10.2)

$A \in \mathbb{R}^{3\times 4} \qquad B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

$$AB = \begin{array}{c} \begin{matrix} I & II & III & IV \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + 4\,IV & \big| & \alpha(I+II+III+IV) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \alpha \\ 0 & \cdot & \alpha \\ 0 & \cdot & \alpha \\ 4 & \cdot & \alpha \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & a & \alpha \\ 0 & b & \alpha \\ 0 & c & \alpha \\ 4 & d & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ — & 2\,II - 3\,III & — & \\ — & 2\,II - 3\,III & — & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\alpha = -3$

$b = c = 2$ $\quad$ a, d sind nicht festgelegt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & y & -3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ B ist nicht eindeutig Bestimmt

a) z.z. $\dim(K^{n\times n}_{sym}) = \frac{1}{2}n(n+1)$

<u>Basis</u>: Sei $E_{ij} \in K^{n\times n}$ mit $(E_{ii})_{kl} = 0 \quad \forall k \neq \; \forall_{l \neq j}$

und $(E_{ii})_{ii} = 1$

Für $i \neq j$ soll gelten: $(E_{ij})_{ij} = 1$ und

$(E_{ij})_{ji} = -1$ (0 für alle anderen Einträge)

$B = \{E_{ij} \mid \text{mit } i \leq j \quad \forall i,j \in [1,n]\}$

B ist offensichtlich linear unabhängig

Jedes $A \in K^{n\times n}_{symm}$ kann als Linearkombination

$$A = \sum_{i\leq j}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} \quad \text{dargestellt werden}$$

mit $\alpha_{ij} = A_{ij}$

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} (n-i)+1 = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^2 + n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n+1)$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$B = \{ E_{ij} \mid i < j \ \forall i,j \in [\![1,n]\!] \}$$

eine Basis für $K^{n \times n}_{skew}$ ist

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} (n-1) = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{2} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n-1)$$

$$\dim(K^{n \times n}_{skew} \cap K^{n \times n}_{symm}) = \dim \{0\} = 0$$

$$\dim(K^{n \times n}_{symm} \oplus K^{n \times n}_{skew}) = \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} n(n-1) - 0$$

$$= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$$

$$= n^2$$

$$\Rightarrow K^{n \times n}_{sym} \oplus K^{n \times n}_{skew} = K^{n \times n} \quad (\text{Lemma } 14.7)$$

Sei $A \in K^{n\times n}$, Zerlegung in $B \in K^{n\times n}_{sym}$, $C \in K^{n\times n}_{skew}$

$B_{ii} = A_{ii} \quad \forall i$

$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \qquad A_{ji} = B_{ij} - C_{ij} \quad \forall i \neq j$

$\Rightarrow A_{ij} - C_{ij} = A_{ji} + C_{ij}$

$\rightarrow C_{ij} = \frac{1}{2} A_{ij} - \frac{1}{2} A_{ji}$

$B_{ij} = A_{ji} + C_{ij} = \frac{1}{2} A_{ji} + \frac{1}{2} A_{ij}$

b) Die Dimension von $K^{n\times n}_{sym}$ bleibt gleich, also gilt

$\dim K^{n\times n}_{symm} = \frac{n(n+1)}{2}$

Die Dimension von $K^{n\times n}_{skew}$ war vorher $\frac{n(n-1)}{2}$,

da die Diagonale gleich null sein musste

(da $-a = a \Rightarrow a = 0 \ \forall K$ mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$)

für $\mathrm{char}(K) = 2$ gilt allerdings $-1 = 1$

und damit ist $-A^T = A^T$, die Diagonale

von A_{skew} kann also Werte $\neq 0$ enthalten.

$S_{ij} = I + \alpha E_{ij}$ $\qquad$ $S_{ij}' = I - \alpha E_{ij}$

$$(I + \alpha E_{ij})(I - \alpha E_{ij}) = I + \alpha E_{ij} - \alpha E_{ij} + \alpha^2 E_{ij}^2$$

$$= I$$

$E_{ij}^2 = 0$ for $i \neq j$