LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Aufgabe 2

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge und $\left(K^X, +, \cdot\right)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den Punktweisen verknüpfungen.

Lemma 0.1: Falls X endlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \#X$$

Proof: Sei B_X folgende Familie in K^X:

$$B(x_0) : X \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: B_X ist eine Basis von K^X und $\#B_X = \#X$. Die zweite Aussage ist trivial, für die erste Aussage benötigen wir zunächst die Lineare Unabhängigkeit von B.

Sei

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_x B(x_0) = 0_{K^X}$$

Das gilt, wenn

$$\forall x' \in X, \left(\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0)\right)(x') = 0_K$$

Da alle Summenglieder mit $x' \neq x_0$ sowieso verschwinden, können wir auch schreiben:

$$\forall x' \in X, \alpha_{x'} B(x,)(x') = \alpha_{x'} \cdot 1_K = 0_K$$

Damit ist B_X linear unabhängig.

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\langle B_X \rangle = K^X$. Sei $f \in K^X$. Dann setzen wir $a_x = f(x)$. Es gilt nun:

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B_{x_0} = f$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{x_0 \in X} f(x_0) B_{x_0}\right)(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow f(x)B(x) = f(x) \cdot 1_k = f(x) \quad \forall x$$

Damit können alle Elemente von K^X durch die Basis erzeugt werden. ■

Lemma 0.2: Falls X unendlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \infty$$

Proof: Zu zeigen: Es gibt eine Unendliche linear unabhängige Familie $B_X \subseteq K^X$. Damit kann es keine endliche Basis geben, wodurch die Unendlichkeit der Dimension gezeigt ist. Sei B_X dafür folgende Familie in K^X:

$$B(x_0) : X \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

. Zu zeigen: B_X ist linear unabhängig. Das funktioniert genau gleich wie im Beweis drüber. ■

(ii)

Sei nun:

$$U := \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}$$

$$W := \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

Lemma 0.3: $\dim_{K(U)} = \dim_{K(K^X)} - 1$ (also ∞ falls X unendlich ist)

Proof: Sei $X' = X \setminus \{x_0\}$. Sei $B_{X'}$ folgende Familie in $K^{X'}$:

$$B(x') : X' \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x' \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: $B_{X'}$ ist eine Basis von U: Gilt offensichtlich, da alle Elemente außer x_0 einmal mit der 1_K getroffen werden. Damit ist

$$\dim_K(U) = \#B_{X'} = \#X' = \#X - 1 = \dim_K(K^X)$$

■

Lemma 0.4: $\dim_{K(W)} = 1$

Proof: Die Menge der Konstanten Funktionen W wird durch die Menge $B = \{x \mapsto 1_k\}$ erzeugt. Damit hat W eine Dimension von 1. ■

Lemma 0.5:

$$\dim_K(U \cap W) = \dim_K(\{x \mapsto 0_K\}) = 0$$

Proof: Gilt, da $U \cap W$ nur den Nullvektor enthält und damit $U \cap W = \langle \{\} \rangle$ ■

b)

Lemma 0.6: Sei $(K, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. V ist genau dann K-endlichdimensional, wenn V endlich ist.

Dann gilt außerdem: $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$.

Proof: Sei B eine Basis von V. Da eine Basis Vektoren eindeutig erzeugt, gilt:

$$V = \bigcup_{b \in B} b \cdot K = \biguplus_{b \in B} b \cdot K$$

($\uplus$ meint die Disjunkte Vereinigung).

“$\Rightarrow$”: Wenn B endlich ist (also V endlichdimensional), dann ist V offensichtlich endlich, da jede Skalarmultiplikation $b \cdot K$ nur endlich viele Elemente ertzeugt.
“$\Leftarrow$”: Wenn V endlich ist, dann muss auch B endlich sein, da die disjunkte Vereinigung sonst unendlich viele Elemente erzeugen würde. Da B endlich ist, ist dann auch V endlichdimensional.

Wenn B (und damit auch V) endlich ist, gilt:

$$\#V = \# \biguplus_{b \in B} b \cdot K = \prod_{b \in K} \#b \cdot K = \prod_{b \in K} \#K = (\#K)^{\#B} = (\#K)^{\dim_K(V)}$$

■