

# Introduction à la Mécanique des Fluides Numérique: Méthode "Volumes Finis"

Alexei Stoukov

ENSEEIH  
Département Hydraulique / Mécanique des Fluides

Version initiale: Octobre 2006  
Revision: Février 2013



# Mécanique des Fluides Numérique

## Computational Fluid Dynamics - méthodologie

- Résolution numérique des problèmes de la Mécanique des Fluides
- Grandes étapes :
  - Problème physique continu est décrit par un modèle mathématique continue (mis en équations)
  - Modèle mathématique continu est discretisé en s'appuyant sur une(des) méthode(s) numérique(s)
  - Equations discretisées sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établie
  - Algorithme est codé (C, Fortan, Matlab, Java,...)
  - Code est executé sur un ordinateur
  - Si tout va bien, la solution approchée du problème initial est obtenue

## Notes

[illegible]

# CFD : Principales méthodes

## Différences finies

## Approximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor

## Elements finis

Détermination d'un champ local à attribuer à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème (bilan global).

## Volumes finis

## Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle

## Notes

[illegible]

[illegible]

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

# Méthode Eléments finis

Consiste à rechercher une solution approchée sous la forme d'un champ  $\tilde{F}(M, t)$  défini par morceaux sur des sous domaines de  $\Omega$ . Les  $n$  sous-domaines  $\Omega_i$  doivent être tels que

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \text{ et } \widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

où  $\tilde{\Omega}_i$  désigne l'intérieur de  $\Omega_i$ .

Les champs  $\tilde{f}_i(M, t)$ , définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynômiaux).

Le champ dans chaque sous domaine  $\Omega_i$  est déterminé par un nombre fini de valeurs du champ (ou de valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous domaine, et appelés nœuds. Le champ local est une interpolation entre les valeurs aux nœuds. Le sous-domaine muni de son interpolation est appelé élément.

Chercher une solution par éléments finis consiste à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous domaine pour que le champ global  $\tilde{F}(M, t)$  obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème.

## Notes

[illegible]



[illegible]

## Volumes finis

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-linéaires hyperboliques
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tout les codes généralistes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL), OpenFoam (Libre)...

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

**Temps horloge (h)**

Activity	Time (h)
Géométrie	4
Maillage	20
Execution	8
Analyse	2

**Temps homme (h)**

Activity	Time (h)
Géométrie	4
Maillage	8
Execution	2
Analyse	2

10 / 78

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

## Equations de Navier-Stokes :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{pmatrix} F = F_c + F_d = \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \text{div}(\rho u \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial x} \\ \text{div}(\rho v \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial y} \\ \text{div}(\rho w \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial z} \\ \text{div}(\rho E \vec{u}) + P \text{div} \vec{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \text{div}(\mu \text{grad} u) \\ \text{div}(\mu \text{grad} v) \\ \text{div}(\mu \text{grad} w) \\ \text{div}(k \text{grad} T) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \underbrace{\text{div}(\rho \phi \vec{u})}_{\text{Advection}} - \underbrace{\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi)}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{S_\phi}_{\text{Terme Source / Puits}} \quad (11)$$
[illegible]

The diagram shows a closed, irregular curve representing the boundary of a region. A vector labeled  $\vec{A}_n$  originates from a point on the boundary and points outwards. Another vector labeled  $\vec{V}$  originates from a point on the boundary and points inwards into the region. The region inside the curve is labeled  $\Omega_{CV}$ . A line segment, possibly representing a characteristic, passes through the region, with the label  $A_{CV}$  placed near its intersection with the boundary.

- $$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{cv}} \rho \phi d\Omega + \int_{\Omega_{cv}} \text{div}(\rho \phi \vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega_{cv}} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) d\Omega = \int_{\Omega_{cv}} S_\phi d\Omega \quad (12)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega}_{\text{Variation temporelle}} + \underbrace{\int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n}_{\text{Transport advectif}} - \underbrace{\int_{A_{CV}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A}_n}_{\text{Transport diffusif}} = \underbrace{\int_{\Omega_{CV}} S_\phi d\Omega}_{\text{Source/Puits}} \quad (13)$$
[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



The diagram illustrates the relationship between a control volume (CV) and a junction (J). On the left, a large, irregularly shaped region represents the control volume  $\Omega_{CV}$ . Its boundary is labeled  $A_{CV}$ . A vector  $\vec{V}$  is shown inside the CV, and a vector  $d\vec{A}_n$  is shown on the boundary. A red arrow points from a point on the boundary  $A_{CV}$  to a junction  $\Omega_J$  on the right. At the junction, two vectors,  $\vec{A}_i$  and  $\vec{F}_i$ , are shown.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi_J\Omega_J) + \sum_{faces} (\vec{F}_i\vec{A}_i)_J = (S_\phi)_J \quad (15)$$

