieșire a procesului nu este observată de către regulatorul numeric în mod continuu ci în mod discret, la momentele de discretizare $k \cdot h$, sincron cu apariția treptelor în funcția scară $u(t)$. Sincronizarea este redată prin linia întreruptă care unește cele două întrerupătoare.

Pentru analiza și sinteza sistemului de reglare numerică este necesar un model al procesului **P** care să redea, în condițiile prezentate, legătura dintre secvențele $\{\bar{u}[k]\}$ și $\{\bar{y}[k]\}$ la momentele de discretizare $t_k = th$, $t \in \mathbf{T}^{10}$, adică un model care să facă legătura între secvențele $\{\bar{u}[t]\}_{t \in \mathbf{T}} = \{u(th)\}_{t \in \mathbf{T}}$ și $\{\bar{y}[t]\}_{t \in \mathbf{T}} = \{y(th)\}_{t \in \mathbf{T}}$. Pentru sistemele liniare astfel de modele se pot obține tocmai prin *metoda realizării invariante la semnal treaptă* prezentată în secțiunile A și B de mai sus. Operația de obținere o denumim *discretizare a STC*, iar rezultatul *realizare invariantă la semnal treaptă*.

În consecință, dacă procesul **P** are MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (20)$$

sau MM-II

$$y(s) = H(s) \cdot u(s), \quad (21)$$

unde $H(s)$ este matricea de transfer a sistemului, R.I.S.T. aferentă canalului $\bar{u} \rightarrow \bar{y}(t)$ este

$$\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[t] + \mathbf{B}_d \bar{u}[t], & t \in \mathbf{Z} \\ \bar{y}[t] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[t] + \mathbf{D}_d \bar{u}[t] \end{cases}, \quad (22)$$

cu matricele determinate cu formulele (8), respectiv

$$\bar{y}(z) = H(z) \cdot \bar{u}(z) \quad (23.1)$$

unde

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}. \quad (23.2)$$

¹⁰ Mulțimea \mathbf{T} coincide cu mulțimile \mathbf{Z} sau \mathbf{N} , după cum semnalele se consideră bilaterale sau unilaterale.

Atunci când pentru proiectarea unui sistem de reglare numerică procesul condus se reprezintă prin realizarea sa invariantă la semnal treaptă, regulatorul **RN** se proiectează direct ca sistem în timp discret.

Există însă și situații de proiectare a **RN** în care acesta se obține ca model de aproximare al unui regulator în timp continuu **R** proiectat pentru un sistem de reglare în timp continuu, fictiv, care trebuie să conducă tot procesul **P** și să realizeze aceleași performanțe ca și sistemul de reglare numerică dorit. Spunem că regulatorul **RN** se proiectează ca *regulator cvasicontinuu*. În astfel de cazuri, dacă regulatorul **R** are f.d.t. $H_R(s)$, f.d.t. a regulatorului **RN** se va obține prin metoda substituției

$$H_{RN}(z) = H_R(s) \Big|_{\text{cu } \frac{1}{s} \text{ substituit conform rel. (17)}} \quad (24)$$

În Fig.5 sunt precizate canalele informaționale cărora li se aplică cele două metode de discretizare: canalul r.i.s.t., al structurii implicate în obținerea R.I.S.T. și canalul d.a., implicat în discretizarea prin aproximare. Cele două canale având un tronson comun, rezultă că pentru un sistem de reglare dat ele nu pot fi folosite niciodată împreună. *Pentru un sistem de reglare dat se folosește fie o metodă de discretizare, fie cealaltă*¹¹, în funcție de metoda de proiectare aleasă pentru sinteza sistemului de reglare.

