

## Zettel 3

Bearbeitet von:

Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler(Tutorium:Gregor Teupke(Mi 16:15))

### Aufgabe 1

a)

$$\{(0, 0), (1, 0)\} \in R$$

$$\{(1, 0), (2, 0)\} \in R$$

$$\{(0, 0), (2, 0)\} \notin R$$

$\Rightarrow$  nicht transitiv

b)

$$R := \{(a, b) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

**Lemma 0.1:**  $R$  ist eine Äquivalenzrelation.

*Proof:* Reflexivität:

da  $\mathbb{A}$  eine Partition von  $X$  ist, gilt für jedes  $a \in X : \exists A \in \mathcal{A}, a \in A$ , darum ist  $(a, a) \in \{(a, a) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A}, a \in A \wedge a \in A\} \subset R$

Symmetrie:  $R = \{(a, b) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$

$$R = \{(b, a) \in X \times X \mid \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A\}$$

d. h. für alle  $a, b \in X$  gilt:

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{A} : a \in A \wedge b \in A \\ &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \wedge a \in A \\ &\Leftrightarrow (b, a) \in R \end{aligned}$$

Transitivität: Für alle  $a, b, c \in X$  gilt:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A) \wedge (\exists B \in \mathcal{A} : b \in B \wedge c \in B)$$

Da  $\mathbb{A}$  eine Partition von  $X$  ist, gilt:  $\exists! A \in \mathcal{A}, b \in A$  d.h.  $A = B$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \\ &\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \wedge c \in A \\ &\Leftrightarrow (a, c) \in R \end{aligned}$$

■

**z.z**

$$X/R = \mathcal{A}$$

*Proof:*

$$\mathcal{A} \subset X/R :$$

Da eine Partition nie  $\emptyset$  enthält:  $\forall A \in \mathcal{A} \exists a \in A$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x \mid \exists B \in \mathcal{A} : a \in B \wedge x \in B\}$$

Da  $\mathcal{A}$  eine Partition ist, gilt  $\forall B \in \mathcal{A} : a \in B \Rightarrow A = B$

$$\Rightarrow [a]_R = \{x \mid a \in A \wedge x \in A\}$$

$$\Rightarrow [a]_R = A$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : \exists [a] = A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \subset X/R$$

$$X/R \subset \mathcal{A} :$$

$$[a] := \{b \mid \exists A \in \mathcal{A} : b \in A \wedge a \in A\}$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R : \exists A \in \mathcal{A} : a \in A$$

$$\Rightarrow \forall [a] \in X/R \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } a \in A :$$

$$[a] = \{b \mid b \in A \wedge a \in A\}$$

$$\Rightarrow [a] = A$$

$$\Rightarrow X/R \subset \mathbb{A}$$

■

## Aufgabe 2

a)

(i)

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \wedge x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq 0\}$$

**Maximum bestimmen**

Vermutung: Das Maximum ist  $(0, 0)$

*Proof:*

**z.z**

$$\forall (x_1, x_2) \in A : ((x_1, x_2), (0, 0)) \in R$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in A : (x_1 < 0) \vee (x_1 = 0) \wedge (x_2 \leq 0)$$

$$\text{da } (x_1, x_2) \in A \text{ ist } x_1 \leq 0 \wedge x_2 \leq 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$  ist das Maximum und Supremum und maximales Element von  $A$

■

### Minimale Elemente bestimmen

Vermutung:  $(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1$  sind die minimalen Elemente von A

z.z

$$\forall (x_1, x_2) \in A \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 = 1 : \forall (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \notin R$$

*Proof:*

Annahme:

$$\exists (y_1, y_2) \in A : ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \in R$$

$$\Rightarrow y_1 \leq x_1 \wedge y_2 \leq x_2$$

Da  $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 0$  gilt:

$$\Rightarrow y_1^2 \geq x_1^2 \wedge y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \wedge y_2^2 \geq x_2^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 \geq 1 - x_2^2 \wedge y_2^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$y_1^2 + y_2^2 \Rightarrow \underbrace{1 - x_2^2 + y_2^2}_{>0}$$

$$y_1^2 + y_2^2 \geq 1$$

$$(y_1, y_2) \notin A$$

$\Rightarrow$  Widerspruch

■

minimale Elemente sind also  $\{x_1, x_2 | (x_1, x_2) \in A \wedge (x_1^2 + x_2^2) = 1\}$  Es gibt kein Infimum, da es keine Vergleichbarkeit zwischen den minimalen Elementen gibt.

