

# Минимизация ФАЛ

Задача. Методы.

Табличный метод

Метод Квайна-Мак-Класки

Метод неопределенных  
коэффициентов

# Введение

*Цифровые устройства, устройства ВТ в настоящее время широко используются во всех отраслях: связь, телевидение, управление промышленным и бытовым оборудованием, медицина, системы защиты и сигнализации и т. п.*

*Характерной особенностью является использование цифровой вычислительной техники специалистами различного профиля, подавляющее большинство которых не являются профессионалами в этой области.*

*Теоретической базой цифровой техники являются булева алгебра, двоичная арифметика и теория конечных автоматов. Основные функциональные узлы, разработанные на основе этой базы, представлены широкой номенклатурой изделий микроэлектронной техники от простейшего вентиля до самых сложных микропроцессоров.*

*Одна из важнейших задач, с которой приходится сталкиваться разработчикам устройств и систем ВТ – это решение противоречивых проблем связанных с уменьшением затрат, энергопотребления и повышением функциональности устройств и систем.*

# Минимизация функций алгебры логики

**Минимизация** функций алгебры логики (ФАЛ) – это процедура нахождения наиболее простого представления ФАЛ в виде суперпозиции функций, составляющих функционально полную систему, *при одновременной оптимизации ее технической реализации по некоторым критериям в условиях ряда ограничений.*

## Критерии оптимизации :

- Объем оборудования (количество вентилей, корпусов),
- Габариты, Вес,
- Энергопотребление,
- Стоимость,
- Быстродействие,
- Надежность.

# Минимизация функций алгебры логики

## Дополнительные ограничения :

- допустимые к использованию системы элементов,
- число элементов в корпусе,
- коэффициенты объединения по входу и разветвления по выходу логических элементов,
- необходимость реализации системы ФАЛ,
- перечисленные выше критерии оптимизации.

На практике обычно решается задача оптимизации по нескольким или даже одному из критериев. Наиболее часто это делается ***по минимуму необходимого числа базовых логических элементов И, ИЛИ, НЕ***, так как при этом в большинстве случаев удовлетворяются требования получения ***минимальных габаритов, веса, энергопотребления, стоимости, а также повышения быстродействия и надежности.***

# Минимизация функций алгебры логики

На практике решается более простая задача представления ФАЛ в дизъюнктивной или конъюнктивной форме, содержащей наименьшее возможное число букв (например, для СДНФ -- как можно меньше слагаемых, являющихся элементарными произведениями, которые содержат как можно меньше сомножителей). *канонической задачей минимизации ФАЛ*

**Задачу минимизации ФАЛ можно разложить на этапы:**

- 1) Переход от **СДНФ** к **сокращенной ДНФ**
- 2) Переход от **сокращенной ДНФ** к **тупиковой ДНФ (ТДНФ)**, сокращением лишних импликант.
- 3) Переход от **ТДНФ** к **минимальной форме**.

# Методы минимизации ФАЛ

- 1) *Расчетный метод* – метод непосредственных преобразований;
- 2) *Метод Квайна*;
- 3) ***Расчетно-табличный метод***  
***(метод Квайна – Мак'Класски)***;
- 4) *Метод Петрика*;
- 5) ***Табличный метод (метод карт Карно)***;
- 6) ***Метод неопределенных коэффициентов***;
- 7) *Метод гиперкубов*;
- 8) *Метод факторизации*;
- 9) *Метод функциональной декомпозиции*;
- ...

## Табличный метод

В данном методе применяются или *диаграммы Вейча* или *карты Карно*, которые отличаются друг от друга расположением столбцов и строк.

В картах **Карно** порядок следования : **00 01 11 10**.

В диаграммах **Вейча** порядок следования : **00 01 10 11**.

Позиции наборов располагаются в соответствии с циклическим кодом Грея. Наборы **соседние**, если различаются только в одном разряде.

