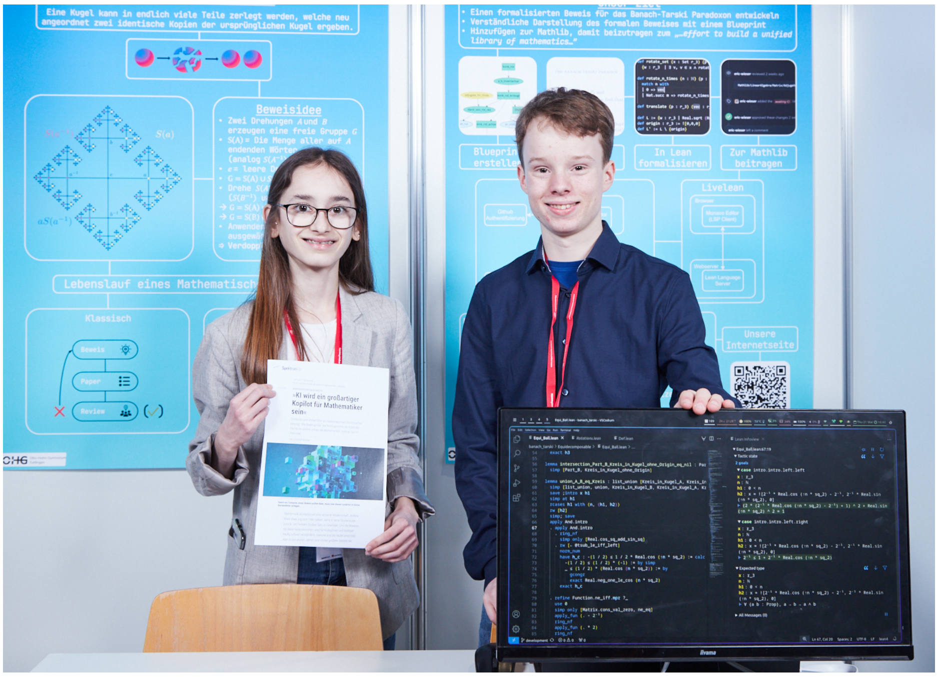
Jugend forscht 2025

LEAN, Logik, Lokale: Banach-Tarski im Licht moderner Mathematik!



Chiara Cimino, Otto-Hahn-Gymnasium Tuttlingen

Christian Krause, Gymnasium Ochsenhausen

Schülerforschungszentrum Südwürttemberg e.V.

Standorte Tuttlingen und Ochsenhausen

28. Februar 2025

Projektübersicht

Das Ziel unseres Jugend-forscht-Projekts des letzten Jahres war es, das Banach-Tarski-Paradoxon, welches besagt, dass wir eine Kugel allein durch Zerlegen und Neuanordnen in zwei identische Kugeln duplizieren können, mithilfe des Beweisassistenten Lean zu formalisieren und der Lean-Community zur Verfügung zu stellen. Aber warum ist diese Art der Kugelverdopplung, die ja offensichtlich den Gesetzen der Physik widerspricht, in der Mathematik überhaupt möglich? Wir machten es uns vor dem Hintergrund dieser Frage deshalb zur Aufgabe, die Problematik hinter Banach-Tarski zu beheben und damit das Paradoxon aufzulösen. Da unsere Arbeit über die Jugend-forscht-Phase hinausging, erreichte uns in einem von zahlreichen Gesprächen mit Mathematikern der Hinweis von Fields Medaillen Träger Laurent Lafforgue auf das französische Manuskript von Olivier Leroy „Les intersections cachees dans le paradoxe de Banach-Tarski“. Dieses Manuskript weist auf eine allgemeinere Theorie hin, in der die Problematik hinter Banach-Tarski behoben wird, weshalb wir uns intensiv mit Leroys Arbeit beschäftigten. Da diese nie in einem Journal veröffentlicht und damit auch nie offiziell geprüft wurde, begannen wir, seine Ideen mit anderen Theorien in Verbindung zu setzen und damit das Manuskript zu vervollständigen. Hierfür mussten wir zunächst einige mathematische Definitionen und Lemmata leanen, wobei es uns bereits gelang, einen signifikanten Teil der Lean-Community zur Verfügung zu stellen. Ausgehend davon formalisierten wir ebenfalls einen beachtenswerten Teil von Leroys Manuskript, arbeiten aktuell an der Fertigstellung und sind uns sicher, diese demnächst abschließen zu können. Mit Leroys Ansatz ist dann der Satz von Banach-Tarski kein Paradoxon mehr, da mit dieser Theorie die Banach-Tarski-Zerlegung nicht mehr disjunkt wäre.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Fachliche Kurzfassung

