

§ 3.3 Caracterizarea sistemelor în timp discret

1. Sisteme liniare în timp discret, invariante în timp redactate prin MM-ISI

A) Abordarea în domeniul timp

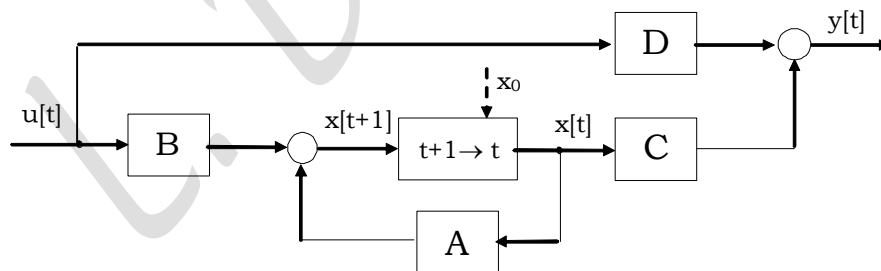
Un STD se prezintă sub forma de ecuații recursive¹ care leagă eșantioane ale secvenței de intrare $\{u[t]\}_{t \in T}$ de eșantioane ale secvenței de ieșire $\{y[t]\}_{t \in T}$. Pentru MM-ISI ale STD se utilizează forma cu operator de avans²:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & \text{cu } x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases} \quad (1)$$

În aceste ecuații:

- ✓ $u \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^p$, $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\}$, cu $t_0 \in \mathbf{N}$ – *moment inițial* și $t_f \in \mathbf{N}$ – *moment final*.
- ✓ Vectorul x_0 conține *condițiile inițiale* care sunt de tipul „condiții la momentul inițial”.
- ✓ Matricele A, B, C și D au aceleași denumiri ca și în cazul timp continuu: A- *matricea sistemului*, B - *matricea de comandă (intrare)*, C - *matricea de ieșire (observare)*, D - *matricea de interconexiune*. Ele sunt matrice constante cu coeficienți reali.
- ✓ \mathbf{T} este mulțimea timp sau *orizontul de timp al sistemului*. În particular, putem avea $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, \infty\}$. Ori de câte ori este posibil considerăm $t \in \mathbf{T} = \mathbf{N}$, respectiv $t_0 = 0$.

Relațiile (1) cuprind de fapt un șir de sisteme de egalități, șir care se obține dând lui t, consecutiv, valorile din mulțimea \mathbf{T} . MM (1) îi asociem schema bloc din figură. Blocul simbolizat prin $t+1 \rightarrow t$ corespunde operației de decalare (întârziere) în timp a secvenței $\{x[t+1]\}_{t \in T}$ cu un pas h la stânga. Prin această operație $x[t+1]$, calculat în pasul curent, devine $x[t]$ pentru pasul de calcul următor.



În situația în care $D \neq 0$ sistemul este la limita de strictă cauzalitate respectiv de realizabilitate fizică.

Când $D = 0$ sistemul este strict cauzal respectiv fizic realizabil:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & \text{cu } x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] \end{cases} \quad (2)$$

Sistemele (1) și (2) sunt de tip MIMO. În cazul SISO ele devin:

¹ Ecuațiile recursive mai sunt numite și ecuații recurente sau ecuații cu diferențe.

² Aceasta înseamnă că argumentele care apar pentru variabilele modelului sunt t și t+1.

$$\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[t] + \mathbf{b}u[t], & \text{cu } \mathbf{x}[t_0] = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}[t] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[t] + \mathbf{d}u[t] \end{cases}, \quad (1')$$

respectiv

$$\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[t] + \mathbf{b}u[t], & \text{cu } \mathbf{x}[t_0] = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}[t] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[t] \end{cases}. \quad (2')$$

MM în timp discret pot fi obținute plecând de la procese fizice atunci când fenomenele sunt descrise prin valori asociate unor momente discrete, sau plecând de la procese fizice descrise prin MM în timp continuu monitorizate numai la momente discrete. Pentru primul caz reamintim două din exemplele deja întâlnite:

- **Problema de stoc** (sistem de ordinul 2, s – stoc, v – valoare stoc):

$$\begin{bmatrix} s[t+1] \\ v[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c[t] \\ a[t] \end{bmatrix}; \quad y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix}$$

- **Problema populației de crustacee** (sistem de ordinul 5, x_1, \dots, x_5 – numărul de crustacee aflate în primul an de viață, ..., în al cincilea an de viață):

$$\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \\ x_3[t+1] \\ x_4[t+1] \\ x_5[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \\ x_4[0] \\ x_5[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000 \\ 1104 \\ 115 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[t] \\ y_2[t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 & 1-s_4 & 1-s_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix}$$

Al doilea caz face obiectul § 3.3.

