LA Zettel 6

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Aufgabe I-6.1 (Homomorphismen)

(a)

(i)

Lemma 0.1: $f : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +), f(x) := \ln(x)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Proof:

1. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot), (\mathbb{R}, +)$ sind Gruppen.
2. Homomorphiesatz ist erfüllt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

3. $f(x) = \ln(x)$ ist auf $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bijektiv.

■

(ii)

Lemma 0.2: $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{R}, +), f(x) := 3x + 1$ ist kein Homomorphismus.

Proof:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} :$$

$$f(a + b) = 3(a + b) + 1$$

$$f(a) + f(b) = 3a + 1 + 3b + 1 = 3(a + b) + 2$$

$$\Rightarrow f(a + b) \neq f(a) + f(b)$$

Der Homomorphiesatz ist somit nicht erfüllt. ■

(iii)

Lemma 0.3: $f : (\mathbb{Z}_2, +_2) \to (\{\top, \bot\}, XOR), f(z) := (x > 0)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Proof:

1. $(\mathbb{Z}_2, +_2), (\{\top, \bot\}, XOR)$ sind abelsche Gruppen.
2. Homomorphiesatz mit $f(a +_2 b) = f(a) XOR f(b)$ ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}_2$ erfüllt:

Fall 1: $a = b = 0$:

$$f(0 +_2 0) = f(0) = (0 > 0) = \bot$$

$$f(0) XOR f(0) = (0 > 0) XOR (0 > 0) = \bot XOR \bot = \bot$$

$$\Rightarrow f(0 +_2 0) = f(0) XOR f(0)$$

Fall 2: $a = 0, b = 1$, bzw. $a = 1, b = 0$:

$$f(1 +_2 0) = f(1) = (1 > 0) = \top$$

$$f(0) XOR f(1) = (0 > 0) XOR (1 > 0) = \bot XOR \top = \top$$

$$\Rightarrow f(1 +_2 0) = f(1) XOR f(0)$$

Fall 3: $a = b = 1$:

$$f(1 +_2 1) = f(0) = (0 > 0) = \bot$$

$$f(1) XOR f(1) = \top XOR \top = \bot$$

$$\Rightarrow f(1 +_2 1) = f(1) XOR f(1)$$

3. Die Bijektivität ist gegeben, da die 3 Fälle alle Möglichkeiten abdecken.

■

(iv)

Lemma 0.4: $f : (S_3, \circ) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$ ist ein Monoidhomomorphismus.

Proof:

1. $(S_3, \circ)$ ist eine Gruppe, aber $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$ ist nur ein Monoid, da nicht jedes Element ein Inverses und als neutrales Element $e = \emptyset$ besitzt.
2. Homomorphiesatz mit $f(\sigma_a \circ \sigma_b) = f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b)$ ist für alle $\sigma_a \sigma_b \in S_3$ erfüllt:

Fall 1: $\sigma_a, \sigma_b \notin A_3$ mit $A_3 := \{\sigma \in S_3 \mid sgn(\sigma) = 1\}$:

$$f(\sigma_a \circ \sigma_b) = [0, -sgn(\sigma_a \circ \sigma_b)] = [0, -1] = \emptyset$$

$$f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b) = [0, 1] \triangle [0, 1] = \emptyset$$

$$\Rightarrow f(\sigma_a \circ \sigma_b) = f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b)$$

Fall 2: $\sigma_a \notin A_3, \sigma \in A_3$ bzw. $\sigma_a \in A_3, \sigma_b \notin A_3$:

$$f(\sigma_a \circ \sigma_b) = [0, -sgn(\sigma_a \circ \sigma_b)] = [0, 1]$$

$$f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b) = [0, -sng(\sigma_a)] \triangle [0, -sng(\sigma_b)] = [0, 1] \triangle [0, -1] = [0, 1]$$

$$\Rightarrow f(\sigma_a \circ \sigma_b) = f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b)$$

Fall 3: $\sigma_a, \sigma_b \in A_3$

$$f(\sigma_a \circ \sigma_b) = [0, -sgn(\sigma_a \circ \sigma_b)] = [0, -1] = \emptyset$$

$$f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b) = [0, -sgn(\sigma_a)] \triangle [0, -sgn(\sigma_b)] = [0, -1] \triangle [0, -1] = \emptyset$$

$$\Rightarrow f(\sigma_a \circ \sigma_b) = f(\sigma_a) \triangle f(\sigma_b)$$

3. Die Abbildung $f(\sigma) = [0, -sgn(\sigma)]$ ist nicht surjektiv, da nicht auf alle Intervalle aus $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ abgebildet wird, sondern nur auf $\emptyset, [0, -1] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

■

(b) Es seien $f : G_1 \to G_2$ un $g : G_2 \to G_3$ (Halbgruppen-, Monoid-, Gruppen-)isomorphismen mit $(G_1, \star), (G_2, \square)$ und $(G_3, \bullet)$ und $a_1, b_1 \in G_1, a_2, b_2 \in G_2$.

