

LUCRAREA DE LABORATOR NR.8

DISCRETIZAREA SISTEMELOR LINIARE ÎN TIMP CONTINUU. REGULA LUI MASON.

1. Obiective

- exersarea metodelor de discretizare a sistemelor liniare în timp continuu,
- exersarea aplicării regulii lui Mason.

2. Metode de discretizare

În această secțiune, se sintetizează aspectele metodologice din Lecția de curs nr. 10.

- Discretizarea unui sistem în timp continuu reprezintă operația prin care unui sistem în timp continuu S i se asociază un sistem în timp discret S_d care, atunci când lucrează cu secvențele $\{\bar{u}[k]\}$ rezultate prin eșantionarea semnalului de intrare $u(t)$ al sistemului în timp continuu, furnizează la ieșire, pentru momentele $k \cdot h$, de discretizare a timpului, fie exact valoarea mărimii de ieșire a sistemului în timp continuu corespunzătoare momentului kh , adică $\bar{y}[k] = y(t)|_{t=k \cdot h}$, fie o aproximare a valorii respective, adică $\bar{y}[k] \approx y(t)|_{t=k \cdot h}$.

În primul caz spunem că sistemul S_d este o realizare invariantă a sistemului S , iar metodele de discretizare le denumim *metode de obținere a realizărilor invariante*. În cazul de față ne referim doar la *metoda de obținere a realizării invariante la semnal treaptă (RIST) pentru sisteme liniare*.

În al doilea caz vorbim despre *metode de discretizare prin aproximare*. Ne referim numai la cele cunoscute sub denumirea de *metode de substituție*.

- Realizarea invariantă la semnal treaptă în domeniul timp asociază sistemului în timp continuu

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (1)$$

sistemul în timp discret

$$S_d : \begin{cases} x[t+1] = A_d x[t] + B_d u[t], & t \in Z, \\ y[t] = C_d x[t] + D_d u[t] \end{cases}, \quad (2)$$

în care:

$$A_d = \Phi(h) = e^{Ah}, B_d = \Gamma(h) = \left[\int_0^h e^{A\nu} d\nu \right] B, C_d = C, D_d = D. \quad (3)$$

- Realizarea invariantă la semnal treaptă în domeniul operațional asociază sistemului în timp continuu S cu f.d.t. $H(s)$ un sistem în timp discret S_d cu f.d.t.

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}, \quad (4)$$

în care \mathfrak{Z} reprezintă operatorul de asociere a transformatei z , semnalului rezultat prin eșantionarea la momentele kh a semnalului din domeniul timp continuu corespunzător lui $\frac{1}{s} H(s)$.

- Cele mai folosite metode de discretizare prin aproximare sunt: *metoda Euler* (sau *metoda dreptunghiului retardată* (MDR)), *metoda dreptunghiului* (sau *metoda dreptunghiului avansată* (MDA)), *aproximarea Tustin* (sau *metoda trapezului* (MT)). Ele se aplică sub forma de metode de substituție în sensul că $H(z)$ se obține din f.d.t. $H(s)$ a sistemului care trebuie discretizat substituind pe $\frac{1}{s}$ cu una din expresiile (5):

$$\frac{1}{s} \cong \begin{cases} \frac{h}{z-1} & \text{(MDR)} \\ \frac{h \cdot z}{z-1} & \text{(MDA)} \\ \frac{1}{2} h \cdot \frac{z+1}{z-1} & \text{(MT)} \end{cases} \cdot (5)$$

3. Discretizarea sistemului dublu integrator

- Sistemul dublu integrator, adică sistemul cu f.d.t. $H(s) = \frac{1}{s^2}$, corespunde în practică mai multor situații: deplasarea fără frecare pe o traiectorie liniară a unui corp de masă m sub acțiunea unei forțe exterioare F_e , rotirea fără frecare în lagăre a unui disc de moment de inerție J sub acțiunea unui moment exterior M_e ce acționează într-un plan ortogonal pe axul discului etc. Ecuațiile de mișcare în cele două cazuri sunt:

$$F_e(t) = m \cdot a(t) \quad , \quad M_e(t) = J \cdot \varepsilon(t) \quad . (6)$$

S-a notat cu „ a ” accelerația liniară din cursul mișcării de translație și cu „ ε ” accelerația unghiulară din cursul mișcării de rotație. Dacă adoptăm pentru cele două situații notațiile:

