§ 1.4 Descrierea sistemelor. Regimuri de funcţionare

1. Modele matematice intrare-ieşire şi modele matematice intrare-stare-ieşire

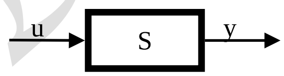
- În contextul cursului, sistemele sunt *modele matematice* (MM) de tipul egalităţi sau sisteme de egalităţi, asociate unor sisteme fizice. Este vorba de egalităţi de tip ecuaţii funcţionale, în care fiecare membru al egalităţii conţine „acţiunea” unui operator asupra unor funcţii de timp (semnale). În principiu egalităţile se folosesc ca ecuaţii pentru a calcula o parte dintre semnale (considerate semnale de ieşire) în funcție de restul semnalelor (considerate semnale de intrare).

Caracterizarea unui sistem prin modele matematice servește pentru redarea unui nivel de percepție și a unui mod de percepție ale sistemului fizic, dorite de noi. Nivelul de percepție se referă la ceea ce partea partea de sistem fizic care ne interesează și la nivelul de aprofundare al proceselor care se desfăşoară în acestă parte. În ceea ce privește modul de percepție distingem două situații.

- Un prim mod de percepție îl reprezintă *percepția funcţională sau de tip intrare-ieşire*, caz în care *MM operează numai cu semnale de intrare şi semnale de ieşire*. Atributul ”funcţional” redă ideea că *în descrierea matematică apar doar semnalele de intrare şi de ieşire, adică semnalele cu care se exprimă funcţia îndeplinită de sistem*. În acest context vorbim de *MM intrare-ieşire* (MM-II). De regulă, MM-II cu care operăm au forma de ecuaţie diferenţială ordinară (operatori diferenţiali) care asociază semnalele $u(t)$ și $y(t)$ și derivatele lor. Dacă inițial MM-II conține și integralele (în raport cu timpul), atunci forma finală diferențială a MM-II se obține din forma inițială prin operații de derivare în raport cu timpul.

Exemplul 1: MM-II în timp continuu

In secţiunea 1 din §.1.1 s-au prezentat două sisteme fizice ale căror MM, notate cu (1) și (2’), aveau forma comună (3). Lor li se asociază în mod frecvent reprezentarea din figură și un MM-II în timp continuu de forma:



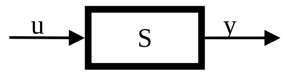
$$T\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$ (*MM-II de ordinul I în timp continuu*)[1] (1)

Coeficienţii T și K, cu denumirile constantă de timp, respectiv amplificare, sunt parametrii modelului. MM-II (1) permite studierea mai multor aspecte legate de comportarea sistemului, bunăoară calcularea răspunsului sistemului la diferite semnale de intrare. De pildă, dacă T=5 s, iar K = 2, sistemul răspunde la semnalul de intrare $u(t)=6\cdot e^{-t}$ *cu semnalul de ieșire* $y(t)=-3\cdot e^{-t} - 3\cdot e^{-0.2\cdot t}$ *atunci când condiţia iniţială este y(0)=0 și cu semnalul* $y(t)=-3\cdot e^{-t}$ *atunci când condiţia iniţială este y(0)=-3.*

Exemplul 2: MM-II în timp discret *este ilustrat prin sistemul (2) de mai jos:*

$$0.5y[t] - 0.8y[t-1] + 2y[t-2] = u[t-1] + 4u[t-2]$$ *(MM-II de ordinul II în timp discret).* (2)

[1] Sub formă operatorială MM se scrie astfel: $f_1\{y\}=f_2\{u\}$, unde $f_1 = T\cdot\frac{d}{dt}+1$, iar $f_2 = K$.



Modelul (2) este o ecuaţie recursivă de ordinul II. În model sunt combinate valorile lui $u[t]$ *şi* $y[t]$ *la mai multe momente, ponderate cu coeficienţii: 0.5, -0.8, 2, 1, 4. Şi acest model permite studierea mai multor aspecte legate de comportarea sistemului (2), în primul rând calcularea răspunsului sistemului la diferite semnale de intrare. De exemplu, răspunsul sistemului (2) având condiţiile iniţiale* $y[-2] = 1/6$, $y[-1] = 5/3$, *la semnalul de intrare* $u[t] = (2.3/6)\cdot 2^{-t}+1.1\cdot(-1)^{-t}$, $t\in N$, $u[t] = 0$, $t<0$, *este* $y[t] = 2^{-t}+ (-1)^{-t}$.

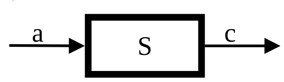
Potrivit celor prezentate în § 1.1, secţiunea 2, sistemele fizice au caracter inierţial. În modelele matematice cu care operăm în cadrul acestei lucrări caracterul inerțial se reflectă prin *ordinul sistemului*, notat cu *n*. Dacă n $\geq$ 1 spunem că sistemul este inerțial, iar dacă n = 0, spunem că sistemul este neinerțial. Pentru ***a stabili ordinul sistemelor date prin MM-II***, procedăm astfel:

- ✓ În cazul sistemelor în timp continuu (STC): a) Se aduce MM-II al STC la forma de ecuaţie diferenţială ordinară, astfel încât atât semnalul de ieşire cât şi semnalul de intrare să nu apară sub formă integrală şi cel puțin unul dintre ele să apară sub formă nederivată. b) Din forma de la punctul a) stabilim ordinul sistemului ca fiind egal cu ordinul maxim de derivare al semnalului de ieșire.
  - Pentru exemplul 1: *n* = 1 întrucât apare derivata de ordinul I a semnalului de ieșire.

- ✓ În cazul sistemelor în timp discret (STD): a) Se aduce MM-II al STD la forma de ecuaţie recursivă astfel încât în aceasta argumentul maxim al mărimii de ieșire să fie momentul curent *t*. b) Din forma de la punctul a) stabilim ordinul sistemului ca fiind egal cu ordinul de recurenţă al ecuaţiei recursive, adică cu diferenţa dintre cel mai mare argument şi cel mai mic argument.
  - Pentru exemplul 2: *n* = t – (t-2) = 2.

