§ 4.4 Accesibilitatea şi controlabilitatea sistemelor

1. Conceptul de controlabilitate

Din punct de vedere aplicativ este important ca un sistem să poată fi adus *pe parcursul unui interval de timp finit*, dintr-o stare iniţială dată, printr-o variaţie în timp adecvată a mărimii de comandă, într-o stare finală dorită. Acestei cerinţe îi corespunde proprietatea structurală denumită *controlabilitate*. În esenţă satisfacerea unei astfel de cerinţe garantează posibilitatea tranzitării sistemului, prin comandă, de la un regim de funcţionare la alt regim de funcţionare.

Definiţii (se consideră un sistem cu orientarea u $\rightarrow$ x (intrare $\rightarrow$ stare)):

1. Spunem că ***o stare iniţială x_0 este controlabilă*** dacă există o funcţie de intrare $u(\cdot)$ astfel încât prin aplicarea ei sistemul ajunge într-un interval de timp finit în starea de repaus $x_f = 0$. (Aceasta înseamnă că în urma aplicării lui $u(\cdot)$ sistemul trece din starea x_0 în starea $x_f = 0$).

2. Dacă orice stare x_0 este controlabilă în sensul definiţiei anterioare, spunem că ***sistemul este controlabil***.

3. Spunem că ***o stare finală x_f este accesibilă*** dacă există o funcţie de intrare $u(\cdot)$ prin aplicarea căreia sistemul este adus într-un interval de timp finit din starea iniţială de repaus $x_0= 0$ în starea finală x_f. (Aceasta înseamnă că în urma aplicării lui $u(\cdot)$ sistemul trece din starea $x_0 = 0$ în starea x_f).

4. Dacă orice stare finală este accesibilă spunem că ***sistemul este accesibil***.

Pentru *sistemele în timp continuu* proprietăţile 1 şi 3, respectiv 2 şi 4, sunt echivalente.

Notă: Plecând de la această echivalenţă, iniţial, s-a răspândit termenul de *controlabilitate*, iar în general se vorbeşte despre *controlabilitatea sistemelor*.

Pentru *sistemele în timp discret* echivalenţa nu este, teoretic, general valabilă. În situaţiile practice ea se verifică însă.

Aprecierea controlabilităţii unui sistem se face prin intermediul ***criteriilor de controlabilitate***. Ele reprezintă algoritmi de calcul care consemnează controlabilitatea în sensul definiţiilor de mai sus prin verificarea îndeplinirii anumitor condiţii (referitoare la rangul unei matrice sau la ordinul unei funcţii de transfer). Dacă răspunsul este afirmativ, sistemul este controlabil. În caz contrar sistemul este necontrolabil.

2. Criteriul de controlabilitate al lui Kálmán

Considerăm sistemul liniar [1]

$$x' = Ax + Bu,\ x \in R^n,\ u \in R^m. \qquad (1)$$

Cu matricele A şi B din (1) definim următoarea matrice de tipul (n, mn):

$$M_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B],^2 \qquad (2)$$

[1] Se observă că operăm cu modele cu variabilă unificată. Ca urmare enunţul criteriului se referă simultan atât la STC cât şi la STD.

numită ***matrice de controlabilitate*** a sistemului (1). Pentru sistemul (1), prin impunerea proprietăţii de controlabilitate se ajunge la următorul enunţ cunoscut sub de numele de ***criteriul de controlabilitate al lui Kalman***:

Sistemul liniar (1) este controlabil dacă şi numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu ordinul sistemului

$$rang\ M_c = n\ . \qquad (3)$$

Pentru sistemele monovariabile la intrare, când m =1, deci M_c este o matrice pătratică de tipul (n,n), echivalent condiţiei (3) avem*:*

$$det\ M_c \neq 0\ . \qquad (3')$$

Exemplul 1: *Să se analizeze controlabilitatea sistemului:*

$$x[t+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x[t] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[t]\ . \qquad (4)$$

Soluţie: *Din (4) rezultă:*

$$n = 2,\ M_c = \left[b \mid Ab \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det M_c = 0,\ \ rang M_c = 1 < 2 = n$$

Deci sistemul nu este controlabil.