- $u = F_e/m$ (forța exterioară corespunzătoare unității de masă), $u = M_e/J$ (momentul exterior raportat la momentul de inerție = moment exterior corespunzător unității de moment de inerție),
- $x_1 = p$ (p = poziție = distanța parcursă în mișcarea de translație), $x_1 = \alpha$ (α = poziție = unghiul cu care s-a rotit),
- $x_2 =$ viteza v în mișcarea de translație, $x_2 =$ viteza unghiulară ω în mișcarea de rotație,

atunci MM-ISI asociat ecuațiilor (6) ia forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ C = c^T \end{cases} \quad (7)$$

iar MM-II în domeniul operațional ia forma

$$H(s) = \frac{1}{s^2} \quad . (8)$$

- Celor două MM le corespund realizările invariante la semnal treaptă (deduse în exemplele din curs):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

respectiv

$$H(z) = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} \quad . (10)$$

- Folosind metodele de discretizare prin aproximare, din (8) obținem:

➤ Metoda Euler (MDR): $H(z) = \frac{1}{s^2} \left| \frac{1}{s} = \frac{h}{z-1} \right. = h^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2} \quad (11)$

➤ Metoda dreptunghiului (MDA): $H(z) = \frac{1}{s^2} \left| \frac{1}{s} = \frac{h \cdot z}{z-1} \right. = h^2 \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad (12)$

➤ Metoda trapezului (Metoda Tustin): $H(z) = \frac{1}{s^2} \left| \frac{1}{s} = \frac{h \cdot z+1}{2 \cdot z-1} \right. = \frac{h^2}{4} \cdot \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} \quad (13)$

- În Fig. 8.1 este redat modelul Simulink care implementează MM (7)-(13). Corespondența dintre blocuri și relațiile de mai sus este realizată prin codul culorilor.