Exemplul 3: *MM-II al unui regulator de tip PI (proportional-integrator) cu temporizare are forma:*

$$5\dot{c}(t) + c(t) = 10\int_0^t a(t)dt + a(t) \quad (3)$$



Modelul este de tip ecuaţie integro-diferenţială. Pentru a calcula ordinul acestui sistem aducem egalitatea (3) la forma de egalitate diferenţială. In acest scop o derivăm, membru cu membru, în raport cu timpul t care apare ca parametru (limita superioară) al integralei definite. Rezultă:

$$5\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) = 10a(t) + \dot{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{n} = 2\,.$$

- Un al doilea mod de percepţie este *percepția funcţional-structurală sau de tip intrare-stare-ieşire*. De data aceasta MM operează atât cu semnalele de intrare şi de ieşire cât şi cu o a treia categorie de semnale: *semnalele de stare* (mărimi de stare). *Mărimile de stare caracterizează ceea ce se întâmplă în interiorul sistemului, adică în structura sistemului* – de aici, atributul ”structural”. In acest caz vorbim de *MM intrare-stare-ieşire* (MM-ISI).

Evoluţia fenomenelor dintr-un sistem fizic inerţial depinde de procesele de transfer şi acumulare (în sens algebric) de energie / materie / informaţie. Procesele de acumulare de energie dintr-un sistem sunt exprimate cu ajutorul *mărimilor de stare* sau *variabilelor de stare*. Ansamblul acestor mărimi împreună cu mărimile de intrare ne furnizează *în orice moment* două categorii de informaţii despre sistem:

- ✓ *tendinţa de evoluţie a sistemului*, adică informaţia despre modul în care va evolua sistemul în momentul imediat următor (dacă valorile mărimilor de stare vor creşte sau vor scădea);
- ✓ *valorile mărimilor de ieşire*.

În timp, energiile elementelor fizice capabile de acumulare cresc sau scad. Vitezele proceselor elementare de acumulare de energie sunt diferite, corespunzător inerției elementelor acumulatoare. Proceselor de acumulare le corespund constante de timp dependente de structurile fizice în care au loc procesele. În acest context *ordinului unui sistem este egal cu număr de procese inerţiale elementare de acumulare de energie/materie/informaţie conținute*.

Mărimile de stare sunt utilizate în modelele matematice intrare-stare-ieşire (MM-ISI). Mărimile de stare se notează cu x, iar numărul lor cu n. *Numărul n al mărimilor (semnalelor) de stare reprezintă ordinul sustemului.* De exemplu, dacă în interiorul sistemului avem trei procese inerţiale elementare de acumulare atunci sistemul are 3 variabile de stare, respectiv ordinul n = 3.

După cum s-a precizt, în ecuaţiile care compun un MM, în particular un MM-ISI, se operează cu variabile vectoriale. În consecinţă, pentru un sistem (simbolizat ca in figură) de ordinul n vectorul mărimilor de stare este de forma:

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

MM-ISI conţin două grupuri de ecuaţii, destinate furnizării celor două categorii de informaţii menţionate mai sus. Forma generală a MM-ISI al unui sistem în cazul timp continuu este:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) & (4') \\ y = g(x,u,t) & (4'') \end{cases},$$

iar *a MM-ISI al unui sistem în timp discret*:

$$\begin{cases} x[t+1] = f(x[t],u[t],t) & (5') \\ y[t] = g(x[t],u[t],t) & (5'') \end{cases}.$$

Pentru STC ecuațiile (4’) reprezintă un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul I de forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t) \end{cases}, \qquad (6)$$

iar ecuațiile (4’’) reprezintă un sistem de ecuaţii algebrice de forma:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t) \\ \vdots \\ y_p = g_p(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t) \end{cases} \quad (7).$$

Ecuaţiile (4') se numesc ***ecuaţii de stare*** ale sistemului. Ele servesc pentru a calcula pe $\dot{x}$, ceea ce înseamnă că ne permit să determinăm tendinţa de evoluţie a sistemului. Ecuaţiile (4''), numite ***ecuaţii de ieşire***, permit calcularea valorilor mărimii de ieşire la momentul curent *t*.

Faptul că $\dot{x}$ se poate calcula înseamnă că semnalele *x*(*t*) sunt funcţii derivabile în raport cu timpul. Ca urmare, ***variabilele de stare sunt funcţii continue în raport cu timpul t***. De aici rezultă ***criteriul de alegere a variabilelor de stare ale unui sistem fizic***: variabilele de stare trebuie să fie mărimi cu variaţie continuă în raport cu timpul *t*, valorile lor obţinându-se prin integrare în raport cu timpul (acumulare) plecând de la condiții inițiale date:

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_i(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t)dt\ , \quad i = 1,\cdots,n\ .$$

Enumerăm câteva ***exemple tipice de mărimi de stare***: ***tensiunea dintre bornele unui condensator, curentul electric printr-o bobină, poziţia sau viteza unui punct material, temperatura unui punct material*** ş.a.m.d. Toate aceste mărimi nu pot varia brusc (nu pot avea salturi instantanee), ci doar în mod continuu.

Pentru sistemele în timp discret pot fi variabile de stare ***variabile care descriu procese de stocare***, de pildă: soldul dintr-un cont bancar, numărul de bucăţi dintr-un anumit produs care se găsesc într-o magazie, numărul de credite transferabile acumulate de un student, precum şi ***variabile care provin prin eşantionarea de variabile de stare în timp continuu***.

