Capitolul III: Sisteme liniare

§.3.1. Matrice şi funcţii de transfer

Pentru caracterizarea semnalelor în domeniul operaţional se folosesc transformata Laplace (pentru semnalele în timp continuu) şi transformata **z** (pentru semnalele în timp discret). Ele furnizează modele matematice ale semnalelor în domeniul operațional.

La rândul lor, modelele matematice ale sistemelor liniare din domeniul timp pot fi înlocuite, atât pentru sistemele în timp continuu, cât şi pentru sistemele în timp discret cu modele în domeniul imaginilor, folosind aceleași transformate. Vorbim despre *modele matematice ale sistemelor în domeniul operațional*.

Ţinând seamă de asemănarea unor calcule cu modelele matematice în domeniul operaţional, pentru uniformizarea abordărilor se folosește *variabila operaţională unificată* λ:

$$\lambda = \begin{cases} \text{s, pentru cazul STC} \\ \text{z, pentru cazul STD} \end{cases}.$$

Datorită liniarității operatorilor folosiți în sistemele liniare, atunci când semnalele sunt cauzale sau unilaterale dar cu condiții inițiale nule, MM-II ale sistemelor liniare în domeniul operaţional sunt de forma ($u(\lambda)$ –imaginea semnalului de intrare, $y(\lambda)$ - imaginea semnalului de ieşire):

$$y(\lambda) = H(\lambda)\cdot u(\lambda). \qquad (1)$$

Factorul $\mathrm{H}(\lambda)$ se numeşte *matricea de transfer a sistemului*. Matricea de transfer este o funcţie de λ și depinde numai de sistem. Ea este independentă de semnalele de intrare şi de ieşire. Dependenţele de forma (1) poartă numele de *modele matematice operaţionale intrare-ieșire*. În aceste modele:

- ✓ u este un vector de tipul (m, 1);
- ✓ y este un vector de tipul (p, 1).
- ✓ H este o matrice de tipul (p, m) care poate fi scrisă sub forma:

$$H(\lambda) = [H_{ij}(\lambda)],\ i = 1;p,\ \ j = 1;m. \qquad (2)$$

De pildă, matricea de transfer a unui sistem cu două intrări şi două ieşiri are forma:

$$\mathrm{H}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathrm{H}_{11}(\lambda) & \mathrm{H}_{12}(\lambda) \\ \mathrm{H}_{21}(\lambda) & \mathrm{H}_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

iar modelul operațional (1) corespunzător este:

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(\lambda) &= \mathrm{H}_{11}(\lambda)\cdot \mathrm{u}_1(\lambda) + \mathrm{H}_{12}(\lambda)\cdot \mathrm{u}_2(\lambda) \\ \mathrm{y}_2(\lambda) &= \mathrm{H}_{21}(\lambda)\cdot \mathrm{u}_1(\lambda) + \mathrm{H}_{22}(\lambda)\cdot \mathrm{u}_2(\lambda) \end{aligned}.$$

Funcţiile $H_{ij}(\lambda)$ care apar în (2) se numesc *funcţii de transfer ale sistemului* (*f.d.t.*). Funcţia de transfer $H_{ij}(\lambda)$ caracterizează transferul de informaţie pe canalul $u_j(\lambda) \rightarrow y_i(\lambda)$.

Dacă sistemul este de tip SISO, matricea de transfer se reduce la o singură funcţie de transfer.

T. L. Dragomir

Numai pentru cazul SISO putem scrie că:[1)]

$$H(\lambda)=\frac{y(\lambda)}{u(\lambda)}. \qquad (3)$$

Această formulă conduce la următoarea interpretare a funcţiei de transfer: ***funcţia de transfer este imaginea operaţională a răspunsului la impuls al sistemului***. În adevăr:

- ✓ dacă sistemul este în timp continuu şi $u(t)=\delta(t)$, atunci, întrucât $\delta(t)\circ\!-\!\bullet 1$, avem $u(s)=1$, rezulând $H(s) = y(s)$;
- ✓ dacă sistemul este în timp discret şi $u[t]=\delta[t]$, atunci, întrucât $\delta[t]\circ\!-\!\bullet 1$, avem $u(z) = 1$, rezultând $H(z) = y(z)$.