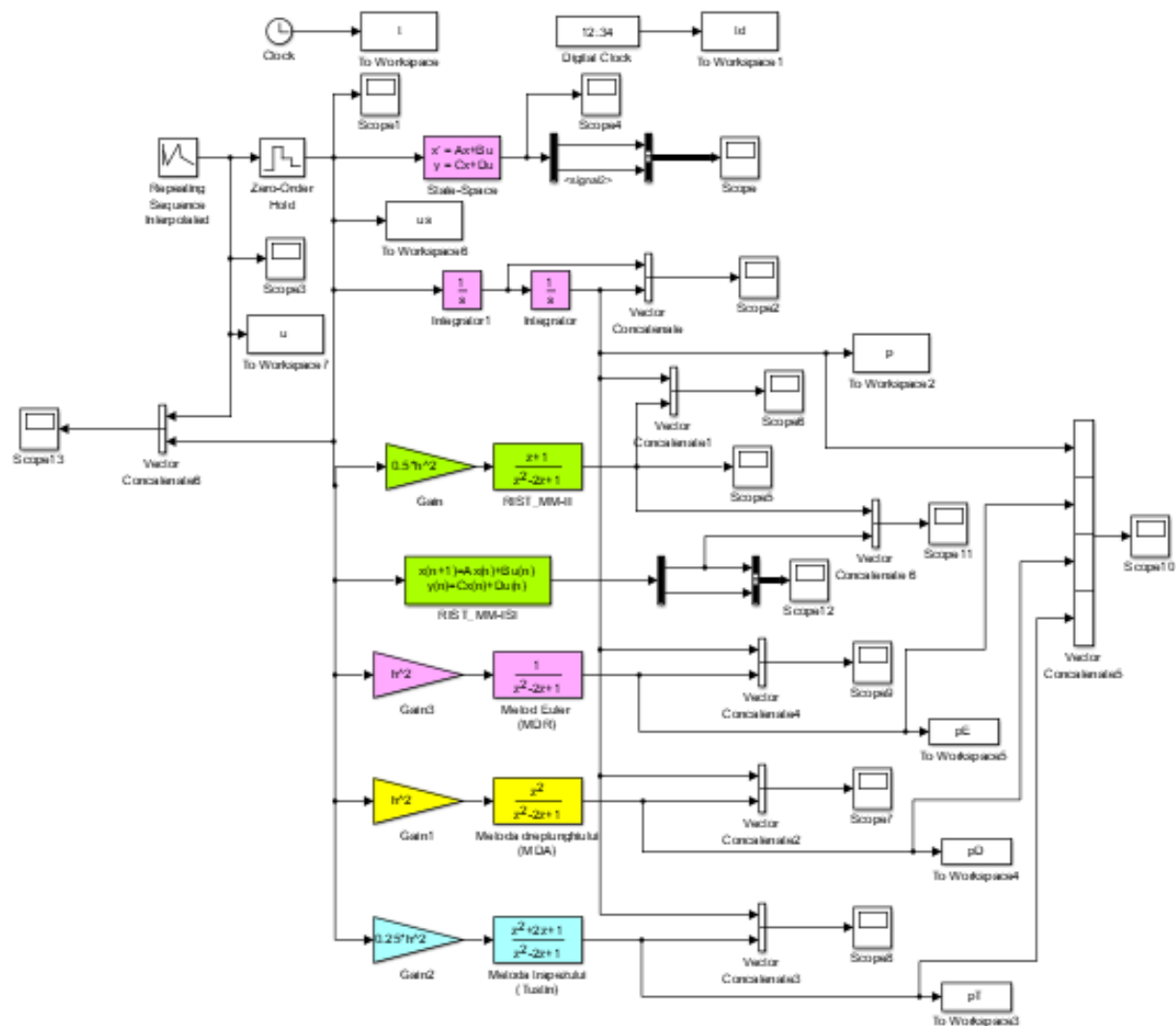


Fig. 8.1.

La intrarea tuturor blocurilor se aplică același semnal de intrare, generat de blocul Repeating Sequence Interpolated, eșantionat și transformat în semnal scară de blocul ZOH. Restul blocurilor servesc pentru vizualizarea semnalelor pe osciloscoape sau pentru reprezentarea grafică a semnalelor ca funcții de timp.

Mai jos, în Fig. 8.2, se prezintă graficul semnalului de intrare $u(t)$ periodic, de perioadă $T = 1$ s (linia frântă colorată cu albastru care rezultă prin interpolare liniară prin șirul de patru puncte / secundă, care se repetă periodic) și semnalul scară $u_s(t)$ rezultat prin eșantionarea semnalului $u(t)$ cu pasul $h = 0.25$ secunde (linia roșie).

Figura a fost obținută cu comanda: `plot(u.time,u.data,us.time,us.data)`. Comanda corespunde setării în interfețele blocurilor „to workspace” a formatului „Timeseries”.

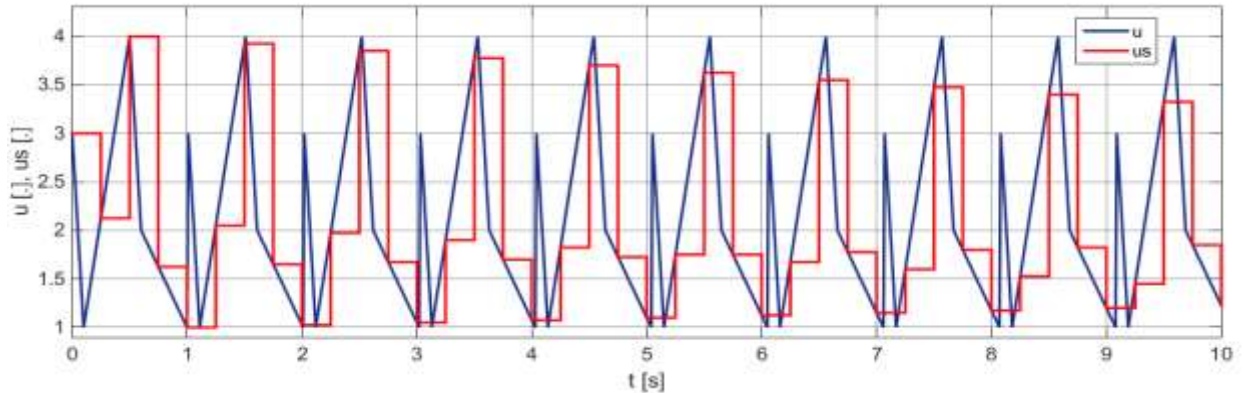
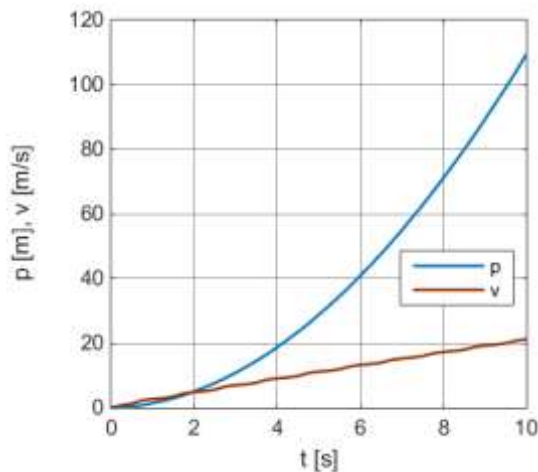