Pentru STD, relaţiile (5') reprezintă *ecuaţii de stare*, iar relaţiile (5'') *ecuaţii de ieşire*. Ecuaţiile de stare se prezintă sub forma unui sistem de *n* ecuaţii recursive de ordinul I (ordinul fiecărei ecuaţii este $(t+1)-t=1$). În acest caz, tendinţa de evoluţie apare prin faptul că din $x[t]$ şi $u[t]$ putem să calculăm pe $x[t+1]$, adică ceea ce se va întâmpla în pasul următor. În rest, interpretările sunt în principiu aceleaşi cu cele din cazul timp continuu.

În concluzie, orice ecuaţie de stare, fie în timp continuu, adică:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,t),\ i = 1;n\ ,$$

fie în timp discret, adică:

$$x_i[t+1] = f_i(x_1[t],\cdots,x_n[t],u_1[t],\cdots,u_m[t],t) = x_i[t] + \underbrace{\tilde{f}_i(x_1[t],\cdots,x_n[t],u_1[t],\cdots,u_m[t],t)}_{=f_i(x_1[t],\cdots,x_n[t],u_1[t],\cdots,u_m[t],t)-x_i[t]},\ i = 1;n\ ,$$

descrie un proces elementar de acumulare exprimat prin operația de integrare menționată anterior, respectiv prin echivalentul ei în timp discret. Ordinul ***n*** înseamnă *n* procese elementare de acumulare. Aceste procese există şi în cazul intrare-ieşire, doar că sunt mascate de forma modelelor.

- Sistemele (4')-(4") şi (5')-(5"), în care *t* apare ca argument distinct atât în *f* cât şi în *g*, se numesc ***sisteme variante în timp***. Spre deosebire de ele, sistemele:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \\ y(t) = g(x(t),u(t)) \end{cases} \ (8) \qquad \text{şi} \qquad \begin{cases} x[t+1] = f(x[t],u[t]) \\ y[t] = g(x[t],u[t]) \end{cases},\ (9)$$

care nu mai conţin pe *t* ca argument distinct (al treilea argument), se numesc ***sisteme invariante în timp***.

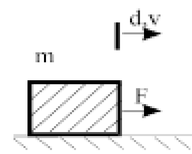
- În (4''), (5''), (7), (8) şi (9), orice variaţie a lui u produce instantaneu şi o variaţie a lui y. Altfel spus, variaţiile intrării se transmit, sub o formă sau alta, instantaneu la ieşire. În sistemele fizice nu se petrece acest lucru; deci ecuaţiile de ieşire de până acum sunt idealizări ale realităţii. Spunem că astfel de sisteme sunt la *limita de cauzalitate* sau la *limita de realizabilitate fizică*.

O modelare exactă trebuie să conducă la un model strict cauzal, ceea ce înseamnă că în MM-ISI ecuaţiile de ieşire trebuie să aibă una din formele:

$$\begin{array}{ll} y = g(x,t) & (4''') \\ y[t] = g(x[t],t) & (5''') \\ y = g(x) & (6'') \\ y[t] = g(x[t]) & (7'') \end{array} .$$

În aceste forme nu mai apare u.

Exemplul 4: Sistem de pozitionare



Sistemul fizic din figura alăturată constă dintr-un corp de masă m, care se deplasează pe orizontală sub acţiunea unei forţe exterioare F cu viteza v, găsindu-se la momentul curent t la distanţa d faţă de un referenţial oarecare de pe direcţia de deplasare. MM al acestui sistem este cunoscut sub denumirea de sistem de pozitionare (pentru mişcarea de translaţie). După caz, orientarea sistemului este $F \rightarrow d$, atunci când ne interesează ca mărime de ieşire numai distanţa d, $F \rightarrow v$, atunci când ne interesează ca mărime de ieşire numai viteza v, sau $F \rightarrow \{d, v\}$ când ne interesează ambele mărimi..

Pentru a stabili ecuaţiile de stare ale sistemului de poziţionare avem în vedere că acceleraţia imprimată de forţa F este a = F/m şi faptul că potrivit celor discutate se recomandă să alegem ca variabile de stare distanţa şi viteza:

$$\begin{array}{l} x_1(t) = d \\ x_2(t) = v \end{array} .$$

Deoarece:

$$\dot{d} = v \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

membrul drept al primei ecuaţii de stare(v. (6)) este:

$$f_1(x_1, x_2, F) = x_2(t) .$$

Potrivit relaţiilor dintre forţă şi acceleraţie, respectiv viteză şi acceleraţie, rezultă:

$$\dot{v} = a = \frac{1}{m} \cdot F(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} F(t) ;$$

Ca urmare, membrul drept al celei de a doua ecuaţii de stare (v. (6)) are expresia:

$$f_2(x_1, x_2, F) = \frac{1}{m} F(t) .$$

Presupunem că ne interesează orientarea $F \rightarrow d$. Cu notaţiile din ecuaţiile (6) avem:

$$y(t) = d(t) = x_1(t),$$

astfel că membrul drept al ecuaţiei de ieşire (v. (7)) este:

$$g(x_1, x_2, F) = x_1(t) .$$

În final rezultă MM-ISI:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{m}F(t) \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ [y(t)] = [x_1(t)] \end{cases} \quad . (10)$$

Acest MM poate fi folosit pentru a studia proprietățile sistemului de poziționare și pentru a calcula răspunsul lui la diferite variații ale semnalului de intrare. De exemplu, considerând că la momentul inițial poziția este $d = d_0$, iar viteza v_0, în ipoteza că se aplică semnalul de intare $F(t) = F_0$, $t \geq 0$, răspunsul sistemului, calculat cu MM (10), este $d(t)=(F_0/m)\cdot t^2+v_0\cdot t+d_0$. (formula distanței pentru miscarea uniform accelerată cu viteză inițială nenulă).

