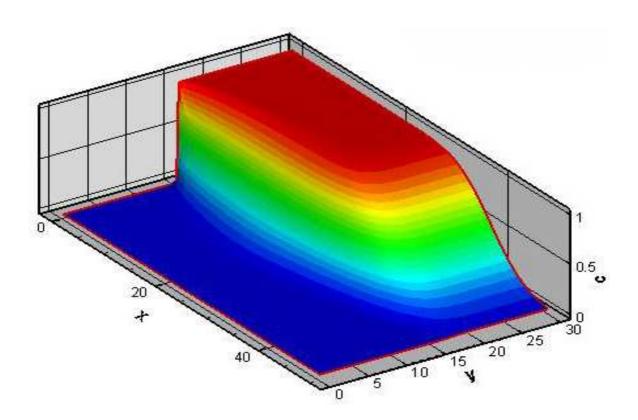


# **BE Volumes Finis**

Transport d'un scalaire passif dans un écoulement plan de type couche limite





## SOMMAIRE

1. IN	TRODUCTION	. 4
1.1. 1.2. 1.3.	Situation du problème	. 4
2. L'A	APPROCHE EN VOLUME FINIS	. 5
2.1. 2.2. 2.3. 2.4. 2.5.	Une approche en Volumes Finis	. 6 . 6 . 6
3. AL	GORITHME DE RESOLUTION	. 7
3.1. 3.2. 3.3. 3.4. 3.5. 3.6.	Principe de résolution	. 7 . 7 . 8
4. RE	SULTATS	. 9
4.1. 4.2. 4.3. 4.4.	Convection pure	10 11
5. CC	ONCLUSION	15
6. AN	INEXE 1 : Définition de l'ensemble des paramètres	16
7. AN	INEXE 2 : Programme du transport d'un scalaire passif	17



# Index des figures :

Figure 1: Convection pure pour t=3 et t=17	9
Figure 2 : Convection pure pour t=29	
Figure 3 : Diffusion pure pour t=14 et t=22	
Figure 4: Diffusion pure pour t=49 et t=61	10
Figure 5 : Coefficient de diffusivité = 0.1 pour t=7 et t=15	
Figure 6 : Coefficient de diffusivité = 0.1 pour t=22 et t=33	
Figure 7 : Coefficient de diffusivité = 1 pour t=7 et t=11	
Figure 8 : Résultats advection + diffusion pour t=2 et t=6	
Figure 9 : Résultats advection + diffusion pour t=11 et t=20	
Figure 10 : Résultats advection + diffusion pour t=26 et t=30	
Figure 11 : Résultats advection + diffusion pour t=43 et t=83	
Figure 12 : Résultats advection + diffusion pour t=100	



#### 1. INTRODUCTION

#### 1.1. Situation du problème

On considère un canal d'eau dans lequel on injecte un colorant inerte. On cherche à modéliser l'impact des phénomènes d'advection et de diffusion dû à la propagation du polluant inactif dans l'espace et le temps.

Le champ de concentration vérifie l'équation :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (u \times c - D \nabla c) = 0$$

avec:

- c : champ de concentration

- u : champ de vitesse

- D le coefficient de diffusion

Ce travail a pour but d'apporter une réponse quantitative en résolvant numériquement l'équation du transfert du polluant. Pour ce faire, nous utiliserons le langage de programmation FORTRAN 90 qui permet notamment une allocation dynamique des vecteurs. Le traitement des données pour la visualisation graphique sera effectué à l'aide du logiciel TECPLOT.

