



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА»

---

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
Кафедра информационных технологий и электронного обучения

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №6**

**«Численные методы решения дифференциальных уравнений»**

По дисциплине: Вычислительная математика

(наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

Зав. кафедры ИТиЭО д-р пед.наук.:

Власова Е.З

Выполнили студенты 2 курса

Бережной М.  
Панасюженкова О.  
Вольных М.  
Щербинин А.

Санкт-Петербург  
2021

**Цель:** разработать программы решения дифференциальных уравнений с использованием численных методов Эйлера и Рунге-Кутты.

**Оборудование:** ПК, языки программирования JavaScript, HTML, CSS.

## Часть 1

**Постановка задачи:** вычислить с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

**Математическая модель:**

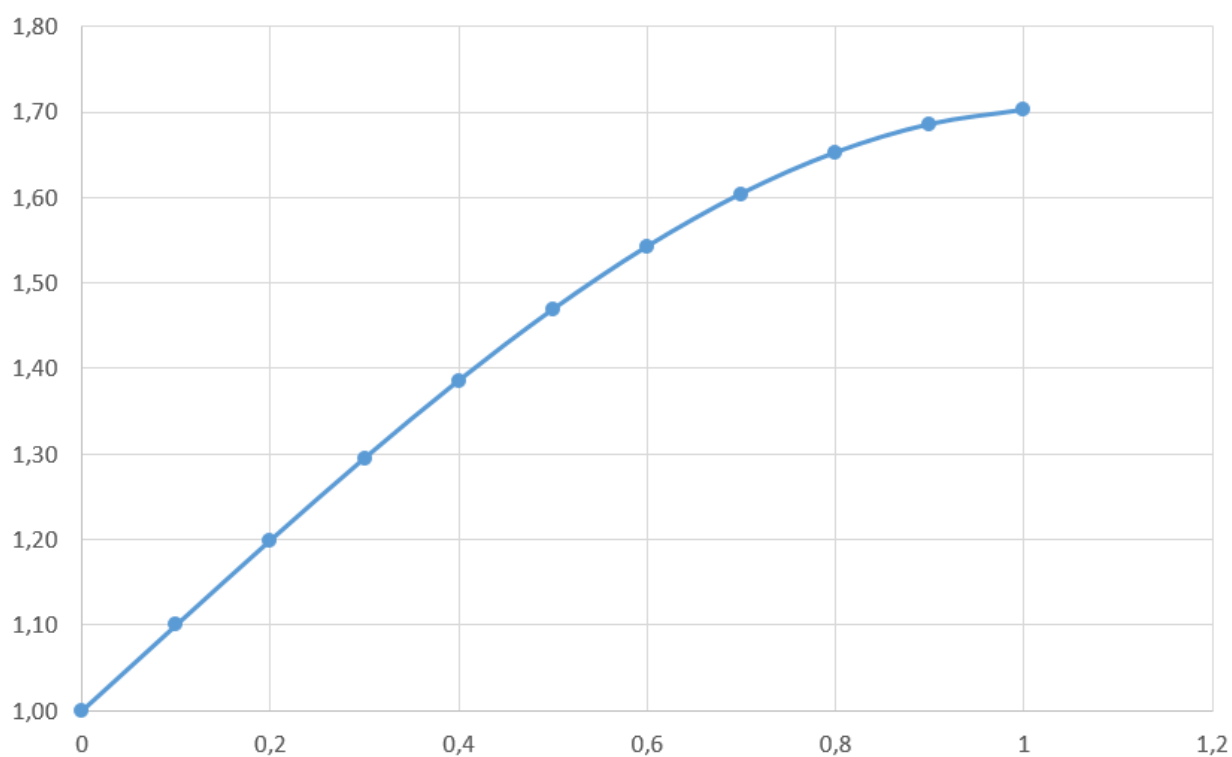
$$y' = y*(1 - x) \text{ на отрезке } [0; 1]$$

