Sonntag, 11. Januar 2026 18:40

10.5

$A \in K^{n\times m}$

$B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{m\times m}$

$\mathrm{Rang}(B) = n$ $\quad \mathrm{Rang}(C) = m \quad \mathrm{Rang}(A) \leq \min(n,m)$

zz $\mathrm{Rang}(BAC) = \mathrm{Rang}(A)$

aus oben folgt

$\mathrm{Rang}(BAC) \leq \mathrm{Rang}(A)$

$BAC = D$

$AC = B'D$

$A = B'DC'$

$\Rightarrow \mathrm{Rang}(A) \leq \mathrm{Rang}(ABC)$

$\Rightarrow \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(ABC)$

b)

$f: K^{n\times n} \ni A \to A^T \in K^{n\times n}$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\right)\\ \begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&3\\0&0\end{bmatrix}\end{array}\right\} \neq \Rightarrow \text{kein Ringhomomorphismus}$$

c)

Angenommen es existiert ein nichttriviales Ideal J

$\Rightarrow \quad A \cdot C \in J \quad C \cdot A \in J \quad \forall A \in J \land \forall C \in K^{n\times n}$

Falls A invertierbar $\Rightarrow 1 \in J \Rightarrow C \in J$ ↯

$\Rightarrow A$ ist nicht invertierbar

$J \neq \{0\} \Rightarrow \exists A \in J \; \exists i,j: \; A_{ij} = \alpha \neq 0 \qquad$ (Da $\alpha \in K \Rightarrow \exists \alpha^{-1}$)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 \cdots 1 \cdots 0\\ \vdots \quad \vdots\\ 0 \cdots 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \alpha & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \leftarrow i = \begin{bmatrix}a_{i1} \cdots \alpha \cdots a_{in}\\ 0\end{bmatrix} \in J$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a_{i1} \cdots \alpha \cdots a_{in}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ 1 & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & 0 \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \in J$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 \cdots 0\\ \vdots & 0\\ 0 & \end{bmatrix} \in J \Rightarrow \begin{bmatrix}1 0 \cdots 0\\ \vdots \quad \vdots\\ 0 \cdots 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \cdots 1 \cdots 0\\ \vdots \quad \vdots\\ 0 \cdots 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \cdots 1 \cdots 0\\ \vdots \quad \vdots\\ 0 \cdots 0\end{bmatrix} \in J \;\forall \alpha \in J$$

$$\Rightarrow T_{1\beta} \begin{bmatrix}0 \cdots 1 \cdots 0\\ \vdots \quad \vdots\\ 0 \cdots 0\end{bmatrix} \in J \; \forall \beta \in J \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \leftarrow \beta \in J \Rightarrow \sum_{a=1}^{n} \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \leftarrow a \in J \Rightarrow I \in J \Rightarrow C \in J \Rightarrow ↯ \Rightarrow$$ Es existieren keine nichttrivialen Ideale

Dies ist kein Widerspruch zu HA 7.4 c), da diese einen kommutativen Ring fordert, der hier nicht gegeben ist.

10.6

a) $n \in \mathbb{N}$ $\qquad P := \{A \in K^{n\times n} \mid$ In jeder Zeile & jeder Spalte von A steht genau eine 1 und sonst 0$\} \subseteq GL(n,K)$

(i) $\phi: P \ni A \to \sigma \in S_n$

(i) $\phi: P \ni A \to \sigma \in S_n$

wobei $\sigma(j) = \{ i \text{ sd. } a_{ij} = 1 \}$

Da nach der Mengenkonstruktion von P für jedes i genau ein j existiert sodass $a_{ij} = 1$ ist ϕ wohldefiniert.

Injektivität von ϕ

$\phi(A_1) = \phi(A_2) \Rightarrow \underbrace{\sigma_1 = \sigma_2}_{\substack{\sigma_1 = \phi(A_1) \\ \sigma_2 = \phi(A_2)}} \Rightarrow \forall j \in [[1, n]] \quad \sigma_1(j) = \sigma_2(j) \Rightarrow ((A_1)_{ij} = 1 \Leftrightarrow (A_2)_{ij} = 1)$

$\Rightarrow A_1 = A_2$

Surjektivität

$\# S_n = n! \in \mathbb{N}$

$\# P = n!$ (Für i=1 kann die 1 an n Stellen stehen. Für i=2 kann die 1 nur noch an n-1 Stellen stehen ... usw.)

$\Rightarrow \# S_n = \# P \in \mathbb{N}$ und ϕ ist injektiv $\Rightarrow \phi$ ist surjektiv

$\phi(A \cdot B) = \sigma_0$

$(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$

$\Rightarrow \sigma_0(k) = i \text{ sd } (A \cdot B)_{ik} \overset{=1}{=} \vee \overset{\text{i s.d.}}{\exists} j : a_{ij} = 1 = b_{jk}$

$\underbrace{\phi(A)}_{\sigma_1} \cdot \underbrace{\phi(B)}_{\sigma_2} = \sigma_1 \circ \sigma_2 \quad \Rightarrow \forall k: \sigma_1(\sigma_2(k)) = \sigma_1(j) \text{ sd } b_{jk} = 1$

$= i \text{ s.d } a_{ij} = 1 \wedge b_{jk} = 1$

$\Rightarrow \sigma_0 = \sigma_1 \circ \sigma_2$

$\Rightarrow$ Isomorphismus

(ii)

z.z. $A \cdot A^T = I$

$(A \cdot A^T)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a^T_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = I$

(iii)

$T_{13} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A}$

$$\downarrow$$

$$T_{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$T_{25}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$T_{24}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I = T_{24}\cdot T_{25}\cdot T_{12}\cdot T_{13}\cdot A$$

$$\Rightarrow (T_{24}\cdot T_{25}\cdot T_{12}\cdot T_{13}) = A^{-1}$$

$$\Rightarrow A = (T_{24}\cdot T_{25}\cdot T_{12}\cdot T_{13})^{-1} = T_{13}\cdot T_{12}\cdot T_{25}\cdot T_{24}$$

(b) Falls $a_{11} = a_{21} \neq 0$

$$S_{21}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&a_{22}+a_{12}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

Falls $a_{21} = 0$ $a_{11}\neq 0 \Rightarrow a_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&a_{22}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

Falls $a_{11} = 0$ $a_{21}\neq 0$

$$T_{12}\begin{bmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}\\0&a_{12}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{K}_2)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\} = GL(2,\mathbb{K}_2)$$

(ii)

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right) = 3$$

(ii)

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=3$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=2$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{ord}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right)=3$$

(iii)

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\neq\ \Rightarrow \text{nicht Kommutativ}$$