## 2. Modele matematice intrare-stare-ieșire pentru STC liniare

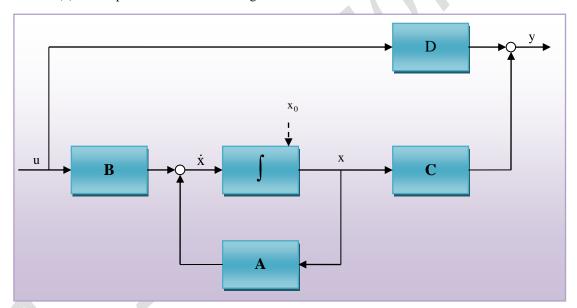
### A) Forme canonice

Cazul MIMO (cazul general): Forma canonică a MM-ISI este:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$
 (1)

- $\checkmark$   $x \in \mathbb{R}^n$ ; n reprezintă ordinul sistemului;
- ✓  $u \in R^m$ ; m reprezintă numărul mărimilor de intrare;
- ✓  $y \in \mathbb{R}^p$ ; p reprezintă numărul mărimilor de ieşire;
- ✓ A este o matrice de forma (n, n) și poartă numele de *matrice a sistemului*;
- ✓ B este o matrice de forma (n, m) și poartă numele de *matrice de intrare*;
- ✓ C este o matrice de forma (p, n) și poartă numele de *matrice de ieșire*;
- ✓ D este o matrice de forma (p, m) și poartă numele de *matrice de interconexiune*;
- $\checkmark$  x(0) este starea inițială a sistemului; starea inițială ia valoarea concretă  $x_0$ .

Modelulului (1) îi corespunde schema bloc din figură:



Prezența blocului integrator redă caracterul inerțial al sistemului. Existența conexiunii cu reacție în jurul integratorului surprinde posibilitatea ca sistemul să ajungă în stări de echilibru. Blocul de amplificare D caracterizează aspectul cauzal. Astfel:

- ✓ dacă  $D \neq 0$ , sistemul se află la limita de cauzalitate;
- ✓ dacă D = 0, sistemul este strict cauzal:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$
 (2)

Cazul SISO (m=1, p=1): Forma canonică a MM-ISI este

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{cases}$$
 (1')

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T \cdot x(t) \end{cases}$$
 (2')

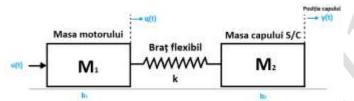
- ✓ matricea B devine vectorul b;
- $\checkmark$  matricea C devine vectorul  $c^{T}$ .

Polinomul caracteristic al sistemului (1) este dat de matricea A, se calculează cu formula:

$$\mu(s) = \det(sI-A)$$
. (3)

El are gradul n și este un polinom monic (coeficientul termenului de gradul n este 1).

**Exemplu:** Mișcarea radială a părții mecanice a acționării capului de scriere/citire la un HDD este realizată de structura din figură.



Ea este considerată ca sistem cu orientarea  $u \to y$  (forța radială care se exercită asupra masei motorului  $\to$  deplasarea radială a capului de scriere/citire) și este redată de MM-ISI (3), de ordinul IV. Variabila q este deplasarea radială a motorului pe direcția brațului care poartă capul de scriere/citire, parametrul k este constanta resortului care modelează brațul flexibil, iar parametri  $b_1$  și  $b_2$  sunt coeficienții de amortizare asociați maselor  $M_1$  și  $M_2$ .

$$\begin{bmatrix}
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & 0 \\
\frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & -\frac{b_2}{M_2}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
q(t) \\
y(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
\frac{1}{M_1} \\
0
\end{bmatrix} \cdot u(t), \quad \begin{bmatrix}
q(0) \\
y(0) \\
\dot{q}(0) \\
\dot{y}(0)
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
q_0 \\
y_0 \\
\dot{q}_0 \\
\dot{y}_0
\end{bmatrix} \\
\dot{y}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
q(t) \\
y(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
q(t) \\
y(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix}$$

$$\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{y}(t)
\end{bmatrix}$$

$$\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{q}(t) \\
\dot{q}(t)
\end{aligned}$$

Polinomul caracteristic al sistemului este:  $\mu(s) = det(s \cdot I - A) = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \frac{k}{M_1} & -\frac{k}{M_1} & s + \frac{b_1}{M_1} & 0 \\ -\frac{k}{M_2} & \frac{k}{M_2} & 0 & s + \frac{b_2}{M_2} \end{vmatrix}$ .

