

LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

1.

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Lin. Unabhängigkeit

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

 \Rightarrow linear unabhängig

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3$$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & -1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R2} - \text{R1}, \text{R3} - \text{R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_2 - \alpha_3 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{R1} \leftrightarrow \text{R2}, \text{R3} + \text{R2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad \alpha_2 = \alpha_3 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \in \mathbb{R} \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \in \mathbb{R}$$

 $\Rightarrow ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1))$ ist eine Basis des $(\mathbb{R}_3)^+$

$$b) \text{ (i)} \quad \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \sqrt{2} \alpha_2 + \alpha_3 = \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{3} + \alpha_3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

 \Rightarrow kein Erzeugendensystem(ii) Übung 8 $\Rightarrow X$ muss unendlich sein

$$E = \{e_x \mid x \in X\} \cup \{\emptyset\}$$

E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt!

$\hookleftarrow \cup \cup \times \dots$
 E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:
 $Y \subseteq X$ mit Y ist unendlich und Y^c ist unendlich

$$f: X \rightarrow K$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in Y \\ 1 & \text{falls } x \in Y^c \end{cases}$$

Falls E ein Erzeugendensystem ist, muss eine
linearkombination existieren, die f darstellt. Sei $T \subseteq X$ mit
 T endlich:

$$\forall x \in X : f(x) = \sum_{x \in T} \alpha_x e_x(x) + \alpha_{id} \cdot 1$$

Dass $f(x)=1$ für unendlich viele $x \in X$, muss $\alpha_{id}=1$
sein.
 $\Rightarrow f(x)$ kann nur für endlich viele $x \in X$ ungleich 1 sein
 \Rightarrow Widerspruch, da Y unendlich

(iii) Übung 8 $\Rightarrow \#X$ muss gerade sein, oder X unendlich

$$E := \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\} \quad \text{zu erzeugen } \beta(X)$$

Sei X endlich und $\#X$ gerade um $E_0 \subseteq X$ mit $\#E_0$ gerade:

$$\Delta_{x \in E_0} X \setminus \{x\} = E_0$$

Sei $E_1 \subseteq X$ mit $\#E_1$ ungerade und $\#E_1 \neq 0$

$$\Delta_{x \in E_1} X \setminus \{x\} = X \setminus E_1 \quad (\text{nach Lösung Übung 8})$$

\Rightarrow Wir können alle geraden Teilmengen von X
und die Komplemente aller ungeraden Teilmengen
von X als Linearkombi. darstellen

$\forall E_1 : \#(X \setminus E_1)$ ist ebenfalls ungerade

$\forall F \subseteq X$ mit $\#F$ ungerade: $F^c \cap X \wedge \#F^c$ ist ungerade
 $\Rightarrow \Delta_{x \in F} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$

$$\forall I \subset X \text{ mit } f \text{ umfassend} : I \cup \cap_{i \in I} \pi_i = X$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in F^c} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$$

\Rightarrow Wir können alle Teilmengen als Linearkombination darstellen

Da Linearkombination endlich sein müssen, müssen F und E_0 endlich sein $\Rightarrow X \in P(X)$ kann nicht durch LK erzeugt werden, falls X unendlich

c)
(i) $\{ f \in \mathbb{R}^{[1,n]} \mid \sum_{i=1}^n f(i) = 0 \}$

Wir stellen die Funktionen wie folgt dar:

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad f(n) = a_n$$

$$a_1 = \sum_{k=2}^n a_k \text{ muss immer gelten}$$

Basis-Vorschlag:

$$\{e_n - e_1 \mid n \in [2, n]\}$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n] : \alpha_k = 0$$

Erzeugendensystem:

$$\sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n -\alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [2, n] : \alpha_k = \alpha_k$$

(ii) $E = \langle \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}_2, +_{\mathbb{Z}_2})$ mit Δ als Addition

$\Rightarrow \forall B \in E : \#B \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ ist endlich
 $\forall A, B \in E$ mit $\#A = \#B + 1 \wedge B \subset A$.

