În continuare se trec în revistă ET utilizate cel mai des pentru trasarea caracteristicilor Bode ale sistemelor pe baza descompunerii (3.59) și a metodei de mai sus.

(Pentru fiecare ET se indică: denumirea, f.d.t., uneori detalii de calcul, aplicații, urmând ca în spațiile libere cititorul să traseze caracteristicile Bode.)

1. ET-P Deoarece H(s) = K avem: $\iint H(j\omega) = K \quad \rightarrow H_{dB} = 20 \lg K = H_{dB}$ $\arg H(j\omega) = 0 \quad \rightarrow \varphi_{H} = 0$

Rezultă reprezentarea grafică din Fig. 124.

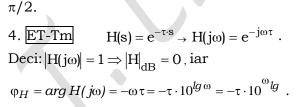
2. ET-I În acest caz
$$H(s) = \frac{1}{s}$$
, deci $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{j\omega}$

$$\begin{split} j\frac{1}{\omega} &= \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{. Ca urmare:} \\ &|H| = \frac{1}{\omega} \, \to \, |H|_{dB} = -20 \text{lg}\omega = -20 \omega_{\text{lg}}, \\ &\text{arg H} = -\frac{\pi}{2} \, \to \, \phi_{\text{H}} = -\frac{\pi}{2} \, . \end{split}$$

Caracteristicile Bode au aspectul din Fig. 125. Panta c.a-p este

paralelă cu axa $\omega_{\ell g}$ situată deasupra ei la nivelul

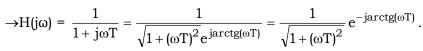
$$\frac{d(|H|_{dB})}{d(\omega_{\ell g})} = -20 \ dB \ / \ dec \ .$$



În Fig. 126 sunt prezentate caracteristicile Bode ale unui ET-Tm cu f.d.t. $H(s) = e^{-143.24367s}$ ($\tau \simeq .2.4$ min). Faza este măsurată în radiani.

(http://lpsa.swarthmore.edu/Bode/BodeExamples.html).

5.
$$ET-PT_1$$
 $H(s) = \frac{K}{Ts+1}$



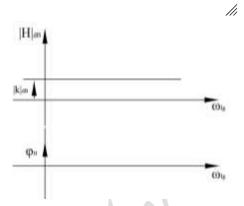


Fig. 124. Caracteristicile Bode ale ET-P

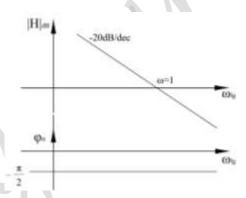


Fig. 125. Caracteristicile Bode ale ET-I

ET are f.d.t. H(s) = s. El poate fi considerat ca element de transfer invers în

raport cu ET-I. Ca urmare, caracteristicile Bode vor fi simetricele celor din Fig. 125 în raport cu axa pulsațiilor $\omega_{\ell g}$. Panta c.a-p. este de 20 dB/dec, iar c.f-p. este o dreaptă

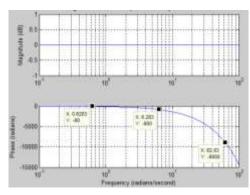


Fig. 126. Caracteristicile Bode ale unui ET-Tm cu f.d.t. $H(s) = e^{-143.24367s}$

În consecință: $|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$ iar arg H = -arctg ωT .

Modulul |H| se poate aproxima astfel:

$$|H| \approx \begin{cases} 1, \, \text{daca } \omega T < 1; \\ \frac{1}{\omega T}, \, \text{daca } \omega T > 1; \end{cases}$$
 (3.60)

Se introduce, cu denumirea de pulsație de frângere, notația:

$$\omega_0 = \frac{1}{T}, \qquad (3.61)$$

Prin aproximare, |H| devine

$$|\,H\,| \approx \begin{cases} 1,\, daca \,\, \omega < \omega_0; \\ \frac{\omega_0}{\omega},\, daca \,\, \omega > \omega_0; \end{cases} \quad \rightarrow \qquad |\,H\,|_{\, dB} \approx \begin{cases} 0,\, daca \,\, \omega < \omega_0; \\ 20 \cdot (\omega_{0\, lg} - \omega_{lg}),\, daca \,\, \omega > \omega_0 \end{cases}.$$

Ultima expresie conduce la reprezentarea grafică din partea de sus a Fig. 127. În urma aproximării c.a-p. s-a redus la o linie frântă alcătuită din două semidrepte: una orizontală, alta cu panta de -20dB/dec. Frângerea are loc pentru pulsația $\omega = \omega_0$. Ca urmare, pentru trasarea caracteristicii este suficient să cunoaștem coordonatele punctului de frângere.