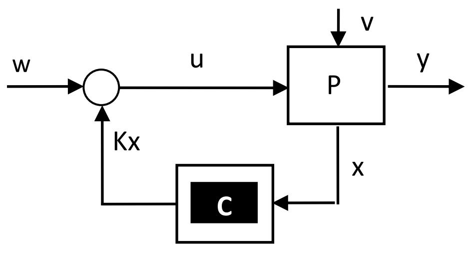
Exemplul 2: *Să se analizeze controlabilitatea sistemului de poziţionare*:

$$\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} \cdot u[t]$$
$$\begin{bmatrix} y_1[t] \\ y_2[t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} . \qquad (5)$$

Soluţie: *Din (5) rezultă:* n=2, $M_c = \begin{bmatrix} 0.5h^2 & 1.5h^2 \\ h & h \end{bmatrix}$, $\det M_c = -h^3 \neq 0$. Deci rang M_c = 2. Deci *sistemul de poziţionare este controlabil*.

Analiza controlabilității, la fel ca și analiza stabilității, este parte a sintezei unui sistem de conducere. În acest context, la proiectarea unui sistem de conducere se utilizată următorul rezultat cunoscut sub denumirea de *teorema alocării* (v. figura alăturată):

„Polii unui sistem închis rezultat prin reacție după starea unui proces controlabil sunt alocabili. ”



Potrivit acestei teoreme, dacă procesul P din figură este de ordinul n şi este controlabil, atunci sistemului în circuit închis i se pot impune n poli, alocabili după dorință prin reacția după stare u = Kx, unde K este matricea (cu amplificările) compensatorului C. Matricea K se obține prin simple calcule algebrice după poziţionarea (alocarea) polilor sistemului închis astfel încât acesta să fie stabil și să aibă o dinamică favorabilă.

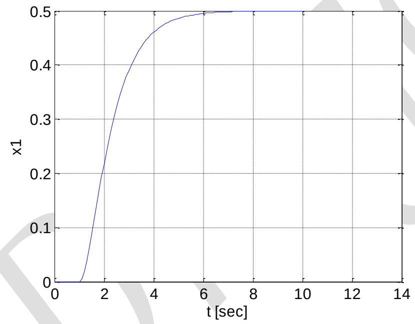
[2] Matricea M_c este o matrice celulară. Simbolurile ⋮ sau │ servesc ca separatoare pentru delimitarea (în scris a) celulelor. Aşadar, lângă prima celulă B, se pune a doua celulă AB, apoi celula A^2B ş.a.m.d.

De exemplu, pentru procesul (5) se consideră K=[k_1 k_2], $u = K \cdot x + w = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w = k_1 x_1 + k_2 x_2 + w$.

Înlocuind pe u în (5) se obțin următoarele ecuații de stare ale sistemului închis: $\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0.5h^2 k_1 & h+0.5h^2 k_2 \\ h \cdot k_1 & 1+h \cdot k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} \cdot w[t]$. Lor le corespunde polinomul caracteristic:

$$\mu(z) = \begin{vmatrix} z-1-0.5h^2 k_1 & -h-0.5h^2 k_2 \\ -h \cdot k_1 & z-1-h \cdot k_2 \end{vmatrix} = z^2 - (2+0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2) \cdot z + 1 - 0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2$$

Presupunem că impunem sistemului închis polii z_1 = 0.8 și z_2 = 0.9, respectiv polinomul caracteristic $\mu(z) = (z-0.8) \cdot (z-0.9) = z^2 - 1.7 \cdot z + 0.72$. Această alocare asigură atât stabilitate cât și un timp de reglare bun. Egalând cele două expresii ale lui $\mu(z)$ obținem sistemul $\begin{cases} 2+0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2 = 1.7 \\ 1-0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2 = 0.72 \end{cases}$, respectiv amplificările $\begin{cases} k_1 = -0.02/h^2 \\ k_2 = -0.29/h \end{cases}$. Presupunem că h = 0.1 sec. Deci k_1=-2, k_2=-2.9. În figură este reprezentat răspunsul sistemului, $x_1(t)$, la semnal treaptă unitate.