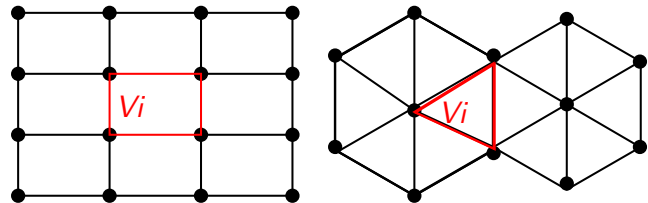
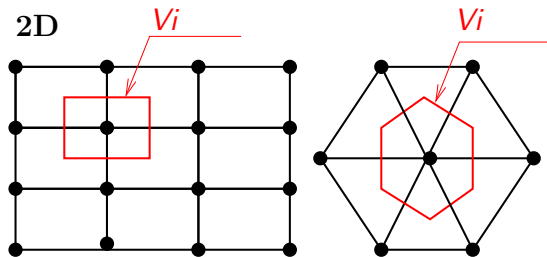
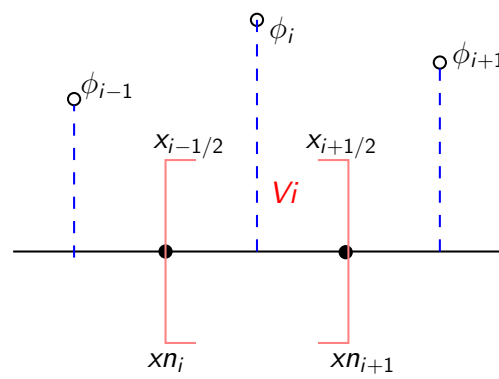
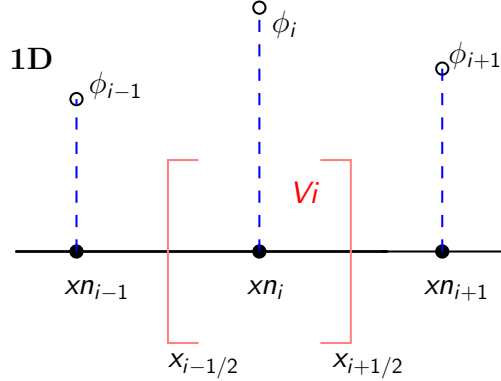
- $\phi_J$  - valeur moyenne de  $\phi$  sur  $\Omega_J$  (valeur au centre de  $\Omega_J$ )
- $\vec{F}_i$  - flux moyen sur  $A_i$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- 16 / 78

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

## Définition des volumes de contrôle



## Notes

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

- └ Méthode VF
  - └ Types de volume de contrôle

18 / 78

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

## Notes

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} i-1 \\ \text{W} \bigcirc \end{array} \xleftarrow{e_x} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{W} \quad i \quad \text{e} \\ \bigcirc \quad \text{P} \end{array} \\ \hline \end{array}
\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} i+1 \\ \bigcirc \quad \text{E} \end{array} \xrightarrow{e_x} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
i-1/2 & & i+1/2
\end{array}$$

$$\text{avec} \quad \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (21)$$

$$\vec{F}_e = (\rho\phi\vec{u})_e = \frac{(\rho\phi\vec{u})_E + (\rho\phi\vec{u})_P}{2} \quad (22)$$

$$\vec{F}_w = (\rho\phi\vec{u})_w = \frac{(\rho\phi\vec{u})_W + (\rho\phi\vec{u})_P}{2} \quad (23)$$

22 / 78

[illegible]



23 / 78

Diagram illustrating a 1D lattice structure with three sites labeled  $W$ ,  $P$ , and  $E$ . The sites are connected by double-headed arrows labeled  $\vec{e}_x$ . The sites are labeled  $i-1$ ,  $i$ , and  $i+1$ . The sites are labeled  $W$ ,  $P$ , and  $E$ . The sites are labeled  $i-1/2$  and  $i+1/2$ . A vector  $\vec{u}$  points to the right above the lattice.

$$F_e = \frac{(\rho\phi\vec{u})_E^n + (\rho\phi\vec{u})_P^n}{2} \vec{e}_{xe} = \quad + \frac{(\rho\phi u)_E^n + (\rho\phi u)_P^n}{2} \quad (28)$$

$$F_w = \frac{(\rho\phi\vec{u})_W^n + (\rho\phi\vec{u})_P^n}{2} \vec{e}_{x_w} = - \frac{(\rho\phi u)_W^n + (\rho\phi u)_P^n}{2} \quad (29)$$

$$(\rho\phi)_P^{n+1} = \rho\phi_P^n - \frac{\Delta t}{V}(F_e\Delta y + F_w\Delta y) \quad (30)$$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Objectif : calculer  $\phi(x, t)$  à  $t = \Delta t$ ,  $t = 2\Delta t$ , etc...

