## Aufgabe 1

## Aufgabe 2

**(a)**

(i)

Das neutrale Element der Addition ist 0

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{1\}$$

Da $f$ surjektiv ist gilt:

$$\operatorname{Bild}(f) = \mathbb{R}$$

(ii)

Das neutrale element der Addition ist 0

$$\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\operatorname{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x) = 3x + 1 \land x \in \mathbb{Q}\} = \left\{y \mid \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Q}\right\}$$

(iii)

Das neutrale Element von $(\{\top, \bot\}, \mathrm{XOR})$ ist $\bot$

$$\forall x \in \mathbb{Z}_2 : (x > 0) \Leftrightarrow \bot \text{ falls } \ x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0\}$$

$$f(0) = \bot; f(1) = \top \Rightarrow \text{f ist surjektiv} \Rightarrow \operatorname{Bild}(f) = \{\top, \bot\}$$

(iv) Das neutrale Element von $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \Delta)$ ist $\emptyset$(Auf vorherigen Zetteln gezeigt)

ges:

$$f(\sigma) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow [0, -\operatorname{sgn}(\sigma)] = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{\sigma \in S_3 | \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} = A_3$$

$\operatorname{sgn}(\sigma)$ ist entweder 1 oder $-1$

$$\Rightarrow \operatorname{Bild}(f) = \{\emptyset, [0, 1]\}$$

# Aufgabe 6.3

a)

$$\mathbb{Z}/\mathbb{R} = \{[a] = a + \mathbb{Z} |\ a \in \mathbb{R}\}$$

$$[a] \tilde{+} [c] = [a + c]$$

$$\Rightarrow \text{neutrales Element } e = [0]$$

Gesucht ist $b \in \mathbb{R}$, sodass:

$$n[b] = [0]; n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow b + ... + b = nb = 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow$ Das einzige Element mit endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist $[0]$.

b)

**Lemma 0.1**:

Sei $(G \star)$ eine Gruppe und $E \subseteq G$ mit $\langle E \rangle = G$ und $(N, \star)$ untergruppe von $G$.

Dann gilt: $N$ ist genau dann normalteiler von $(G, \star)$, wenn $a \star N = N \star a$ für alle $a \in E$ gilt.

*Proof*:

$$\forall a_n \in E : N = a_n' \star N \star a_n (\Leftrightarrow a_n \star N = N \star a_n)$$

Da $E$ ein Erzeugendensystem von $G$ ist, gilt auch:

$$\forall b \in G : b = a_1 \star ... \star a_n$$

$$b' = a_n' \star ... \star a_1'$$

$$\Rightarrow b' \star N \star b = \underbrace{a_n' \star \underbrace{... \star \underbrace{a_1' \star N \star a_1}_{N} \star ...}_{N} \star a_n}_{N} = N$$

■

c)

geg:

$$(G, \star) \text{ ist eine Gruppe}$$

$$(N_1, \star), (N_2, \star) \text{ sind Untergruppen von } G$$

$$N_1 \subseteq N_2$$

**Lemma 0.2**:

$$(G/N_2, \tilde{\star}) \text{ ist Untergruppe von } \ (G/N_1, \tilde{\star})$$

*Proof*:

Da $N_1 \subseteq N_2$ gilt:

$$N_1 = N_2 \vee \exists n \in N_2 : n \notin N_1$$

Falls $N_1 = N_2$ dann ist auch $(G/N_2, \tilde{\star}) = (G/N_1, \tilde{\star})$

Falls $\exists n \in N_2 : n \notin N_1$ gilt:

$$\forall a \in G : a \star n \in a \star N_2 \wedge a \star n \notin a \star N_1$$

$$\Rightarrow a \star N_2 \neq a \star N_1$$

$$\Rightarrow (G/N_2, \tilde{\star}) \text{ ist nicht Untergruppe von } \ (G/N_1, \tilde{\star})$$

■

d)

$$(G, \star) \ \text{ Gruppe}, \qquad (N, \star) \ \text{ Normalteiler}, \qquad a \star N = N \star a$$

