12.2

a) $U := \langle \mathbb{N} \rangle$ $\quad 0 \cdot \mathbb{N} = \emptyset \quad \mathbb{N} \Delta \mathbb{N} = \emptyset \quad \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$1 \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \Delta \emptyset = \emptyset \quad \Rightarrow U = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow V/U = \{[v] = v \Delta U \mid v \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})\}$

$= \{[v] = \{v \Delta \emptyset, v \Delta \mathbb{N}\} \mid v \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})\}$

$= \{[v] = \{v, v \Delta \mathbb{N}\} \mid v \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})\}$

b)

(i) Ja: $\forall [v] \in V/U: \quad [v] = [\sum_{i \in I} a_i v_i] = \sum_{i \in I} [a_i v_i] = \sum_{i \in I} a_i [v_i]$

(ii) Falsch $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^3 = \{0\}$ Somit ist $v_1 = 0$ mit $\langle [v_1] \rangle = \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^3$ eine erzeugenden familie von $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}^3$. Um den gesamten $\mathbb{R}^3$ zu erzeugen benötigt man allerdings mindestens 3 Vektoren, weshalb v_1 kein erzeugendensystem seien kann.