Caracteristica astfel obținută se numește caracteristică amplitudine-pulsație simplificată. Caracteristeristica exactă este o linie continuă situată sub caracteristica exactă, având semidreptele caracteristicii exacte ca asimptote. Distanța cea mai mare dintre

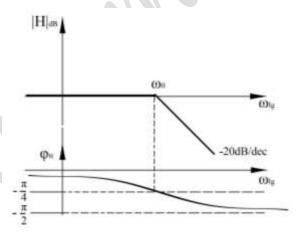


Fig. 127. Caracteristicile Bode ale ET-PT1

cele două caracteristici este în dreptul pulsației de frângere și măsoară 3 dB.

Pentru c.f-p avem:

$$\phi_{\rm H} = -\arctan \cos \omega T = -\arctan \cos \frac{\omega}{\omega_0}$$
.

Ținând seamă că domeniul de valori al funcției $arctg\ x$ este $[0,\ \pi/2)$, rezultă reprezentarea grafică din partea de jos a figurii 127.

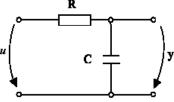


Fig. 128. Cuadripol RC

Exemplul 1: Să se determine caracteristicile Bode ale cuadripolului din Fig. 128 pentru cazul când R = $10 \text{ k}\Omega$ și C = $0.01 \mu\text{F}$.

Soluție: Cuadripolul are MM-II

$$RCy^{(1)}(t)+y(t)=u(t),$$

respectiv f.d.t.

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

și constanta de timp

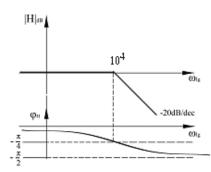


Fig. 129. Caracteristicile Bode ale cuadripolului din Fig. 128

$$T = RC = 10^4 \ 10^{-2} \ 10^{-6} = 10^{-4} sec = 0.1 msec.$$

Așadar, pulsația de frângere este

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = 10^4 \, \text{sec}^{-1}$$
.

Rezultă caracteristicile Bode din Fig. 129.

6. ET-PD
$$H(s) = K \cdot (1 + T_D \cdot s)$$

Caracteristicile Bode pentru acest caz se pot obține observând că elementul de transfer invers corespunzător ET-PD este de un ET-PT₁:

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{K \cdot (1 + T_D \cdot s)} = \frac{1/K}{1 + T_D \cdot s}.$$

Exemplul 2. Să se reprezinte caracteristicile Bode ale $ET-PDT_1$ cu f.d.t. $H(s) = K \cdot \frac{1+T_D \cdot s}{1+T \cdot s}$

Pentru simplitate adoptăm K=1.

Soluție: Trasarea caracteristicilor Bode pentru ET-PDT₁ constituie o aplicație la cele prezentate până aici. Pe baza descompunerii f.d.t. în factori, sub forma

$$H(s) = (1 + T_D \cdot s) \cdot \frac{1}{1 + T \cdot s}$$
, elementului de



Fig. 130. Descompunere unui ET-PDT $_1$ într-o conexiune serie a unui ET-PD cu un ET-PT $_1$

transfer i se poate asocia schema bloc din Fig. 130.

Se disting 2 cazuri:

- $T_D > T \implies ET$ cu anticipare-întârziere (lead-lag)
- $T > T_D \implies ET$ cu întârziere anticipare (lag-lead)

Modul de obținere a caracteristicilor Bode este ilustrat în figurile 131 și 132 pentru două cazuri numerice.