Aşadar, funcția de transfer coincide cu imaginea răspunsului la impuls al sistemului. Notația folosită pentru răspunsul la impuls unitar fiind y_δ putem scrie:

$$y_\delta(\lambda)=H(\lambda). \quad (4)$$

$\mathrm{H}(\lambda)$ fiind un modelul matematic în domeniul operațional al sistemului, din (4) rezultă că răspunsul la impuls $y_\delta(\cdot)$ este, de asemenea, un model matematic (în domeniul timp) al sistemului.

Funcţia de transfer se foloseşte în mai multe scopuri. Unul dintre ele este ***calculul răspunsului unui sistem liniar la un semnal de intrare dat***. ***Așa cum s-a precizat în definiția matricei de transfer, semnalul de intrare este fie cauzal, fie unilateral dar cu condiții inițiale nule***. Calculul răspunsului se poate efectua pe două căi. Prima cale folosește tabelele de transformare și operații în domeniul imaginilor. A doua cale folosește formule de calcul în domeniul timp.

- ➢ Pentru sistemele în timp continuu prima cale parcurge următorii trei paşii:
  1) Se dă u(t) şi se calculează imaginea semnalului de intrare folosind tabele de transformare: $u(t)\circ\!-\!\bullet u(s)$;
  2) Se calculează imaginea semnalului de ieşire: $y(s)=H(s)\cdot u(s)$;
  3) Se calculează originalul semnalului de ieşire folosind tabelele de transformare, $y(s)\bullet\!-\!\circ\, y(t)$.

A doua cale de calcul cunoaște mai multe variante (v. „Notă” la pagina următoare). Una dintre ele folosește formula (5) dedusă din formulele (1) și (4) și teorema produsului de convoluție.

$$y(t)=\int_0^t y_\delta(\tau)\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau\ . \qquad (5)$$

Demonstrație: Întrucât $y_\delta(s)=H(s)$, din (3) rezultă că $y(s)=y_\delta(s)\cdot u(s)$. Potrivit formulei (3) de la pag. 21, rezultă

$$y(s)=y_\delta(s)\cdot u(s)\bullet\!-\!\circ\ y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} y_\delta(t-\tau)\cdot u(\tau)\cdot d\tau\ .$$

Întrucât $y_\delta(\tau)=0$ pentru $\tau<0$, iar *u(t)* este un semnal causal (sau semnal unilateral), intervalul de integrare se restrânge la segmentul [0, t]. Obținem astfel formula (5).

[1)] Precizarea face referire la faptul că în (3) împărţirea este posibilă întrucât este vorba despre două funcţii scalare, pe când în (1) nu este posibilă întrucât un vector nu poate fi împărţit la alt vector.

Exemplu. *În continuarea exemplului 1 de la pag. 3, calculăm răspunsul cuadripolului R-C la semnalul treaptă $u_i(t)= 10$ V, $t > 0$, pentru cazul numeric $R=2$ kΩ și $C = 10$ μF.*

Pentru a putea calcula răspunsul cerut este necesar să calculăm în prealabil f.d.t. a sistemului și răspunsul acestuia la impuls unitar (impulsul Dirac). Astfel, pentru cazul numeric considerat MM al cuadripolului devine $0.02\cdot\dot{u}_e(t)+u_e(t)=u_i(t)$. *Trecem egalitatea în domeniul operational:*

$$0.02\cdot\dot{u}_e(t)+u_e(t)=u_i(t) \circ\!-\!\bullet\, 0.02\cdot s\cdot u_e(s)+u_e(s)=u_i(s),$$

și exprimăm mărimea de ieșire în funcție de mărimea de intrare

$$u_e(s)=\frac{1}{0.02\cdot s+1}\cdot u_i(s). \quad (6)$$

Interpretând aceast rezultat prin prisma formulei (1) rezultă că sistemul are f.d.t.

$$H(s)=\frac{1}{0.02\cdot s+1}, \qquad (7)$$

respectiv răspunsul la impuls Dirac:

$$y_\delta(s)=\frac{1}{0.02\cdot s+1} \bullet\!-\!\circ\, y_\delta(t)=50\cdot e^{-50\cdot t}. \quad (8)$$

