

LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Wr. I-8.1

a) Sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist:

i) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := \sqrt{x^2 + y^2}$

und $\alpha \odot x := \sqrt{\alpha^2} \cdot x$ ist ein VR über \mathbb{R} .

Beweis:

1. (\mathbb{R}, \oplus) ist eine abelsche Gruppe, denn:

$$x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y \oplus x$$

und $0 = 0$, weil

$$x \oplus 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = x$$

2. $(\alpha \cdot \beta) \odot x = \sqrt{\alpha \cdot \beta} x = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \cdot x$

$$= \sqrt{\alpha} \cdot (\beta \odot x)$$

$$= \alpha \odot (\beta \odot x)$$

3. $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot \sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\alpha x^2 + \alpha y^2}$$

$$= (\sqrt{\alpha} \cdot x) \oplus (\sqrt{\alpha} \cdot y)$$

$$= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$$

$$(\alpha + \beta) \odot x = \sqrt{\alpha + \beta} \cdot x$$

$$= \sqrt{(\alpha + \beta) \cdot x^2}$$

$$= \sqrt{\alpha x^2 + \beta x^2}$$

$$= (\sqrt{\alpha} x) \oplus (\sqrt{\beta} x)$$

$$= (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

4. $1_K \odot x = \sqrt{1} \cdot x = 1 \cdot x = x$



iii) $(\mathbb{C}, \oplus, \circ)$ mit $\alpha \circ x := \alpha \cdot \bar{x}$ ist kein VR über \mathbb{R}

Beweis:

$$(\alpha \cdot \beta) \circ x = \alpha \beta \bar{x}$$

$$\alpha \circ (\beta \circ x) = \alpha \circ \beta \bar{x} = \alpha \beta x \neq \alpha \beta \bar{x} \text{ für } \operatorname{Im}(x) \neq 0$$

\Rightarrow nicht assoziativ

■

iii) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \circ)$ mit $x \oplus y := x \cdot y$ und $\alpha \circ x := x^\alpha$
ist ein VR über \mathbb{R} .

Beweis:

1. $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn:

$$x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$$

und $e = 1$, weil

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$$

$$2. (\alpha \cdot \beta) \circ x = x^{\alpha \beta} = (x^\beta)^\alpha = (\beta \circ x)^\alpha = \alpha \circ (\beta \circ x)$$

$$3. \alpha \circ (x \oplus y) = \alpha \circ (xy)$$

$$= (xy)^\alpha$$

$$= x^\alpha \cdot y^\alpha$$

$$= x^\alpha \oplus y^\alpha$$

$$= (\alpha \circ x) \oplus (\alpha \circ y)$$

$$(\alpha + \beta) \circ x = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = x^\alpha \oplus x^\beta = (\alpha \circ x) \oplus (\beta \circ x)$$

$$4. 1_K \circ x = x^{1_K} = x$$

■

b) Sei $X \neq \emptyset$, $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper
und $(P(X), \oplus, \odot)$ ein VR über diesem
mit $\oplus := \Delta$ und für $A \in X$

$$\alpha \odot A = 1 \odot A = A$$

$$0 \odot A = \emptyset$$

Beweis:

1. $(P(X), \Delta)$ ist eine abelsche Gruppe.

$$2. (\alpha \cdot \beta) \odot A \stackrel{!}{=} \alpha \odot (\beta \odot A)$$

$$\underline{\alpha=0; \beta=0}: (0 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset \quad \checkmark$$

$$0 \odot (0 \odot A) = 0 \odot \emptyset = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=0; \beta=1}: (0 \cdot 1) \odot A = 0 \odot A = \emptyset \quad \checkmark$$

$$0 \odot (1 \odot A) = 0 \odot A = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=1; \beta=0}: (1 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset \quad \checkmark$$

$$1 \odot (0 \odot A) = 1 \odot \emptyset = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=1; \beta=1}: (1 \cdot 1) \odot A = 1 \odot A = A \quad \checkmark$$

$$1 \odot (1 \odot A) = 1 \odot A = A \quad \checkmark$$

$$3. \alpha \odot (A \Delta B) \stackrel{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\alpha \odot B)$$

$$\underline{\alpha=0}: 0 \odot (A \Delta B) = \emptyset$$

$$\underline{\alpha=1}: (0 \odot A) \Delta (0 \odot B) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=1}: 1 \odot (A \Delta B) = A \Delta B \quad \checkmark$$