Problema de calcul a răspunsului sistemului (1) la un semnal de intrare dat se enunță astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se dau: } \begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[t] + \mathbf{B}u[t], & \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \text{ fixat,} \\ \mathbf{y}[t] = \mathbf{C}\mathbf{x}[t] + \mathbf{D}u[t] \\ u[t], t \in \mathbf{N} \end{cases} \\ \text{Se cere: } y[t], t \in \mathbf{N}, \text{ eventual } \text{și } \mathbf{x}[t], t \in \mathbf{N}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Calculul se poate efectua direct, în domeniul timp discret, sau indirect, prin intermediul domeniului operațional folosind teorema sumei de convoluție. În primul caz soluționarea decurge astfel:

- Se rezolvă sistemul de ecuații recursive de ordinul I reprezentat de ecuațiile de stare considerând $t_0 = 0$ și condițiile inițiale \mathbf{x}_0 , respectiv secvența de intrare $\{u[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$. Rezolvarea ecuațiilor de stare se soldează cu determinarea secvenței de stare $\{x[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$.
- Se înlocuiește rezultatul de la punctul i) în ecuațiile de ieșire.

Ecuațiile de stare din (3) au soluția ³

³ Verificați acest rezultat prin inducție matematică.

$$x[t] = \begin{cases} x_0, & t = 0 \\ A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u[\tau], & t \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad (4.1)$$

Înlocuind rezultatul în ecuația de ieșire se obține:

$$y[t] = \begin{cases} Cx_0 + \underbrace{Du[0]}_{\substack{y_f[t], t \in 0 \\ \text{răspunsul} \\ \text{forțat}}}, & t = 0 \\ \underbrace{CA^t x_0}_{\substack{y_f[t], t \in \mathbf{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{liber}}} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} B u[\tau] + Du[t]}_{\substack{y_f[t], t \in \mathbf{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{forțat}}}, & t \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad (4.2)$$

Pentru *regimul liber*, când $u[t] = 0$, $t \in \mathbf{N}$, rezultă:

$$x_\ell[t] = A^t x_0, \quad t \in \mathbf{N}; \quad y_\ell[t] = c^T A^t x_0, \quad t \in \mathbf{N}. \quad (5)$$

În *regim forțat*, când $x_0 = 0$, obținem:

$$x_f[t] = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u[\tau], & t \in \mathbf{N}^* \end{cases}, \quad y_f[t] = \begin{cases} Du[0], & t = 0 \\ \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} B u[\tau] + Du[t], & t \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad (6)$$

Și în acest caz este valabilă *proprietatea de superpoziție*, egalitățile (4) rezultând prin însumarea membru cu membru a egalităților (5) și (6).

Matricea

$$\Phi[t, \tau] = A^{t-\tau} \quad (7)$$

se numește *matricea de tranziție* sau *matricea fundamentală a sistemului*. În cazul $\tau = 0$ convenim să notăm matricea $\Phi[t, 0]$ cu $\Phi[t]$:

$$\Phi[t] = A^t \quad (8)$$

Denumirea de matrice de tranziție este sugerată de prima ecuație (5), $\Phi[t]$ caracterizând tranziția sistemului liber din stare inițială x_0 în stare curentă $x_\ell[t]$.

