DM Probabilités

Partie 3

$U \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$ $V \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$

1/a) $g(u) = -2\ln(u)$; $x = -2\ln(u) \Rightarrow -\frac{x}{2} = \ln(u) \Rightarrow e^{-x/2} = u$

$g : u \longmapsto -2\ln(u)$ $u \in]0;+\infty[$

Ainsi $g^{-1} : x \longmapsto e^{-x/2}$ $x \in]-\infty;+\infty[$

b) $f_X(x) = f_U(g^{-1}(x))\,(g^{-1}(x))'$

$U \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$ Ainsi $f_U(u) = \frac{1}{1-0}\mathbb{1}_{[0;1]}$ puisque c'est une loi uniforme de paramètre $b=1, a=0$

$f_U(u) = \mathbb{1}_{[0;1]}$

Par le nouveau domaine :

$0 \leq g^{-1}(x) \leq 1$

$0 \leq e^{-x/2} \leq 1$

$1 \leq e^{x/2} \leq +\infty$

$\ln$ ↓ $\ln(1) \leq \frac{x}{2} \leq \ln(+\infty)$

$0 \leq \frac{x}{2} \leq +\infty$

idem à $0 \leq x \leq +\infty$

Soit $x \in [0;+\infty[$

D'où $(g^{-1}(x))' = -\frac{1}{2}e^{-x/2}$

Donc $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(u) \times -\frac{1}{2}e^{-x/2}$ $\forall x \in [0;+\infty[$

2/a) $\phi_1 : a = \sqrt{x}\cos(2\pi v)$ $\phi_2 : b = \sqrt{x}\sin(2\pi v)$

$$J|\phi(a,b)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(2\pi v) & -\sqrt{x} \times 2\pi \times \sin(2\pi v) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(2\pi v) & +\sqrt{x}\,2\pi\cos(2\pi v) \end{vmatrix}$$