Эталонная и рабочая карты Карно для функции  $n=3$ :

	$x_1$			
$x_2$	6	7	5	4
	2	3	1	0
	$x_0$			

$y$	$x_1$			
	1	0	1	1
$x_2$	0	1	1	0
	$x_0$			

# Правила минимизации для карт Карно

1. В карте Карно группы единиц (ДНФ) необходимо покрыть контурами. Внутри контура должны находиться только единицы. (соответствует операции *склеивания* - нахождения импликант данной функции).
2. Количество единиц контура должно быть степенью двойки (1, 2, 4, 8, ...).
3. Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.
4. Все единицы в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. Любая единица может входить в контуры произвольное количество раз.
5. Множество контуров, покрывающих все единицы функции, образуют тупиковую ДНФ.
6. В элементарной конъюнкции, которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри контура.
7. На основании закона тавтологии любая единичная клетка может быть включена в любое количество контуров, для получения минимальной ДНФ нужно стремиться к отсутствию лишних покрытий.



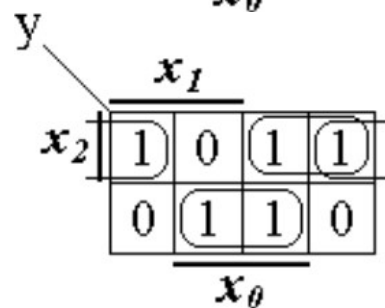
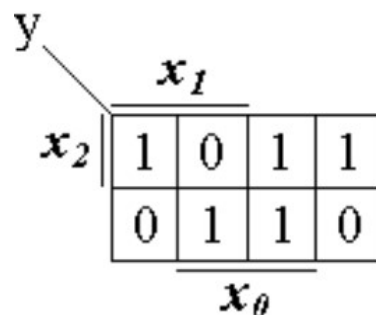
# Табличный метод

Пример. ФАЛ, заданную таблицей истинности (табл. 1), можно представить следующими выражениями

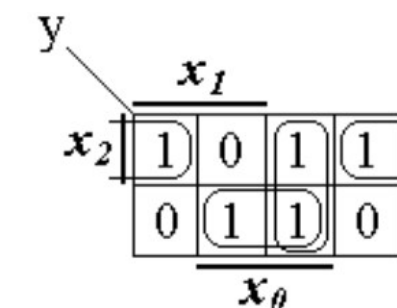
№ наб.	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$y$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$y = x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_1 x_0 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \quad (1)$$

$$y = x_2 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0 \quad (2)$$



$$y = x_2 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0$$



$$y = x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0 + \bar{x}_1 x_0$$

## Эталонные карты Карно для $n=4, 5$

а)

		$x_1$					
		10	11	9	8		
$x_3$	14	15	13	12	$x_2$		
	6	7	5	4			
	2	3	1	0			
		$x_0$					

б)

		$x_2$				$x_1$					
		20	21	23	22	18	19	17	16		
$x_4$	28	29	31	30	26	27	25	24	$x_3$		
	12	13	15	14	10	11	9	8			
	4	5	7	6	2	3	1	0			
		$x_0$				$x_0$					

**Пример.  $n=5$**  Для клетки с набором **25** на рис. 4,б соседними являются клетки с номерами наборов 9, 27, 17, 24 и 29. Для клетки с набором **2** на рис. 4,б соседними являются клетки 3, 10, 0, 18 и 6. Для клетки с набором **43** на рис. 4,в соседними являются клетки с наборами 59, 42, 35, 41 и 47, 11. Для клетки с набором **22** на рис. 4, в соседними являются клетки с наборами 23, 30, 20, 6 и 54, 18.

