Zettel 8 Aufgabe 3 Abgabe

Samstag, 6. Dezember 2025 14:45

8.3

a) (i) $\{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$X \neq \emptyset$

Sei $U \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

Wir nutzen das Unterraum-Kriterium

$X \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$

$0 \odot U = \emptyset \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$ Kein Unterraum

(ii) $\mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$ für $B \subseteq X$

Falls $B = \emptyset$ siehe (i) $\Rightarrow$ Kein Unterraum

Falls $\# X = 1, B \neq \emptyset \Rightarrow B = X \Rightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{B\} = \{\emptyset\}$: $0 \cdot \emptyset = \emptyset$; $1 \cdot \emptyset = \emptyset$; $\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Es ergibt sich der Nullraum

Falls $\# B \geq 2$, dann existiert eine echte Teilmenge $A \subset B \Rightarrow A \in X \wedge B \setminus A \subset X$

$\Rightarrow A \Delta B \setminus A = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\} \Rightarrow$ Unterraum-Kriterium nicht erfüllt

Falls $\# B = 1 \wedge \# X \geq 2$:

$\Rightarrow \exists A \subseteq X$ mit $\# A > 1$, $B \subset A$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$

$\Rightarrow (A \setminus B) \Delta A = B \notin \mathcal{P}(X) \setminus \{B\}$

$\Rightarrow$ Nur für $\# X = 1 \wedge B = X$ handelt es sich um einen Unterraum

(iii) $\{\emptyset, X \setminus B\}$ $B \subseteq X$

$\{\emptyset, X \setminus B\} \ni \emptyset \Rightarrow \{\emptyset, X \setminus B\} \neq \emptyset$

$X \setminus B \,\Delta\, X \setminus B = \emptyset$

$X \setminus B \,\Delta\, \emptyset = \emptyset \,\Delta\, X \setminus B = X \setminus B$

$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\forall U \in \{\emptyset, X \setminus B\}$: $1 \cdot U = U \in \{\emptyset, X \setminus B\}$
$0 \cdot U = \emptyset \in \{\emptyset, X \setminus B\}$

$\Rightarrow$ Unterraum kriterium erfüllt

(iv) $\{A \subseteq X \mid A \text{ und } X \text{ gleichmächtig}\} \cup \{\emptyset\}$

Falls X eine Endliche Menge ist gilt:

$\# A = \# X \wedge A \subseteq X$

$\Rightarrow A = X$

$A \Delta A = \emptyset$ $\quad$ $1 \cdot A = A$

$\emptyset \Delta A = A = A \Delta \emptyset$ $\quad$ $0 \cdot A = \emptyset$

$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow$ Unterraum-Kriterium erfüllt

Falls X eine unendliche Menge ist

$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Menge $Y \subset X$ mit $\#(X \setminus Y) = \# X$

$X \setminus Y \triangle X = Y$

$\# Y \neq \# X \Rightarrow Y \notin \{ A \subseteq X \mid A$ und X gleichmächtig $\} \cup \{\emptyset\}$

$\Rightarrow$ Kein Unterkörper für unendliche Mengen X

b) $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ ist Familie von Unterräumen für $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über den Körper $(K, +, \cdot)$

$\forall i \in I : (U_i, +, \cdot)$ ist Unterraum von $(V, +, \cdot)$

$\forall a, b \in \bigcap_{i \in I} U_i \Rightarrow \forall i \in I : a + b \in U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in U_i$

$\Rightarrow a + b \in \bigcap_{i \in I} U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Die 0_v ist Element jedes Unterraums, da $\forall i \in I \, \forall a \in U_i : 0_K \cdot a = 0_v \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Unterraumkriterium erfüllt

c) $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ beliebig, $(K^X, +, \cdot)$ ist K-Vektorraum

gegeben sind:

$U := \{ f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \}$

$W := \{ f \in K^X \mid f(x) = f(y) \; \forall x, y \in X \}$

(i) U und W sind Unterräume

$f_1 : X \ni x \to 0 \in K \Rightarrow f_1 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

$\forall f_1, f_2 \in U : \quad f_3 : X \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \in V$

$\Rightarrow f_3(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow f_3 \in U$

$\forall f_1 \in U : \quad \alpha \cdot f_1(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot f_1(x_0) \in U$

$\Rightarrow$ Unterraumkriterium erfüllt

W: $\forall f_1, f_2 \in W : \forall y, x \in X : \; f_1(x) + f_2(x) = f_1(y) + f_2(y)$

$\Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \in W$

$\forall \alpha : \quad \alpha \cdot f_1(x) = \alpha \cdot f_1(y) \in W$

$\Rightarrow$ Unterraum Kriterium erfüllt

(ii) $(U \cap W) = \{ f \in K^X \mid f(x) = f(y) \; \forall x, y \in X \wedge f(x_0) = 0 \}$

$\overset{x_0 \in X}{\Rightarrow} (U \cap W) = \{ f \in K^X \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X \} = \{0\}$