LA Zettel 4

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke(Mi 16:15))

Aufgabe 4.1

- (i): f ist injektiv
- (ii): $\exists g : Y \to X : g \circ f = \mathrm{id}_X$
- (iii) Für beliebige X_0 und beliebige $f_1, f_2 : X_0 \to X$ gilt: Aus $f \circ f_1 = f \circ f_2$ folgt $f_1 = f_2$

Lemma 0.1:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Proof:

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

Definiere $g : Y \to X$ wie folgt:

$$g := \{(y, x) \in Y \times X \mid f(x) = y\}$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(x_1, x_2) \in X \times X | \exists f(x) \in Y : (x_1, f(x)) \in f \land (f(x), x_2) \in g\}$$

mit

$$\text{(i)} : \forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(x, x) \in X \times X | \exists f(x) \in Y : (x, f(x)) \in f \land (f(x), x) \in g\} = \mathrm{id}_X$$

(ii)$\Rightarrow$(iii):

Es sein X_0 eine beliebige Menge und $f_1, f_2 : X_0 \to X$ beliebige Abbildungen.

$$\text{(ii)} : \exists g : Y \to X : g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ f_1 = f \circ f_2$$

$$\Rightarrow g \circ (f \circ f_1) = g \circ (f \circ f_2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(g \circ f)}_{\mathrm{id}_X} \circ f_1 = \underbrace{(g \circ f)}_{\mathrm{id}_X} \circ f_2$$

$$\Rightarrow f_1 = f_2$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$$\text{(iii)} : f \circ f_1 = f \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$$

$$\Leftrightarrow \forall x_0 \in X_0 : f(f_1(x_0)) = f(f_2(x_0)) \Rightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

Sei $x_1 = f_1(x_0)$ und $x_2 = f_2(x_0)$. Und da f_1 und f_2 frei wählbar sind, können sie auch surjektiv sein. Für surjektive f_1, f_2 folgt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Rightarrow (\textbf{(i)} \Rightarrow \textbf{(ii)} \Rightarrow \textbf{(iii)} \Rightarrow \textbf{(i)}) \Rightarrow (\textbf{(i)} \Leftrightarrow \textbf{(ii)} \Leftrightarrow \textbf{(iii)})$$

■

Aufgabe 2

Es seien X eine überabhählbare Menge und $Y \subseteq X$ eine abzählbar unendliche Menge.

Lemma 0.2: $X \setminus Y$ ist überabzählbar

Proof: Contraposition: Zu zeigen: Wenn $X \setminus Y$ nicht überabzählbar ist, dann ist X nicht überabzählbar.
Wir wissen $X = X \setminus Y \cup Y$. Wenn $X \setminus Y$ abzählbar ist (und Y laut annahme abzählbar ist), dann ist X als vereinigung von abzählbaren Mengen auch abzählbar, also nicht überabzählbar.
■

Lemma 0.3: Jede überabzählbare Menge X enthält eine abzählbar unendliche teilmenge.

Proof: Sei $f : \mathcal{P}(X \setminus Y) \to X$ eine Auswahlfunktion (Existenz folgt aus AOC). Definiere die Folge

$$x_0 := f(X)$$
$$x_n := f(X \setminus \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\})$$

Die Folge ist wohldefiniert, da $X \setminus A$ für jede abzählbare Menge A überabzählbar groß ist. Die Folgenglieder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine abzählbar unendliche Teilmenge von X, da sie sich nicht wiederholen. ■

Corollary 0.3.1: Die überabzählbare Menge $X \setminus Y$ enthält eine abzählbar unendliche Teilmenge.

Lemma 0.4: X und $X \setminus Y$ sind gleichmächtig.

Proof: Wir müssen eine Bijektion $f : X \to X \setminus Y$ angeben. Sei $A \subseteq X \setminus Y$ eine abzählbar unendliche Teilmenge von $X \setminus Y$, die nach Lemma Lemma 3 existiert. Da die Mengen Y und A abzählbar sind, können sie durch die bijektiven Funktionen: $Y_n : \mathbb{N} \to Y$ und $A_n : \mathbb{N} \to A$ beschrieben werden.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x \text{ falls } \ x \in X \setminus Y \setminus A \\ A_n \text{ falls } \exists n \in \mathbb{N} : A_{2n} = x \\ Y_n \text{ falls } \exists n \in \mathbb{N} : A_{2n+1} = x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ falls } x \in X \setminus Y \setminus A \\ A_{2n} \text{ falls } \exists n \in \mathbb{N} : A_n = x \\ A_{2n+1} \text{ falls } \exists n \in \mathbb{N} : Y_n = x \end{cases}$$