**Список идентификаторов:**

Имя переменной	Тип	Значение
a	number	Нижний предел интегрирования x
b	number	Верхний предел интегрирования x
n	number	Кол-во разбиений x
inst	text	Вводимая функция
ny	number	Кол-во разбиений y
h	number	Значения шага
F	Function	Функция вычисления
x0	number	Начальное значение x
y0	number	Начальное значение y
x	number	Значение $x_i$
y	number	Значение $y_i$
k1	number	Промежуточная переменная
k2	number	Промежуточная переменная
k3	number	Промежуточная переменная
k4	number	Промежуточная переменная
i	number	Параметр цикла
Meth	text	Выбранный метод вычисления
res_x	array	Массив значений x
res_y	array	Массив значений y

### Метод Эйлера:

n	x	y
0	0	1,00
1	0,1	1,10
2	0,2	1,20
3	0,3	1,29
4	0,4	1,39
5	0,5	1,47
6	0,6	1,54
7	0,7	1,60
8	0,8	1,65
9	0,9	1,68
10	1	1,70



## Метод Рунге-Кутта:

n	x	y
0	0	1,00
1	0,1	1,10
2	0,2	1,20
3	0,3	1,29
4	0,4	1,38
5	0,5	1,45
6	0,6	1,52
7	0,7	1,58
8	0,8	1,62
9	0,9	1,64
10	1	1,65

## Меню:

Метод Эйлера ▼

Дифференциальное уравнение:

начальные условия  $y(x_0) =$    $x_0 =$

На отрезке от:  До:

Кол-во разбиений:

Ответ:

## Код меню (html):

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <head>
    <meta charset="utf-8">
    <style>

    </style>
  </head>
  <body >
    <link href='style.css' rel='stylesheet' type='text/css'>

    <h1><p align="center">Введите дифференциальное уравнение</p></h1>
    <h3><p align="center"><a href="..\menu.html" >Обратно в меню</a></p></h3>
    <selection class="container">
```

```

<div class="dropdown">
  <select class="dropdown" id="method">

    <option value="type_left">Метод Эйлера</option>

    <option value="type_right">Метод Рунге-Кутты</option>

  </select>
</div>
</selection>

<div><p>Дифференциальное уравнение:  $y' = y(1-x)$ 
id="inst"></p></div>
<p>начальные условия  $y(x_0) =$  <input type="number" value = "1" id="y0">  $x_0 =$ 
<input type="number" value = "0" id="x0"></p>
<p>На отрезке от: <input type="number" value = "" id="a"> До: <input
type="number" value = "" id="b"></p>
<p>Кол-во разбиений: <input type="number" value = "" id="n"></p>
Otvet:
<div id="container"></div>

<button id="bt" onclick="">Выполнить задание</button>
  <script src="script.js"></script>
</body>
</html>

```

### Код меню (css):

```

@import
url('https://fonts.googleapis.com/css2?family=Source+Sans+Pro&display=swap');

body {
  margin: 0;
  width: 100vw;
  height: 100vh;
  font-family: 'Source Sans Pro', sans-serif;
  background: url("фон.jpg");
}

.container {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
  flex-direction: column;
}

.function-input, .parameter-select, .precision-input {
  display: flex;
  flex-direction: row;
  width: 100%;
  justify-content: space-between;
}

```

```

}

.function-input {
  font-size: 1.5rem;
}

.calculator__calculate {
  width: 100%;
  padding: 0.5rem;
  margin-top: 0.5rem;
  appearance: none;
  border-style: solid;
  border-color: hsl(123, 65%, 50%);
  border-width: 0.2rem;
  border-radius: 1rem;
  background-color: hsla(0, 0%, 0%, 0);
}