Wenn man in der klassischen Maßtheorie ein Maß mithilfe der Caratheodory-Erweiterung erweitert, so besitzt diese Erweiterung im Allgemeinen nicht mehr dieselben nützlichen Eigenschaften wie bspw. die strikte Additivität. Die Folgen sind im Banach-Tarski-Paradoxon zu erkennen, welches eine Kugelverdopplung ermöglicht. Im Zuge dieses Projektes beschäftigen wir uns mit einer Theorie, bei der solche Kuriositäten ohne eine Einschränkung auf die zu messenden Mengen nicht mehr möglich ist und die insbesondere nie in einem mathematischen Journal veröffentlicht wurde. Es handelt sich dabei um die Theorie der Lokale, die der Französische Mathematiker Olivier Leroy in seinen Notizen beschrieb. Lokale sind dabei intuitiv als topologische Räume zu verstehen, wobei wir nicht mehr fordern, dass das zugrundeliegende geordnete Mengensystem eine Teilmenge einer gegebenen Menge ist. Daraus resultieren neue Definitionen von Konzepten wie der Vereinigung, dem Schnitt und der Teilmenge im allgemeinen Sinne. Damit lässt sich dann ebenfalls eine Maßtheorie konstruieren, wobei man ein Maß über Lokale ähnlich wie ein klassisches Maß verstehen kann. Betrachtet man allerdings die Caratheodory-Erweiterung eines Maßes über Lokale, so erhält man zusätzlich zu den Eigenschaften der Caratheodory-Erweiterung im klassischen Sinne u. a. eine Reduzibilität und eine strikte Additivität. Daher erhält man eine bessere Maßtheorie! Da dieses unglaubliche Resultat aber nie formal veröffentlicht und damit peer-reviewed wurde, besteht unsere Arbeit darin, genau das zu tun. Hierfür verwenden wir den mathematischen Beweisassistenten Lean, mit dessen Hilfe wir Ungenauigkeiten und Fehler im Beweis von Leroy aufdecken und beheben konnten und damit den Großteil seiner Theorie bereits in Lean formalisiert haben. Des Weiteren gelang es uns bereits, Teile des von uns formalisierten Beweises in der Mathlib zu veröffentlichen. Dort werden viele, bereits in Lean formalisierte Definitionen und Theoreme gespeichert.

2 Motivation und Aufgabenstellung

„Wir können eine Kugel allein durch Zerschneiden und anschließendem Drehen wieder zu zwei identischen Kopien der Ausgangskugel zusammenfügen." Dass das mit der klassischen Mengenlehre gilt, folgt aus dem Satz von Banach-Tarski [1]. Auch uns erschien diese Aussage anfänglich unglaublich, weshalb wir in unserem Jugend-forscht-Projekt des letzten Jahres den mathematischen Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons näher beleuchteten. Indem wir den Beweis Stück für Stück durchdrangen, gingen wir automatisch den Weg einer klassischen Verifikation eines mathematischen Papers (siehe Abbildung 1, linke Spalte). Da der Prozess der menschlichen Kontrolle aber durchaus fehleranfällig ist, stellten wir uns die Frage, ob man diese Fehlbarkeit nicht umgehen könnte. Dabei stießen wir auf den mathematischen Beweisassistenten Lean. Diese auf der gleichnamigen Programmiersprache Lean basierende Software erlaubt es uns, die entsprechenden mathematischen Objekte zu definieren, sowie deren Eigenschaften inkl. Beweis zu formalisieren. Ausgehend von der Typentheorie überprüft Lean die Standhaftigkeit des Beweises und markiert ggf. Fehler, was das Beweisen erleichtert. Dies bedeutet im Umkehrschluss aber auch, dass Lean den Anspruch einer absoluten mathematischen Korrektheit erheben kann (siehe Abbildung 1, rechte Spalte). Die Mathlib Community von mitlerweile fast 400 Contributern, zu der wir nun seit einem Jahr gehören, hat bereits über die Hälfte des Grundstudiums der Mathematik, sowie einige sehr fortgeschrittene Konzepte in insgesamt über eine Million Zeilen Code digitalisiert.