Calculul determinantului se poate face pe mai multe căi, de exemplu prin dezvoltare după prima linie:

$$\mu(s) = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \frac{k}{M_1} & -\frac{k}{M_1} & s + \frac{b_1}{M_1} & 0 \\ -\frac{k}{M_2} & \frac{k}{M_2} & 0 & s + \frac{b_2}{M_2} \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ -\frac{k}{M_1} & s + \frac{b_1}{M_1} & 0 \\ \frac{k}{M_2} & 0 & s + \frac{b_2}{M_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & s & -1 \\ \frac{k}{M_1} & -\frac{k}{M_1} & 0 \\ -\frac{k}{M_2} & \frac{k}{M_2} & s + \frac{b_2}{M_2} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= s \cdot \left[ s^3 + \left( \frac{b_1}{M_1} + \frac{b_2}{M_2} \right) \cdot s^2 + \left( \frac{b_1 b_2}{M_1 \cdot M_2} + \frac{k}{M_1} + \frac{k}{M_2} \right) \cdot s + \frac{k \cdot (b_1 + b_2)}{M_1 \cdot M_2} \right]$$

#### B) Abordarea în domeniul operațional

Esența abordării în domeniul operațional constă în stabilirea dependențelor intrare - ieșire (5) și (7) și a formulelor de calcul (8) și (9) ale matricelor de transfer H(s). Se consideră semnale unilaterale.

Pentru a stabili dependența operațională între imaginea semnalului de intrare u(s) și starea inițială  $x_0$ , pe de-o parte, și imaginea semnalului de stare x(s), pe de altă parte, dată de relația (5), se pleacă de la ecuația de stare din sistemul (1). Succesiv avem:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad x(0) = x_0 \quad \circ - \bullet s \cdot x(s) - x_0 = A \cdot x(s) + B \cdot u(s)$$

$$s \cdot x(s) - A \cdot x(s) = x_0 + B \cdot u(s)$$

$$(s \cdot I - A) \cdot x(s) = x_0 + B \cdot u(s) \quad |(s \cdot I - A)^{-1} \bullet x_0 + (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(s).$$
(5)

Pentru a stabili dependența operațională între imaginea semnalului de intrare u(s) și starea inițială  $x_0$ , pe de-o parte, și imaginea semnalului de ieșire y(s), pe de altă parte, dată de relația (7), avem în vedere că din (1) rezultă:

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \circ - \bullet y(s) = C \cdot x(s) + D \cdot u(s)$$

$$\tag{6}$$

$$(5)$$

$$(6)$$

$$\Rightarrow y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0 + [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot u(s)$$

$$(7)$$

Considerând în (7) condiții inițiale nule, obținem expresia matricei de transfer (8) și a variantelor acesteia:

$$\checkmark \quad H(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D; \tag{8}$$

$$\checkmark \quad H(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B ; \tag{8'}$$

$$\checkmark \quad H(s) = c^T \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b + d; \tag{9}$$

$$\checkmark \quad H(s) = c^T \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot b \,. \tag{9'}$$

În acest context expresia lui y(s) din (7) se poate rescrie în forma:

$$y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot x_0 + H(s) \cdot u(s)$$

$$(7')$$

Matricea  $(s \cdot I - A)^{-1}$  se numește *matrice rezolventă a sistemului (1)*. Originalul ei se notează cu  $\Phi(t)$  și poartă numele de *matrice de tranziție a sistemului*:

$$(s \cdot I - A)^{-1} \circ - \bullet \Phi(t)$$
. (10)

Se demonstrează că

$$\Phi(t) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k \cdots . (11)$$

Întrucât această serie are toate proprietățile unei exponențiale, alternativ notației cu  $\Phi(t)$  se folosește notația

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k \dots$$
 Deci:  
 $\Phi(t) = e^{At}$  . (12)

Notă: Programele de calcul ale matricei de tranziție existente în diferite medii de calcul operează cu dezvoltarea în serie (de mai sus). Aceasta poate fi folosită și pentru calculele pe hârtie, atunci când  $\exists \ell \in \mathbb{N}^+$  astfel încât  $A^\ell = 0$  (Spunem că A este matrice nilpotentă de ordinul  $\ell$ ).