Auf $X \setminus Y \setminus A$ sind f und f^{-1} offensichtlich invers zueinander.

$$f^{-1}(f(A_n)) = f^{-1}(A_{2n}) = A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f^{-1}(f(Y_n)) = f^{-1}(A_{2n+1}) = Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(f^{-1}(A_{2n})) = f(A_n) = A_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(f^{-1}(A_{2n+1})) = f(Y_n) = A_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

f besitzt mit f^{-1} ein links- und rechtsinverses $\Rightarrow f : X \to X \setminus Y$ ist eine Bijektion, also sind X und $X \setminus Y$ gleichmöchtig. ■

Aufgabe 4.3

a) Es könnte ein Index $\in J_1 \cap J_2$ existieren. Demnach wäre der Index nach der Vereinigung von J_1 und J_2 nicht mehr einer der Ursprünglichen Familien zuzuordnen. Indem wir J_1 und J_2 durch das jeweilige Kartesische Produkt mit zwei Mengen $\{1\}, \{2\}$, generieren wir zwei disjunkte Indexmengen $J_1 \times \{1\}$ und $J_2 \times \{2\}$. So kann jedem Index immernoch eindeutig ein Element der Familie zugeordnet werden. So kann garantiert werden, das unsere Konkatenation/neue Familie alle Element der beiden Familien beinhaltet.

b)

Def:

$$\|_{i \in I} F_i : \dot{\bigcup}(\{i\} \times J_i) \to Y$$

$$\|_{i \in I} F_{i(i,j)} := F_i(j)$$

c) geg:

$$Y = N_0; I = \mathbb{R};$$

$$J_i = \{A \subseteq \mathbb{Z} | \max(A) \leq i\};$$

$$F_i : J_i \ni A \mapsto \#(A \cap \mathbb{R}_{>0})$$

$\Rightarrow$

$$\|_{i \in I} F_i(15.7, \{-10, 10\}) = \#(\{-10, 10\} \cap \mathbb{R}_{>0}) = \#(\{10\}) = 1$$

Aufgabe 4.4

(i)

$$(\mathbb{R}^X, +)$$

Da alle Fuktionswerte in $\mathbb{R}$ liegen gilt:

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}^X :$$

$$f_1(x) + f_2(x) = f_3(x) \in \mathbb{R}^X$$

Assoziativität: Da die Addition assoziativ ist gilt:

$$\forall f_n : X \ni x \mapsto r \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f_1(x) + (f_2(x) + f_3(x)) = (f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x)$$

neutrales Element:

$$f_0 : X \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$$

Proof:

$$\forall f_n \in \mathbb{R}^X, \forall x_0, x_n \in X :$$

$$f_0(x_0) + f_n(x_n) = 0 + f_n(x_n) = f_n(x_n)$$

■

$$\Rightarrow (\mathbb{R}^X, +) \text{ ist ein Monoid}$$

(ii)

$$(\mathcal{P}(X), \cap)$$

Monoid, da de Teilmengen wieder in der Ursprungsmenge sind, der Schnitt assoziativ ist und das neutrale Elemente gegeben ist durch:

$$A \subset X$$

$$A \cap X = A$$

$$\Rightarrow e = X$$

(iii)

$$(\mathcal{P}(X), \Delta)$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : A \Delta B = \left\{ \underbrace{\setminus B}_{\in \mathcal{P}(X)} \cup \underbrace{\setminus A}_{\in \mathcal{P}(X)} \right\} \in \mathcal{P}(X)$$

Die symetrische Differenz ist assoziativ, da:

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \triangle C &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \triangle C \\
&= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C \cup C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\
&= (A \setminus B \setminus C) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup ((C \setminus (A \setminus B)) \setminus (B \setminus A)) \\
&= (A \setminus B \setminus C) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup (((C \setminus A) \cup (C \cap B)) \setminus (B \setminus A)) \\
&= (A \setminus B \setminus C) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup ((C \setminus A) \setminus (B \setminus A)) \cup ((C \cap B) \setminus (B \setminus A)) \\
&= (A \setminus B \setminus C) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup (C \setminus A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \triangle (B \triangle C) &= A \triangle ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \\ &= A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \cup ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A \\ &= ((A \setminus (B \setminus C)) \setminus (C \setminus B)) \cup (B \setminus C \setminus A) \cup (C \setminus B \setminus A) \\ &= (((A \setminus B) \cup (A \cap C)) \setminus (C \setminus B)) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup (C \setminus A \setminus B) \\ &= ((A \setminus B) \setminus (C \setminus B)) \cup ((A \cap C) \setminus (C \setminus B)) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup (C \setminus A \setminus B) \\ &= (A \setminus B \setminus C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \setminus A \setminus C) \cup (C \setminus A \setminus B)\end{aligned}$$

$\Rightarrow (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Das neutrale Element ist die leere Menge, da:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) : A\Delta\emptyset = \left\{ \underbrace{A \setminus \emptyset}_{A} \cup \underbrace{\emptyset \setminus A}_{\emptyset} \right\} = A$$

$\Rightarrow (\mathcal{P}(X), \Delta)$ ist ein Monoid.

(iv)

$$(X^X, \circ)$$

Die Komposition von Funktionen ist assoziativ (nach Script)

$$\forall f_1, f_2 \in X^X :$$

$$f_1(x) \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_3(x) \in X^X$$

(v)

$$(\mathbb{Z}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 y_1, x_2 + y_2))$$

Monoid, da Elemente wieder in der Menge sind und Assoziativität und das neutrales Element e gegeben ist durch:

Assoziativität:

1)

$$(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$$

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)], (z_1, z_2) \mapsto (x_1 y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)$$

$$\mapsto (x_1 y_1 z_1, x_2 + y_2 + z_2)$$

2)

$$(x_1, x_2), [(y_1, y_2), (z_1, z_2)] \mapsto (x_1, x_2), (y_1 z_1, y_2 + z_2)$$

$$\mapsto ((x_1 y_1 z_1, x_2 + y_2 + z_2))$$

Neutrales Element:

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2 : (1, 0), (y_1, y_2) \mapsto (1 * y_1, y_2 + 0) = (y_1, y_2)$$

$$\Rightarrow e = (1, 0)$$

(vi)

$$(\mathcal{P}(X), (A, B) \mapsto A^{\complement} \cup B^{\complement})$$

$$((A, B) \mapsto A^{\complement} \cup B^{\complement}, C) \mapsto \left((A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement} \cup C^{\complement} \right)$$

$$((A, (B, C) \mapsto B^{\complement} \cup C^{\complement}) \mapsto \left(A^{\complement} \cup (B^{\complement} \cup C^{\complement})^{\complement} \right)$$

$\Rightarrow$ keine Assoziativität $\Rightarrow$ Keine Halbgruppe

Aufgabe 5

Lemma 0.5: Linksinverse in Monoiden sind im allgemeinen nicht Eindeutig.

Proof: Wir betrachten den Monoid $\left(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}, \circ\right)$ der Funktionen auf den Natürlichen Zahlen (mit der 0) verknüpft durch verkettung mit dem Neutralen Element id : $x \mapsto x$. Sei $f(n) = n + 2$. Die Funktionen

$$g(n) = \begin{cases} n \text{ für } & n > 1 \\ 0 \text{ für } & n = 0 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} n \text{ für } n > 1 \\ 42 \text{ für } n = 0 \end{cases}$$

sind beide linke Inverse zu f, sie sind auf dem Wertebereich von f gleich. Es gilt aber trotzdem $g \neq h$, da $g(0) \neq h(0)$ ■

Lemma 0.6: Wenn a links- und rechtsinvertierbar ist, dann ista invertierbar und jedes links- oder rechtsinverse Element zu a gleicht dem einedeutigen Inversen von a.

Proof: Sei $l \in H$ ein Linksinverses von a, also $l \star a = e$ und $r \in H$ ein Rechtsinverses von a, also $a \star r = e$.

$$(l \star a) \star r = e \star r = r$$

$$l \star (a \star r) = l \star e = l$$

Da $(l \star a) \star r = l \star (a \star r)$ (Assoziativität) gilt, gilt $r = l$. Also gibt es ein Element $a' = r = l$, für das gilt $a \star a' = a' \star a = e$. Damit ist a invertierbar. Da für l und r vorher beliebige links- und rechtsinverse gewählt wurden, folgt, dass alle links- und rechtsinversen von a, gleich a' sind. ■