Рассмотрим краевую задачу:

$$y''(x) = f(x, y), \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \tag{1}$$

Методом Нумерова называется следующий метод аппроксимации задачи 1:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2\left[f_n + \frac{1}{12}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})\right], \tag{2}$$

где h - шаг сетки, $f_k = f(x_k, y_k)$. Такая аппроксимация приближает исходную задачу во внутренних точках сеточной области с четвертым порядком.

Гамильтониан кубита:

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 - E_J\cos\hat{\varphi} + \frac{1}{2}E_L(\hat{\varphi} - \varphi_{ext})^2, \quad \hat{n} = -i\frac{d}{d\varphi} \tag{3}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера с граничными условиями:

$$-4E_c\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - E_J\cos\varphi\cdot\psi + \frac{1}{2}E_L(\varphi - \varphi_{ext})^2\psi = E\psi, \quad \psi(\pm\infty) = 0 \tag{4}$$

Введём обозначение:

$$G(\varphi, E) = \frac{E + E_J\cos\hat{\varphi} - \frac{1}{2}E_L(\varphi - \varphi_{ext})^2}{4E_C} \tag{5}$$

Тогда стационарное уравнение Шрёдингера примет вид:

$$\psi''(\varphi) = -G(\varphi, E)\cdot\psi(\varphi), \quad \psi(\pm\infty) = 0 \tag{6}$$

Применим к этому уравнению аппроксимацию 2:

$$\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1} = h^2\left[G_n\psi_n + \frac{1}{12}(G_{n+1}\psi_{n+1} - 2G_n\psi_n + G_{n-1}\psi_{n-1})\right] \tag{7}$$

Выразим ψ_{n+1}:

$$\psi_{n+1} = \frac{2(1 - \frac{5h^2}{12}G_n)\psi_n - (1 + \frac{h^2}{12}G_{n-1})\psi_{n-1}}{1 + \frac{h^2}{12}G_{n+1}} \tag{8}$$

При расчёте подбираем энергию E и зависящие от неё коэффициенты G_k таким образом, чтобы выполнялись граничные условия $\psi(\pm\infty) = 0$.

Численно найдём уровни энергии кубита (рис. 1).

