

LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

1.

a) z.z.

lin. Unabhängigkeit

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \} \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

 \Rightarrow linear unabhängig

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$a_3 = \alpha_2 - \alpha_3$$

LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 1 & 1 & -1 & | & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & a_1 - a_2 \\ 1 & 0 & 0 & | & a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{a_1 - a_2}{2} \\ 1 & 0 & 0 & | & a_2 - a_3 \\ 0 & 1 & 0 & | & a_3 + \frac{a_1 - a_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = a_2 - a_3 \in \mathbb{R} \quad \alpha_2 = a_3 + \frac{a_1 - a_2}{2} \in \mathbb{R} \quad \alpha_3 = \frac{a_1 - a_2}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1)) \text{ ist eine Basis des } (\mathbb{R}_3, +, \cdot)$$

$$b) (i) \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \wedge \quad \sqrt{2} \alpha_2 + \alpha_3 = \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{3} + \alpha_3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

 \Rightarrow kein Erzeugendensystem(ii) Übung 8 $\Rightarrow X$ muss unendlich sein

$$E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$$

E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:

Es ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:
 $Y \subseteq X$ mit Y ist endlich und Y^c ist unendlich

$$f: X \rightarrow K$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in Y^c \\ 1 & \text{falls } x \in Y \end{cases}$$

Falls E ein Erzeugendensystem ist, muss eine Linearkombination existieren, die f darstellt. Sei $I \subset X$ mit I endlich:

$$\forall x \in X: f(x) = \sum_{x \in I} \alpha_x e_x(x) + \alpha_{id} \cdot 1$$

Da $f(x)=1$ für unendlich viele $x \in X$, muss $\alpha_{id}=1$ sein.

$\Rightarrow f(x)$ kann nur für endlich viele $x \in X$ ungleich 1 sein
 \Rightarrow Widerspruch, da Y unendlich

(iii) Übung 8 $\Rightarrow \#X$ muss gerade sein, oder X unendlich

$$E := \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\} \quad \text{zu erzeugen } \mathcal{P}(X)$$

Sei X endlich und $\#X$ gerade um $E_0 \in X$ mit $\#E_0$ gerade:

$$\bigtriangleup_{x \in E_0} X \setminus \{x\} = E_0$$

Sei $E_1 \subseteq X$ mit $\#E_1$ ungerade und $\#E_1 \neq 0$

$$\bigtriangleup_{x \in E_1} X \setminus \{x\} = X \setminus E_1 \quad (\text{nach Lösung Übung 8})$$

\Rightarrow Wir können alle geraden Teilmengen von X und die Komplemente aller ungeraden Teilmengen von X als Linearkombi. darstellen

$\forall E_1: \#(X \setminus E_1)$ ist ebenfalls ungerade

$\forall F \subset X$ mit $\#F$ ungerade: $F^c \subset X \wedge \#F^c$ ist ungerade

$$\Rightarrow \bigtriangleup_{x \in F} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$$

$\forall I \subset \mathbb{N}$ mit $\#I$ ungerade: $I \subset \mathbb{N} \setminus \pi(I)$ (Sperner)

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in \mathbb{F}^C} X \setminus \{x\} = X \setminus \mathbb{F}^C = \mathbb{F}$$

\Rightarrow Wir können alle Teilmengen als Linearkombi darstellen

Da Linearkombination endlich sein müssen, müssen \mathbb{F} und E_0 endlich sein $\Rightarrow X \in \mathcal{P}(X)$ kann nicht durch LK erzeugt werden, falls X unendlich

c) (i) $\{ f \in \mathbb{R}^{[1, n]} \mid \sum_{i=1}^n f(i) = 0 \}$

Wie folgt die Funktion wie folgt da:

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad f(n) = a_n$$

$a_1 = -\sum_{k=2}^n a_k$ muss immer gelten

Basis-Vorschlag:

$$\{ e_n - e_1 \mid n \in [2, n] \}$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n]: \alpha_k = 0$$

Erzeugendensystem:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n -\alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n]: \alpha_k = a_k$$

(ii) $E = \langle \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \#A \in \mathbb{A}\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit Δ als Addition

$\Rightarrow \forall B \in E : \#B \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ ist endlich

$\forall A, B \in E$ mit $\#A = \#B + 1 \wedge B \subset A$.

