L0: # Cvičení 5 - Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny

L1: ## Martina Litschmannová, Adéla Vrtková, Michal Béreš

L2: # Přehled rozdělení a jejich funkcí

L3: ## Úvod: Pravděpodobnostní, Kumulativní pravděpodobnostní (Distribuční) a Kvantilová funkce

L4: ### Pravděpodobnostní funkce

L5: - začíná písmenkem \*\*d\*\*: $p = P(X = x)$: p = d...(x, ...)

L6: ### Kumulativní pravděpodobnostní (Distribuční funkce)

L7: - začíná písmenkem \*\*p\*\*: $p = P(X \leq x)$: p = p...(x, ...) - pozor Kumulativní pravděpodobnostní je s alternativní definicí $P(X \leq t)$ - pro naši distribuční funkci $F(t) = P(X<t)$: F(t) = p...(t - 1, ...)

L8: ### Kvantilová funkce

L9: - začíná písmenkem \*\*q\*\*: $p \geq P(X \leq x)$: x = q...(p, ...) - hledá nejmenší $x$ pro které je $P(X \leq x)$ větší než $p$

L10: ## Binomické (Alternativní): $X \sim Bi(n, π),X \sim A(π) = Bi(1, π)$

L11: - počet úspěchů v $n$ Bernoulliho pokusech (případně pro jeden pokus v případě Alternativní) - každý pokus má šanci na úspěch $π$

L12: Pravděpodobnostní funkce P(X = x)

L13: hodnota, pro níž hledáme p-stní funkci

L14: rozsah výběru

L15: pravděpodobnost úspěchu

L16: tímto se dají vypnout warningy

L17: tímto zase zapnout

L18: vykreslíme si pravděpodobnostní funkci

L19: minimálně 0, maximálně n má kladnou pravděpodobnost

L20: Kumulativní pravděpodobnostní funkce P(X <= x)

L21: hodnota, pro níž hledáme kumulativní p-stní funkci

L22: rozsah výběru

L23: pravděpodobnost úspěchu

L24: Distribuční funkce F(x) = P(X < x)

L25: hodnota, pro níž hledáme kumulativní p-stní funkci

L26: rozsah výběru

L27: pravděpodobnost úspěchu

L28: nebo

L29: vykreslíme si distribuční funkci

L30: minimálně 0, maximálně n má kladnou pravděpodobnost

L31: nebo

L32: minimálně 0, maximálně n

L33: zkontrolujeme korektnost na hodnotě 10

L34: minimálně 0, maximálně n

L35: najdi x pro dané q: q = P(X <= x)

L36: h

L37: rozsah výběru

L38: pravděpodobnost úspěchu

L39: Kvantilová funkce (inverzi dist. fce): q = F(x) = P(X < x)

L40: pravděpodobnost pro kterou hledáme kvantil

L41: rozsah výběru

L42: pravděpodobnost úspěchu

L43: ## Hypergeometrické: $X \sim H(N, M, n)$

L44: - počet úspěchů v $n$ závislých pokusech - závislost typu:

L45: - $N$ objektů,

L46: - z toho $M$ objektů se zadanou vlastností,

L47: - výběr velikosti $n$

L48: - \*\*při výběru nevracíme zpět - pravděpodobnost výběru objektu s danou vlastností se mění s každým dalším vybraným objektem\*\*

L49: - \*\*R funkce bere jako parametry \*hyper(k, M, N - M, n)\*\*

L50: - k je počet úspěchů pro které počítáme pravděpodobnost,

L51: - M je počet objektů se zadanou vlastností,

L52: - N-M je počet objektů bez zadané vlastnosti,

L53: - n je ceklová velikost výběru.

L54: Pravděpodobnostní funkce P(X = x)

L55: hodnota, pro níž hledáme p-stní funkci

L56: celkový počet objektů

L57: z toho se zadanou vlastností

L58: velikost výběru

L59: vykreslíme si pravděpodobnostní funkci

L60: minimálně 0, maximálně n nebo M má kladnou pravd.

L61: Distribuční funkce F(x) = P(X < x)

L62: hodnota, pro níž hledáme dist. funkci

L63: celkový počet objektů

L64: z toho se zadanou vlastností

L65: velikost výběru

L66: vykreslíme si Distribuční funkci

L67: minimálně 0, maximálně n nebo M má kladnou pravd.

L68: Kvantilová funkce (inverzi dist. fce): q = P(X < x)

L69: pravděpodobnost pro kterou hledáme kvantil

L70: celkový počet objektů

L71: z toho se zadanou vlastností

L72: velikost výběru

L73: ## Negativně binomické (Geometrické): $X \sim NB(k, π), X \sim Ge(π) = NB(1, π)$

L74: - počet pokusů do $k$. úspěchu (včetně) - každý pokus má šanci na úspěch $π$ - \*\*Negativně binomická NV je v Rku definována jako počet neúspěchů před k-tým úspěchem\*\*

L75: - proto jako první parametr budeme posílat x - k

L76: Pravděpodobnostní funkce P(X = x)

L77: počet pokusů pro který hledáme pravd. fci

L78: požadovaný počet úspěchů

L79: pravd. jednotlivých pokusů

L80: pozor první argument musí být počet neúspěchů

L81: vykreslíme si pravděpodobnostní funkci

L82: minimálně k, maximum neomezeno

L83: hodnoty 0,1,2,3,4 mají P(x)=0

L84: Distribuční funkce F(x) = P(X < x)

L85: počet pokusů pro který hledáme pravd. fci

L86: požadovaný počet úspěchů

L87: pravd. jednotlivých pokusů

L88: pozor první argument musí být počet neúspěchů

L89: vykreslíme si Distribuční funkci

L90: minimálně 0, maximálně n nebo M má kladnou pravd.