Exemplul 5:

Într-o crescătorie de crustacee, care pot trăi cel mult cinci ani, crustaceele trăiesc într-un bazin izolat. Pentru a studia dinamica populaţiei de crustacee se poate folosi un MM-ISI având variabilele de stare:

- ✓ x_1 *- numărul de crustacee aflate în primul an de viaţă;*
- ✓ x_2 *- numărul de crustacee aflate în doilea an de viaţă;*
- ✓ x_3 *- numărul de crustacee aflate în al treilea an de viaţă;*
- ✓ x_4 *- numărul de crustacee aflate în al patrulea an de viaţă;*
- ✓ x_5 *- numărul de crustacee aflate în al cincilea an de viaţă.*

Notăm cu s_i - ratele de supravieţuire şi cu n_i - ratele de natalitate în anul de viaţă $i = 1, 2, 3, 4$.

Din punctul de vedere al exploatării crescătoriei, ne interesează numărul total q de crustacee existente în crescătorie în anul curent t, indiferent de vârstă (mărimea de ieşire).

După un raţionament elementar, bazat pe bilanţul numărului de crustacee de la începutul fiecărui an de viaţă, pentru procesul descris rezultă în final MM-ISI în timp discret:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1[t+1] = n_2x_2[t] + n_3x_3[t] + n_4x_4[t] + n_5x_5[t] \\ x_2[t+1] = s_1x_1[t] \\ x_3[t+1] = s_2x_2[t] \\ x_4[t+1] = s_3x_3[t] \\ x_5[t+1] = s_4x_4[t] \end{cases} \\ q[t] = x_1[t] + x_2[t] + x_3[t] + x_4[t] + x_5[t] \end{cases} \quad . \quad (11)$$

2. Clasificarea sistemelor

În cadrul cursului vom considera că sistemele dinamice se clasifică potrivit următorului tabel:

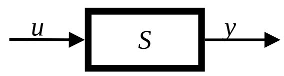
Criteriul de clasificare	**Atributul sistemului**	**Tipul de ecuaţie în domeniul timp**
Continuitatea timpului*	STC*	ecuaţie diferenţială ordinară*
	STD*	ecuaţie recursivă*
Liniaritatea	liniar*	ecuaţie liniară*
	neliniar*	ecuaţie neliniară*
Variabilitatea parametrilor MM în raport cu timpul	invariant în timp*	ecuaţie cu parametri constanţi în timp*
	variant în timp*	ecuaţie cu parametri variabili în timp**

Dependenţa MM de coordonatele spaţiale	cu parametri concentraţi*	ecuaţie diferenţială sau recursivă ordinară *
	cu parametri distribuiţi**	ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale şi omoloagele lor în timp discret.**

Am notat cu * tipurile de sisteme la care ne-am referit până acum, iar cu ** tipurile de sisteme care nu vor fi studiate în cadrul cursului de faţă.

În cele ce urmează ne referim la *liniaritatea unui sistem dinamic*.

Spunem că: *un sistem dinamic este liniar atunci când pentru el este valabil, din perspectiva intrare-ieșire (sau cauză-efect), principiul superpoziţiei.*



Interpretarea acestei definiții, cu referire la sistemul S din figură, este următoarea:

- Fie $u_1(t)$ un semnal de intrare admisibil (o realizare a lui $u(t)$). Aplicat la intrare, el va produce la ieşire un răspuns $y_1(t)$ (o realizare a lui $y(t)$). De asemenea, fie $u_2(t)$ un alt semnal de intrare admisibil (o altă realizare a lui $u(t)$). Aplicat la intrare, el va produce la ieşire un răspuns $y_2(t)$ (o altă realizare a lui $y(t)$).

- Fie $u_3(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t)$ un semnal de intrare admisibil unde c_1 şi c_2 sunt constante numere complexe. Notăm răspunsul sistemului la aplicarea acestui semnal de intrare cu $y_3(t)$.

- Spunem că sistemul verifică principiul superpoziţiei, sau că este liniar, dacă: $\forall u_1(t), u_2(t)$ admisibile și c_1, c_2 arbitrare, rezultă că $y_3(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$.

Stabilirea liniarităţii unui MM pe baza acestei interpretari este adesori anevoiasă. Practic folosim următoarea condiţie de suficienţă considerată drept *criteriu de recunoaştere a liniarităţii*:

> *Dacă în toți termenii egalităților din modelul matematic al unui sistem apare câte un singur semnal la puterea I, care poate lua orice valori reale, atunci sistemul este liniar. În cazul timp continuu derivatele, indiferent de ordin, se consideră semnale distincte. În cazul timp discret termenii de argument diferit (din punctul de vedere al lui t) se consideră că provin din semnale distincte.*

Ca urmare, în fiecare ecuaţie a unui model matematic toţi termenii trebuie să fie monoame de gradul I continue în raport cu funcţiile de timp (funcţii propriu-zise şi derivatele lor pentru cazul timp continuu sau realizări ale funcţiilor propriu-zise la diferite momente în cazul timp discret), iar acestea să poată lua orice valori (să nu fie supuse la limitări).

Atunci când condiţiile acestui criteriu nu sunt îndeplinite, sistemul este neliniar.

Observaţii:

1) Definiţia dată pentru un sistem liniar este valabilă atât în cazul timp continuu cât şi în cazul timp discret.
2) O definiţie completă a liniarităţii ţine seama şi de condiţiile iniţiale, în sensul că în cazul $u_3(t)$ se impune aceeaşi combinaţie liniară şi condiţiilor iniţiale.

- ✓ Dacă operăm cu MM-II, condiţiile iniţiale se referă în cazul timp continuu la valorile de la momentul iniţial, ale ieșirii și derivatelor acesteia până la ordinul n-1, iar în cazul timp discret la valorile ieșirii la momentul inițial și la n-1 momente anterioare.
- ✓ Dacă operăm cu MM-ISI, condiţiile iniţiale sunt de forma $x(t_0)$ sau $x[t_0]$, adică valorile stărilor la un moment inițial t_0.

