Nr. I-8.1

a) Sei $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ein Körper, dann ist:

i) $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ mit $x\oplus y := \sqrt{x^2+y^2}$

und $\alpha\odot x := \sqrt{\alpha}\cdot x$ ist ein VR über $\mathbb{R}$.

Beweis:

1. $(\mathbb{R},\oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn:

$$x\oplus y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y\oplus x$$

und $e=0$, weil

$$x\oplus 0 = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = x$$

2. $$(\alpha\cdot\beta)\odot x = \sqrt{\alpha\cdot\beta}\,x = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\cdot x = \sqrt{\alpha}\cdot(\beta\odot x) = \alpha\odot(\beta\odot x)$$

3. $$\alpha\odot(x\oplus y) = \alpha\odot\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\alpha x^2 \cancel{+\alpha} + \alpha y^2} = (\sqrt{\alpha}\cdot x)\oplus(\sqrt{\alpha}\cdot y) = (\alpha\odot x)\oplus(\alpha\odot y)$$

$$(\alpha+\beta)\odot x = \sqrt{\alpha+\beta}\cdot x = \sqrt{(\alpha+\beta)\cdot x^2} = \sqrt{\alpha x^2+\beta x^2} = (\sqrt{\alpha}x)\oplus(\sqrt{\beta}x) = (\alpha\odot x)\oplus(\beta\odot x)$$

4. $$1_K\odot x = \sqrt{1}\cdot x = 1\cdot x = x$$

■

ii) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $\alpha \odot x := \alpha \cdot \overline{x}$ ist kein VR über $\mathbb{R}$

Beweis:

$$(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha\beta\overline{x}$$
$$\alpha \odot (\beta \odot x) = \alpha \odot \beta\overline{x} = \alpha\beta x \neq \alpha\beta\overline{x} \text{ für } \operatorname{Im}(x) \neq 0$$
$$\Rightarrow \text{nicht assoziativ}$$

■

iii) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x \cdot y$ und $\alpha \odot x := x^{\alpha}$ ist ein VR über $\mathbb{R}$.

Beweis:

1. $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn:
   $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$
   und $e = 1$, weil
   $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$
2. $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^{\beta})^{\alpha} = (\beta \odot x)^{\alpha} = \alpha \odot (\beta \odot x)$
3. $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy)$
   $= (xy)^{\alpha}$
   $= x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$
   $= x^{\alpha} \oplus y^{\alpha}$
   $= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
   $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha} \oplus x^{\beta} = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$
4. $1_K \odot x = x^{1_K} = x$

■

b) Sei $X \neq \emptyset$, $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper und $(\mathcal{P}(X), \oplus, \odot)$ ein VR über diesem mit $\oplus := \Delta$ und für $A \subseteq X$

$\cancel{\alpha \odot A =}$ $1 \odot A = A$

$0 \odot A = \emptyset$

Beweis:

1. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ ist eine abelsche Gruppe.
2. $(\alpha \cdot \beta) \odot A \overset{!}{=} \alpha \odot (\beta \odot A)$

$\underline{\alpha = 0; \beta = 0:}$ $(0 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$ ✓
$0 \odot (0 \odot A) = 0 \odot \emptyset = \emptyset$

$\underline{\alpha = 0; \beta = 1:}$ $(0 \cdot 1) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$ ✓
$0 \odot (1 \odot A) = 0 \odot A = \emptyset$

$\underline{\alpha = 1; \beta = 0:}$ $(1 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$ ✓
$1 \odot (0 \odot A) = 1 \odot \emptyset = \emptyset$

$\underline{\alpha = 1; \beta = 1:}$ $(1 \cdot 1) \odot A = 1 \odot A = A$ ✓
$1 \odot (1 \odot A) = 1 \odot A = A$

3. $\alpha \odot (A \Delta B) \overset{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\alpha \odot B)$

$\underline{\alpha = 0:}$ $0 \odot (A \Delta B) = \emptyset$ ✓
$\cancel{\alpha = 1:}$ $(0 \odot A) \Delta (0 \odot B) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\underline{\alpha = 1:}$ $1 \odot (A \Delta B) = A \Delta B$ ✓
$(1 \odot A) \Delta (1 \odot B) = A \Delta B$

4. $(\alpha + \beta) \odot A \overset{!}{=} (\alpha \odot A) \Delta (\beta \odot A)$

$\underline{\alpha = 0; \beta = 0:}$ $(0 + 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$ ✓
$(0 \odot A) \Delta (0 \odot A) = \emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$