Le champ de vitesse est approximé par les relations de Gortler :

$$u = u_m \left( 1 + \lambda \operatorname{erf} \xi \right)$$

$$v = \frac{u_m \lambda}{\sigma} \left( \xi \operatorname{erf} \xi - \int_0^{\xi} \operatorname{erf} \xi \, d\xi - 0.562 \right)$$

### 1.2. Hypothèses de l'écoulement

On se place sous les conditions suivantes :

- écoulement à deux dimensions plan.
- écoulement incompressible à masse volumique constante
- Champs de vitesse supposé permanent



#### 1.3. Conditions initiales et aux limites

On considère un espace rectangulaire. A t = 0 on injecte un polluant inerte sur une hauteur y0 sur la frontière Ouest de l'espace. Nous avons donc :

$$\begin{cases} c = 0 & pour \ y < y0 \\ c = 1 & pour \ y \ge y0 \end{cases}$$

Pour l'ensemble de la résolution, les frontières Nord et Sud vérifieront des conditions de symétrie, la frontière Est les conditions de sortie, et l'injection sur la frontière Ouest sera constamment identique à celle en t=0.

#### 2. L'APPROCHE EN VOLUME FINIS

#### 2.1. Une approche en Volumes Finis

Une approche "Volumes Finis" consiste à diviser l'ensemble du domaine de calcul en un nombre fini de petits volumes. Ces volumes seront considérés comme des surfaces élémentaires regroupant un ensemble des données physiques au niveau desquelles sera fait le calcul. Chaque volume est composé d'un centre (i, j) et d'une cellule l'entourant de dimension (dx, dy).

La concentration dans un volume (i, j) dépend donc de l'influence des volumes voisins décrite par un ensemble de flux sur chacune des frontières du volume (Nord, Sud, Est et Ouest). La concentration dans un volume (i, j) entre les instants n et n + 1 vérifie alors :

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \sum_{faces} F_{i,j}$$

Avec:

- $C_{i,j}^n$  et  $C_{i,j}^{n+1}$ , les concentrations du volume (i,j) aux instants n et n+1
- $\Delta t$ , le pas de temps entre deux calculs successifs
- $V_{i,i}$ , le volume de la cellule (i,j)
- $F_{i,j}$ , le flux venant sur le volume (i,j) par une de ces faces



#### 2.2. Modélisation du phénomène d'advection

On cherche à modélisation le phénomène d'advection. Cette modélisation sera faite au travers de flux venant sur une cellule. Pour cela on adopte un schéma amont. Les flux d'advection sur la cellule (i, j) sont alors décris par les équations :

$$Fcx = (u_{i-1,j} \times C_{i-1,j} - u_{i,j} \times C_{i,j})(y_{j+1} - y_{j})$$

$$Fcy = (v_{i,j+1} \times C_{i,j+1} - v_{i,j} \times C_{i,j})(x_{j+1} - x_{i})$$

### 2.3. Modélisation du phénomène de diffusion

De façon identique aux termes d'advection on traite le phénomène de diffusion par les flux venant sur chaque cellule. On adopte ici un schéma centré pour définir les flux diffusifs. Nous obtenons donc l'expression des flux diffusifs portés par l'abscisse x et l'ordonnée y :

$$Fdx = D\left(\frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{xc_{i+1} - xc_i} - \frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{xc_i - xc_{i-1}}\right) (y_{j+1} - y_j)$$

$$Fdx = D\left(\frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{yc_{i+1} - yc_i} - \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{yc_i - yc_{i-1}}\right) (x_{i+1} - x_i)$$

#### 2.4. Valeurs des flux aux limites

Avec les flux précédemment définis, les conditions aux limites se traduisent par :

- condition de sortie pour la diffusion :

$$Fdx(nx, j) = 0$$

- Flux nuls aux parois Sud et Nord :

$$Fcy(i,1) = 0$$
  $Fcy(i,ny) = 0$   
 $Fdy(i,1) = 0$   $Fdy(i,ny) = 0$ 

Les précédentes expressions de chacun des autres flux sur chacune des frontières restent valables.