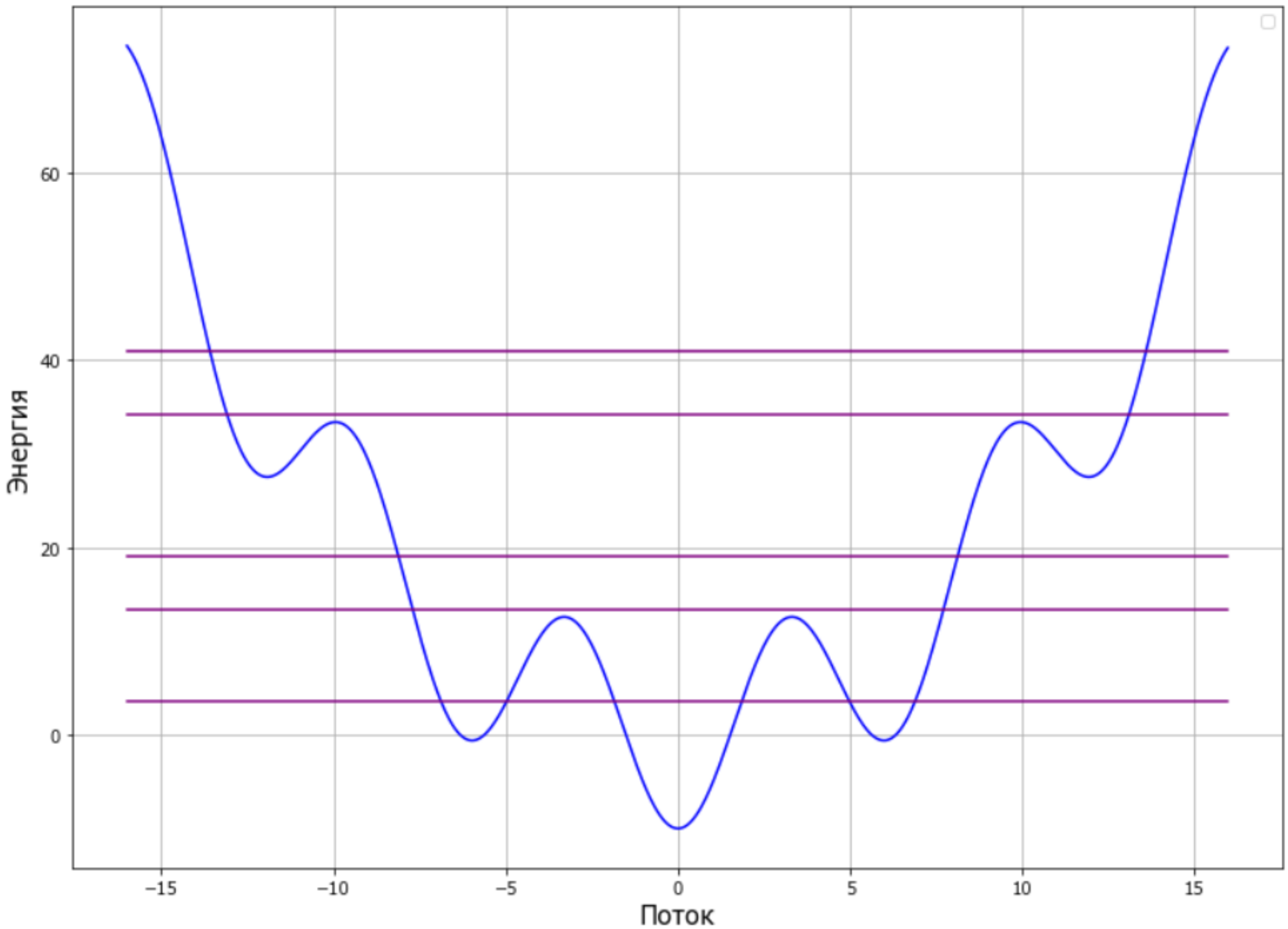


Рис. 1: Уровни энергии кубита при $E_L = 0.5$, $E_J = 10$, $E_C = 20$

Построим численно спектр кубита $E(\varphi_{ext})$ (рис. 2, 3).

