

## LUCRAREA DE LABORATOR NR.9

## CARACTERISTICI BODE

## 1. Obiective

- fixarea noțiunilor elementare despre caracteristicile Bode și utilizarea lor pentru analiza sistemelor de reglare automată,
- obținerea caracteristicilor Bode în mediul Simulink,
- aplicarea criteriului rezervei de fază,
- aprofundarea unor aspecte referitoare la acordarea regulatorului PI.

## 2. Aspecte teoretice

- Fie sistemul liniar  $S$  din Fig. 9.1 și  $H(s)$  funcția sa de transfer.

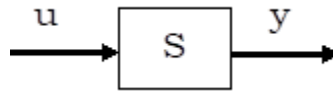


Fig. 9.1

Restricția lui  $H(s)$  la axa imaginară  $j\omega$ , adică particularizarea lui  $H(s)$  pentru cazul când  $s = j\omega$ :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} \quad (1)$$

se numește *funcție răspuns la pulsație* a sistemului  $S$ . Funcțiile

$$f_1(\omega) = |H(j\omega)|, \quad f_2(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (2)$$

sunt denumite *caracteristici de pulsație* ale sistemului  $S$  și au următoarea semnificație:

$$\frac{y_m}{u_m} = f_1(\omega), \quad \varphi = f_2(\omega) \quad (3)$$

Funcțiile:

$$F_1(\omega_{lg}) = 20 \cdot \lg f_1(\omega) \quad (4.1)$$

$$F_2(\omega_{lg}) = f_2(\omega) \quad (4.2)$$

sunt denumite *caracteristici Bode* (diagrame Bode). În funcțiile  $F_1$  și  $F_2$  variabila independentă este logaritmul zecimal al lui  $\omega$ , adică cantitatea  $\lg \omega$ . Ea este notată cu  $\omega_{lg}$ . Pentru orice valoare a lui  $\omega$  funcția  $F_1$  ia valoarea  $20 \cdot \lg f_1$ , denumită *valoare a lui  $f_1$  în decibeli (dB)*, și o asociază valorii  $\lg \omega$ , iar funcția  $F_2$  ia valoarea  $f_2(\omega)$  și o asociază tot valorii  $\lg \omega$ . Valorile lui  $F_2$  se exprimă în radiani sau grade hexagesimale. Pentru simplificarea exprimării, în locul notațiilor  $F_1(\omega_{lg})$  și  $F_2(\omega_{lg})$  se folosesc notațiile  $|H|_{dB}(\omega_{lg})$  și  $\varphi_H(\omega_{lg})$  sau doar  $|H|_{dB}$  și  $\varphi_H$ .

Caracteristica (4.1), denumită *caracteristică amplitudine-pulsație (c.a.-p.)*, este o *caracteristică logaritmică*, având logaritmă atât axa absciselor cât și axa ordonatelor. Caracteristica (4.2), denumită *caracteristică fază-pulsație (c.f.-p.)*, este o *caracteristică semilogaritmică* având logaritmată doar axa absciselor.

- Dacă la intrarea sistemului  $S$  se aplică semnalul sinusoidal

$$u(t) = u_m \cdot \sin \omega t, \quad (5)$$

atunci, în regim permanent armonic, la ieșire se obține semnalul sinusoidal:

$$y(t) = \underbrace{u_m \cdot 10^{\frac{|H(j\omega)|_{dB}}{20}}}_{y_m} \cdot \sin(\omega t + \underbrace{\arg H(j\omega)}_{\varphi}) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (6)$$

- Un rezultat important cu numeroase aplicații în practică este următorul: *caracteristicile Bode ale unei conexiuni serie se obțin prin însumarea, punct cu punct, a caracteristicilor Bode ale subsistemelor (componentor) înseriate.*

Astfel, pentru conexiunea serială din Fig. 9.2, alcătuită din  $p$  sisteme de tip SISO cu f.d.t.  $H_1, \dots, H_p$  avem:

$$\begin{cases} |H|_{dB} = \sum_{i=1}^p |H_i|_{dB} \\ \varphi_H = \sum_{i=1}^p \varphi_{H_i} \end{cases} \quad (7)$$

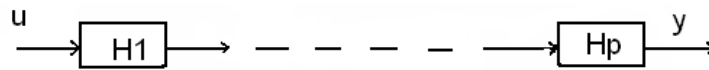


Fig. 9.2.

