# Introduction à la Mécanique des Fluides Numérique: Méthode "Volumes Finis"

Alexei Stoukov

ENSEEIHT Département Hydraulique / Mécanique des Fluides

> Version initiale: Octobre 2006 Revision: Février 2013

# Mécanique des Fluides Numérique Computational Fluid Dynamics - méthodologie

- Résolution numérique des problèmes de la Mécanique des Fluides
- Grandes étapes :
  - Problème physique <u>continu</u> est décrit par un modèle mathématique continue (mis en équations)
  - Modèle mathématique <u>continu</u> est <u>discrétisé</u> en s'appuyant sur une(des) méthode(s) numérique(s)
  - Equations <u>discrétisées</u> sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établie
  - Algorithme est codé (C, Fortan, Matlab, Java,...)
  - Code est executé sur un ordinateur
  - Si tout va bien, la solution approchée du problème initial est obtenue

Notes		

## CFD: Principales méthodes

#### Différences finies

Appoximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide de devéloppement en série de Taylor

#### Elements finis

Détermination d'un champ local à attribue à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème (bilan global).

#### **Volumes finis**

Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle

Notes			

## Différences finies

Le principe de la méthode se découle directement de la définition de dérivée :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x} \tag{1}$$

3 / 78

Série de Taylor pour une fonction continue  $\phi(x)$  aux alentours de  $x_i$ :

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial \phi^3}{\partial x^3}\right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial \phi^n}{\partial x^n}\right)_i + H \quad (2)$$

où H représente les termes d'ordre superieurs Higher order terms

Notes			

## Différences finies

En remplacant x par  $x_{i+1}$  ou  $x_{i-1}$  dans (2) on obtient :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i}}{x_{i+1} - x_{i}} - \frac{x_{i+1} - x_{i}}{2} \left(\frac{\partial\phi^{2}}{\partial x^{2}}\right)_{i} - \frac{(x_{i+1} - x_{i})^{2}}{6} \left(\frac{\partial\phi^{3}}{\partial x^{3}}\right)_{i} + H$$
(3)

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i} = \frac{\phi_{i} - \phi_{i-1}}{x_{i} - x_{i-1}} + \frac{x_{i} - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial\phi^{2}}{\partial x^{2}}\right)_{i} - \frac{(x_{i} - x_{i-1})^{2}}{6} \left(\frac{\partial\phi^{3}}{\partial x^{3}}\right)_{i} + H$$
(4)

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_{i})^{2} - (x_{i} - x_{i-1})^{2}}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial\phi^{2}}{\partial x^{2}}\right)_{i} - \frac{(x_{i+1} - x_{i})^{3} + (x_{i} - x_{i-1})^{3}}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial\phi^{3}}{\partial x^{3}}\right)_{i} + H$$
(5)

Notes			

## Différences finies

#### Exemple d'approximation

Forward Difference (FD) 
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}$$
 (6)

Backward Difference (BD) 
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$
 (7)

Central Difference (CD) 
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$
 (8)

#### L'erreur de troncature

- $\vartheta(\Delta x)$  pour FD et BD
- $\vartheta(\Delta x^2)$  pour *CD*

Notes \_\_\_\_\_\_

Méthode "Volumes Finis" CFD : Principales méthodes Eléménts finis

## Méthode Eléménts finis

Consiste à rechercher une solution approchée sous la forme d'un champ  $\widetilde{F}(M,t)$  défini par morceaux sur des sous domaines de  $\Omega$ . Les n sous-domaines  $\Omega_i$  doivent être tels que

$$igcup_{i=1}^n\Omega_i=\Omega$$
 et  $\widetilde{\Omega_i}\cap\widetilde{\Omega}_j=\emptyset$   $orall i
eq j$ 

où  $\widetilde{\Omega}_i$  désigne l'intérieur de  $\Omega_i$ .

Les champs  $f_i(M, t)$ , définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynômiaux).

Le champ dans chaque sous domaine  $\Omega_i$  est déterminé par un nombre fini de valeurs du champ (ou de valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous domaine, et appelés nœuds. Le champ local est une interpolation entre les valeurs aux nœuds. Le sous-domaine muni de son interpolation est appelé élément.

Chercher une solution par éléments finis consiste à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous domaine pour que le champ global  $\widetilde{F}(M,t)$  obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème.

Notes \_\_\_\_\_\_

# Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis"?

#### Différences finies

- Bien connue
- Mise en œvre simple pour une géometrie simple
- Mise en œvre difficile pour une géometrie complexe
- Pas toujours conservative
- Utilisation dans des codes de "recherche"

#### Eléménts finis

- Approche très "mathématique"
- S'adapte à une géometrie quelconque
- Difficultées pour resoudre les termes non-lineaires
- Très utilisée dans le domaine de Mécanique des Solides et pour des problèmes multi-physique (Comsol, ex FemLab).

Notes \_\_\_\_\_\_

Méthode "Volumes Finis"

CFD: Principales méthodes

Volumes finis - pourquoi l'utiliser

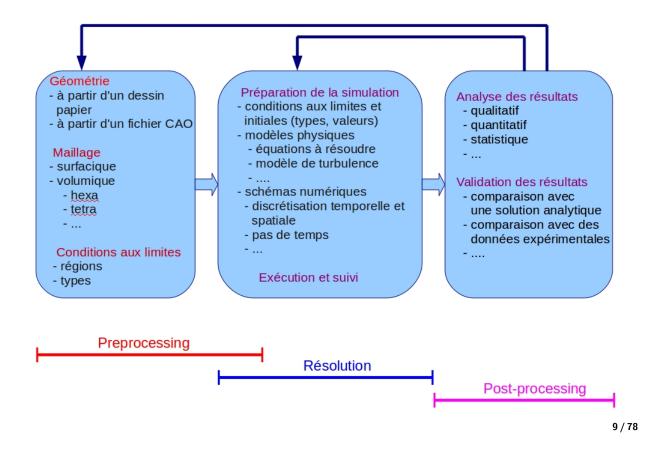
# Pourquoi utiliser l'approche "Volumes Finis" ?

#### Volumes finis

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géometrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-lineaires hyperboliques
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tout les codes généralistes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL), OpenFoam (Libre)...