### 2.5. Equations discrétisées – Bilan des flux

On obtient alors avec la définition des flux une équation discrétisé en chaque cellule que l'on peut résoudre numériquement pour exprimer la concentration en chaque volume (i, j). On a donc :

$$c(i,j) = c(i,j) + \left(fcx_{i,j} + fcy_{i,j} + fdx_{i,j} + fdy_{i,j}\right) \frac{dt}{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}$$

#### 3. ALGORITHME DE RESOLUTION

### 3.1. Principe de résolution

On souhaite ici mettre en place un algorithme capable de résoudre numériquement le système d'équations discrétisées en chaque point de l'espace. Cet algorithme sera écrit en langage FORTRAN 90 pour les raisons décrites plus haut. On distinguera les quantités fonctions de l'espace représentées par des tableaux en FORTRAN 90 des constantes physiques du problème représentées par de simples réels définis en « Double Precision ».

### 3.2. Algorithme de résolution

L'ensemble des données physiques et algorithmiques du problème est fourni par l'utilisateur. Pour notre étude ceci consiste en un fichier intitulé « données.txt » dans lequel l'ensemble des paramètres sont définis.

La liste complète des paramètres et des vecteurs utilisés dans le programme est décris dans l'annexe 1

#### 3.3. Utilisation du mailleur

Le mailleur utilisé a été fourni par l'équipe pédagogique qui encadre ce projet. Les valeurs en entrée, insérés par l'utilisateur, permettent de créer le maillage qui va servir de base dans la discrétisation. Nous avons choisis de concevoir un écoulement dans un canal de dimension Lx = 50 et Ly=30 avec une hauteur d'injection y0=15 (milieu du canal). Le maillage crée est un maillage nx\*ny=100\*100.



Dans la subroutine maille, nous calculons les dx et dy. Nous définissons ensuite les vecteurs x,y (début de la maille) et xc,yc (centres des mailles).

#### 3.4. Calcul de la vitesse

Nous pouvons maintenant passé au calcul de la vitesse. Pour ce faire, nous avons utilisé la fonction « erf » en double precision (fonction « derf »). L'expression de u ne nécessite aucun calcul spécifique alors que nous devons procéder à une étape préliminaire pour le calcul de v. L'intégrale présente dans l'expression de v est calculée par la méthode des trapèzes.

Nous obtenons donc les vitesses u et v de dimension (nx,ny) qui sont stockés dans des vecteurs pour une utilisation ultérieure.

#### 3.5. Expression de la stabilité

Nous procédons ensuite au calcul de l'expression de la stabilité. Nous utilisons le schéma d'Euler. Cette hypothèse permet d'exprimer le pas de temps dt :

$$dt \le \left\lceil \frac{umin}{Cu \times dx} + \frac{vmin}{Cu \times dx} + \frac{D}{M} \times \left(\frac{1}{dx^2 + dy^2}\right) \right\rceil^{-1}$$

### 3.6. Itération dans le temps

Nous créons les tableaux Fcx, Fcy, Fdx, Fdy représentant les valeurs des flux arrivant sur chaque volume au temps t. Les valeurs des flux en chaque pas de temps et en chaque cellule sont calculées à l'intérieur de la boucle « DO WHILE » qui incrémente le pas de temps tant que l'on n'a pas atteint la durée totale moins le pas de temps (tf – dt). Nous calculons donc les valeurs des flux sur l'ensemble de l'espace, c'est à dire également aux limites (conditions aux limites présentées sous forme de flux, c'est-à-dire la condition de Dirichlet).



### 4. RESULTATS

Grâce à ce programme, nous avons pu obtenir des simulations numériques du champ de concentration dans l'écoulement. Plusieurs cas sont ici présentés et correspondent au cheminement effectué pour mener à bien ce projet.

### 4.1. Convection pure

Nous présentons premièrement les résultats obtenus en convection pure. L'enchainement des figures correspond à l'écoulement du temps.