Das ist auch der Grund, weshalb sich Mathematikerinnen und Mathematiker weltweit vernetzen, um weitere Sätze in Lean zu formalisieren. Hier erleben wir eine wunderbare und effektive Zusammenarbeit der Informatik und der Mathematik.

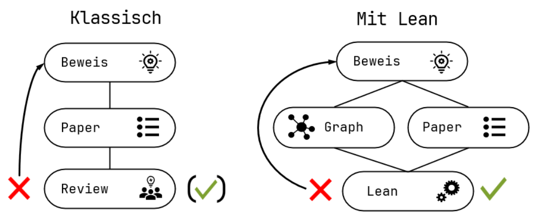


Abbildung 1: Verifikation mit bzw. ohne Beweisassistent

Je länger wir uns jedoch mit dem Beweis des Satzes von Banach-Tarski beschäftigten, desto öfter kam die Frage auf, warum das Duplizieren einer Kugel allein durch Zerlegung der Ausgangskugel sowie anschließender Translationen und Zusammenfügen der einzelnen Teile in der Mathematik überhaupt erlaubt sein sollte, zumal dies der klassischen Physik widerspricht. Ein Ziel der Mathematik ist es, die Vorgänge um uns herum bestmöglich zu beschreiben und damit so gut wie es geht zu verstehen. Ein mathematisches Modell, das es uns erlaubt, in der Theorie Dinge zu tun, die in der Realität aber erwiesenermaßen nicht möglich sind, ist damit unvollständig. Da die Hauptaussage des Satzes von Banach-Tarski darin besteht, dass eine Kugel (insbesondere deren Volumen) verdoppelt werden kann, steht dieser Satz im Gegensatz zum allgemein gültigen Erhaltungssatz in der Physik, nach dem das Gesamtvolumen nach dem Zerschneiden und Rotieren der Kugelteile zusammen wieder dem Volumen der Ausgangskugel entsprechen sollten. Da dies laut dem Satz von Banach-Tarski aber nicht der Fall ist, beschreibt das zugrundeliegende mathematische Modell der klassichen Topologie, in welchem dieser Satz möglich ist, die Realität nur unzureichend. Damit stellte sich uns die Frage, ob es nicht ein besseres mathematisches Modell gibt, welches genau solche Schlupflöcher nicht mehr zulässt. Um das aber sauber abgrenzen zu können, ist es essentiell, dass wir das mathematische Modell hinter dem Satz von Banach-Tarski, die klassische Maßtheorie, näher betrachten.

3 Kurzer Einblick in die benötigte klassische Maßtheorie

Das Grundprinzip der Maßtheorie besteht darin, einer Ansammlung an Mengen eine sinnvolle Größe zuzuordnen. Betrachten wir daher als Einführung ein Beispiel: Gegeben sei die Menge aller Rechtecke. Jedem dieser in der Menge enthaltenen Rechtecke wollen wir nun eine Größe bzw. einen sinnvollen Flächeninhalt zuordnen. Solch eine Größe definiert sich in unserem Beispiel als Produkt aus Länge mal Breite des entsprechenden Rechtecks. Durch diese Zuordnung wird ein sog. Maß definiert. Allgemein versteht man unter einem Maß allerdings folgendes:

Definition 1. *Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem und $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Man nennt μ ein Maß, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A)$ *ist monoton*
- μ *ist σ-additiv, insbesondere $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$*

Wie man erkennen kann, ist ein Maß aber auf ein bestimmtes Mengensystem begrenzt, d. h. Objekte, die nicht in diesem System enthalten sind, kann keine Größe zugeordnet werden. Hat man nun Objekte, die nicht im System vorhanden sind, vorliegen, welche eine ähnliche Struktur wie die Elemente des Systems haben, auf dem unser Maß operiert, so ist es naheliegend sich zu fragen, ob man das vorliegende Maß nicht sinnvoll auf diese Objekte erweitern könnte.