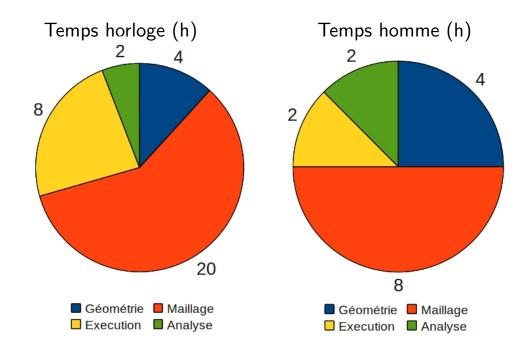
Notes \_\_\_\_\_\_

## Processus de la CFD industrielle : étapes typiques



Notes	

# Processus de la CFD industrielle : répartition des étapes dans le temps



Todd Michal. SIAM News, CSE 2009: Preprocessing for Industrial CFD: More Important Than You Might Think

Notes		

Méthode "Volumes Finis" CFD : Principales méthodes Volumes finis - pourquoi l'apprendre

# Processus de la CFD industrielle : préparation de la modélisation / modélisation

Modèle de	e l'écoulement : steady, unsteady?
<ul><li>Unste</li></ul>	eady
1	Implicite unsteady
	<ul> <li>Solveur : segregated ou coupled?</li> <li>Δt?</li> <li>Schèma de discrétisation : SIMPLE, QUICK, CD, MARS,</li> <li>Options du solveur : Gauss-Zeidel, GC,?</li> </ul>
2	Explicite unsteady
	<ul><li>CFL?</li><li>Fractional step time advancement?</li><li></li></ul>

Notes \_\_\_\_\_\_

## Loi de conservation sous forme differentielle

Equations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \tag{9}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_{t} \end{pmatrix} F = F_{c} + F_{d} = \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ div(\rho u \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial x} \\ div(\rho v \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial y} \\ div(\rho w \vec{u}) + \frac{\partial P}{\partial z} \\ div(\rho E \vec{u}) + P div \vec{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ div(\mu gradu) \\ div(\mu gradv) \\ div(\mu gradw) \\ div(kgradT) \end{pmatrix}$$

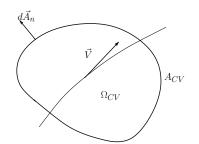
$$(10)$$

Equation générale du transport :

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div}(\rho \phi \vec{u})}_{Advection} - \underbrace{\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi)}_{Diffusion} = \underbrace{S_{\phi}}_{Terme\ Source/Puits}$$
(11)

Notes			

## Loi de conservation sous forme integrale



Notes

- $\Omega_{CV}$  volume (domaine) de contrôle
- $\Omega_{CV}$  fixe dans le temps  $A_{CV}$  surface exterieure du volume
  - $\rho\phi$  densité volumique d'une grandeur

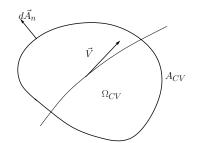
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega + \int_{\Omega_{CV}} div(\rho \phi \vec{u} d\Omega) - \int_{\Omega_{CV}} div(\Gamma grad\phi) d\Omega = \int_{\Omega_{CV}} S_{\phi} d\Omega$$
(12)

Pour le volume  $\Omega_{CV}$  le thèoreme de Gauss donne :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega}_{\text{Variation temporelle}} + \underbrace{\int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A_n}}_{\text{Transport advectif}} - \underbrace{\int_{A_{CV}} (\Gamma grad\phi) d\vec{A_n}}_{\text{Transport diffusif}} = \underbrace{\int_{\Omega_{CV}} S_{\phi} d\Omega}_{\text{Source/Puits}}$$
(13)


## Loi de conservation sous forme integrale

Une autre façon de voir la mèthode :



Notes

- $\Omega_{CV}$  volume (domaine) de contrôle
- $\Omega_{CV}$  fixe dans le temps
- A<sub>CV</sub> surface exterieure du volume
- ullet  $ho\phi$  densité volumique d'une grandeur
- $\vec{F}$  vecteur flux de la matière

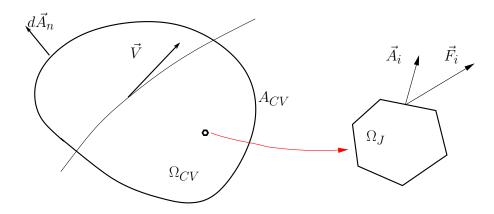
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega = - \underbrace{\oint_{A_{CV}} \vec{F} d\vec{A_n}}_{\text{Dariation temporelle de } \rho \phi \text{ dans } \Omega_{CV}} = - \underbrace{\oint_{A_{CV}} \vec{F} d\vec{A_n}}_{\text{Bilan des flux}} + \underbrace{\int_{\Omega_{CV}} S_{\phi} d\Omega}_{\text{Source/Puits}}$$

$$\text{Source/Puits à travers de } A_{CV}$$

On note que  $-\vec{F}d\vec{A_n}$  est le flux entrant Advection :  $\vec{F_c} = \rho\phi\vec{u}$  Diffusion (loi de Fick) :  $\vec{F_d} = -Dgrad\phi$ 

Notes	

## Méthode Volumes Finis



Bilan sur  $\Omega_J$ 

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi_{J}\Omega_{J}) + \sum_{\text{faces}} (\vec{F}_{i}\vec{A}_{i})_{J} = (S_{\phi})_{J}$$
(15)

- $\phi_J$  valeur moyenne de  $\phi$  sur  $\Omega_J$  (valeur au centre de  $\Omega_J$ )
- $\vec{F}_i$  flux moyen sur  $A_i$

Notes		

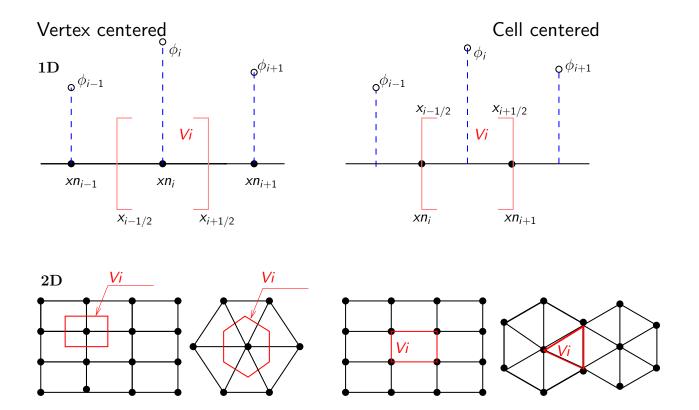
## Méthode Volumes Finis

#### Points cléfs de la mèthode

- Choix des volumes de contrôle (maillage)
- Type d'approximation dans les volumes
- Schémas numériques pour evaluation des flux

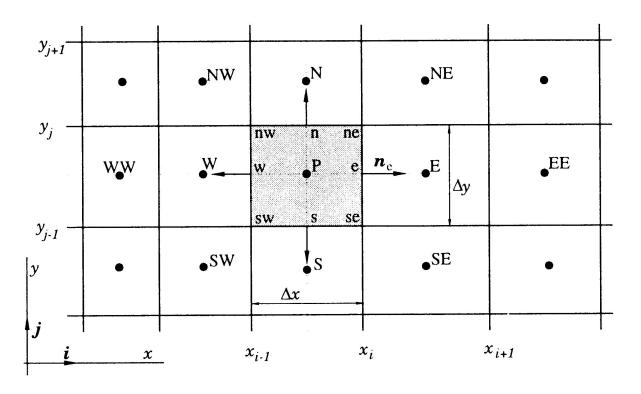
Notes \_\_\_\_\_\_

## Définition des volumes de contrôle



Notes	

# Maillage



Source : [2]

Notes \_\_\_\_\_\_

## Advection 1D

Rappelons la loi de conservation sous forme integrale

$$rac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{CV}}
ho\phi d\Omega = -\oint_{A_{CV}}ec{F}dec{A_n} + \int_{\Omega_{CV}}S_\phi d\Omega$$

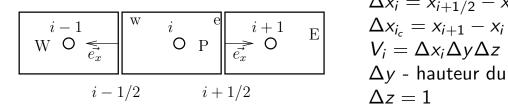
Dans le cas d'advection pure et en abscence d'un terme source

