LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Nr. I-8.1

a) Sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist:

i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := \sqrt{x^2 + y^2}$

und $\alpha \odot x := \sqrt{\alpha} \cdot x$ ist ein VR über $\mathbb{R}$.

Beweis:

1. $(\mathbb{R}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn:

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y \oplus x$$

und $e = 0$, weil

$$x \oplus 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = x$$

2. $$(\alpha \cdot \beta) \odot x = \sqrt{\alpha \cdot \beta}\, x = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \cdot x$$
$$= \sqrt{\alpha} \cdot (\beta \odot x)$$
$$= \alpha \odot (\beta \odot x)$$

3. $$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{\alpha x^2 + \alpha y^2}$$
$$= (\sqrt{\alpha} \cdot x) \oplus (\sqrt{\alpha} \cdot y)$$
$$= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$$

$$(\alpha + \beta) \odot x = \sqrt{\alpha + \beta} \cdot x$$
$$= \sqrt{(\alpha + \beta) \cdot x^2}$$
$$= \sqrt{\alpha x^2 + \beta x^2}$$
$$= (\sqrt{\alpha}\, x) \oplus (\sqrt{\beta}\, x)$$
$$= (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

4. $$1_K \odot x = \sqrt{1} \cdot x = 1 \cdot x = x$$

■

ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $\alpha \odot x := \alpha \cdot \overline{x}$ ist kein VR über $\mathbb{R}$

Beweis:

$$(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha\beta\overline{x}$$
$$\alpha \odot (\beta \odot x) = \alpha \odot \beta\overline{x} = \alpha\beta x \neq \alpha\beta\overline{x} \quad \text{für } \operatorname{Im}(x) \neq 0$$
$$\Rightarrow \text{nicht assoziativ}$$

$\blacksquare$

iii) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x \cdot y$ und $\alpha \odot x := x^\alpha$ ist ein VR über $\mathbb{R}$.

Beweis:

1. $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn:

$$x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$$

und $e = 1$, weil

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$$

2. $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = (\beta \odot x)^\alpha = \alpha \odot (\beta \odot x)$

3. $$\begin{aligned} \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (xy) \\ &= (xy)^\alpha \\ &= x^\alpha \cdot y^\alpha \\ &= x^\alpha \oplus y^\alpha \\ &= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) \end{aligned}$$

$$(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = x^\alpha \oplus x^\beta = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

4. $1_K \odot x = x^{1_K} = x$

$\blacksquare$

b) Sei $X \neq \emptyset$, $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper und $(\mathcal{P}(X), \oplus, \odot)$ ein VR über diesem mit $\oplus := \Delta$ und für $A \subseteq X$

~~$\alpha \odot A =$~~ $1 \odot A = A$

$0 \odot A = \emptyset$

Beweis:

1. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ ist eine abelsche Gruppe.

2. $(\alpha \cdot \beta) \odot A \stackrel{!}{=} \alpha \odot (\beta \odot A)$

$\alpha = 0; \beta = 0$: $(0 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$
$0 \odot (0 \odot A) = 0 \odot \emptyset = \emptyset$ ✓

$\alpha = 0; \beta = 1$: $(0 \cdot 1) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$
$0 \odot (1 \odot A) = 0 \odot A = \emptyset$ ✓

$\alpha = 1; \beta = 0$: $(1 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$
$1 \odot (0 \odot A) = 1 \odot \emptyset = \emptyset$ ✓

$\alpha = 1; \beta = 1$: $(1 \cdot 1) \odot A = 1 \odot A = A$
$1 \odot (1 \odot A) = 1 \odot A = A$ ✓

3. $\alpha \odot (A \Delta B) \stackrel{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\alpha \odot B)$

$\alpha = 0$: $0 \odot (A \Delta B) = \emptyset$
~~$\alpha = 1$:~~ $(0 \odot A) \Delta (0 \odot B) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$ ✓

$\alpha = 1$: $1 \odot (A \Delta B) = A \Delta B$
$(1 \odot A) \Delta (1 \odot B) = A \Delta B$ ✓

