Zettel 3

Bearbeitet von:
Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler(Tutorium:Gregor Teupke(Mi 16:15))

Aufgabe 1

a)

$\{(0,0),(1,0)\} \in R$

$\{(1,0),(2,0)\} \in R$

$\{(0,0),(2,0)\} \notin R$

$\Rightarrow$ nicht transitiv

b)

$R := \{(a,b) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land b \in A\}$

Lemma 0.1: R ist eine Äqvivalenzrelation.

Proof: Reflexivität:

da $\mathbb{A}$ eine Partition von X ist, gilt für jedes $a \in X : \exists A \in \mathcal{A}, a \in A$, darum ist $(a,a) \in \{(a,a) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A}, a \in A \land a \in A\} \subset R$

Symmetrie: $R = \{(a,b) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land b \in A\}$

$$R = \{(b,a) \in X \times X | \ \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land b \in A\}$$

d. h. für alle $a, b \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} (a,b) \in R &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{A} : a \in A \land b \in A \\ &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \land a \in A \\ &\Leftrightarrow (b,a) \in R \end{aligned}$$

Transitivität: Für alle $a, b, c \in X$ gilt:

$$(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land b \in A) \land (\exists B \in \mathcal{A} : b \in B \land c \in B)$$

$$\begin{aligned} \text{Da A eine Partition von X ist, gilt: } & \exists! A \in \mathcal{A}, b \in A \quad \text{d.h.} \quad A = B \\ &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land b \in A \land c \in A \\ &\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \land c \in A \\ &\Leftrightarrow (a,c) \in R \end{aligned}$$

■

z.z

$$X/R = \mathcal{A}$$

Proof:

$$\mathcal{A} \subset X/R:$$

$$\text{Da eine Partiotion nie } \emptyset \text{ enthält: } \forall A \in \mathcal{A} \exists a \in A$$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x |\ \exists B \in \mathcal{A} : a \in B \land x \in B\}$$

Da $\mathcal{A}$ eine Partition ist, gilt $\forall B \in \mathcal{A} : a \in B \Rightarrow A = B$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x |\ a \in A \land x \in A\}$$

$$\Rightarrow [a]_R = A$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : \exists [a] = A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \subset X/R$$

$$X/R \subset \mathcal{A}:$$

$$[a] := \{b \mid \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \land a \in A\}$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R : \exists A \in \mathcal{A} : a \in A$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } a \in A:$$

$$[a] = \{b | b \in A \land a\}$$

$$\Rightarrow [a] = A$$

$$\Rightarrow X/R \subset \mathbb{A}$$

■

Aufgabe 2

a)

(i)

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \land x_1 \leq 0 \land x_2 \leq 0\}$ $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$

Maxiumum bestimmen

Vermutung: Das Maximum ist $(0, 0)$

Proof:

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A : ((x_1, x_2), (0, 0)) \in R$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in A : (x_1 < 0) \lor (x_1 = 0) \land (x_2 \leq 0)$$

da $(x_1, x_2) \in A$ ist $x_1 \leq 0 \land x_2 \leq 0$

$$\Rightarrow (0, 0) \text{ ist das Maximum und Supremum und maximales Element von } A$$

■

Miniaimale Elemente bestimmen
Vermutung: $(x_1, x_2) : x_1 + x_2) = 1$ sind die minimalen Elemente von A

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 = 1 : \forall (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2) \notin R)$$

Proof:

Annahme:

$$\exists (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \in R$$

$$\Rightarrow y_1 \leq x_1 \land y_2 \leq x_2$$

Da $x_1, X_2, x_3, x_4 \leq 0$ gilt:

$$\Rightarrow y_1^2 \geq x_1^2 \land y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \land y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \land y_2^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$y_1^2 + y_2^2 \Rightarrow 1 \underbrace{- x_2^2 + y_2^2}_{>0}$$

$$y_1^2 + y_2^2 \geq 1$$

$$(y_1, y_2) \notin A$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch}$$

■

minimale Elemente sind also $\{x_1, x_2 | (x_1, x_2) \in A \land (x_1^2 + x_2^2) = 1\}$ Es gibt kein Infimum, da es keine Vergleichbarkeit zwischen den minimalen Elementen gibt.