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega = - \oint_{A_{CV}} \rho \phi \vec{u} d\vec{A}_n \tag{16}$$

Notes \_\_\_\_\_\_

## Advection 1D

En 1D (faux 2D):



$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$
 $\Delta x_{i_c} = x_{i+1} - x_i$ 
 $V_i = \Delta x_i \Delta y \Delta z$ 
 $\Delta y$  - hauteur du volume
 $\Delta z = 1$ 

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \rho \phi dV_i = -\int_{\Delta y} \rho \phi \vec{u} \vec{e}_x dy$$
 (17)

Formulation Volumes Finis:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)_{i}V_{i} = -\left((\rho\phi\vec{u}\vec{e}_{x})_{i+1/2}\Delta y + (\rho\phi\vec{u}\vec{e}_{x})_{i-1/2}\Delta y\right) \tag{18}$$

avec  $\rho\phi_i$  la valeur moyennée sur le volume et  $(\rho\phi\vec{u})_{i\pm1/2}=\vec{F}_{i\pm1/2}$  les flux (moyens dans le cas 2D et 3D).

Notes		

## Advection 1D

Avec la notation WPE:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)_P V_P = -(\vec{F}_w \vec{e}_x + \vec{F}_e \vec{e}_x) = -((\rho\phi \vec{u}\vec{e}_x)_e \Delta y + (\rho\phi \vec{u}\vec{e}_x)_w \Delta y) \tag{19}$$

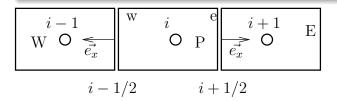
$$(\rho\phi)_P$$

Notes

Pour un maillage de type *cell center*  $(\rho \phi u)_P$  est connu au moment t=0 (initialisation).

$$(\rho\phi\vec{u})_e = \vec{F}_e \text{ et } (\rho\phi\vec{u})_w = \vec{F}_w$$
???

Interpolation à partir de valeurs connues : choix d'un schéma d'approximation



# Vos idées?

140103			

## Interpolation linéaire

$$\begin{array}{c|c}
i-1 & W & i & P \\
\hline
W & O & \overrightarrow{e_x} & O & P
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
i+1 & E \\
\hline
e_x & O & E
\end{array}$$

$$i-1/2 & i+1/2 \\
\vec{F_e} = (\rho\phi\vec{u})_e = (\rho\phi\vec{u})_E\lambda_e + (\rho\phi\vec{u})_P(1-\lambda_e) \\
\text{avec} & \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}
\end{array}$$
(20)

Maillage régulièr :

$$\vec{F}_{e} = (\rho \phi \vec{u})_{e} = \frac{(\rho \phi \vec{u})_{E} + (\rho \phi \vec{u})_{P}}{2}$$

$$\vec{F}_{w} = (\rho \phi \vec{u})_{w} = \frac{(\rho \phi \vec{u})_{W} + (\rho \phi \vec{u})_{P}}{2}$$
(22)

$$\vec{F}_w = (\rho \phi \vec{u})_w = \frac{(\rho \phi \vec{u})_W + (\rho \phi \vec{u})_P}{2}$$
 (23)

Nous avons obtenu le schéma spatial centré d'ordre 2 (l'erreur est proportionnelle à  $\Delta x^2$ )

Notes			

## Schéma centré

Discrétisation temporelle - schéma d'Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)_{P} = \frac{(\rho\phi)_{P}^{n+1} - (\rho\phi_{P})^{n}}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta t)$$
 (24)

Schéma explicite en temps et centré en espace (maillage régulièr)

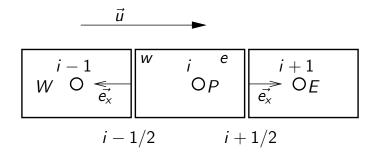
$$\frac{(\rho\phi)_P^{n+1} - (\rho\phi)_P^n}{\Delta t} V_P = -((\rho\phi\vec{u})_e^n \vec{e}_x \Delta y + (\rho\phi\vec{u})_w^n \vec{u}\vec{e}_x \Delta y) \qquad (25)$$

$$(\rho\phi)_P^{n+1} = \rho\phi_P^n - \frac{\Delta t}{V} \left( (\vec{F}\vec{e}_x)_e \Delta y + (\vec{F}\vec{e}_x)_w \Delta y \right) (26)$$

avec 
$$\vec{F}_e = \frac{(\rho \phi \vec{u})_E^n + \rho \phi \vec{u}_P^n}{2}$$
 et  $\vec{F}_w = \frac{(\rho \phi \vec{u})_W^n + \rho \phi \vec{u}_P^n}{2}$  (27)

Notes			

## Cas simplifié : vitesse constante et positive



Posons  $\vec{u} = cste > 0$ . Multiplication de (27) par  $\vec{e_x}$  donne :

$$F_{e} = \frac{(\rho \phi \vec{u})_{E}^{n} + (\rho \phi \vec{u})_{P}^{n}}{2} \vec{e}_{xe} = + \frac{(\rho \phi u)_{E}^{n} + (\rho \phi u)_{P}^{n}}{2}$$
(28)

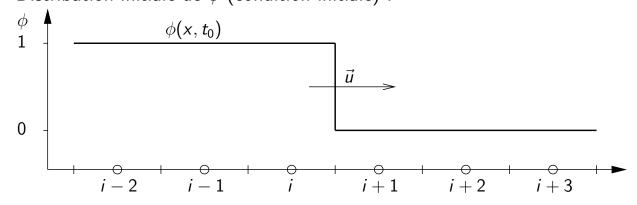
$$F_{w} = \frac{(\rho \phi \vec{u})_{W}^{n} + (\rho \phi \vec{u})_{P}^{n}}{2} \vec{e_{xw}} = -\frac{(\rho \phi u)_{W}^{n} + (\rho \phi u)_{P}^{n}}{2}$$
(29)

$$(\rho\phi)_P^{n+1} = \rho\phi_P^n - \frac{\Delta t}{V}(F_e\Delta y + F_w\Delta y)$$
 (30)

Notes		

## Application: advection 1D

Objectif : calculer  $\phi(x,t)$  à  $t=\Delta t,\ t=2\Delta t,$  etc... Prenons  $\rho=1,\ u=1,\ \Delta t=0.1,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=1$  Distribution initiale de  $\phi$  (condition initiale) :



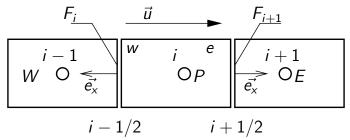
## Solution analytique

$$\phi(x,t) = \phi(x - ut, t_0)$$

Notes	

## Application: advection 1D

Discrétisation (30): 
$$(\rho\phi)_P^{n+1} = (\rho\phi)_P^n - \frac{\Delta t}{V}(F_e\Delta y + F_w\Delta y)$$



