a)

(i) Kein Endomorphismus da

$$\left.\begin{array}{l} f((0,0,0,0,1)+(0,0,0,0,1)) = (0,0,0,0,3) \\ f((0,0,0,0,1)) + f((0,0,0,0,1)) = (0,0,0,0,4) \end{array}\right\} \neq$$

(ii) $h: \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \to f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$

Sei $f_1 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ mit $f_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ mit $v_i \in \mathbb{Z}_2$

$$h(f_1) = f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 \\ \vdots \\ v_n \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = f_1$$

$\forall i$ gilt: $v_i \cdot v_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i = 1 \\ 0 & \text{falls } v_i = 0 \end{cases} = v_i$

$\Rightarrow h(f_1) = f_1 \quad \forall f_1 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ Automorphismus

(iii) $f: V \to W$ bijektiv

$f^{-1}: W \to V$ Vektorraumisomorphismus

Da f bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ bijektiv

$\forall v_1, v_2 \in V$:

$\exists! w_1, w_2 : f^{-1}(w_1) = v_1,\ f^{-1}(w_2) = v_2$

$\Rightarrow f(v_1) = w_1 \wedge f(v_2) = w_2$

$$\Rightarrow f(v_1 + v_2) = f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) = f(f^{-1}(w_1 + w_2))$$
$$= w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2)$$

$$f(v_1 \cdot v_2) = f(f^{-1}(w_1) \cdot f^{-1}(w_2)) = f(f^{-1}(w_1 \cdot w_2))$$
$$= w_1 \cdot w_2 = f(v_1) \cdot f(v_2)$$

$\Rightarrow f$ ist Vektorraumisomorphismus

c)

$$f^{(n)}(v) := f \circ \dots \circ f(v) \neq 0 \quad \wedge \quad f^{(n+1)}(v) := f \circ \dots \circ f(v) = 0$$

f ist Vektorraumisomorphismus

$\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \forall i\leq n \; f^{(i)}(v)\neq 0$

z.z $A:=\{v, f(v), \dots, f^{(n)}(v)\}$ linear unabhängig

Angenommen A ist linear abhängig

$\Rightarrow \exists_i$ mit $a_i\neq 0$ sodass $\sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}(v)=0$

Sei I die Menge aller $i\in\mathbb{N}$ mit $i\leq n \wedge a_i\neq 0$

$I\neq\emptyset$ da A linear abhängig

$\Rightarrow \sum_{i\in I} a_i f^{(i)}(v)=0$

$k:=\min\{I\}$

$\Rightarrow f^{(n-k)}\left(\sum_{i\in I} a_i f^{(i)}(v)\right)=0$

$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} a_i f^{(i+n-k)}(v)=0$

$\Leftrightarrow a_k f^{(n)}(v)+\sum_{i\in I\setminus\{k\}} a_i f^{(i+n-k)}(v)=0$

Da $\forall i\in I\setminus\{k\}: i+n-k\geq n+1 \wedge f^{(n+1)}(v)=0$

$\Rightarrow \sum_{i\in I\setminus\{k\}} a_i f^{(i+n-k)}(v)=0$

$\Rightarrow a_k f^{(n)}(v)=0 \wedge a_k\neq 0$

$\Rightarrow f^{(n)}(v)=0$ $\lightning \Rightarrow$ A linear unabhängig

d)

(i) z.z V_+ Untervektorraum

$\forall v\in V_+: f(v_i)=v$

Sei $v_1,v_2\in V_+$

$\Rightarrow v_1+v_2=f_1(v_1)+f(v_2)=f(v_1+v_2) \Rightarrow v_1+v_2\in V_+$

$\forall \alpha\in K: \alpha\cdot v=\alpha\cdot f(v)=f(\alpha\cdot v) \Rightarrow \alpha\cdot v\in V_+$

$f(0)=0 \Rightarrow V_+\neq\emptyset$

z.z V_- Untervektorraum

$f(0) = 0 = -0$

$\Rightarrow V_- \neq \phi$

$\forall v_1, v_2 \in V_-$: $v_1 + v_2 = f(-v_1) + f(-v_2) = f(-v_1 - v_2) = f(-(v_1+v_2))$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in V_-$

$\forall \alpha \in K$: $\alpha \cdot v_1 = \alpha \cdot f(-v_1) = f(-\alpha \cdot v_2)$

$\Rightarrow \alpha \cdot v_1 \in V_-$

z.z. $V_+ \cap V_- = \{0\}$

$0 \in V_+ \wedge 0 \in V_-$ (siehe oben)

Angenommen $\exists v \in V_+ \cap V_-$ mit $v \neq 0$

$\Rightarrow f(v) = v = -v$

$\Rightarrow v + v = 0$

$\Leftrightarrow v(1+1) = 0 \wedge v \neq 0$

$\Rightarrow (1+1) = 0$

$\Rightarrow char(K) = 2$ ↯

z.z $V_+ + V_- = V$

$V_+ + V_- \subseteq V$

$\forall v \in V$:

$u := \frac{v + f(v)}{2}$

$f(u) = \frac{f(v) + v}{2} = u$

$w := \frac{v - f(v)}{2}$

$f(w) = \frac{f(v) + f(f(-v))}{2} = \frac{-v + f(v)}{2} = -w$

$\Rightarrow u \in V_+ \quad w \in V_-$

$u + w = \frac{v + f(v)}{2} + \frac{v - f(v)}{2} = \frac{2v}{2} = v$

$\Rightarrow V \subseteq V_+ + V_-$

$\Rightarrow V = V_+ + V_-$

(ii) Sei $U + W = V$

$\wedge U \cap W = \{0\}$

$U = V_+(f)$

$W = V_-(f)$

Sei B_U eine Basis von U

" B_W —— " —— W

$\Rightarrow B_U + B_W$ ist eine Basis von V

$\Rightarrow \forall v \in V: \quad v = \sum_{u \in B_U} a_u u + \sum_{w \in B_W} a_w w$ (die Zerlegung ist eindeutig da B_U & B_W Basen)

$\forall u \in B_U: f(u) = u$

$\forall w \in B_W: f(w) = -w$

$\Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{u \in B_U} a_u v + \sum_{w \in B_W} a_w w\right)$

$f(v) = \sum_{u \in B_U} a_u u - \sum_{w \in B_W} a_w w$

Damit ist $f(v)$ $\forall v \in V$ eindeutig bestimmt

$\Rightarrow$ Es gibt genau einen selbstinversen Vektorraumautomorphismus mit $V_+(f) = U$ und $V_-(f) = W$