

Zettel 3

Bearbeitet von:

Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler(Tutorium:Gregor Teupke(Mi 16:15))

Aufgabe 1

a)

$$\{(0, 0), (1, 0)\} \in R$$

$$\{(1, 0), (2, 0)\} \in R$$

$$\{(0, 0), (2, 0)\} \notin R$$

\Rightarrow nicht transitiv

b)

$$R := \{(a, b) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

Lemma 0.1: R ist eine Äquivalenzrelation.

Proof: Reflexivität:

da \mathbb{A} eine Partition von X ist, gilt für jedes $a \in X : \exists A \in \mathcal{A}, a \in A$, darum ist $(a, a) \in$

$$\{(a, a) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A}, a \in A \wedge a \in A\} \subset R$$

$$\text{Symmetrie: } R = \{(a, b) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

$$R = \{(b, a) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

d. h. für alle $a, b \in X$ gilt:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{A} : a \in A \wedge b \in A$$

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \wedge a \in A$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in R$$

Transitivität: Für alle $a, b, c \in X$ gilt:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A) \wedge (\exists B \in \mathcal{A} : b \in B \wedge c \in B)$$

Da \mathbb{A} eine Partition von X ist, gilt: $\exists! A \in \mathcal{A}, b \in A$ d.h. $A = B$

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A$$

$$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge c \in A$$

$$\Leftrightarrow (a, c) \in R$$

■

z.z

$$X/R = \mathcal{A}$$

Proof:

$$\mathcal{A} \subset X/R :$$

Da eine Partition nie \emptyset enthält: $\forall A \in \mathcal{A} \exists a \in A$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x \mid \exists B \in \mathcal{A} : a \in B \wedge x \in B\}$$

Da \mathcal{A} eine Partition ist, gilt $\forall B \in \mathcal{A} : a \in B \Rightarrow A = B$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x \mid a \in A \wedge x \in A\}$$

$$\Rightarrow [a]_R = A$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : \exists [a] = A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \subset X/R$$

$$X/R \subset \mathcal{A} :$$

$$[a] := \{b \mid \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \wedge a \in A\}$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R : \exists A \in \mathcal{A} : a \in A$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } a \in A :$$

$$[a] = \{b \mid b \in A \wedge a \in A\}$$

$$\Rightarrow [a] = A$$

$$\Rightarrow X/R \subset \mathcal{A}$$

■

Aufgabe 2

a)

(i)

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \wedge x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq 0\} \quad R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$$

Maximum bestimmen

Vermutung: Das Maximum ist $(0, 0)$

Proof:

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A : ((x_1, x_2), (0, 0)) \in R$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in A : (x_1 < 0) \vee (x_1 = 0) \wedge (x_2 \leq 0)$$

$$\text{da } (x_1, x_2) \in A \text{ ist } x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (0, 0) \text{ ist das Maximum und Supremum und maximales Element von } A$$

■

Minimale Elemente bestimmen

Vermutung: $(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1$ sind die minimalen Elemente von A

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 = 1 : \forall (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2) \notin R)$$

Proof:

Annahme:

$$\exists (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \in R$$

$$\Rightarrow y_1 \leq x_1 \wedge y_2 \leq x_2$$

Da $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 0$ gilt:

$$\Rightarrow y_1^2 \geq x_1^2 \wedge y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \wedge y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \wedge y_2^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$y_1^2 + y_2^2 \geq \underbrace{1 - x_2^2 + y_2^2}_{>0}$$

$$y_1^2 + y_2^2 \geq 1$$

$$(y_1, y_2) \notin A$$

\Rightarrow Widerspruch

■

minimale Elemente sind also $\{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in A \wedge (x_1^2 + x_2^2) = 1\}$ Es gibt kein Infimum, da es keine Vergleichbarkeit zwischen den minimalen Elementen gibt.