Notons i la face (l'interface) gauche de volume i. Discrétisation (30) devient :

$$(\rho\phi)_i^{n+1} = (\rho\phi)_i^n - \frac{\Delta t}{V_i}(F_{i+1}\Delta y + F_i\Delta y)$$
(31)

avec 
$$F_{i+1} = \frac{(\rho \phi u)_{i+1}^n + (\rho \phi u)_i^n}{2}$$
 et  $F_i = -\frac{(\rho \phi u)_i^n + (\rho \phi u)_{i-1}^n}{2}$  (32)

Notes			
·		·	

# Application : un peu d'arithmètique

$$\vec{F}_{i} = \frac{(\phi \vec{u})_{i}^{n} + (\phi \vec{u})_{i-1}^{n}}{2} \implies \phi_{i}^{n+1} = \phi_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{V_{i}} \left( (\vec{F} \vec{e}_{x})_{i+1} \Delta y + (\vec{F} \vec{e}_{x})_{i} \Delta y \right)$$

Données :  $u=1, \ \Delta t=0.1, \ \Delta x=0.1, \ \Delta y=1, \ V_i=\Delta x \Delta y=0.1$ Remplissez le tableau et tracez la solution obtenue :

n	t	Var.	<i>i</i> − 2	i-1	i	i+1	<i>i</i> + 2	i + 3
		$\phi_i$	1	1	1	0	0	0
0	0	$\vec{F_i}$						
		$\sum_{i}^{i+1} F$						
		$\phi_i$						
1	$\Delta t$	$\vec{F_i}$						
		$\sum_{i}^{i+1} F$						
2	$2\Delta t$	$\phi_i$						

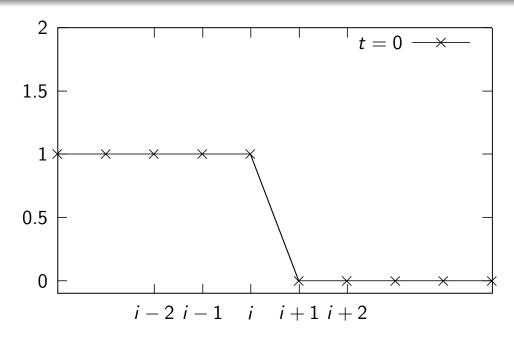
Notes		

# Application: solution

Verifions le choix

Notes

Integration explicite en temps du schéma centré pour le terme convectif u=1  $\Delta t=0.1$   $\Delta x=0.1$ 



## Rémédes

Decentrement de flux

$$f_e = f_P \qquad f_w = f_W \qquad \text{si } u \ge 0 \tag{33}$$

$$f_e = f_E \qquad f_w = f_P \qquad \text{si } u < 0 \tag{34}$$

#### Schéma decentré explicite en temps

Pour 
$$u > 0$$
  $(\rho \phi)_P^{n+1} = (\rho \phi)_P^n - \frac{\Delta t}{V} ((\rho \phi u)_P^n - (\rho \phi u)_W^n) \Delta y$  (35)

Schéma stable sous condition de Courant-Friedrish-Levy

$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{36}$$

Le pas de temps est calculé à partir du CFL!

INOTES		

## Précision

Diffusion numérique

$$\phi_{e} = \phi_{P} + (x_{e} - x_{P}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{P} + \frac{(x_{e} - x_{P})^{2}}{2!} \left(\frac{\partial \phi^{2}}{\partial x^{2}}\right)_{P} + H \qquad (37)$$

 $f_{e}=f_{P}$  - approximation d'ordre 1 avec l'erreur de troncature :

$$f_e^d = \Gamma_e^{num} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \qquad \Gamma_e^{num} = (\rho u)_e \Delta x / 2$$
 (38)

30 / 78

On peut demontré que pour  $CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} = 1$  et u = cste,  $\rho = cste$  le schéma 35 donne la solution exacte.

Notes \_\_\_\_\_\_

# Schéma décentré - exemple

Condition initiale :  $\phi=1$  en x=0 et  $\phi=1$  pour  $x\in ]0,1]$ . Solution  $\underline{:}u=cste=1m/s,\;t=0.5s$ 

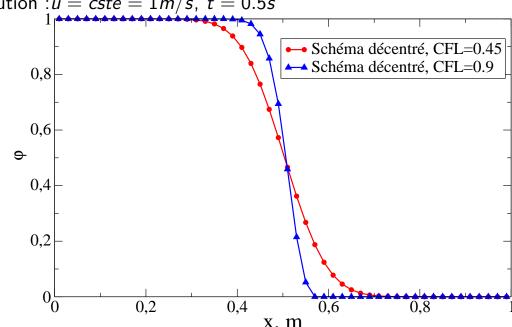


Schéma très diffusif et dépendant du CFL!

Notes		

## Schéma explicite de Lax-Wendroff

Le schéma explicite de Lax-Wendroff

$$(\rho\phi)_{i}^{n+1} = (\rho\phi)_{i}^{n} - \frac{\nu}{2}((\rho\phi)_{i+1}^{n} - ((\rho\phi)_{i-1}^{n}) + \frac{\nu^{2}}{2}((\rho\phi)_{i+1}^{n} - 2(\rho\phi)_{i}^{n} + (\rho\phi)_{i-1}^{n})$$
(39)

$$\text{avec } \nu = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$$

Exprimé en flux VF:

$$(\rho\phi)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left( (\rho\phi)_{i+1}^{n} \right) + (\rho\phi)_{i}^{n} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( (\rho\phi u)_{i+1}^{n+1/2} - (\rho\phi u)_{i}^{n+1/2} \right)$$

$$F_{i+1/2}^{*} = (\rho\phi u)_{i+1/2}^{n+1/2} \Delta y$$

$$(\rho\phi)_{i}^{n+1} = (\rho\phi)_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{V} (F_{i+1/2}^{*} - F_{i-1/2}^{*})$$
(40)

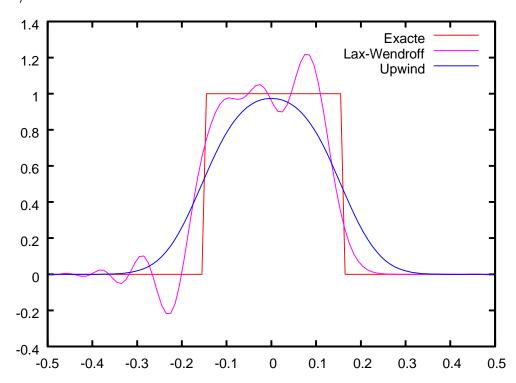
• Stabilité : CFL < 1

• Précision :  $\varepsilon(\Delta t, (\Delta x)^2)$ 

Notes		

## Comparaison

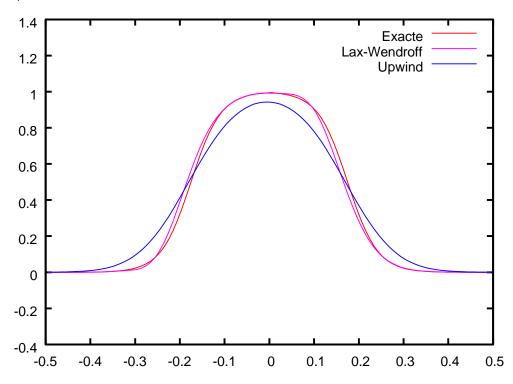
Transport convectif d'un scalaire passif - condition initiale discontinue  $u=1~\mathrm{m/s}$   $t=1\mathrm{s}$   $\mathit{CFL}=0.5$ 