Implementarea este realizată potrivit schemei bloc din Fig. 1 de la pag. 115.

3. Alte criterii de controlabilitate

- Criteriul lui Kalman se referă la controlabilitatea ansamblului mărimilor de stare ale sistemului, fără a furniza informaţii despre controlabilitatea fiecărei stări. Se ştie că orice sistem poate fi adus printr-o transformare de stare adecvată la forma de realizare standard diagonală. Prin această transformare, mărimile de stare ale oricărei alte realizări sistemice sunt descompuse sub formă de combinaţii liniare ale mărimilor de stare ale realizării standard diagonale. Funcţiile care descriu variaţiile în raport cu timpul ale variabilelor de stare ale realizării standard diagonale sunt numite *moduri ale sistemului*, iar variabilele de stare cărora le corespund sunt numite *variabile de stare modale*. În acest context controlabilitatea stării unui sistem liniar luând în considerare, separat, fiecare dintre variabilele de stare modale este ***criteriul de controlabilitate al lui Hautus***:

> *Sistemul* $x' = Ax + Bu$, $x \in R^n, u \in R^m$ *este controlabil dacă şi numai dacă orice valoare proprie* λ_i *a matricei A satisface condiţia:*

$$\mathrm{rang}[\lambda_i I - A \,\vdots\, B] = n, \quad \forall \lambda_i \in \sigma_A \quad . \qquad (6)$$

Relaţia (6) cere să se verifice pentru fiecare valoare proprie λ_i a matricei A dacă matricea alcătuită din cele două celule $\lambda_i I - A$ şi B are rangul egal cu ordinul n al sistemului.

Dacă pentru o valoare proprie λ_i rezultă că rang $[\lambda_i I-A] < n$, atunci modul $e^{t\cdot\lambda_i}$ (la STC) sau modul λ_i^t (la STD) nu este influenţabil prin mărimea de intrare $u(\cdot)$ iar sistemul nu este controlabil.

- Pentru sisteme liniare de tip SISO, plecând de la criteriul lui Kalman, se poate ajunge la un criteriu de controlabilitate al mărimii de ieşire [3] (***criteriul lui Gilbert***):

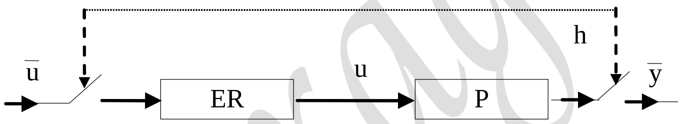
Un sistem de tip SISO, de funcţie de transfer $H(\lambda)$, are ieşirea controlabilă dacă şi numai dacă după efectuarea tuturor simplificărilor în expresia funcţiei de transfer gradul numitorului este egal cu ordinul sistemului.

Practic, în numeroase cazuri această condiţie impune cerinţa ca f.d.t. a sistemului să nu permită simplificări.

4. Controlabilitatea proceselor discretizate (R.I.S.T.)

Reglarea numerică a proceselor în timp continuu se bazează pe conducerea procesului, care este un STC, de către un regulator numeric, care este un STD. În raport cu regulatorul procesul apare prin R.I.S.T (modelul discretizat). Fie $H_P(s)$ f.d.t a procesului P. În acest context se pune problema dacă operaţia de discretizare influenţează sau nu controlabilitatea modelului discretizat al procesului redat prin f.d.t. $H_P(z)$.

Atunci când am prezentat metoda R.I.S.T. am considerat structura de mai jos (v. Fig. 5, pag. 118):



Răspunsul la întrebarea pusă este:

Ansamblul din figură, având pe $\bar{u}$ mărime de intrare şi $\bar{y}$ mărime de ieşire, este controlabil dacă:

i) procesul P în timp continuu este controlabil

ii) oricare ar fi p_i şi p_k poli distincţi ai funcţiei de transfer $H_P(s)$ a lui P, este îndeplinită condiţia

$$e^{p_i\cdot h} \neq e^{p_k\cdot h}.^{4} \qquad (7)$$

Potrivit condiţiei ii) controlabilitatea poate să depindă de valoarea pasului de discretizare h. În adevăr, fie p_i şi p_k doi poli complex conjugaţi $p_{i,k} = \sigma_i \mp j\omega_i$ ai lui P. Atunci $e^{p_i h} - e^{p_k h} = e^{(\sigma_i - j\omega_i)h}\cdot(1-e^{j2\omega_i h})$. Diferenţa este nulă numai dacă $2\omega_i h = 2q\pi,\ q \in N^*$. Deci, dacă $h = q\dfrac{\pi}{\omega_i}$, $q \in N^*$, sistemul în timp discret nu este controlabil. Ca urmare, pentru h este interzisă adoptarea valorilor $\dfrac{\pi}{\omega_i}$ şi a multiplilor acestora. Altfel spus, h se adoptă astfel încât:

$$h \neq q\cdot\frac{\pi}{\omega_i},\ q \in N^*. \qquad (8)$$

---

[3] Controlabilitatea ieşirii se defineşte în aceeşi manieră ca şi controlabilitatea stării.

[4] Polii sistemului sunt totodată şi valori proprii ale polinomului caracteristic al sistemului, adică $p_i = \lambda_i$. În acest context se observă că (7) este în esenţă tot o condiţie modală.

***Exemplu**: Fie sistemul (P)* $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$. *Să se analizeze controlabilitatea sistemului P şi a sistemului discret asociat lui ca r.i.s.t.*

***Soluţie:** Pentru început rezolvăm problema aplicând criteriul lui Kalman sub forma (3). Calculând matricea de controlabilitate pentru sistemul în timp continuu obţinem rang M_C = 2. Deci sistemul P este controlabil, condiţia i) fiind îndeplinită.*

Din MM-ISI al sistemului rezultă că funcţia sa de transfer este $H(s) = \dfrac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$. *Ea are polii $p_{1,2} = \mp j\omega$, ceea ce înseamnă că sistemul este de tip oscilant neamortizat (o pereche de poli pur imaginari de pulsaţie* $\omega\ \mathrm{sec}^{-1}$*). Într-adevăr, modelul lui P este modelul unui oscilator armonic. Aplicând condiţia (7) rezultă* $h \neq q \cdot \dfrac{\pi}{\omega},\ q \in N^*$.

Reluăm rezolvarea problemei [5] *folosind r.i.s.t. asociată sistemului dat.*

R.i.s.t. a sistemului P pentru un pas de discretizare h este:

$$\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} \cos \omega h & \sin \omega h \\ -\sin \omega h & \cos \omega h \end{bmatrix} \cdot x[t] + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega h \\ \sin \omega h \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x[t] \end{cases}.$$

Pentru acest sistem: $M_c = [b\ /Ab] = \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega h & \cos \omega h - \cos 2\omega h \\ \sin \omega h & \sin 2\omega h - \sin \omega h \end{bmatrix}$, *det* $M_c = 2 \sin\omega h\ (1 - \cos \omega h)$. *Aplicând criteriul lui Kalman sub forma (3') deducem că sistemul este controlabil pentru orice valoare a lui h care satisface condiţiile* $\begin{cases} \sin \omega h \neq 0 \\ \cos \omega h \neq 1 \end{cases}$. *În consecinţă, sistemul nu este controlabil pentru valorile lui h care satisfac egalităţile* $\omega h = q\pi,\ q \in N^* \Rightarrow h = q\dfrac{\pi}{\omega},\ q \in N^*$. *Regăsim astfel rezultatul obţinut prin aplicarea criteriului prezentat în această secţiune.*

§ 4.5. Observabilitatea sistemelor

1. Conceptul de observabilitate

Prin definiţie, ieşirea y şi intrarea u, ultima cu rol de mărimi de comandă, ale unui proces sunt măsurabile. În afara lor ne poate interesa şi măsurarea altor mărimi din proces, în particular măsurarea mărimilor de stare *x* cu ajutorul cărora se poate apoi exprima orice altă mărime din proces.