În particular, dacă avem o buclă de reglare, *caracteristicile Bode ale sistemului deschis* se obțin prin însumarea caracteristicilor Bode ale subsistemelor componente: regulator, element de execuție (actuador), parte condusă, element de măsurare, filtru pentru semnalul măsurat.

### 3. Indicatori de calitate ai sistemelor de reglare automată definiți cu ajutorul caracteristicilor Bode

Pentru caracterizarea comportării sistemelor de reglare automată se folosesc atât *indicatori de calitate definiți pe baza caracteristicilor Bode ale sistemului deschis* cât și *indicatori de calitate definiți pe baza caracteristicilor Bode ale sistemului închis*. Toți se referă la sistemul de reglare, deci la sistemul închis.

- Presupunem că *sistemul deschis* al unei bucle de reglare are caracteristicile Bode din Fig. 9.3.

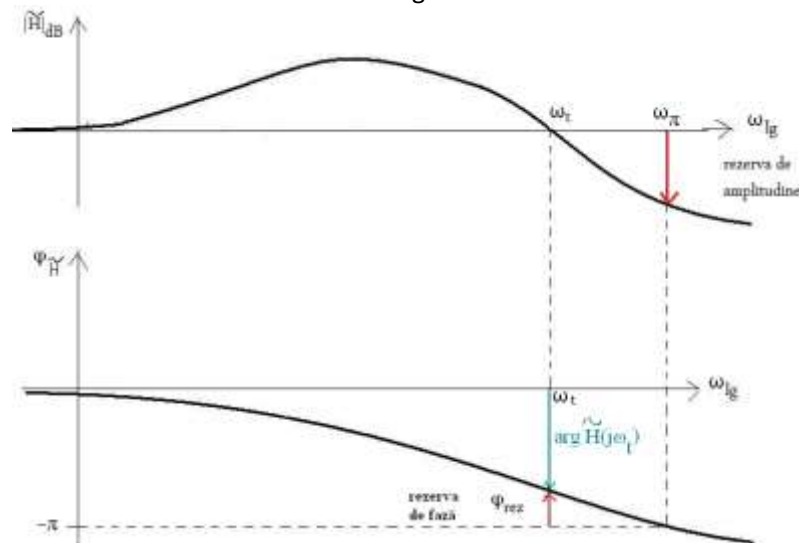


Fig. 9.3.

Fig. 9.3 introduce următorii indicatori de calitate:

$\omega_t$  (pulsăția de trecere sau de tăiere) - este pulsăția pentru care  $|\tilde{H}(j\omega)| = 1$  sau  $|\tilde{H}|_{dB} = 0$ ; valoarea ei ne indică faptul că în primă aproximație bucla de reglare poate fi considerată ca având în raport cu mărimea de referință o comportare de tip ET-PT1 cu o constantă de timp egală cu  $1/\omega_t$ ;

$\varphi_{rez}$  - rezerva de fază,  $\varphi_{rez} = \pi + \arg(\tilde{H}(j\omega_t))$ ;  $\varphi_{rez}$  este o măsură a gradului de stabilitate a sistemului de reglare (sistemul închis) în contextul criteriului rezervei de fază.

- În continuare presupunem că un sistem închis (o bucla de reglare) are c.a.p. din Fig. 9.4.

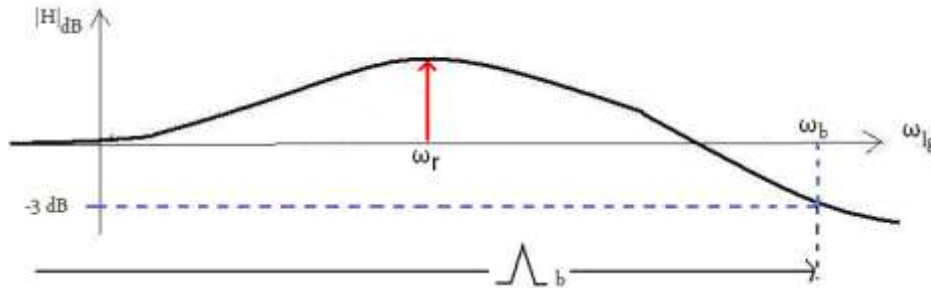


Fig. 9.4.

De regulă, se consideră că atenuările semnificative ale semnalului de ieșire în raport cu semnalul de intrare se produc atunci când  $|H| < \sqrt{2}/2$ . Aceasta înseamnă  $|H|_{dB} < 20 \cdot \lg \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \Leftrightarrow |H|_{dB} < -3 \text{ dB}$ .

