Zettel 3

Bearbeitet von:
Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler(Tutorium:Gregor Teupke(Mi 16:15))

Aufgabe 1

a)

$\{(0,0),(1,0)\} \in R$

$\{(1,0),(2,0)\} \in R$

$\{(0,0),(2,0)\} \notin R$

$\Rightarrow$ nicht transitiv

b)

$R := \{(a,b) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$

Lemma 0.1: R ist eine Äqvivalenzrelation.

Proof: Reflexivität:

da $\mathbb{A}$ eine Partition von X ist, gilt für jedes $a \in X : \exists A \in \mathcal{A}, a \in A$, darum ist $(a,a) \in \{(a,a) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A}, a \in A \wedge a \in A\} \subset R$

Symmetrie: $R = \{(a,b) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$

$$R = \{(b,a) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

d. h. für alle $a, b \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}(a,b) \in R &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{A} : a \in A \wedge b \in A \\ &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \wedge a \in A \\ &\Leftrightarrow (b,a) \in R\end{aligned}$$

Transitivität: Für alle $a, b, c \in X$ gilt:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A) \wedge (\exists B \in \mathcal{A} : b \in B \wedge c \in B)$$

Da A eine Partition von X ist, gilt: $\exists! A \in \mathcal{A}, b \in A \quad$ d.h. $\quad A = B$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \\ &\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge c \in A \\ &\Leftrightarrow (a,c) \in R\end{aligned}$$

■

z.z

$$X/R = \mathcal{A}$$

Proof:

$$\mathcal{A} \subset X/R :$$

$$\text{Da eine Partiotion nie } \emptyset \text{ enthält: } \forall A \in \mathcal{A} \exists a \in A$$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x |\ \exists B \in \mathcal{A} : a \in B \land x \in B\}$$

Da $\mathcal{A}$ eine Partition ist, gilt $\forall B \in \mathcal{A} : a \in B \Rightarrow A = B$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x |\ a \in A \land x \in A\}$$

$$\Rightarrow [a]_R = A$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : \exists [a] = A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \subset X/R$$

$$X/R \subset \mathcal{A} :$$

$$[a] := \{b \mid \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \land a \in A\}$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R : \exists A \in \mathcal{A} : a \in A$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } a \in A :$$

$$[a] = \{b | b \in A \land a\}$$

$$\Rightarrow [a] = A$$

$$\Rightarrow X/R \subset \mathbb{A}$$

■

Aufgabe 2

a)

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \land x_1 \leq 0 \land x_2 \leq 0\}$ $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$

Maxiumum bestimmen

Anmerkung: Hier könnte ein Bild helfen

Vermutung: Das Maximum ist $(0, 0)$

Proof:

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A : ((x_1, x_2), (0, 0)) \in R$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in A : (x_1 < 0) \lor (x_1 = 0) \land (x_2 \leq 0)$$

da $(x_1, x_2) \in A$ ist $x_1 \leq 0 \land x_2 \leq 0$

$$\Rightarrow (0, 0) \text{ ist das Maximum und Supremum und maximales Element von } A$$

■

Miniaimale Elemente bestimmen

Vermutung: $(x_1, x_2) : x_1 + x_2) = 1$ sind die minimalen Elemente von A

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A$$

Proof:

■