- *Pentru a calcula răspunsul sistemului la semnalul $u_i(t)$, urmând prima cale, calculăm imaginea operațională a semnalului de intrare:* $u_i(t) = 10 \circ\!-\!\bullet\, u_i(s)=\frac{10}{s}$. *Cu formula (1) obținem*

$$u_e(s)=H(s)\cdot u_i(s)=\frac{1}{0.02\cdot s+1}\cdot\frac{10}{s}=\frac{10}{s\cdot(0.02\cdot s+1)},$$

iar folosind tabele de transformare rezultă (valorile sunt exprimate în volți):

$$u_e(t)=10\cdot(1-e^{-50\cdot t}). \quad (9)$$

- *Pentru obținerea răspunsului pe cea de a doua cale folosim formula (5):*

$$u_e(t)=\int_0^t y_\delta(\tau)\cdot u_i(t-\tau)\cdot d\tau=\int_0^t(50\cdot e^{-50\tau}\cdot 10)\cdot d\tau=10\cdot(1-e^{-50\cdot t}) \quad (10)$$

După cum era de așteptat rezultatele (9) și (10) coincid.

> Notă: Răspunsul unui sistem la un semnal de intrare dat poate fi calculat în mod direct, folosind MM în domeniul timp (fără a folosi f.d.t.). În acest scop se înlocuieşte semnalul de intrare în MM şi se rezolvă în raport cu semnalul de ieșire ecuația diferențială sau ecuația cu diferențe rezultată. Pentru exemplul de mai sus aceasta însemană rezolvarea ecuației diferențiale $0.02\cdot\dot{u}_e(t)+u_e(t)=10$ în raport cu $u_e(t)$. Ca rezultat se obține tot semnalul (9).

- Pentru sistemele în timp discret cele două căi de calcul a răspunsului cauzal al unui sistem liniar cu f.d..t. *H*(*z*) având condiții inițiale nule au un parcurs asemănător celui din cazul sistemelor în timp continuu. Cu ajutorul teoremei sumei de convoluție (v. pag. 23) în locul formulei (5) se obține formula:

$$y[t]=\sum_0^t y_\delta[\tau]\cdot u[t-\tau]. \quad (11)$$

Matricea şi funcţiile de transfer se folosesc pe larg atât în probleme de analiză a sistemelor (studiul proprietăţilor sistemelor, detalierea structurii) cât şi în probleme de sinteză a structurilor de conducere (stabilirea de algoritmi de conducere), de exemplu pentru sinteza regulatoarelor PID.

T.L. Dragomir

§ 3.2. Caracterizarea STC

1. Modele matematice intrare-ieşire (MM-II)

A) Forma canonică

Forma canonică a MM-II al unui sistem liniar de ordinul *n* în timp continuu este:

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t)\,,\quad a_n\neq 0\,. \quad (1)$$

Coeficienții $a_i,\ i=\overline{0,n}$ şi $b_j,\ j=\overline{0,m}$ se consideră constanți.

- ✓ Dacă m < n, atunci sistemul este ***strict cauzal*** şi ***fizic realizabil***.
- ✓ Dacă m = n, atunci sistemul este *la limita de cauzalitate* şi *la limita de realizabilitate fizică*.
- ✓ Dacă m > n, atunci sistemul *nu este cauzal* şi *nu este fizic realizabil*.

Dacă pentru modelul (1) semnalele de intrare sunt cauzale, atunci şi semnalele de ieşire sunt cauzale, astfel că folosirea modelului nu necesită condiţii iniţiale. Pentru a-l putea folosi pentru semnale de intrare unilaterale (cauzale) avem însă nevoie de condiţii iniţiale (v. secțiunea C)).

