DM Probabilités

Partie 3

$U \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$ $V \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$

1/a) $g(u) = -2\ln(u)$; $x = -2\ln(u) \Rightarrow -\frac{x}{2} = \ln(u) \Rightarrow e^{-x/2} = u$

$g : u \longmapsto -2\ln(u)$ $u \in]0;+\infty[$

Ainsi $g^{-1} : x \longmapsto e^{-x/2}$ $x \in]-\infty;+\infty[$

b) $f_X(x) = f_U(g^{-1}(x))\ (g^{-1}(x))'$

$U \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1]$ Ainsi $f_U(u) = \frac{1}{1-0} \mathbb{1}_{[0;1]}$ puisque c'est une loi uniforme de paramètre $b=1, a=0$

$f_U(u) = \mathbb{1}_{[0;1]}$

Par le nouveau domaine :

$0 \leq g^{-1}(x) \leq 1$

$0 \leq e^{-x/2} \leq 1$

$1 \leq e^{x/2} \leq +\infty$

ln ($\ln(1) \leq \frac{x}{2} \leq \ln(+\infty)$

$0 \leq \frac{x}{2} \leq +\infty$

idem à $0 \leq x \leq +\infty$

Soit $x \in [0;+\infty[$

D'où $(g^{-1}(x))' = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$

Donc $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(u) \times -\frac{1}{2} e^{-x/2}$ $\forall x \in [0;+\infty[$

2/a) $\phi_1 : a = \sqrt{x} \cos(2\pi v)$ $\phi_2 : b = \sqrt{x} \sin(2\pi v)$

$$J|\phi(a,b)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(2\pi v) & -\sqrt{x} \times 2\pi \times \sin(2\pi v) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2\pi v) & +\sqrt{x}\ 2\pi \cos(2\pi v) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos(2\pi v) \times \sqrt{\pi}\, 2\pi \cos(2\pi v) - \left[-\sqrt{\pi}\, 2\pi \sin(2\pi v) \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin(2\pi v) \right]$$

$$= \pi \cos^2(2\pi v) + \pi \sin^2(2\pi v) = \pi$$ puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

b) $f_{A,B}(a,b) = f_{X,V}(\phi^{-1}(a,b)) \times |J\phi^{-1}(a,b)|$

Or $f_{X,V}(x,v) = f_X(x) \times f_V(v)$ & $|J\phi^{-1}(a,b)| = |J\phi(x,v)|^{-1} = \frac{1}{|J\phi(x,v)|}$
puisque X et V indépendantes

Soit $f_{A,B}(a,b) = f_X(x) \times f_V(v) \times |J\phi(x,v)|^{-1}$

$X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ $f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-x/2} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $V \sim \mathcal{U}[0,1]$ $f_V(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $f_{A,B}(a,b) = -\frac{1}{2} e^{-x/2} \times \mathbb{1}_{[0,1]}(v) \times \frac{1}{\pi}$

$$= -\frac{1}{2\pi} e^{-x/2}$$

Donc (A,B) suit une loi de type $= -\frac{1}{2\pi} e^{-x/2}$

Normalement on devrait s'attendre à une loi normale du type $\mu = 0, \sigma = 1$
ce qui serait $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$