Im Beispiel unseres Maßes, welches jedem Rechteck seinen Flächeninhalt zuordnet, entspräche ein solches zu den Rechtecken ähnliches Objekt zum Beispiel der Fläche des Landkreises Tuttlingen. Um nun der Fläche des Landkreises eine sinnvolle Größe zuzuordnen, können wir diesen zunächst einmal mit Rechtecken überdecken. Für die Überdeckung verwenden wir nun immer kleinere Rechtecke und können so den Flächeninhalt des Landkreises approximieren, indem wir den Grenzwert der Summe der Flächeninhalte dieser kleinen Rechtecke betrachten.

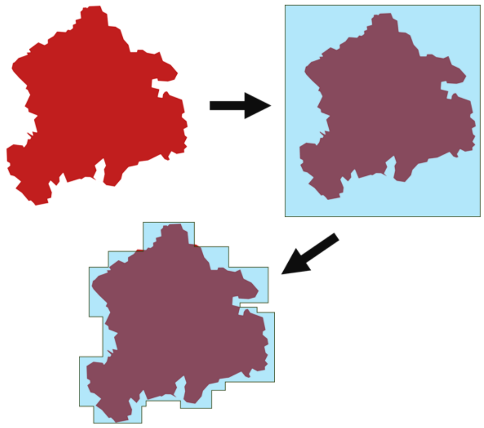


Abbildung 2: Approximation der Fläche des Landkreises Tuttlingen

Diese Approximation von einer zunächst nicht-messbaren Menge mithilfe von messbaren Mengen und einer anschließenden Grenzwertbetrachtung entspricht allgemein genau dem Prinzip der Caratheodory-Erweiterung eines Maßes.

Definition 2. *Sei μ ein Maß auf einem Mengensystem $\mathcal{M}$. Die Caratheodory-Erweiterung des Maßes ist definiert als*

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{M},\ Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

Jetzt haben wir zwar einen sinnvollen Größenbegriff für eine größere Ansammlung an Mengen, jedoch ist zu vermerken, dass bei der Caratheodory-Erweiterung Eigenschaften wie bspw. die allgemeine strikte Additivität verloren gehen. Dieser Verlust der strikten Additivität spiegelt sich bspw. im Banach-Tarski-Paradoxon wider. Dass man somit eine Kugel verdoppeln kann, hat uns ziemlich gestört und wir haben uns gefragt, ob es nicht eine Möglichkeit gibt, dass eine Caratheodory-Erweiterung eines Maßes die strikte Additivität des Ausgangsmaßes übernimmt. Dabei sind wir auf die Theorie der Lokale gestoßen.

4 Die Theorie der Lokale und erste Ergebnisse unserer Arbeit

Unsere Arbeit basiert auf dem Dokument „Théorie de la mesure dans les lieux réguliers“ (1995) [13], das behauptet, dass die Caratheodory-Erweiterung eines Maßen auf die Unterlokale einer Lokale ein Maß mit guten Eigenschaften (z.B: strikte Additivität) liefert und damit das Banach-Tarski-Paradoxon auflöst.

Das Problem an diesem Dokument ist allerdings, dass es lediglich aus den Notitzen von Olivier Leroy besteht, die nach seinem Tod im Jahr 1996 digitalisiert wurden. Daher wurde das Paper auch nie in einem mathematischen Journal veröffentlicht und damit auch nie peer-reviewed (also durch andere Mathematiker kontrolliert). Da die Notizen von Leroy zudem teilweise sehr vage formuliert sind, keine Quellenangaben enthalten und mit kleinen Fehlern behaftet sind, haben wir es uns zur Aufgabe gemacht, das Dokument zu vervollständigen, in Lean zu formalisieren und damit zu verifizieren.