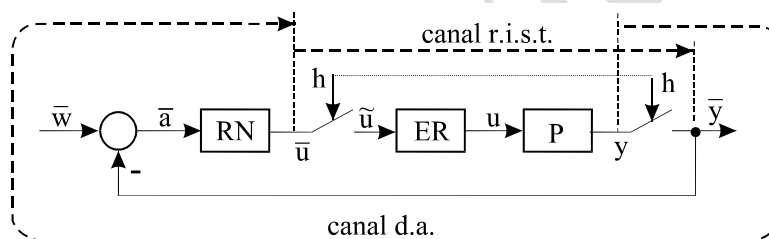


Fig.5.

Aplicând metoda de discretizare prin aproximare prezentată pentru sistemele în timp continuu cu funcțiile de transfer

$$H(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_1 \cdot s + a_0} \quad (25)$$

și

$$H(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (26)$$

se obțin sisteme în timp discret cu funcțiile de transfer

$$H(z) = \frac{\beta_1 + \beta_0 \cdot z^{-1}}{1 + \alpha_0 \cdot z^{-1}} \quad (27)$$

și

$$H(z) = \frac{\beta_2 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \beta_0 \cdot z^{-2}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_0 \cdot z^{-2}}, \quad (28)$$

respectiv cu modelele intrare – ieșire în domeniul timp discret

$$\alpha_1 \cdot y[t] + \alpha_0 \cdot y[t-1] = \beta_1 \cdot u[t] + \beta_0 \cdot u[t-1] \quad (29)$$

¹¹ Metoda R.I.S.T se aplică proceselor și nu se aplică legilor de reglare. Discretizarea prin aproximare se aplică reguletoarelor și nu se aplică proceselor.

și

$$\alpha_2 \cdot y[t] + \alpha_1 \cdot y[t-1] + \alpha_0 \cdot y[t-2] = \beta_2 \cdot u[t] + \beta_1 \cdot u[t-1] + \beta_0 \cdot u[t-2] \quad (30)$$

Formulele de legătură între coeficienții din relațiile (25) și (26) în cazul aplicării MDR, MDA și MT sunt următoarele:

$H(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_1 \cdot s + a_0}$	α_1	α_0	β_2	β_1	β_0
(27), (29) MDR	-	$\frac{a_0 \cdot h - a_1}{a_1}$	-	$\frac{b_1}{a_1}$	$\frac{b_0 \cdot h - b_1}{a_1}$
(27), (29) MDA	-	$-\frac{a_1}{a_0 \cdot h + a_1}$	-	$\frac{b_0 \cdot h + b_1}{a_0 \cdot h + a_1}$	$-\frac{b_1}{a_0 \cdot h + a_1}$
(27), (29) MT	-	$\frac{a_0 \frac{h}{2} - a_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$	-	$\frac{b_0 \frac{h}{2} + b_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$	$\frac{b_0 \frac{h}{2} - b_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$

$H(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$	α_1	α_0	β_2	β_1	β_0
(28), (30) MDR	$\frac{a_1 \cdot h - 2a_2}{a_2}$	$\frac{a_0 h^2 - a_1 h + a_2}{a_2}$	$\frac{b_2}{a_2}$	$\frac{b_1 \cdot h - 2b_2}{a_2}$	$\frac{b_0 h^2 - b_1 h + b_2}{a_2}$
(28), (30) MDA	$-\frac{a_1 \cdot h + 2 \cdot a_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{a_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{b_0 h^2 + b_1 h + b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$-\frac{b_1 \cdot h + 2b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$
(28), (30) MT	$\frac{2 \cdot (a_0 \frac{h^2}{4} - a_2)}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{a_0 \frac{h^2}{4} - a_1 \frac{h}{2} + a_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{b_0 \frac{h^2}{4} + b_1 \frac{h}{2} + b_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{2 \cdot (b_0 \frac{h^2}{4} - b_2)}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{b_0 \frac{h^2}{4} - b_1 \frac{h}{2} + b_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$

Aceste formule permit, prin particularizare, stabilirea algoritmilor de reglare în timp discret asociabili legilor de reglare tipizate.

