LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Aufgabe 4

Lemma 0.1: Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Es gilt:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} =: M$$

Proof:

1. $\langle \mathrm{E} \rangle \subseteq M$: Trivial mit $n = 1$ und $\alpha_1 = 1$
2. Zu zeigen

$$M \subseteq \langle \mathrm{E} \rangle$$

: Gilt genau dann, wenn:

$$\left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} \subseteq \left\{ \sum_{\{i=1\}}^{n} a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [\![1, ..., n]\!](v_i \in E, \alpha_i \in K) \right\}$$

Zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K, \exists n' \in \mathbb{N}_0, \exists v_{i'} \in E, \exists \alpha_{i'} \in K, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_{j'} v_{j'}$$

Wir wissen, dass alle $v_i \in \langle E \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden können:

$$\exists n_i \in \mathbb{N}_0, \exists \alpha_{ik} \in K, \exists v_{ik} \in E, \sum_{k=0}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} = v_i$$

Wir können also schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) \quad \text{mit} \quad v_{ik} \in E$$

Um die zwei Summen in eine Zusammenzufassen schreiben wir: $n' = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Um die Indizierung von α_{ik} zu vereinfachen führen wir $j_{ik} = \sum_{x=1}^{i-1} n_i + k$ ein. Damit definieren wir $\alpha_{j_{ij}} = \alpha_i \cdot \alpha_{ik}$ und $v_{j_{ik}} = v_{ik}$ Insgesamt gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j v_j$$

Damit ist die zweite Inklusion bewiesen, da so jede Linearkombination von Elementen aus $\langle \mathrm{E} \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden kann. ■

Lemma 0.2:

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \bigcup \{ \langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ ist endlich} \}$$

Proof: "$\supseteq$": Gilt, da $\langle E_0 \rangle \subseteq \langle E \rangle$ für alle $E_0 \subseteq E$.
"$\subseteq$": Gilt, da $\langle E \rangle$ nur endliche Linearkombinationen erzeugt. Für alle $e \in \langle E \rangle$ gibt es also ein n, sodass $e = \sum_i^n \alpha_i x_i$ mit $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\} \subseteq E$. Da $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$ endlich ist, gibt es ein endliches $E_0 \subseteq E$ mit $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\} \subseteq E_0$. Somit gibt es für jedes $e \in \langle E \rangle$ ein $E_0 \subseteq E$, sodass $e \in \langle E_0 \rangle$. ■

b)

i)

$$\langle (1,2) \rangle \text{ in } \ \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \text{ über } \mathbb{Q}$$

$$\langle (1,2) \rangle = \{(q, 2q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

ii)

$$\langle \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \rangle \text{ in } (\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \Delta, \odot)) \text{ über } (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$$

$$\langle \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} \rangle = \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \emptyset\}$$

Aufgabe 5

a)

i)

Die Menge $E = \left\{(1,2,3), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right), (1,1,1)\right\}$ in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{Q}$ ist linear unabhängig, da gelten muss:

$$1 \cdot q_1 + \sqrt{2} \cdot q_2 + 1 \cdot q_3 = 0$$

Da $\sqrt{2} \cdot q$ für alle q irrational ist, muss gelten: $q_3 = -q_1$ und $q_2 = 0$. Mit der Gleichung für die zweite komponente folgt allerdings:

$$2 \cdot q_1 - 1 \cdot q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_3 = q_1 = 0$$

Damit ist E linear unabhängig.

II)

Die Menge $E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $\left(K^X, +, \cdot\right)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist linear unabhängig, wenn X nicht endlich ist.

1. Wenn X endlich ist, gibt es endlich viele Charakteristische Funktionen e_x und es gilt $\sum_x e_x = 1$. Damit lösst sich 1 als endliche linearkombination der Vektoren e_x darstellen und E ist nicht linear unabhängig.
2. Wenn X allerdings endlich ist, ist $\sum_x e_x = 1$ eine undendlich linearkombination. Da die Menge der charakteristischen Funktionen trivialerweise linear unabhängig ist, ist E somit auch linear unabhängig.

iii)

Die Menge $E = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ über $(Z_2, +_2, \cdot_2)$ ist linear unabhängig, wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist:

1. Wenn $\mathcal{P}(X)$ endlich ist, kann die Menge $X \setminus \{y\}$ ($y \in X$ beliebig) als linearkombination von $\{E \setminus (X \setminus \{y\})\}$ dargestellt werden, da:

   $$(*) \quad (X \setminus \{a\}) \Delta (X \setminus \{b\}) = (((X \setminus \{a\}) \setminus (X \setminus \{b\})) \cup ((X \setminus \{b\}) \setminus (X \setminus \{a\}))) = \{a, b\}$$

   Damit gilt:

$$\sum_{X \setminus \{x\} \in E \setminus (X \setminus \{y\})} X \setminus \{x\} = \bigcup \{x \mid X \setminus \{y\}\} = X \setminus \{y\}$$

E ist also nicht linear unabhängig.

2. Wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist, ist E linear unabhängig, da jede endliche (!!) linearkombination aus Elementen von E eine Menge von endlicher Mächtigkeit erzeugt (siehe $(*)$). Jedes Element von E ist aber nicht endlich (da $X \setminus \{x\}$ nicht endlich ist, wenn X nicht endlich ist) und kann daher nicht als endliche linearkombination von Elementen von E dargestellt werden.

b)

Lemma 0.3: In einer Linear unabhängigen Familie kann kein Elmement doppelt vorkommen.

Proof: Sei $f : I \to V$ eine Familie mit $f_i = f_j$. Dann gilt $1 \cdot f_i - 1 \cdot f_j = 0$. Die Implikation

$$\sum_i a_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i, a_i = 0$$

kann also nichtmehr gelten, womit f nicht linear unabhängig sein kann. ■

c)

Lemma 0.4: V ist ein K Vektorraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$ der als linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden kann.

Proof: "$\Rightarrow$": Wenn E nicht linearabhängig ist gilt: $\exists a_w, \sum_{w \in E} a_w w = 0$ mit $a_w \neq 0$ für mindestens einen Vektor $w \in E$. Sei v ein solcher Vektor mit $a_v \neq 0$.

$$\sum_{w \in E} a_w w = 0$$
$$\sum_{w \in E} a_w w - a_v v = -a_v v$$
$$\sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w = -a_v v$$
$$\sum_{w \in E \setminus \{v\}} (a_w \cdot (-a_v^{-1})) w = v$$

v kann also als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden.

"$\Leftarrow$": Es gilt: $v = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w$ für ein bestimmtes v und eine bestimmte Menge a_w. Nun kann die selbe Rechnung von oben rückwärts durchgeführt werden:

$$v = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w$$
$$0 = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w - v$$
$$0 = \sum_{w \in E} a_w \quad \text{mit} \quad a_v = -1$$

Damit gilt die Implikation $\sum_{w \in E} a_w w = 0 \Rightarrow \forall w, a_w = 0$ nicht, da $a_v = -1$. E ist also linear abhängig.

$\blacksquare$