R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg



# Übung I - 3

Ausgabedatum: 27. Oktober 2025
Abgabedatum: 3. November 2025

**Übungsaufgabe I-3.1.** (Äquivalenzrelationen)

(a) Gegeben sei die Menge der vorläufigen rationalen Zahlen $\widetilde{\mathbb{Q}} \coloneqq \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{5.17}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$ definiert.

(b) Es sei $X$ eine nichtleere Menge und $R, S$ Äquivalenzrelationen auf $X$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $S \circ R$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

**Übungsaufgabe I-3.2.** (Ordnungsrelationen)

(a) Zeigen Sie, dass die homogene Relation

$$R \coloneqq \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \forall i = 1, 2\ (x_i \leqslant y_i)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

auf $\mathbb{R}^2$ eine Halbordnung aber keine Totalordnung ist. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \land x_1 \leqslant 0 \land x_2 \leqslant 0\}$ bzgl. $R$ und erklären Sie, ob es sich dabei um ein Minimum respektive ein Maximum handelt.

(b) Es sei $\preccurlyeq$ eine Halbordnung auf einer Menge $X$. Zeigen Sie Lemma 5.30 des Skripts, also dass auch die inverse Relation $\succcurlyeq$ eine Halbordnung auf $X$ ist, und dass, falls $\preccurlyeq$ eine Totalordnung ist, dann auch $\succcurlyeq$ eine Totalordnung ist.

**Übungsaufgabe I-3.3.** (Bilder und Urbilder)

(a) Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen und $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (ii) $B \supseteq g(g^{-1}(B))$

(b) Es sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Weiter seien $I$ und $J$ irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von $X$ sowie $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von $Y$. Zeigen Sie, dass dann Gleichungen (6.5b) und (6.5d) aus Satz 6.8 des Skripts gelten, also:

$$\text{(6.5b)} \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i) \qquad\qquad \text{(6.5d)} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

**Übungsaufgabe I-3.4.** (Injektivität und Surjektivität)

(a) Gegeben sei die Menge $S$ der Studierenden eines Kurses und die Menge $P$ der Plätze im Hörsaal. Was können Sie über die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Abbildung $f: S \longrightarrow P$ von Studierenden auf ihre Plätze in den folgenden Fällen aussagen?

($i$) Es sind noch Plätze frei und jede/r hat einen eigenen Platz.

($ii$) Jemand sitzt auf dem Schoß eines anderen, obwohl noch Plätze frei sind.

($iii$) Jeder Platz ist belegt.

(b) Es sei $f: X \longrightarrow Y$ eine injektive Funktion. Zeigen Sie Lemma 6.12 des Skripts, also dass $f|^{f(X)}$ bijektiv ist.

**Hausaufgabe I-3.1** (Äquivalenzrelationen) 1 + 4 = 5 Punkte

(a) Gegeben sei die Relation

$$R \coloneqq \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei $R$ um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Es sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine Partition von $X$. Zeigen Sie Satz 5.25($ii$) des Skripts, also dass es dann eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $R$ auf $X$ gibt, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den Äquivalenzklassen von $R$ besteht.

**Hausaufgabe I-3.2** (Ordnungsrelationen) 4 + 4 = 8 Punkte

(a) Gegeben seien die Menge $A \coloneqq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ aus Übungsaufgabe I-3.2 und die Ordnungsrelation

$$R \coloneqq \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1) \wedge (x_2 \leqslant y_2)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

($i$) Bestimmen Sie Infimum/Supremum, Minimum/Maximum und minimale/maximale Elemente von $A$ bzgl. $R$.

($ii$) Erklären Sie, was mit dem Supremum aus Teilaufgabe ($i$) passiert, wenn statt $A$ die Menge $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ betrachtet wird.

(b) Es sei $X$ eine Menge. Zeigen Sie Lemma 5.32 des Skripts, also die folgenden Aussagen.

($i$) Ist $\preccurlyeq$ eine Ordnungsrelation auf $X$, dann ist $\prec \coloneqq \preccurlyeq \setminus \Delta_X$ eine strenge Ordnungsrelation auf $X$.

($ii$) Ist $\prec$ eine strenge Ordnungsrelation auf $X$, dann ist $\preccurlyeq \coloneqq \prec \cup \Delta_X$ eine Ordnungsrelation auf $X$.

**Hausaufgabe I-3.3** (Funktionen) 4.5 + 2 + 1.5 = 8 Punkte

(a) Es seien $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ (ii) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(b) Gegeben seien Mengen $X$ und $Y$ und eine Relation $R \subseteq X \times Y$. Wir erweitern die Definition des Bilds und Urbilds von Funktionen auf allgemeine Relationen via

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\mathrm{Rel}}(R, A) &\coloneqq \{b \in Y \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\} \\ \mathrm{UB}_{\mathrm{Rel}}(R, B) &\coloneqq \{a \in X \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\} \end{aligned}$$

für alle $A \subset X$ und $B \subset Y$. Untersuchen Sie, ob mit diesen Definitionen für Bild und Urbild analoge Aussagen zu Gleichungen (6.5b) und (6.5d) aus Satz 6.8 des Skripts auch für allgemeine Relationen gelten.

(c) Es seien eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ und eine Äquivalenzrelation $\sim_Y$ auf $Y$ gegeben. Zeigen Sie, dass durch $x_1 \sim_X x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) \sim_Y f(x_2)$ eine Äquivalenzrelation $\sim_X$ auf $X$ definiert ist.

**Hausaufgabe I-3.4** (Injektivität und Surjektivität) 3 Punkte

Gegeben sei die Menge $W$ aller Waschmaschinen in einem Waschsalon und die Menge $K$ der Kunden im Waschsalon. Weiterhin sei die Relation

$$R := \{(w, k) \in W \times K \mid w \text{ wäscht Wäsche von } k\}$$

gegeben. Beschreiben Sie umgangssprachlich folgende Aussagen:

(a) $R = W \times K$

(b) $R = W \times \emptyset$

(c) Die Relation $R$ ist eine Abbildung.

Für die folgenden Aussagen sei nun bekannt, dass $R$ eine Abbildung ist.

(d) Die Abbildung $R$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

(e) Die Abbildung $R$ ist injektiv.

(f) Die Abbildung $R$ ist bijektiv.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen der Hausaufgaben als ein PDF auf Mampf ein.