LA Zettel 8

Bearbeitet von Leon Krasniqi, Christian Krause, Silas Gaschler (Tutorium: Gregor Teupke (Mi 16:15))

Zettel 9

Samstag, 6. Dezember 2025 14:45

1.

a) z.z lin. Unabhängigkeit

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha_3=0$$

$$\alpha_2-\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$

$\Rightarrow$ linear Unabhängig

$$\mathbb{R}^3\ni\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$a_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$
$$a_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$
$$a_3=\alpha_2-\alpha_3$$

LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a_1\\1&1&-1&a_2\\0&1&-1&a_3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&2&a_1-a_2\\1&0&0&a_2-a_3\\0&1&-1&a_3\end{array}\right)\quad\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&\frac{a_1-a_2}{2}\\1&0&0&a_2-a_3\\0&1&0&a_3+\frac{a_1-a_2}{2}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_1=a_2-a_3\in\mathbb{R}\qquad \alpha_2=a_3+\frac{a_1-a_2}{2}\in\mathbb{R}\qquad \alpha_3=\frac{a_1-a_2}{2}\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow ((1,1,0),(1,1,1),(1,-1,-1))$ ist eine Basis des $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$

b) (i) $$\mathbb{R}^3\ni\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1=0 \ \wedge\ \sqrt{2}\,\alpha_2+\alpha_3=\sqrt{3}$$

$$\alpha_2=\frac{\sqrt{3}+\alpha_3}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\alpha_3}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ Kein Erzeugendensystem

(ii) Übung 8 $\Rightarrow X$ muss unendlich sein

$$E=\{e_x \mid x\in X\}\cup\{1\}$$

E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:

E ist kein Erzeugendensystem, wie dieses Gegenbeispiel zeigt:
$Y \subseteq X$ mit Y ist unendlich und Y^c ist unendlich

$$f: X \to K$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in Y^c \\ 1 & \text{falls } x \in Y \end{cases}$$

Falls E ein Erzeugendensystem ist, muss eine Linearkombination existieren, die f darstellt. Sei $I \subset X$ mit I endlich:

$$\forall x \in X: \quad f(x) = \sum_{x \in I} \alpha_x e_x(x) + \alpha_{id} \cdot 1$$

Da $f(x)=1$ für unendlich viele $x \in X$, muss $\alpha_{id} = 1$ sein.
$\Rightarrow$ $f(x)$ kann nur für endlich viele $x \in X$ ungleich 1 sein
$\Rightarrow$ Wiederspruch, da Y^c unendlich

(iii) Übung 8 $\Rightarrow$ $\# X$ muss gerade sein, oder X unendlich

$$E := \{ X \setminus \{x\} \mid x \in X \} \qquad \text{zu erzeugen } \mathcal{P}(X)$$

Sei X endlich und $\# X$ gerade un $E_0 \subseteq X$ mit $\# E_0$ gerade:

$$\Delta_{x \in E_0} X \setminus \{x\} = E_0$$

Sei $E_1 \subseteq X$ mit $\# E_1$ ungerade und $\# E_1 \neq 0$

$$\Delta_{x \in E_1} X \setminus \{x\} = X \setminus E_1 \qquad \text{(nach Lösung Übung 8)}$$

$\Rightarrow$ Wir können alle geraden Teilmengen von X und die Komplemente aller ungeraden Teilmengen von X als Linearkombi. darstellen

$\forall E_1: \# (X \setminus E_1)$ ist ebenfalls ungerade

$\forall F \subset X$ mit $\# F$ ungerade: $F^c \subset X \wedge \# F^c$ ist ungerade

$$\Rightarrow \Delta_{\cdot} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$$

$\forall\, F \subset X$ mit $\# F$ ungerade : $F^c \subset X \wedge \# F^c$ ist ungerade

$$\Rightarrow \underset{x \in F^c}{\Delta} X \setminus \{x\} = X \setminus F^c = F$$