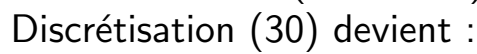
Prenons  $\rho = 1$ ,  $u = 1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta y = 1$

Distribution initiale de  $\phi$  (condition initiale) :



25 / 78

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$\text{Discrétisation (30) : } (\rho\phi)_P^{n+1} = (\rho\phi)_P^n - \frac{\Delta t}{V}(F_e\Delta y + F_w\Delta y)$$


## Notes

$$\vec{F}_i = \frac{(\phi \vec{u})_i^n + (\phi \vec{u})_{i-1}^n}{2} \Rightarrow \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \left( (\vec{F} \vec{e}_x)_{i+1} \Delta y + (\vec{F} \vec{e}_x)_i \Delta y \right)$$

Remplissez le tableau et tracez la solution obtenue :

$n$	$t$	Var.	$i-2$	$i-1$	$i$	$i+1$	$i+2$	$i+3$
0	0	$\phi_i$	1	1	1	0	0	0
		$\vec{F}_i$						
		$\Sigma_i^{i+1}F$						
1	$\Delta t$	$\phi_i$						
		$\vec{F}_i$						
		$\Sigma_i^{i+1}F$						
2	$2\Delta t$	$\phi_i$						

## Notes

## Decentrement de flux

$$f_e = f_E \quad f_w = f_P \quad si \ u < 0 \quad (34)$$

$$\text{Pour } u > 0 \quad (\rho\phi)_P^{n+1} = (\rho\phi)_P^n - \frac{\Delta t}{V} ((\rho\phi u)_P^n - (\rho\phi u)_W^n) \Delta y \quad (35)$$
$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (36)$$

29 / 78

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

# Diffusion numérique

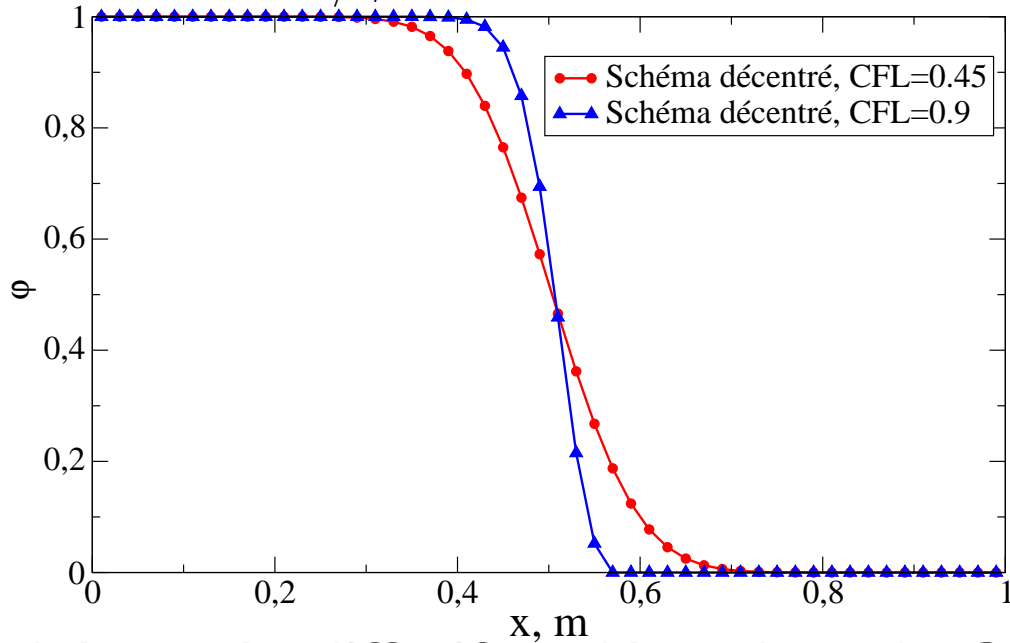
$f_e = f_P$  - approximation d'ordre 1 avec l'erreur de troncature :

On peut démontrer que pour  $CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} = 1$  et  $u = cste, \rho = cste$  le schéma 35 donne la solution exacte.