O situaţie tipică este cea în care ne interesează măsurarea mărimilor de stare cu scopul de a le utiliza pentru conducerea procesului prin "reacţie după stare". Dacă mărimile de stare nu pot fi măsurate nemijlocit atunci avem nevoie de un sistem care să le măsoare indirect. Un astfel de sistem poartă numele de *estimator de stare*.

Observaţie: În mod obişnuit, în cazul determinist estimatoarele sunt numite *observatoare*, iar în cazul stohastic *filtre*.

[5] Această parte poate fi considerată ca exerciţiu recapitulativ.

În contextul celor mai sus menţionate apare problema determinării vectorului de stare al unui sistem prin măsurători indirecte efectuate asupra lui y şi u. Răspunsul este dat de aşa-numita *proprietate de observabilitate*. Dacă sistemul este observabil atunci, teoretic, pentru determinarea stării poate fi conceput un algoritm de calcul denumit estimator. În cele ce urmează ne referim numai la problema observabilităţii, problema sintezei unui estimator tratându-se la alte discipline.

Pentru început considerăm sistemul în timp discret de ordinul n:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t] \\ y[t] = Cx[t] \end{cases} . \qquad (1)$$

Presupunem că sistemul se găseşte într-o stare iniţială $x[0]=x_0$.

Definiţia 1: Spunem că ***o stare iniţială x[0] = x_0 a sistemului (1) de ordin n nu este observabilă*** atunci când aplicându-i sistemului aflat în această stare iniţială semnalulul de intrare u[t] = 0, t $\geq$ 0, până la momentul n-1 inclusiv, la ieşire se obţine y[t] = 0 pentru t < n-1.

Conform acestei definiţii starea x_0 nu este observabilă (stare neobservabilă) atunci când, în condiţiile unei intrări nule, urmărind mărimea de ieşire pe un număr de paşi cel puţin egal cu ordinul sistemului se constată că starea iniţială a sistemului x_0 nu influenţează ieşirea („nu se vede" în mărimea de ieşire), aceasta fiind permanent nulă.

Definiţia 2: Dacă $x_0 = 0$ este singura stare neobservabilă spunem că ***sistemul (1) este observabil***.

2. Criteriul de observabilitate al lui Kálmán

Matematic, faptul că o stare x_0 nu este observabilă se interpretează prin imposibilitatea determinării ei pe baza ecuaţiile sistemului din înregistrări ale variabilelor de intrare şi de ieşire. Investigarea din această perspectivă a sistemului (1), precum şi a sistemului în timp continuu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \qquad (2)$$

a condus la rezultatul prezentat în continuare.
Fie matricea

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ea se numeşte *matricea de observabilitate a sistemului* (1). Pentru sistemele (1) şi (2) este valabil următorul enunţ cunoscut sub denumirea de *criteriul de observabilitate al lui Kalman*:

Sistemul

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} , \quad x \in R^n, u \in R^m \qquad (4)$$

este observabil atunci şi numai atunci când

$$rang\ M_O = n. \qquad (5)$$

În cazul când p = 1, sistemul (4) având o singură mărime de ieşire, M_O este o matrice pătratică iar condiţia rang $M_O = n$ poate fi înlocuită prin condiţia

$$\det M_O \neq 0. \qquad (6)$$

Mulţimea stărilor neobservabile ale sistemului (4) este dată de nucleul matricei de observabilitate

$$\mathrm{Ker} M_O = \left\{ x_0 \in R^n \,|\, M_O x_0 = 0 \right\}. \qquad (7)$$

Exemplu: *Să se analizeze observabilitatea sistemului*

$$\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x[t] + bu[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix} x[t] \end{cases}$$

şi să se precizeze dacă stările

$$x_{00} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_{01} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ x_{02} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_{03} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

sunt observabile.