- A doua relație (6) permite stabilirea imediată a formulei de calcul a *funcției răspuns la impuls unitar*. Astfel, pentru sistemele de tip SISO când $d=0$, considerând în relația (6) secvența de intrare $\{\delta[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$ se obține ⁴:

$$y_\delta[t] = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ c^T A^{t-1} b, & t \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad (9)$$

Folosind acest rezultat și formula (11) de la pag. 77, bazată pe suma de convoluție, rezultă următoarea formulă echivalentă formulei (6):

⁴ În literatură răspunsul la impuls unitar se notează adeseori cu $\{h[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$. (6') devinind: $y_f[t] = \sum_{\tau=0}^t h[t-\tau] \cdot u[\tau], t \in \mathbf{N}$.

$$y_f[t] = \sum_{\tau=0}^{\infty} y_{\delta}[t-\tau] \cdot u[\tau], \quad t \in \mathbf{N}. \quad (6')$$

Relația evidențiază faptul că răspunsul forțat se poate calcula ca sumă de convoluție între „răspunsul la impuls unitar” $\{y_{\delta}[t]\}_{t \in \mathbf{N}} = \{h[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$ și semnalul de intrare unilateral $\{u[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$. Rezultatul este similar celui din paragraful anterior.

B. Abordarea în domeniul imaginilor (operațional)

Pentru a calcula matricele și funcțiile de transfer ale STD (1) sunt importante următoarele trei proprietăți ale transformatei z : i) proprietatea de liniaritate, ii) teoremele de translație ale șirului original; iii) teorema sumei de convoluție a funcțiilor originale.

Stabilim în continuare *formula de calcul a matricei de transfer pentru sistemul în timp discret de tip MIMO redat prin MM-ISI*:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & x[0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t], & t \in \mathbf{T} = \mathbf{N} \end{cases} \quad (10)$$

Făcând uz de primele două proprietăți rezultă:

$$(10) \Rightarrow \begin{cases} z[x(z) - x[0]] = Ax(z) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases} \quad (11)$$

Din prima ecuație obținem

$$x(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \quad (12.1)$$

iar prin înlocuirea rezultatului în a doua ecuație avem

$$y(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + [C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot u(z). \quad (12.2)$$

Matricea de transfer se determină din (12.2) în condiții inițiale nule, deci din egalitatea

$$y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D] \cdot u(z). \quad (13)$$

Deducem că:

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (14)$$

Pentru sistemele de tip SISO se fac în (12) și (14) substituțiile $b \rightarrow B, c^T \rightarrow C, d \rightarrow D$; rezultă

$$x(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + (zI - A)^{-1} \cdot b \cdot u(z) \quad (12.1')$$

$$y(z) = c^T \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + [c^T \cdot (zI - A)^{-1} \cdot b + d] \cdot u(z) \quad (12.2')$$

și funcția de transfer:

$$H(z) = c^T (zI - A)^{-1} b + d. \quad (15)$$

Pentru sistemele fizic realizabile avem $D = 0$ sau $d = 0$. Deci

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (14')$$

sau

$$H(z) = c^T (zI - A)^{-1} b. \quad (15')$$

Termeni în $x[0]$ din formulele (12.1) și (12.2) corespund răspunsurilor libere, iar termenii care conțin pe $u(z)$ corespund răspunsurilor forțate. Scriem că:

$$x(z) = x_f(z) + x_\ell(z), \quad y(z) = y_f(z) + y_\ell(z), \quad (16)$$

în care

$$\begin{aligned} x_f(z) &= (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z), & x_\ell(z) &= (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0], \\ y_f(z) &= H(z) \cdot u(z), & y_\ell(z) &= C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] \end{aligned} \quad (16')$$

///

MM-ISI cu variabile unificate

Plecând de la aspectele asemănătoare ale MM-ISI ale STC și STD, a apărut ideea ca pentru unele probleme de teoria sistemelor cazul sistemelor în timp continuu și cazul sistemelor în timp discret să fie surprinse, formal, printr-un singur tip de MM-ISI folosind așa-numitele variabile unificate în domeniul timp:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, t \in \mathbf{T}, \quad (17)$$

în care:

- dacă mulțimea \mathbf{T} este continuă, atunci u , x și y sunt funcțiile în timp continuu $u(t)$, $x(t)$ și $y(t)$ iar $x' = \dot{x}(t)$,
- dacă mulțimea \mathbf{T} este discretă, atunci u , x și y sunt funcții în timp discret cu valorile $u[t]$, $x[t]$ și $y[t]$ la momentul curent, iar $x' = x[t+1]$.