[illegible]



Solution :  $u = cste = 1m/s$ ,  $t = 0.5s$



31 / 78

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

32 / 78

Transport convectif d'un scalaire passif - condition initiale discontinue  
 $u = 1 \text{ m/s}$     $t = 1\text{s}$     $CFL = 0.5$



This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Transport convectif d'un scalaire passif - condition initiale continue  
 $u = 1 \text{ m/s}$     $t = 1\text{s}$     $CFL = 0.5$

[illegible]

## Notes

## Motivation

- Schéma décentré ne produit pas les oscillations mais est très diffusif
- Schémas d'ordre 2 sont moins diffusifs mais produisent les oscillations aux alentours des discontinuités
- **Essayer de combiner les avantages des deux ?**

- Solution exacte de Godunov [6] : onéreuse en temps de calcul et difficile à appliquer dans certains situations
- Solution approchée du problème de Riemann (solveur de Roe [5]) : nécessite un calcul du Jacobien à l'interface

$$A_{i\pm 1/2} = \left( \frac{\partial F(U)}{\partial U} \right)_{i\pm 1/2}$$

- 36 / 78

## This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

# Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws (MUSCL)

## Généralités

- Proposé par B. van Leer en 1979 [7]
- Reconstruction d'ordre élevé des flux aux interfaces en dehors d'une discontinuité
- Décentrement des flux en présence d'une discontinuité à l'aide d'un limiteur de flux
- Respect de la condition TVD (Total Variation Diminishing)

$$TV(U^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |U_{i+1}^n - U_i^n| \quad [1]$$

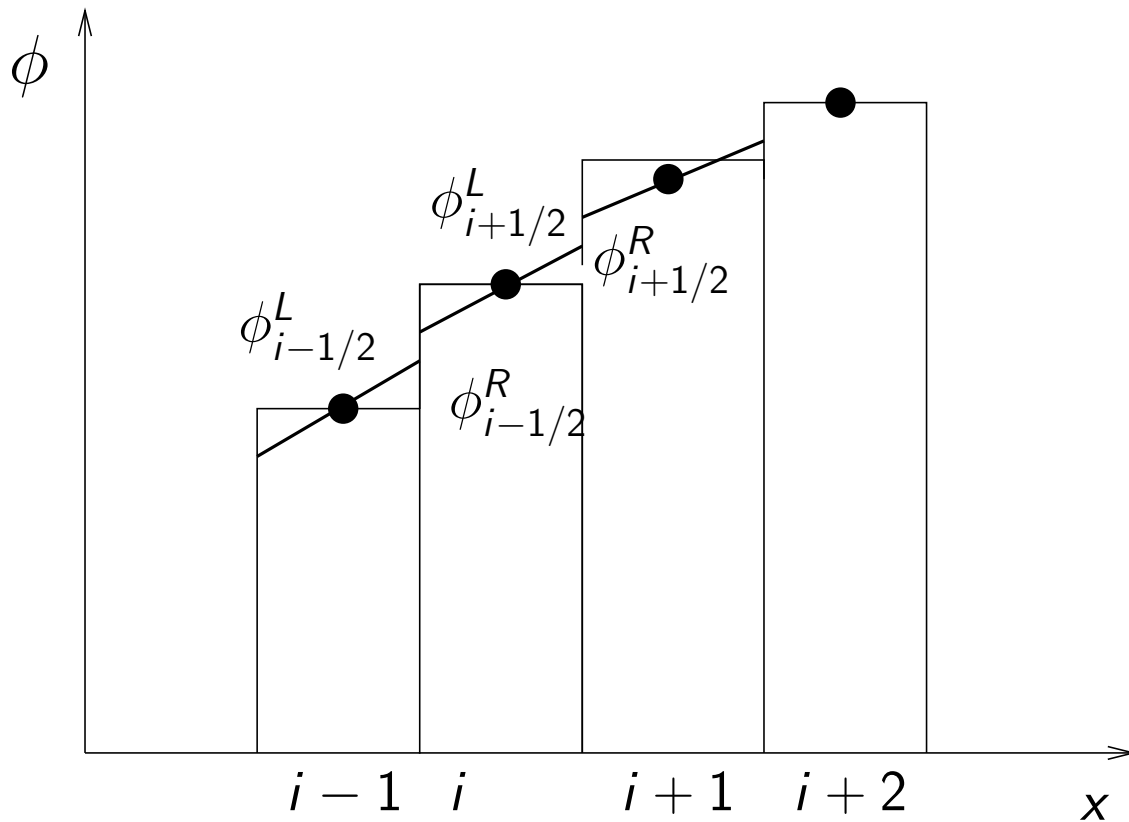
## Notes

[illegible]

38 / 78



## Interprétation géométrique de la reconstruction



## Notes

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Flux numérique :

$$\phi_i^E = \phi_i - (\phi_x)_i \quad (50)$$

Fonction multivariable *minmod* :