## Эталонная карта Карно для n= 6

B)

$x_2$				$x_1$					
$x_5$	36	37	39	38	34	35	33	32	$x_3$
	44	45	47	46	42	43	41	40	
	60	61	63	62	58	59	57	56	
	52	53	55	54	50	51	49	48	
$x_4$	20	21	23	22	18	19	17	16	$x_3$
	28	29	31	30	26	27	25	24	
	12	13	15	14	10	11	9	8	
	4	5	7	6	2	3	1	0	
$x_0$				$x_0$					

# Минимизация на картах Карно для n=4

а)

б)  $y_1$

в)  $y_2$

г)  $y_2$

д)  $y_3$

е)  $y_3$

$y_0 = \bar{x}_2 \bar{x}_0$   $y_1 = x_3 x_2 \bar{x}_0 + x_3 \bar{x}_2 x_0 + x_2 x_1 x_0 + \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$   $y_2 = x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0$

$\bar{x}_3 x_2 x_0 \oplus x_1$

## Минимизация на картах Карно для n= 5

a)  $y_4$

	$x_2$				$x_1$				
$x_4$	1	1	1	1	1	1	1	1	$x_3$
	1	0	1	0	0	0	0	1	
	0	0	1	0	0	0	1	0	
	0	0	1	0	0	0	0	0	
	$x_0$				$x_0$				

б)  $y_5$

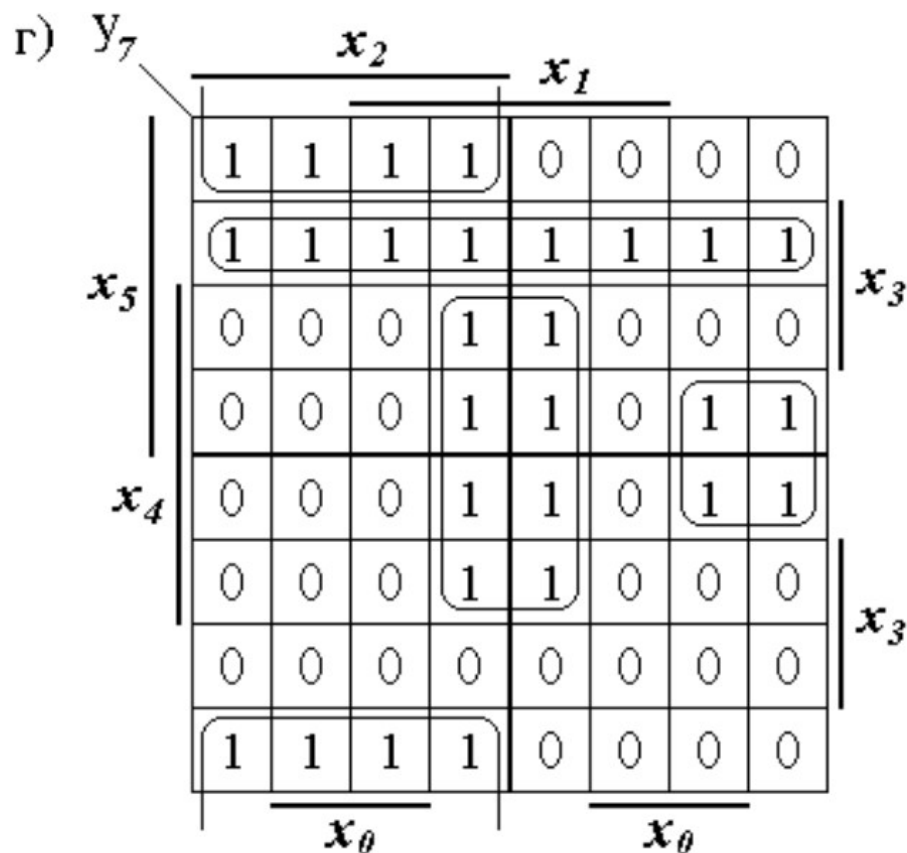
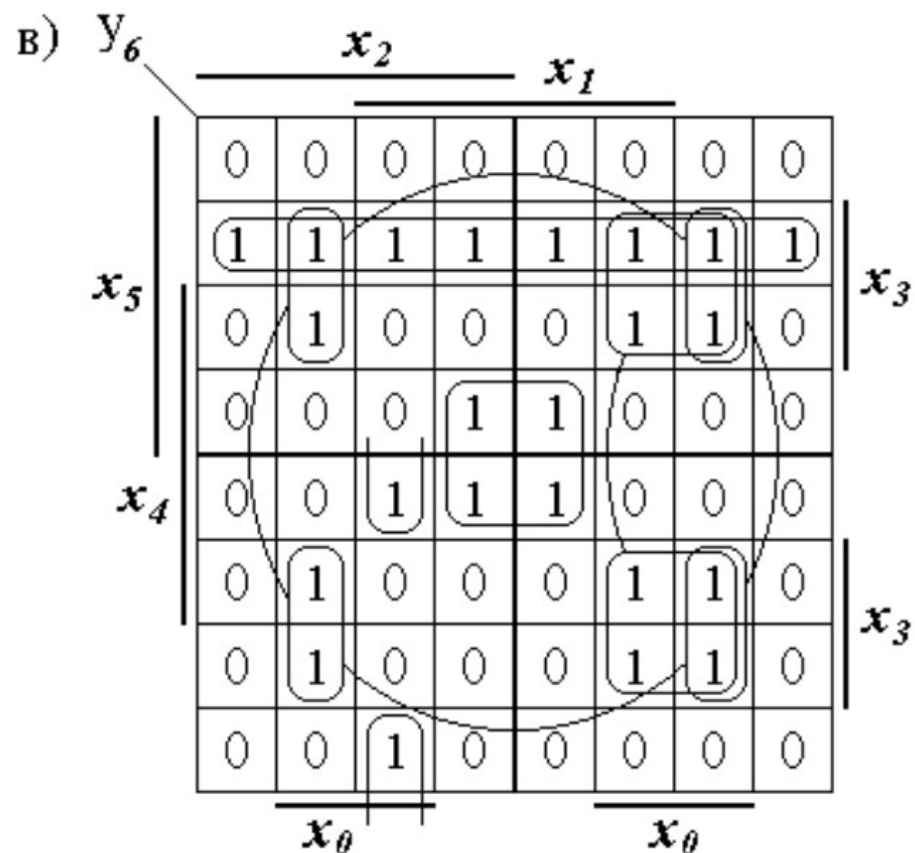
	$x_2$			$x_1$				
$x_4$	1	0	0	1	1	0	0	0
	1	0	0	1	1	0	0	1
	1	0	0	1	1	0	0	1
	1	0	0	1	1	0	1	1
	$x_0$			$x_0$				