**Exemplul 1**: Fie un sistem cu matricea  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Întrucât  $A^2 = 0$ , A este o matrice nilpotentă de ordinul 2.

Indiferent dacă utilizăm (10) (calculăm matricea rezolventă, apoi trecem din domeniul operațional în domeniul timp) sau suma din (12) (care aici se reduce la o sumă de doi termeni), pentru matricea de tranziție obținem expresia  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Exemplul 2: Să se calculeze f.d.t. H(s) a sistemului (de poziționare)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \end{cases}$$

Apoi, să se calculeze răspunsul y(t) al sistemului la un semnal de intrare de tip impuls unitar, în condițiile inițiale  $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ .

Soluție: Se folosesc formulele (8') și (7'):

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2}.$$

$$c^{T} \cdot (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^{2}} \\ 1.5 \end{bmatrix}, \ x_{0} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \ H(s) = \frac{1}{s^{2}}, \ u(s) = 1, \ , \rightarrow y(s) = \frac{2.5}{s^{2}} + \frac{0.5}{s} \rightarrow y(t) = 2.5 \cdot t + 0.5.$$

### C) Abordarea în domeniul timp

În esență abordarea în domeniul timp înseamnă calculul răspunsurilor x(t) și y(t) ale sistemului (1) (respectiv variantelor (1'), (2), (2')) pentru diferite semnale de intrare în condiții inițiale date.

Formula de calcul a lui x(t) se obține prin trecerea relației (5) în domeniul timp, ținând seama de formulele (10), (12) și de teorema prodului de convoluție din cazul transformatei Laplace:

(5) 
$$\circ - \bullet \ x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$
 (13)

Formula de calcul a lui y(t) se obține înlocuind acest rezultat în ecuația de ieșire a sistemului (1):

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \cdot \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D \cdot u(t) .$$
 (14)

Exemplul 3: Să se aplice formula (13) în următorul caz (sistem de poziționare cu condiții inițiale nenule):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u , \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = t , t \ge 0 .$$

Soluție: Folosind rezultatul din exemplul 1 obținem:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \tau \cdot d\tau = \begin{bmatrix} 2 + t + \frac{t^3}{6} \\ 1 + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}, \quad t \ge 0.$$

• Din (13) și (14) se obțin soluțiile de regim liber (evoluția sistemului datorată doar condițiilor inițiale):

$$\begin{cases} x_{\ell}(t) = e^{At} x_0 \\ y_{\ell}(t) = Ce^{At} x_0 \end{cases}$$
 (15)

Notă: Prima relație argumentează denumirea de *matrice de tranziție* prin faptul că matricea  $\mathcal{O}(t) = e^{At}$  servește pentru a descrie tranziția din starea inițială  $x_0$  în starea curentă  $x_\ell(t)$ .

Tot din (13) și (14) se obțin soluțiile de regim forțat (când evoluția sistemului se datorează doar semnalului de intrare):

$$\begin{cases} x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ y_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + D \cdot u(t) \end{cases}$$
 (16)

Ca urmare, (13) și (14) se pot rescrie în forma (17):

$$\begin{cases} x(t) = x_{\ell}(t) + x_{f}(t) \\ y(t) = y_{\ell}(t) + y_{f}(t) \end{cases}$$
 (17)

Rezultatul are următoarea *Interpretare*: pentru un sistem liniar aflat în condiții inițiale date un regim de funcționare provocat de aplicarea unui semnal de intrare oarecare rezultă prin superpoziția regimului liber corespunzător condițiilor inițiale cu regimul forțat corespunzător semnalului de intrare.