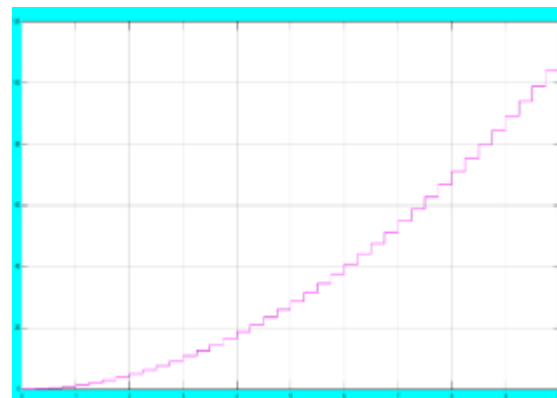
Fig. 8.2.

Efectul aplicării semnalului scară $u_s(t)$ la intrarea sistemelor (7) și (8) este redat în Fig. 8.3a). Imaginea a fost obținută cu comanda: `plot(t,p,t,v)`. Efectul aplicării semnalului scară la intrarea sistemelor (9) și (10) apare în Fig. 8.3b). Datorită blocului ZOH din schemă, răspunsul apare sub formă de semnal scară. Imaginea a fost preluată de la osciloscopul Scope 1. După cum era de așteptat, sistemele (7) și (8), pe de-o parte, și sistemele (9) și (10), pe de altă parte, furnizează răspunsuri identice.

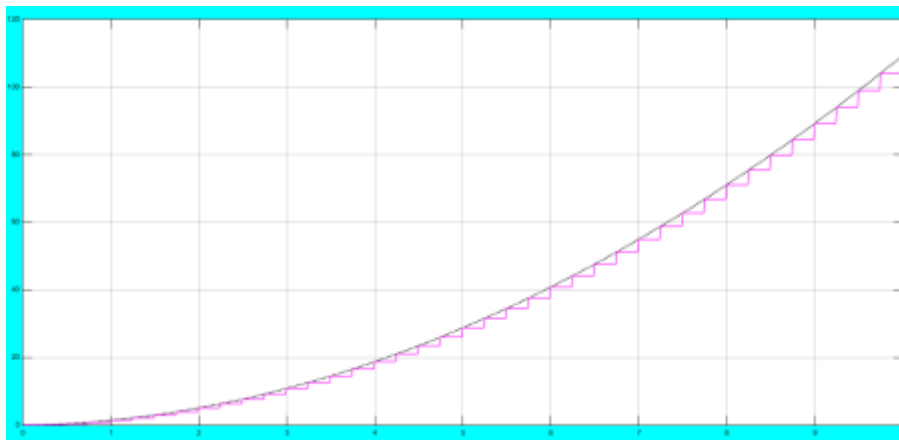
Poziționarea răspunsului dat de modelul RIST (9), față de cel real corespunzător sistemelor (7) și (8), apare în Fig. 8.3c). Se observă că la momentele de discretizare răspunsurile coincid. Astfel, condiția de „realizare invariantă la semnal treaptă” este îndeplinită.



a) $p(t) = x_1(t)$, $v(t) = x_2(t)$ calculate cu (7) și (8)



b) $p[t] = x_1[t]$ calculat cu (9) și (10)



c) $p(t) = x_1(t)$ calculat cu (7) și (8) și $p[t] = x_1[t]$ calculat cu (9) și (10)

Fig. 8.3.

În Fig. 8.4 sunt reprezentate răspunsurile sistemelor (11), (12) și (13) comparativ cu răspunsul sistemului în timp continuu (7). Răspunsurile au fost obținute cu comanda: `plot(td,p,td,pE,td,pD,td,pT)`.

De remarcat decalările răspunsurilor sistemelor (11) și (12) față de răspunsul sistemului (7) – curba roșie, respectiv traversarea repetată a curbei roșii de către curba verde corespunzătoare răspunsului sistemului în timp discret (13) obținut prin metoda trapezului. De fiecare dată este respectată ideea de „aproximare”.