Exemple:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad - \quad \textit{sistem liniar} \text{ de ordin } n = 1 \text{ (SL)}$$

$$\dot{y}(t) + y(t)|y(t)| = u(t) \quad - \quad \textit{sistem neliniar} \text{ de ordin } n = 1 \text{ (SN)}$$

$5\dot{y}(t) + y(t) = 0.7 \cdot u(t)$ reprezintă un SL în timp continuu de ordin $n = 1$;

$\ddot{y}(t) + 0.8 \cdot y(t) = \dot{u}(t)$ reprezintă un SL în timp continuu de ordin $n = 2$;

$y[t] - 0.2 \cdot y[t-1] + y[t-2] = u[t-1]$ reprezintă un SL în timp discret de ordin $n = 2$;

$y[t] + |y[t-1]| = u[t]$ reprezintă un SN în timp discret de ordin $n = 1$. El poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} y[t] - y[t-1] = u[t]\,,\ y[t-1] < 0 \\ y[t] + y[t-1] = u[t]\,,\ y[t-1] \ge 0 \end{cases}.$$

In cazurile practice semnalele sistemelor fizice sunt mărginite. Aceasta înseamnă că în modelele lor matematice variabilele ar trebui supuse unor limitări şi ca urmare ultima condiție din enunțul criteriului nu este îndeplinită. În concluzie, în mod riguros chiar și modelele matematice cu aspect liniar sunt neliniare, întrucât ele ar trebui să includă limitările semnalelor. Totuşi, în multe situații de funcționare normală variabile sistemelor fizice nu își ating limitele. În astfel de situații se consideră că operăm cu sisteme liniare. In continuare dezvoltările din curs se fac în aceasta ipoteză. Timpul este considerat ca variabilă independentă limitată la intervalul de interes al utilizatorului.

3. Identificare. Realizare fizică

În tehnică în special, şi în ştiinţă în general, apar două tipuri de probleme de bază referitoare la gestionarea MM ale sistemelor.

- ✓ Prima problemă o reprezintă *obţinerea MM* corespunzătoare sistemelor fizice.
  - ➢ Această operaţie este denumită în mod curent ***identificare*.** Nu orice sistem fizic este identificabil.
- ✓ A doua problemă o reprezintă *implementarea fizică a MM*, adică transpunerea unui MM sintetizat, pe o cale sau alta, într-un sistem fizic.
  - ➢ Această operaţie este denumită în mod curent *realizare fizică*. Nu orice MM este fizic realizabil. Algoritmii de conducere a proceselor fizice trebuie să fie subsisteme fizic realizabile.

Problema identificării face obiectul unei discipline aparte: „identificarea sistemelor”. Un MM trebuie să răspundă întotdeauna unui scop bine precizat. Detalierea modelării dincolo de acest scop se soldează cu complicarea modelului şi, de regulă, este inutilă. Problema realizării fizice face obiectul a numeroase discipline de specialitate din diferite domenii științifice, nu numai inginerești.

Modelul matematic al unui sistem fizic poate fi obţinut plecând de la descrierea proceselor care au loc în sistem prin ecuații cunoscute din discipline precum fizica, chimia, biologia, sociologia, finanțe ş.a. sau plecând de la tratarea sistemului fizic ca un „*black box*”. Prima cale a fost exemplificată în § 1.1, secțiunea 1, prin exemplele 1 si 2. În cel de-al doilea caz, sistemul fizic este excitat experimental cu diferite semnale de intrare, se înregistrează aceste semnale precum şi răspunsul sistemului, apoi se prelucrează înregistrările în ideea definirii unei relaţii între intrare şi ieşire care să conducă la o comportare cât mai apropiată de cea constatată experimental. De regulă, pe aceasta cale se obțin MM-II. Ele nu descriu complet sistemul, ci doar dependența intrare-ieșire.

Din punct de vedere matematic, la nivelul cursului, realizabilitatea fizică a unui STC o verificăm astfel: *un MM în timp continuu este fizic realizabil, dacă ordinul maxim de derivare al mărimii de ieşire mai mare decât ordinul maxim de derivare al mărimii de intrare; în caz de egalitate, el se găseşte la limita de realizabilitate fizică*.

Exemple: *Relația*

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

este un model fizic realizabil, relația

$$2\ddot{y}(t) + 0.5\cdot\dot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t)$$

este un model la limita de realizabilitate fizică; iar relația

$$y(t) = 3\cdot\dot{u}(t) + 0.5\cdot u(t)$$

nu este un model fizic realizabil.

Un MM în timp discret este fizic realizabil dacă argumentul maxim al mărimii de ieşire este mai mare decât argumentul maxim al mărimii de intrare.

Exemple:

- $y[t] + y[t-1] + 0.5\cdot y[t-2] = u[t-1]$ *este un model fizic realizabil;*
- $y[t] + y[t-1] = u[t]$ *este un model la limita de realizabilitate fizică;*
- $y[t] = u[t+1] - u[t]$ *nu este un model fizic realizabil.*

În unele situaţii operăm într-o primă aproximare şi cu modele care nu sunt fizic realizabile.

Problematica identificării şi realizabilităţii fizice o surprindem prin figura suport (de discuție) de mai jos. *Figura se referă la conceperea unui sistem de reglare automată* (finalizată prin realizarea fizică a dispozitivului de conducere), dar aici este *folosită ca pretext pentru a discuta aspectul identificării și aspectul realizabilității fizice*.