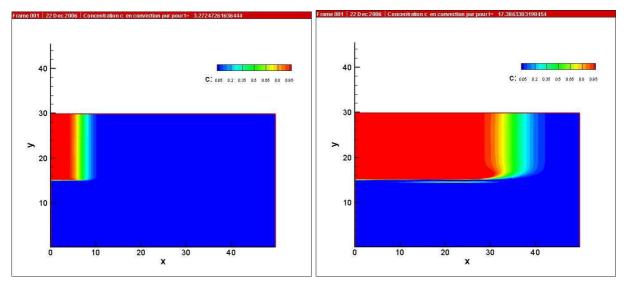


Figure 1 : Convection pure pour t=3 et t=17

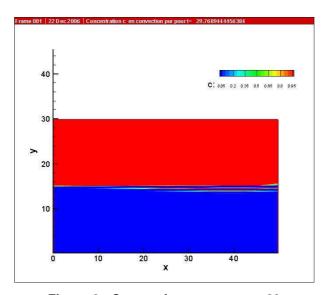


Figure 2 : Convection pure pour t=29



Ces résultats sont conforment à la théorie en ne prenant en compte que le terme d'advection. Nous observons cependant quelques résidus au niveau de la hauteur y0=15, ce qui peut-être une accumulation d'approximation qui apparaissent à partir de x=10. Nous observons que le l'écoulement est établi à partir de t=30.

### 4.2. Diffusion pure

Nous avons simulé les termes de diffusion pure, c'est-à-dire sans aucun terme d'advection.

Cette expérience nous a conduits aux résultats suivants :

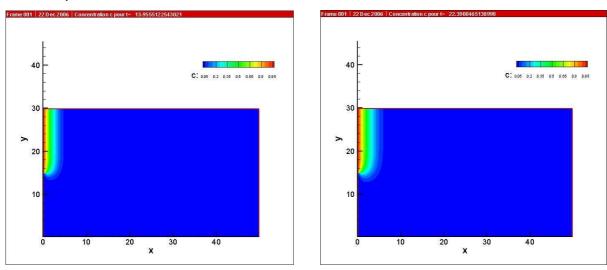


Figure 3 : Diffusion pure pour t=14 et t=22

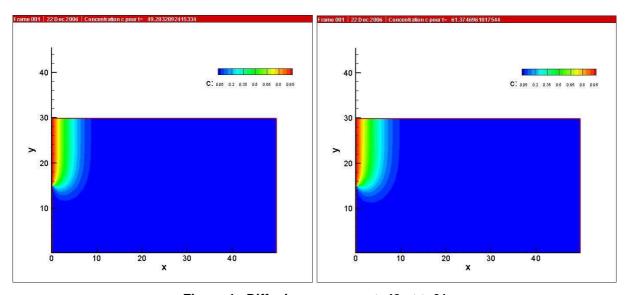


Figure 4: Diffusion pure pour t=49 et t=61



Nous observons que la diffusion est très lente par rapport à la convection. Cette précision permet de validé le travail effectué jusqu'à présent.

#### 4.3. Variation du coefficient de diffusivité

Nous avons ensuite procédé à des simulations pour différentes valeurs du coefficient de diffusivité.

Le premier essai a été effectué pour un coefficient égal à 0.1 dont voici les résultats :

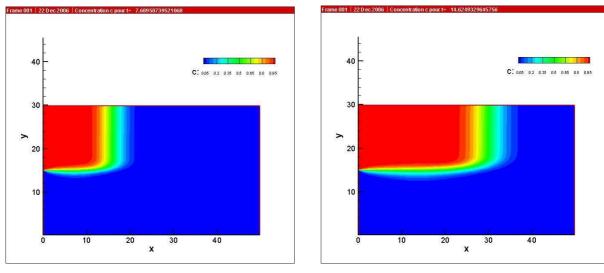


Figure 5 : Coefficient de diffusivité = 0.1 pour t=7 et t=15

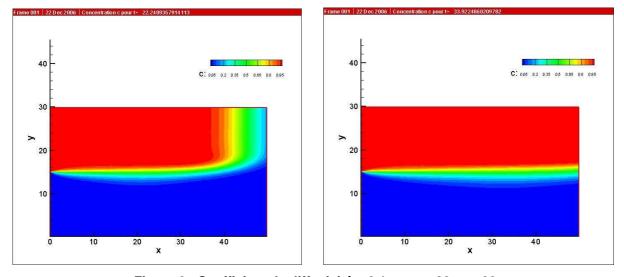


Figure 6 : Coefficient de diffusivité = 0.1 pour t=22 et t=33

Une autre simulation avec un coefficient de diffusivité égal à l'unité procure les résultats suivant :