În acest context pe c.a.-p se definesc două mărimi: *banda de pulsații* și *pulsăția de bandă*. *Banda de pulsație* este notată cu  $\Delta_b$  și reprezintă domeniul de valori ale lui  $\omega$  pentru care  $|H|_{dB} \geq -3 \text{ dB}$ . *Banda de pulsație* este mărginită superior de valoarea  $\omega_b$ , numită *pulsăție de bandă*. Ea este o măsură a modului în care sistemul de reglare „tratează” semnalul de referință: permite trecerea neatenuată a componentelor spectrale cu  $\omega < \omega_b$ .

Fig. 9.4. evidențiază și posibilitatea producerii unor procese rezonante. Ele se manifestă față de componentele sinusoidale ale semnalului de intrare de pulsății apropiate de  $\omega_r$  (pulsăție de rezonanță a buclei), pe care le amplifică foarte mult.

#### 4. Criteriul de rezervei de fază

Criteriul rezervei de fază este o variantă a criteriului de stabilitate al lui Nyquist. Ambele criterii se referă la structura cu reacție unitară negativă din Fig. 9.5 pentru care

$$H(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{1 + \tilde{H}(s)}.$$

La aplicarea criteriului rezervei de fază se folosesc caracteristicile Bode ale sistemului deschis (v. secțiunea 2).

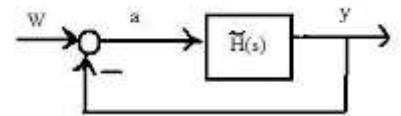


Fig. 9.5.

Criteriul rezervei de fază se referă la cazul când  $\tilde{H}(s)$  este de forma:

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{K}}{s^q} \cdot \frac{1 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_{n-q} s^{n-q}} \cdot e^{-\tau s}, \quad (8)$$

cu  $\tilde{K} > 0$ ,  $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $m < n$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $1 + b_1 s + \dots + b_m s^m$  și  $1 + a_1 s + \dots + a_{n-q} s^{n-q}$  polinoame Hurwitz coprime.

Enunțul criteriului rezervei de fază este următorul:

Un sistem liniar, în circuit închis, cu reacție unitară negativă având funcția de transfer a sistemului deschis de forma (8) este asimptotic stabil dacă și numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\varphi_{\text{rez}} > 0. \quad (9)$$

În practică trebuie să ne asigurăm față de impreciziile de determinare a lui  $\tilde{H}(s)$  și de situații limită. Acest lucru se face prin modificarea membrului drept din relația (9) sub forma:

$$\varphi_{\text{rez}} > \frac{\pi}{9}. \quad (10)$$

### 5. Aplicație: caracteristici Bode asociate unui sistem de reglare<sup>1</sup>

- Se consideră sistemul de reglare din modelul Simulink din Fig. 9.6. El se referă la reglarea unui proces de ordinul II puternic oscilant. Pentru reglare se folosește un regulator proporțional-integrator (PI) cu f.d.t.  $H_R(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I} \cdot s\right)$ , valorile parametrilor fiind  $K_R = 2$  și  $T_I = 3$  secunde. Operația de măsurare și realizare a reacției negative este afectată de un zgomot aleator  $n(t)$ .

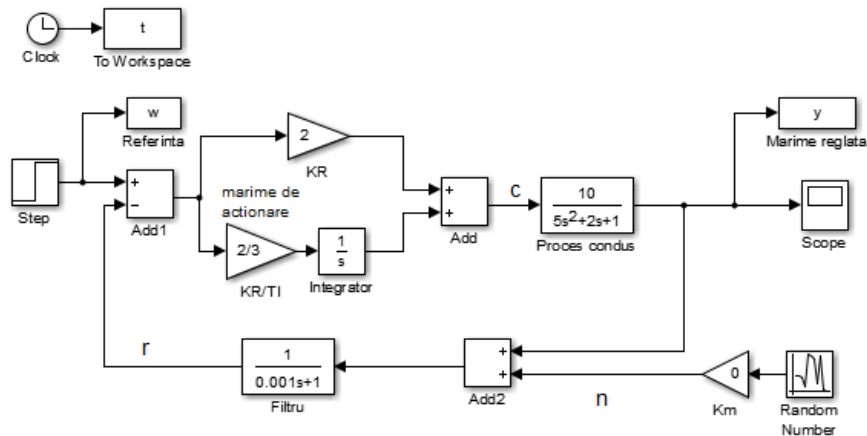


Fig. 9.6.

