

LA Zettel 5

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium Gregor Teupke)

Aufgabe 1

Entscheiden, ob die Beispiele aus Aufgabe 4. Gruppen sind.

(i): Der Monoid $(\mathbb{R}^X, +)$ ist eine Gruppe, das Invers kann punktweise gebildet werden: Für alle $g \in \mathbb{R}^X$ gilt $g^{-1}(x) = -g(x)$ und damit $g(x) + g^{-1}(x) = g(x) - g(x) = 0$

(ii): Der Monoid $(\mathcal{P}(X), \cap)$ ist keine Gruppe, weil alle Elemente (außer X) kein Inverses besitzen, da für alle $a, b \in \mathcal{P}(X)$ gilt:

$$a \cap b = X \Rightarrow a = b = X$$

(iii): Der Monoid $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ ist eine Gruppe, da jedes Element invertierbar ist. Für alle $x \in \mathcal{P}(X)$ gilt $x^{-1} = x$, da

$$x \triangle x = (x \setminus x \cup x \setminus x) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

(IV): Der Monoid (X^X, \circ) ist im allgemeinen (für $\#X > 1$) keine Gruppe, da nicht alle Funktionen $f : X \rightarrow X$ invertierbar sind (Ein gutes Beispiel dafür sind konstante Funktionen) und damit nicht alle Elemente des Monoids ein inverses Element besitzen.

(V): Der Monoid $(\mathbb{Z}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot y_1, x_2 + y_2))$ ist keine Gruppe, da nicht alle Elemente invertierbar sind. Zum Beispiel das Element $(2, 2)$. Es müsste ein Element $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ geben, sodass $x_1 \cdot 2 = 1$ und $x_2 + 2 = 0$. Ein solches x_1 gibt es allerdings nicht in \mathbb{Z}

b)

$(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \tilde{+})$ ist keine Gruppe. Sei G die Gruppe der ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit der Addition $+$. Die Menge $\{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ wäre das neutrale Element der Gruppe $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \tilde{+})$, da

$$\{a + 0 \mid a \in A\} = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$$

Es sind aber nicht alle Elemente der Gruppe $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \tilde{+})$ invertierbar, da

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c \quad \forall abc \in \mathbb{Z}$$

Wenn wir also eine beliebige Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mit $\#A > 1$ punktweise mit einer einelementigen Menge $\{c\}$ addieren, dann gilt $\#(A \tilde{+} \{c\}) = \#A$.

Für eine Menge $B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mit $B = C \cup D$ gilt $A \tilde{+} B = A \tilde{+} C \cup A \tilde{+} D$. Daraus folgt, dass die Kardinalität von A durch die Punktweise Addition einer anderen Menge nur steigen kann:

Sei $B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mit $B = \{c\} \cup D$:

$$\#(A \tilde{+} B) = \#(A \tilde{+} \{c\} \cup A \tilde{+} D) \geq \#(A \tilde{+} \{c\}) = \#A$$

Da das neutrale Element die Menge $\{0\}$ ist, gibt es für alle Mengen $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ mit $\#A > 1$ kein inverses Element, da es dafür eine Menge $B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ geben müsste, sodass $\#(A \tilde{+} B) = 1$, was aber nicht möglich ist.

Notiz: Oben wurde angenommen, dass $\#B \geq 1$. Falls $B = \emptyset$ gilt $A \tilde{+} \emptyset = \emptyset$. Damit kann \emptyset auch nicht das inverse Element von A sein. \emptyset kann auch nicht das neutrale Element sein, da $A \tilde{+} \emptyset = \emptyset \neq A$

c)

Lemma 0.1: Ist (G, \star) eine Gruppe, dann sind alle Links- und Rechtstranslationen ${}_a\star$ und \star_a Bijektionen für alle $a \in G$.

Proof:

Für alle $a \in G$ ist zu zeigen:

Die Funktion ${}_a\star : G \rightarrow G := x \mapsto a \star x$ ist invertierbar.

Die inverse Funktion von ${}_a\star$ ist gegeben durch ${}_{a^{-1}}\star$, da: $a \star (a^{-1} \star x) = x$ und $a^{-1} \star (a \star x) = x$ für alle $x \in G$ gilt und a^{-1} aufgrund der Gruppenstruktur existiert.