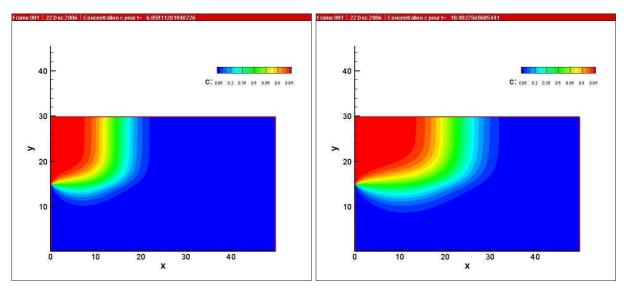
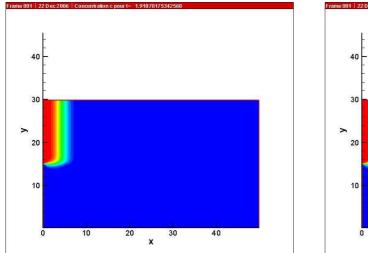


Figure 7 : Coefficient de diffusivité = 1 pour t=7 et t=11

Nous observons que l'écoulement atteint plus rapidement le régime établi quand le coefficient de diffusivité tend vers 0 : c'est-à-dire quand on tend à des flux nuls pour la diffusion. Le modèle établi semble donc cohérent, nous pouvons maintenant lancer le programme pour avoir une simulation complète.

#### 4.4. Résultats finaux

Enfin, nous présentons dans cette section les résultats correspondant à l'intégralité du programme ; c'est-à-dire munis des termes d'advection et de diffusion pour un temps variant de t=0 à t=100, le coefficient de diffusivité étant pris égal à 0.2. Voici donc l'enchainement temporel du transport d'un scalaire passif dans un écoulement plan de type couche limite :