Notes	

# Comparaison

Transport convectif d'un scalaire passif - condition initiale continue  $u=1~{\rm m/s}$   $t=1{\rm s}$  CFL=0.5



Notes	

### Schéma centré implicite en temps

On peut exprimer  $f_{\rm e}$  et  $f_{\rm w}$  dans le schéma centré en fonction de n+1

$$(\rho\phi)_{P}^{n+1} = (\rho\phi)_{P}^{n} - \frac{\Delta t}{2V} \left( (\rho\phi u)_{E}^{n+1} - (\rho\phi u)_{W}^{n+1} \right) \Delta y \tag{41}$$

35 / 78

- Inconditionnalement stable
- Forte erreur dispersive (oscillations) pour le nombre de Peclet  $Pe=rac{
  ho u \Delta x}{D}$  élévé
- Précision  $\varepsilon(\Delta t, (\Delta x)^2)$

### Schémas de haute résolution - aperçu général

#### Motivation

- Schéma décentré ne produit pas les oscillations mais est très diffusif
- Schémas d'ordre 2 sont moins diffusifs mais produisent les oscillations aux alentours des discontinuités
- Essayer de combiner les avantages des deux?

Résolution du problème à valeur initiale : approches possibles

- Solution exacte de Godunov [6] : onéreuse en temps de calcul et difficile à appliquer dans certains situations
- Solution approchée du problème de Riemann (solveur de Roe [5]) : nécessite un calcul du Jacobien à l'interface  $A_{i\pm 1/2} = \left(\frac{\partial F(U)}{\partial U}\right)$
- Approche MUSCL : interpolation des variables conservatives ou primaires

36 / 78

Notes

# Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws (MUSCL)

#### Généralitées

- Proposé par B. van Leer en 1979 [7]
- Reconstruction d'ordre élevé des flux aux interfaces en dehors d'une discontinuité
- Décentrement des flux en présence d'une discontinuité à l'aide d'un limiteur de flux

37 / 78

Respect de la condition TVD (Total Variation Diminishing)

$$TV(U^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |U_{i+1}^n - U_i^n| [1]$$

### Schéma MUSCL

Equation de transport 17 sous forme semi-discrétisée :

$$\frac{d\phi_i}{dt} + \frac{F(\phi_{i+1/2}^*) - F(\phi_{i-1/2}^*)}{\Delta x} = 0 \text{ ou } \frac{d\phi_i}{dt} + \frac{F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0 \text{ (42)}$$

avec flux numériques  $F^*_{i\pm 1/2}$  Ces flux correspondent à une combinaison non-linéaire d'ordre 1 et 2 d'approximation des flux continus. Les flux sont calculés à partir d'une interpolation des variables primaires  $\phi^*_{+1/2}$ :

$$\phi_{i+1/2}^* = \phi_{i+1/2}^* \left( \phi_{i+1/2}^L, \phi_{i+1/2}^R \right) \tag{43}$$

$$\phi_{i+1/2}^{L} = \phi_i + 0.5\psi(r_i)(\phi_{i+1} - \phi_i) \tag{44}$$

$$\phi_{i+1/2}^R = \phi_{i+1} - 0.5\psi(r_{i+1})(\phi_{i+2} - \phi_{i+1}) \tag{45}$$

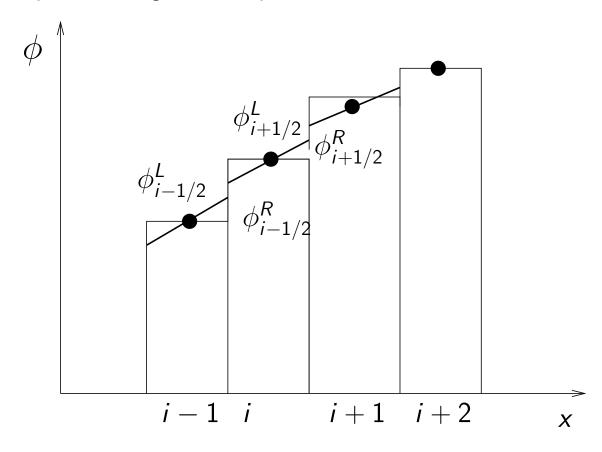
$$\phi_{i-1/2}^{L} = \phi_{i-1} + 0.5\psi(r_{i-1})(\phi_i - \phi_{i-1})$$
 (46)

$$\phi_{i+1/2}^{R} = \phi_i - 0.5\psi(r_i)(\phi_{i+1} - \phi_i)$$
 (47)

$$r_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i}$$
 avec  $\psi(r_i)$  une fonction limiteur de flux (48)

Votes	

# Interprétation géométrique de la reconstruction



Notes	

## Schéma MUSCL de Kurganov-Tadmor[4]

Flux numérique :

$$F_{i+1/2}^{*} = \frac{a_{i+1/2}^{+}F(\phi_{i}^{E}) - a_{i+1/2}^{-}F(\phi_{i+1}^{W})}{a_{i+1/2}^{+} - a_{i+1/2}^{-}} + \frac{a_{i+1/2}^{+}a_{i+1/2}^{-}}{a_{i+1/2}^{+} - a_{i+1/2}^{-}} \left[\phi_{i+1}^{W} - \phi_{i}^{E}\right]$$
(49)  

$$\phi_{i}^{E} = \phi_{i} - (\phi_{x})_{i}$$
(50)  

$$(\phi_{x})_{i} = minmod \left(\theta \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i}}{\Delta x}, \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}, \theta \frac{\phi_{i} - \phi_{i-1}}{\Delta x}\right), \quad \theta \in [1, 2]$$
(51)

Fonction multivariable minmod:

$$minmod(x_1, x_2, ...) = \begin{cases} min_i\{x_i\} & si \quad x_i > 0 \forall i, \\ max_i\{x_i\} & si \quad x_i < 0 \forall i, \\ 0 & autrement. \end{cases}$$
(52)

Notes			

# Schéma MUSCL de Kurganov-Tadmor[4] - suite

Les vitesses de propagation  $a_{i\pm 1/2}^{\pm}$ :

$$a_{i\pm 1/2}^{\pm} = \lambda_n \left(\frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}\right)_{i\pm 1/2} \tag{53}$$

41 / 78

avec  $\lambda_n$  les valeurs propres de  $\frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}$ 

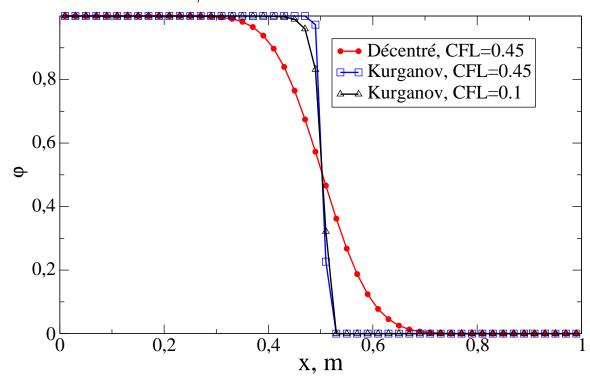
Dans le cas de l'équation de transport 1D d'un scalaire passif (17)  $\lambda = u$  Integration explicite en temps à l'aide de la méthode d'Euler de bilan des ces flux donne le schéma d'ordre 2 en espace (en dehors des discontinuités) et d'ordre 1 en temps.