Bunăoară, legii de reglare PI cu funcția de transfer $H(s) = K_R \cdot (1 + \frac{1}{T_I} \cdot \frac{1}{s})$ asocierea se face rescriind expresia sub

forma $H(s) = \frac{K_R T_I \cdot s + K_R}{T_I \cdot s}$. Identificând-o cu funcția de transfer din primul tabel vom avea $b_1 = K_R T_I$,

$b_0 = K_R$, $a_1 = T_I$, $a_0 = 0$ etc.

4. Despre jitter, cu referire la implementarea reguletoarelor numerice ¹²⁾

Presupunem că regulatorul numeric **RN** al unui sistem de reglare numerică se obține prin discretizare cu MDR și pasul $h = 0.01$ sec. din regulatorul PI cu filtrare având funcția de transfer:

$$H_R(s) = \left(1 + \frac{1}{0.02s}\right) \cdot \frac{1}{0.0125s + 1} \quad (31)$$

Ca urmare, modelul în timp discret al RN se obține efectuând în (31) substituția $\frac{1}{s} = \frac{0.01}{z-1}$. Rezultă

$$H_{RN}(z) = \frac{0.8 \cdot (z-0.5)}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{0.8 \cdot z - 0.4}{z^2 - 1.2z + 0.2}, \quad (32)$$

respectiv algoritmul de reglare

$$c[t] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2] + 1.2 \cdot c[t-1] - 0.2 \cdot c[t-2], \quad (33)$$

despre care s-a discutat și în exemplul de la pag. 97 din § 3.3.

În mod obișnuit un algoritm de reglare numerică, cum este algoritmul (33), este proiectat (sintetizat) în ipoteza că se implementează în timp real ca un task periodic ale cărui instanțe se execută în cursul fiecărui pas h de discretizare a timpului τ , $\tau \in [th, th + h)$, pe un subinterval de timp $I = [th, th + \nu h] \subset [th, th + h)$, $\nu < 1$. Principalele operații care trebuie efectuate în subintervalul $[th, th + \nu h]$ sunt: i) achiziționarea valorii $y[t]$ de la procesul condus, prin intermediul CAN, ii) calcularea erorii de reglare $a[t] = w[t] - y[t]$, iar după aceea calcularea cu relația (33) a valorii curente $c[t]$ a mărimii de comandă, iii) transmiterea valorii $c[t]$ a mărimii de comandă, prin intermediul CNA spre procesul condus.

Nerespectarea în implementare a ipotezei menționate (neadecvarea implementării la ipotezele de proiectare ale regulatorului) poate compromite în diferite moduri performanțele sistemului de reglare. Aceasta înseamnă că pentru reușita implementării în proiectarea algoritmului de reglare trebuie să se țină seamă de modul de implementare și invers, în implementare să se respecte ipotezele pe care s-a bazat proiectarea.

Bunăoară, în situațiile în care resursele de procesare folosite pentru implementarea RN (32) pe baza algoritmului de reglare (33) sunt limitate, este probabil ca execuția algoritmului de reglare să nu se mai poate efectua exact în intervalul $I = [th, th + \nu h]$. Sunt posibile diferite situații:

- decalarea intervalului în timp I ,
- modificarea lungimii intervalului I ,
- amplasarea momentului $th + \nu h$ în cursul următorului pas de discretizare a timpului,
- neefectuarea în ordine a operațiilor i), ii) și iii) etc.

¹²⁾ În electronică și telecomunicații se utilizează în mod curent termenul „jitter” pentru a denumi fluctuațiile care apar în durata tactului folosit în cursul transmisiei. Astfel de fluctuații reprezintă perturbații parazite care modifică brutal caracteristicile semnalelor transmise (atât spectrul de fază, cât și spectrul de amplitudine) și performanțele sistemelor de transmisie. <http://en.wikipedia.org/wiki/Jitter>, <http://de.wikipedia.org/wiki/Jitter>.