Das selbe gilt für die Rechtstranslation: Das Inverse der Funktion \star_a ist gegeben durch $\star_{a^{-1}}$, da $(x \star a) \star a^{-1} = x$ und $(x \star a^{-1}) \star a = x$ für alle $x \in G$. ■

Lemma 0.2: Sei (H, \star) eine nichtleere Halbgruppe. Wenn für alle $a \in H$, die Links- und Rechtstranslationen ${}_a\star$ und \star_a surjektive Abbildungen sind, dann ist (H, \star) eine Gruppe.

Proof: Aus der Surjektivität von ${}_a\star$ und \star_a folgt:

$$\forall a, x \in H, \exists y \in H, a \star y = x \quad (i)$$

$$\forall a, x \in H, \exists y \in H, y \star a = x \quad (ii)$$

Sei $a \in H$ beliebig aber fest. Es gibt ein $e \in H$, sodass $a \star e = a$ (folgt aus (i)). Weiter gibt es für jedes $g \in H$ ein $y \in H$, sodass $y \star a = g$ (folgt aus (ii)). Es gilt also

$$g \star e = (y \star a) \star e = y \star (a \star e) = y \star a = g$$

Da g beliebig gewählt war ist e Rechtsneutral zu allen Elementen von H .

Analog erhält man ein e' , das Linksneutral zu allen Elementen von H ist, es gilt also

$$g \star e = e' \star g = g \quad \forall g \in H$$

Daraus folgt: $e = e' \star e = e'$. Es gibt also ein Neutrales Element in H , das wir nun als e bezeichnen werden.

Um zu zeigen, dass (H, \star) eine Gruppe ist, fehlt noch, dass es für jedes Element ein inverses gibt.

Aus (i) folgt, dass es für jedes $a \in H$, ein Element a' gibt, sodass $a \star a' = e$. Aus (ii) folgt, dass es für jedes $a \in H$ ein Element a'' gibt, sodass $a'' \star a = e$.

$$\begin{aligned} a \star a' &= e \\ \Leftrightarrow a'' \star (a \star a') &= a'' \\ \Leftrightarrow (a'' \star a) \star a' &= a'' \\ \Leftrightarrow e \star a' &= a'' \\ \Leftrightarrow a' &= a'' \end{aligned}$$

Es gibt also für jedes $a \in H$ ein inverses Element a' , sodass $a \star a' = a' \star a = e$

■

Aufgabe 2

Aufgabe 5.2

(i)

Das Tupel $(R^X, +)$ ist abelsch, denn:

$$\forall f_1, f_2 \in R^X, \forall x_1, x_2 \in X : f_1(x_1) + f_2(x_2) = f_2(x_2) + f_1(x_1)$$

Dies gilt, da Addition in R kommutativ ist.

(ii)

$(P(X), \cap)$ ist keine Gruppe.

(iii)

$(P(X), \Delta)$, wobei $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = B \setminus A \cup A \setminus B = B \Delta A$$

Daher: abelsche Gruppe.

(iv)

Keine Gruppe.

(v)

Keine Gruppe.

b)

Lemma 0.3: Jede Gruppe mit höchstens vier Elementen ist abelsch.

Proof:

Sei (G, \star) eine Gruppe und e das neutrale Element.

Fall 1:

$$G = \{e\}$$

Einzig mögliche Verknüpfung:

$$e \star e = e$$

Elemente mit sich selber Verknüpft sind abelsch \Rightarrow für Fall 1 ist (G, \star) abelsch

Fall 2:

$$G = \{e, a\}$$

$$a \star e = a = e \star a$$

\Rightarrow Gruppe ist abelsch.

Fall 3:

$$G = \{e, a, b\}$$

Angenommen:

$$a \star b \neq b \star a$$

Es gilt:

$$a \star a' = a' \star a \wedge b \star b' = b' \star b$$

$$\Rightarrow a' \neq b \wedge b' \neq a$$

Daraus folgt $a \star b \neq e \wedge b \star a \neq e$.