$\Rightarrow \exists! a \in \mathbb{Z}$ mit $a \in A \wedge a \notin B$

$$\Rightarrow A \Delta B = \{\alpha\}$$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \exists A, B \in E : A \Delta B = \{\alpha\}$

zu zeigen: $\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von E

$\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset E$ (siehe oben)

$\stackrel{z.z}{\{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}}$ ist linear unabhängig

und
 $\forall I$, d.h. eine endliche Menge $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ eine induktive Familie:

$$\Rightarrow \forall i, j \in I : v_i \cap v_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} v_i \neq \emptyset$$

Für jede Linearkombination

$$\bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i \quad \exists I \subset I_0 \text{ s.d. } \forall j \in I_0 \text{ mit } \alpha_j = 1 \text{ gilt } j \in I$$

Es gilt außerdem: $\forall A : A \Delta \emptyset = A$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \bigcup_{i \in I_0 \setminus I} \emptyset \cup \bigcup_{i \in I} v_i = \bigcup_{i \in I} v_i \neq \emptyset \text{ falls } I \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I_0} \alpha_i v_i = \emptyset \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_0$$

$\stackrel{z.z}{E} \subset \langle \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle$

$$\Leftrightarrow \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\} \subset \langle \{\{\alpha\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle =: D$$

Sei $B \in \{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \#A \in A\}$

$$\Rightarrow \forall a \in B \Rightarrow \{\alpha\} \in D$$

$\Leftrightarrow B$ endlich $\Rightarrow I \cap \mathbb{N}$ endlich s.d. $I_i = \Delta_i = B$

$\Rightarrow \forall a \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists a \in \cup$

\mathcal{B} endlich $\Rightarrow \exists I_0 \subset \mathbb{N}$ endlich s.d. $\bigcup_{i \in I_0} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{B} \in D$

$\Rightarrow \{\{a\} \mid a \in \mathcal{B}\}$ ist Basis von $\{A \in P(\mathcal{C}) \mid \#A \in A\}$

d)

Sei B eine Basis von V und $v \in V$. Weiter sei $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ die Darstellung von v in Bezug auf B . v_1, \dots, v_n seien die Lektürezeichen, also das sind die Basisvektoren von B . Mit $j = 1, \dots, n$, dann ist:

$$v = \sum_{j=1}^n (\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{j-ter Einheit}}, \underbrace{v_j, 0, \dots, 0}_{\text{j-ter Einheit}}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$$

ein Basisvektor von V .

Eine Linearkombination von B mit $v_{ij} \in B_i$, $b \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ij} (0, \dots, 0, \underbrace{v_{ij}, 0, \dots, 0}_{\text{i-ter Einheit}}) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{ij} v_{ij}, 0, \dots, 0, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \forall i \sum_{j=1}^b \alpha_{ij} v_{ij} = 0$

Da $\forall i, j : v_{ij} \in B_i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig

$$\langle B \rangle = V$$

$$\langle B \rangle \subseteq V!$$

Wir nutzen wieder die Linearkombination von oben:

$$v := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ij} (0, \dots, 0, \underbrace{v_{ij}, 0, \dots, 0}_{\text{i-ter Einheit}}) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{ij} v_{ij}, 0, \dots, 0, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn} \right)$$

$\forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^b \alpha_{ij} v_{ij} \in V_i \text{, da } v_{ij} \in B_i$

$\Rightarrow v \in V$

$V \subset \langle B \rangle : \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in V :$

$\Rightarrow \forall i \text{ mit } 1 \leq i \leq n : a_i \in V_i$

\Rightarrow Es existiert eine Linearkombination mit $v_{ij} \in B_i$ und

$$b \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^b \alpha_{ij} v_{ij} = a_i$$

Es gilt: $\forall j : (0, \dots, 0, \underbrace{v_j, 0, \dots, 0}_{\text{j-ter Einheit}}) \in \langle B \rangle$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (0, \dots, 0, \overset{\text{Index}}{a_1}, 0, \dots, 0) \in \langle \beta \rangle \\ & \Rightarrow (\overset{\text{1 for } \rightarrow \text{Index}}{a_1}, \dots, a_n) \in \langle \beta \rangle \Rightarrow V = \langle \beta \rangle \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den Punktweisen Verknüpfungen.

Lemma 0.1: Falls X endlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \#X$$

Proof: Sei B_X folgende Familie in K^X :

$$B(x_0) : X \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: B_X ist eine Basis von K^X und $\#B_X = \#X$. Die zweite Aussage ist trivial, für die erste Aussage benötigen wir zunächst die Lineare Unabhängigkeit von B .

Sei

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0) = 0_{K^X}$$

Das gilt, wenn

$$\forall x' \in X, \left(\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0) \right)(x') = 0_K$$

Da alle Summenglieder mit $x' \neq x_0$ sowieso verschwinden, können wir auch schreiben:

$$\forall x' \in X, \alpha_{x'} B(x')(x') = \alpha_{x'} \cdot 1_K = 0_K$$

Damit ist B_X linear unabhängig.