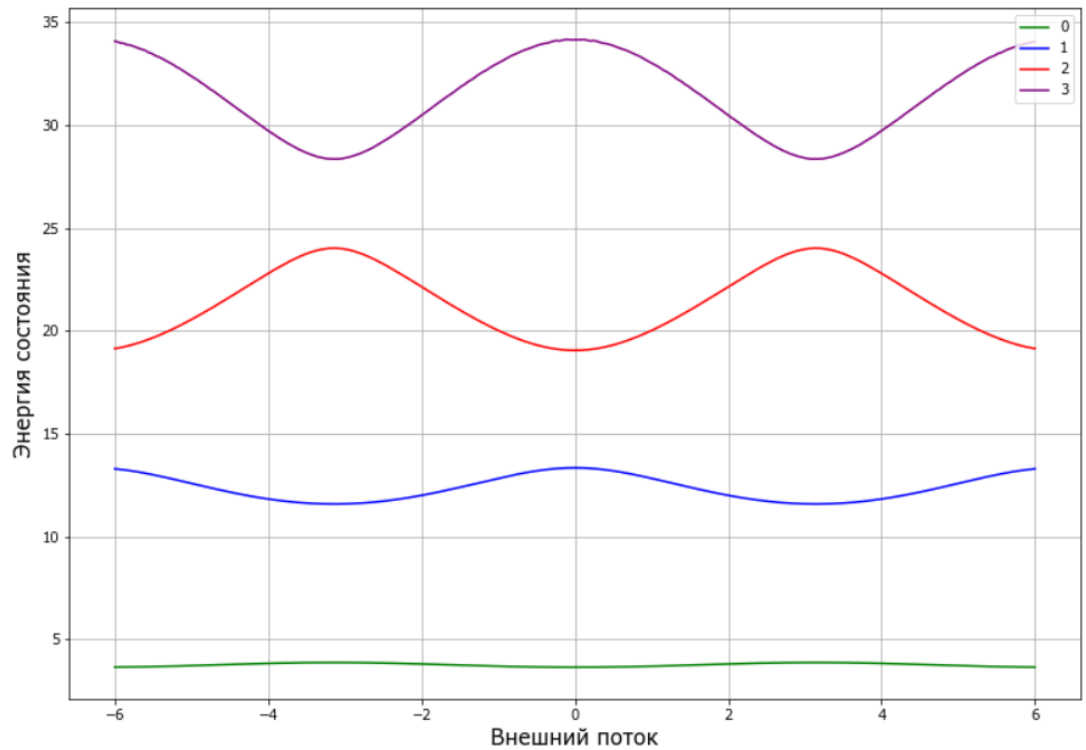


Рис. 2: Спектр кубита при $E_L = 0.5$, $E_J = 10$, $E_C = 20$

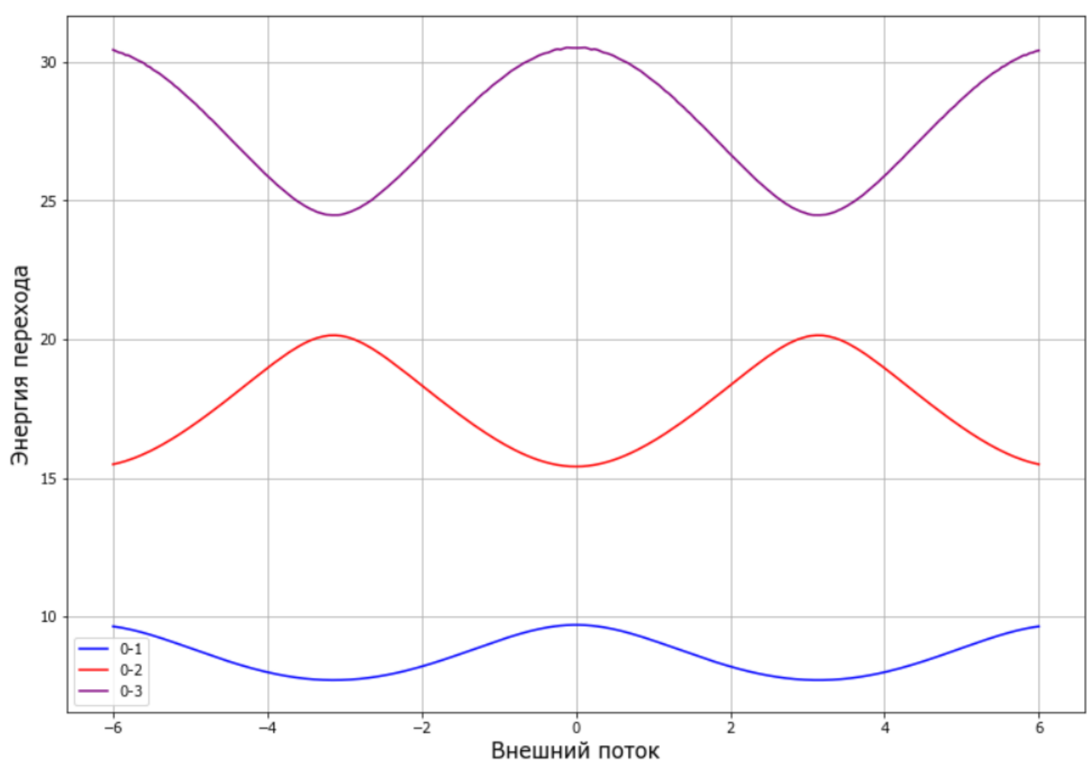
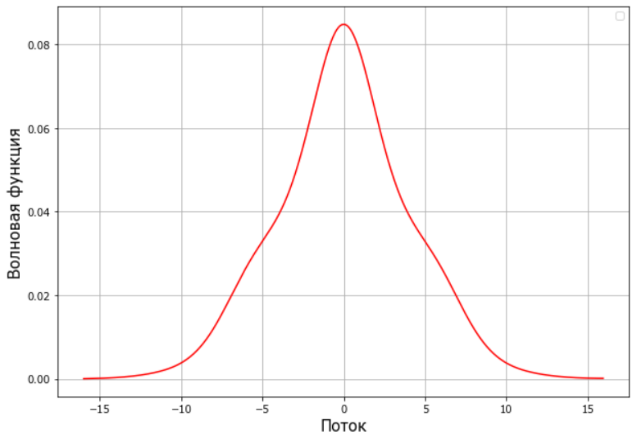
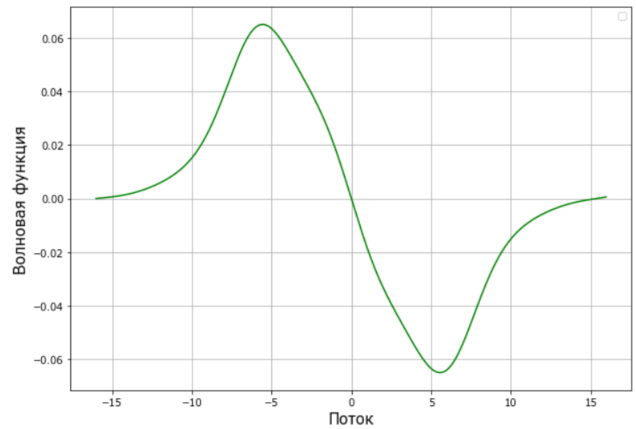