De asemenea, se observă că atunci când se pleacă de la MM-ISI formulele obținute în domeniul operațional pentru STD se aseamănă cu cele din cazul STC. În primele apare variabila operațională z , în celelalte variabila operațională s . Pentru a evidenția acest lucru și pentru a sistematiza și mai mult modul de exprimare se folosește variabila unificată în domeniul operațional

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru cazul STC} \\ z, & \text{pentru cazul STD} \end{cases}.$$

Astfel, sistemului (17), cu polinomul caracteristic $\mu(\lambda) = |\lambda I - A|$, îi corespunde matricea de transfer

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B + D. \quad (18)$$

2. Sisteme liniare în timp discret invariante în timp redade prin MM-II

A) Abordarea în domeniul timp

Prezentarea se referă numai la sisteme de tip SISO. MM-II ale STD liniare și invariante în timp au formă de ecuații recurente de ordinul n cu coeficienți constanți. Ecuațiile leagă în mod direct $n+1$ valori consecutive ale secvenței (semnalului) de intrare $\{u[t]\}_{t \in \mathbf{T}}$ de $n+1$ valori consecutive ale secvenței (semnalului) de ieșire $\{y[t]\}_{t \in \mathbf{T}}$. Ordinul de recurență, n , este și ordinul sistemului.

Ca formă canonică se consideră MM-II la limita de realizabilitate fizică (la limita de cauzalitate) redat de ecuația recursivă (se folosește forma cu operatori de întârziere):

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n], \end{aligned} \quad (19)$$

cu $y[t_0-1], y[t_0-2], \dots, y[t_0-n]$ și $u[t_0-1], u[t_0-2], \dots, u[t_0-n]$ fixate.

Pentru sistemul (19) mulțimea timp este $\mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\} \subseteq \mathbf{Z}$ (sau \mathbf{N}) cu t_0 –moment inițial și t_f –moment final, iar coeficientul $a_n \neq 0$. În particular putem avea $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, \infty\}$. Vom observa că se consideră fixate condițiile inițiale $y[t_0-1], y[t_0-2], \dots, y[t_0-n]$ și $u[t_0-1], u[t_0-2], \dots, u[t_0-n]$. Aceasta înseamnă că de fapt se operează cu eșantioane din mulțimea

$$\mathbf{T}^* = \{t_0-n, t_0-n+1, \dots, t_0-1\} \cup \mathbf{T} = \{t_0-n, t_0-n+1, \dots, t_0-1, t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\} \subseteq \mathbf{Z} \text{ (sau } \mathbf{N}),$$

mulțime care conține și momente anterioare momentului inițial. Ca moment inițial t_0 convenim să considerăm primul moment de la care începând se poate opera cu MM (19), adică primul moment pentru care se poate folosi (19) pentru a calcula pe $y[t]$. Ori de câte ori este posibil adoptăm $\mathbf{T} = \mathbf{N}$.

Este esențial să realizăm faptul că relația (19) sintetizează un sistem redat printr-un șir de egalități care se obține pentru valorile succesive ale t ($t \in \mathbf{T}$):

$$\begin{aligned} a_n y[t_0] + a_{n-1} y[t_0-1] + \dots + a_1 y[t_0-n+1] + a_0 y[t_0-n] = \\ = b_n u[t_0] + b_{n-1} u[t_0-1] + \dots + b_1 u[t_0-n+1] + b_0 u[t_0-n], \end{aligned} \quad (20.0)$$

$$\begin{aligned} a_n y[t_0+1] + a_{n-1} y[t_0] + \dots + a_1 y[t_0-n+2] + a_0 y[t_0-n+1] = \\ = b_n u[t_0+1] + b_{n-1} u[t_0] + \dots + b_1 u[t_0-n+2] + b_0 u[t_0-n+1], \end{aligned} \quad (20.1)$$

...

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n], \end{aligned} \quad (20.t-t_0)$$

...

$$\begin{aligned} a_n y[t_f] + a_{n-1} y[t_f-1] + \dots + a_1 y[t_f-n+1] + a_0 y[t_f-n] = \\ = b_n u[t_f] + b_{n-1} u[t_f-1] + \dots + b_1 u[t_f-n+1] + b_0 u[t_f-n]. \end{aligned} \quad (20.t_f-t_0)$$

Se observă că sistemul de ecuații (20) permite calcularea succesivă prin operații algebrice elementare a valorilor $y[t_0], y[t_0+1], \dots, y[t_f]$ ale secvenței semnalului de ieșire $\{y[t]\}$, $t \in \{t_0, \dots, t_f\}$.