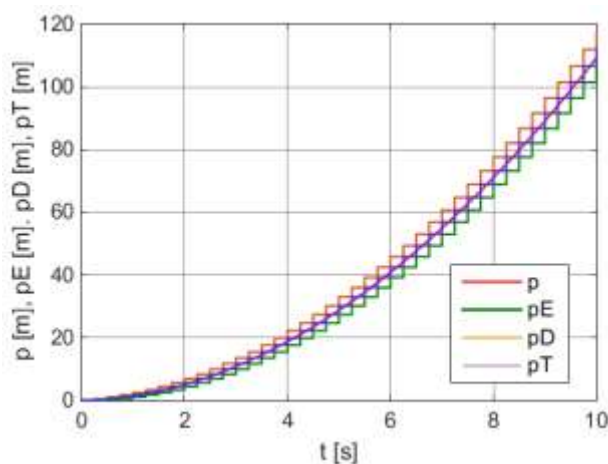


Fig. 8.4. Semnalele $p(t) = x_1(t)$ pentru sistemul în timp continuu, obținut cu (7) și (8), și pentru sistemele în timp discret, obținute cu (11) - metoda Euler (MDR), cu (12) - metoda dreptunghiului (MDA) și cu (13) - metoda trapezului (Tusten).

4. Regula lui Mason

- Regula lui Mason reprezintă o metodă de calcul a funcțiilor de transfer pentru conexiuni de sisteme de tip SISO. Regula lui Mason este o alternativă la calcularea funcțiilor de transfer ale sistemelor prin algebra schemelor bloc. Mai mult, regula lui Mason poate fi folosită cu ușurință și în situațiile în care aplicarea regulilor de reconfigurare din algebra schemelor bloc se dovedește dificilă.
- Rezolvarea temelor din fișa ce însoțește această lucrare de laborator se face pe baza lecției de curs și a problemelor de examen propuse.

5. Tema de casă Nr. 8¹

<i>Nume și prenume</i>	<i>Nr. matricol</i>	<i>$S_1 = \text{suma cifrelor numărului matricol}$</i>	<i>$a = (S_1 + 4) \bmod 7$</i>	<i>Data completării formularului</i>

TEMA DE CASĂ NR. 7

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

1. În modelele Simulink/Xcos transmise se modifică generatorul semnalului de intrare cu un generator de semnal sinusoidal cu frecvența de 2 Hz și fază inițială 0.1 rad. Pentru pasul de discretizare al extrapolatorului de ordinul 0 (ZOH) se consideră trei situații : i) $h = 0.12$ secunde , ii) $h = 0.12 - (a+1) \cdot 0.01$ secunde, iii) $h = 0.12 + (a+2) \cdot 0.01$ secunde.

- 1.1. Să se reprezinte pentru situația i) semnalele de ieșire ale tuturor sistemelor în timp continuu și în timp discret din modelele Simulink date. Timpul de integrare: 4 secunde.

Se inserează graficele semnalelor cerute, indicându-se la ce se referă fiecare grafic.

- 1.2. Să se analizeze comparativ semnalele de ieșire ale sistemului obținut prin metoda Euler în situațiile i) , ii) și iii).

Se inserează graficele celor 3 semnale, indicându-se la ce se referă fiecare grafic.

Se inserează analiza comparativă a celor trei semnale.

2. Aplicații la regula lui Mason

- 2.1. Să se calculeze f.d.t pentru cazurile $d = 0$, $d = 1$ și $d = 4$ din fișierul cu exerciții „211109_CTI_TS_C_09_Anexă.pdf” postat pe Campus virtual. Se răspunde, la alegere, la 2 dintre cele trei situații.

$d = \dots$

$d = \dots$

- 2.2. Să se reprezinte grafele de fluentă pentru structurile din figurile 2.3, 2.5, 14.9. din lucrarea „Girod, B., Signal and Systems, John Wiley and Sons, 2001” și să se calculeze pe baza lor, pentru fiecare caz, f.d.t. Se răspunde, la alegere, la una dintre primele două situații și la cea de a treia situație.

Graful asociat schemei bloc din Fig. 2.3. și calculul f.d.t.

Graful asociat schemei bloc din Fig. 2.5. și calculul f.d.t.

Graful asociat schemei bloc din Fig. 14.9. și calculul f.d.t.

¹ Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS_II-CTI_TC_09.docx.