Nr. I-9.3

a) Wenn U und W komplementär sind, dann gilt:

$$V = U \oplus W \iff U \cap W = \{0\}$$

$$U \cap W = \{f \in K^X \mid f(x_0) = 0 \wedge f(x) = f(y) \ \forall x, y \in X\}$$

$$\iff U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) = f(y) \ \forall x, y \in X\}$$

$$\iff U \cap W = \{f \in K^X \mid 0 = f(x) \ \forall x \in X\}$$

$$\iff U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow U \oplus W = V$$

■

b) ① ⇒ ②: $V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Rightarrow V = \sum_{i \in I} U_i$

Angenommen es gibt die Darstellungen

$$v = \sum_{i \in I_1} u_i = \sum_{i \in I_2} u_i' \quad \text{mit } I_1, I_2 \subseteq I$$ endlichen Teilfamilien.

$$\Rightarrow \sum_{i \in I_1} u_i - \sum_{i \in I_2} u_i' = 0$$

Da die Summe direkt ist, muss Folgendes gelten:

Für $i \in I_1 \cap I_2$ muss $u_i = u_i'$,
für $i \in I_1 \setminus I_2$ muss $u_i = 0$ und
für $i \in I_2 \setminus I_1$ muss $u_i' = 0$ gelten.

Die Darstellung $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ ist also i.W. eindeutig.

■

② => ①:

Es gilt: $v = \sum_{i \in I_0} u_i$

also muss nur noch gezeigt werden, dass die Summe direkt ist, sprich

$0 = \sum_{i \in I_0} u_i$, nur wenn $u_i = 0 \ \forall i \in I_0$.

Ist $v = 0$, so ist die Summe nach Vorraussetzung eindeutig und die Bedingung ist erfüllt.

$\blacksquare$