Stabilité :  $CFL \le 0.5$ 

Notes		

# Schéma MUSCL de Kurganov-Tadmor : résultats 1D

Condition initiale :  $\phi = 1$  en x = 0 et  $\phi = 1$  pour  $x \in ]0,1]$ . Solution : $u = cste = 1m/s, \ t = 0.5s$ 



Votes	

### Terme diffusif

Le flux diffusif dans l'équation du transport

$$rac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{CV}}
ho\phi d\Omega = -\oint_{A_{CV}}ec{F}dec{A_n} + \int_{\Omega_{CV}}S_{\phi}d\Omega$$

est

$$\vec{F_d} = -\rho D g r a d \phi \tag{54}$$

Formulation Volumes Finis

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi)_{i} V_{i} = \vec{F}_{d_{i+1/2}} \vec{e}_{x} \Delta y + \vec{F}_{d_{i-1/2}} \vec{e}_{x} \Delta y = F_{d_{i+1/2}} \Delta y - F_{d_{i-1/2}} \Delta y \quad (55)$$

avec  $\rho\phi_i$  la valeur moyennée sur le volume et  $F_{d_{i\pm 1/2}}=(\rho D\frac{\partial\phi}{\partial x})_{i\pm 1/2}$ 

Votes	

### Schéma centré pour le terme diffusif

Pour simplifier considerons  $\rho = cste$ Estimation centrée du flux :

$$(D\frac{\partial \phi}{\partial x})_{i+1/2} \approx D_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}$$
(56)

avec  $D_{i+1/2} = 0.5(D_{i+1} + D_i)$ 

Intégration explicite en temps donne :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \left( D_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \Delta y - D_{i-1/2} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \Delta y \right)$$
(57)

#### Schéma centré en espace et explicite en temps

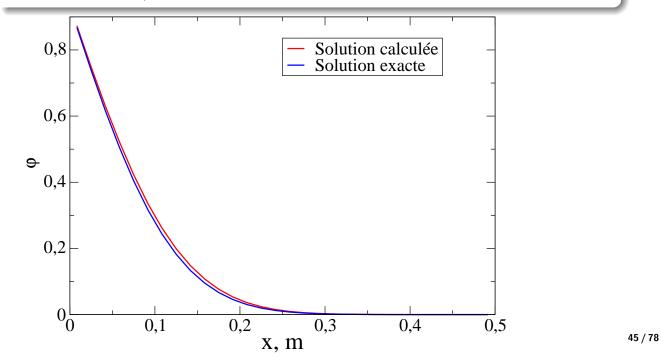
- Précision :  $\varepsilon(\Delta t, (\Delta x)^2)$
- Stabilité :  $\frac{\Delta t D}{\Delta x^2} = r$  ou  $\Delta t = r \frac{\Delta x^2}{D}$  avec  $r \leq 0.5$

Notes			
		·	

# Terme diffusif - exemple

Comparaison calcul/solution analytique

- Diffusion 1D L = 0.5m, 30 volumes
- $D = 0.01m^2/s$  r = 0.45, Temps final 0.5s



### Advection-Diffusion 1D

Schéma explicite en temps :

$$\phi_{i}^{n+1} = \phi_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{V_{i}} \left[ \underbrace{((F_{c}^{n} \Delta y)_{i+1/2} - (F_{c}^{n} \Delta y)_{i-1/2})}_{Advection} - \underbrace{((F_{d}^{n} \Delta y)_{i+1/2} - (F_{d}^{n} \Delta y)_{i-1/2})}_{Diffusion} \right]$$

$$(58)$$

Evaluation spatiale des flux (à titre d'exemple)

- Advection : decentrée (eq. 34)
- Diffusion : centrée (eq. 56)

Notes \_\_\_\_\_\_

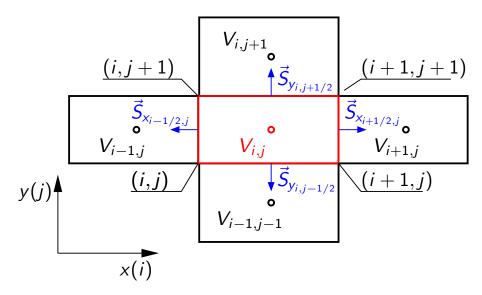
### Advection-Diffusion 1D

#### Précision et stabilité

- Précision :
  - $\varepsilon(\Delta t, \Delta x^2)$  pour la diffusion
  - $\varepsilon(\Delta t, \Delta x)$  pour l'advection
- Stabilité :  $\Delta t \leq \left[\frac{u}{Cu\Delta x} + \frac{D}{r\Delta x^2}\right]^{-1}$  avec le nombre CFL  $Cu \leq 1$  et le coefficient  $r \leq 0.5$

Notes \_\_\_\_\_\_

# Advection-Diffusion 2D - maillage orthogonal



Equation 15 pour un volume quadrilateral

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi V)_{i,j} + \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k = 0 \text{ avec } k \text{ interfaces } i \pm 1/2, j \text{ et } i, j \pm 1/2 \text{ (59)}$$

Notes		

### Bilan des flux

Flux advectif: 
$$\vec{F}_k = (\vec{F}_a + \vec{G}_a)_k = (\rho \phi \vec{u})_k + (\rho \phi \vec{v})_k$$
 (60)

Flux diffusif: 
$$\vec{F_k} = (\vec{F_d} + \vec{G_d})_k = -(\rho D \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i_x})_k - (\rho D \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{i_y})_k (61)$$

Bilan de flux ( $\rho = cste$ )

$$\sum (\vec{F}\vec{S})_{k} = (\phi uS)_{i+1/2,j} - (\phi uS)_{i-1/2,j}$$

$$+ (\phi vS)_{i,j+1/2} - (\phi vS)_{i,j-1/2}$$

$$- (D\frac{\partial \phi}{\partial x}S)_{i+1/2,j} + (D\frac{\partial \phi}{\partial x}S)_{i-1/2,j}$$

$$- (D\frac{\partial \phi}{\partial y}S)_{i,j+1/2} + (D\frac{\partial \phi}{\partial y}S)_{i,j-1/2}$$
(62)

Notes		

### Advection-Diffusion 2D - maillage orthogonale

Schéma explicite en temps :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_{k}$$
 (63)

Evaluation spatiale des flux (à titre d'exemple)

• Advection : decentrée (eq. 34)

• Diffusion : centrée (eq. 56)

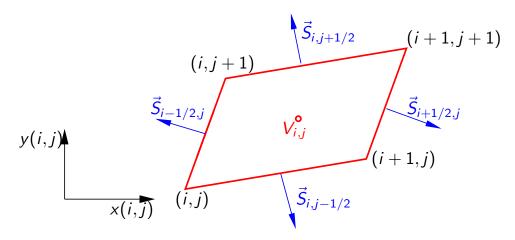
#### Précision et stabilité

ullet Précision :  $arepsilon(\Delta t, \Delta x^2)$  pour la diffusion,  $arepsilon(\Delta t, \Delta x)$  pour l'advection