Somit:

$$a \star b \neq e \wedge a \star b \neq a \wedge a \star b \neq b$$

$$\Rightarrow a \star b \notin G$$

\Rightarrow Widerspruch

Fall 4:

$$G = \{e, a, b, c\}$$

Annahme wie bei Fall 3:

Es gilt also weiterhin:

$$b \star a \neq e \wedge b \star a \neq a \wedge b \star a \neq b$$

$$a \star b \neq b \star a$$

Falls

$$b \star a = c \Rightarrow b \star a \notin G$$

Falls

$$a \star b = c \Rightarrow b \star a \notin G$$

\Rightarrow Widerspruch \Rightarrow Gruppe ist abelsch

\Rightarrow Eine Gruppe mit maximal 4 Elementen ist abelsch

Aufgabe 5

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe.

Lemma 0.4: $\text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1})$

Proof: Fall 1: $\text{ord}(a)$ ist endlich: Sei $n = \text{ord}(a)$. Es gilt $a^n = 1$.

Außerdem gilt

$$1 = a^n * (a^{-1})^n = 1 * (a^{-1})^n = (a^{-1})^n$$

Daraus folgt, dass $\text{ord}(a^{-1})$ maximal n ist. Im Folgenden zeigen wir, dass $\text{ord}(a^{-1})$ mindestens n ist.

Sei also $\text{ord}(a^{-1}) = m$ für ein $m < n$. Dann gilt $(a^{-1})^m = 1$ und

$$1 = a^m * (a^{-1})^m = a^m * 1 = a^m$$

Da $\text{ord}(a) > m$ ist dies ein Widerspruch.

Fall 2: $\text{ord}(a)$ ist unendlich, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n = 1$.

Wir zeigen nun durch einen Widerspruch, dass $\text{ord}(a^{-1})$ auch unendlich sein muss.

Sei also $(a^{-1})^m = 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n > m$:

$$1 = a^n * (a^{-1})^n = a^n * (a^{-1})^{n-m} = a^m$$

Das ist ein Widerspruch, da $\text{ord}(a)$ unendlich ist, es kann also kein m geben, sodass $a^m = 1$. ■

Lemma 0.5:

$$[(K(G), *) = (\{1\}, *)] \Leftrightarrow (G, *) \text{ ist abelsch}$$

Proof: \Rightarrow : Aus $[(K(G), *) = (\{1\}, *)]$ folgt, dass

$$\{a * b * a^{-1} * b^{-1} \mid a, b \in G\} = \{1\}$$

da die Erzeugermenge der Gruppe $(\{1\}, *)$ die Menge mit ausschließlich dem leeren Element ist.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} a * b * a^{-1} * b^{-1} &= 1 \quad \forall a, b \in G \\ \Leftrightarrow a * b * a^{-1} * b^{-1} * b * a &= b * a \quad \forall a, b \in G \\ \Leftrightarrow a * b &= b * a \quad \forall a, b \in G \end{aligned}$$

Das ist genau die Bedingung, die G zu einer abelschen Gruppe macht.

\Leftarrow : In einer abelschen Gruppe gilt $a * b * a^{-1} * b^{-1} = 1$ für alle $a, b \in G$. Damit ist

$$K(G) = \langle \{a * b * a^{-1} * b^{-1} \mid a, b \in G\} \rangle = \langle \{1 \mid a, b \in G\} \rangle = \langle \{1\} \rangle = \{1\}$$

da die von $\{1\}$ erzeugte Untergruppe von G : $(\{1\}, *)$ ist. ■

Aufgabe 5.6

Lemma 0.6: $\#U \mid \#G$

Proof:

$$\forall a \in G : \exists a \star U$$

$\forall a, b \in G$ gilt $a \star U$ und $b \star U$ sind entweder gleich oder disjunkt

$$\Rightarrow [a_n] = \{a \in G \mid a \star U = a_n \star U\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_n [a_n] = G$$

Es gilt:

$$\#A \cup B = \#A + \#B$$

$$\forall a \in G : \#a \star U = \#U$$

$$\Rightarrow \#G = \#\bigcup_n [a_n] = \#[a_1] \cup [a_2] \cup \dots \cup [a_n] = \#[a_1] + \#[a_2] + \dots + \#[a_n] = \#U + \#U + \dots + \#U = n * \#U$$

$$\Rightarrow \#G = n * \#U \Rightarrow \#U \mid \#G$$

■