.calculator__calculate:hover {
  background-color: hsl(123, 65%, 50%);
}

.calculator__calculate:active {
  background-color: hsl(347, 65%, 50%);
}

.answer {
  display: flex;
  flex-direction: row;
  align-items: center;
}

.answer__title {
  margin-right: 0.5rem;
}

```

## Код программы:

```

const MethDiv = document.getElementById("method")
const btn = document.querySelector("#bt")
const instDiv = document.querySelector('#inst');
const y0Div = document.querySelector('#y0');
const x0Div = document.querySelector('#x0');
const aDiv = document.querySelector('#a');
const bDiv = document.querySelector('#b');
const nDiv = document.querySelector('#n');
btn.addEventListener('click',()=>{
  document.querySelector('h1').textContent = document.title;

  /* извлечение данных */
  let res_x = []

```

```

let res_y = []
let inst = (instDiv.value.toString());
inst = inst.replaceAll("y' =", "")

const x0 = Number(x0Div.value);
const y0 = Number(y0Div.value);
res_x[0] = x0
res_y[0] = y0
let y = y0
let x = x0
let i = 1
let k1 = 0
let k2 = 0
let k3 = 0
let k4 = 0
const a = Number(aDiv.value);
const b = Number(bDiv.value);
const n = Number(nDiv.value);
const theInstructions = inst;
const F = new Function('x, y', 'return ' + theInstructions);
const Meth = (MethDiv.value.toString());

/* вычисления */
if(Meth=="type_left"){
    const h = (b - a) / n;
    while(x < b - h){
        y = y + h * F(x,y)
        res_x[i] = x + h
        res_y[i] = y
        x += h
        i +=1
    }
}
else{
    if(Meth=="type_right"){
        const h = (b - a) / n;
        while(x < b - h){
            k1 = h * F(x,y)
            k2 = h * F((x + h / 2), (y + k1 / 2))
            k3 = h * F((x + h / 2), (y + k2 / 2))
            k4 = h * F((x + h), (y + k3))
            y = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
            res_x[i] = x + h
            res_y[i] = y
            x += h
            i += 1
        }
    }
}

i = 0

```

```

    const array_x = res_x
    const containerElement_x = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_x)
    array_x.map(el => containerElement_x.innerHTML += '<div>' + "x" + i++ +
"=" + el + '</div>')
    i = 0
    const array_y = res_y
    const containerElement_y = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_y)
    array_y.map(el => containerElement_y.innerHTML += '<div>' + "y" + i++ +
"=" + el + '</div>')
  })

```

## Результат работы программы:

Метод Эйлера ▼

Дифференциальное уравнение:  $y' = y \cdot (1-x)$

начальные условия  $y(x_0) = 1$   $x_0 = 0$

На отрезке от: 0 До: 1

Кол-во разбиений: 10

Ответ:

$x_0=0$   
 $x_1=0.1$   
 $x_2=0.2$   
 $x_3=0.30000000000000004$   
 $x_4=0.4$   
 $x_5=0.5$   
 $x_6=0.6$   
 $x_7=0.7$   
 $x_8=0.7999999999999999$   
 $x_9=0.8999999999999999$   
 $x_{10}=0.9999999999999999$   
 $y_0=1$   
 $y_1=1.1$   
 $y_2=1.199$   
 $y_3=1.29492$   
 $y_4=1.3855644$   
 $y_5=1.468698264$   
 $y_6=1.5421331772$   
 $y_7=1.603818504288$   
 $y_8=1.65193305941664$   
 $y_9=1.6849717206049728$   
 $y_{10}=1.7018214378110226$

Выполнить задание



Метод Рунге-Кутты ▼

Дифференциальное уравнение:  $y' = y^*(1-x)$

начальные условия  $y(x_0) = 1$   $x_0 = 0$

На отрезке от: 0 До: 1

Кол-во разбиений: 10

Ответ:

$x_0=0$   
 $x_1=0.1$   
 $x_2=0.2$   
 $x_3=0.30000000000000004$   
 $x_4=0.4$   
 $x_5=0.5$   
 $x_6=0.6$   
 $x_7=0.7$   
 $x_8=0.7999999999999999$   
 $x_9=0.8999999999999999$   
 $x_{10}=0.9999999999999999$   
 $y_0=1$   
 $y_1=1.099658780208333$   
 $y_2=1.1972172320380163$   
 $y_3=1.2904614485902193$   
 $y_4=1.3771275621895505$   
 $y_5=1.45499119087384$   
 $y_6=1.5219613162523975$   
 $y_7=1.5761731325294723$   
 $y_8=1.6160741441918625$   
 $y_9=1.6404979767678072$   
 $y_{10}=1.648721007053397$

Выполнить задание

## Часть 2

### Задание 1

**Постановка задачи:** вычислить на отрезке  $[1;1.5]$  с начальными условиями:

$$y_0 = 1$$

$$y(x_0) = 0.77$$

$$y'(x_0) = -0.44$$

**Математическая модель:**

$$y'' + y'/x + y = 0$$

**Метод Эйлера:**

n	x	y	y'
0	1	0,77	-0,44
1	1,05	0,75	-0,46
2	1,1	0,73	-0,47
3	1,15	0,70	-0,49
4	1,2	0,68	-0,50
5	1,25	0,65	-0,51
6	1,3	0,63	-0,53
7	1,35	0,60	-0,54
8	1,4	0,57	-0,55
9	1,45	0,55	-0,56

## Метод Рунге-Кутты:

n	x	y	y'
0	1	0,77	-0,44
1	1,05	0,75	-0,46
2	1,1	0,74	-0,47
3	1,15	0,72	-0,49
4	1,2	0,71	-0,50
5	1,25	0,69	-0,52
6	1,3	0,68	-0,53
7	1,35	0,66	-0,54
8	1,4	0,65	-0,56
9	1,45	0,64	-0,57

## Код программы:

```
const MethDiv = document.getElementById("method")
const btn = document.querySelector("#bt")
const instDiv = document.querySelector('#inst');
const y0Div = document.querySelector('#y0');
const x0Div = document.querySelector('#x0');
const z0Div = document.querySelector('#z0');
const aDiv = document.querySelector('#a');
const bDiv = document.querySelector('#b');
const nDiv = document.querySelector('#n');

btn.addEventListener('click',()=>{
    document.querySelector('h1').textContent = document.title;

    /* извлечение данных */
    let res_x = []
    let res_y = []
    let res_z = []
    let inst = (instDiv.value.toString());

    inst = inst.replaceAll('sin', 'Math.sin')
    inst = inst.replaceAll('cos', 'Math.cos')
    inst = inst.replaceAll('pi', 'Math.PI')
    inst = inst.replaceAll('abs', 'Math.abs')
    inst = inst.replaceAll('sqrt', 'Math.sqrt')
    inst = inst.replaceAll('pow', 'Math.pow')
    inst = inst.replaceAll('ln', 'Math.log')
    inst = inst.replaceAll('exp', 'Math.exp')
    inst = inst.replaceAll("y'", "y2")
    inst = inst.substring(inst.indexOf("y2")+3);
    inst = inst.replaceAll("y'", "z")
    inst = inst.replaceAll("= 0", "")
    inst = inst.replaceAll(" ", "")
```

```

function setCharAt(str,index,chr) {
    if(index > str.length-1) return str;
    return str.substring(0,index) + chr + str.substring(index+1);
}

for(let i = 0; i < inst.length; i++){
    if(inst[i] === '+'){
        inst = setCharAt(inst, i, '-')
    } else{
        if(inst[i] === '-'){
            inst = setCharAt(inst, i, '+')
        }
    }
}

let ygrav_1 = inst
console.log(inst)
let x0 = Number(x0Div.value);
let y0 = Number(y0Div.value);
let z0 = Number(z0Div.value);
res_x[0] = x0
res_y[0] = y0
res_z[0] = z0

let y = y0
let x = x0
let z = z0
let i = 1
let k1 = 0
let k2 = 0
let k3 = 0
let k4 = 0
const a = Number(aDiv.value);
const b = Number(bDiv.value);
const n = Number(nDiv.value);
const theInstructions = ygrav_1;
const F = new Function('x, y, z', 'return ' + theInstructions);
const Meth = (MethDiv.value.toString());