- În cele ce urmează se analizează sistemul prin prisma caracteristicilor Bode.
- a) Pentru trasarea caracteristicilor Bode ale procesului condus se folosește modelul și comanda din partea stângă a Fig. 9.7. În partea dreaptă se prezintă caracteristicile Bode obținute. Pentru c.f-p. s-a setat opțiunea de afișare a valorilor în radian.

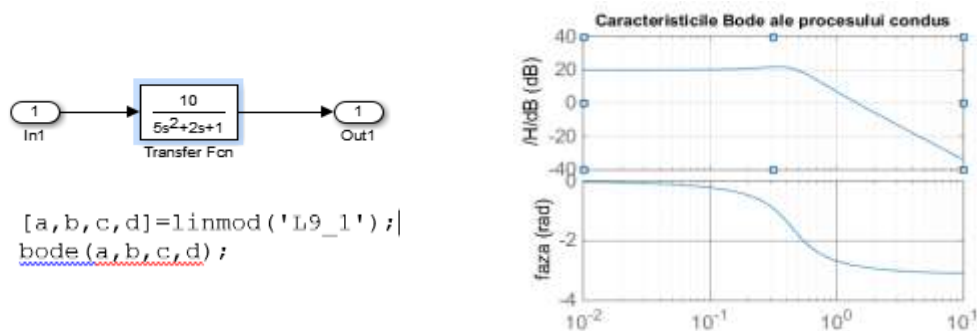


Fig. 9.7.

<sup>1</sup> Sistemul face obiectul exemplului 3 de la pag. 155-156 din curs.

- b) Pentru trasarea caracteristicilor Bode ale regulatorului se utilizează modelul Simulink din Fig. 9.8 și o comandă asemănătoare cu cea din Fig. 9.7. Rezultă caracteristicile Bode din dreapta Fig. 9.8.

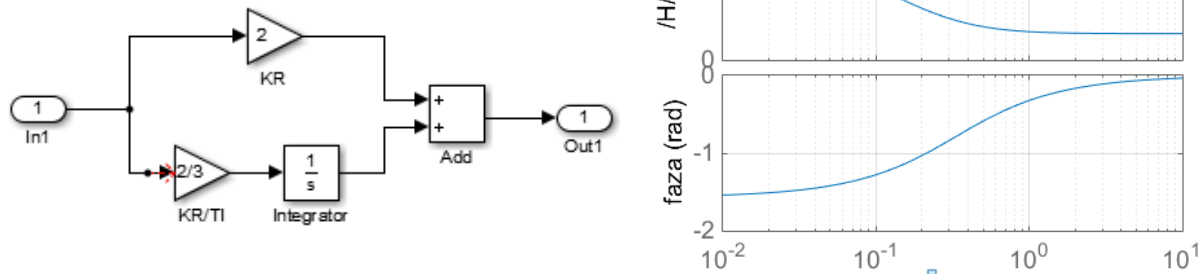


Fig. 9.8.

- c) Caracteristicile Bode ale sistemului deschis și ale sistemului închis se obțin folosind modelele din Fig. 9.9 stânga, respectiv dreapta. Rezultă caracteristicile Bode din Fig. 9.10, respectiv 9.11.

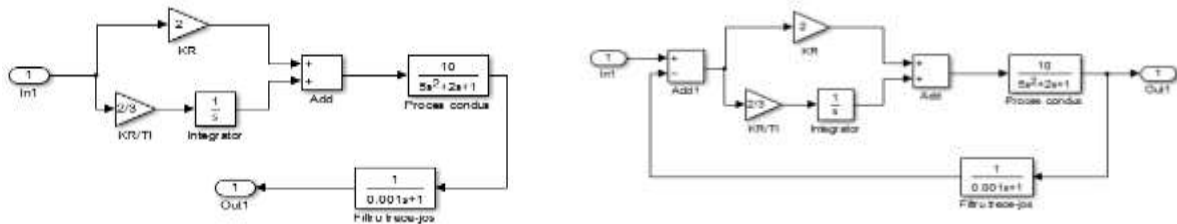


Fig. 9.9.