Soluţie:

$$M_O = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M_O = 0 \Rightarrow \mathrm{rang} M_O = 1 < n.$$

Deci sistemul nu este observabil. Determinăm nucleul matricei de observabilitate rezolvând sistemul nedeterminat $M_o x_0 = 0$, *adică sistemul* $\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Soluţia sistemului este dată de ecuaţia* $x_{10} - 0.5 \cdot x_{20} = 0$, *fiind*

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix},\ a \in R. \qquad (8)$$

Deci $\mathrm{Ker}\ M_o = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$. *Mulţimea conţine punctele dreptei* $x_{20} = 2 \cdot x_{10}$ *pe care se găseşte şi starea de repaus (se obţine considerând a = 0).*

Comparând x_0 *din (8) cu fiecare din cele 4 stări precizate în enunţ conchidem:*

$x_{00} \in \mathrm{Ker}\ M_0$ (x_{00} se obţine pentru a = 0.5), deci starea este x_{00} este neobservabilă;

x_{01}, x_{02}, $x_{03} \notin \mathrm{Ker}$, reprezentând stări observabile.

3. Alte criterii de observabilitate

În afara criteriului de observabilitate al lui Kalman se utilizează şi alte criterii de observabilitate care evidenţia-ză, simultan şi alte proprietăţi.

- Unul dintre acestea este ***criteriul de observabilitate al lui Hautus***, conform căruia:

Sistemul $\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$, $x \in R^n, u \in R^m$, *având valorile proprii λ_i, i = 1, ..., n, este observabil atunci şi numai atunci când*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A-\lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \ \lambda_i \in \sigma_A . \qquad (9)$$

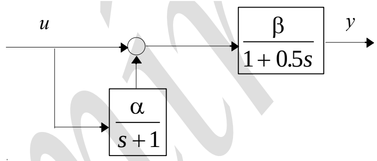
Fiecărei valori proprii λ_i pentru care condiţia de rang (9) nu este îndeplinită îi corespunde în sistem un mod neobservabil.

- În altă ordine de idei, pentru sistemele de tip SISO aspectul funcţiei de transfer poate să fie un indiciu şi pentru o eventuală pierdere a proprietăţii de observabilitate. Astfel:

*Dacă în urma aducerii funcţiei de transfer a unui sistem de ordin n la o formă ireductibilă gradul numitorului este egal cu n, atunci sistemul este observabil (**criteriul de observabilitate al lui Gilbert**).*

Temă:

Să se analizeze controlabilitatea şi observabilitatea sistemului din figură în funcţie de parametrii α şi $\beta > 0$.



4. Observabilitatea proceselor discretizate (r.i.s.t.)

La fel ca în cazul controlabilităţii, discretizarea unui sistem în timp continuu poate să afecteze şi observabilitatea. În acest context este valabilă următoarea teoremă:

Sistemul în timp discret obţinut ca r.i.s.t. dintr-un sistem în timp continuu cu f.d.t. H(s) este observabil dacă :

i) sistemul în timp continuu este observabil ;

ii) oricare ar fi p_i şi p_k poli distincţi ai funcţiei de transfer H(s) este îndeplinită condiţia $e^{p_i \cdot h} \neq e^{p_k \cdot h}$.

Ca aplicaţie considerăm şi de această dată cazul oscilatorului armonic studiat la sfârşitul paragrafului anterior din punctul de vedere al controlabilităţii. Analizăm observabilitatea lui prin două metode.

i) Matricea de observabilitate a sistemului discretizat fiind $M_O = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega h & \sin\omega h \end{bmatrix}$, *rezultă că* $\det M_O = \sin\omega h$. *Sistemul nu este observabil pentru valorile h > 0 pentru care*

sin ωh = 0, deci $h\omega = q\pi \ , \ q \in N^* \Rightarrow h = q\dfrac{\pi}{\omega} \ , \ q \in N^*$.

ii) Sistemul în timp continuu este observabil fiind îndeplinită condiţia i) din ultimul enunţ. Întrucât condiţia ii), $e^{p_i \cdot h} \neq e^{p_k \cdot h}$, *conduce la acelaşi rezultat ca şi în cazul controlabilităţii (v. sfârşitul paragrafului referitor la controlabilitate) rezultă*

$$h\omega = q\pi \ , \ q \in N^* \Rightarrow h = q\frac{\pi}{\omega} \ , \ q \in N^* .$$

După cum era de aşteptat, am regăsit rezultatul de la punctul i).