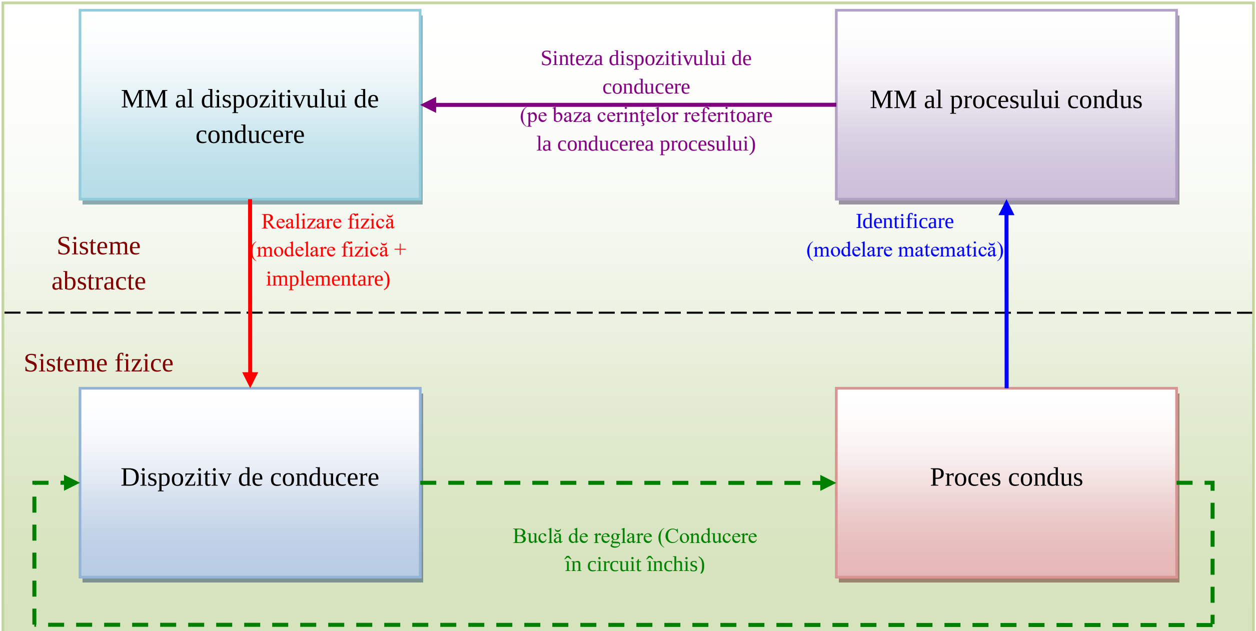
Figura atrage atenţia asupra situaţiilor în care apar problemele de identificare şi realizare fizică la realizarea unui sistem de reglare. Ciclul în care apar cele două operații urmăreşte realizarea practică a dispozitivului de conducere și cuprinde:

i) determinarea unui MM al procesului condus (***identificare*** – linia albastră),

ii) conceperea și calcularea unui MM al dispozitivului de conducere (sinteză – linia violetă),

iii) implementarea MM al dispozitivului de conducere într-un sistem fizic (***realizare fizică*** – linia roşie).

Sistemul de reglare (conducere) este partea reprezentată cu linie întreruptă de culoare verde. Rolul sistemului este ca procesul condus să realizeze o anumită funcţie (să asigure anumite cerinţe referitoare la conducerea procesului).



4. Punct de funcţionare. Regimuri de funcţionare, clasificări

Prin ***mărimi caracteristice ale unui sistem*** se înţeleg mărimile relevante pentru comportarea sistemului şi monitorizarea realizării funcţiei sistemului.

Ansamblul valorilor tuturor mărimilor caracteristice ale unui sistem, considerate la un moment dat, se numeşte ***punct de funcţionare al sistemului***. Ca urmare, mărimile caracteristice reprezintă coordonatele punctului de funcționare. Valorile coordonatelor se modifică în timp.

Notăm punctul de funcţionare cu Λ. Vom scrie, de exemplu, $\Lambda(u, y)$ atunci când mărimile caracteristice sunt u şi y, $\Lambda(u_{med}, y_{med})$ atunci când mărimile caracteristice sunt valorile medii ale mărimilor u şi y asociate de o anumită manieră momentului curent ş.a.m.d.

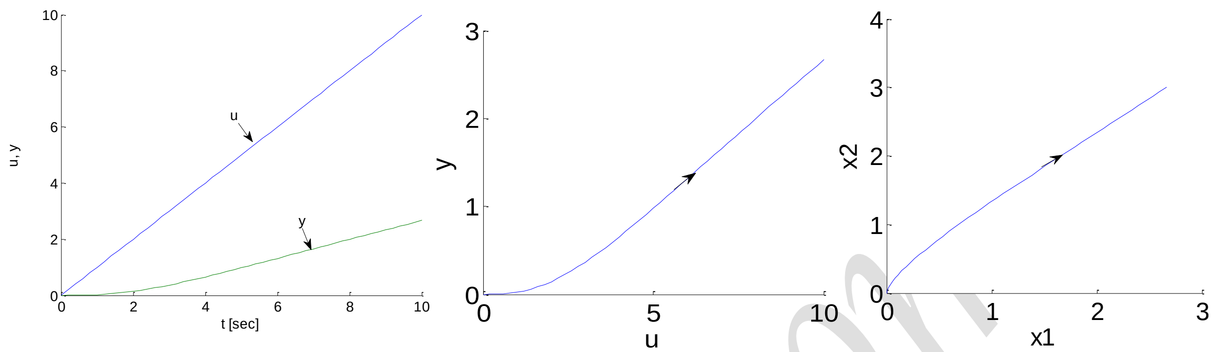
Prin ***regim de funcţionare al unui sistem fizic*** se înţelege un mod de comportare în timp al sistemului, destinat realizării unei anumite funcţii. În acord cu principiul cauzalităţii un regim de funcţionare al unui sistem este determinat de un anumit semnal de intrare şi/sau de o stare iniţială, de echilibru sau dezechilibru, a sistemului şi este caracterizat printr-o succesiune continuă sau discretă de puncte de funcţionare în "spaţiul" coordonatelor, succesiune numită ***traiectorie asociată regimului de funcţionare***. ***Traiectoria reprezintă*** o imagine a variaţiei temporale a mărimilor caracteristice în cursul unui regim de funcţionare, deci ***o imagine grafică a regimului de funcționare***.