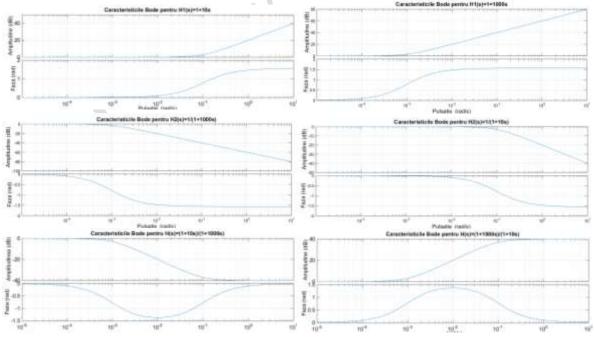


Fig.131. Construcția caracteristicilor Bode pentru un ET-PDT₁ cu întârziere-anticipare (lag-lead) cu f.d.t. H(s)=(1+10s)/(1+1000s)

Fig.132. Construcția caracteristicilor Bode pentru un ET-PDT₁ cu anticipare-întârziere (lead-lag) cu f.d.t. H(s)=(1+1000s)/(1+10s)

În fiecare figură sunt redate caracteristicile Bode ale elementelor componente i apoi caracteristica ET-PDT₁, rezultată prin însumarea lor.

Exemplul 3. Să se construiască caracteristicile Bode ale sistemului cu f.d.t. $H(s) = 10 \cdot \frac{s+10}{s^2+3s} \ .$

(http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Ref/LPSA/Bode/BodeExamples.html)

Soluție: Se rescrie f.d.t. sub forma $H(s) = 10 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{\frac{s}{10} + 1}{s(\frac{s}{3} + 1)} = \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{s}{3} + 1} \cdot (\frac{s}{10} + 1)$. Ei îi

corespunde o conexiune serie a unui ET-P, unui ET-I, unui ET-PT₁ și unui ET-PD. Se obțin caracteristicile Bode din Fig. 133.

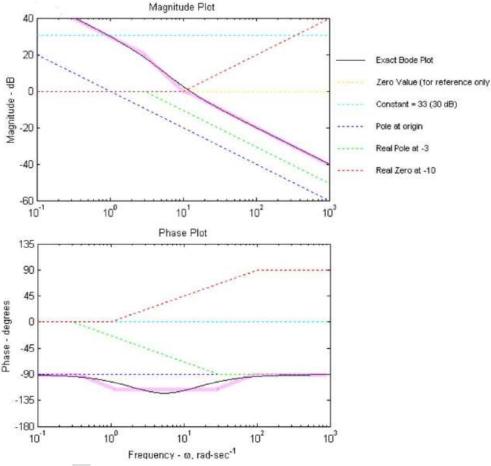


Fig. 133. Caracteristicile Bode ale sistemului de ordinul II din exemplul 3.

În figură s-au reprezentat cu linie continuă caracteristicile Bode exacte ale sistemului, iar cu linie întreruptă caracteristicile de aproximare ale diferiților factori ai lui H(s). Se observă că aproximarea cu linie frântă s-a folosit și pentru c.f-p. ale factorilor.

7.
$$\overline{\text{ET-PT_2}}$$
 are f.d.t. $H(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi T s + 1}$ sau $H(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + {\omega_n}^2}$. Pulsația naturală și

constanta de timp (are sens doar când $\xi \le 1$) sunt legate prin relația $\omega_n = \frac{1}{T}$.

Întrucât amortizarea ξ are, alături de T rol de parametru, spre deosebire de cazurile anterioare nu mai avem o singură caracteristică ci o familie de caracteristici corespunzătoare diferitelor valori ale lui ξ .

În Fig. 134 sunt redate pentru K =1 caracteristicile Bode. În partea de sus apar c.a-p. iar în partea de jos c.f-p. În ambele cazuri în abscisă s-a considerat valoarea normată a

pulsației, adică $\hat{\omega}_{lg} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{lg}$. Caroiajul vertical corespunde valorilor $\hat{\omega}_{lg} = 0.01$, 0.02,..., 0.1, 0.2, ..., 1, 2, ..., 10, 20, ..., 100.