În perechea de figuri 9.10, în stânga sunt redată caracteristicile Bode pe un interval de 4 decade,  $\omega \in [0.01 \text{ s}^{-1}, 100 \text{ s}^{-1}]$ , iar în dreapta doar pe intervalul, mult mai îngust,  $\omega \in [1 \text{ s}^{-1}, 3 \text{ s}^{-1}]$ . De asemenea, în stânga, unitatea de măsură a fazei din c.f-p este „1 radian”, pe când în dreapta de „1 grad hexagesimal”. Figura din dreapta permite citirea pulsației de trecere,  $\omega_t \approx 2.05 \text{ sec}^{-1}$ , respectiv a rezervei de fază  $\varphi_{\text{rez}} \approx 2.5^\circ \approx 0.0436 \text{ rad}$ .

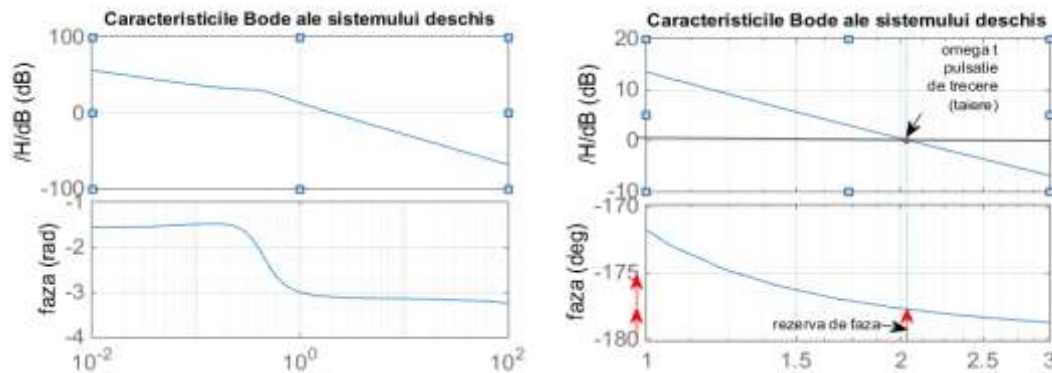


Fig. 9.10.

În Fig. 9.11, în dreapta, sunt evidențiate: pulsația de rezonanță a sistemului închis  $\omega_r \approx \omega_t \approx 2.05 \text{ sec}^{-1}$ , pulsația de bandă  $\omega_b \approx 3.22 \text{ sec}^{-1}$  și banda de pulsații (lărgimea de bandă)  $\Lambda_b = (0, \omega_b]$ .

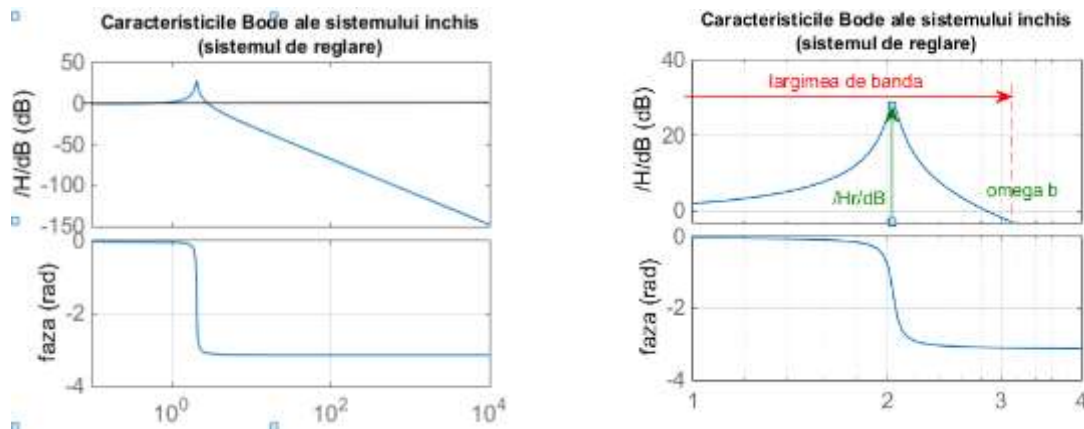


Fig. 9.11.

- Valoarea foarte mică a rezervei de fază, corelată cu criteriul rezervei de fază, conduce la concluzia că sistemul este foarte aproape de limita de stabilitate. Acest lucru este pus în evidență de răspunsul la semnal treaptă din Fig. 9.12. Semnalul de ieșire al sistemului de reglare oscilează exagerat, cu amplitudini foarte mari și amortizare redusă. Această comportare putea fi anticipată prin faptul că valoarea rezervei de fază,  $\varphi_{rez} \approx 2.5^\circ \approx 0.0436 \text{ rad}$ , este foarte mică, condiția (10) nefiind îndeplinită.