Dacă ***T*** este orizontul de timp căruia îi corespunde traiectoria, atunci vom nota traiectoria cu $\Lambda_T(u, y)$, $\Lambda_T(u_{med}, y_{med})$ ş.a.m.d. Dacă mărimile caracteristice sunt variabilele de stare, *x*, ale sistemului, traiectoriile Λ_T (x) se numesc ***traiectorii de stare***. Notațiile pun în evidenţă orizontul de timp şi mărimile caracteristice.

Exemplu: *Se consideră sistemul liniar în timp continuu (1), de ordinul II, la intrarea căruia se aplică semnalul rampă unitară* $u(t)=t$ *în condiţii iniţiale nule, i.e.* $x_1(0)=0,\ x_2(0)=0$. *Intervalul de timp de studiu este de 10 secunde.*

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -0.4x_1(t) - 0.2x_2(t) + 0.2u(t) \end{cases} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Prin aplicarea la intrare a semnalului rampă declanşăm un regim de urmărire (o operație de urmărire a mărimii de intrare de către mărimea de ieșire). În figura de mai jos apar diferite modalităţi de a reda acest regim.



În figura din stânga sunt redate variaţiile mărimilor de intrare şi de ieşire, u(t) şi y(t), în ideea că cele două mărimi sunt mărimi caracteristice ale sistemului.

În figura din mijloc apare traiectoria y(u) corespunzătoare punctului de funcţionare Λ(u, y), adică traiectoria $\Lambda_{[0,10]}$(u,y). Pentru a evidenţia regimul care se instalează, evoluţia punctului de funcţionare pe traiectorie este sugerată cu o săgeată.

Ambele reprezentări sugerează că regimul de urmărire se instalează cu o anumită întârziere, urmărirea propiu-zisă instalându-se după ce variațiile celor două mărimi din prima figură devin proporționale, rspectiv după ce în a doua figură evoluția sistemului este redată de o semidreaptă.

În figura din dreapta regimul este redat prin traiectoria de stare $x_2(x_1)$ corespunzătoare punctului de funcţionare $\Lambda(x_1,x_2)$, adică traiectoria $\Lambda_{[0,10]}(x_1, x_2)$. Cu privire la această figură vom observa că procesul de urmărire nu mai este transparent. În schimb obţinem o imagine a ceea ce se întâmplă în interiorul sistemului în cursul urmării: variațiile lui x_1 tinde să devină proporțională cu variația lui x_2.

În consecinţă, un regim de funcţionare poate fi redat prin intermediul mai multor mărimi caracteristice şi mai multor tipuri de traiectorii. Depinde de noi, respectiv de scopul urmărit, alegerea celei mai potrivite forme de reprezentare.

□

Pentru clasificarea regimurilor de funcţionare există numeroase criterii. Astfel, *din punctul de vedere al variaţiei în timp ale mărimilor caracteristice distingem două tipuri de regimuri*:

- ✓ *regimuri permanente*, caracterizate prin faptul că mărimile caracteristice variază în timp după funcţii tipizate corespunzătoare unor semnale standard: *funcţia treaptă unitară, funcţia rampă unitară, funcţia parabolă unitară, funcţia sinusoidală* sau altor funcții bine precizate, de exemplu funcții periodice;
- ✓ *regimuri tranzitorii*, caracterizate prin faptul că variabilele informaţionale variază în timp după funcţii netipizate, sistemul trecând, eventual, de la un regim permanent la altul (v. Fig.1, Fig.2 de mai jos).

Principalele tipuri de regimuri permanente sunt**:**

1) Regimul staţionar sau **permanent constant**, - este caracterizat prin faptul că variabilele informaţionale ale mărimilor caracteristice sunt constante pe subintervale de timp. Acest regim se instalează după încheierea regimului tranzitoriu (teoretic pentru $t \to \infty$) declanşat de aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal constant. Convenim să notăm valorile coordonatelor punctului de funcţionare pentru $t \to \infty$ cu indicele „ ∞ ”. Vom scrie $\Lambda(u_\infty, y_\infty)$ sau, simplu, Λ_∞. Punctul Λ_∞ este fix, ceea ce înseamnă că în regim staţionar traiectoria sistemului se reduce la un punct.

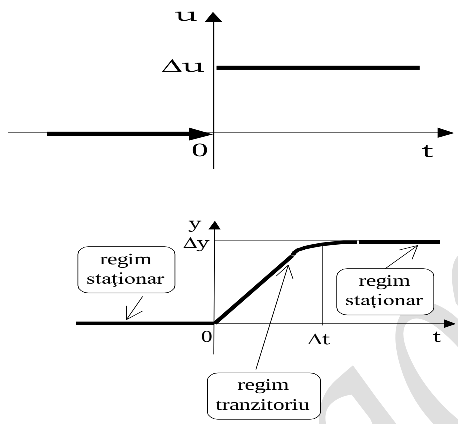


Fig. 1

2) Regimul permanent proporţional - este caracterizat de faptul că variabilele informaţionale asociate mărimilor caracteristice variază în timp după funcţii rampă. În acest regim toate derivatele de ordinul I în raport cu timpul sunt constante, adică $\dot{u}(t) = \dot{u}_\infty = const,$, $\dot{y}(t) = \dot{y}_\infty = const$. Teoretic, se poate considera că regimul este declanşat după aplicarea la intrarea sistemului a unor semnale rampă ca în Fig.2. În figură se pleacă dintr-un regim permanent care poate fi interpretat atât ca regim staţionar cât şi ca regim permanent proporţional determinat de o intrare nulă. In regim permanent proporţional $\Lambda(\dot{u}_\infty, \dot{y}_\infty)$ este un punct fix, pe când $\Lambda(u, y)$ este un punct mobil care descrie o semidreaptă sau un segment de dreaptă.