(ii)
Das Supremum kann nicht mehr eindeutig bestimmt weden, da $\exists y \in \mathbb{R} : \forall (0, x) \in A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})((0, x) < (0, y))$

b)
$\preccurlyeq$ ist eine Ordnungsrelation $\Rightarrow \preccurlyeq$ ist reflexiv, antisymetrisch und transitiv.

$$\prec := \preccurlyeq \setminus \Delta x$$

z.z $\prec$ ist irreflexiv, transitiv und antisymetrisch.

Proof:

$$\prec = \{(a,b) \in X \times X |\ (a,b \in \preccurlyeq \wedge\, a \neq b)\}$$

irreflexiv:

Annahme $\prec$ ist nicht irreflexiv. Dann:

$$\exists a \in X : (a,a) \in \prec$$

$\Rightarrow (a,a) \in \preccurlyeq \wedge\, a \neq a \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow \prec$ ist irreflexiv.

antisymetrisch:

Annahme: $\prec$ ist nicht antisymetrisch. Dann:

$$\exists a,b \in X : (a,b) \in \prec \wedge (b,a) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a,b) \in \preccurlyeq \wedge (b,a) \in \preccurlyeq$$

Da $\preccurlyeq$ antisymetrisch ist, folgt:

$$a = b$$

$\Rightarrow$ Widerspruch den $\prec$ ist irreflexiv $\Rightarrow \prec$ ist antisymetrisch.

transitiv:

$$(a,b) \in \prec \wedge (b,c) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a,b) \in \preccurlyeq \wedge (b,c) \in \preccurlyeq \wedge\, a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$$

($a \neq c$ gilt da $\prec$ irreflexiv)

$$\Rightarrow (a,c) \in \preccurlyeq \wedge\, a \neq c$$

$\Rightarrow (a,c) \in \prec \Rightarrow$ transitiv

■

(ii)

$\prec$ ist transitiv, irreflexiv und antisymetrisch

$$\preccurlyeq := \prec \cup\, \Delta x = \{(a,b) \in X \times X |\ (a,b) \in \preccurlyeq \vee (a,b) \in \Delta x\}$$

z.z

$$\preccurlyeq$$

ist reflexiv, antisymetrisch und transitiv.

Proof:

reflexiv:

$$\forall a \in X : (a,a) \in \preccurlyeq$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in X : (a,a) \in \prec \vee \underbrace{(a,a) \in \Delta x}_{\top}$$

$$\Rightarrow \preccurlyeq \text{ ist reflexiv.}$$

antisymetrisch: Annahme: $\preccurlyeq$ ist nicht antisymetrisch. Dann:

$$\exists a, b \in X : (a,b) \in \preccurlyeq \wedge (b,a) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a,b) \in \prec \wedge (b,a) \in \prec}_{\perp \text{ da } \prec \text{ antisym.}} \vee \underbrace{(a,b) \in \Delta x \wedge (b,a) \in \Delta x}_{\perp \text{da } a \neq b}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow \preccurlyeq$ ist antisymmetrisch.

transitiv:

Seien $(a,b) \in \preccurlyeq$ und $(b,c) \in \preccurlyeq$.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Liegt $(a,b) \in \Delta x$, so ist $a = b$ und damit $(a,c) = (b,c) \in \preccurlyeq$.

Liegt $(b,c) \in \Delta x$, so ist $b = c$ und damit $(a,c) = (a,b) \in \preccurlyeq$.

Liegen $(a,b) \in \prec$ und $(b,c) \in \prec$, so folgt a $\prec$ transitiv: $(a,c) \in \prec \subseteq \preccurlyeq$.

In allen Fällen gilt $(a,c) \in \preccurlyeq \Rightarrow$ transitiv.

■

Anmerkung: Die Transitivität folgt auch, da $\prec \cup \Delta x$ die reflexive Hülle von $\prec$ bildet, und transitiv bei der Hüllenbildung erhalten bleibt.

3.3)

Lemma 0.2: Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$ $B_1, B_2 \subseteq Y$ Mengen:

$$(i) \quad f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$$

$$(ii) \quad f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

Proof: zu i: Für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \setminus f(A_2) &\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \setminus \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = Y\} \\ &\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \land y \notin \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = y\} \\ &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \land \nexists a_2 \in A_2, f(a_2) = y \\ &\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \land \forall a_2 \in A_2, f(a_2) \neq y \\ &\Rightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \land a_1 \notin A_2 \\ &\Rightarrow \exists a_1 \in A_1 \setminus A_2, f(a_1) = y \quad \text{wichtig: hier gilt Äquivalenz im Allgemeinen nicht} \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2). \end{aligned}$$