**(ii)**

Das Supremum kann nicht mehr eindeutig bestimmt werden, da  $\exists y \in \mathbb{R} : \forall (0, x) \in A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) ((0, x) < (0, y))$

**b)**

$\prec$  ist eine Ordnungsrelation  $\Rightarrow \prec$  ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

$$\prec := \prec \setminus \Delta x$$

z.z  $\prec$  ist irreflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

*Proof:*

$$\prec = \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b\}$$

irreflexiv:

Annahme  $\prec$  ist nicht irreflexiv. Dann:

$$\exists a \in X : (a, a) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, a) \in \preccurlyeq \wedge a \neq a \Rightarrow \text{Widerspruch} \Rightarrow \prec \text{ ist irreflexiv.}$$

antisymmetrisch:

Annahme:  $\prec$  ist nicht antisymmetrisch. Dann:

$$\exists a, b \in X : (a, b) \in \prec \wedge (b, a) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \preccurlyeq \wedge (b, a) \in \preccurlyeq$$

Da  $\preccurlyeq$  antisymmetrisch ist, folgt:

$$a = b$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch den } \prec \text{ ist irreflexiv} \Rightarrow \prec \text{ ist antisymmetrisch.}$$

transitiv:

$$(a, b) \in \prec \wedge (b, c) \in \prec$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \preccurlyeq \wedge (b, c) \in \preccurlyeq \wedge a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$$

( $a \neq c$  gilt da  $\prec$  irreflexiv)

$$\Rightarrow (a, c) \in \preccurlyeq \wedge a \neq c$$

$$\Rightarrow (a, c) \in \prec \Rightarrow \text{transitiv}$$

■

**(ii)**

$\prec$  ist transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch

$$\preccurlyeq := \prec \cup \Delta_x = \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \in \preccurlyeq \vee (a, b) \in \Delta_x\}$$

z.z.

$$\preccurlyeq$$

ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

*Proof:*

reflexiv:

$$\forall a \in X : (a, a) \in \preceq$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in X : (a, a) \in \prec \vee \underbrace{(a, a) \in \Delta_x}_{\top}$$

$\Rightarrow \preceq$  ist reflexiv.

antisymmetrisch: Annahme:  $\preceq$  ist nicht antisymmetrisch. Dann:

$$\exists a, b \in X : (a, b) \in \preceq \wedge (b, a) \in \preceq \wedge a \neq b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a, b) \in \prec \wedge (b, a) \in \prec}_{\perp \text{ da } \prec \text{ antisym.}} \vee \underbrace{(a, b) \in \Delta_x \wedge (b, a) \in \Delta_x}_{\perp \text{ da } a \neq b}$$

$\Rightarrow$  Widerspruch  $\Rightarrow \preceq$  ist antisymmetrisch.

transitiv:

Seien  $(a, b) \in \preceq$  und  $(b, c) \in \preceq$ .

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Liegt  $(a, b) \in \Delta_x$ , so ist  $a = b$  und damit  $(a, c) = (b, c) \in \preceq$ .

Liegt  $(b, c) \in \Delta_x$ , so ist  $b = c$  und damit  $(a, c) = (a, b) \in \preceq$ .

Liegen  $(a, b) \in \prec$  und  $(b, c) \in \prec$ , so folgt  $a \prec$  transitiv:  $(a, c) \in \prec \subseteq \preceq$ .

In allen Fällen gilt  $(a, c) \in \preceq \Rightarrow$  transitiv.

■

Anmerkung: Die Transitivität folgt auch, da  $\prec \cup \Delta_x$  die reflexive Hülle von  $\prec$  bildet, und transitiv bei der Hüllbildung erhalten bleibt.

### 3.3)

**Lemma 0.2:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $A_1, A_2 \subseteq X$   $B_1, B_2 \subseteq Y$  Mengen:

$$(i) \quad f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$$

$$(ii) \quad f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

*Proof:* zu i: Für alle  $y \in Y$  gilt

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1) \setminus f(A_2) &\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \setminus \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = y\} \\
&\Leftrightarrow y \in \{y \in Y \mid \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y\} \wedge y \notin \{y \in Y \mid \exists a_2 \in A_2, f(a_2) = y\} \\
&\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge \nexists a_2 \in A_2, f(a_2) = y \\
&\Leftrightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge \forall a_2 \in A_2, f(a_2) \neq y \\
&\Rightarrow \exists a_1 \in A_1, f(a_1) = y \wedge a_1 \notin A_2 \\
&\Rightarrow \exists a_1 \in A_1 \setminus A_2, f(a_1) = y \quad \text{wichtig: hier gilt Äquivalenz im Allgemeinen nicht} \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2).
\end{aligned}$$

Aus  $y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$  folgt  $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$ . □