$\Rightarrow$ Wir können alle Teilmengen als Linearkombi darstellen

Da Linearkombinationen endlich sein müssen, müssen F und E_0 endlich sein $\Rightarrow X \in \mathcal{P}(X)$ kann nicht durch LK erzeugt werden, falls X unendlich

c)

(i) $\left\{ f \in \mathbb{R}^{[[1,n]]} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} f(i) = 0 \right\}$

Wir stellen die Funktionen wie folgt dar:

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad f(n) = a_n$$

$a_1 = \sum_{k=2}^{n} a_k$ muss immer gelten

Basis-Vorschlag:

$$\{ e_n - e_1 \mid n \in [[2, n]] \}$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k=2}^{n} \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [[2,n]] : \alpha_k = 0$$

Erzeugendensystem:

$$\sum_{k=2}^{n} \alpha_k (e_k - e_1) = \begin{pmatrix} -\sum \alpha_k \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=2}^{n} -a_n \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall k \in [[2,n]] : \alpha_k = a_k$$

(ii) $E = \langle \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \# A \in A\} \rangle$ über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot 2)$ mit Δ als Addition

$\Rightarrow \forall B \in E : \# B \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ ist endlich

$\forall A, B \in E$ mit $\# A = \# B + 1 \wedge B \subset A$.

$\Rightarrow \exists! a \in \mathbb{Z}$ mit $a \in A \wedge a \notin B$

$\Rightarrow A \Delta B = \{a\}$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \; \exists A, B \in E : A \Delta B = \{a\}$

zuzeigen: $\{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis von E

$\{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset E$ (siehe oben)

z.z

$\{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig

$\forall I$, die eine endliche Menge und $(v_i)_{i \in I}$ mit $v_i \in \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ eine injektive Familie sind:

$\Rightarrow \forall i, j \in I : v_i \cap v_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \underset{i \in I}{\Delta} v_i \neq \emptyset$

Für jede Linearkombination

$\underset{i \in I_0}{\Delta} \alpha_i v_i \quad \exists I \subset I_0$ s.d. $\forall j \in I_0$ mit $\alpha_j = 1$ gilt $j \in I$

Es gilt außerdem: $\forall A : A \Delta \emptyset = A$

$\Rightarrow \underset{i \in I_0}{\Delta} \alpha_i v_i = \underset{i \in I_0 \setminus I}{\Delta} \emptyset \; \Delta \; \underset{i \in I}{\Delta} v_i = \underset{i \in I}{\Delta} v_i \neq \emptyset$ falls $I \neq \emptyset$

$\Rightarrow \underset{i \in I_0}{\Delta} \alpha_i v_i = \emptyset \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall i \in I_0$

z.z $E \subset \langle \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle$

$\Leftrightarrow \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \# A \in A\} \subset \langle \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle =: D$

Sei $B \in \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \# A \in A\}$

$\Rightarrow \forall a \in B \Rightarrow \{a\} \in D$

$\# B$ endlich $\Rightarrow \exists I \subset B$ endlich s.d $\bigcup i = \Delta i = B$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{a\} \in D$

$\# B$ endlich $\Rightarrow \exists I_0 \subset D$ endlich s.d $\bigcup_{i\in I_0} = \Delta_{i \in I_0} = B$

$\Rightarrow B \in D$

$\Rightarrow \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist Basis von $\{A \in P(\mathbb{Z}) \mid \# A \in A\}$

d)

(d) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $V := \bigtimes_{j=1}^n V_j$ der Produktraum der K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$. Zeigen Sie Lemma 13.10, also dass wenn B_j eine Basismenge von V_j für $j = 1, \ldots, n$ ist, dann ist

$$B := \bigcup_{j=1}^n \{(0, \ldots, 0, \underbrace{v}_{\text{Position } j \text{ im Tupel}}, 0, \ldots, 0) \mid v \in B_j\}$$

eine Basismenge von V.