L91: Kvantilová funkce (inverzi dist. fce): q = P(X < x)

L92: pravd. pro kvantil

L93: požadovaný počet úspěchů

L94: pravd. jednotlivých pokusů

L95: ## Poissonovo: $X \sim Po(λt)$

L96: - počet událostí v Poissonově procesu v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu) - s hustotou výskytu $λ$ - v čase/ploše/objemu velikosti $t$

L97: Pravděpodobnostní funkce P(X = x)

L98: počet pokusů pro který hledáme pravd. fci

L99: hustota výskytu

L100: pravd. jednotlivých pokusů

L101: vykreslíme si pravděpodobnostní funkci

L102: minimálně 0, maximum neomezeno

L103: Distribuční funkce F(x) = P(X < x)

L104: počet pokusů pro který hledáme pravd. fci

L105: hustota výskytu

L106: pravd. jednotlivých pokusů

L107: vykreslíme si Distribuční funkci

L108: minimálně 0, maximálně n nebo M má kladnou pravd.

L109: Kvantilová funkce (inverzi dist. fce): q = P(X < x)

L110: pravd. pro kvantil

L111: hustota výskytu

L112: pravd. jednotlivých pokusů

L113: # Příklady

L114: ## Příklad 1.

L115: Bridž se hraje s 52 bridžovými kartami, které se rozdají mezi 4 hráče. Vždy 2 hráči hrají spolu. Při rozdávání (13 karet) jste dostali do rukou 2 esa. Jaká je pravděpodobnost, že váš partner bude mít zbývající dvě esa?

L116: X ... počet es mezi 13 kartami

L117: X ~ H(N = 39, M = 2, n = 13)

L118: P(X = 2)

L119: 52-13

L120: výpočet

L121: což je dhyper(2,2,37,13)

L122: graf pravděpodobnostní funkce

L123: všechny možné realizace NV X

L124: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L125: ## Příklad 2.

L126: Pokusy se zjistilo, že radioaktivní látka vyzařuje během 7,5 s průměrně 3,87 α-částice. Určete pravděpodobnost toho, že za 1 sekundu vyzáří tato látka alespoň jednu α-částici.

L127: X ... počet vyzářených alfa částic během 1 s

L128: X ~ Po(lt = 3.87/7.5)

L129: četnost výskytu

L130: za 1 sekundu

L131: parametr Poissonova rozdělení

L132: P(X >= 1) = P(X > 0) = 1 - P(X <= 0)

L133: graf pravděpodobnostní funkce

L134: teoreticky může být vyzářeno až nekonečně mnoho částic,

L135: od jisté hodnoty je pravděpodobnost zanedbatelná

L136: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L137: ## Příklad 3.

L138: Kamarád vás pošle do sklepa, abyste donesl(a) 4 lahvová piva - z toho dvě desítky a dvě dvanáctky. Nevíte, kde rozsvítit, proto vezmete z basy poslepu 4 láhve. S jakou pravděpodobností jste vyhověl(a), víte-li, že v base bylo celkem 10 desítek a 6 dvanáctek?

L139: X ... počet 10°piv mezi 4 vybranými

L140: X ~ H(N = 16, M = 10, n = 4)

L141: P(X = 2)

L142: graf pravděpodobnostní funkce

L143: všechny možné realizace NV X

L144: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L145: ## Příklad 4.

L146: V jednom mililitru určitého dokonale rozmíchaného roztoku se v průměru nachází 15 určitých mikroorganismů. Určete pravděpodobnost, že při náhodném výběru vzorku o objemu 1/2 mililitru bude ve zkumavce méně než 5 těchto mikroorganismu.

L147: X ... počet mikroorganismů v 0.5 ml roztoku

L148: X ~ Po(lt = 15/2)

L149: parametr Poissonova rozd.

L150: P(X < 5) = P(X <= 4)

L151: nebo

L152: graf pravděpodobnostní funkce

L153: teoreticky může být v roztoku až nekonečně mnoho mikroorganismů,

L154: od jisté hodnoty je pravděpodobnost zanedbatelná

L155: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L156: ## Příklad 5.

L157: Na stůl vysypeme 15 mincí. Jaká je pravděpodobnost, že počet mincí ležících lícem nahoře, je od 8 do 15?