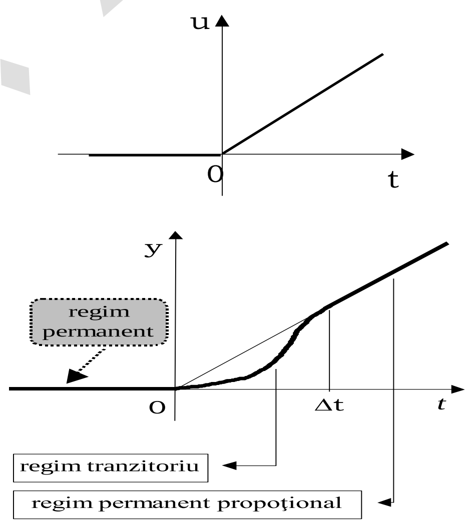


Fig. 2

3) Regimul permanent parabolic - este caracterizat de faptul că variabilele informaţionale asociate mărimilor caracteristice variază în raport cu timpul după funcţii parabolice. Deci, derivatele lor de ordinul II în raport cu timpul sunt constante. Declanşarea regimului este consecinţa aplicării de semnale parabolice la intrarea sistemului. Punctul $\Lambda(\ddot{u}_\infty, \ddot{y}_\infty)$ este fix, iar punctele $\Lambda(\dot{u}_\infty, \dot{y}_\infty)$ şi $\Lambda(u, y)$ sunt mobile.

4) Regimul permanent sinusoidal, numit şi *regim armonic* sau *regim sinusoidal cvasistaţionar* - este caracterizat prin aceea că toate mărimile caracteristice, coordonate ale punctului de funcţionare, variază în timp după funcţii sinusoidale (de exemplu, y(t) în Fig.3). Sistemul ajunge într-un astfel de regim în urma aplicării la intrare a unor semnale sinusoidale. Datorită variaţiei temporale periodice a coordonatelor, cu o perioadă comună, punctul Λ(u, y) este mobil pe o curbă închisă.

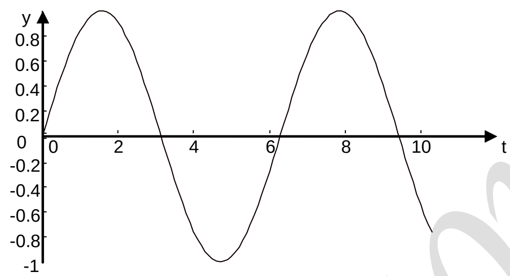


Fig. 3

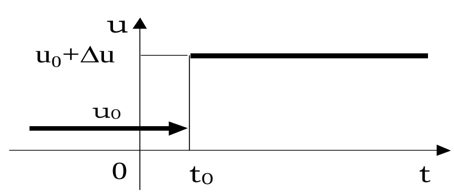
Deoarece în regimurile 2, 3 şi 4 şi în regimurile tranzitorii mărimile variază în timp, ele poartă şi denumirea de **regimuri nestaţionare** sau (în mod neriguros) de **regimuri dinamice**.

În cazul sistemelor liniare invariante în timp se folosesc în mod frecvent conceptele de *regim liber* şi de *regim forţat*.

Prin **regim liber** se înţelege un regim de funcţionare determinat de o stare iniţială dată a sistemului (de regulă condiţii iniţiale nenule care corespund unei situaţii de dezechilibru) în situaţia în care semnalul de intrare este nul ($u(t)$ = 0), iar prin **regim forţat** se înţelege un regim de funcţionare determinat de aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal $u(t) \neq 0$ în condiţii iniţiale nule.

Observaţii:

1) In Fig. 1 şi Fig. 4 sunt ilustrate răspunsurile la semnale treaptă ale două sisteme liniare. Iniţial, sistemele se găsesc în stare de echilibru. In primul caz starea de echilibru este o stare de repaus. În al doilea caz starea de echilibru corespunde unui regim staţionar determinat de un semnal treaptă de amplitudine u_0. Ori de câte ori este posibil reducem din punct de vedere matematic (prin schimbări adecvate de variabile) stările iniţiale de echilibru la stări de repaus.



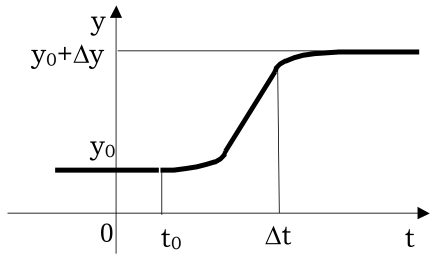


Fig. 4

2) Figurile 1, 2 şi 4 mai evidenţiază un aspect importat: teoretic, un regim staţionar (permanent) se obţine pentru $t \to \infty$ dar din punct de vedere practic această situaţie nu convine şi ca urmare se consideră că regimul staţionar (permanent) rezultă după un interval finit de timp Δt adoptat în funcţie de necesităţi sau de posibilităţile de percepţie ale semnalului (în cazul de faţă: de semnalul de ieşire).
3) *Utilizarea noţiunilor de regim liber şi regim forţat se justifică numai pentru sisteme liniare*, unde -prin superpoziţia lor- se obține regimul real de funcționare.

Din considerente practice se impune menţionarea a încă doi termeni: regim nominal şi regim oarecare. Sistemele tehnice sunt concepute astfel încât să funcţioneze într-un anumit regim caracterizat de indicatori tehnici şi energetici bine precizaţi. Un astfel de regim este numit **regim nominal**. In realitate sistemele ajung să lucreze în **regimuri oarecare**, adică în regimuri mai mult sau mai puţin "îndepărtate" de regimul nominal. Regimurile oarecare pot fi clasificate, la rândul lor, în **regimuri normale, regimuri de avarie** ş.a.m.d.