

1.

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Lin. Unabhängigkeit

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \alpha_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

 \Rightarrow linear unabhängig

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3$$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & -1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R2} - \text{R1}, \text{R3} - \text{R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_2 - \alpha_3 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R1} \leftrightarrow \text{R2}, \text{R3} + \text{R2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad \alpha_2 = \alpha_3 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \in \mathbb{R} \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \in \mathbb{R}$$

 $\Rightarrow ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1))$ ist eine Basis des $(\mathbb{R}_3)^+$

$$b) \text{ (i)} \quad \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \wedge \quad \sqrt{2} \alpha_2 + \alpha_3 = \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{3} + \alpha_3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

 \Rightarrow kein Erzeugendensystem(ii) Übung 8 $\Rightarrow X$ muss unendlich sein

$$E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{\emptyset\}$$

E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt!

$\hookleftarrow \cup \cup \times \dots$
 E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:
 $Y \subseteq X$ mit Y ist unendlich und Y^c ist unendlich

$$f: X \rightarrow K$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in Y \\ 1 & \text{falls } x \in Y^c \end{cases}$$

Falls E ein Erzeugendensystem ist, muss eine
linearkombination existieren, die f darstellt. Sei $T \subseteq X$ mit
 T endlich:

$$\forall x \in X : f(x) = \sum_{x \in T} \alpha_x e_x(x) + \alpha_{id} \cdot 1$$

Dass $\alpha_{id} = 1$ für unendlich viele $x \in X$, muss $\alpha_{id} = 1$
sein.
 $\Rightarrow f(x)$ kann nur für endlich viele $x \in X$ ungleich 1 sein
 \Rightarrow Widerspruch, da Y unendlich

(iii) Übung 8 $\Rightarrow \#X$ muss gerade sein, oder X unendlich

$$E := \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\} \quad \text{zu erzeugen } \beta(X)$$

Sei X endlich und $\#X$ gerade um $E_0 \subseteq X$ mit $\#E_0$ gerade:

$$\Delta_{x \in E_0} X \setminus \{x\} = E_0$$

Sei $E_1 \subseteq X$ mit $\#E_1$ ungerade und $\#E_1 \neq 0$

$$\Delta_{x \in E_1} X \setminus \{x\} = X \setminus E_1 \quad (\text{nach Lösung Übung 8})$$

\Rightarrow Wir können alle geraden Teilmengen von X
und die Komplemente aller ungeraden Teilmengen
von X als Linearkombi. darstellen

$\forall E_1 : \#(X \setminus E_1)$ ist ebenfalls ungerade

$\forall F \subseteq X$ mit $\#F$ ungerade: $F^c \cap X \wedge \#F^c$ ist ungerade
 $\Rightarrow \Delta_{x \in F} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$

$$\forall T \subset X \text{ mit } T \neq \emptyset \text{ und } T \text{ abgeschlossen} : T = \bigcap_{x \in T} \overline{\{x\}}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{x \in T^c} X \setminus \{x\} = X \setminus T^c = T$$

\Rightarrow Wir können alle Teilmengen als Linearkombination darstellen

Da Linearkombinationen endlich sein müssen, müssen T und E_0 endlich sein $\Rightarrow X \in P(X)$ kann nicht durch LK erzeugt werden, falls X unendlich

c)
(i) $\{ f \in \mathbb{R}^{[1,n]} \mid \sum_{i=1}^n f(i) = 0 \}$

Wir stellen die Funktionen wie folgt dar:

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad f(n) = a_n$$

$$a_1 = \sum_{k=2}^n a_k \text{ muss immer gelten}$$

Basis-Vorschlag:

$$\{e_n - e_1 \mid n \in [2, n]\}$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n] : \alpha_k = 0$$

Erzeugendensystem:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n -\alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n] : \alpha_k = -\alpha_k$$

(ii) $E = \langle \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}_2, +_{\mathbb{Z}_2})$ mit Δ als Addition

$\Rightarrow \forall B \in E : \#B \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ ist endlich
 $\forall A, B \in E$ mit $\#A = \#B + 1 \wedge B \subset A$.

