аксиомы в булевой алгебре:

1) законы коммутативности:

$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$

2) законы ассоциативности:

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$x + (y + z) = (x + y) + z$

3) законы дистрибутивности:

$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

4) законы тождества:

$x + 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$

5) законы дополнения:

$x + x' = 1 \qquad x \cdot x' = 0$

$\forall x, y$ выполняются соотношения

1) законы идемпотентности:

$x + x = x \qquad x \cdot x = x$

2) свойства констант:

$x + 1 = 1 \qquad x \cdot 0 = 0$

3) законы поглощения:

$x + (x \cdot y) = x \qquad x \cdot (x + y) = x$

1) $x + x = x$

$\square$

л. ч $= x + x =$ [закон тождества $x \cdot 1 = x$] $= (x+x) \cdot 1 =$

$=$ [зк. дополнения $x + x' = 1$ замена 1 на $x + x'$] $= (x + x) \cdot (x + x') =$

$=$ [закон дистрибутив. $x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$] $= x + (x \cdot x') =$

$=$ [закон дополнения $x \cdot x' = 0$] $= x + 0 =$ [закон тождества $x + 0 = x$] $=$

$x =$ пр. ч $\blacksquare$

2) св-во констант $x + 1 = 1$

$\square$

л.ч. $= x + 1 =$ [закон тождества $x \cdot 1 = x$] $= (x+1) \cdot 1 =$

$=$ [закон дополнения $x + x' = 1$, заменю 1 на $x + x'$] $= (x + 1) \cdot (x + x') =$

$=$ [закон дистрибутивности $x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$] $= x + (1 \cdot x') =$

$=$ [закон коммуникативности $x \cdot y = y \cdot x$] $= x + (x' \cdot 1) =$ [закон тождества $x \cdot 1 = x$] $=$

$= x + x' =$ [закон дополнения $x + x' = 1$] $= 1 =$ пр. ч $\blacksquare$

3) закон поглощения $x + (x \cdot y) = x$

$\square$

$л.ч. = \underline{x} + (x \cdot y) = \left[\begin{matrix} \text{закон тождества} \\ \underline{x} \cdot 1 = \underline{x} \end{matrix}\right] = (\underline{x} \cdot \underline{1}) + (\underline{x} \cdot \underline{y}) =$

$= \left[\begin{matrix} \text{закон дистрибутивности} \\ \underline{x} \cdot (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} \cdot \underline{y}) + (\underline{x} \cdot \underline{z}) \end{matrix}\right] = x \cdot (1 + y) =$

$= \left[\begin{matrix} \text{закон коммуникативности} \\ x + y = y + x \end{matrix}\right] = x \cdot (y + 1) = \left[\begin{matrix} \text{свойства} \\ \text{констант} \\ x + 1 \end{matrix}\right] =$

$= x \cdot 1 = \left[\begin{matrix} \text{закон тождества} \\ x \cdot 1 = x \end{matrix}\right] = x = пр.ч$ $\blacksquare$

2.23 Закон единственности дополнения

$$\forall x \quad \exists!\, x' : \quad \left.\begin{matrix} x + x' = 1 \\ x \cdot x' = 0 \\ x + x^* = 1 \\ x \cdot x^* = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow x' = x^*$$

$\square$

1) $\underline{x'} = \left[\begin{matrix} \text{закон тождества} \\ x \cdot 1 = x \end{matrix}\right] = x' \cdot 1 = \left[\begin{matrix} \text{по условию} \\ x + x^* = 1 \end{matrix}\right] =$

$= x' \cdot (x + x^*) = \left[\begin{matrix} \text{закон дистрибутивности} \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{matrix}\right] =$

$= (x' \cdot x) + (x' \cdot x^*) = \left[\begin{matrix} \text{по усл.} & \text{закон коммут} \\ x \cdot x' = 0, & x \cdot y = y \cdot x \end{matrix}\right] =$

$= 0 + (x' \cdot x^*) = \left[\begin{matrix} \text{закон коммут.}; & \text{закон. тожд.} \\ x + y = y + x, & x + 0 = x \end{matrix}\right] = \underline{x' \cdot x^*}$

2) $\underline{x^*} = \left[\begin{matrix} \text{закон. тожд} \\ x \cdot 1 = x \end{matrix}\right] = x^* \cdot 1 = \left[\begin{matrix} \text{по усл.} \\ x + x' = 1 \end{matrix}\right] = x^* \cdot (x + x') =$

$= \left[\begin{matrix} \text{закон дистр.} \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{matrix}\right] = (x^* \cdot x) + (x^* \cdot x') =$

$= \left[\begin{matrix} \text{закон коммут.} \\ x \cdot y = y \cdot x \end{matrix}\right] = (x \cdot x^*) + (x' \cdot x^*) = \left[\begin{matrix} \text{по усл.} \\ x \cdot x^* = 0 \end{matrix}\right] =$