$x_3$

$$y_4 = x_4 \bar{x}_3 + x_4 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0 + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$

$$y_5 = x_3 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

## Минимизация на картах Карно для n= 6



$$Y_6 = x_3 \bar{x}_2 x_0 + x_3 \bar{x}_1 x_0 + x_5 \bar{x}_4 x_3 + x_4 \bar{x}_3 x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_5 \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

$$Y_7 = x_5 \bar{x}_4 x_3 + x_4 x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 + x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

## Минимизация неполностью определённой ФАЛ

Diagram illustrating a 4x4 truth table for a function  $y_8$  with inputs  $x_1, x_2, x_3$ . The output  $y_8$  is indicated by a line pointing to the top-left corner of the table.

$x_1$				
$x_3$	×	×	0	0
	×	×	×	×
	1	1	0	0
	0	0	0	0
$x_2$				
$x_0$				

The diagram shows a 4x4 grid of cells. The top row is labeled  $x_1$  and the bottom row is labeled  $x_2$ . The left column is labeled  $x_3$  and the right column is labeled  $x_0$ . The output  $y_8$  is indicated by a line pointing to the top-left corner of the grid. The cells contain the following values:

- Row 1: ×, ×, 0, 0
- Row 2: ×, ×, ×, ×
- Row 3: 1, 1, 0, 0
- Row 4: 0, 0, 0, 0

The cells containing × and 1 are grouped by a rounded rectangle, indicating they are part of the same minterm.