Dafür müssen wir zunächst aber etwas genauer auf die Theorie der Lokale, die eine spezielle Form der punktfreien Topologie darstellt, eingehen. Eine Lokale [15] verhält sich intuitiv wie ein topologischer Raum, der möglicherweise nicht genügend (oder sogar gar keine) Punkte besitzt. Stattdessen enthält ein

Lokal offene Unterräume. Diese offenen Unterräume können so verstanden werden, dass sie eine endliche Menge an Informationen über die (hypothetischen) Punkte beinhalten. Zum Beispiel gibt es eine Lokale aller Surjektionen von den natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen. Diese Lokale hat offensichtlich keine Punkte, da es keine derartigen Surjektionen gibt, sie enthält jedoch viele nichttriviale offene Teilräume. Leroy zeigt nun durch die Anwendung der Theorie der Lokale, dass es möglich ist, das Auswahlaxiom zu verwenden und dennoch sicherzustellen, dass alle „Teilmengen“ messbar bleiben. Dies wird durch die Einführung von Unterlokale erreicht, die als Unterräume fungieren. In diesem Kontext behauptet er, dass die Caratheodory-Erweiterung eines Maßes auf die Gesamtheit der Unterlokale immernoch strikt additiv, reduzibel und kommutativ bzgl. Infimumbilden ist. Dadurch werden die paradoxen Zerlegungen, wie sie bei Banach-Tarski zu finden sind und die in der klassischen Theorie zu nicht messbaren Mengen führen, in der Theorie der Lokale vermieden, da es versteckte Schnittmengen gibt, die in der klassischen Betrachtung nicht sichtbar sind.

4.1 Unser Blueprint

Ein wesentliches Hilfsmittel, um bei bei der Arbeit in Lean die Übersicht nicht zu verlieren, ist das sogenannte Lean-Blueprint-Tool [17], das auch in vielen großen Formalisierungsprojekten zum Einsatz kommt. Es bietet die Möglichkeit, alle Definitionen und Lemmata für Menschen verständlich zu formulieren und zu dem entsprechenden Lean-Code zu verlinken. Eine der wichtigsten Funktionen des Lean-Blueprint-Tools ist wohl der interaktive Dependency-Graph (siehe Abbildung 3). Dieser stellt alle Beziehungen zwischen den Lemmata und Definitionen übersichtlich in einem Graph dar (also welche Lemmata und Definitionen müssen zuerst fertiggestellt werden). Außerdem kann man anhand der Farbe der Knoten erkennen, wie weit die Formalisierung bereits fortgeschritten ist.
Wir haben für unser Projekt einen solchen Blueprint erstellt, der unter folgender Internetadresse veröffentlicht ist: `https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/blueprint/dep_graph_chapter_1.html`.

- Im Blueprint werden Definitionen durch Rechtecke und Lemmata durch Ellipsen dargestellt.
- Alles, was bereits fertig formalisiert ist, ist in grün dargestellt.
- Eine Definition oder ein Lemma ist blau unterlegt, wenn alle Voraussetzungen bereits formalisiert sind und die Aussage nun bereit für die Formalisierung ist.
- Wenn bei einem Lemma nur der Rand eingefärbt ist, bedeutet dies, dass nur die Aussage (nicht aber der Beweis) formalisiert ist (bzw. bereit für die Formalisierung ist).
- Ein Klick auf einen Knoten des Graphs öffnet eine Ansicht, die die entsprechende Aussage/Definition anzeigt.
- Das Feld *latex* führt zu der ausführlicheren Beschreibung der Aussage bzw. Definition im Fließtext-Teil des Blueprints.
- Ist das Lemma oder die Definition bereits fertig formalisiert, dann gelangt man über das Feld *lean* auch zu der automatisch generierten Dokumentation des dazugehörigen Lean-Codes. In dieser Dokumentation ist zu jedem Abschnitt der entsprechende Quellcode unter *source* verlinkt.