4. $(\alpha + \beta) \odot A \stackrel{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\beta \odot A)$

$\alpha = 0; \beta = 0$: $(0 + 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$
$(0 \odot A) \Delta (0 \odot A) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$ ✓

$\alpha = 0; \beta = 1$ bzw. $\alpha = 1; \beta = 0$: $(1 + 0) \odot A = 1 \odot A = A$
$(1 \odot A) \Delta (0 \odot A) = A \Delta \emptyset = A$ ✓

$\alpha=1;\beta=1$: $(1+1)\odot A = 0\odot A=\emptyset$

$(1\odot A)\Delta(1\odot A) = A\Delta A=\emptyset$ ✓

4. $1\odot A = A$ per Definition

■

c) Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, dann ist auch $V\times W$ mit

$+: (V\times W)^2 \to (V\times W) \quad (v,w)+(\tilde{v},\tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$

$\cdot: K\times(V\times W)\to(V\times W) \quad \alpha\cdot(v,w) := (\alpha\cdot_V v, \alpha\cdot_W w)$

ein VR über diesem.

Beweis:

1. $((V\times W), \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn

$$(v,w)+(\tilde{v},\tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$$
$$= (\tilde{v} +_V v, \tilde{w} +_W w)$$
$$= (\tilde{v},\tilde{w}) + (v,w)$$

und $e = (0_V, 0_W)$, weil:

$$(v,w)+(0_V,0_W) = (v +_V 0_V, w +_W 0_W) = (v,w)$$

2. $(\alpha\cdot_K\beta)\cdot(v,w) = ((\alpha\cdot_K\beta)\cdot_V v, (\alpha\cdot_K\beta)\cdot_W w)$

$$= (\alpha\cdot_V(\beta\cdot_V v), \alpha\cdot_W(\beta\cdot_W w))$$
$$= \alpha\cdot((\beta\cdot_V v), (\beta\cdot_W w))$$
$$= \alpha\cdot(\beta\cdot(v,w))$$

3. $\alpha \cdot ((v,w)+(\tilde v,\tilde w)) = \alpha \cdot (v +_v \tilde v, w +_w \tilde w)$

$= (\alpha \cdot_v (v +_v \tilde v), \alpha \cdot_w (w +_w \tilde w))$

$= (\alpha v +_v \alpha \tilde v, \alpha w +_w \alpha \tilde w)$

$= (\alpha v, \alpha w) + (\alpha \tilde v, \alpha \tilde w)$

$(\alpha +_K \beta) \cdot (v,w) = ((\alpha +_K \beta) \cdot_v v, (\alpha +_K \beta) \cdot_w w)$

$= (\alpha \cdot_v v + \beta \cdot_v v, \alpha \cdot_w w + \beta \cdot_w w)$

$= (\alpha v, \alpha w) + (\beta v, \beta w)$

$= \alpha \cdot (v,w) + \beta (v,w)$

4. $1_K \cdot (v,w) = (1_K \cdot_v v, 1_K \cdot_w w) = (v,w)$

■

Nr. I-8.2

a) Sei $(\mathbb{R}_n, \oplus, \cdot)$ ein VR über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$v := (-7, r, 2) \quad v_1 := (1,2,4) \quad v_2 := (-2,1,2) \quad v_3 := (3,1,2)$

$v \overset{!}{=} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$(-7, r, 2) = \alpha \cancel{(4,}(1,2,4) + \beta(-2,1,2) + \gamma(3,1,2)$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & r \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow 2r = 2$$

$\underline{\underline{r = 1}}$

Ansatz: $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 2 & 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l}]\cdot 2 \\ ]- \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & 3+t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha = -1-t$$
$$\beta = 3+t$$
$$\gamma = t$$

b) Sei $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \odot)$ ein VR darüber mit

$$0 \odot A = \emptyset$$
$$1 \odot A := A$$

und $v = \{1,2,4,8\}$, $w = \{1,3,9,27\}$ und $u = \{1,4,16,64\}$

- w hat als einziger Vektor $\{3\}$ ~~und~~
  $\Rightarrow$ Koeffizient muss 0 sein
- v und u haben beide $\{1\}$ als einzige ungerade Zahl
  $\Rightarrow$ wegen Δ müssen beide Koeffizienten entweder 0 oder 1 sein