40 / 78

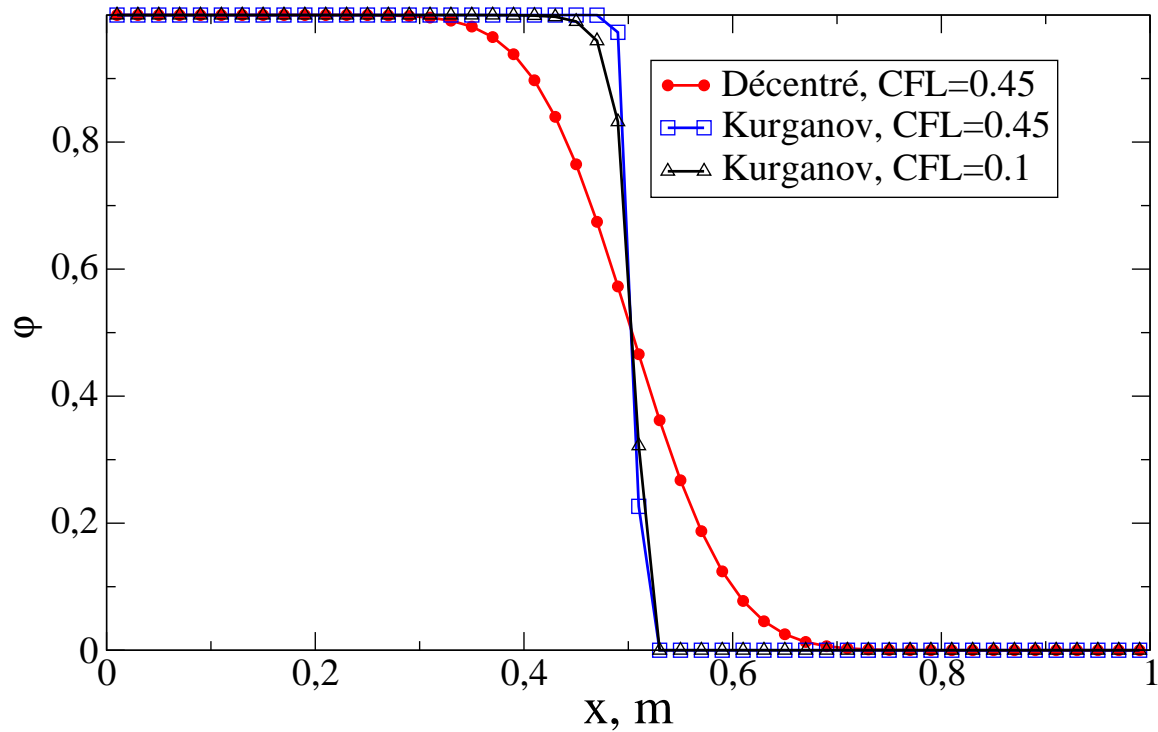
This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

## Schéma MUSCL de Kurganov-Tadmor : résultats 1D

Condition initiale :  $\phi = 1$  en  $x = 0$  et  $\phi = 1$  pour  $x \in ]0, 1]$ .

Solution :  $u = cste = 1m/s$ ,  $t = 0.5s$



## Notes

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

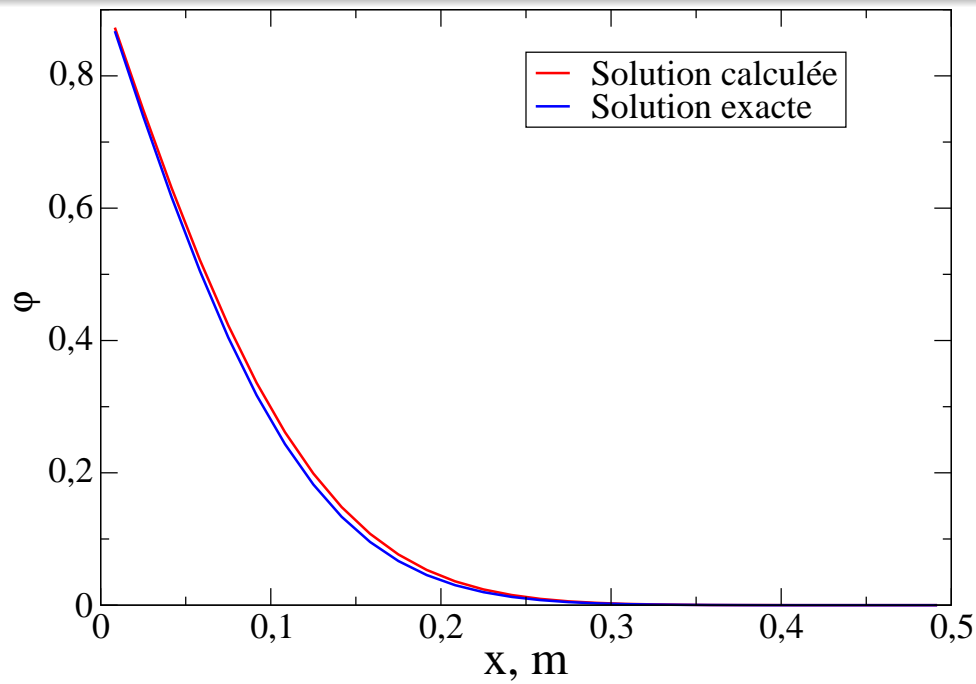
This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