Pentru valori mici ale amortizării ξ în vecinătatea valorii $\hat{\omega}_{lg}$ =1 se observă, pe de-o parte existența unui maximum (vârf de rezonanță) în c.a-p, iar pe de altă parte, o variație rapidă a defazalui de la valori apropiate de 0 grade (0 radiani) la valori apropiate de -180 grade (- π radiani). Amplitudinea vârfului de rezonanță și gradientul de descreștere a fazei sunt cu atât mai mari cu cât valoarea lui ξ este mai redusă.

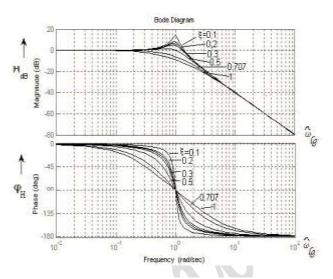
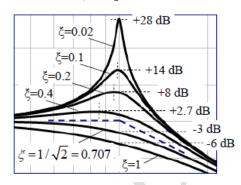


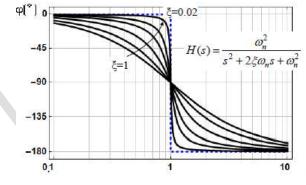
Fig. 134. Caracteristicile Bode ale ET-PT₂

Figurile 135-136 și tabelele alăturate detaliază cele două familiile de caracteristici și pun mai clar în evidență aspectele anterior menționate.



Ĕ	$H(j\omega_n)$	$^{\omega}_{d/\omega_{n}}$	$H(j\omega d)$
0.02	+28 dB	~1	+28 dB
0.05	+20 dB	0.997	+20 dB
0.1	+14 dB	0.990	+14dB
0.2	+8 dB	0.959	+8.1 dB
0.4	+1.9 dB	0.825	+2.7dB
0.5	0 dB	0.707	+1.3 dB
0.707	-3 dB	0	0 dB
1	-6 dB	_	_

Fig. 135. Caracteristicile amplitudine-pulsație ale ET-PT $_2$. Pulsația ω_d este pulsația corespunzătoare vârfului de rezonanță.



Ĕ	$0.1\omega_n$	$0.2\omega_n$	$0.5\omega_n$
0.02	-0.2°	-0.5°	-1.5°
0.05	-0.6°	-1.2°	-3.8°
0.1	-1.2°	-2.4°	-7.6°
0.2	-2.3°	-4.8°	-15°
0.3	-3.5°	-7.1°	-22°
0.4	-4.6°	-9.5°	-28°
0.5	-5.8°	-12°	-34°
0.707	-8.1°	-16°	-43°
1	-11.4°	-23°	-53°

Fig. 136. Caracteristicile fază-pulsație ale ET-PT2. În abscisă sunt indicate valorile raportului ω/ω_n . (Ex: 0.1 înseamnă ω/ω_n =0.1, adică ω = 0.1 ω_n etc.).

8. $\overline{\text{ET-DT_2}}$ În acest caz $H(s) = T^2 s^2 + 2\xi T s + 1$. Se observă că este vorba despre elementul de transfer invers celui de la punctul 7 (în cazul K = 1). Ca urmare, caracteristicile Bode sunt simetrice în raport cu axa $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{l\sigma}$ față de cele din Fig. 134.

Dacă analizăm caracteristicile Bode ale elementelor de transfer raționale prezentate anterior la punctele 1 - 4, 6 - 8 vom constata că se verifică observația ii) referitoare la Fig. 121: dacă notăm cu δ diferența dintre numărul de poli și numărul de zerouri (δ = n_p - n_z reprezintă excesul de poli față de zerouri), constatăm că toate caracteristicile amplitudine-pulsație tind asimptotic către o asimptotă cu panta egală cu $-20\cdot\delta$ dB/dec și că toate caracteristicile fază-pulsație tind asimptotic către o asimptotă orizontală situată la nivelul $-\frac{\pi}{2}\cdot\delta$ rad . Aceste constatări sunt valabile la modul general pentru partea rațională a f.d.t. (3.59). Cititorul poate verifica acest lucru în cazul exemplului 3, pentru care δ = 1.