În domeniul imaginilor, sistemului (1) i se asociază o funcţie de transfer (f.d.t.). Ea se calculează în ipoteza că semnalele sunt cauzale folosind proprietăţile de liniaritate şi teorema derivării din cazul transformatei Laplace:

$$(1)\circ\!-\!\bullet\ a_n s^n y(s)+a_{n-1}s^{n-1}y(s)+\cdots+a_1 s y(s)+a_0 y(s)=b_m s^m u(s)+b_{m-1}s^{m-1}u(s)+\cdots+b_1 s u(s)+b_0 u(s)$$

$$\rightarrow\ y(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\cdot u(s) \qquad (2)$$

Prin identificarea relaţiei (2) cu relația de definiţie a funcţiei de transfer deducem că f.d.t. a sistemului (1) este:

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\,. \qquad (3)$$

F.d.t. (3) este o expresie raţională în raport cu variabila *s*. Din acest motiv, sistemul (1) mai este denumit şi *element de transfer raţional*. Dacă gradul numitorului e mai mare decât gradul numărătorului (n > m), adică *funcţia raţională este strict proprie*, sistemul reprezentat de H(s) este fizic realizabil, respectiv strict cauzal. Funcția polinomială generată de numitorul lui H(s) sau de membrul drept al MM-II (1)

$$\mu(s)=a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0 \qquad (4)$$

este considerată drept *polinom caracteristic al sistemului* (1).

În completare, generalizăm exemplul din secțiunea anterioară ilustrând calculul și utilizarea funcţiei de transfer pentru obținerea răspunsului la semnal treaptă a unui sistem de ordinul I (element de transfer PT_1).

Exemplul 1: *Fie sistemul (5), de ordinul I, aflat în condiții inițiale nule, pentru care calculăm răspunsul y(t) la semnalul treaptă unitară (6):*

$$T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t) \qquad (5) \qquad , \qquad u(t)=\sigma(t)\,. \qquad (6)$$

Succesiv, avem:

T. L. Dragomir

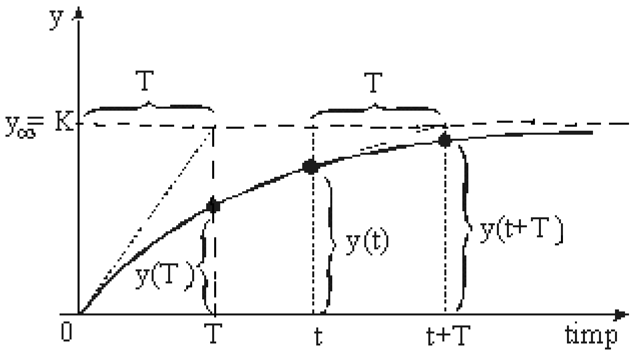
$$(5) \quad \Rightarrow \quad H(s)=\frac{K}{Ts+1} \qquad \text{și} \qquad (6) \quad \Rightarrow \quad u(s)=\frac{1}{s} \;\Rightarrow\; y(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}.$$

Pentru a calcula y(t), apelăm la tabelele de transformare din care facem uz de formula: $e^{-at} \circ\!-\!\bullet \dfrac{1}{s+a}$ *(pentru a = 0 și a = 1/T). Calculul se derulează astfel:*

$$y(s)=\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=K\cdot\frac{1}{(Ts+1)s}=K\cdot\frac{\frac{1}{T}}{(s+\frac{1}{T})s}=K\cdot\frac{s+\frac{1}{T}-s}{(s+\frac{1}{T})s}=K\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(s)\bullet\!-\!\circ\, y(t)=K\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}}) \qquad (7)$$

Graficul răspunsului y(t) are aspectul din figură:



El conduce la două interpretări ale constantei de timp T:

> *i) T este subtangenta la curba y(t); ii) T are o valoare egală cu intervalul de timp pe care mărimea y variază cu* $1-e^{-1} \cong 0.63$ *din cantitatea pe care o are de parcurs până la atingerea nivelului final K.*

Următorul exemplu evidențiază o posibilitate de calcul a f.d.t. a unui sistem liniar atunci când MM-II în domeniul timp este o egalitate integro-diferențială. În acest scop considerăm algoritmii de reglare PID, fără filtrare și cu filtrare, dați de MM-II (1) și (2) din § 2.3. Pentru simplitate, adoptăm condiția inițială *u(0)* = 0.