/* вычисления */
if(Meth==="type_left"){
    const h = (b - a) / n;
    while(x < b - h){
        y = y + h * z
        z = z + h * F(x,y0,z)
        y0 = y
        res_x[i] = x + h
        res_y[i] = y
        res_z[i] = z
        x += h
        i +=1
    }
}

```

```

    }
  }
  else{
    if(Meth==="type_right"){
      const h = (b - a) / n;
      while(x < b - h){
        k1 = h * F(x,y,z)
        k2 = h * F((x + h / 2), (y + k1 / 2), z)
        k3 = h * F((x + h / 2), (y + k2 / 2), z)
        k4 = h * F((x + h), (y + k3), z)
        y = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        z = z + h * F(x,y0,z)
        y0 = y
        res_x[i] = x + h
        res_y[i] = y
        res_z[i] = z
        x += h
        i += 1
      }
    }
  }
}

```

```

/* запись результата */
i = 0
const array_x = res_x
const containerElement_x = document.querySelector("#container")
console.log(containerElement_x)
array_x.map(el => containerElement_x.innerHTML += '<div>' + "x" + i++ + "="
+ el + '</div>')
i = 0
const array_y = res_y
const containerElement_y = document.querySelector("#container")
console.log(containerElement_y)
array_y.map(el => containerElement_y.innerHTML += '<div>' + "y" + i++ + "="
+ el + '</div>')
i = 0
const array_z = res_z
const containerElement_z = document.querySelector("#container")
console.log(containerElement_z)
array_z.map(el => containerElement_z.innerHTML += '<div>' + "z" + i++ + "="
+ el + '</div>')
}))

```

## Результат работы программы:

Метод Эйлера

Дифференциальное уравнение:  $y'' + y'/x + y = 0$

начальные условия  $y(x_0) = 0.77$   $y'(x_0) = -0.44$   $x_0 = 1$

На промежутке от: 1 До: 1.5

Кол-во разбиений: 10

Otvet:

$x_0=1$   
 $x_1=1.05$   
 $x_2=1.1$   
 $x_3=1.1500000000000001$   
 $x_4=1.2000000000000002$   
 $x_5=1.2500000000000002$   
 $x_6=1.3000000000000003$   
 $x_7=1.3500000000000003$   
 $x_8=1.4000000000000004$   
 $x_9=1.4500000000000004$   
 $y_0=0.77$   
 $y_1=0.748$   
 $y_2=0.725175$   
 $y_3=0.7015669047619048$   
 $y_4=0.6772189672619048$   
 $y_5=0.6521757184782608$   
 $y_6=0.6264828909757807$   
 $y_7=0.6001873372772041$   
 $y_8=0.5733369438011333$   
 $y_9=0.5459805409995018$   
 $z_0=-0.44$   
 $z_1=-0.4565$   
 $z_2=-0.4721619047619048$   
 $z_3=-0.48695875$   
 $z_4=-0.5008649756728778$   
 $z_5=-0.5138565500496032$   
 $z_6=-0.5259110739715321$   
 $z_7=-0.5370078695214161$   
 $z_8=-0.5471280560326313$   
 $z_9=-0.5562546155072368$

Выполнить задание

Метод Рунге-Кутты

Дифференциальное уравнение:  $y'' + y'/x + y = 0$

начальные условия  $y(x_0) = 0.77$   $y'(x_0) = -0.44$   $x_0 = 1$

На промежутке от: 1 До: 1.5

Кол-во разбиений: 10

Otvet:

$x_0=1$   
 $x_1=1.05$   
 $x_2=1.1$   
 $x_3=1.1500000000000001$   
 $x_4=1.2000000000000002$   
 $x_5=1.2500000000000002$   
 $x_6=1.3000000000000003$   
 $x_7=1.3500000000000003$   
 $x_8=1.4000000000000004$   
 $x_9=1.4500000000000004$   
 $y_0=0.77$   
 $y_1=0.7533822154864741$   
 $y_2=0.7373495334155749$   
 $y_3=0.7218688025006812$   
 $y_4=0.7069103746990482$   
 $y_5=0.6924474958381688$   
 $y_6=0.6784558342194893$   
 $y_7=0.6649131109796608$   
 $y_8=0.6517988065507083$   
 $y_9=0.6390939247686482$   
 $z_0=-0.44$   
 $z_1=-0.4565$   
 $z_2=-0.47243101553622846$   
 $z_3=-0.48782435513717864$   
 $z_4=-0.502708040691031$   
 $z_5=-0.5171073910638572$   
 $z_6=-0.5310454702132114$   
 $z_7=-0.5445434361467546$   
 $z_8=-0.5576208162828948$   
 $z_9=-0.5702957274574697$

Выполнить задание

## Задание 2

**Постановка задачи:** вычислить на отрезке  $[0; 0.3]$  при:

$$X(0) = 2$$

$$Y(0) = 1$$

$$Z(0) = 1$$

**Математическая модель:**

$$dy/dt = -2x + 5z$$

$$dy/dt = \sin(t - 1)x - y + 3z$$

$$dz/dt = -x + 2z$$

**Код программы:**