$$(1 \odot A) \Delta (1 \odot B) = A \Delta B \quad \checkmark$$

$$4. (\alpha + \beta) \odot A \stackrel{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\beta \odot A)$$

$$\underline{\alpha=0; \beta=0}: (0+0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset \quad \checkmark$$

$$(0 \odot A) \Delta (0 \odot A) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=0; \beta=1}: (1+0) \odot A = 1 \odot A = A \quad \checkmark$$

$$\text{bzw. } (1 \odot A) \Delta (0 \odot A) = A \Delta \emptyset = A \quad \checkmark$$

$$\underline{\alpha=1; \beta=0}$$

$$\underline{\alpha=1; \beta=1:} \quad (1+1) \circ A = 0 \circ A = \emptyset$$

$$(1 \circ A) \Delta (1 \circ A) = A \Delta A = \emptyset \quad \checkmark$$

4. $1 \circ A = A$ per Definition

■

c) Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, dann ist auch $V \times W$ mit
 $+ : (V \times W)^2 \rightarrow (V \times W) \quad (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$
 $\cdot : K \times (V \times W) \rightarrow (V \times W) \quad \alpha \cdot (v, w) := (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w)$
ein VR über diesem.

Beweis:

1. $((V \times W), +)$ ist eine abelsche Gruppe, denn

$$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$$

$$= (\tilde{v} +_V v, \tilde{w} +_W w)$$

$$= (\tilde{v}, \tilde{w}) + (v, w)$$

und $e = (0_V, 0_W)$, weil:

$$(v, w) + (0_V, 0_W) = (v +_V 0_V, w +_W 0_W) = (v, w)$$

$$2. (\alpha \cdot_K \beta) \cdot (v, w) = ((\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V v, (\alpha \cdot_K \beta) \cdot_W w)$$

$$= (\alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v), \alpha \cdot_W (\beta \cdot_W w))$$

$$= \alpha \cdot ((\beta \cdot_V v), (\beta \cdot_W w))$$

$$= \alpha \cdot (\beta \cdot (v, w))$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \alpha \cdot ((v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w})) &= \alpha \cdot (v+v, w+w, \tilde{v}+\tilde{w}, \tilde{w}) \\
 &= (\alpha \cdot v(v+v), \alpha \cdot w(w+w), \tilde{v}(\tilde{v}+\tilde{w}), \tilde{w}(\tilde{w})) \\
 &= (\alpha v, \alpha w) + (\alpha \tilde{v}, \alpha \tilde{w}) \\
 (\alpha + \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha + \beta) \cdot v, (\alpha + \beta) \cdot w) \\
 &= (\alpha \cdot v v + \beta \cdot v v, \alpha \cdot w w + \beta \cdot w w) \\
 &= (\alpha v, \alpha w) + (\beta v, \beta w) \\
 &= \alpha \cdot (v, w) + \beta (v, w)
 \end{aligned}$$

$$4. \quad 1_K \cdot (v, w) = (1_K \cdot v v, 1_K \cdot w w) = (v, w)$$

■

Wk. I-8.2

a) Sei (R_n, \oplus, \cdot) ein VR über dem Körper $(R, +, \cdot)$
 $v := (-7, r, 2)$ $v_1 := (1, 2, 4)$ $v_2 := (-2, 1, 2)$ $v_3 := (3, 1, 2)$

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$(-7, r, 2) = \alpha(1, 2, 4) + \beta(-2, 1, 2) + \gamma(3, 1, 2)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \\
 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & r \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} 2r = 2 \\ \underline{\gamma = 1} \end{matrix}
 \end{array}$$

Ansatz: $t \in R$

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \end{matrix} \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{-2 \cdot 1} \\
 \end{array}$$

$$\alpha \beta \gamma$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 2 & 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{-\cdot 2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & 3+t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1-t$$

$$\beta = 3+t$$

$$\gamma = t$$

b) Sei $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper und $(P(N), \Delta, \odot)$ ein VR darüber mit

$$0 \odot A = \emptyset$$

$$1 \odot A = A$$

und $V = \{1, 2, 4, 8\}$, $W = \{1, 3, 9, 27\}$ und
 $U = \{1, 4, 16, 64\}$

- w hat als einziger Vektor $\{3\}$ und

\Rightarrow Koeffizient muss 0 sein

- V und $\frac{U}{W}$ haben beide $\{1\}$ als einzige ungerade Zahl

\Rightarrow wegen Δ müssen beide Koeffizienten entweder 0 oder 1 sein

Mögliche Kombinationen:

$$1. 0 \odot V \Delta 0 \odot W \Delta 0 \odot U = \{\} = \emptyset$$

$$2. 1 \odot V \Delta 0 \odot W \Delta 1 \odot U = \{2, 16, 64, 8\}$$



8.3

$$\text{a) i)} \quad \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\} = P(X) \setminus \{\emptyset\}$$

$$X \neq \emptyset$$

$$\text{Sei } U = P(X) \setminus \{\emptyset\}$$

Wir nutzen das Unterraum-Kriterium

$$X \neq \emptyset \Rightarrow P(X) \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$$

$$0 \cdot U = \emptyset \notin P(X) \setminus \{\emptyset\}$$

 \Rightarrow Kein Unterraum

$$\text{(ii)} \quad P(X) \setminus \{B\} \text{ für } B \subseteq X$$

Falls $B = \emptyset$, siehe (i) \Rightarrow Kein UnterraumFalls $\#X=1, B \neq \emptyset \Rightarrow B=X \Rightarrow P(X) \setminus \{B\} = \{\emptyset\}$: $0 \cdot \emptyset = \emptyset \wedge 1 \cdot \emptyset = \emptyset \wedge \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset \Rightarrow$ Es ergibt sich der NullraumFalls $\#B \geq 2$, dann existiert eine echte Teilmenge $A \subset B \Rightarrow A \subseteq X \wedge B \setminus A \subseteq X$ $\Rightarrow A \Delta B \setminus A = B \notin P(X) \setminus \{B\} \Rightarrow$ Unterraum-Kriterium nicht erfülltFalls $\#B=1 \wedge \#X \geq 2$: $\Rightarrow \exists A \subseteq X \text{ mit } \#A \geq 1, B \subset A$

$$\Rightarrow A \setminus B \subseteq P(X) \setminus \{B\}$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \Delta A = B \notin P(X) \setminus \{B\}$$

 \Rightarrow Nur für $\#X=1 \wedge B=X$ handelt es sich um einen Unterraum

$$\text{(iii)} \quad \{\emptyset, X \setminus B\} \quad B \subseteq X$$

$$\{\emptyset, X \setminus B\} \ni \emptyset \Rightarrow \{\emptyset, X \setminus B\} \neq \emptyset$$

$$X \setminus B \Delta X \setminus B = \emptyset$$

$$X \setminus B \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X \setminus B = X \setminus B$$

$$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$$

$$\forall U \in \{\emptyset, X \setminus B\}: \quad 1 \cdot U = U \in \{\emptyset, X \setminus B\}$$

$$0 \cdot U = \emptyset \in \{\emptyset, X \setminus B\}$$

 \Rightarrow Unterraum-Kriterium erfüllt

$$\text{(iv)} \quad \{A \subseteq X \mid A \text{ und } X \text{ gleichmächtig}\} \cup \{\emptyset\}$$

Falls X eine endliche Menge ist gilt:

$$\#A = \#X \wedge A \subseteq X$$

$$\Rightarrow A = X$$

$$A \Delta A = \emptyset$$

$$\emptyset \Delta A = A = A \Delta \emptyset$$

$$1 \cdot A = A$$

$$0 \cdot A = \emptyset$$

$$\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$$

 \Rightarrow Unterraum-Kriterium erfüllt

Falls X eine unendliche Menge ist

\Rightarrow Es existiert eine endliche Menge $Y \subset X$
mit $\#(X \setminus Y) = \# X$

$$X \setminus Y \Delta X = Y$$

$\#Y \neq \#X \Rightarrow Y \notin \{A \subseteq X \mid A \text{ und } X \text{ gleichmächtig}\} \cup \{\emptyset\}$

\Rightarrow Kein Unterkörper für unendliche Mengen X

b) $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ ist Familie von Unterräumen zu $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$

$\forall i \in I : (U_i, +, \cdot)$ ist Unterraum von $(V, +, \cdot)$

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \bigcap_{i \in I} U_i &\Rightarrow \forall i \in I : a + b \in U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in U_i \\ &\Rightarrow a + b \in \bigcap_{i \in I} U_i \wedge \forall k \in K : k \cdot a \in \bigcap_{i \in I} U_i \end{aligned}$$

Die 0_v ist Element jedes Unterraums, da $\forall i \in I \forall a \in U_i : 0_K \cdot a = 0_v \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$