4. Tipuri de probleme care folosesc caracteristici Bode

4.1. Filtre de semnal

Filtrele de semnal sunt sisteme destinate prelucrării semnalelor de intrare astfel încât semnalele de la ieșirea lor să rețină numai o parte din componentele semnalului de intrare (sau din spectrul semnalului de intrare). Cu ajutorul filtrelor:

- i) se elimină componentele parazite ale semnalului de intrare atunci când acesta este afectat de perturbații parazite, la ieșire reținându-se doar semnalul util (semnalul purtător de informație);
- ii) se selectează componente dintro bandă îngustă din semnalul de intrare necesare pentru prelucrări ulterioare (filtre selective) sau dintr-o bandă largă (filtre trece-jos, -trece bandă sau -trece-sus).

Principalul mod de caracterizare al filtrelor îl reprezintă f.d.t. și caracteristicile Bode Bode asociate.

Ca exemplu de abordare, ne referim la trei filtre de ordin II care apar frecvent în aplicații. C.a-p. ale acestora sunt reprezentate în Fig. 137. De obicei amortizarea lor are valoarea $\xi_F = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pulsația ω_F este pulsația proprie a filtrului.

F.d.t. ale celor trei filtre sunt:

a) Filtrul trece-jos cu f.d.t.

$$H_{FTJ}(s) = \frac{1}{T_F^2 s^2 + 2\xi_F T_F s + 1}$$
 sau

$$H_{FTJ}(s) = \frac{\omega_F^2}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2}$$

b) Filtrul trece-bandă cu f.d.t.

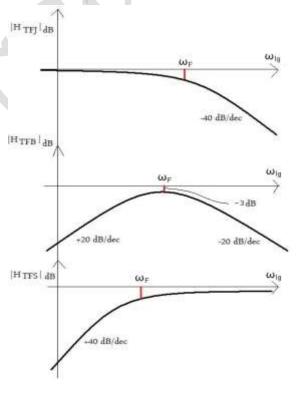


Fig. 137. C.a-p. ale unor filtre de ordinul II

$$H_{FTB}(s) = \frac{s\omega_F}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2}$$

c) Filtrul trece-sus cu f.d.t.

$$H_{FTS}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F}.$$

Modificarea modului de prelucrare a semnalului de intrare se produce de fiecare dată în vecinătatea pulsației proprii ω_F . În primul caz, pentru pulsații mai mari ca ω_F are loc o atenuare. În al doilea caz se produce o atenuare de ambele părți, iar în al treilea caz pentru pulsații mai mici decât ω_F .

4.2. Definirea de indicatori de calitate ai sistemelor cu ajutorul caracteristicilor Bode

În tehnică, pentru evaluarea sistemelor de reglare sau a diverselor aparate destinate prelucrării de semnale se utilizează mărimi denumite *indicatori de calitate*. În numeroase cazuri se folosesc indicatorii definiți pe baza caracteristicilor Bode ale sistemelor de reglare sau ale aparatelor.

De regulă se consideră că un sistem realizează o atenuare semnificativă a semnalului aplicat la intrare atunci când amplificarea sa verifică relația $|H| < \sqrt{2}/2$. Aceasta înseam-

nă $|H|_{dB} < 20 \cdot lg \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \iff |H|_{dB} < -3 \, dB$. În acest context pe c.a-p a unui sistem se identifică două mărimi: banda de pulsație și pulsația de bandă (Fig. 138).

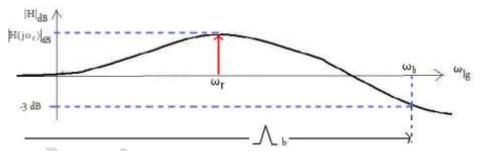


Fig. 138. Indicatori de calitate ai sistemelor definiți cu ajutorul c.a-p.