Exemplul 2: *Pentru a calcula cu formula (3) f.d.t. aferente algoritmilor PID (aici ε(t) este semnalul de intrare iar u(t) este semnalul de ieșire):*

$$u(t)=K\cdot\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t \varepsilon(\tau)\cdot d\tau+T_D\cdot\dot{\varepsilon}(t)\right] \qquad \text{și} \qquad \alpha\cdot T_D\cdot\dot{u}(t)+u(t)=K\cdot\left[\varepsilon(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t \varepsilon(\tau)\cdot d\tau+T_D\cdot\dot{\varepsilon}(t)\right],$$

derivăm în prealabil cele două egalități în raport cu timpul. După ordonarea termenilor rezultă:

$$\dot{u}(t)=K\cdot\left[T_D\cdot\ddot{\varepsilon}(t)+\dot{\varepsilon}(t)+\frac{1}{T_I}\cdot\varepsilon(t)\right] \qquad \text{și} \qquad \alpha\cdot T_D\cdot\ddot{u}(t)+\dot{u}(t)=K\cdot\left[T_D\cdot\ddot{\varepsilon}(t)+\dot{\varepsilon}(t)+\frac{1}{T_I}\cdot\varepsilon(t)\right].$$

Ambele modele au forma (1) și ca urmare le este aplicabilă formula (3). În consecință, cele două regulatoare au f.d.t.:

$$H(s)=\frac{K}{s}\cdot\left[T_D\cdot s^2+s+\frac{1}{T_I}\cdot\right]=K\cdot\left[T_D\cdot s+1+\frac{1}{T_I\cdot s}\right], \text{ respectiv } H(s)=\frac{K}{\alpha\cdot T_D\cdot s+1}\cdot\left[T_D\cdot s+1+\frac{1}{T_I\cdot s}\right]. \ (8)$$

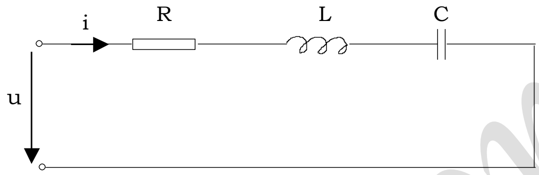
B) Impedanţa operaţională

Pentru probleme de modelare şi analiză a sistemelor cu circuite electrice liniare cu parametri concentraţi se foloseşte noţiunea de *impedanţă operaţională*. Ea se se notează cu *Z(s)* și are, prin definiție, expresia

$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)}, \qquad (9)$$

unde u(s) și i(s) reprezintă transformatele Laplace ale tensiunii de la bornele circuitului, respectiv curentului la borne. Odată ce am calculat impedanța operațională a unui circuit, în locul egalităților integro-diferențiale se operează cu egalități algebrice de forma $u(s) = Z(s) \cdot i(s)$. Cu impedanţa operaţională *Z(s)* se lucrează la fel ca şi cu impedanţa complexă $Z(j\omega)$, fiind utilizabile ambele teoreme ale lui Kirchhoff[2].

De regulă operăm cu formula impedanței operaționale corespunzătoare circuitului serie R-L-C din figură.



Dependenţa dintre *u(t)* şi *i(t)* are aspectul:

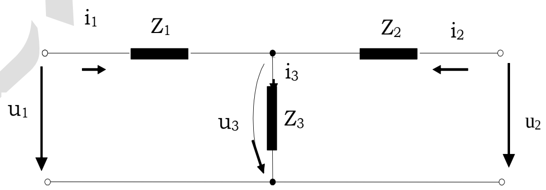
$$u(t) = Ri(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (10)$$

Prin derivare în raport cu timpul rezultă: $L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{du(t)}{dt}$. În domeniul operațional și în condiții inițiale nule acesta egalitate devine $L \cdot s^2 \cdot i(s) + R \cdot s \cdot i(s) + C^{-1} \cdot i(s) = s \cdot u(s)$. Înlocuind pe u(s) în (9) obținem *formula de calcul a impedanței operaționale pentru circuitul serie R-L-C*:

$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = R + Ls + \frac{1}{Cs} \ . \ (11)$$

Absenţa unui element de circuit - R, L sau C - conduce la absenţa termenului corespunzător din (11).