Zu (ii): für alle  $x \in X$  gilt

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \setminus B_2\} \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2 \\
&\Leftrightarrow x \in \{x \in X \mid f(x) \in B_1\} \wedge x \notin \{x \in X \mid f(x) \in B_2\} \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)
\end{aligned}$$

Aus der logischen Äquivalenz folgt die Gleichheit (ii). ■

**Lemma 0.3:** 6.5b) Seien  $(X_i)_{i \in I}$   $I$  indizierte Teilmengen von  $X$  und eine Relation  $R \subseteq X \times Y$ . Es gilt:

$$B_r\left(R, \bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)}$$

*Proof:* Für alle  $y \in Y$  gilt:

$$\begin{aligned}
y \in B_r\left(R, \bigcap_{i \in I} X_i\right) &\Leftrightarrow \exists a \in \bigcap_{i \in I} X_i, (a, y) \in R \\
&\Leftrightarrow \exists a \in X, \forall i \in I, a \in X_i, (a, y) \in R \\
&\Rightarrow \forall i \in I, \exists a \in X_i, (a, y) \in R \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} \{b \in Y \mid \exists a \in X_i, (a, b) \in R\} \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} B_{r(R, X_i)}
\end{aligned}$$

■

**Lemma 0.4:**

6.5d) Seien  $(Y_i)_{i \in I}$   $I$  indizierte Teilmengen von  $Y$  mit der Relation  $R \subseteq X \times Y$ . Aussage 6.5d) aus dem Skript gilt im Allgemeinen Fall nicht zwingend.

*Proof: Gegenbeispiel* zur Verallgemeinerung von 6.5d): Sei  $X = \{a_1, a_2\}$ ,  $Y = \{b_1, b_2\}$  und  $R = X \times Y$ . Sei  $Y_1 = \{a_1\}$  und  $Y_2 = \{a_2\}$ . Das heißt:

$$U_{r(R, \bigcap_{i \in I} Y_i)} = \emptyset$$

Es gilt allerdings auch:

$$\bigcap_{i \in I} U_{r(R, Y_i)} = X$$

Aus diesem Widerspruch folgt, dass die obige Aussage im allgemeinen nicht gilt. Die schwächere Version mit  $\subseteq$  statt  $=$  würde allerdings gelten. ■

c)

**Lemma 0.5:** Zurückziehen einer Äquivalenzrelation entlang einer Funktion: Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion und  $\tilde{\sim}_Y$  eine Äquivalenzrelation auf  $Y$ .

$$x_1 \tilde{\sim}_X x_2 := f(x_1) \tilde{\sim}_Y f(x_2)$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf  $X$ .

**Proof: Reflexivität**

Für alle  $x \in X$  gilt:  $x \tilde{\sim}_X x$ , da  $f(x) \tilde{\sim}_Y f(x)$ , was aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation  $\tilde{\sim}_Y$  folgt.

**Symmetrie**

Für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt  $x_1 \tilde{\sim}_X x_2 \Rightarrow x_2 \tilde{\sim}_X x_1$ , da  $f(x_1) \tilde{\sim}_Y f(x_2) \Rightarrow f(x_2) \tilde{\sim}_Y f(x_1)$ . Das folgt wieder aus den Eigenschaften der Äquivalenzrelation  $\tilde{\sim}_Y$ .

**Transitivität**

Für alle  $x_1, x_2, x_3 \in X$  gilt

$$x_1 \tilde{\sim}_X x_2 \wedge x_2 \tilde{\sim}_X x_3 \Rightarrow x_1 \tilde{\sim}_X x_3$$

das ist Äquivalent zu der Aussage: (aufgrund der Definition von  $\tilde{\sim}_X$ )

$$f(x_1) \tilde{\sim}_Y f(x_2) \wedge f(x_2) \tilde{\sim}_Y f(x_3) \Rightarrow f(x_1) \tilde{\sim}_Y f(x_3)$$

diese Aussage folgt ebenfalls aus der Transitivität von  $\tilde{\sim}_Y$  ■

### 3.4

- a)  $R = W \times K$ . Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von jedem Kunden.
- b)  $R = W \times \emptyset$ . Alle Waschmaschinen waschen gerade nichts.
- c)  $R$  ist eine Abbildung: Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von einem Kunden.

- d)  $R$  ist surjektiv aber nicht injektiv: Alle Kunden werden bedient, d.h. die Wäsche von jedem Kunden wird von mindestens einer Waschmaschine gewaschen. (Und es gibt mindestens einen Kunden, dessen Wäsche von mindestens zwei Maschinen gewaschen wird)
- e)  $R$  ist injektiv: Die Wäsche von jedem Kunden wird von höchstens einer Waschmaschine gewaschen.
- f)  $R$  ist bijektiv: Jede Waschmaschine wäscht die Wäsche von genau einem Kunden.