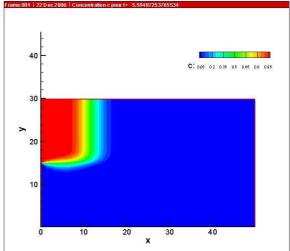


Figure 8 : Résultats advection + diffusion pour t=2 et t=6



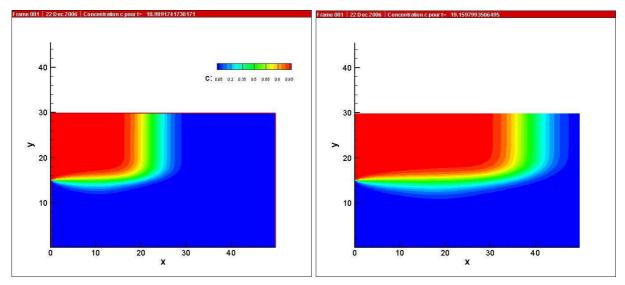


Figure 9 : Résultats advection + diffusion pour t=11 et t=20

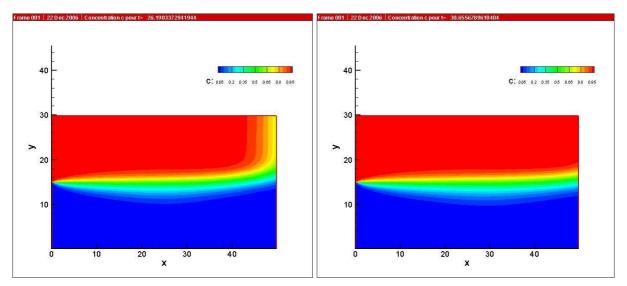


Figure 10 : Résultats advection + diffusion pour t=26 et t=30



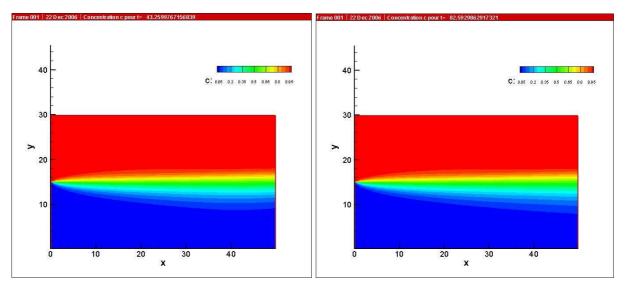


Figure 11 : Résultats advection + diffusion pour t=43 et t=83

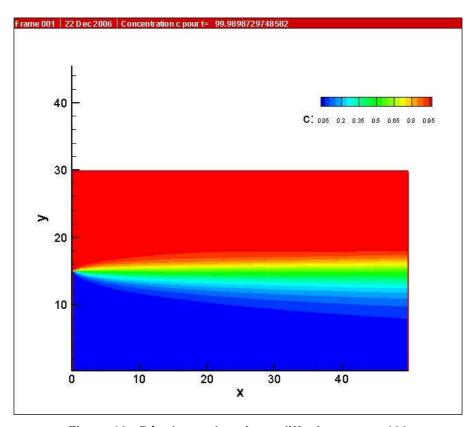


Figure 12 : Résultats advection + diffusion pour t=100



### 5. CONCLUSION

Nous avons pu, dans ce travail, simuler numériquement les phénomènes d'advection et de diffusion de la concentration d'un polluant de type inerte dans un écoulement permanent bidimensionnel à l'aide d'une approche dite volumes finis. La base de cette méthode repose sur un bilan des flux au niveau élémentaire du volume. Ensuite, nous incrémentons en temps pour connaître le champ de concentration sur l'ensemble du canal modélisé. Des résultats cohérents et physiques ont pu être produits par ce code de calcul.

Le prolongement de ce code serait d'étendre son champ d'application à des polluants qui affecte la convection ou la diffusion. Il serait, par exemple intéressant d'introduire des propriétés d'interaction du polluant sous forme de réactions chimiques avec le fluide. Ce type de modélisation représenterait plus fidèlement la réalité.



## 6. ANNEXE 1 : Définition de l'ensemble des paramètres

c ...... Champs de concentration Cu ...... Nombre de courant (0.7) D ...... Diffusivité dx ..... Espace élémentaire sur x dy ..... Espace élémentaire sur y dxmax ..... Espace élémentaire minimal sur x dymax ..... Espace élémentaire minimale sur y dt ...... Pas de temps fcx ...... Flux convectif dans la direction x fdx ...... Flux diffusif dans la direction x fcy ...... Flux convectif dans la direction y fdy ...... Flux diffusif dans la direction y i ..... Indice j ...... Indice k ..... Indice M ...... Nombres de Fourier (0.3) nx ...... Nombre de points en x ny ...... Nombre de points en y ny0 ...... Numéro de l'ordonnée critique t ...... Valeur du temps à l'instant du calcul tf ...... Durée totale (100) u ...... Champs de vitesse suivant x umin ...... Vitesse minimale suivant x u1 ...... Vitesse initiale hors de la zone de mélange pour y<y0 (1) u2 ...... Vitesse initiale hors de la zone de mélange pour y>y0 (2) v ...... Champs de vitesse suivant y vmin ...... Vitesse minimale suivant y x ...... Vecteur des abscisses du maillage suivant x xc ...... Vecteur des abscisses du maillage suivant x y ...... Vecteur des ordonnées du maillage suivant y yc ...... Vecteur des ordonnées du maillage suivant y y0 ..... Ordonnée critique