Exemplul 1 [3] *: Să se calculeze matricea de transfer asociată cuadripolului în T din figură considerat ca sistem cu orientarea* $\{u_1, u_2\} \rightarrow \{i_1, i_2\}$. Z_1, Z_2 *şi* Z_3 *reprezintă impedanţe operaţionale de forma (10), date.*



Soluţie*: Cu notaţiile din figură avem:*

$$\begin{cases} u_1(s) = Z_1(s) \cdot i_1(s) + u_3(s) \\ u_2(s) = Z_2(s) \cdot i_2(s) + u_3(s) \\ i_1(s) + i_2(s) = i_3(s) \\ u_3(s) = Z_3(s) \cdot i_3(s) \end{cases}.$$

---

[2] Se poate considera că impedanţa complexă $Z(j\omega)$, folosită pentru circuitele electrice liniare în regim sinusoidal, se obţine din impedanţa operaţională *Z(s)* prin particularizarea $Z(j\omega) = Z(s)|_{s=j\omega}$.

[3] Exemplul ilustrează modul în care se pot obţine MM operaţionale ale circuitelor electrice folosind impedanţa operaţională.

T. L. Dragomir

Matricea de transfer se obţine considerând aceste 4 relaţii ca un sistem de ecuaţii algebrice având pe i_1, i_2, u_3 şi i_3 ca necunoscute. În condiţiile problemei de faţă are sens să îl rezolvăm numai în raport cu i_1 şi i_2:

$$\begin{cases} Z_1(s)\cdot i_1(s) \qquad\qquad + u_3(s) = u_1(s) \\ \qquad Z_2(s)\cdot i_2(s) + u_3(s) = u_2(s) \\ i_1(s) + \quad i_2(s) \quad - \quad i_3(s) = 0 \\ \qquad\qquad + u_3(s) - Z_3(s)\cdot i_3(s) = 0 \end{cases},$$

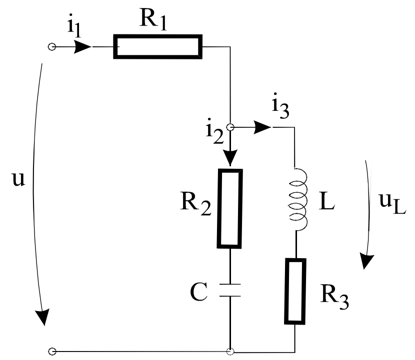
Obţinem $i_1 = \dfrac{\Delta_{i_1}}{\Delta} = \dfrac{(Z_2+Z_3)u_1 - Z_3u_2}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$ *şi* $i_2 = \dfrac{\Delta_{i_2}}{\Delta} = \dfrac{-Z_3u_1+(Z_1+Z_3)u_2}{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}$, *respectiv*

$$\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1+\dfrac{Z_2(s)}{Z_3(s)}}{Z_1(s)+Z_2(s)+\dfrac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_3(s)}} & -\dfrac{1}{Z_1(s)+Z_2(s)+\dfrac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_3(s)}} \\ -\dfrac{1}{Z_1(s)+Z_2(s)+\dfrac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_3(s)}} & \dfrac{1+\dfrac{Z_1(s)}{Z_3(s)}}{Z_1(s)+Z_2(s)+\dfrac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_3(s)}} \end{bmatrix}}_{H(s)} \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Matricea subliniată cu acoladă este matricea de transfer căutată. Funcţiile de transfer de pe diagonala secundară se numesc ***admitanţe mutuale****, iar cele de pe diagonala principală* ***admitanţe de intrare****.*

- Utilizarea impedanţei operaţionale permite obţinerea facilă a MM-II în domeniul timp ale *circuitelor electrice liniare* având ca mărimi de intrare şi de ieşire tensiuni şi/sau curenţi. Procedeul este imediat:
  - Se stabileşte în domeniul operaţional dependenţa dintre intrările şi ieşirile circuitului cu ajutorul impedanţelor operaţionale ale laturilor circuitului;
  - Se rescrie această dependenţă sub forma unei egalităţi între funcţii polinomiale de variabilă s înmulţite cu imaginile intrărilor sau ieşirilor şi se transpune rezultatul în domeniul timp.

Exemplul 2: *Să se stabilească MM-II în domeniul timp al circuitului din figură considerat ca sistem cu orientarea* $u \rightarrow u_L$.