Рис. 3: Энергии переходов и основного состояния при $E_L = 0.5$, $E_J = 10$, $E_C = 20$

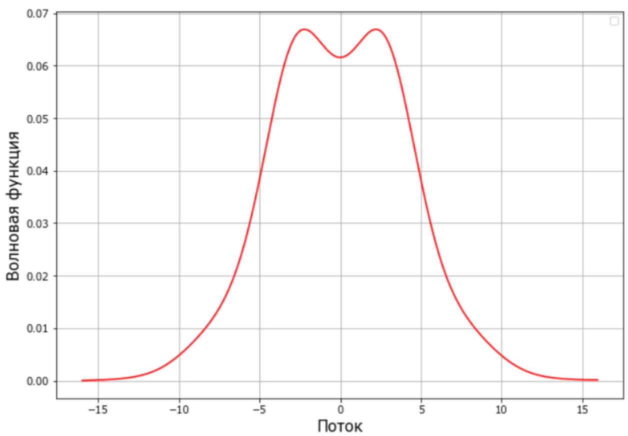
Построим численно волновые функции основного и первого возбуждённого состояний кубита при значениях внешнего потока $\varphi_{ext} = 0$ и $\varphi_{ext} = \pi$ (рис 4).



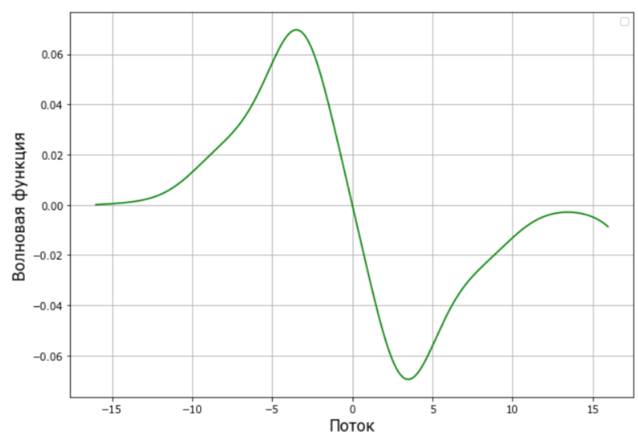
(a)



(b)



(c)



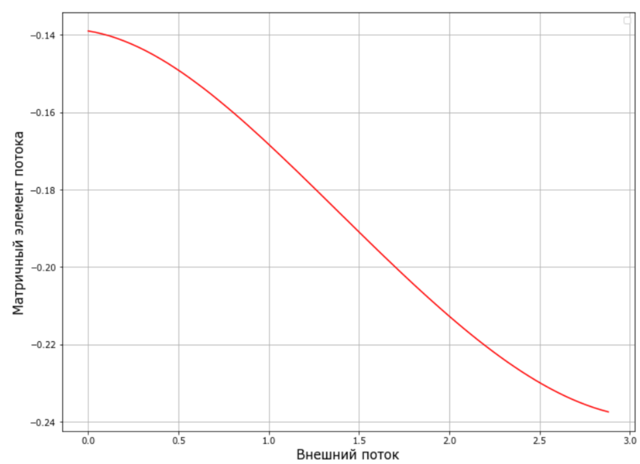
(d)