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\langle B_X \rangle = K^X$. Sei $f \in K^X$. Dann setzen wir $a_x = f(x)$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B_{x_0} &= f \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{x_0 \in X} f(x_0) B_{x_0} \right)(x) &= f(x) \quad \forall x \in X \\ \Leftrightarrow f(x) B(x) &= f(x) \cdot 1_k = f(x) \quad \forall x \end{aligned}$$

Damit können alle Elemente von K^X durch die Basis erzeugt werden. ■

Lemma 0.2: Falls X unendlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \infty$$

Proof: Zu zeigen: Es gibt eine Unendliche linear unabhängige Familie $B_X \subseteq K^X$. Damit kann es keine endliche Basis geben, wodurch die Unendlichkeit der Dimension gezeigt ist. Sei B_X dafür folgende Familie in K^X :

$$B(x_0) : X \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

. Zu zeigen: B_X ist linear unabhängig. Das funktioniert genau gleich wie im Beweis drüber. ■

(ii)

Sei nun:

$$U := \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}$$

$$W := \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

Lemma 0.3: $\dim_{K(U)} = \dim_{K(K^X)} - 1$ (also falls X unendlich ist)

Proof: Sei $X' = X \setminus \{x_0\}$. Sei $B_{X'}$ folgende Familie in $K^{X'}$:

$$B(x') : X' \rightarrow K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x' \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: $B_{X'}$ ist eine Basis von U : Gilt offensichtlich, da alle Elemente außer x_0 einmal mit der 1_K getroffen werden. Damit ist

$$\dim_K(U) = \#B_{X'} = \#X' = \#X - 1 = \dim_K(K^X)$$

■

Lemma 0.4: $\dim_{K(W)} = 1$

Proof: Die Menge der Konstanten Funktionen W wird durch die Menge $B = \{x \mapsto 1_k\}$ erzeugt. Damit hat W eine Dimension von 1. ■

Lemma 0.5:

$$\dim_K(U \cap W) = \dim_K(\{x \mapsto 0_K\}) = 0$$

Proof: Gilt, da $U \cap W$ nur den Nullvektor enthält und damit $U \cap W = \langle \{\} \rangle$ ■

b)

Lemma 0.6: Sei $(K, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. V ist genau dann K-endlichdimensional, wenn V endlich ist.

Dann gilt außerdem: $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$.

Proof: Sei B eine Basis von V . Da eine Basis Vektoren eindeutig erzeugt, gilt:

$$V = \bigcup_{b \in B} b \cdot K = \biguplus_{b \in B} b \cdot K$$

(\uplus meint die Disjunkte Vereinigung).

“ \Rightarrow ”: Wenn B endlich ist (also V endlichdimensional), dann ist V offensichtlich endlich, da jede Skalarmultiplikation $b \cdot K$ nur endlich viele Elemente erzeugt.

“ \Leftarrow ”: Wenn V endlich ist, dann muss auch B endlich sein, da die disjunkte Vereinigung sonst unendlich viele Elemente erzeugen würde. Da B endlich ist, ist dann auch V endlichdimensional.

Wenn B (und damit auch V) endlich ist, gilt:

$$\#V = \# \biguplus_{b \in B} b \cdot K = \prod_{b \in K} \#b \cdot K = \prod_{b \in K} \#K = (\#K)^{\#B} = (\#K)^{\dim_K(V)}$$

■

Nr. I-9.3

a) Wenn U und W komplementär sind,
dann gilt:

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$$

$$U \cap W = \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \wedge f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) \quad \forall x \in X\}$$

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow U \oplus W = V$$

■

zu ① \Rightarrow ②:

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Rightarrow V = \sum_{i \in I} U_i$$

Angenommen es gibt die Darstellungen

$$V = \sum_{i \in I_1} u_i = \sum_{i \in I_2} u'_i \quad \text{mit } I_1, I_2 \subseteq I$$

endlichen Teilmengen.

$$\Rightarrow \sum_{i \in I_1} u_i - \sum_{i \in I_2} u'_i = 0$$

Da die Summe direkt ist, muss Folgendes
gelten:

Für $i \in I_1 \cap I_2$ muss $u_i = u'_i$,

für $i \in I_1 \setminus I_2$ muss $u_i = 0$ und

für $i \in I_2 \setminus I_1$ muss $u'_i = 0$ gelten.

Die Darstellung $V = \sum_{i \in I_0} u_i$ ist also i.W. eindeutig.

■

$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$:

Es gilt: $v = \sum_{i \in I_0} u_i$

also muss nur noch gezeigt werden, dass die
Summe direkt ist, sprich

$0 = \sum_{i \in I_0} u_i$, nur wenn $u_i = 0 \forall i \in I_0$.

Ist $v = 0$, so ist die Summe nach Voraussetzung
eindeutig und die Bedingung ist erfüllt.