### 7. ANNEXE 2 : Programme du transport d'un scalaire passif

! Transport d un scalaire passif dans un ecoulement plan de type couche limite **PROGRAM** main **IMPLICIT NONE INTEGER** :: i,j,k,nx,ny,ny0 DOUBLE PRECISION:: D,u1,u2,dt,tf,t,y0,M,Cu,dx,dy,umin,vmin DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: x,y,xc,yc DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:,:), ALLOCATABLE :: u,v,fcx,fcy,fdx,fdy DOUBLE PRECISION, DIMENSION(:,:,:), ALLOCATABLE :: c OPEN(10,file='maillage.txt') **READ**(10,\*) nx,ny,y0 CALL donnees(D,u1,u2,tf,M,Cu) WRITE(\*,\*) 'ok1' ALLOCATE (u(nx,ny),v(nx,ny),x(nx+1),y(ny+1),xc(nx),yc(ny))CALL maille(nx,ny,x,y,xc,yc,y0,dx,dy) CALL vitesse(u1,u2,nx,ny,y0,x,xc,y,yc,u,v,umin,vmin) WRITE(\*,\*) 'ok3' !Calcul de dt pour la stabilite :  $dt=0.1/(umin/(Cu^*dx)+vmin/(Cu^*dx)+D/M^*(1/(dx^*dx)+1/(dy^*dy)))$ WRITE(\*,\*) 'ok4' !Expression de ny0 : j=1 ny0=1 DO WHILE (yc(j)<y0) ny0=ny0+1j=j+1 **ENDDO** ALLOCATE (c(nx,ny,2),fcx(nx,ny),fdx(nx,ny),fcy(nx,ny),fdy(nx,ny)) !Conditions sur la concentration **DO** i=1,nx **DO** j=1,ny DO k = 1.2



```
c(i,j,k)=0
  ENDDO
 ENDDO
ENDDO
DO j=ny0,ny
 c(1,j,1)=1
 c(1,j,2)=1
ENDDO
!Conditions aux limites
!flux=0 aux parois sud et nord :
DO i=1,nx
 fcy(i,1)=0
 fcy(i,ny)=0
 fdy(i,1)=0
 fdy(i,ny)=0
ENDDO
!Condition de sortie pour la diffusion
DO j=1,ny
fdx(nx,j)=0
ENDDO
! Boucle sur le temps
t=0
DO WHILE (t<(tf-dt))
 t=t+dt
 !Flux convectif sur x
 DO i=2,nx
  DO j=1,ny
   fcx(i,j)=(c(i-1,j,1)*u(i-1,j)-c(i,j,1)*u(i,j))*(y(j+1)-y(j))
  ENDDO
 ENDDO
 !Flux convectif sur y
 DO i=2,nx
  DO j=2,ny-1
```



```
IF (v(i,j)>=0) THEN
     fcy(i,j)=(c(i,j-1,1)*v(i,j-1)-c(i,j,1)*v(i,j))*(x(i+1)-x(i))
    ELSE
     fcy(i,j)=(c(i,j+1,1)*v(i,j+1)-c(i,j,1)*v(i,j))*(x(i+1)-x(i))
    ENDIF
  ENDDO
 ENDDO
 !Flux diffusif sur x
 DO i=2,nx-1
  DO j=1,ny
fdx(i,j) = D^*((c(i+1,j,1)-c(i,j,1))/(xc(i+1)-xc(i))-(c(i,j,1)-c(i-1,j,1))/(xc(i)-xc(i-1)))^*(y(j+1)-y(j))
  ENDDO
 ENDDO
 !Flux diffusif sur y
 DO i=2,nx
  DO j=2,ny-1
fdy(i,j) = D^*((c(i,j+1,1)-c(i,j,1))/(yc(j+1)-yc(j))-(c(i,j,1)-c(i,j-1,1))/(yc(j)-yc(j-1)))^*(x(i+1)-x(i))
  ENDDO
 ENDDO
 !Concentration a l'instant n+1
 DO i=2,nx
  DO j=2,ny
    c(i,j,2)=c(i,j,1)+dt/((x(i+1)-x(i))^*(y(i+1)-y(i)))^*(fcx(i,j)+fdx(i,j)+fcy(i,j)+fdy(i,j))
   WRITE(*,*) c(i,j,2)
  ENDDO
 ENDDO
 DO i=1,nx
  DO j=1,ny
    c(i,j,1)=c(i,j,2)
  ENDDO
 ENDDO
 !Resultat de la concentration pour exportation sous Tecplot