Banda de pulsație este notată cu Λ_b și reprezintă domeniul de valori ale lui ω pentru care $|H|_{dB} \geq -3\,\mathrm{dB}$. Banda de pulsație este mărginită superior de valoarea ω_b numită pulsație de bandă. Figura evidențiază și posibilitatea producerii unor procese rezonante. Ele se manifestă față de componentele sinusoidale ale semnalului de intrare de

pulsații apropiate de ω_r , pe care le amplifică de $10^{\frac{|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega_r)|_{\mathrm{dB}}}{20}}$ ori.

Banda de pulsații, pulsația de bandă și $\left|H(j\omega_r)\right|_{dB}$ sunt considerate *indicatori de calitate* ai sistemelor. De regulă se cere ca primii doi indicatori să aibă valori cât mai mari, iar cel de al treilea să tindă spre valoarea 0 dB.

Notă: Caracteristicile Bode folosite în această secțiune se referă la sisteme de reglare și aparate care reprezintă structuri de sisteme automate în circuit închis (Fig. 139a). În cazul sistemelor de reglare, calitatea acestora poate fi evaluată și cu ajutorul caracteristicilor Bode ale sistemului deschis rezultat prin întreruperea reacției (Fig. 139b). Problema este dezvoltată în secțiunea următoare.

4.3. Utilizarea caracteristicilor Bode ale sistemului deschis pentru evaluarea și asigurarea calității buclelor de reglare automată

Fig. 139. Forma cea mai simplă de reprezentare a unei bucle de reglare (a) și sistemul deschis aferent buclei de reglare

Într-o primă aproximare o structură de reglare automată poate fi redusă la schema bloc din Fig. 139a, adică la un sistem cu reacție unitară negativă. Potrivit notei anterioare $\tilde{H}(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis (Fig. 139b). Aceste scheme stau la baza dezvoltării principalelor rezultate din domeniul reglajului automat, bunăoară, a celui mai important criteriu de stabilitate, datorat lui Nyquist. În continuare detaliem doar două aspecte:

a) Definirea pe baza caracteristicilor Bode ale sistemului deschis a indicatorilor utilizați pentru evaluarea calității sistemului de reglare.

Presupunem că sistemul deschis are caracteristicile Bode din Fig. 140. Cu ajutorul lor se definesc următoarele mărimi:

- ω_t pulsația de trecere (sau de tăiere) reprezentând valoarea lui ω pentru care c.a-p traversează axa $\omega_{\ell g}$, adică $\left|H(j\omega_t)\right|=1$.
- φ_{rez} rezerva de fază (margine de fază) $\varphi_{rez} = \pi + \varphi_{\widetilde{H}}(j\omega_t)$ (3.62)
- $\left|\widetilde{H}(j\omega_\pi)\right|_{dB} \textit{rezerva de amplitudine} \text{ (margine de amplitudine) reprezentând valoarea modulului } \left|\widetilde{H}(j\omega)\right|_{dB} \text{ pentru } \omega = \omega_\pi \; \textit{sec}^{-1} \text{ , unde } \omega_\pi \; \text{este valoarea lui } \omega \; \text{pentru } \text{care } \phi_{\widetilde{H}} = -\pi \; .$

Aceste mărimi pot fi folosite ca indicatori de calitate ai sistemelor de reglare automată.

De exemplu, în cazul în care în vecinătatea pulsației de trecere $\omega_{\rm r}$ panta caracteristicii $\left|\tilde{\rm H}\right|_{\rm dB}$ este de cca. $-20\,{\rm dB/dec}$, valoarea lui $\omega_{\rm r}$ este o măsură aproximativă pentru durata proceselor tranzitorii ale sistemului închis.

Raționamentul este următorul:

•În cazul sistemelor cu reacție unitară negativă caracteristica amplitudine-pulsație a sistemului închis poate fi aproximată, în primă instanță sub forma:

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = \left|\frac{\tilde{H}(j\omega)}{1 + \tilde{H}(j\omega)}\right|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & dB, \ pentru \ \omega \leq \omega_t \\ \left|\tilde{H}(j\omega)\right|_{dB}, \ pentru \ \omega > \omega_t \end{cases}.$$