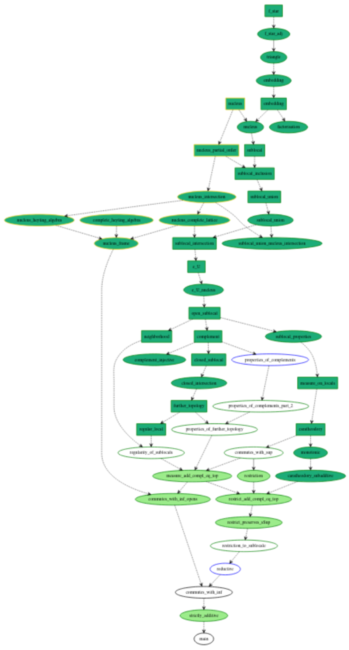


Abbildung 3: Gesamtansicht des Blueprints

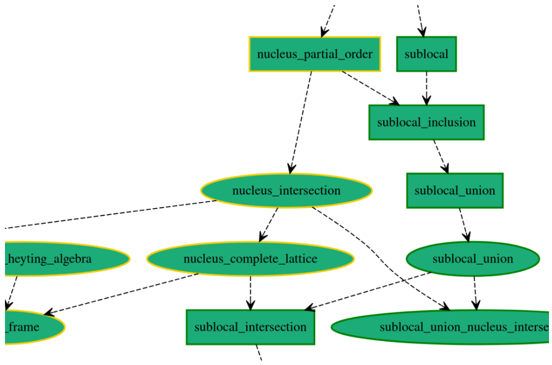


Abbildung 4: Ein bereits formalisierter Teil des Blueprints

Da wir bereits einen großen Teil unserer Arbeit in Lean verifiziert haben (grüne Knoten), können wir im weiteren Verlauf der Langfassung für viele Lemmata die schriftlichen Beweise weglassen, um für Übersichtlichkeit zu sorgen. Die Definitionen und Beweise, die wir in Lean verifiziert haben oder die bereits in der Mathlib enthalten sind, sind folgendermaßen gekennzeichnet: **[Lean: Measure]** bzw. **[Mathlib: Nucleus]**. Die Links zu unserer Lean-Dokumentation bzw. zu der Mathlib-Dokumentation sind im Quellenverzeichniss enthalten.

4.2 Elementare Definitionen und Lemmata der Theorie der Lokale

Nun wollen wir aber die benötigte Theorie der Lokale besser verstehen. Allgemein besteht eine Lokale E aus einer Teilgeordneten Menge $O(E)$ (mit einer Ordnungsrelation $\leq$), die die Eigenschaften eines Frames (bzw. einer vollständigen Heyting Algebra) erfüllt **[Mathlib: Order.Frame]**.

Definition 3. *Eine Lokale E besteht aus $(O(E), \leq)$, wobei $O(E)$ eine partiell geordnete Menge mit der Ordnungsrelation $\leq$ bezeichnet, die die Eigenschaften eines Frames erfüllt:*

- *Es existiert ein kleinstes Element $\bot_E$ und ein größtes Element $\top_E$.*
- *Jede Familie (V_i) von Elementen aus $O(E)$ besitzt ein Supremum (genannt Vereinigung), welche mit $\bigvee_i V_i$ bezeichnet wird.*
- *Jede Familie (V_i) von Elementen aus $O(E)$ besitzt ein Infimum (genannt Schnitt), welches mti $\bigwedge_i V_i$ bezeichnet wird.*
- *Für jede Familie (V_i) von Elementen aus $O(E)$ und für ein beliebiges $W \in O(E)$ gilt $W \wedge \bigvee_i V_i = \bigvee_i (W \wedge V_i)$.*

Man kann daher erkennen, dass die Definition einer Lokale fast der Definition eines Topologischen Raums entspricht. Der einzige Unterschied besteht dabei darin, dass wir nun nicht mehr fordern, dass das Mengensystem $O(E)$ Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Ausgangsmenge X ist.