Problema de calcul a răspunsului sistemului (19), pentru $t_0 = 0$ și $t_f \rightarrow \infty$, este de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se dau : } \left\{ \begin{array}{l} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n], \\ y[-1], y[-2], \dots, y[-n] \text{ și } u[-1], u[-2], \dots, u[-n], \\ u[t], t \in \mathbf{N}. \end{array} \right. \\ \text{Se cere : } y[t], t \in \mathbf{N}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Soluționarea ecuației recurente din (21) se bazează pe utilizarea polinomului

$$\mu(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (22)$$

considerat *polinom caracteristic al sistemului*. Problema poate fi soluționată atât în domeniul timp cât și în domeniul operațional. Metodele de rezolvare în domeniul timp discret nu fac obiectul acestei lucrări.

B) Abordarea în domeniul imaginilor (operațional)

În continuare stabilim *formula de calcul a funcției de transfer pentru sistemul monovariabil la intrare și la ieșire* (19).

În condiții inițiale nule, din (19) se obține

$$y(z) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-(n-1)} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} u(z). \quad (23)$$

Comparând acest rezultat cu formula de definire a f.d.t., pentru expresia acesteia rezultă:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_1z^{-(n-1)} + b_0z^{-n}}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-(n-1)} + a_0z^{-n}}. \quad (24.1)$$

Sub această formă f.d.t. $\underline{H}(z)$ este un raport de 2 funcții polinomiale de variabilă z^{-1} . Pentru multe calcule este mai avantajoasă forma care folosește funcțiile polinomiale în z asociate reciprocilor polinoamelor din (24.1):

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}. \quad (24.2)$$

Având f.d.t. a unui sistem, ieșirea sistemului pentru un semnal de intrare unilateral în condiții inițiale nule poate fi calculată cu relația $y(z) = H(z) u(z)$. Pentru trecerea din domeniul operațional în domeniul timp se folosesc tabelele de transformare.

Funcțiile de transfer (24) pot fi rescrise sub forme care evidențiază polii și zerourile STD:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} = H(z).$$

C) Implementarea legilor de reglare numerică

Matricele și funcțiile de transfer în z sunt folosite în mod frecvent pentru sinteza **legilor de reglare numerică** numite și **reglatoare numerice** sau **algoritmi de reglare numerică**. Odată determinată funcția de transfer a unui regulator numeric este necesară explicitarea algoritmului în domeniul timp, de exemplu sub forma (19). Pe baza explicitării algoritmului sub forma (19) se scrie apoi modulul de program care implementează calculul mărimii de comandă.

Într-o aplicație concretă acest modul de program este o parte componentă a agregatului de conducere. Agregatul de conducere depinde în detaliu de caracteristicile suportului pe care se implementează și cuprinde pe lângă calculele aferente calculului mărimii de comandă numeroase alte operații cerute de implementarea funcției de reglare (achiziția datelor măsurate, filtrarea lor, calculul erorii de reglare (sau mărimii de acționare a) și transmiterea comenzii calculate, mărimea c).

Operația de explicitare a algoritmului de reglare în domeniul timp, destinat calculării pas cu pas (la intervale de timp de valoare h) a mărimii de comandă c în funcție de mărimile de intrare în regulator (w – mărimea de referință și y – mărimea de reacție, sau de eroarea de reglare $a = w - y$) constă în principiu în asocierea unui sistem de forma (19) unei f.d.t. de forma (24.1) și în explicitarea din acest MM-II a valorii ieșirii (mărimea c) la momentul curent t , adică a lui $c[t]$.



Exemplu: Pentru regulatorul numeric din figură, în ipoteza că are f.d.t. $H_{RG}(z) = \frac{0.8z - 0.4}{z^2 - 1.2z + 0.2}$, se obține

ecuația recursivă $c[t] - 1.2 \cdot c[t - 1] + 0.2 \cdot c[t - 2] = 0.8 \cdot a[t - 1] - 0.4 \cdot a[t - 2]$, respectiv algoritmul de reglare numerică pentru care trebuie elaborat programul de implementare:

$$c[t] = 0.8 \cdot a[t - 1] - 0.4 \cdot a[t - 2] + 1.2 \cdot c[t - 1] - 0.2c \cdot [t - 2].$$

D) Sisteme cu răspuns la impuls în timp finit⁵

Se numește *sistem cu răspuns la impuls în timp finit* sau sistem de tip FIR (Finite Impulse Response) un sistem liniar în timp discret al cărui răspuns la impuls $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{Z}}$ are un număr finit de valori nenule.