 OPEN(30,file='concentration_xy.dat')
 WRITE(30,*) 'TITLE="Concentration c pour t=',t,'"'
```



```
WRITE(30,*) 'VARIABLES = "x", "y", "c"'
WRITE(30,*) 'ZONE I=', nx,', J=',ny, ', F=POINT'
DO j=1,ny
 DO i=1,nx
  WRITE(30,*) xc(i),yc(j),c(i,j,1)
 ENDDO
ENDDO
CLOSE(30)
ENDDO!Fin boucle sur le temps
DEALLOCATE(u,v,x,y,xc,yc)
DEALLOCATE(c,fcx,fdx,fcy,fdy)
CLOSE(10)
END
SUBROUTINE donnees(D,u1,u2,tf,M,Cu)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION :: D,u1,u2,tf,M,Cu
OPEN(20,file='donnees.txt')
READ(20,*) D,u1,u2,tf,M,Cu
CLOSE(20)
RETURN
END
SUBROUTINE maille(nx,ny,x,y,xc,yc,y0,dx,dy)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i,nx,ny
DOUBLE PRECISION :: dx,dy,y0
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(nx+1) :: x
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(ny+1) :: y
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(nx) :: xc
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(ny) :: yc
!Expression des dx et dy :
```



```
dx=0.
 DO i=1,nx+1
  READ(10,*) x(i)
  IF (dx<(x(i)-x(i-1))) THEN
  dx=x(i)-x(i-1)
  ENDIF
 ENDDO
 dy=0.
 DO i=1,ny+1
  READ(10,*) y(i)
   IF (dy<(y(i)-y(i-1))) THEN
    dy=y(i)-y(i-1)
   ENDIF
 ENDDO
 !Expression des centres de maille xc et yc :
 xc(1)=(x(1)+x(2))/2
 DO i=2,nx
  xc(i)=(x(i)+x(i+1))/2
  IF (dx<(xc(i)-xc(i-1))) THEN
   dx=xc(i)-xc(i-1)
  ENDIF
 ENDDO
 yc(1)=(y(1)+y(2))/2
 DO i=2,ny
  yc(i)=(y(i)+y(i+1))/2
  IF (dy<(yc(i)-yc(i-1))) THEN
  dy=yc(i)-yc(i-1)
  ENDIF
 ENDDO
 RETURN
END
SUBROUTINE vitesse(u1,u2,nx,ny,y0,x,xc,y,yc,u,v,umin,vmin)
```



```
IMPLICIT NONE
INTEGER :: i,j,k,nx,ny
DOUBLE PRECISION:: u1,u2,y0,lambda,um,sigma,kxi,derf,integral,umin,vmin
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(nx+1) :: x
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(ny+1) :: y
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(nx) :: xc
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(ny) :: yc
DOUBLE PRECISION, DIMENSION(nx,ny) :: u,v
umin=u2
vmin=u2
lambda=(u2-u1)/(u2+u1)
um = (u1 + u2)/2
sigma=13.5
!Vitesse u:
DO i=1,nx
 DO j=1,ny
  kxi=13.5*(yc(j)-y0)/xc(i)
  u(i,j)=(u1+u2)/2*(1+lambda*derf(kxi))
  IF (u(i,j)<umin) THEN
   umin=u(i,j)
  ENDIF
 ENDDO
ENDDO
!Vitesse v:
DO i=1,nx
 v(i,1)=0.
ENDDO
DO j=1,ny
 v(1,j)=0.
ENDDO
DO i=2,nx
 DO j=2,ny
  kxi=13.5*(yc(j)-y0)/xc(i)
  !Methode des trapezes pour le calcul de integral :
```