Mögliche Kombinationen:

1. $0 \odot v \,\Delta\, 0 \odot w \,\Delta\, 0 \odot u = \{\} = \emptyset$
2. $1 \odot v \,\Delta\, 0 \odot w \,\Delta\, 1 \odot u = \{2, \cancel{4}, 16, 64, 8\}$

8.3

a) (i) $\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$X \neq \emptyset$

Sei $U \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

Wir nutzen das Unterraum-kriterium

$X \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$

$0 \odot U = \emptyset \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$ Kein Unterraum

(ii) $\mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$ für $B \subseteq X$

Falls $B = \emptyset$ siehe (i) $\Rightarrow$ Kein Unterraum

Falls $\# X = 1, B \neq \emptyset \Rightarrow B = X \Rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{B\} = \{\emptyset\}$: $0 \cdot \emptyset = \emptyset$; $1 \cdot \emptyset = \emptyset$; $\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Es ergibt sich der Nullraum

Falls $\# B \geq 2$, dann existiert eine echte Teilmenge $A \subset B \Rightarrow A \in X \wedge B \setminus A \subset X$

$\Rightarrow A \Delta B \setminus A = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\} \Rightarrow$ Unterraum-kriterium nicht erfüllt

Falls $\# B = 1 \wedge \# X \geq 2$:

$\Rightarrow \exists A \subseteq X$ mit $\# A > 1$, $B \subset A$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$

$\Rightarrow (A \setminus B) \Delta A = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$

$\Rightarrow$ Nur für $\# X = 1 \wedge B = X$ handelt es sich um einen Unterraum

(iii) $\{\emptyset, X \setminus B\}$ $B \subseteq X$

$\{\emptyset, X \setminus B\} \ni \emptyset \Rightarrow \{\emptyset, X \setminus B\} \neq \emptyset$

$X \setminus B \Delta X \setminus B = \emptyset$

$X \setminus B \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X \setminus B = X \setminus B$

$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\forall U \in \{\emptyset, X \setminus B\}$: $1 \cdot U = U \in \{\emptyset, X \setminus B\}$
$0 \cdot U = \emptyset \in \{\emptyset, X \setminus B\}$

$\Rightarrow$ Unterraum kriterium erfüllt

(iv) $\{A \subseteq X \mid A$ und X gleichmächtig$\} \cup \{\emptyset\}$

Falls X eine Endliche Menge ist gilt:

$\# A = \# X \wedge A \subseteq X$

$\Rightarrow A = X$

$A \Delta A = \emptyset$ $\quad 1 \cdot A = A$

$\emptyset \Delta A = A = A \Delta \emptyset$ $\quad 0 \cdot A = \emptyset$

$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow$ Unterraum-Kriterium erfüllt

Falls X eine unendliche Menge ist

$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Menge $Y \subset X$ mit $\#(X \setminus Y) = \# X$

$X \setminus Y \Delta X = Y$

$\# Y \neq \# X \Rightarrow Y \notin \{ A \subseteq X \mid A$ und X gleichmächtig $\} \cup \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$ Kein Unterkörper für unendliche Mengen X

b) $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ ist Familie von Unterräumen für $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über den Körper $(K, +, \cdot)$

$\forall i \in I : (U_i, +, \cdot)$ ist Unterraum von $(V, +, \cdot)$

$\forall a, b \in \bigcap_{i \in I} U_i \Rightarrow \forall i \in I : a + b \in U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in U_i$

$\Rightarrow a + b \in \bigcap_{i \in I} U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Die 0_V ist Element jedes Unterraums, da $\forall i \in I \, \forall a \in U_i : 0_K \cdot a = 0_V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Unterraumkriterium erfüllt

c) $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ beliebig, $(K^X, +, \cdot)$ ist K-Vektorraum

gegeben sind:

$U := \{ f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \}$

$W := \{ f \in K^X \mid f(x) = f(y) \; \forall x, y \in X \}$

(i) U und W sind Unterräume

$f_1 : X \ni x \to 0 \in K \Rightarrow f_1 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

$\forall f_1, f_2 \in U : \; f_3 : X \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \in V$

$\Rightarrow f_3(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow f_3 \in U$

$\forall f_1 \in U : \; \alpha \cdot f_1(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot f_1(x_0) \in U$

$\Rightarrow$ Unterraumkriterium erfüllt

W: $\forall f_1, f_2 \in W \; \forall y, x \in X : \; f_1(x) + f_2(x) = f_1(y) + f_2(y)$

$\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \in W$

$\forall \alpha : \; \alpha \cdot f_1(x) = \alpha \cdot f_1(y) \in W$

$\Rightarrow$ Unterraum kriterium erfüllt

(ii) $(U \cap W) = \{ f \in K^X \mid f(x) = f(y) \; \forall x, y \in X \wedge f(x_0) = 0 \}$

$\overset{x_0 \in X}{\Rightarrow} \quad (U \cap W) = \{ f \in K^X \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X \} = \{0\}$

Aufgabe 4

Lemma 0.1: Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Es gilt:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} =: M$$

Proof:

1. $\langle \mathrm{E} \rangle \subseteq M$: Trivial mit $n = 1$ und $\alpha_1 = 1$
2. Zu zeigen

$$M \subseteq \langle \mathrm{E} \rangle$$

: Gilt genau dann, wenn:

$$\left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} \subseteq \left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in E, \alpha_i \in K) \right\}$$

Zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K, \exists n' \in \mathbb{N}_0, \exists v_{i'} \in E, \exists \alpha_{i'} \in K, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_{j'} v_{j'}$$

Wir wissen, dass alle $v_i \in \langle E \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden können:

$$\exists n_i \in \mathbb{N}_0, \exists \alpha_{ik} \in K, \exists v_{ik} \in E, \sum_{k=0}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} = v_i$$

Wir können also schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) \quad \text{mit} \quad v_{ik} \in E$$

Um die zwei Summen in eine Zusammenzufassen schreiben wir: $n' = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Um die Indizierung von α_{ik} zu vereinfachen führen wir $j_{ik} = \sum_{x=1}^{i-1} n_i + k$ ein. Damit definieren wir $\alpha_{j_{ij}} = \alpha_i \cdot \alpha_{ik}$ und $v_{j_{ik}} = v_{ik}$ Insgesamt gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j v_j$$

Damit ist die zweite Inklusion bewiesen, da so jede Linearkombination von Elementen aus $\langle \mathrm{E} \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden kann. ■

Lemma 0.2:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \bigcup \{ \langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ ist endlich} \}$$

Proof: “$\supseteq$”: Gilt, da $\langle E_0 \rangle \subseteq \langle E \rangle$ für alle $E_0 \subseteq E$.
“$\subseteq$”: Gilt, da $\langle E \rangle$ nur endliche Linearkombinationen erzeugt. Für alle $e \in \langle E \rangle$ gibt es also ein n, sodass $e = \sum_i^n \alpha_i x_i$ mit $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\} \subseteq E$. Da $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ endlich ist, gibt es ein endliches $E_0 \subseteq E$ mit $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\} \subseteq E_0$. Somit gibt es für jedes $e \in \langle E \rangle$ ein $E_0 \subseteq E$, sodass $e \in \langle E_0 \rangle$. ∎

b)

i)

$$\langle (1,2) \rangle \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \text{ über } \mathbb{Q}$$

$$\langle (1,2) \rangle = \{(q, 2q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

ii)

$$\langle \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \rangle \text{ in } (\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \Delta, \odot)) \text{ über } (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$$

$$\langle \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \rangle = \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \emptyset\}$$

Aufgabe 5

a)

i)

Die Menge $E = \left\{(1,2,3), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right), (1,1,1)\right\}$ in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{Q}$ ist linear unabhängig, da gelten muss:

$$1 \cdot q_1 + \sqrt{2} \cdot q_2 + 1 \cdot q_3 = 0$$

Da $\sqrt{2} \cdot q$ für alle q irrational ist, muss gelten: $q_3 = -q_1$ und $q_2 = 0$. Mit der Gleichung für die zweite komponente folgt allerdings:

$$2 \cdot q_1 - 1 \cdot q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_3 = q_1 = 0$$

Damit ist E linear unabhängig.