Restrângem discuția la sistemele cauzale, caracterizate de faptul că $h[t] = 0, t < 0$. Fie, în acest caz, $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{h[0], h[1], \dots, h[t_f], 0, 0, \dots\}$ răspunsul la impuls al sistemului de tip FIR. Transformata z a acestuia,

$$h(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f}, \quad (25)$$

este convergentă în întreg planul „ z ” fiindcă suma are un număr finit de termeni nenuli. Întrucât funcția răspuns la impuls $h(z)$ este totodată și f.d.t. $H(z)$ a sistemului, rezultă că f.d.t. a sistemului FIR este:

$$H(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f} = \frac{h[0] \cdot z^{t_f} + h[1] \cdot z^{t_f-1} + \dots + h[t_f]}{z^{t_f}}. \quad (26)$$

Se observă că sistemul FIR este de ordinul t_f .

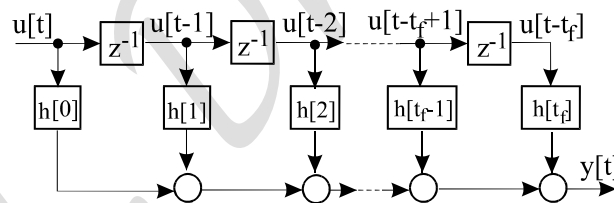
Cu $H(z)$ astfel determinat se poate calcula imaginea operațională a semnalului de ieșire al sistemului pentru orice semnal de intrare $\{u[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ dat prin transformata $u(z)$, și pentru condiții inițiale nule, cu formula:

$$y(z) = H(z) \cdot u(z) = h[0] \cdot u(z) + h[1] \cdot z^{-1} \cdot u(z) + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f} \cdot u(z). \quad (27)$$

Trecând egalitatea (27) în domeniul timp obținem următoarea formulă de calcul pentru răspunsul sistemului:

$$y[t] = h[0] \cdot u[t] + h[1] \cdot u[t-1] + \dots + h[t_f] \cdot u[t-t_f], \quad t \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Modelului (27) i se poate asocia schema bloc de mai jos numită *schema bloc a unui sistem de tip FIR*. Blocurile notate cu z^{-1} sunt blocuri de întârziere cu un pas de discretizare (blocuri de întârziere unitară, identice cu blocul notat cu $t+1 \rightarrow t$ din schema bloc de la începutul § 2.3). Observăm că schema bloc a sistemului de tip fir reprezintă o conexiune paralel. *Trăsătura caracteristică a acestei structuri este lipsa conexiunii cu reacție.*



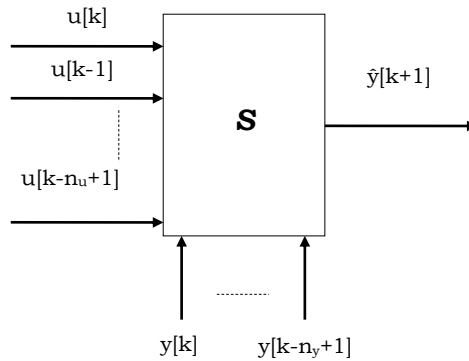
Spre deosebire de modelele de forma (19), adică de sistemele cu MM-II

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \end{aligned},$$

care conțin în membrul stâng cel puțin doi termeni referitori la y , reprezentând astfel o ecuație recurentă, respectiv o conexiune cu reacție, modelul (28) conține în membrul stâng un singur termen și *nu reprezintă o ecuație recurentă*. Efectul lipsei reacției îl constituie faptul că orice secvență de intrare cu un număr finit de termeni se transmite la ieșirea sistemului FIR într-un interval de timp finit. Efectul recurenței constă în faptul că răspunsul sistemului la o secvență de intrare cu un număr finit de termeni, în particular la un impuls, nu mai este o secvență finită, ci un semnal cu un număr infinit de termeni nenuli. De aceea modelele cu ecuații recurente sunt denumite și *sisteme cu răspuns la impuls în timp infinit* sau sisteme de tip IIR (Infinite Impulse Response). *La nivel de schemă bloc trăsătura caracteristică a structurii unui sistem de tip IIR este prezența conexiunii cu reacție.*