$\underline{\alpha = 0; \beta = 1}$ bzw. $\underline{\alpha = 1; \beta = 0}$: $(1 + 0) \odot A = 1 \odot A = A$ ✓
$(1 \odot A) \Delta (0 \odot A) = A \Delta \emptyset = A$

$\underline{\alpha = 1; \beta = 1:}$ $(1+1) \odot A = 0 \odot A = \emptyset$

$(1 \odot A) \Delta (1 \odot A) = A \Delta A = \emptyset$ ✓

4. $1 \odot A = A$ per Definition

■

c) Seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, dann ist auch $V \times W$ mit

$+: (V \times W)^2 \to (V \times W) \quad (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$

$\cdot: K \times (V \times W) \to (V \times W) \quad \alpha \cdot (v, w) := (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w)$

ein VR über diesem.

<u>Beweis:</u>

1. $((V \times W), \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe, denn

$$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$$
$$= (\tilde{v} +_V v, \tilde{w} +_W w)$$
$$= (\tilde{v}, \tilde{w}) + (v, w)$$

und $e = (0_V, 0_W)$, weil:

$$(v, w) + (0_V, 0_W) = (v +_V 0_V, w +_W 0_W) = (v, w)$$

2. $(\alpha \cdot_K \beta) \cdot (v, w) = ((\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V v, (\alpha \cdot_K \beta) \cdot_W w)$

$$= (\alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v), \alpha \cdot_W (\beta \cdot_W w))$$
$$= \alpha \cdot ((\beta \cdot_V v), (\beta \cdot_W w))$$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot (v, w))$$

3. $\alpha\cdot((v,w)+(\tilde{v},\tilde{w})) = \alpha\cdot(v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w})$

$= (\alpha\cdot_V(v +_V \tilde{v}), \alpha\cdot_W(w +_W \tilde{w}))$

$= (\alpha v +_V \alpha\tilde{v}, \alpha w +_W \alpha\tilde{w})$

$= (\alpha v, \alpha w) + (\alpha\tilde{v}, \alpha\tilde{w})$

$(\alpha +_K \beta)\cdot(v,w) = ((\alpha +_K \beta)\cdot_V v, (\alpha +_K \beta)\cdot_W w)$

$= (\alpha\cdot_V v + \beta\cdot_V v, \alpha\cdot_W w + \beta\cdot_W w)$

$= (\alpha v, \alpha w) + (\beta v, \beta w)$

$= \alpha\cdot(v,w) + \beta(v,w)$

4. $1_K\cdot(v,w) = (1_K\cdot_V v, 1_K\cdot_W w) = (v,w)$

■

Nr. I-8.2

a) Sei $(\mathbb{R}_n, \oplus, \cdot)$ ein VR über dem Körper $(\mathbb{R},+,\cdot)$

$v := (-7,r,2)$ $v_1 := (1,2,4)$ $v_2 := (-2,1,2)$ $v_3 := (3,1,2)$

$v \overset{!}{=} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$(-7,r,2) = \alpha \cancel{(4,}(1,2,4) + \beta(-2,1,2) + \gamma(3,1,2)$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & r \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow 2r = 2$$

$$\underline{\underline{r = 1}}$$

Ansatz: $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} + \cdot\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 2 & 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} \rceil \cdot 2 \\ \rfloor - \\ \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-t \\ 0 & 1 & 0 & 3+t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha = -1-t$$
$$\beta = 3+t$$
$$\gamma = t$$

b) Sei $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper und $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \odot)$ ein VR darüber mit

$$0 \odot A = \emptyset$$
$$1 \odot A := A$$

und $v = \{1,2,4,8\}$, $w = \{1,3,9,27\}$ und $u = \{1,4,16,64\}$

- w hat als einziger Vektor $\{3\}$ ~~und~~
  $\Rightarrow$ Koeffizient muss 0 sein
- v und u haben beide $\{1\}$ als einzige ungerade Zahl
  $\Rightarrow$ wegen Δ müssen beide Koeffizienten entweder 0 oder 1 sein

Mögliche Kombinationen:

1. $0 \odot v \,\Delta\, 0 \odot w \,\Delta\, 0 \odot u = \{\} = \emptyset$
2. $1 \odot v \,\Delta\, 0 \odot w \,\Delta\, 1 \odot u = \{2, \cancel{4}, 16, 64, 8\}$

■