(ii)

Das Supremum kann nicht mehr eindeutig bestimmt werden, da $\exists y \in \mathbb{R} : \forall (0, x) \in A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) ((0, x) < (0, y))$

b)

\preceq ist eine Ordnungsrelation $\Rightarrow \preceq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

$$\prec := \preceq \setminus \Delta x$$

z.z \prec ist irreflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Proof:

$$\prec = \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b\}$$

irreflexiv:

Annahme \prec ist nicht irreflexiv. Dann:

$$\exists a \in X : (a, a) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, a) \in \preccurlyeq \wedge a \neq a \Rightarrow \text{Widerspruch} \Rightarrow \prec \text{ ist irreflexiv.}$$

antisymmetrisch:

Annahme: \prec ist nicht antisymmetrisch. Dann:

$$\exists a, b \in X : (a, b) \in \prec \wedge (b, a) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \preccurlyeq \wedge (b, a) \in \preccurlyeq$$

Da \preccurlyeq antisymmetrisch ist, folgt:

$$a = b$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch den } \prec \text{ ist irreflexiv} \Rightarrow \prec \text{ ist antisymmetrisch.}$$

transitiv:

$$(a, b) \in \prec \wedge (b, c) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \preccurlyeq \wedge (b, c) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$$

($a \neq c$ gilt da \prec irreflexiv)

$$\Rightarrow (a, c) \in \preccurlyeq \wedge a \neq c$$

$$\Rightarrow (a, c) \in \prec \Rightarrow \text{transitiv}$$

■

(ii)

\prec ist transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch

$$\preccurlyeq := \prec \cup \Delta x = \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \in \prec \vee (a, b) \in \Delta x\}$$

z.z

$$\preccurlyeq$$

ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Proof:

reflexiv:

$$\begin{aligned} & \forall a \in X : (a, a) \in \preccurlyeq \\ \Leftrightarrow & \forall a \in X : (a, a) \in \prec \vee \underbrace{(a, a) \in \Delta x}_{\top} \\ \Rightarrow & \preccurlyeq \text{ ist reflexiv.} \end{aligned}$$

antisymmetrisch: Annahme: \preccurlyeq ist nicht antisymmetrisch. Dann:

$$\begin{aligned} & \exists a, b \in X : (a, b) \in \preccurlyeq \wedge (b, a) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b \\ \Rightarrow & \underbrace{(a, b) \in \prec \wedge (b, a) \in \prec}_{\perp \text{ da } \prec \text{ antisym.}} \vee \underbrace{(a, b) \in \Delta x \wedge (b, a) \in \Delta x}_{\perp \text{ da } a \neq b} \\ \Rightarrow & \text{Widerspruch} \Rightarrow \preccurlyeq \text{ ist antisymmetrisch.} \end{aligned}$$

transitiv:

Seien $(a, b) \in \preccurlyeq$ und $(b, c) \in \preccurlyeq$.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Liegt $(a, b) \in \Delta x$, so ist $a = b$ und damit $(a, c) = (b, c) \in \preccurlyeq$.

Liegt $(b, c) \in \Delta x$, so ist $b = c$ und damit $(a, c) = (a, b) \in \preccurlyeq$.

Liegen $(a, b) \in \prec$ und $(b, c) \in \prec$, so folgt $a \prec$ transitiv: $(a, c) \in \prec \subseteq \preccurlyeq$.

In allen Fällen gilt $(a, c) \in \preccurlyeq \Rightarrow$ transitiv.

■

Anmerkung: Die Transitivität folgt auch, da $\prec \cup \Delta x$ die reflexive Hülle von \prec bildet, und transitiv bei der Hüllenbildung erhalten bleibt.

3.3)

Lemma 0.2: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen:

- (i) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$
- (ii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Proof: zu i: Für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}
 y \in f(A_1) \setminus f(A_2) &\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \setminus \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = y\} \\
 &\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \wedge y \notin \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = y\} \\
 &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge \nexists a_2 \in A_2, f(a_2) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge \forall a_2 \in A_2, f(a_2) \neq y \\
 &\Rightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge a_1 \notin A_2 \\
 &\Rightarrow \exists a_1 \in A_1 \setminus A_2, f(a_1) = y \quad \text{wichtig: hier gilt Äquivalenz im Allgemeinen nicht} \\
 &\Leftrightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2).
 \end{aligned}$$