## Terme diffusif - exemple

## Comparaison calcul/solution analytique

- Diffusion 1D  $L = 0.5m$ , 30 volumes
- $D = 0.01m^2/s$   $r = 0.45$ , Temps final 0.5s



45 / 78

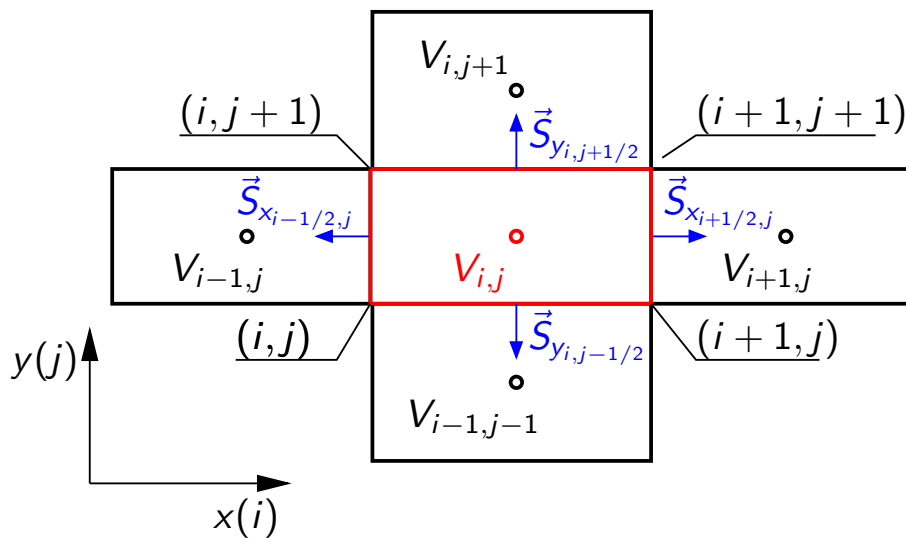
## Notes

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi V)_{i,j} + \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k = 0 \text{ avec } k \text{ interfaces } i \pm 1/2, j \text{ et } i, j \pm 1/2 \quad (59)$$

## Notes

[illegible]

$$\text{Flux diffusif : } \vec{F}_k = (\vec{F}_d + \vec{G}_d)_k = -(\rho D \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i}_x)_k - (\rho D \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{i}_y)_k \quad (61)$$
$$\begin{aligned}
\sum (\vec{F}\vec{S})_k &= (\phi u S)_{i+1/2,j} - (\phi u S)_{i-1/2,j} \\
&+ (\phi v S)_{i,j+1/2} - (\phi v S)_{i,j-1/2} \\
&- (D \frac{\partial \phi}{\partial x} S)_{i+1/2,j} + (D \frac{\partial \phi}{\partial x} S)_{i-1/2,j} \\
&- (D \frac{\partial \phi}{\partial y} S)_{i,j+1/2} + (D \frac{\partial \phi}{\partial y} S)_{i,j-1/2} \quad (62)
\end{aligned}$$

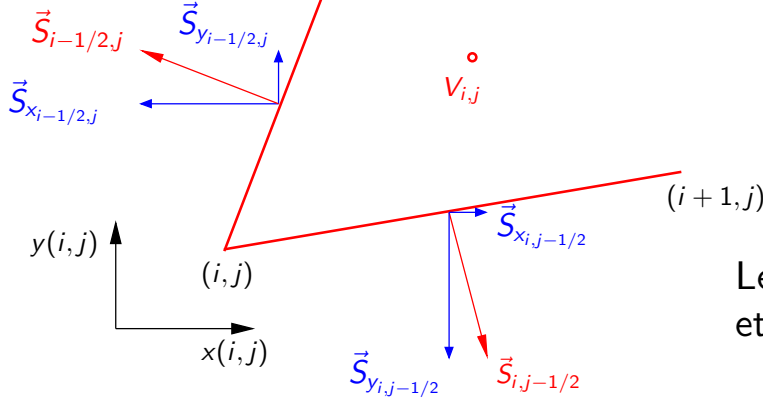


$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi V)_{i,j} + \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k = 0 \text{ avec } k \text{ interfaces } i \pm 1/2, j \text{ et } i, j \pm 1/2 \quad (64)$$

- 51 / 78

[illegible]

On choisie :  $\vec{S}_x$  colinéaire à  $\vec{X}$  et  $\vec{S}_y$  colinéaire à  $\vec{Y}$

$$(i, j+1)$$


- Face ouest  $(i - 1/2, j)$  :  

$$\vec{S}_{i-1/2,j} = \vec{S}_{x_{i-1/2,j}} + \vec{S}_{y_{i-1/2,j}}$$
- Face nord  $(i, j - 1/2)$  :  

$$\vec{S}_{i,j-1/2} = \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{S}_{y_{i,j-1/2}}$$
- etc...