Beispiel 4. *Die offenen Mengen $O(E)$ eines Topologischen Raumes E bilden mit der Inklusion als Ordnungsrelation eine Lokale* ***[Mathlib: TopologicalSpace.Opens.instFrame]****.*

Um irgendeine Operation auf Lokale durchführen zu können, müssen wir zunächst einmal definieren, was wir unter einem Morphismus zwischen zwei Lokale verstehen.

Definition 5. *Seien E und F Lokale. Ein Morphismus $f : E \to F$ wird durch eine monotone Abbildung $f^* : O(F) \to O(E)$ erzeugt, für die gilt:*

- $f^*(\perp_F) = \perp_E$ *und* $f^*(\top_F) = \top_E$
- f^* *kommutiert mit endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen*

Definition 6. *Für jedes $U \in O(E)$ besitzt die Menge der $V \in O(F)$, für die gilt $f^*(V) \subset U$, also ein größtes Element, das wir mit $f_*(U)$ bezeichnen werden.*

Lemma 7. *Für jeden Morphismus von Lokalen $f : E \to F$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- f^* *ist surjektiv*
- f_* *ist injektiv*
- $f^* f_* = 1_{O(E)}$

[Lean: f_injective_one] *Man nennt einen Morphismus von Lokalen, der diese Eigenschaften erfüllt, Einbettung.*

Eine weitere zentrale Abbildung ist der Nukleus, welchen wir im Folgenden definieren: Eine zentrale Abbildung in der Theorie der Lokale ist der Nukleus, den wir im Folgenden definieren:

Definition 8. *Ein Nukleus [16, S. 485] ist eine Abbildung $e : O(E) \to O(E)$ mit den folgenden drei Eigenschaften* ***[Mathlib: Nucleus]****:*

- *e ist idempotent, d. h. $e \circ e = e$*
- *$U \leq e(U)$ für alle $U \in O(E)$*
- *$e(U \cap V) = e(U) \cap e(V)$ für alle $U, V \in O(E)$*

4.3 Unterlokale

Ein wesentliches Konzept der klassischen Topologie sind die Teilengen bzw. Unterräume eines Topologischen Raumes, die durch Inklusion geordnet sind. Die Entsprechung in der Theorie der Lokale sind die Unterlokale. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Unterlokale zu definieren [18]; wir beschäftigen uns hier mit der Definition durch Nuklei:

Definition 9. *Eine Unterlokale X einer Lokale E wird durch eine Abbildung $e_X : O(E) \to O(E)$ definiert, die die Eigenschaften eines Nukleus erfüllt (Definition 8). Folglich ist das von X erzeugte Lokal gegeben durch $O(X) = Im(e_X) = \{V \in O(E) | e_X(V) = V\}$ und die zugehörige Einbettung $i_X : X \to E$ ist durch $i_X^*(V) = e_X(V)$, $(i_X)_*(U) = U$ definiert. [18]* ***[Lean: Sublocale]***

Die Interaktionen zwischen Unterräumen eines klassischen Topologischen Raumes (also Inklusion, Vereinigung und Schnitt) sind punktweise definiert. Da die Unterlokale die Unterräume eines klassischen Topologischen Raumes in der (punktfreien) Theorie der Lokalen verallgemeinern, werden diese Interaktionen auf andere Weise definiert. Zunächst werden wir zeigen, dass die Nuklei $N(E)$ auf der Lokale E einen Frame [6] **[Mathlib: Order.Frame]** bilden. Da die Nuklei direkt mit den Unterlokalen zusammenhängen kann direkt auf die Interaktionen der Unterlokale geschlossen werden.