Ein Linearkombination von B, mit $v_{ji} \in B_i$, $b \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji}(0, \ldots, 0, \underset{i\text{-ter Index}}{v_{ji}}, 0, \ldots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn}\right) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \forall i \; \sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} = 0$

Da $\forall i,j: v_{ji} \in B_i \Rightarrow \alpha_{ji} = 0$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig

z.z $\langle B \rangle = V$

$\langle B \rangle \subseteq V$:

Wir nutzen wieder die Linearkombination von oben:

$$v := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \alpha_{ji}(0, \ldots, 0, \underset{i\text{-ter Index}}{v_{ji}}, 0, \ldots, 0) = \left(\sum_{j=1}^b \alpha_{j1} v_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^b \alpha_{jn} v_{jn}\right).$$

$\forall i$ mit $1 \leq i \leq n$: $\sum_{j=1}^b \alpha_{ji} v_{ji} \in V_i$, da $v_{ji} \in B_i$

$\Rightarrow v \in V$

$V \subset \langle B \rangle$: $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in V$:

$\Rightarrow \forall i$ mit $1 \leq i \leq n$: $a_i \in V_i$

$\Rightarrow$ Es existiert eine Linearkombination mit $v_j \in B_i$ und $b \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^b \alpha_j v_j = a_i$

Es gilt: $\forall j$: $(0, \ldots, 0, \underset{i\text{-ter Index}}{v_j}, 0, \ldots, 0) \in \langle B \rangle$

$$\Rightarrow \quad (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ter-Index}}}{\overset{\text{Index}}{a_i}}, 0, \dots, 0) \in \langle B \rangle$$

$$\Rightarrow \quad (a_1, \dots, a_n) \in \langle B \rangle \Rightarrow V = \langle B \rangle \quad \square$$

Aufgabe 2

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge und $\left(K^X, +, \cdot\right)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den Punktweisen verknüpfungen.

Lemma 0.1: Falls X endlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \#X$$

Proof: Sei B_X folgende Familie in K^X:

$$B(x_0) : X \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k & \text{falls } x = x_0 \\ 0_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: B_X ist eine Basis von K^X und $\#B_X = \#X$. Die zweite Aussage ist trivial, für die erste Aussage benötigen wir zunächst die Lineare Unabhängigkeit von B.

Sei

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_x B(x_0) = 0_{K^X}$$

Das gilt, wenn

$$\forall x' \in X, \left(\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B(x_0)\right)(x') = 0_K$$

Da alle Summenglieder mit $x' \neq x_0$ sowieso verschwinden, können wir auch schreiben:

$$\forall x' \in X, \alpha_{x'} B(x,)(x') = \alpha_{x'} \cdot 1_K = 0_K$$

Damit ist B_X linear unabhängig.

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\langle B_X \rangle = K^X$. Sei $f \in K^X$. Dann setzen wir $a_x = f(x)$. Es gilt nun:

$$\sum_{x_0 \in X} \alpha_{x_0} B_{x_0} = f$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{x_0 \in X} f(x_0) B_{x_0}\right)(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow f(x) B(x) = f(x) \cdot 1_k = f(x) \quad \forall x$$

Damit können alle Elemente von K^X durch die Basis erzeugt werden. ∎

Lemma 0.2: Falls X unendlich ist gilt:

$$\dim_K(K^X) = \infty$$

Proof: Zu zeigen: Es gibt eine Unendliche linear unabhängige Familie $B_X \subseteq K^X$. Damit kann es keine endliche Basis geben, wodurch die Unendlichkeit der Dimension gezeigt ist. Sei B_X dafür folgende Familie in K^X:

$$B(x_0) : X \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k \text{ falls } x = x_0 \\ 0_k \text{ sonst} \end{cases}$$

. Zu zeigen: B_X ist linear unabhängig. Das funktioniert genau gleich wie im Beweis drüber. ■

(ii)

Sei nun:

$$U := \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0\}$$

$$W := \{f \in K^X \mid f(x) = f(y) \forall x, y \in X\}$$

Lemma 0.3: $\dim_{K(U)} = \dim_{K(K^X)} - 1$ (also ∞ falls X unendlich ist)