⁵ În această secțiune răspunsul la impuls unitar se notează cu $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Un caz de utilizare a sistemelor de tip FIR îl reprezintă *sistemele de predicție* destinate estimării unei valori ulterioare a mărimii de ieșire a unui sistem fizic din secvențe de valori ale mărimii de intrare și de ieșire fără introducerea de interacțiuni dinamice între acestea. Figura următoare ilustrează un sistem de predicție într-un singur pas.



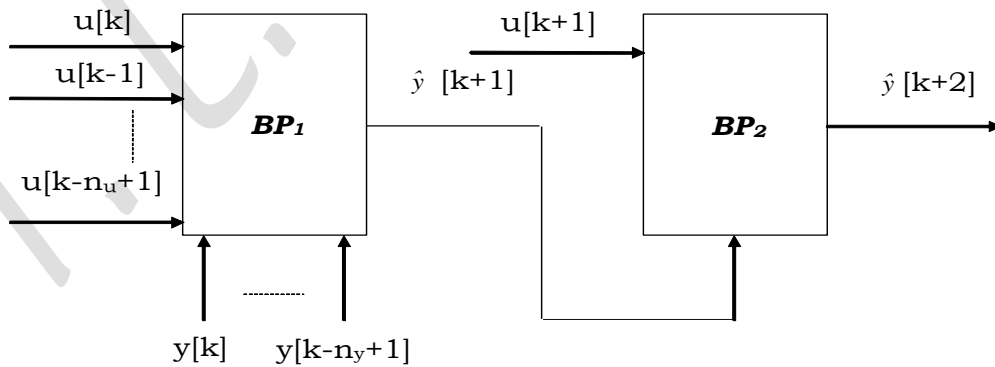
Din secvențele $\{u[k], u[k-1], \dots, u[k-n_u+1]\}$ și $\{y[k], y[k-1], \dots, y[k-n_y+1]\}$ sistemul estimează valoarea $\hat{y}[k+1]$ a lui y pentru pasul următor. Spunem că $\hat{y}[k+1]$ se obține prin *predicție într-un pas* din cele două șiruri de valori. În cazul liniar predicția într-un singur pas se realizează pe baza unei relații de forma:

$$\hat{y}[k+1] = \alpha_0 \cdot y[k] + \alpha_1 \cdot y[k-1] + \dots + \alpha_{n_y-1} \cdot y[k-n_y+1] + \beta_0 \cdot u[k] + \beta_1 \cdot u[k-1] + \dots + \beta_{n_u-1} \cdot u[k-n_u+1] \quad (29)$$

Identificarea modelului de predicție (29) constă în determinarea rangurilor n_u și n_y și a coeficienților $\{\alpha_i\}_{i=0, n_y}^{\dots}$ și $\{\beta_j\}_{j=0, n_u}^{\dots}$. Odată stabilite rangurile, coeficienții se determină astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+1] - y[k+1]$) să fie minimă.

Este ușor de observat că relația (29) este de forma (28), estimata $\hat{y}[k+1]$ însumând ieșirile a două structuri de tip FIR.

În practică se operează și cu modele de predicție în mai mulți pași. Ele pot fi realizate în diferite variante care diferă prin volumul de date memorate și resursele folosite pentru memorare și prelucrare. În figură este ilustrată schema bloc a unui *sistem de predicție în 2 pași*. Ea utilizează două blocuri de predicție BP_1 și BP_2 , de tipul celui din figura anterioară. Structura blocului BP_2 este însă mult mai simplă decât structura blocului BP_1 .



Rolul sistemului este de a furniza valoarea lui $\hat{y}[k+2]$ astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+2] - y[k+2]$) să fie minimă. Ca urmare, diferența $\hat{y}[k+1] - y[k+1]$ nu mai face obiectul minimizării, iar valoarea $\hat{y}[k+1]$ nu reprezintă în general o estimată corectă a lui $y[k+1]$. Din acest motiv ea nu apare în figură ca un semnal de ieșire.