În unele tipuri de probleme, pentru calculul răspunsului forțat al unui sistem cauzal la un semnal de intrare dat se folosește, alternativ formulei (14), următoarea formulă:

$$y_f(t) = \int_0^t y_{\delta}(t - \tau)u(\tau)d\tau = y_{\delta}(t) * u(t)$$
 (18)

Ea furnizează răspunsul sistemului ca produs de convoluție al răspunsului sistemului la impuls Dirac  $y_{\delta}(t)$  cu semnalul de intrare u(t). Formula de calcul a răspunsul sistemului la impuls Dirac se obține din (14) considerând  $u(t) = \delta(t)$  și condiții inițiale nule. Astfel, avem:

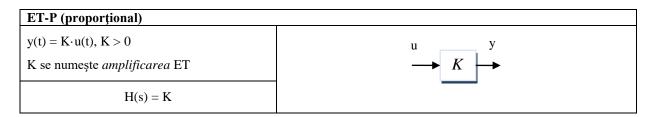
$$y_{\delta}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\delta(\tau) d\tau = Ce^{At} B.$$

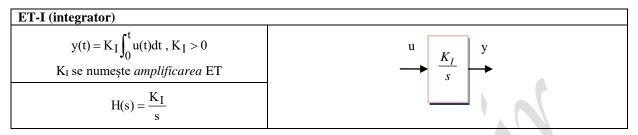
## 3. Elemente de transfer tipizate liniare

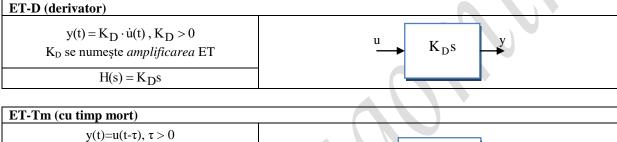
În mod obișnuit, denumirea *element de transfer* (ET) se folosește ca denumire alternativă pentru cea de sistem de tip SISO cu o structură relativ simplă care se întâlnește frecvent în aplicații practice, atât în problemele de modelare a proceselor fizice cât și în problemele de concepere și realizare fizică elementelor de conducere (regulatoare, elemente de corecție).

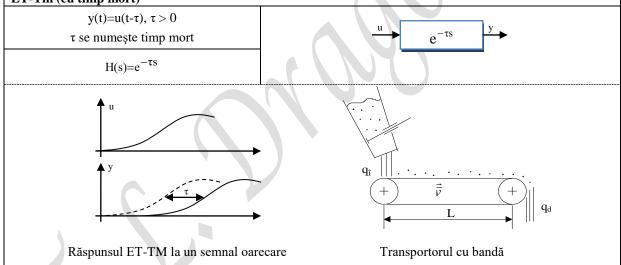
În continuare se prezintă sub formă tabelară principalele tipuri de elementele de transfer. Ele sunt prezentate din perspectiva transferului (de informație) intrare-ieșire. Condițiile inițiale se consideră nule. Nu se fac referiri la aspectul energetic și la limitările funcționale ale sistemelor. În tabel se precizeză:

- denumirea ET,
- MM-II în domeniul timp,
- denumirea parametrilor, formula f.d.t.
- simbolul folosit pentru reprezentarea ET în schemele bloc.









Un ET-Tm redă la ieșire semnalul aplicat la intrare translatat (întârziat) cu  $\tau$  secunde. ET-Tm are capacitatea de a memora valorile mărimii de intrare din ultimele  $\tau$  secunde – o infinitate de valori! În consecință, el este un sistem infinit dimensional. Acest fapt este evidențiat și de funcția de transfer, care nu mai este o funcție rațională, ci o funcție transcendentă. Pentru determinarea ei se folosește *teorema retardării*:

$$f(t) \circ - \bullet f(s) \implies f(t - \tau) \circ - \bullet f(s) \cdot e^{-\tau s}$$

Aplicând-o, obținem succesiv:

succesiv: 
$$y(t) = u(t - \tau) \circ - \bullet y(s) = u(s)e^{-\tau s} \longrightarrow H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \implies H(s) = e^{-\tau s}.$$

Întrucât H(s) este o funcție transcendentă, apar dificultăți de calcul și de modelare. Din acest motiv se recurge la aproximarea expresei transcendente prin expresii raționale proprii (gradul numărătorului e egal cu gradul numitorului). Cele mai folosite sunt *aproximările Padé*.