Aus $y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$ folgt $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$. □

Zu (ii): für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2\} \\
 &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\
 &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2 \\
 &\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1\} \wedge x \notin \{x \in X \mid f(x) \in B_2\} \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)
 \end{aligned}$$

Aus der logischen Äquivalenz folgt die Gleichheit (ii). ■

Lemma 0.3: 6.5b) Seien $(X_i)_{i \in I}$ I indizierte teilmengen von X und eine Relation $R \subseteq X \times Y$. Es gilt:

$$B_r \left(R, \bigcap_{i \in I} X_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)}$$

Proof: Für alle $y \in Y$ gilt:

$$\begin{aligned}
 y \in B_r \left(R, \bigcap_{i \in I} X_i \right) &\Leftrightarrow \exists a \in \bigcap_{i \in I} X_i, (a, y) \in R \\
 &\Leftrightarrow \exists a \in X, \forall i \in I, a \in X_i, (a, y) \in R \\
 &\Rightarrow \forall i \in I, \exists a \in X_i, (a, y) \in R \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} \{b \in Y \mid \exists a \in X_i, (a, b) \in R\} \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)}
 \end{aligned}$$
■

Lemma 0.4:

6.5d) Seien $(Y_i)_{i \in I}$ I indizierte Teilmengen von Y mit der Relation $R \subseteq X \times Y$. Aussage 6.5d) aus dem Skript gilt im Allgemeinen Fall nicht zwingend.

Proof: **Gegenbeispiel** zur Verallgemeinerung von 6.5d): Sei $X = \{a_1, a_1\}$, $Y = \{b_1, b_2\}$ und $R = X \times Y$ Sei $Y_1 = \{a_1\}$ und $Y_2 = \{a_2\}$. Das heißt:

$$U_{r(R, \bigcap_{i \in I} Y_i)} = \emptyset$$

Es gilt allerdings auch:

$$\bigcap_{i \in I} U_{r(R, Y_i)} = X$$

Aus diesem Widerspruch folgt, dass die obige Aussage im allgemeinen nicht gilt. Die schwächere Version mit \subseteq statt $=$ würde allerdings gelten. ■

c)

Lemma 0.5: Zurückziehen einer Äquivalenzrelation entlang einer Funktion: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und \sim_Y eine Äquivalenzrelation auf Y .

$$x_1 \sim_X x_2 := f(x_1) \sim_Y f(x_2)$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf X .

Proof: **Reflexivität**

Für alle $x \in X$ gilt: $x \sim_X x$, da $f(x) \sim_Y f(x)$, was aus den eigenschaften der Äquivalenzrelation \sim_Y folgt.

Symmetrie

Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow x_2 \sim_X x_1$, da $f(x_1) \sim_Y f(x_2) \Rightarrow f(x_2) \sim_Y f(x_1)$. Das folgt wieder aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation \sim_Y .

Transitivität

Für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt

$$x_1 \sim_X x_2 \wedge x_2 \sim_X x_3 \Rightarrow x_1 \sim_X x_3$$

das ist Äquivalent zu der Aussage: (aufgrund der Definition von \sim_X)

$$f(x_1) \sim_Y f(x_2) \wedge f(x_2) \sim_Y f(x_3) \Rightarrow f(x_1) \sim_Y f(x_3)$$

diese Aussage folgt ebenfalls aus der transitivität von \sim_Y ■

3.4

- a) $R = W \times K$. Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von jedem Kunden.
- b) $R = W \times \emptyset$. Alle Waschmaschinen waschen gerade nichts.
- c) R ist eine Abbildung: Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von einem Kunden.

- d) R ist surjektiv aber nicht injektiv: Alle Kunden werden bedient, d.h. die Wäsche von jedem Kunden wird von mindestens einer Waschmaschine gewaschen. (Und es gibt mindestens einen Kunden, dessen Wäsche von mindestens zwei Maschinen gewaschen wird)
- e) R ist injektiv: Die Wäsche von jedem Kunden wird von höchstens einer Waschmaschine gewaschen.
- f) R ist bijektiv: Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von genau einem Kunden.