$\Rightarrow \exists! a \in \mathbb{Z}$ mit $a \in A \wedge a \notin B$

$\Rightarrow A \Delta B = \{a\}$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \exists A, B \in E : A \Delta B = \{a\}$

zu zeigen: $\{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von E

$\{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset E$ (siehe oben)

$\overset{z.z.}{\{ \{a\} \mid a \in \mathbb{Z} \}}$ ist linear unabhängig

und
 $\forall I$ eine endliche Menge $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ eine injektive Familie:
 sind

$\Rightarrow \forall i, j \in I : v_i \cap v_j = \emptyset \Rightarrow \bigtriangleup_{i \in I} v_i \neq \emptyset$

Für jede Linearkombination

$\bigtriangleup_{i \in I_0} \alpha_i v_i \quad \exists I \subset I_0$ s.d. $\forall j \in I_0$ mit $\alpha_j = 1$ gilt $j \in I$

Es gilt außerdem: $\forall A : A \Delta \emptyset = A$

$\Rightarrow \bigtriangleup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \bigtriangleup_{i \in I_0 \setminus I} \emptyset \Delta \bigtriangleup_{i \in I} v_i = \bigtriangleup_{i \in I} v_i \neq \emptyset$ falls $I \neq \emptyset$

$\Rightarrow \bigtriangleup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \emptyset \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_0$

z.z. $E \subset \langle \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle$

$\Leftrightarrow \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \#A \in \mathbb{A}\} \subset \langle \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle =: D$

Sei $B \in \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \#A \in \mathbb{A}\}$

$\Rightarrow \forall a \in B \Rightarrow \{a\} \in D$

$\#B$ endlich $\Rightarrow \exists T \subset \mathbb{N}$ endlich s.d. $\bigcup i = \bigtriangleup i = B$

$$\Rightarrow \forall a \in B \Rightarrow \exists a_S \in U$$

$$\#B \text{ endlich} \Rightarrow \exists I_0 \subset B \text{ endlich s.d. } \bigcup_{i \in I_0} i = \bigtriangleup_{i \in I_0} i = B$$

$$\Rightarrow B \in D$$

$$\Rightarrow \{ \{a\} \mid a \in \mathbb{Z} \} \text{ ist Basis von } \{ A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A < \infty \}$$

d)

Sei F ein Körper und $\alpha \in F$. Wähle $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ als Linearkombination der v_j .
 Dann gilt $\alpha v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j v_i$.
 Da $v_i v_i = 1$ und $v_i v_j = 0$ für $j \neq i$, gilt $\alpha v_i = \alpha_i$.

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist eine Basis von } V.$$

Ein Linearkombination von B mit $v_{ji} \in B_i$, $b \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ter Index}}}{v_{ji}}, 0, \dots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \forall i \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} = 0$$

$$\text{Da } \forall i, j: v_{ji} \in B_i \Rightarrow \alpha_{ji} = 0$$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig

$$\text{Zz } \langle B \rangle = V$$

$$\langle B \rangle \subseteq V:$$

Wir nutzen wieder die Linearkombinationen von oben:

$$v := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ter Index}}}{v_{ji}}, 0, \dots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right)$$

$$\forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n: \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} \in V_i, \text{ da } v_{ji} \in B_i$$

$$\Rightarrow v \in V$$

$$V \subseteq \langle B \rangle: \forall (a_1, \dots, a_n) \in V:$$

$$\Rightarrow \forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n: a_i \in V_i$$

\Rightarrow Es existiert eine Linearkombination mit $v_j \in B_i$ und

$$b \in \mathbb{N}: \sum_{j=1}^b \alpha_j v_j = a_i$$

$$\text{Es gilt: } \forall i: (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ter Index}}}{v_i}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle$$

$$\Rightarrow (0, \dots, 0, \overset{\text{Index}}{a_i}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle$$

\uparrow
 $i\text{-ter-Index}$

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \in \langle B \rangle \Rightarrow V = \langle B \rangle \quad \square$$

Aufgabe 2

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den Punktweisen Verknüpfungen.

Lemma 0.1: Falls X endlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \#X$$

Proof: Sei B_X folgende Familie in K^X :

$$B(x_0) : X \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: B_X ist eine Basis von K^X und $\#B_X = \#X$. Die zweite Aussage ist trivial, für die erste Aussage benötigen wir zunächst die Lineare Unabhängigkeit von B .

Sei

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0) = 0_{K^X}$$

Das gilt, wenn

$$\forall x' \in X, \left(\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0) \right)(x') = 0_K$$

Da alle Summenglieder mit $x' \neq x_0$ sowieso verschwinden, können wir auch schreiben:

$$\forall x' \in X, \alpha_{x'} B(x')(x') = \alpha_{x'} \cdot 1_K = 0_K$$

Damit ist B_X linear unabhängig.