Un caz tipic este transportorul cu bandă din figura de mai sus, modelat de ecuația:

$$q_d(t) = q_{\hat{i}}(t - \frac{\ell}{v}),$$

### în care:

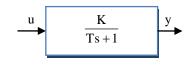
- $q_{\hat{i}} = cantitatea$  încărcată la momentul t;  $\bullet q_d = cantitatea$  descărcată la momentul t;
- $\ell$  = lungimea benzii;
- v = viteza de deplasare a benzii.

# ET-PT<sub>1</sub> (proporțional cu temporizare de ordinul I)

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

K – amplificarea ET; T – constanta de timp a ET

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$



## ET-PD (proportional derivator)

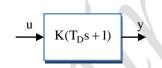
$$y(t) = K_p u(t) + K_D \dot{u}(t)$$

sau

$$y(t) = K \cdot [u(t) + T_D \dot{u}(t)]$$
$$H(s) = K_P + K_D \cdot s$$

sau

$$H(s) = K(1 + T_D \cdot s)$$



## ET-PI (proportional integrator)

$$y(t) = K_P u(t) + K_I \int_0^t u(\tau) d\tau$$

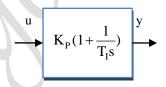
sau

$$y(t) = K_P \left[ u(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) d\tau \right]$$
$$H(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

$$H(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

sau

$$H(s) = K_P(1 + \frac{1}{T_I s})$$



Observație: În practică amplificărilor și constantelor de timp din modelele anterioare li se dau diferite interpretări pe baza răspunsului sistemului la semnal de intrare treaptă unitară.

## ET-PID (proportional - integrator - derivator)

$$y(t) = K_p u(t) + K_I \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + K_D \dot{u}(t) \quad \text{sau} \quad y(t) = K \cdot \left[ u(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) \cdot d\tau + T_D \dot{u}(t) \right]$$

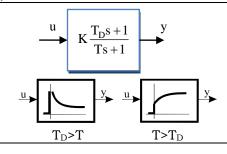
$$H(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \text{ sau } H(s) = K(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s)$$

# ET-PDT<sub>1</sub> (proporțional derivator cu temporizare de ordinul I)

$$T\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot [u(t) + T_D \dot{u}(t)]$$

K, T și T<sub>D</sub> se numesc, respectiv, *amplificarea*, constanta de timp de întârziere și constanta de timp de anticipare ale ET

$$H(s) = K \cdot \frac{T_D s + 1}{T s + 1}$$



Din punct de vedere aplicativ sunt importante două situații:

- T<sub>D</sub><T − element cu întârziere-anticipare (lag-lead);
- T<sub>D</sub>>T element cu anticipare-întârziere (lead-lag).

### ET-PT2 (proporțional cu temporizare de ordinul II)

Prima formă canonică:

$$T^{2} \cdot \ddot{y}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t).$$

A doua formă canonică:

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = K \cdot \omega_n^2 \cdot u(t) \text{ ,}$$

- $\zeta$  (zeta) este *coeficientul de amortizare* și ia în mod obișnuit valori în intervalul (0;1);
- $\omega_n$  (omega) este pulsația naturală și este inversul perioadei.

Prima formă a funcției de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot s + 1}.$$

A doua formă a funcției de transfer:

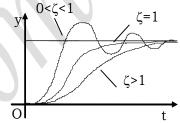
$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}.$$

Răspunsul la semnal treaptă evidențiază în funcție de valoarea parametrului  $\zeta$  trei regimuri de funcționare posibile:

 $\left\{\begin{array}{ll} \zeta < 1 & \rightarrow & \text{regim oscilant amortizat (subamortizat)} \end{array}\right.$ 

 $\left\{ \zeta = 1 \rightarrow \text{regim aperiodic critic} \right\}$ 

 $\zeta > 1 \rightarrow \text{regim aperiodic (supraamortizat)}$ 



În cazul regimului subamortizat, cu cât  $\zeta$  este mai mic, cu atât sunt mai numeroase și mai mari oscilațiile.

Regimul aperiodic-critic este un regim limită între regimul subamortizat și a regimul supraamortizat; este cel mai rapid regim aperiodic.

În diferite domenii tehnice ajustarea lui  $\zeta$  se face pentru una dintre cele trei situații (de ex. în robotică se urmărește obținerea unui regim aperiodic sau aperiodic critic).