Soluţie: *Notăm:* $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = R_2 + \dfrac{1}{sC}$, $Z_3(s) = R_3 + sL$. *Observând operaţiile de divizare succesivă de tensiune, se obţine:*

$$u_L(s) = sL_3 \cdot \frac{Z_2(s)}{Z_2(s)+Z_3(s)} \cdot \frac{1}{Z_1(s)+\dfrac{Z_2(s)\cdot Z_3(s)}{Z_2(s)+Z_3(s)}} \cdot u(s) = \frac{sLZ_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s)+Z_2(s)Z_3(s)+Z_3(s)Z_1(s)} \cdot u(s),$$

iar apoi

T. L. Dragomir

$$u_L(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{CLs^2 + \dfrac{L}{R_2}s}{CLs^2 + \dfrac{(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)C+L}{R_1+R_2}s + \dfrac{R_1+R_3}{R_1+R_2}} \cdot u(s) \; .$$

Rezultatul se poate rescrie sub forma

$$C_2Ls^2u_L(s) + \frac{(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)C+L}{R_1+R_2}su_L(s) + \frac{R_1+R_3}{R_1+R_2}u_L(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot[CLs^2u(s) + \frac{L}{R_2}su(s)] \; .$$

Transpunând această egalitate în domeniul timp se obține MM-II cerut:

$$CL\ddot{u}_L(t) + \frac{(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)C+L}{R_1+R_2}\dot{u}_L(t) + \frac{R_1+R_3}{R_1+R_2}u_L(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot[CL\ddot{u}(t) + \frac{L}{R_2}\dot{u}(t)] \qquad (12)$$

Modelul obţinut indică un sistem aflat la limita de realizabilitate fizică. Explicaţia constă în faptul că schema electrică este de fapt un model conceptual idealizat al unui circuit realizat, de exemplu, cu trei rezistoare, un condensator şi o bobină. Schema electrică nu redă în mod complet sistemul real care nu are parametri concentraţi ci parametri distribuiţi şi care prezintă cuplaje parazite între elementele de circuit.

C) Dependenţa intrare-ieşire pentru un sistem SISO pentru condiţii iniţiale nenule

În practică, pentru a rezolva situaţii concrete, operăm cu semnale unilaterale. Operarea cu semnale unilaterale ne obligă la considerarea condiţiilor iniţiale. Modul de lucru este ilustrat în continuare.

Fie sistemul

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \, . \qquad (13)$$

În condiţii iniţiale nenule se obţine (toate condiţiile se consideră fie la momentul t = 0_, fie la momentul t = 0₊):

$$(13) \;\circ\!-\!\bullet\; \begin{cases} a_n[s^n y(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)] + \\ + a_{n-1}[s^{n-1}y(s) - s^{n-2}y(0) - \ldots - sy^{(n-3)}(0) - y^{(n-2)}(0)] + \\ \ldots + a_1[sy(s) - y(0)] + a_0 y(s) = \\ = b_n[s^n u(s) - s^{n-1}u(0) - \ldots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0)] + \\ + b_{n-1}[s^{n-1}u(s) - s^{n-2}u(0) - \ldots - su^{(n-3)}(0) - u^{(n-2)}(0)] + \\ \ldots + b_1[su(s) - u(0)] + b_0 u(s) \end{cases} \qquad (14)$$

Considerând această egalitate ca ecuaţie în raport cu *y(s)* rezultă:

$$\begin{aligned} y(s) = {} & \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\cdot u(s) + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_n s^{n-k-1} + \ldots + a_{k+2}s + a_{k+1}}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\cdot y^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_n s^{n-k-1} + \ldots + b_{k+2}s + b_{k+1}}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\cdot u^{(k)}(0) \end{aligned} \qquad (15)$$

Rezultatul este tot un MM operaţional. El permite atât calculul mărimii de ieşire la un semnal de intrare dat în condiţii iniţiale oarecari cât şi stabilirea expresiei funcţiei de transfer. F.d.t. se obţine considerând în (15) condiţii iniţiale nule, caz în care egalitatea (14) devine $y(s) = \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\cdot u(s)$. Regăsim astfel expresia cunoscută a f.d.t.

