

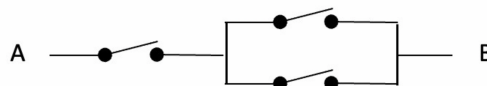
# Pravděpodobnost a statistika - verze 240624A

(0 – 60) bodů, požadované minimum: 30 bodů

## Praktická část - (0 – 50) bodů

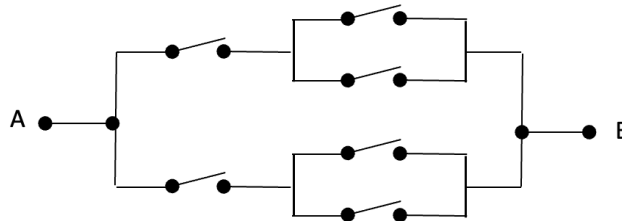
1. Elektrický obvod sloužící k detekci zvýšené hladiny vody v tankeru obsahuje spínače, které jsou za normálních podmínek nastaveny do polohy vypnuto (viz obrázek níže). Pro každý spínač platí, že se samovolně sepne s 4% pravděpodobností, přičemž sepnutí jednotlivých spínačů je na sobě nezávislé.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že za normálních podmínek nedojde k poplachu (nedojde k propojení uzlů A a B), jsou-li spínače zapojeny dle schématu (a)? **(6b)**



Obrázek 1: Schéma (a)

- b) Jaká je pravděpodobnost, že dojde k falešnému poplachu (za normálních podmínek dojde k propojení uzlů A a B), jsou-li spínače zapojeny dle schématu (b)? **(4b)**



Obrázek 2: Schéma (b)

2. Náhodná veličina  $X$  je dána tabulkou pravděpodobností:

$x_i$	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,3	0,3	?

- a) Určete chybějící hodnotu v tabulce, tj. určete  $P(X = 2)$ . **(1b)**
- b) Určete předpis distribuční funkce  $F_X(x)$  náhodné veličiny  $X$ . **(2b)**
- c) Načrtněte graf distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . **(1b)**
- d) Určete modus  $\hat{x}$ , střední hodnotu  $E(X)$  a rozptyl  $D(X)$  náhodné veličiny  $X$ . **(4b)**
- e) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $Y = -2X + 1$ . **(2b)**
3. Životnost přístroje typu AuschusDeLuxe modelujeme náhodnou veličinou  $X$  s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Střední hodnota životností daných přístrojů je 3 roky.
- a) Výrobce dává standardní záruční dobu dva roky. Určete kolik procent přístrojů typu AuschusDeLuxe „doslouží“ před vypršením záruční doby. **(2b)**
- b) Načrtněte graf hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  a v grafu vyznačte (vyšrafuje) plochu odpovídající pravděpodobnosti hledané v úloze (a). **(2b)**
- c) Na kolik dnů by měla být stanovena záruční doba, aby záruční dobu „přežilo“ devadesát pět procent přístrojů daného typu? **(3b)**
- d) Určete  $d \in \mathbb{R}^+$  takové, že  $P(2 < X < d) = 0,1$ . **(3b)**

### Popis datového souboru potřebného pro úlohy 4 a 5:

Byla provedena studie hodnotící propustnost optických modemů čtyř různých výrobců (A, B, C, D) před a po zavedení nové verze komunikačního protokolu. Každý výrobce testoval 100 svých zařízení. Zavedení nové verze protokolu pravděpodobně přispělo k vyšší propustnosti zařízení.

V datovém souboru jsou pro každé testované zařízení uvedeny následující údaje:

- *id* ... identifikační číslo zařízení,
- *vyrobce* ... výrobce zařízení, které bylo testováno (A/B/C/D),
- *propustnost\_pred* ... propustnost zařízení před zavedením nové verze protokolu v megabitech za sekundu (Mbps),
- *propustnost\_po* ... propustnost zařízení po zavedení nové verze protokolu v megabitech za sekundu (Mbps),
- *montaz* ... informace o tom, zda montáž zařízení provedl autorizovaný pracovník, nebo si jej zákazník instaloval sám (profesionál/amatér).

V následujících úkolech bude zapotřebí analyzovat zvýšení propustnosti po zavedení nové verze protokolu, tedy

$$\text{zvyseni} = \text{propustnost\_po} - \text{propustnost\_pred} \text{ (Mbps)}.$$

4. Na základě datového souboru analyzujte **zvýšení** propustnosti zařízení **výrobce A** po zavedení nové verze protokolu. Nezapomeňte ověřit předpoklady pro použití metod statistické indukce.
  - a) Identifikujte odlehlá pozorování a z následujících analýzy je vyřaďte. Uveďte *id* zařízení, která nebyla do další analýzy zařazena. (1b)
  - b) Určete bodový a 95% **levostranný** intervalový odhad střední hodnoty (popřípadě mediánu) **zvýšení** propustnosti zařízení **výrobce A**. (3b)
  - c) Čistým testem významnosti na hladině významnosti 5 % ověřte, zda je **zvýšení** propustnosti zařízení **výrobce A** statisticky významné. Okomentujte výsledek v návaznosti na intervalový odhad z bodu (b). (3b)
  - d) Odhadněte **pravděpodobnost** (bodově a pomocí 95% oboustranného intervalového odhadu), že u náhodně vybraného zařízení **výrobce A** došlo po zavedení nové verze protokolu ke **snížení** propustnosti (tedy, že zvýšení propustnosti pro dané zařízení bylo menší než 0). (3b)
5. **Výrobce A** se rozhodl prozkoumat, zda má to, kdo provedl montáž zařízení **profesionál/amatér** zařízení, vliv na **zvýšení/snížení** propustnosti zařízení po zavedení nové verze protokolu (pouze pro zařízení **výrobce A**). Konkrétně ho zajímá, zda amatérská montáž nevede k méně kvalitní instalaci a tedy i nemožnosti plně využít novou verzi protokolu (což se projeví jako snížení rychlosti po zavedení nové verze protokolu). Tedy je třeba ověřit zda existuje závislost mezi způsobem montáže (profesionální nebo amatérská) a změnou (snížením nebo zvýšením) propustnosti zařízení (Mbps)).
  - a) Uveďte asociační tabulku vhodnou pro analýzu závislosti mezi způsobem montáže (profesionální/amatérská) a změnou (zvýšením/snížením) propustnosti. Uspořádejte tabulku s ohledem na bod (c), tedy exponovaná zařízení jsou ta, která byla instalována **amatérem** a sledovanou událostí je **snížení** propustnosti. (2b)
  - b) Načrtněte graf pro vizualizaci závislosti mezi způsobem montáže (profesionální/amatérská) a změnou (zvýšením/snížením) propustnosti (korespondující s tabulkou uvedenou v bodě (a)) a na základě asociační tabulky, daného grafu a vhodné míry kontingence interpretujte závěry, k nimž jste ohledně sledované závislosti došli. (2b)
  - c) Určete bodový a 95% intervalový odhad relativního rizika **snížení** propustnosti pro zařízení, která byla instalována amatérem vůči těm, která byla instalována profesionálem. Výsledek interpretujte. (3b)

- d) Pomocí intervalového odhadu z bodu (c), rozhodněte na hladině významnosti 5 %, zda je pozorovaná závislost mezi způsobem montáže (profesionální/amatérská) a změnou (zvýšením/snížením) propustnosti statisticky významná. Pokud ano, uveďte který způsob montáže vykazuje statisticky významně větší pravděpodobnost snížení propustnosti. **(3b)**