$$y_8 = x_2 x_1$$

# Достоинства и недостатки табличного метода минимизации ФАЛ

## *Достоинства:*

1. Основным достоинством применения карт Карно является компактность, простота и наглядность представления полностью и неполностью определенных функций.
2. Их применение оправдано для  $n = 2 \div 6$ , а при определенных навыках даже для  $n = 7$  и  $8$ , что соответствует большинству реально встречающихся инженерных задач.
3. Карты Карно можно использовать для минимизации ФАЛ, заданных как в СДНФ, так и в СКНФ.
4. Удобно минимизировать системы булевых функций, так как на картах Карно легко выделять общие части реализуемой системы ФАЛ.
5. Легко находятся минимальные комбинации контуров по их виду на карте Карно.
6. Для построения карты Карно не обязательно задавать её в СДНФ или СКНФ (можно подставить значения наборов в любой вид ФАЛ и заносить значения ФАЛ на этом наборе в соответствующую клетку карты Карно).
7. Карты Карно сразу позволяют реализовать первые два этапа минимизации (склеивание и выявление лишних импликант).

## *Недостатки:*

1. Затруднительно использовать карты Карно при  $n > 6$ .
2. Метод не является алгоритмически систематическим, многое зависит от навыков разработчика. Удобство обращения и экономия времени во многом зависит от его способности распознавать оптимальные конфигурации покрытия карт Карно.



# Метод Квайна-Мак'Класски

Метод состоит из последовательного выполнения этапов:

1. Нахождение первичных импликант;
2. Расстановка меток;
3. Нахождение существенных импликант;
4. Вычеркивание лишних столбцов;
5. Вычеркивание лишних первичных импликант;
6. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами.

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

Элементарная конъюнкция ранга  $n$  = **минитерм** ранга  $n$ .

$$y = f(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 1. Нахождение первичных импликант;

*Для всех минтермов функции определяют вес. Все минитермы функции, вес которых отличается на 1 попарно сравнивают. Записывают новый минитерм ранга  $n-1$ , на месте разряда с различными значениями записывают  $\sim$ . Полученные минитермы ранга  $n-1$  сравнивают попарно с учетом  $\sim$  и получают минитермы ранга  $n-2$  и т.д. до тех пор пока это возможно. Минитермы для которых произошло склеивание отмечают.*

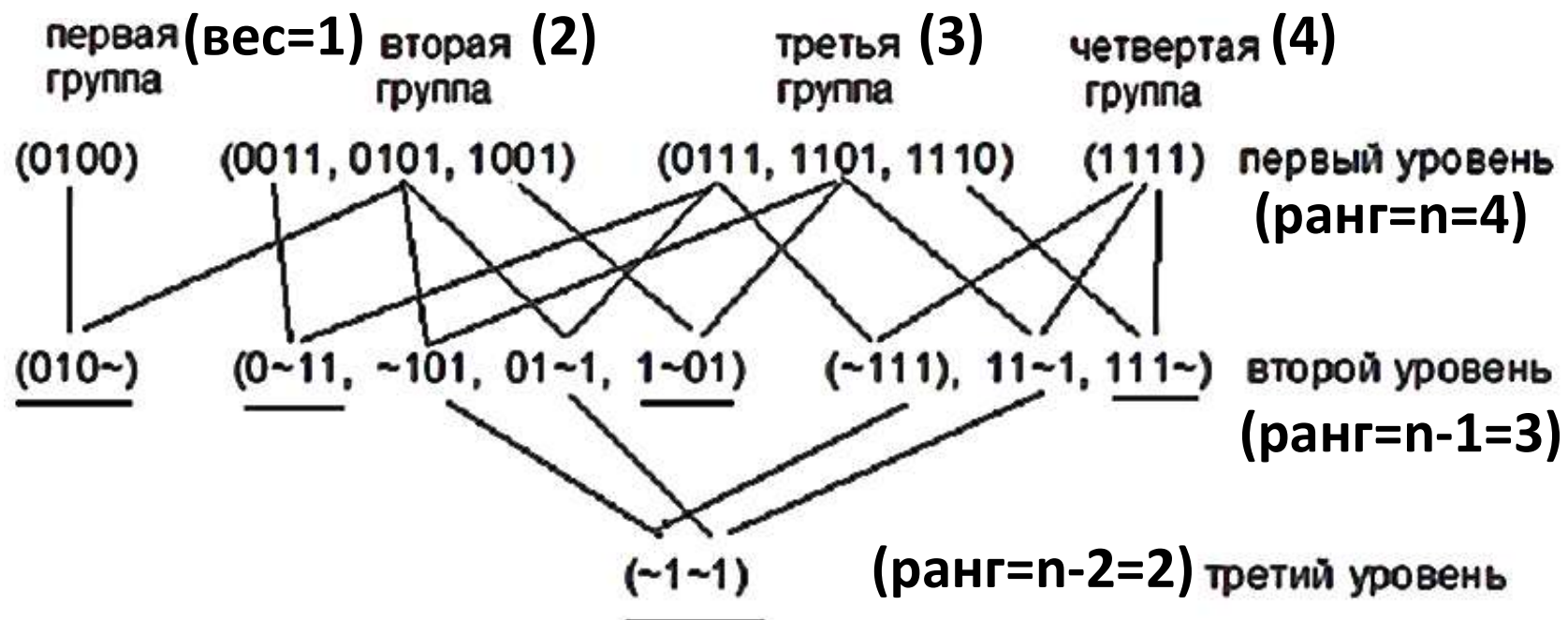
*Все неотмеченные минитермы – **первичные** или **простые импликанты**.*