**Lemma 0.3**: $G/N$ ist abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$.

Es gilt für alle $a \in G$:

$$a \star N = N \star a.$$

$$G/N = \{ a \star N \mid a \in G \}, \qquad [a] \,\hat{\star}\, [b] = [a \star b] = (a \star b) \star N.$$

*Proof*:

Zu zeigen:

$$[a] \,\tilde{\star}\, [b] = [b] \,\tilde{\star}\, [a] \quad \Leftrightarrow \quad K(G) \subseteq N.$$

$$[a] \,\tilde{\star}\, [b] = [b] \,\tilde{\star}\, [a]$$

$$\Leftrightarrow \quad [a \star b] = [b \star a]$$

$$\Leftrightarrow \quad (a \star b) \star N = (b \star a) \star N$$

$$\Leftrightarrow \quad N \star (a \star b) = N \star (b \star a).$$

$$\Leftrightarrow \{ c \star a \star b \mid c \in N \} = \{ d \star b \star a \mid d \in N \}$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : c \star a \star b = d \star b \star a$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : c \star a \star b \star (b \star a)' = d.$$

Da $c' \in N$:

$$\Leftrightarrow \forall c \in N \exists d \in N : a \star b \star a' \star b' = \underbrace{c' \star d}_{\in N}.$$

$$\Leftrightarrow \quad a \star b \star a' \star b' \in N \quad \Leftrightarrow \quad K(G) \subseteq N.$$

■

## Aufgabe 3

## Aufgabe 4

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen. ($G_1$ ist endlich).

**Lemma 0.4**: Ist auch $G_2$ endlich und $\#G_1$ und $\#G_2$ sind teilerfremd, dann existiert zwischen $G_1$ und $G_2$ nur der triviale Gruppenhomomorphismus.

*Proof*: Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus von $G_1$ nach $G_2$. Da $G_1$ endlich ist, gilt $\#G_1/\ker(f) \mid \#G_1$. Dann gilt nach dem Homomorphiesatz:

$$G_1/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) \Rightarrow \#(G_1/\ker(f)) = \#\,\mathrm{im}(f)$$

In die vorherige Gleichung eingesetzt ergibt das $\#\,\mathrm{im}(f)/\#G_1$.
Da $f$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $\mathrm{im}(f)$ eine Untergruppe von $G_2$.Nach dem Satz von Lagrange gilt also $\#\,\mathrm{im}(f) \mid \#g_2$.
Da wir angenommen haben, dass $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd sind, muss gelten $\#\,\mathrm{im}(f) = 1$.
D.h. $f$ kann nur der triviale Gruppenhomomorphismus $f : x \mapsto e_2$ sein. ∎

**Lemma 0.5**: Ist $\#G_1$ eine Primzahl, dann ist jeder Gruppenhomomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ trivial oder injektiv.

*Proof*: Sei $f : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus von $G_1$ nach $G_2$. Da $G_1$ endlich ist, gilt $\#(G_1/\ker(f)) \mid \#G_1$. Da $\#G_1$ eine Primzahl ist, ist $\#(G_1/\ker(f))$ entweder $1$ oder $\#G_1$.
Wenn $\#(G_1/\ker(f)) = 1$, dann ist $f$ der triviale Gruppenhomomorphismus.
Zu zeigen: Wenn $\#(G_1/\ker(f)) = \#G_1$, dann ist f injektiv:

Im Beweis oben haben wir bereits aus dem Homomorphiesatz hergeleitet, dass $\#(G_1/\ker(f)) = \#\,\mathrm{im}(f)$. Wir haben also $\#\,\mathrm{im}(f) = \#G_1$.
Wir wissen, dass auf endlichen Mengen gleicher Mächtigkeit Surjektivität und Injektivität equivalent sind. Da $f|_{\mathrm{im}(f)} : G_1 \to \mathrm{im}(f)$ surjektiv ist, und $\#G_1 = \#\,\mathrm{im}(f)$ wissen wir, dass $f|_{\mathrm{im}(f)}$ injektiv ist. Da wir $f_{\mathrm{im}(f)}$ nur auf das eigene Bild beschränkt haben, folgt, dass $f$ injektiv ist. ∎