```
const MethDiv = document.getElementById("method")
const btn = document.querySelector("#bt")
const inst1Div = document.querySelector('#inst1');
const inst2Div = document.querySelector('#inst2');
const inst3Div = document.querySelector('#inst3');
const y0Div = document.querySelector('#y0');
const x0Div = document.querySelector('#x0');
const z0Div = document.querySelector('#z0');
const aDiv = document.querySelector('#a');
const bDiv = document.querySelector('#b');
const nDiv = document.querySelector('#n');

btn.addEventListener('click', ()=>{
    document.querySelector('h1').textContent = document.title;

    /* извлечение данных */
    let res_x = []
    let res_y = []
    let res_z = []
    let res_t = []
    let inst1 = (inst1Div.value.toString());
    let inst2 = (inst2Div.value.toString());
    let inst3 = (inst3Div.value.toString());

    inst1 = inst1.replaceAll('sin', 'Math.sin')
    inst1 = inst1.replaceAll('cos', 'Math.cos')
    inst1 = inst1.replaceAll('pi', 'Math.PI')
    inst1 = inst1.replaceAll('abs', 'Math.abs')
    inst1 = inst1.replaceAll('sqrt', 'Math.sqrt')
    inst1 = inst1.replaceAll('pow', 'Math.pow')
    inst1 = inst1.replaceAll('ln', 'Math.log')
    inst1 = inst1.replaceAll('exp', 'Math.exp')

    inst2 = inst2.replaceAll('sin', 'Math.sin')
    inst2 = inst2.replaceAll('cos', 'Math.cos')
    inst2 = inst2.replaceAll('pi', 'Math.PI')
    inst2 = inst2.replaceAll('abs', 'Math.abs')
```