Les composantes des vecteurs  $\vec{S}_x$  et  $\vec{S}_y$  se calculent aisément :

- $\vec{S}_{x_{i-1/2,j}} = \vec{e}_{x_{i-1/2,j}}(yn_{i,j+1} - yn_{i,j})$
- $\vec{S}_{y_{i-1/2,j}} = \vec{e}_{y_{i-1/2,j}}(xn_{i,j+1} - xn_{i,j})$

où  $e_{x_{i-1/2,j}}, \vec{e}_{y_{i-1/2,j}}$  sont les vecteurs unitaires normaux et  $x_n, y_n$  sont les coordonnées de noeuds.

## Notes

[illegible]

### Flux advectif à travers des faces ( $\rho = cste$ )

$$\text{Face sud } (i, j + 1/2) : \quad (\vec{F}_a \vec{S})_{i,j+1/2} = (\phi \vec{u} \vec{S}_x)_{i,j+1/2} + (\phi \vec{v} \vec{S}_y)_{i,j+1/2}$$

## Notes

## Décentrement du flux advectif - schéma upwind 34

Flux-splitting : décentrement selon les directions  $X$  (vitesse  $u$ ) et  $Y$  (vitesse  $v$ )

Par exemple, pour la face sud  $(i, j - 1/2)$  :

$$(\phi u)_{i,j-1/2} = \begin{cases} (\phi u)_{i,j} & \text{si } u \geq 0 \\ (\phi u)_{i,j-1} & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

$$(\phi v)_{i,j-1/2} = \begin{cases} (\phi v)_{i,j-1} & \text{si } v \geq 0 \\ (\phi v)_{i,j} & \text{si } v < 0 \end{cases}$$

**Cette approche fonctionne mais elle introduit la diffusion numérique supplémentaire.**

## Notes

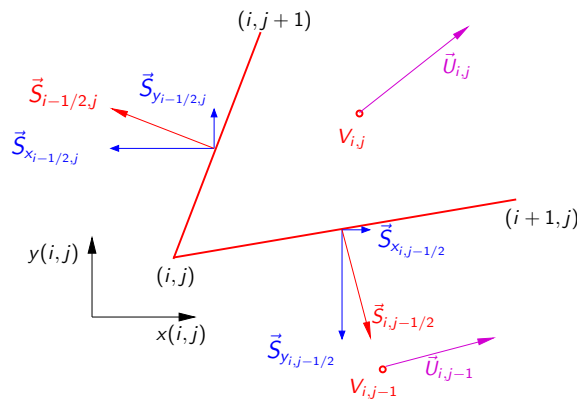
This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



## Décentrement du flux advectif - schéma upwind 34

Décentrement basé sur le signe de la vitesse normale à la face  $u_n = \vec{U} \cdot \vec{n}$  selon Peric [2].

On s'intéresse au signe de  $\vec{U} \cdot \vec{n}$ . P.ex., pour la face nord  $i, j - 1/2$   
 $sign(\vec{U} \cdot \vec{n})_{i,j-1/2} = sign(\vec{U}_{i,j-1/2} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2})$

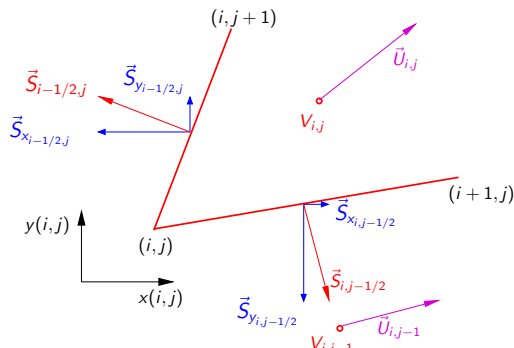


$$\vec{U}_{i,j-1/2} = ???$$

## Notes

[illegible]

Calcul de  $\vec{U}_{i,j-1/2} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2}$


$$U_n^L = \vec{U}_{i,j-1} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2}$$

$$U_n^R = \vec{U}_{i,j} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2}$$

$$\begin{aligned}
U_n^L &= (\vec{u}_{i,j-1} + \vec{v}_{i,j-1}) \cdot (\vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{S}_{y_{i,j-1/2}}) \\
&= \vec{u}_{i,j-1} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{u}_{i,j-1} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j-1} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j-1} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} \\
&= \vec{u}_{i,j-1} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j-1} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} \\
&= u_{i,j-1}(yn_{i+1,j} - yn_{i,j}) - v_{i,j-1}(xn_{i+1,j} - xn_{i,j})
\end{aligned}$$

56 / 78

[illegible]