II)

Die Menge $E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X, +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist linear unabhängig, wenn X nicht endlich ist.

1. Wenn X endlich ist, gibt es endlich viele Charakteristische Funktionen e_x und es gilt $\sum_x e_x = 1$. Damit lösst sich 1 als endliche linearkombination der Vektoren e_x darstellen und E ist nicht linear unabhängig.
2. Wenn X allerdings endlich ist, ist $\sum_x e_x = 1$ eine undendlich linearkombination. Da die Menge der charakteristischen Funktionen trivialerweise linear unabhängig ist, ist E somit auch linear unabhängig.

iii)

Die Menge $E = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ über $(Z_2, +_2, \cdot_2)$ ist linear unabhängig, wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist:

1. Wenn $\mathcal{P}(X)$ endlich ist, kann die Menge $X \setminus \{y\}$ ($y \in X$ beliebig) als linearkombination von $\{E \setminus (X \setminus \{y\})\}$ dargestellt werden, da:

   $$(*) \quad (X \setminus \{a\}) \Delta (X \setminus \{b\}) = (((X \setminus \{a\}) \setminus (X \setminus \{b\})) \cup ((X \setminus \{b\}) \setminus (X \setminus \{a\}))) = \{a, b\}$$

   Damit gilt:

$$\sum_{X\setminus\{x\}\in E\setminus(X\setminus\{y\})} X \setminus \{x\} = \bigcup\{x \mid X \setminus \{y\}\} = X \setminus \{y\}$$

E ist also nicht linear unabhängig.

2. Wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist, ist E linear unabhängig, da jede endliche (!!) linearkombination aus Elementen von E eine Menge von endlicher Mächtigkeit erzeugt (siehe $(*)$). Jedes Element von E ist aber nicht endlich (da $X \setminus \{x\}$ nicht endlich ist, wenn X nicht endlich ist) und kann daher nicht als endliche linearkombination von Elementen von E dargestellt werden.

b)

Lemma 0.3: In einer Linear unabhängigen Familie kann kein Elmement doppelt vorkommen.

Proof: Sei $f : I \to V$ eine Familie mit $f_i = f_j$. Dann gilt $1 \cdot f_i - 1 \cdot f_j = 0$. Die Implikation

$$\sum_i a_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i, a_i = 0$$

kann also nichtmehr gelten, womit f nicht linear unabhängig sein kann. ∎

c)

Lemma 0.4: V ist ein K Vektorraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$ der als linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden kann.

Proof: "⇒": Wenn E nicht linearabhängig ist gilt: $\exists a_w, \sum_{w \in E} a_w w = 0$ mit $a_w \neq 0$ für mindestens einen Vektor $w \in E$. Sei v ein solcher Vektor mit $a_v \neq 0$.

$$\sum_{w \in E} a_w w = 0$$
$$\sum_{w \in E} a_w w - a_v v = -a_v v$$
$$\sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w = -a_v v$$
$$\sum_{w \in E \setminus \{v\}} \left(a_w \cdot \left(-a_v^{-1}\right)\right) w = v$$

v kann also als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden.

"⇐": Es gilt: $v = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w$ für ein bestimmtes v und eine bestimmte Menge a_w. Nun kann die selbe Rechnung von oben rückwärts durchgeführt werden:

$$v = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w$$
$$0 = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w - v$$
$$0 = \sum_{w \in E} a_w \quad \text{mit} \quad a_v = -1$$

Damit gilt die Implikation $\sum_{w \in E} a_w w = 0 \Rightarrow \forall w, a_w = 0$ nicht, da $a_v = -1$. E ist also linear abhängig.

■