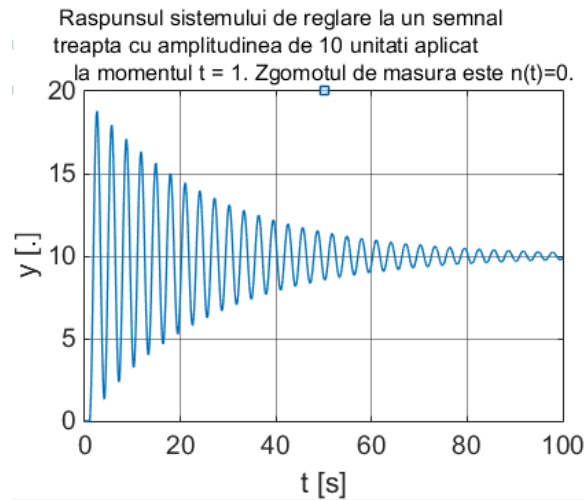


Fig.9.12.

Practic, un astfel de sistem se consideră instabil. Cu siguranță, proiectarea regulatorului conține o greșeală. În principiu corecția se poate realiza modificând rezerva de fază prin intermediul modificării valorilor parametrilor regulatorului sau a schimbării tipului de regulator. Restrângem discuția la prima variantă, în ipoteza că ajustăm doar amplificarea  $K_R$ . Astfel, prin modificarea doar a valorii parametrului  $K_R$  al regulatorului se modifică doar poziția pe verticală a c.a-p a sistemului deschis (translatare pe verticală). C.f-p a sistemului deschis rămâne neschimbată. Ca urmare, se poate modifica rezerva de fază și respecta condiția (10).

**6. Tema de casă Nr. 9<sup>2</sup>**

<i>Nume și prenume</i>	<i>Nr. matricol</i>	<i><math>S_1</math> = suma cifrelor numărului matricol</i>	<i><math>a = (S_1+4) \bmod 7</math></i>	<i>Data completării formularului</i>

**TEMA DE CASĂ NR. 9**

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

- Regulatorul sistemului de reglare din secțiunea 5 are parametrii  $K_R = 2$  și  $T_I = 3$  secunde. După cum se precizează în lucrare, performanțele sistemului de reglare sunt necorespunzătoare. Sistemul este aproape de limita de stabilitate, este puternic oscilant și slab amortizat.

Pentru corectarea situației se reduce amplificarea  $K_R$  cu un ordin de mărime, la valoarea  $K_R = 0.13 - 0.02 \cdot a$ . →

$$K_R = 0.13 - 0.02 \cdot 4 = 0.05.$$

- Să se reprezinte pentru noua acordare a parametrilor regulatorului caracteristicile Bode ale sistemului deschis și să se determine rezerva de fază și pulsația de trecere.
- Să se reprezinte caracteristicile Bode ale sistemului închis și să se determine valorile indicatorilor de calitate asociați acestor caracteristici.
- Să se determine răspunsul sistemului de reglare la semnalul treaptă folosit în lucrare și să se determine valorile indicatorilor de calitate empirici asociați acestui răspuns.
- Să se compare comportarea sistemului de reglare din cazul studiat la punctele i) – iii) cu cea a sistemului din lucrarea de laborator.

i)	Se inserează caracteristicile Bode ale sistemului deschis și valorile lui $\varphi_{rez}$ și $\omega$ .
ii)	Se inserează caracteristicile Bode ale sistemului închis și valorile lui $\omega_b$ , $\Lambda_b$ etc.
iii)	Se inserează răspunsul sistemului și se determină pe baza lui indicatorii de calitate empirici identificabili.
iv)	Se inserează o analiză comparativă sintetică.

- Să se studieze problema R 19 – punctele ii) și iii) din lucrarea „Dragomir T. L. , Teoria sistemelor. Aplicații 2. Editura Politehnica, 2007” și să se reprezinte grafic, pentru situația din problemă, caracteristicile Bode ale sistemului deschis folosind un model Simulink. Să se compare caracteristicile obținute cu cele din Fig. 19.6 (construite simplificat).

i)	Se inserează caracteristicile Bode, alternativă la cele din Fig. 19.6 din bibliografia indicată.
ii)	Se inserează o analiză comparativă sintetică.

<sup>2</sup> Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS\_II-CTI\_TC\_09.docx.