Toate aceste abateri sunt denumite, la fel ca și în electronica, prin termenul de *jitter*. Efectele jitterului constau în degradarea valorilor indicatorilor de performanță ai sistemului de reglare (crește suprareglajul, crește timpul de reglare etc.) și pot ajunge până la pierderea stabilității sistemului de reglare.

Din punct de vedere matematic degradarea performanțelor poate fi explicată observând că datorită jitterului utilizarea algoritmului de reglare (33) nu mai corespunde RN (32) proiectat. Astfel, dacă sistemul de reglare rămâne din punctul de vedere al procesului condus în regim liniar algoritmul de reglare efectiv implementat va corespunde unei alte funcții de transfer decât (32), iar dacă procesul ajunge în regim de funcționare neliniar performanțele se pot modifica în mod complet neașteptat.

Figurile de mai jos ilustrează o situație corespunzătoare reglării poziției pentru sistemul de poziționare din exemplul de la pag. 110 folosind, corespunzător realizării sistemice (9), un algoritm de reglare după stare de forma:

$$u[k] = f_1 \cdot x_1[k] + f_2 \cdot x_2[k], \quad (34)$$

cu f_1 și f_2 amplificări constante. În figurile de mai jos curbele reprezentate cu albastru ilustrează variația mărimii de ieșire y (Fig. 1) și variația mărimii de comandă u (Fig. 2) ale sistemului de poziționare (STC) în cazul aplicării unui semnal treaptă la momentul $t = 1$ s.

Curbele reprezentate cu verde și roșu redau ceea ce se petrece atunci când în implementare apare un jitter (diferite valori ale lui ν). Se constată atât producerea unui suprareglaj sau a unor oscilații (Fig. 1) cât și modificări ale limitelor de variație ale semnalului de comandă (Fig. 2).

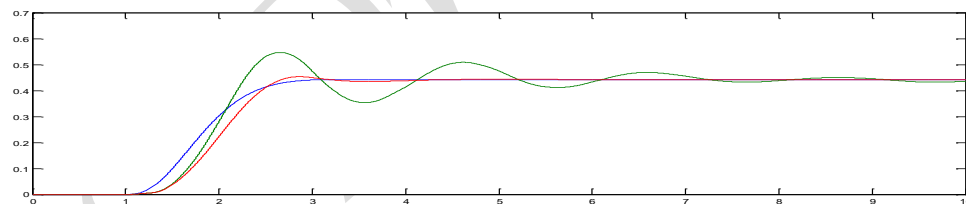


Fig.1. Răspunsul $y(t)$, la semnal treaptă, al ieșirii y a sistemului de poziționare de la pag. 110 în cazul conducerii sistemului prin reacție după stare când implementarea nu este afectată de jitter (albastru) și când implementarea este afectată de jitter (verde, roșu)

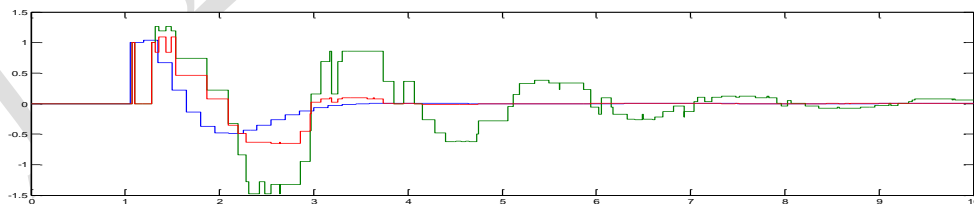


Fig.2. Răspunsul $u(t)$, la semnal treaptă, al comenzii u a sistemului de poziționare de la pag. 110 în cazul conducerii sistemului prin reacție după stare când implementarea nu este afectată de jitter (albastru) și când implementarea este afectată de jitter (verde, roșu)

Având în vedere aspectele prezentate înseamnă că la proiectarea unui RN trebuie să se țină seamă, prin intermediul programatorului de taskuri, și de resursele care se vor folosi la implementare și invers, să se folosească resurse adecvate complexității calculului (co-design).