L158: X ... počet mincí, které padnou lícem nahoru z celkového množství 15 mincí

L159: X ~ Bi(n = 15, p = 0.5)

L160: P(8 <= X <= 15) = P(X <= 15) - P(X < 8) = P(X <= 15) - P(X <= 7)

L161: jinak: P(8<=X<=15)=P(X>7)=1-P(X<=7)

L162: graf pravděpodobnostní funkce

L163: všechny možné realizace NV X

L164: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L165: ## Příklad 6.

L166: Pravděpodobnost, že se dovoláme do studia rozhlasové stanice, která právě vyhlásila telefonickou soutěž je 0,08. Jaká je pravděpodobnost, že se dovoláme nejvýše na 4. pokus?

L167: X ... počet pokusů než se dovoláme do rozhlasového studia

L168: X ~ NB(k = 1,p = 0.08) nebo G(0.08)

L169: P(X <= 4)

L170: graf pravděpodobnostní funkce

L171: teoreticky můžeme uskutečnit až nekonečně mnoho pokusů,

L172: od jisté hodnoty je pravděpodobnost zanedbatelná

L173: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L174: ## Příklad 7.

L175: V továrně se vyrobí denně 10 % vadných součástek. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li třicet součástek z denní produkce, tak nejméně dvě budou vadné?

L176: X ... počet vadných součástek ze 30 vybraných

L177: X ~ Bi(n = 30, p = 0.1)

L178: P(X >= 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X <= 1)

L179: nebo P(X >= 2) vsechno mimo 0 a 1

L180: graf pravděpodobnostní funkce

L181: všechny možné realizace NV X

L182: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L183: ## Příklad 8.

L184: Ve skladu je 200 součástek. 10 % z nich je vadných. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li ze skladu třicet součástek, tak nejméně dvě budou vadné?

L185: X ... počet vadných součástek ze 30 vybraných z 200

L186: X ~ H(N = 200, M = 20, n = 30)

L187: P(X >= 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X <= 1)

L188: graf pravděpodobnostní funkce

L189: všechny možné realizace NV X

L190: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L191: ## Příklad 9.

L192: V určité firmě bylo zjištěno, že na 33 % počítačů je nainstalován nějaký nelegální software. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci počtu počítačů s nelegálním softwarem mezi třemi kontrolovanými počítači.

L193: X ... počet počítačů s nelegálním softwarem ze 3 kontrolovaných

L194: X ~ Bi(n = 3,p = 0.33)

L195: pravděpodobnostní funkce

L196: všechny možné realizace NV X

L197: hodnoty pravděpodobnostní funkce pro x

L198: zaokrouhlení pravděpodobností na 3 des. místa

L199: dopočet poslední hodnoty do 1

L200: vytvoření tabulky pravděpodobnostní funkce

L201: graf pravděpodobnostní funkce

L202: distribuční funkce

L203: zjednodušený výpis distribuční funkce

L204: ## Příklad 10.

L205: Sportka je loterijní hra, v níž sázející tipuje šest čísel ze čtyřiceti devíti, která očekává, že padnou při budoucím slosování. K účasti ve hře je nutné zvolit alespoň jednu kombinaci 6 čísel (vždy 6 čísel na jeden sloupec) a pomocí křížků tato čísla označit na sázence společnosti Sazka a.s. do sloupců, počínaje sloupcem prvním. Sázející vyhrává v případě, že uhodne alespoň tři čísla z tažené šestice čísel. Jaká je pravděpodobnost, že proto, aby sázející vyhrál, bude muset vyplnit:

L206: Nejprve pravděpodobnost, že vehrajeme v jednom sloupci

L207: Y ... počet uhádnutých čísel v 6 tažených ze 49

L208: Y ~ H(N = 49, M = 6, n = 6)

L209: P-st uhádnutí alespoň 3 čísel v jednom sloupci

L210: P(Y >= 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y <= 2)

L211: ### a)

L212: právě tři sloupce,

L213: X … počet sloupců, které bude muset sázející vyplnit, aby vyhrál

L214: X ~ NB(k = 1, p = pp)

L215: a) P(X = 3)

L216: ### b)

L217: alespoň 5 sloupců,

L218: b) P(X >= 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X <= 4)

L219: ### c)

L220: méně než 10 sloupců,

L221: c) P(X < 10) = P(X <= 9)

L222: ## d)

L223: více než 5 a nejvýše 10 sloupců?

L224: P(5 < X <= 10) = P(X <= 10) - P(X <= 5)

L225: nebo P(X < 11) - P(X < 6)

L226: ## Příklad 11.

L227: Pravděpodobnost, že hodíme 6 na 6stěnné kostce je 1/6. Hážeme tak dlouho, než hodíme šestku 10 krát.

L228: ### a)

L229: Jaká je střední hodnota počtu hodů.

L230: X … hodů kostkou než hodíme 10 šestek

L231: X ~ NB(k = 10, p = 1/6)

L232: ### b)

L233: S kolika hody nejméně musíme počítat, pokud chceme, aby pradvěpodobnost, že se nám podaří naházet 10 šestek, byla alespoň 70%.

L234: P(X <= k) >= 0.7