$$H(s) = \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \; .$$

Cu ajutorul polinomului caracteristic (4), $\mu(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ şi al funcţiilor ajutătoare

T.L.Dragomir

$$H_{y_k}(s)=\frac{a_n s^{n-k-1}+\ldots+a_{k+2}s+a_{k+1}}{\mu(s)},\; H_{u_k}(s)=\frac{b_n s^{n-k-1}+\ldots+b_{k+2}s+b_{k+1}}{\mu(s)},$$

se obţine formula:

$$y(s)=H(s)u(s)+\sum_{k=0}^{n-1}[H_{y_k}(s)y^{(k)}(0)-H_{u_k}(s)u^{(k)}(0)]. \qquad (16)$$

Adeseori folosim rezultatul evidenţiind componenta de răspuns liber $y_\ell(t)$ şi pe cea de răspuns forţat $y_f(t)$:

$$\begin{aligned}&y(s)=y_f(s)+y_\ell(s)\\ &y_f(s)=H(s)\cdot u(s),\; y_\ell(s)=\sum_{k=0}^{n-1}[H_{y_k}(s)y^{(k)}(0)-H_{u_k}(s)u^{(k)}(0)]\end{aligned}. \qquad (16')$$

D) Evidențierea polilor și zerourilor în funcții de transfer raționale

Aşa cum s-a precizat în secţiunea 1, un sistem de tip SISO cu f.d.t. $H(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}$ se numeşte ***element de transfer raţional***. Valorile p_k ale lui s pentru care $\lim\limits_{s\to p_k}|H(s)|=\infty$ sunt numite ***poli*** ai lui *H(s)* sau ai sistemului, iar valorile z_k ale lui s pentru care $\lim\limits_{s\to z_k}H(s)=0$ sunt numite ***zerouri*** ale lui H(s) sau ale sistemului.

Polii şi zerourile finite pot fi numere reale sau complexe. Valorile lor caracterizează modul în care se realizează transferul semnalelor prin sistem. Prezenţa polilor denotă *caracter inerţial*, redat prin *constantele de timp de întârziere* (sau temporizare) date de opusele inverselor valorilor polilor:

$$T_i=-\frac{1}{p_i}, \qquad (17.1)$$

iar prezenţa zerourilor denotă *caracter anticipativ*, redat prin constantele de timp de anticipare

$$T_j'=-\frac{1}{z_j}. \qquad (17.2)$$

În situaţia când toţi polii şi toate zerourile funcţiei de transfer sunt reale şi strict negative expresia funcţiei de transfer se poate rescrie cu ajutorul constantelor de timp sub forma

$$H(s)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m}(T_j's+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}. \qquad (18)$$

Dacă constantele de timp de întârziere sunt mari, răspunsul sistemului este lent. Dacă constantele de timp anticipative sunt mari, sistemul răspunde „nervos”, fiind foarte sensibil în raport cu variaţiile intrării.

Notă: Poli şi zerouri în punctul de la infinit

Presupunem că H(s) este ireductibilă. Rescriind f.d.t. astfel încât să fie evidenţiate rădăcinile numărătorului şi numitorului, adică sub forma $H(s)=\frac{b_m}{a_n}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$, rezultă că H(s) are m zerouri finite z_j, j = $\overline{1,m}$ şi n poli finiţi p_i, i = $\overline{1,n}$.

Dacă m < n, *funcţia de transfer fiind strict proprie*, sistemul mai are un zero de ordin de multiplicitate n-m în punctul de la infinit, $|s|\to\infty$, întrucât $\lim\limits_{|s|\to\infty}H(s)=0$, iar dacă m > n, *funcţia de transfer fiind improprie*, sistemul mai are în punctul de la infinit un pol de ordin de multiplicitate m-n întrucât $\lim\limits_{|s|\to\infty}H(s)=\infty$. Existenţa zeroului de la infinit (f.d.t. strict proprie) denotă un caracter predominant inerţial, de întârziere, pe când existenţa polului de la infinit (f.d.t. improprie) un caracter predominant anticipativ, de accelerare. Punctul de la infinit nu apare ca pol sau zero în cazul funcţiilor de transfer proprii (m = n).

T. L. Dragomir