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\langle B_X \rangle = K^X$. Sei $f \in K^X$. Dann setzen wir $a_x = f(x)$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B_{x_0} &= f \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{x_0 \in X} f(x_0) B_{x_0} \right)(x) &= f(x) \quad \forall x \in X \\ \Leftrightarrow f(x) B(x) &= f(x) \cdot 1_k = f(x) \quad \forall x \end{aligned}$$

Damit können alle Elemente von K^X durch die Basis erzeugt werden. ■

Lemma 0.2: Falls X unendlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \infty$$

Proof: Zu zeigen: Es gibt eine Unendliche linear unabhängige Familie $B_X \subseteq K^X$. Damit kann es keine endliche Basis geben, wodurch die Unendlichkeit der Dimension gezeigt ist. Sei B_X dafür folgende Familie in K^X :

$$B(x_0) : X \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

. Zu zeigen: B_X ist linear unabhängig. Das funktioniert genau gleich wie im Beweis drüber. ■

(ii)

Sei nun:

$$U := \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}$$

$$W := \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

Lemma 0.3: $\dim_{K(U)} = \dim_{K(K^X)} - 1$ (also ∞ falls X unendlich ist)

Proof: Sei $X' = X \setminus \{x_0\}$. Sei $B_{X'}$ folgende Familie in $K^{X'}$:

$$B(x') : X' \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x' \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: $B_{X'}$ ist eine Basis von U : Gilt offensichtlich, da alle Elemente außer x_0 einmal mit der 1_K getroffen werden. Damit ist

$$\dim_K(U) = \#B_{X'} = \#X' = \#X - 1 = \dim_K(K^X)$$

■

Lemma 0.4: $\dim_{K(W)} = 1$

Proof: Die Menge der Konstanten Funktionen W wird durch die Menge $B = \{x \mapsto 1_k\}$ erzeugt. Damit hat W eine Dimension von 1. ■

Lemma 0.5:

$$\dim_K(U \cap W) = \dim_K(\{x \mapsto 0_K\}) = 0$$

Proof: Gilt, da $U \cap W$ nur den Nullvektor enthält und damit $U \cap W = \langle \{\} \rangle$ ■

b)

Lemma 0.6: Sei $(K, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ ein K -Vektorraum. V ist genau dann K -endlichdimensional, wenn V endlich ist.

Dann gilt außerdem: $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$.

Proof: Sei B eine Basis von V . Da eine Basis Vektoren eindeutig erzeugt, gilt:

$$V = \bigcup_{b \in B} b \cdot K = \bigsqcup_{b \in B} b \cdot K$$

(\sqcup meint die Disjunkte Vereinigung).

“ \Rightarrow ”: Wenn B endlich ist (also V endlichdimensional), dann ist V offensichtlich endlich, da jede Skalarmultiplikation $b \cdot K$ nur endlich viele Elemente erzeugt.

“ \Leftarrow ”: Wenn V endlich ist, dann muss auch B endlich sein, da die disjunkte Vereinigung sonst unendlich viele Elemente erzeugen würde. Da B endlich ist, ist dann auch V endlichdimensional.

Wenn B (und damit auch V) endlich ist, gilt:

$$\#V = \# \bigsqcup_{b \in B} b \cdot K = \prod_{b \in B} \#b \cdot K = \prod_{b \in B} \#K = (\#K)^{\#B} = (\#K)^{\dim_K(V)}$$

■

Nr. I-9.3

a) Wenn U und W komplementär sind, dann gilt:

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$$

$$U \cap W = \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \wedge f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) \forall x \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow U \oplus W = V$$

■

4) ① \Rightarrow ②: $V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Rightarrow V = \sum_{i \in I} U_i$

Angenommen es gibt die Darstellungen

$$v = \sum_{i \in I_1} u_i = \sum_{i \in I_2} u'_i \quad \text{mit } I_1, I_2 \subseteq I$$

endlichen Teilfamilien.

$$\Rightarrow \sum_{i \in I_1} u_i - \sum_{i \in I_2} u'_i = 0$$

Da die Summe direkt ist, muss Folgendes gelten:

Für $i \in I_1 \cap I_2$ muss $u_i = u'_i$,

für $i \in I_1 \setminus I_2$ muss $u_i = 0$ und

für $i \in I_2 \setminus I_1$ muss $u'_i = 0$ gelten.

Die Darstellung $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ ist also i.W. eindeutig.

■

② \Rightarrow ①:

Es gilt:
$$v = \sum_{i \in I_0} u_i$$

also muss nur noch gezeigt werden, dass die Summe direkt ist, sprich

$$0 = \sum_{i \in I_0} u_i, \text{ nur wenn } u_i = 0 \quad \forall i \in I_0.$$

Ist $v=0$, so ist die Summe nach Voraussetzung eindeutig und die Bedingung ist erfüllt.