\Rightarrow Unterraumkriterium erfüllt

c) $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ beliebig, $(K^X, +, \cdot)$ ist K -Vektorraum gegeben sind:

$$U := \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}$$

$$W := \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in X\}$$

(i) U und W sind Unterräume

$$f_1 : X \ni x \mapsto 0 \in K \Rightarrow f_1 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$$

$$\forall f_1, f_2 \in U : f_3 : X \ni x \mapsto f_1(x) + f_2(x) \in K$$

$$\Rightarrow f_3(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow f_3 \in U$$

$$\forall f_1 \in U : \alpha \cdot f_1(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot f_1(x_0) \in U$$

\Rightarrow Unterraumkriterium erfüllt

$$\begin{aligned} W : \quad \forall f_1, f_2 \in W \quad \forall x, y \in X : f_1(x) + f_2(y) &= f_1(y) + f_2(x) \\ &\Rightarrow f_1(x) + f_2(y) \in W \end{aligned}$$

$$\checkmark \alpha : \alpha \cdot f_1(x) = \alpha \cdot f_1(y) \in W$$

\Rightarrow Unterraumkriterium erfüllt

$$(ii) (U \cap W) = \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in X \wedge f(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow U_1 W = \{ f \in K^\times \mid f(x) = 0 \text{ } \forall x \in X \} = \{ 0 \}$$

Aufgabe 4

Lemma 0.1: Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Es gilt:

$$\langle E \rangle = \left\{ \sum_{\{i=1\}}^n a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket (v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} =: M$$

Proof:

1. $\langle E \rangle \subseteq M$: Trivial mit $n = 1$ und $\alpha_1 = 1$
2. Zu zeigen

$$M \subseteq \langle E \rangle$$

: Gilt genau dann, wenn:

$$\left\{ \sum_{\{i=1\}}^n a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket (v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K) \right\} \subseteq \left\{ \sum_{\{i=1\}}^n a_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \forall i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket (v_i \in E, \alpha_i \in K) \right\}$$

Zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, v_i \in \langle E \rangle, \alpha_i \in K, \exists n' \in \mathbb{N}_0, \exists v_{i'} \in E, \exists \alpha_{i'} \in K, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_{j'} v_{j'}$$

Wir wissen, dass alle $v_i \in \langle E \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden können:

$$\exists n_i \in \mathbb{N}_0, \exists \alpha_{ik} \in K, \exists v_{ik} \in E, \sum_{k=0}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} = v_i$$

Wir können also schreiben:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) \quad \text{mit } v_{ik} \in E$$

Um die zwei Summen in eine Zusammenfassen schreiben wir: $n' = \sum_{i=1}^n n_i$. Um die Indizierung von α_{ik} zu vereinfachen führen wir $j_{ik} = \sum_{x=1}^{i-1} n_x + k$ ein. Damit definieren wir $\alpha_{j_{ij}} = \alpha_i \cdot \alpha_{ik}$ und $v_{j_{ik}} = v_{ik}$. Insgesamt gilt dann:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} v_{ik} \right) = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j v_j$$

Damit ist die zweite Inklusion bewiesen, da so jede Linearkombination von Elementen aus $\langle E \rangle$ als Linearkombination von Elementen aus E dargestellt werden kann. ■

Lemma 0.2:

$$\langle E \rangle = \bigcup \{ \langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ ist endlich} \}$$

Proof: “ \supseteq ”: Gilt, da $\langle E_0 \rangle \subseteq \langle E \rangle$ für alle $E_0 \subseteq E$.

“ \subseteq ”: Gilt, da $\langle E \rangle$ nur endliche Linearkombinationen erzeugt. Für alle $e \in \langle E \rangle$ gibt es also ein n , sodass $e = \sum_i^n \alpha_i x_i$ mit $\{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subseteq E$. Da $\{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ endlich ist, gibt es ein endliches $E_0 \subseteq E$ mit $\{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subseteq E_0$. Somit gibt es für jedes $e \in \langle E \rangle$ ein $E_0 \subseteq E$, sodass $e \in \langle E_0 \rangle$. ■

b)

i)

$$\langle(1, 2)\rangle \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \text{ über } \mathbb{Q}$$

$$\langle(1, 2)\rangle = \{(q, 2q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

ii)

$$\langle\{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\}\rangle \text{ in } (\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \Delta, \odot)) \text{ über } (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$$

$$\langle\{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\}\rangle = \{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \emptyset\}$$