Lemma 0.5: Dann ist auch f^{-1} ein solcher Isomorphismus.

Proof:

$$f^{-1}(a_2) \star f^{-1}(b_2) = a_1 \star b_1$$

$$= f^{-1}(f(a_1 \star b_1))$$

$$= f^{-1}(f(a_1) \square f(b_1))$$

$$= f^{-1}(a_2 \square b_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a_2) \star f^{-1}(b_2) = f^{-1}(a_2 \square b_2)$$

■

Lemma 0.6: Dann ist auch $g \circ f$ ein solcher Isomorphismus.

Proof:

$$g(f(a_1 \star b_1)) = g(f(a_1)\square f(b_1))$$

$$= g(a_2 \square b_2)$$

$$= g(a_2)\bullet(b_2)$$

$$= g(f(a_1))\bullet g(f(b_1))$$

$$\Rightarrow g(f(a_1 \star b_1)) = g(f(a_1))\bullet g(f(b_2))$$

■

Aufgabe 2

(a)

(i)

Das neutrale Element der Addition ist 0

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(f) = \{1\}$$

Da f surjektiv ist gilt:

$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}$$

(ii)

Das neutrale element der Addition ist 0

$$\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(f) = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x) = 3x + 1 \land x \in \mathbb{Q}\} = \left\{y \mid \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Q}\right\}$$

(iii)

Das neutrale Element von $(\{\top, \bot\}, \text{XOR})$ ist $\bot$

$$\forall x \in \mathbb{Z}_2 : (x > 0) \Leftrightarrow \bot \text{ falls } \ x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$$

$$f(0) = \bot; f(1) = \top \Rightarrow \text{f ist surjektiv} \Rightarrow \text{Bild}(f) = \{\top, \bot\}$$

(iv) Das neutrale Element von $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \Delta)$ ist $\emptyset$(Auf vorherigen Zetteln gezeigt)

ges:

$$f(\sigma) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow [0, -\mathrm{sgn}(\sigma)] = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{\sigma \in S_3 | \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\} = A_3$$

$\mathrm{sgn}(\sigma)$ ist entweder 1 oder -1

$$\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) = \{\emptyset, [0, 1]\}$$

b)

$$\mathrm{Kern}(g \circ f) = \{a \in G_1 | g(f(a)) = e_3\} = \{a \in G_1 | f(a) = b \in G_2 \land g(b) = e_3\} = f^{-1}(\mathrm{Kern}(g))$$

$$\mathrm{Bild}(g \circ f) = \{g(a) | \exists x \in G_1 : a = f(x)\} = g(\mathrm{Bild}(f))$$

Aufgabe 6.3

a)

$$\mathbb{Z}/\mathbb{R} = \{[a] = a + \mathbb{Z} |\ a \in \mathbb{R}\}$$

$$[a] \tilde{+} [c] = [a + c]$$

$$\Rightarrow \text{neutrales Element } e = [0]$$

Gesucht ist $b \in \mathbb{R}$, sodass:

$$n[b] = [0]; n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow b + ... + b = nb = 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow$ Das einzige Element mit endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist $[0]$.

b)

Lemma 0.7:

Sei $(G \star)$ eine Gruppe und $E \subseteq G$ mit $\langle E \rangle = G$ und $(N, \star)$ untergruppe von G.

Dann gilt: N ist genau dann normalteiler von $(G, \star)$, wenn $a \star N = N \star a$ für alle $a \in E$ gilt.

Proof:

$$\forall a_n \in E : N = a_n' \star N \star a_n (\Leftrightarrow a_n \star N = N \star a_n)$$

Da E ein Erzeugendensystem von G ist, gilt auch:

$$\forall b \in G : b = a_1 \star \ldots \star a_n$$

$$b' = a_n' \star \ldots \star a_1'$$

$$\Rightarrow b' \star N \star b = \underbrace{a_n' \star \ldots \star \underbrace{\underbrace{a_1' \star N \star a_1}_{N} \star \ldots}_{N} \star a_n}_{N} = N$$

■

c)

geg:

$$(G, \star) \text{ ist eine Gruppe}$$

$$(N_1, \star), (N_2, \star) \text{ sind Untergruppen von } G$$

$$N_1 \subseteq N_2$$

Lemma 0.8:

$$(G/N_2, \tilde{\star}) \text{ ist Untergruppe von } \ (G/N_1, \tilde{\star})$$

Proof:

Da $N_1 \subseteq N_2$ gilt:

$$N_1 = N_2 \lor \exists n \in N_2 : n \notin N_1$$

Falls $N_1 = N_2$ dann ist auch $(G/N_2, \tilde{\star}) = (G/N_1, \tilde{\star})$

Falls $\exists n \in N_2 : n \notin N_1$ gilt:

$$\forall a \in G : a \star n \in a \star N_2 \land a \star n \notin a \star N_1$$

$$\Rightarrow a \star N_2 \neq a \star N_1$$

$$\Rightarrow (G/N_2, \tilde{\star}) \text{ ist nicht Untergruppe von } \ (G/N_1, \tilde{\star})$$

■

d)

$$(G, \star) \ \text{ Gruppe}, \qquad (N, \star) \ \text{ Normalteiler}, \qquad a \star N = N \star a$$

Lemma 0.9: G/N ist abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$.

Es gilt für alle $a \in G$:

$$a \star N = N \star a.$$

$$G/N = \{ a \star N \mid a \in G \}, \qquad [a] \hat{\star} [b] = [a \star b] = (a \star b) \star N.$$

Proof:

Zu zeigen:

$$[a] \tilde{\star} [b] = [b] \tilde{\star} [a] \quad \Leftrightarrow \quad K(G) \subseteq N.$$

$$[a] \tilde{\star} [b] = [b] \tilde{\star} [a]$$

$$\Leftrightarrow \quad [a \star b] = [b \star a]$$

$$\Leftrightarrow \quad (a \star b) \star N = (b \star a) \star N$$

$$\Leftrightarrow \quad N \star (a \star b) = N \star (b \star a).$$

$$\Leftrightarrow \{ c \star a \star b \mid c \in N \} = \{ d \star b \star a \mid d \in N \}$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : c \star a \star b = d \star b \star a$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : c \star a \star b \star (b \star a)' = d.$$

Da $c' \in N$:

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : a \star b \star a' \star b' = \underbrace{c' \star d}_{\in N}.$$

$$\Leftrightarrow \quad a \star b \star a' \star b' \in N \quad \Leftrightarrow \quad K(G) \subseteq N.$$

■

Aufgabe 4

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen. (G_1 ist endlich).

Lemma 0.10: Ist auch G_2 endlich und $\#G_1$ und $\#G_2$ sind teilerfremd, dann existiert zwischen G_1 und G_2 nur der triviale Gruppenhomomorphismus.

Proof: Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus von G_1 nach G_2. Da G_1 endlich ist, gilt $\#G_1/\ker(f) \mid \#G_1$. Dann gilt nach dem Homomorphiesatz:

$$G_1/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) \Rightarrow \#(G_1/\ker(f)) = \#\,\mathrm{im}(f)$$

In die vorherige Gleichung eingesetzt ergibt das $\#\,\mathrm{im}(f)/\#G_1$.
Da f ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $\mathrm{im}(f)$ eine Untergruppe von G_2.Nach dem Satz von Lagrange gilt also $\#\,\mathrm{im}(f) \mid \#g_2$.
Da wir angenommen haben, dass $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd sind, muss gelten $\#\,\mathrm{im}(f) = 1$.
D.h. f kann nur der triviale Gruppenhomomorphismus $f : x \mapsto e_2$ sein. ■

Lemma 0.11: Ist $\#G_1$ eine Primzahl, dann ist jeder Gruppenhomomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ trivial oder injektiv.

Proof: Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus von G_1 nach G_2. Da G_1 endlich ist, gilt $\#(G_1 / \ker(f)) \mid \#G_1$. Da $\#G_1$ eine Primzahl ist, ist $\#(G_1 / \ker(f))$ entweder 1 oder $\#G_1$.
Wenn $\#(G_1 / \ker(f)) = 1$, dann ist f der triviale Gruppenhomomorphismus.
Zu zeigen: Wenn $\#(G_1 / \ker(f)) = \#G_1$, dann ist f injektiv:

Im Beweis oben haben wir bereits aus dem Homomorphiesatz hergeleitet, dass $\#(G_1 / \ker(f)) = \# \operatorname{im}(f)$. Wir haben also $\# \operatorname{im}(f) = \#G_1$.
Wir wissen, dass auf endlichen Mengen gleicher Mächtigkeit Surjektivität und Injektivität equivalent sind. Da $f|_{\operatorname{im}(f)} : G_1 \to \operatorname{im}(f)$ surjektiv ist, und $\#G_1 = \# \operatorname{im}(f)$ wissen wir, dass $f|_{\operatorname{im}(f)}$ injektiv ist. Da wir $f_{\operatorname{im}(f)}$ nur auf das eigene Bild beschränkt haben, folgt, dass f injektiv ist. ∎