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = \vee(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 1. Нахождение первичных импликант;



**Первичные импликанты:** 010~, 0~11, 1~01, 111~, ~1~1

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 2. Расстановка меток;

Для данной функции  $f(x_1, x_2, x_3) = VM_i$ ,

где  $M_i$  – простые импликанты полученные на первом этапе.

Для нахождения МДНФ нужно найти минимальное подмножество  $M_i$ , покрывающее конъюнкции исходной СДНФ.

Составляется таблица, строки - первичные импликанты минимизируемой функции, столбцы - исходные минитермы.

На пересечении ставится отметка, если первичная импликанта входит в соответствующий минитерм.

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = \vee(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 2. Расстановка меток;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 3. Нахождение существенных импликант;

*Если в столбце только одна метка, то первичная соответствующая импликанта – **существенная**.*

*Существенная импликанта не может быть исключена из результата, т.к. без нее не будет полного покрытия исходных минитермов.*

*Поэтому для сокращения размерности таблицы впоследствии вычеркивают строки с существенными импликантами и вычеркивают столбцы, которые они покрывают.*

**Существенные импликанты:  $0\sim 11$ ,  $010\sim$ ,  $1\sim 01$ ,  $111\sim$**

## Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

### 3. Нахождение существенных импликант;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

Существенные импликанты: 0~11, 010~, 1~01, 111~

## Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

### 4. Вычеркивание лишних столбцов;

	0011 <sup>v</sup>	0100 <sup>v</sup>	0101 <sup>v</sup>	0111 <sup>v</sup>	1001 <sup>v</sup>	1101 <sup>v</sup>	1110 <sup>v</sup>	<sup>v</sup> 1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
<del>~1~1</del>			v	v		v		v



## Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = \vee(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

### 4. Вычеркивание лишних первичных импликант;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
<del>~1~1</del>			<del>v</del>	<del>v</del>		<del>v</del>		<del>v</del>

# Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

## 5. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами;

*Выбирается такая совокупность первичных импликант, которая включает метки во всех столбцах (как минимум, по одной в каждом столбце).*

*При нескольких возможных вариантах, предпочтение отдается варианту с минимальным суммарным числом переменных в простых импликантах, образующих покрытие.*

**!!!** *В приведенном примере самая короткая конъюнкция ( **$\sim 1 \sim 1$** ), покрывающая наибольшее число минитермов, в решение не вошла.*

## Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

**5. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами;**

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v

*Тогда МДНФ:*  $y = \underline{x}_3 \underline{x}_2 \underline{x}_1 + \underline{x}_3 x_1 x_0 + x_3 \underline{x}_1 x_0 + x_3 x_2 x_1$

# Метод Неопределенных коэффициентов

Метод состоит из последовательного выполнения этапов:

1. Представляем функцию  $f(x_1, x_2, x_3)$  в виде ДНФ с неопределенными коэффициентами;
2. Задаем все возможные значения аргументов  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  и приравниваем к полученному значению функции 0 или 1;
3. Составляем систему уравнений для коэффициентов и приравниваем, соответственно, к 0 или 1 значению функции;
4. Все коэффициенты в уравнениях с 0 значением функции также равны 0;
5. Вычеркиваем из уравнений с 1 значением функции все коэффициенты равные 0, из уравнений с 0 значениями  $f(x_1, x_2, x_3)$
6. В полученных уравнениях оставляем коэффициенты с минимальным количеством индексов, которые присутствуют в максимальном количестве строк;
7. Выбираем минимальное покрытие в котором присутствуют коэффициенты с разными индексами, отсюда получаем МДНФ.

## Метод Неопределенных коэффициентов

Представление функции в СДНФ с неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & K_1^1 x_1 \vee K_1^0 \bar{x}_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_2^0 \bar{x}_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_3^0 \bar{x}_3 \vee \\ & \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 \vee K_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \\ & \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \bar{x}_3 \vee K_{13}^{01} \bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \\ & \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee K_{23}^{10} x_2 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{01} \bar{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{00} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \\ & \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\ & \vee K_{123}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{011} \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \\ & \vee K_{123}^{001} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

Здесь представлены все возможные конъюнкции, которые могут входить в ДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3)$

## Метод Неопределенных коэффициентов

Система уравнений для определения значений коэффициентов на различных наборах  $f(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\left. \begin{aligned} K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= f(1,1,1) \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} &= f(1,1,0) \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= f(1,0,1) \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= f(1,0,0) \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= f(0,1,1) \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= f(0,1,0) \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= f(0,0,1) \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= f(0,0,0) \end{aligned} \right\}$$



## Метод Неопределенных коэффициентов

Пример:  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Составляем систему:

$$\left. \begin{aligned} K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= 1 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

## Метод Неопределенных коэффициентов

Из уравнений с 0 значениями  $f(x_1, x_2, x_3)$  получаем:

$$K_1^0 = K_2^0 = K_2^1 = K_3^0 = K_3^1 = K_{12}^{00} = K_{12}^{01} = K_{13}^{00} = K_{13}^{01} = K_{23}^{01} = K_{23}^{10} = K_{23}^{11} = K_{123}^{001} = K_{123}^{010} = K_{123}^{011} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{101} = 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\ K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} K_1^1 = 1 \\ K_1^1 = 1 \\ K_1^1 = 1 \\ K_1^1 \vee K_{23}^{00} = 1 \\ K_{23}^{00} = 1 \end{array} \right\} *$$

$$* K_{12}^{11} = K_{12}^{01} = K_{13}^{11} = K_{13}^{10} = K_{123}^{111} = K_{123}^{110} = K_{123}^{101} = K_{123}^{100} = K_{123}^{000} = 0$$

Отсюда получаем МДНФ:  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$



# Достоинства и недостатки МКМК и МНК

## *Достоинства:*

1. Основным достоинством применения указанных методов это возможность их использоваться при большом числе переменных  **$n = 16$  и более** в профессиональных разработках, они ориентированы на использование в САПР с применением ЭВМ для минимизации полностью и не полностью определенных функций.
2. Методы КМК и МНК можно использовать для минимизации ФАЛ, заданных как в СДНФ, так и в СКНФ.
4. Удобно минимизировать системы булевых функций, так как легко выделять общие части реализуемой системы ФАЛ.
5. Методы являются алгоритмически систематическим, легко формализуются и легко алгоритмизируются, не зависят от навыков разработчика.
6. Методы позволяют последовательно реализовать все этапы минимизации (склеивание и выявление лишних импликант, получение минимальных покрытий).

## *Недостатки:*

1. Затруднительно использовать методы для числа переменных  $\geq 6$  для ручной минимизации.
2. Методы не является алгоритмически инвариантными - время работы метода растёт экспоненциально с увеличением входных данных. Поэтому для функций с очень большим количеством переменных используют **эвристические** алгоритмы.

# Вопросы?