• Stabilité : 
$$\Delta t \leq \left[ \frac{|u|}{Cu\Delta x} + \frac{|v|}{Cu\Delta y} + \frac{D}{r} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1}$$
 avec le nombre CFL  $Cu \leq 1$  et le coefficient  $r \leq 0.5$ 

Notes			

## Advection-Diffusion 2D - maillage non-orthogonal



Equation 15 pour un volume quadrilateral

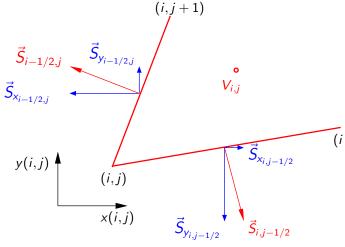
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi V)_{i,j} + \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_k = 0 \text{ avec } k \text{ interfaces } i \pm 1/2, j \text{ et } i, j \pm 1/2 \text{ (64)}$$

•  $\vec{S}_k$  ne sont plus colinéaires avec les axes X et Y

Notes		
		_

## Décomposition des vecteurs surfaciques

On choisie :  $\vec{S}_x$  colinéaire à  $\vec{X}$  et  $\vec{S}_y$  colinéaire à  $\vec{Y}$ 



- Face ouest (i-1/2,j) :  $\vec{S}_{i-1/2,j} = \vec{S}_{x_{i-1/2,j}} + \vec{S}_{y_{i-1/2,j}}$
- Face nord (i,j-1/2) :  $ec{S}_{i,j-1/2}=ec{S}_{x_{i,j-1/2}}+ec{S}_{y_{i,j-1/2}}$  etc...

Les composantes des vecteurs  $\vec{S}_x$  et  $\vec{S}_y$  se calculent aisement :

- $\vec{S}_{x_{i-1/2,j}} = \vec{e}_{x_{i-1/2,j}}(yn_{i,j+1} yn_{i,j})$
- $\vec{S}_{y_{i-1/2,j}} = \vec{e}_{y_{i-1/2,j}}(xn_{i,j+1} xn_{i,j})$

où  $e_{x_{i-1/2,j}}$ ,  $\vec{e}_{y_{i-1/2,j}}$  sont les vecteurs unitaires normaux et xn, yn sont les coordonnées de noeuds.

Notes			

### Flux advectif

Flux advectif à travers des faces ( $\rho = cste$ )

Face ouest 
$$(i-1/2,j)$$
:  $(\vec{F}_a\vec{S})_{i-1/2,j} = (\phi \vec{u} \vec{S}_x)_{i-1/2,j} + (\phi \vec{v} \vec{S}_y)_{i-1/2,j}$   
Face est  $(i+1/2,j)$ :  $(\vec{F}_a\vec{S})_{i+1/2,j} = (\phi \vec{u} \vec{S}_x)_{i+1/2,j} + (\phi \vec{v} \vec{S}_y)_{i+1/2,j}$   
Face nord  $(i,j-1/2)$ :  $(\vec{F}_a\vec{S})_{i,j-1/2} = (\phi \vec{u} \vec{S}_x)_{i,j-1/2} + (\phi \vec{v} \vec{S}_y)_{i,j-1/2}$   
Face sud  $(i,j+1/2)$ :  $(\vec{F}_a\vec{S})_{i,j+1/2} = (\phi \vec{u} \vec{S}_x)_{i,j+1/2} + (\phi \vec{v} \vec{S}_y)_{i,j+1/2}$ 

 $(\phi \vec{u})_{i\pm 1/2,j} (\phi \vec{v})_{i\pm 1/2,j} (\phi \vec{u})_{i,j\pm 1/2} (\phi \vec{v})_{i,j\pm 1/2}$  peuvent être evalués à l'aide du schéma upwind 34, MUSCL 49 etc...

Notes		

Flux-splitting : décentrement selon les directions X (vitesse u) et Y (vitesse v)

Par exemple, pour la face sud (i, j - 1/2):

$$(\phi u)_{i,j-1/2} = \begin{cases} (\phi u)_{i,j} & \text{si } u \ge 0 \\ (\phi u)_{i,j-1} & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

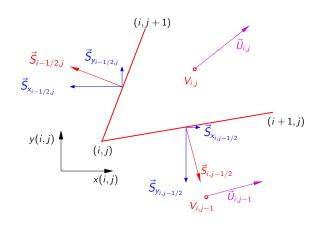
$$(\phi v)_{i,j-1/2} = \begin{cases} (\phi v)_{i,j-1} & \text{si } v \ge 0 \\ (\phi v)_{i,j} & \text{si } v < 0 \end{cases}$$

Cette approche fonctionne mais elle introduit la duffision numérique supplémentaire.

Notes	

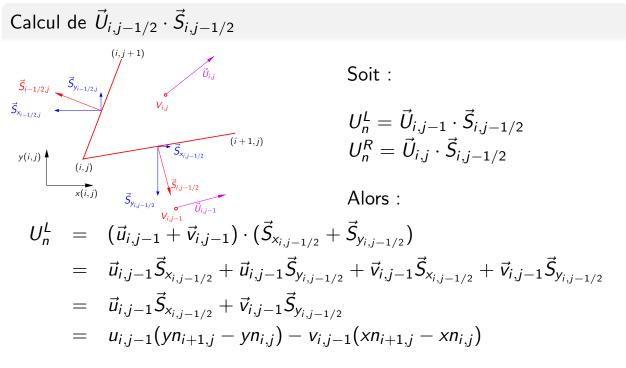
Décentrement basé sur le signe de la vitesse normale à la face  $u_n = \vec{U} \cdot \vec{n}$  selon Peric [2].

On s'intéresse au signe de  $\vec{U} \cdot \vec{n}$ . P.ex., pour la face nord i, j-1/2  $sign(\vec{U} \cdot \vec{n})_{i,j-1/2} = sign(\vec{U}_{i,j-1/2} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2})$ 



$$\vec{U}_{i,j-1/2} = ???$$

INOTES			



où xn, yn sont les coordonées des noeuds.

Notes		

Calcul de 
$$\vec{U}_{i,j-1/2} \cdot \vec{S}_{i,j-1/2}$$

$$U_n^R = (\vec{u}_{i,j} + \vec{v}_{i,j-1}) \cdot (\vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{S}_{y_{i,j-1/2}})$$

$$= \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}}$$

$$= \vec{u}_{i,j} \vec{S}_{x_{i,j-1/2}} + \vec{v}_{i,j} \vec{S}_{y_{i,j-1/2}}$$

$$= u_{i,j} (y n_{i+1,j} - y n_{i,j}) - v_{i,j} (x n_{i+1,j} - x n_{i,j})$$

Calcul du flux advectif en (i, j - 1/2)

$$(\phi u)_{i,j-1/2} = egin{cases} (\phi u)_{i,j} & ext{si } U_n^L > 0 ext{ et } U_n^R > 0 \\ (\phi u)_{i,j-1} & ext{si } U_n^L \leq 0 ext{ et } U_n^R \leq 0 \\ 0 & ext{autrement} \end{cases}$$

Notes	

### Flux diffusif

Flux diffusif à travers des faces ( $\rho = cste$ )

Face ouest 
$$(i-1/2,j)$$
:  $(\vec{F}_d\vec{S})_{i-1/2,j} = -(D\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}_x\vec{S}_x)_{i-1/2,j}$ 

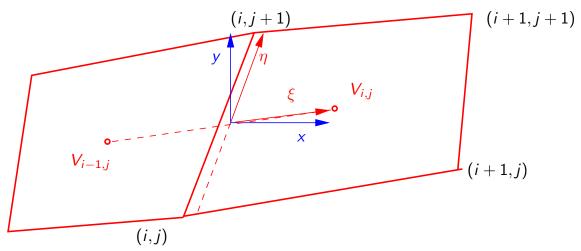
$$-(D\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{i}_y\vec{S}_y)_{i-1/2,j}$$
Face nord  $(i,j-1/2)$ :  $(\vec{F}_d\vec{S})_{i,j-1/2} = -(D\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}_x\vec{S}_x)_{i,j-1/2}$ 

$$-(D\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{i}_y\vec{S}_y)_{i,j-1/2}$$

Comment évaluer  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ?