Aufgabe 5

a)

i)

Die Menge $E = \{(1, 2, 3), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1, 1, 1)\}$ in \mathbb{R}^3 über \mathbb{Q} ist linear unabhängig, da gelten muss:

$$1 \cdot q_1 + \sqrt{2} \cdot q_2 + 1 \cdot q_3 = 0$$

Da $\sqrt{2} \cdot q$ für alle q irrational ist, muss gelten: $q_3 = -q_1$ und $q_2 = 0$. Mit der Gleichung für die zweite Komponente folgt allerdings:

$$2 \cdot q_1 - 1 \cdot q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = q_3 = q_1 = 0$$

Damit ist E linear unabhängig.

II)

Die Menge $E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X, +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist linear unabhängig, wenn X nicht endlich ist.

1. Wenn X endlich ist, gibt es endlich viele Charakteristische Funktionen e_x und es gilt $\sum_x e_x = 1$. Damit lässt sich 1 als endliche Linearkombination der Vektoren e_x darstellen und E ist nicht linear unabhängig.
2. Wenn X allerdings endlich ist, ist $\sum_x e_x = 1$ eine unendlich Linearkombination. Da die Menge der charakteristischen Funktionen trivialerweise linear unabhängig ist, ist E somit auch linear unabhängig.

iii)

Die Menge $E = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist linear unabhängig, wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist:

1. Wenn $\mathcal{P}(X)$ endlich ist, kann die Menge $X \setminus \{y\}$ ($y \in X$ beliebig) als Linearkombination von $\{E \setminus (X \setminus \{y\})\}$ dargestellt werden, da:

$$(*) \quad (X \setminus \{a\}) \Delta (X \setminus \{b\}) = (((X \setminus \{a\}) \setminus (X \setminus \{b\})) \cup ((X \setminus \{b\}) \setminus (X \setminus \{a\}))) = \{a, b\}$$

Damit gilt:

$$\sum_{X \setminus \{x\} \in E \setminus (X \setminus \{y\})} X \setminus \{x\} = \bigcup \{x \mid X \setminus \{y\}\} = X \setminus \{y\}$$

E ist also nicht linear unabhängig.

2. Wenn $\mathcal{P}(X)$ unendlich ist, ist E linear unabhängig, da jede endliche (!!)-linearkombination aus Elementen von E eine Menge von endlicher Mächtigkeit erzeugt (siehe (*)). Jedes Element von E ist aber nicht endlich (da $X \setminus \{x\}$ nicht endlich ist, wenn X nicht endlich ist) und kann daher nicht als endliche linearkombination von Elementen von E dargestellt werden.

b)

Lemma 0.3: In einer Linear unabhängigen Familie kann kein Element doppelt vorkommen.

Proof: Sei $f : I \rightarrow V$ eine Familie mit $f_i = f_j$. Dann gilt $1 \cdot f_i - 1 \cdot f_j = 0$. Die Implikation

$$\sum_i a_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i, a_i = 0$$

kann also nichtmehr gelten, womit f nicht linear unabhängig sein kann. ■

c)

Lemma 0.4: V ist ein K -Vektorraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge
2. Es gibt einen Vektor $v \in E$ der als linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden kann.

Proof: “ \Rightarrow ”: Wenn E nicht linearabhängig ist gilt: $\exists a_w, \sum_{w \in E} a_w w = 0$ mit $a_w \neq 0$ für mindestens einen Vektor $w \in E$. Sei v ein solcher Vektor mit $a_v \neq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{w \in E} a_w w &= 0 \\ \sum_{w \in E} a_w w - a_v v &= -a_v v \\ \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w &= -a_v v \\ \sum_{w \in E \setminus \{v\}} (a_w \cdot (-a_v^{-1})) w &= v\end{aligned}$$

v kann also als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ dargestellt werden.

“ \Leftarrow ”: Es gilt: $v = \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w$ für ein bestimmtes v und eine bestimmte Menge a_w . Nun kann die selbe Rechnung von oben rückwärts durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}v &= \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w \\ 0 &= \sum_{w \in E \setminus \{v\}} a_w w - v \\ 0 &= \sum_{w \in E} a_w \quad \text{mit } a_v = -1\end{aligned}$$

Damit gilt die Implikation $\sum_{w \in E} a_w w = 0 \Rightarrow \forall w, a_w = 0$ nicht, da $a_v = -1$. E ist also linear abhängig.

■