Рис. 4: (a) - волновая функция основного состояния при $\varphi_{ext} = 0$; (b) - волновая функция первого возбуждённого состояния при $\varphi_{ext} = 0$; (c) - волновая функция основного состояния при $\varphi_{ext} = \pi$; (d) - волновая функция первого возбуждённого состояния при $\varphi_{ext} = \pi$; $E_L = 0.5$, $E_J = 10$, $E_C = 20$

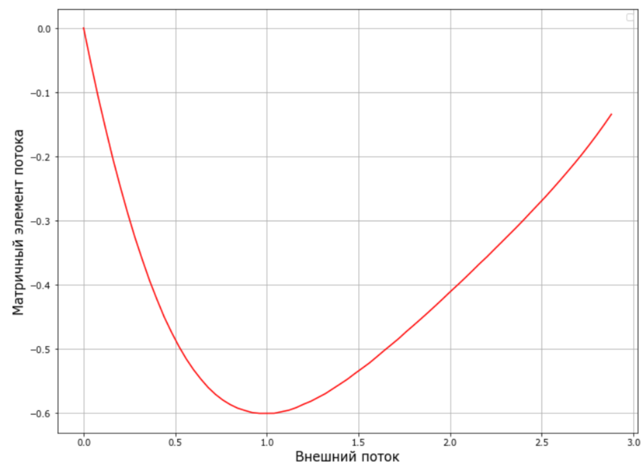
Вычислим матричные элементы $\phi_{\alpha\beta}$ и $n_{\alpha\beta}$ в как функции внешнего потока φ_{ext} (рис. 5).

$$\varphi_{\alpha\beta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(\varphi)\varphi\psi_\beta(\varphi)d\varphi \tag{9}$$

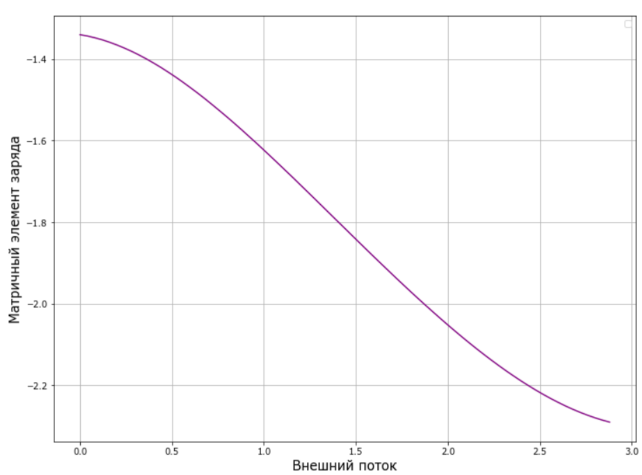
$$_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}R_Q C_J \propto \varphi_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta} \tag{10}$$



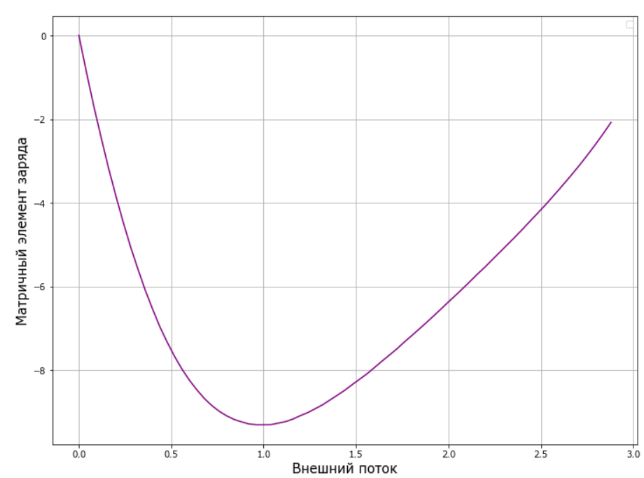
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 5: (a) - матричный элемент φ_{10} перехода из первого возбуждённого в основное состояние; (b) - матричный элемент φ_{20} перехода из второго возбуждённого в основное состояние; (c) - матричный элемент n_{10} перехода из первого возбуждённого в основное состояние; (b) - матричный элемент n_{20} перехода из второго возбуждённого в основное состояние; $E_L = 0.5$, $E_J = 10$, $E_C = 20$