```

inst2 = inst2.replaceAll('sqrt', 'Math.sqrt')
inst2 = inst2.replaceAll('pow', 'Math.pow')
inst2 = inst2.replaceAll('ln', 'Math.log')
inst2 = inst2.replaceAll('exp', 'Math.exp')

inst3 = inst3.replaceAll('sin', 'Math.sin')
inst3 = inst3.replaceAll('cos', 'Math.cos')
inst3 = inst3.replaceAll('pi', 'Math.PI')
inst3 = inst3.replaceAll('abs', 'Math.abs')
inst3 = inst3.replaceAll('sqrt', 'Math.sqrt')
inst3 = inst3.replaceAll('pow', 'Math.pow')
inst3 = inst3.replaceAll('ln', 'Math.log')
inst3 = inst3.replaceAll('exp', 'Math.exp')

let x0 = Number(x0Div.value);
let y0 = Number(y0Div.value);
let z0 = Number(z0Div.value);
res_x[0] = x0
res_y[0] = y0
res_z[0] = z0
let y = y0
let x = x0
let z = z0
let i = 1
const a = Number(aDiv.value);
const b = Number(bDiv.value);
const n = Number(nDiv.value);
let t = a
res_t[0] = a
const h = (b - a) / n
const theInstructions = inst1;
const F = new Function('x, y, z', 'return ' + theInstructions);
const Meth = (MethDiv.value.toString());

/* ВЫЧИСЛЕНИЯ */
while (t < b - h){
    x = x0 + h * (-2 * x0 + 5 * z0)
    y = y0 + h * (Math.sin(t-1) * x0 - y0 + 3 * z0)
    z = z0 + h * (-x0 + 2 * z0)
    res_x[i] = x
    res_y[i] = y
    res_z[i] = z
    i += 1
    t +=h
    res_t[i] = t
    x0 = x
    y0 = y
    z0 = z
}

```

```
    /* запись результата */
    i = 0
    const array_x = res_x
    const containerElement_x = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_x)
    array_x.map(el => containerElement_x.innerHTML += '<div>' + "x" + i++ + "="
+ el + '</div>')
    i = 0
    const array_y = res_y
    const containerElement_y = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_y)
    array_y.map(el => containerElement_y.innerHTML += '<div>' + "y" + i++ + "="
+ el + '</div>')
    i = 0
    const array_z = res_z
    const containerElement_z = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_z)
    array_z.map(el => containerElement_z.innerHTML += '<div>' + "z" + i++ + "="
+ el + '</div>')
    i = 0
    const array_t = res_t
    const containerElement_t = document.querySelector("#container")
    console.log(containerElement_t)
    array_t.map(el => containerElement_t.innerHTML += '<div>' + "t" + i++ + "="
+ el + '</div>')
  })
```



## Результат работы программы:

Метод Эйлера ▼

Система дифференциальных уравнений:  $dx/dt = -2x + 5z$   $dy/dt = \sin(t-1) \cdot x - y + 3z$   $dz/dt = -x + 2z$

начальные условия  $x(0) = 2$   $y(0) = 1$   $z(0) = 1$

На промежутке от: 0 До: 0.3

Кол-во разбиений: 10

Ответ:

t0=0  
t1=0.03  
t2=0.06  
t3=0.09  
t4=0.12  
t5=0.15  
t6=0.18  
t7=0.21  
t8=0.24  
t9=0.27  
x0=2  
x1=2.03  
x2=2.0582  
x3=2.084573  
x4=2.10909362  
x5=2.1317381243  
x6=2.152484444342  
x7=2.17131220007213  
x8=2.188202719802352  
x9=2.2031390585525092  
y0=1  
y1=1.0095117409115262  
y2=1.0189908487418688  
y3=1.0284766408119985  
y4=1.0380059962129375  
y5=1.0476130756613964  
y6=1.0573290554412411  
y7=1.0671818764614138  
y8=1.077196009405456  
y9=1.087392236888639  
z0=1  
z1=1  
z2=0.9991  
z3=0.9973  
z4=0.99460081  
z5=0.99100405  
z6=0.9865121492710001  
z7=0.9811283448970001  
z8=0.9748566795886562  
z9=0.967701998769905

Выполнить задание

**Выводы:** В ходе выполнения лабораторной работы были реализованы численные методы решения дифференциальных уравнений с последующем выводом результатов.