Notes		

### Flux diffusif : évaluation des dérivées



- $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$  peuvent être évaluées à l'aide du schéma centré p.ex. 56
- $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  peuvent être évaluées à partir de  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$  à l'aide d'un changement des coordonnées  $(\xi,\eta) \to (x,y)$

INOTES		

### Evaluation des dérivées : changement des coordonnées

$\overline{}$	/ C'		
1 )	$\sim$ tu	niccond	•
17	-11	nissons	•
_	• • • •		•

$$\xi = \xi(x, y) \text{ et } \eta = \eta(x, y) \tag{65}$$

Dérivation donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}$$
 (66)

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{67}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{68}$$

$$\text{avec } \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \ \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \ \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

INOTES		

# Evaluation des dérivées : calcul des métriques

En inversant le rôle des variables indépendantes :

$$x = x(\xi, \eta) \text{ et } y = y(\xi, \eta) \tag{69}$$

On peut trouver (c.f. [3] pour les détails) :

$$\xi_{x} = Jy_{\eta} \qquad \qquad \xi_{y} = -Jx_{\eta} \qquad (70)$$
  

$$\eta_{x} = -Jy_{\xi} \qquad \qquad \eta_{y} = Jx_{\xi} \qquad (71)$$

$$\eta_{\mathsf{x}} = -J \mathsf{y}_{\xi} \qquad \qquad \eta_{\mathsf{y}} = J \mathsf{x}_{\xi} \tag{71}$$

avec le Jacobian de transformation  $J=rac{1}{x_{\xi}y_{\eta}-y_{\xi}x_{\eta}}$ 

où p.ex. 
$$(x_{\xi})_{i,j-1/2} \approx (\frac{\Delta x}{\Delta \xi})_{i,j} = \frac{x n_{i+1,j} - x n_{i,j}}{\sqrt{(x n_{i+1,j} - x n_{i,j})^2 + (y n_{i+1,j} - y n_{i,j})^2}}$$

INOTES		

### Advection-Diffusion 2D - maillage non-orthogonal

Schéma explicite en temps :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{k=1}^{k=4} (\vec{F}\vec{S})_{k}$$
 (72)

62 / 78

Evaluation spatiale des flux (à titre d'exemple)

- Advection : decentrée (eq. 34)
- Diffusion : centrée (eq. 56)

#### **Précision**

• Précision :  $\varepsilon(\Delta t, \Delta x^2)$  pour la diffusion,  $\varepsilon(\Delta t, \Delta x)$  pour l'advection

### Advection-Diffusion 2D - maillage non-orthogonal

#### Stabilité

$$\Delta t_{i,j} \leq \left[ \frac{|u_{i,j}|(|\vec{S}_{x_{i\pm 1/2,j}}| + |\vec{S}_{x_{i,j\pm 1/2}}|)}{CuV_{i,j}} + \frac{|v_{i,j}|(|\vec{S}_{y_{i\pm 1/2,j}}| + |\vec{S}_{y_{i,j\pm 1/2}}|)}{CuV_{i,j}} + \frac{D}{r} \left( \frac{1}{\Delta \xi^{2}} + \frac{1}{\Delta \eta^{2}} \right) \right]^{-1}$$
(73)

$$\Delta t = \min(\Delta t_{i,j}) \ \forall \ i,j \tag{74}$$

63 / 78

avec le nombre CFL  $Cu \le 1$  et le coefficient  $r \le 0.5$ 

### Conditions aux limites de type Von Neumann

Dérivée est imposée ou interpolée sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

- $F_{d_{i,1/2}}=(D\frac{\partial \phi}{\partial x})_{i,1/2}=0$  : condition de symétrie pour le terme diffusif
- $F_{d_{imax+1/2,j}} = (D\frac{\partial \phi}{\partial x})_{imax+1/2,j} = (D\frac{\partial \phi}{\partial x})_{imax-1/2,j}$ : condition de sortie pour le terme diffusif

Flux est imposé ou interpolé sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

•  $F_{a_{imax+1/2,j}} = (\phi u)_{imax+1/2,j} = (\phi u)_{imax-1/2,j}$ : condition de sortie pour le terme advectif (schéma d'ordre 2 en espace)

64 / 78

### Conditions aux limites de type Dirichlet

Valeurs sont imposées dans des centres de volumes-fantômes i.e. des volumes supplémentaires qui bordent le domaine du calcul (i = 0, i = imax + 1, j = 0, j = jmax + 1)

- $\phi_{0,j} = f(y), u_{0,j} = g(y)$ : condition d'entrée
- $\phi_{i,0} = \phi_{i,1}, u_{i,0} = u_{i,1}, v_{i,0} = -v_{i,1}$  : condition de symétrie
- $\phi_{imax+1,j} = \phi_{imax,j}$  : condition de sortie pour le terme diffusif

Flux (valeurs) sont imposés ou interpolés sur les faces des volumes des bords du domaine de calcul

- $F_{a_{1/2,j}} = (\phi u)_{1/2,j} = f(y)$ : condition d'entrée pour le terme advectif
- ullet  $F_{a_{i,1/2}}=(\phi v)_{i,1/2}=0$  : condition de symétrie pour le terme advectif

65 / 78

Notes

[1] A. Harten.

High resolution scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.

- [2] Joel H.Ferziger and Milovan Peric.

  Computational Methods for Fluid Dynamics.

  Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [3] Klaus A. Hoffmann.

  Computational FLuid Dynamics for Engineers.

  SciTech Typing Service of Austin, Texas, 1989.
- [4] A. Kurganov and E. Tadmor. Solution of two-dimensional riemann problems for gaz dynamics without riemann problem solvers. Numer. Methods Partia Differential Equations, 18:584–608, 2002.
- [5] P.L.Roe.

Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes.

65 / 78

Journal of Computational Physics, 43:357–372, 1981.

Notes

- [6] S.Godounov, A.Zabrodine, M.Ivanov, A.Kraïko, and G.Prokopov. Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz. Edition Mir, Moscou, 1979.
- Edition Will, Woscou, 197
- [7] B. van Leer.

Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method.

Journal of Computational Physics, 32:101–136, 1979.

Notes	