$= 0 + (x' \cdot x^*) = \left[\begin{matrix} \text{закон коммут} \\ x + y = y + x \end{matrix}\right] = (x' \cdot x^*) + 0 = \left[\begin{matrix} \text{з-н. тожд} \\ x + 0 = x \end{matrix}\right] =$

$= \underline{x' \cdot x^*}$

3) т.е. $x' = x' \cdot x^*$ и $x^* = x' \cdot x^* \Rightarrow x' = x^*$ $\blacksquare$

2.24) $\forall\, x, y$

1) закон инволюции $(x')' = x$

2) дополнение законов тождества

$$0' = 1 \quad 1' = 0$$

3) Законы де Моргана

$$(x+y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

1) $\square$ $x' + x = \left[\begin{matrix}\text{зк. коммут} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = x + x' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x+x'=1\end{matrix}\right] = 1$

$x' \cdot x = \left[\begin{matrix}\text{коммут} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = x \cdot x' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x\cdot x'=0\end{matrix}\right] = 0$

$\Rightarrow$ x - это дополнение для x', т.е. $x = (x')'$ $\blacksquare$

2) $\square$ $\cancel{0+1=1}$ $0 \cdot 1 = 0$ $0' + 0 = \left[\begin{matrix}\text{зк. коммутатив.} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = 0 + 0' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x+x'=1\end{matrix}\right] = 1$

$0' \cdot 0 = \left[\begin{matrix}\text{зк. коммут.} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = 0 \cdot 0' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x x'=0\end{matrix}\right] = 0$

$\Rightarrow 0' = 1$ $\blacksquare$

$\square$ $1' + 1 = \left[\begin{matrix}\text{зк. комм.} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = 1 + 1' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x+x'=1\end{matrix}\right] = 1$ $\Rightarrow 1' = 0$ $\blacksquare$

$1' \cdot 1 = \left[\begin{matrix}\text{зк. комм.} \\ x+y=y+x\end{matrix}\right] = 1 \cdot 1' = \left[\begin{matrix}\text{дополн} \\ x\cdot x'=0\end{matrix}\right] = 0$

3) а) $(x+y)' = x' \cdot y'$ $\square$

$(x+y) + x' \cdot y' = [\text{зк дистр}] = ((x+y)+x') \cdot ((x+y)+y') =$

$= [\text{зк комм}] = ((y+x)+x') \cdot ((x+y)+y') = [\text{зк. ассоц.}] =$

$= (y + (x+x')) \cdot (x + (y+y')) = [\text{зк доп.}] = (y+1) \cdot (x+1) =$

$= [\text{Св. констант}] = 1 \cdot 1 = [\text{зк. тожд.}] = \underline{1}$

$(x+y)\cdot(x'\cdot y') =$ [зк. комм.] $= (x'\cdot y')\cdot(x+y) =$ [зк. дист]
$((x'\cdot y')\cdot x) + ((x'\cdot y')\cdot y) =$ [зк. комм.] $= (x\cdot(x'\cdot y')) + ((x'\cdot y')\cdot y) =$
$=$ [зк. ассоц.] $= ((x\cdot x')\cdot y') + (x'\cdot(y'\cdot y))) =$ [зк. комм.] $=$
$= ((x\cdot x')\cdot y') + (x'\cdot(y\cdot y'))) =$ (зк. доп.) $= (0\cdot y') + (x'\cdot 0) =$
$=$ [зк. комм.] $= (y'\cdot 0) + (x'\cdot 0) =$ [св. конст] $= 0+0 =$
$=$ [зк. тожд] $= \underline{0} \Rightarrow$ по зк. единственност дополнения $(x\cdot y)' = x'+y'$ ▨

б) $(x\cdot y)' = x'+y'$

□ $(x\cdot y)\cdot(x'+y') =$ [зк. дист.] $= ((x\cdot y)\cdot x') + ((x\cdot y)\cdot y') =$
$=$ [зк. коммут.] $= ((y\cdot x)\cdot x') + ((x\cdot y)\cdot y') =$ [зк. ассоц.] $=$
$= (y\cdot(x\cdot x')) + (x\cdot(y\cdot y')) =$ [зк. доп] $= (y\cdot 0) + (x\cdot 0) =$ [св. конст] $=$
$= 0\cdot 0 =$ [зк. тожд.] $= \underline{0}$

$(x\cdot y) + (x'+y') =$ [зк комм.] $= (x'+y') + (x\cdot y) =$ [зк. дист] $=$
$= ((x'+y') + x)\cdot((x'+y') + y) =$ [зк комм] $=$
$= (x + (x'+y'))\cdot((x'+y') + y) =$ [зк. ассоц] $= ((x+x')+y')\cdot(x'+(y'+y)) =$
$=$ [зк. комм] $= ((x+x')+y')\cdot(x'+(y+y')) =$ [зк. доп] $=$
$= (1+y')\cdot(x'+1) =$ [зк. комм] $= (y'+1)\cdot(x'+1) =$ [св. конст] $=$
$= 1\cdot 1 =$ [зк. тожд] $= \underline{1} \Rightarrow$ по зк. единственности дополнения $(x\cdot y)' = x'+y'$ ▨