## Décentrement du flux advectif - schéma upwind 34

Calcul de  $\vec{U}_{i,j-1/2} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2}$

$$\begin{aligned}
U_n^R &= (\vec{u}_{i,j} + \vec{v}_{i,j-1}) \cdot (\vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{S}_{y_{i,j-1/2}}) \\
&= \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} \\
&= \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} \\
&= u_{i,j}(yn_{i+1,j} - yn_{i,j}) - v_{i,j}(xn_{i+1,j} - xn_{i,j})
\end{aligned}$$

### Calcul du flux advectif en $(i, j - 1/2)$

$$(\phi u)_{i,j-1/2} = \begin{cases} (\phi u)_{i,j} & \text{si } U_n^L > 0 \text{ et } U_n^R > 0 \\ (\phi u)_{i,j-1} & \text{si } U_n^L \leq 0 \text{ et } U_n^R \leq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

## Notes

[illegible]

### Flux diffusif à travers des faces ( $\rho = cste$ )

$$\begin{aligned} \text{Face nord } (i, j - 1/2) : \quad (\vec{F}_d \vec{S})_{i,j-1/2} = & - (D \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i}_x \vec{S}_x)_{i,j-1/2} \\ & - (D \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{i}_y \vec{S}_y)_{i,j-1/2} \end{aligned}$$

58 / 78

[illegible]

- $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$  peuvent être évaluées à l'aide du schéma centré p.ex. 56
- $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  peuvent être évaluées à partir de  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$  à l'aide d'un changement des coordonnées  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$

[illegible]

$$\xi = \xi(x, y) \text{ et } \eta = \eta(x, y) \quad (65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (67)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (68)$$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

En inversant le rôle des variables indépendantes :

$$x = x(\xi, \eta) \text{ et } y = y(\xi, \eta) \quad (69)$$

On peut trouver (c.f. [3] pour les détails) :

$$\xi_x = Jy_\eta \quad \xi_y = -Jx_\eta \quad (70)$$

$$\eta_x = -Jy_\xi \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (71)$$

avec le Jacobien de transformation  $J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta}$

$$\text{où p.ex. } (x_\xi)_{i,j-1/2} \approx \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi}\right)_{i,j} = \frac{xn_{i+1,j} - xn_{i,j}}{\sqrt{(xn_{i+1,j} - xn_{i,j})^2 + (yn_{i+1,j} - yn_{i,j})^2}}$$

## Notes

[illegible]

Schéma explicite en temps :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k \quad (72)$$
$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k \quad (72)$$

- Advection : décentrée (eq. 34)
- Diffusion : centrée (eq. 56)

- Précision :  $\varepsilon(\Delta t, \Delta x^2)$  pour la diffusion,  $\varepsilon(\Delta t, \Delta x)$  pour l'advection



## Stabilité

$$\Delta t = \min(\Delta t_{i,j}) \quad \forall i,j \quad (74)$$

63 / 78

[illegible]

## Conditions aux limites de type Von Neumann

Dérivée est imposée ou interpolée sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

- $F_{d_{i,1/2}} = (D \frac{\partial \phi}{\partial x})_{i,1/2} = 0$  : condition de symétrie pour le terme diffusif
- $F_{d_{imax+1/2,j}} = (D \frac{\partial \phi}{\partial x})_{imax+1/2,j} = (D \frac{\partial \phi}{\partial x})_{imax-1/2,j}$  : condition de sortie pour le terme diffusif

Flux est imposé ou interpolé sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

- $F_{a_{imax+1/2,j}} = (\phi u)_{imax+1/2,j} = (\phi u)_{imax-1/2,j}$  : condition de sortie pour le terme advectif (schéma d'ordre 2 en espace)

## Notes

[illegible]

## Conditions aux limites de type Dirichlet

Valeurs sont imposées dans des centres de volumes-fantômes i.e. des volumes supplémentaires qui bordent le domaine du calcul  
 $(i = 0, i = imax + 1, j = 0, j = jmax + 1)$

- $\phi_{0,j} = f(y)$ ,  $u_{0,j} = g(y)$  : condition d'entrée
- $\phi_{i,0} = \phi_{i,1}$ ,  $u_{i,0} = u_{i,1}$ ,  $v_{i,0} = -v_{i,1}$  : condition de symétrie
- $\phi_{imax+1,j} = \phi_{imax,j}$  : condition de sortie pour le terme diffusif

Flux (valeurs) sont imposés ou interpolés sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

- $F_{a_{1/2,j}} = (\phi u)_{1/2,j} = f(y)$  : condition d'entrée pour le terme advectif
- $F_{a_{i,1/2}} = (\phi v)_{i,1/2} = 0$  : condition de symétrie pour le terme advectif

## Notes

[illegible]

- 65 / 78

[illegible]

- 65 / 78

## This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.