Proof: Sei $X' = X \setminus \{x_0\}$. Sei $B_{X'}$ folgende Familie in $K^{X'}$:

$$B(x') : X' \to K^X := x \mapsto \begin{cases} 1_k \text{ falls } x = x' \\ 0_k \text{ sonst} \end{cases}$$

Zu zeigen: $B_{X'}$ ist eine Basis von U: Gilt offensichtlich, da alle Elemente außer x_0 einmal mit der 1_K getroffen werden. Damit ist

$$\dim_K(U) = \#B_{X'} = \#X' = \#X - 1 = \dim_K(K^X)$$

■

Lemma 0.4: $\dim_{K(W)} = 1$

Proof: Die Menge der Konstanten Funktionen W wird durch die Menge $B = \{x \mapsto 1_k\}$ erzeugt. Damit hat W eine Dimension von 1. ■

Lemma 0.5:

$$\dim_K(U \cap W) = \dim_K(\{x \mapsto 0_K\}) = 0$$

Proof: Gilt, da $U \cap W$ nur den Nullvektor enthält und damit $U \cap W = \langle \{\} \rangle$ ■

b)

Lemma 0.6: Sei $(K, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. V ist genau dann K-endlichdimensional, wenn V endlich ist.

Dann gilt außerdem: $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$.

Proof: Sei B eine Basis von V. Da eine Basis Vektoren eindeutig erzeugt, gilt:

$$V = \bigcup_{b \in B} b \cdot K = \biguplus_{b \in B} b \cdot K$$

($\uplus$ meint die Disjunkte Vereinigung).

“$\Rightarrow$”: Wenn B endlich ist (also V endlichdimensional), dann ist V offensichtlich endlich, da jede Skalarmultiplikation $b \cdot K$ nur endlich viele Elemente ertzeugt.
“$\Leftarrow$”: Wenn V endlich ist, dann muss auch B endlich sein, da die disjunkte Vereinigung sonst unendlich viele Elemente erzeugen würde. Da B endlich ist, ist dann auch V endlichdimensional.

Wenn B (und damit auch V) endlich ist, gilt:

$$\#V = \# \biguplus_{b \in B} b \cdot K = \prod_{b \in K} \#b \cdot K = \prod_{b \in K} \#K = (\#K)^{\#B} = (\#K)^{\dim_K(V)}$$

$\blacksquare$

Nr. I-9.3

a) Wenn U und W komplementär sind, dann gilt:

$$V = U \oplus W \iff U \cap W = \{0\}$$

$$U \cap W = \{ f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \wedge f(x) = f(y) \ \forall x,y \in X \}$$

$$\iff U \cap W = \{ f \in K^X \mid 0 = f(x) = f(y) \ \forall x,y \in X \}$$

$$\iff U \cap W = \{ f \in K^X \mid 0 = f(x) \ \forall x \in X \}$$

$$\iff U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow U \oplus W = V$$

$\blacksquare$

b) ① ⇒ ②: $V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Rightarrow V = \sum_{i \in I} U_i$

Angenommen es gibt die Darstellungen

$$v = \sum_{i \in I_1} u_i = \sum_{i \in I_2} u_i' \quad \text{mit } I_1, I_2 \subseteq I \text{ endlichen Teilfamilien.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I_1} u_i - \sum_{i \in I_2} u_i' = 0$$

Da die Summe direkt ist, muss Folgendes gelten:

Für $i \in I_1 \cap I_2$ muss $u_i = u_i'$,
für $i \in I_1 \setminus I_2$ muss $u_i = 0$ und
für $i \in I_2 \setminus I_1$ muss $u_i' = 0$ gelten.

Die Darstellung $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ ist also i.W. eindeutig.

$\blacksquare$

② $\Rightarrow$ ①:

Es gilt: $v = \sum_{i \in I_0} u_i$

also muss nur noch gezeigt werden, dass die Summe direkt ist, sprich

$$0 = \sum_{i \in I_0} u_i \text{, nur wenn } u_i = 0 \ \forall i \in I_0 .$$

Ist $v = 0$, so ist die Summe nach Vorraussetzung eindeutig und die Bedingung ist erfüllt.

$\blacksquare$