$\Rightarrow \exists! a \in \mathbb{Z}$ mit $a \in A \wedge a \notin B$

$$\Rightarrow A \Delta B = \{\alpha\}$$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \exists A, B \in E : A \Delta B = \{\alpha\}$

zu zeigen: $\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von E

$\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset E$ (siehe oben)

$\stackrel{z.z}{\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}}$ ist linear unabhängig

und
 $\forall I$, d.h. eine endliche Menge $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ eine induktive Familie:

$$\Rightarrow \forall i, j \in I : v_i \cap v_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} v_i \neq \emptyset$$

Für jede Linearkombination

$$\bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i \quad \exists I \subset I_0 \text{ s.d. } \forall j \in I_0 \text{ mit } \alpha_j = 1 \text{ gilt } j \in I$$

Es gilt außerdem: $\forall A : A \Delta \emptyset = A$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \bigcup_{i \in I_0 \setminus I} \emptyset \cup \bigcup_{i \in I} v_i = \bigcup_{i \in I} v_i \neq \emptyset \text{ falls } I \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \emptyset \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_0$$

$\stackrel{z.z}{E} \subset \langle \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle$

$$\Leftrightarrow \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \subset \langle \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle =: D$$

Sei $B \in \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\}$

$$\Rightarrow \forall a \in B \Rightarrow \{\alpha\} \in D$$

$\Leftrightarrow B$ endlich $\Rightarrow I \cap \mathbb{N}$ endlich s.d. $I_i = \Delta_i = B$

$\Rightarrow \forall a \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists a \in \cup$

\mathcal{B} endlich $\Rightarrow \exists I_0 \subset \mathbb{N}$ endlich s.d. $\bigcup_{i \in I_0} = \bigcup_{i \in I_0} = \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{B} \in D$

$\Rightarrow \{\{a\} \mid a \in \mathcal{B}\}$ ist Basis von $\{A \in P(\mathcal{C}) \mid \#A = 1\}$

d)

(d) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $V = \times_{j=1}^n V_j$ der Produktraum der K -Vektorräume V_1, \dots, V_n . Zeigen Sie Lemma 13.10, also dass wenn B_j eine Basismenge von V_j für $j = 1, \dots, n$ ist, dann ist

$$B := \bigcup_{j=1}^n \{(0, \dots, 0, \underbrace{v}_{\text{Position } j \text{ im Tupel}}, 0, \dots, 0) \mid v \in B_j\}$$

eine Basismenge von V .

Eine Linearkombination von B mit $v_{ij} \in B_i, b \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} (0, \dots, 0, \underbrace{v_{ji}}_{i\text{-ter Index}}, 0, \dots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} = 0$$

Da $\forall i, j : v_{ji} \in B_i \Rightarrow \alpha_{ji} = 0$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig

$$\langle B \rangle = V$$

$$\langle B \rangle \subseteq V!$$

Wir nutzen wieder die Linearkombination von oben:

$$v := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} (0, \dots, 0, \underbrace{v_{ji}}_{i\text{-ter Index}}, 0, \dots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right)$$

$\forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} \in V_i$, da $v_{ji} \in B_i$

$$\Rightarrow v \in V$$

$V \subset \langle B \rangle : \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V :$

$\Rightarrow \forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n : \alpha_i \in V_i$

\Rightarrow Es existiert eine Linearkombination mit $v_{ji} \in B_i$ und

$$b \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} = \alpha_i$$

Es gilt: $\forall j : (0, \dots, 0, \underbrace{v_{ji}}_{i \neq j}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle$

$$\Rightarrow (0, \dots, 0, \overset{\text{Index}}{a_1}, 0, \dots, 0) \in \langle \beta \rangle$$

\uparrow for \rightarrow index

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \in \langle \beta \rangle \Rightarrow V = \langle \beta \rangle \quad \square$$