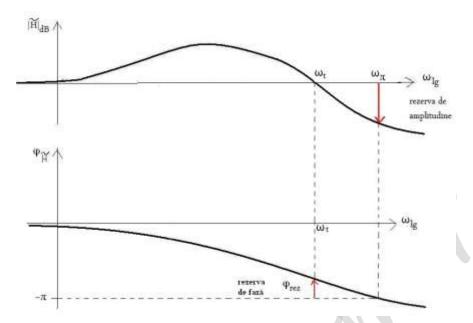


Fig. 140. Indicatori de calitate ai sistemelor de reglare definiți cu ajutorul caracteristicilor Bode ale sistemului deschis

- •Întrucât în vecinătatea pulsației de trecere ω_i panta caracteristicii $\left| \widetilde{H} \right|_{dB}$ este de cca. –20 dB/dec vom putea spune că în primă aproximație sistemul în circuit închis se comportă ca și un ET-PT₁ cu constanta de timp $\frac{1}{\omega_t}$ și amplificare K = 1.
- Răspunsul la semnal treaptă unitară a unui astfel de sistem, în condiții inițiale nule, este $y(t) = K(1 e^{-\omega_t \cdot t})$. (v. relația (2.44))
- •Întrucât $y(\frac{4}{\omega_t}) = K(1-e^4) = 0.98168 \cdot K$, se consideră că, practic, după cca. $\frac{4}{\omega_t}$ secunde răspunsul sistemului se stabilizează (v. Fig.50). Această durată este considerată ca durată a răspunsului tranzitoriu a sistemului (denumită în mod curent "timp de reglare").
- b) Principiul proiectării buclelor de reglare cu ajutorul caracteristicilor Bode ale sistemului deschis.

In domeniul reglajului automat sunt dezvoltate procedee de proiectare a comportării sistemului de reglare (sistemul în circuit închis) bazate pe folosirea caracteristicilor Bode ale sistemului deschis. Esența acestor metode este următoarea:

- Se consideră un sistem de reglare cu structura din Fig. 141. În figură apar doar două blocuri: procesul cu f.d.t. $H_P(s)$ și regulatorul cu f.d.t. $H_R(s)$. F.d.t. $H_P(s)$ și cerințele impuse sistemului de reglare se cunosc.
- Potrivit Fig. 141 avem

$$\left|\widetilde{H}\right|_{dB} = \left|H_{R}\right|_{dB} + \left|H_{P}\right|_{dB} \quad \text{si} \quad \phi_{\widetilde{H}} = \phi_{H_{R}} + \phi_{H_{P}} . \tag{3.63}$$

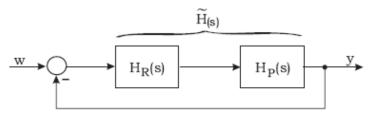


Fig. 141. Structură de reglare cu reacție după mărimea reglată

- Cerințele impuse sistemului de reglare (sistemul închis) se transpun prin metode specifice în cerințe impuse caracteristicilor Bode ale sistemului deschis. Fie $\left|\widetilde{H}^c\right|_{dB}$ și $\phi_{\widetilde{H}^c}$ caracteristicile Bode ale sistemului deschis rezultate prin aplicarea acestor metode. Le denumim *caracteristici dorite*.
- Impunem sistemului deschis real, caracteristicile dorite, adică egalitățile

$$\left|\widetilde{H}\right|_{dB} = \left|\widetilde{H}^{c}\right|_{dB} \quad \text{i } \phi_{\widetilde{H}} = \phi_{\widetilde{H}^{c}}. \tag{3.64}$$

Întrucât caracteristicile Bode ale procesului condus se cunosc, din (3.63) și (3.64) se pot calcula caracteristicile Bode ale regulatorului:

$$\left|H_{R}\right|_{dB} = \left|\tilde{H}^{c}\right|_{dB} - \left|H_{P}\right|_{dB}, \text{ respectiv } \phi_{H_{R}} = \phi_{\tilde{H}^{c}} - \phi_{H_{P}}. \tag{3.65}$$

Metodele de proiectare care folosesc acest principiu, fac uz de numeroase alte considerente de finețe, cum ar fi verificarea condiției de realizabilitate fizică, corecția locală și rejecția perturbațiilor.