Aus $y \in f(A_1) \setminus f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$ folgt $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$. □

Zu (ii): für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2\} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \land f(x) \notin B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1\} \land x \notin \{x \in X \mid f(x) \in B_2\} \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

Aus der logischen Äquivalenz folgt die Gleichheit (ii). ■

Lemma 0.3: 6.5b) Seien $(X_i)_{i \in I}$ I indizierte teilmengen von X und eine Relation $R \subseteq X \times Y$. Es gilt:

$$B_r\left(R, \bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)}$$

Proof: Für alle $y \in Y$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in B_r\left(R, \bigcap_{i \in I} X_i\right) &\Leftrightarrow \exists a \in \bigcap_{i \in I} X_i, (a, y) \in R \\ &\Leftrightarrow \exists a \in X, \forall i \in I, a \in X_i, (a, y) \in R \\ &\Rightarrow \forall i \in I, \exists a \in X_i, (a, y) \in R \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} \{b \in Y \mid \exists a \in X_i, (a, b) \in R\} \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)} \end{aligned}$$

■

Lemma 0.4:

6.5d) Seien $(Y_i)_{i \in I}$ I indizierte Teilmengen von Y mit der Relation $R \subseteq X \times Y$. Aussage 6.5d) aus dem Skript gilt im Allegemeinen Fall nicht zwingend.

Proof: **Gegenbeispiel** zur Verallgemeinerung von 6.5d): Sei $X = \{a_1, a_1\}$, $Y = \{b_1, b_2\}$ und $R = X \times Y$ Sei $Y_1 = \{a_1\}$ und $Y_2 = \{a_2\}$. Das heißt:

$$U_{r\left(R, \bigcap_{i \in I} Y_i\right)} = \emptyset$$

Es gilt allerdings auch:

$$\bigcap_{i \in I} U_{r(R, Y_i)} = X$$

Aus diesem Wiederspruch folgt, dass die obige Aussage im allgemeinen nicht gilt. Die schwächere Version mit $\subseteq$ statt $=$ würde allerdings gelten. ∎

c)

Lemma 0.5: Zurückziehen einer Äquivalenzrelation entlang einer Funktion: Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\underset{Y}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf Y.

$$x_1 \underset{X}{\sim} x_2 := f(x_1) \underset{Y}{\sim} f(x_2)$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf X.

Proof: **Reflexivität**
Für alle $x \in X$ gilt: $x \underset{X}{\sim} x$, da $f(x) \underset{Y}{\sim} f(x)$, was aus den eigenschaften der Äquivelnzrelation $\underset{Y}{\sim}$ folgt.
Symmetrie
Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $x_1 \underset{X}{\sim} x_2 \Rightarrow x_2 \underset{X}{\sim} x_1$, da $f(x_1) \underset{Y}{\sim} f(x_2) \Rightarrow f(x_2) \underset{Y}{\sim} f(x_1)$. Das folgt wieder aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation $\underset{Y}{\sim}$.
Transitivität
Für alle $X_1, x_2, x_3 \in X$ gilt

$$x_1 \underset{X}{\sim} x_2 \wedge x_2 \underset{X}{\sim} x_3 \Rightarrow x_1 \underset{X}{\sim} x_3$$

das ist Äuqivalent zu der Aussage: (aufgrund der Definition von $\underset{X}{\sim}$)

$$f(x_1) \underset{Y}{\sim} f(x_2) \wedge f(x_2) \underset{Y}{\sim} f(x_3) \Rightarrow f(x_1) \underset{Y}{\sim} f(x_3)$$

diese Aussage folgt ebenfalls aus der transitivät von $\underset{Y}{\sim}$ ∎

3.4

a) $R = W \times K$. Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von jedem Kunden.
b) $R = W \times \emptyset$. Alle Waschmaschinen waschen gerade nichts.
c) R ist eine Abbildung: Jede Waschamschine wäscht die Wäsche von einem Kunden.

d) R ist surjektiv aber nicht injektiv: Alle Kunden werden bedient, d.h. die Wäsche von jedem Kunden wird von mindestens einer Waschamschine gewaschen. (Und es gibt mindestens einen Kunden, dessen Wäsche von mindetens zwei Maschinen gewaschen wird)
e) R ist injektiv: Die Wäsche von jedem Kunden wird von höchstens einer Waschmaschine gewaschen.
f) R ist bijektiv: Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von genau einem Kunden.