4.3.1 Nuklei als Frame

Die Nuklei wurden nicht nur bei Leroy verwendet, daher haben wir uns bei den folgenden Definitionen auch an Johnstone [11] und MacLane [16] orientiert.
Die Ordnungsrelation der Nuklei lässt sich punktweise definieren:

Definition 10. *Für zwei Nuklei n und m gilt $n \leq m$ genau dann, wenn $n(V) \leq m(V)$ für alle $V \in O(E)$*

Die Nuklei bilden damit eine Halbordnung **[Mathlib: Nucleus.instPartialOrder]**.
Zusätzlich dazu benötigt die Frame-Struktur der Nuklei zwei besondere Nuklei; den größten und den kleinsten Nukleus:

Definition 11. *Der größte Nukleus $\top_n$ ist definiert durch $\top_n(a) = \top_E$ für alle $a \in O(E)$* ***[Mathlib: Nucleus.instBot].***
Der kleinste Nukleus $\bot_n$ ist definiert durch $\bot_n(a) = a$ für alle $a \in O(E)$ ***[Mathlib: Nucleus.instTop].***

$\top_E$ ist das größte Element von E und existiert, da E ein Frame bildet. Man sieht direkt, dass der größte Nukleus punktweise größer als alle anderen Nuklei ist. Der kleinste Nukleus ist punktweise kleiner als alle anderen Nuklei, da alle Nuklei x die Bedingung $a \leq x(a)$ erfüllen müssen.
Bei beliebigen Infima von Nuklei können wir uns an der Definition von Peter Johnstone in seinem Buch „Stone spaces "[11] orientieren:

Definition 12. *Das Infimum einer Menge S an Nuklei auf E bildet einen Nukleus mit folgender Funktion:*
$$(\bigwedge_n S)(a) = \bigwedge_E \{j(a) \mid j \in S\} \quad \text{für alle } a \in O(E).$$

Wir haben in Lean verifiziert, dass diese Definition tatsächlich ein Nukleus ist und die Bedingungen eines Infimums erfüllt. **[Mathlib: Nucleus.instInfSet]**
Suprema von Nuklei lassen sich schwerer mit einer expliziten Formel beschrieben, daher verwenden wir das Infimum aller oberen Schranken:

Definition 13. *Das Supremum einer Menge S an Unterlokalen von E entspricht dem Infimum der oberen Schranken von S:*
$$(\bigvee_n S)(a) = (\bigwedge_n \{w \in N(E) \mid x \leq w\})(a) \quad \text{für alle } x \in S.$$

Diese Defintion ist ebenfalls ein Nukleus und erfüllt definitionsgemäß die Eigenschaften eines Supremums. Damit haben wir gezeigt, dass die Nuklei $N(E)$ einer Lokale E einen vollständigen Verband bilden **[Mathlib: Nucleus.instCompleteLattice]**. Um nun zu zeigen, dass die Nuklei einen Frame bilden, reicht es zu zeigen, dass die Nuklei eine Heyting Algebra **[Mathlib: HeytingAlgebra]** bilden, da jeder vollständige Verband, der eine Heyting Algebra ist, einen Frame bildet **[Mathlib: Order.Frame]**.

Definition 14. *Die Heyting-Implikation der Nuklei j und k wird durch folgenden Nukleus beschrieben:*

$$(j \Rightarrow k)(a) = \bigwedge\{(j(b) \Rightarrow k(b)) \mid a \leq b\}) \quad \textit{für alle } a, b \in E.$$

Wir haben in Lean verifiziert, dass diese Definition die Eigenschaften eines Nukleus **[Mathlib: Nucleus.instHImp]** und die der Heyting-Implikation erfüllt, was die Nuklei zu einer Heyting Algebra **[Mathlib: Nucleus.instHeytingAlgebra]** und damit zu einem Frame macht.
Die Nuklei und deren Frame-Struktur haben wir bereits zur Mathlib beigetragen.

4.3.2 Schnitt und Vereinigung von Unterlokalen

Wir bezeichenen den Nukleus, der mit der Unterlokalen X zusammenhängt, n_X.

Definition 15. *Die Inklusion zweier Unterlokale X und Y von E lässt sich folgendermaßen definieren:*

$$X \subseteq Y \iff n_Y \leq n_X$$

also $n_Y(V) \leq n_X(V)$ für alle $V \in O(E)$ ***[Lean: Sublocale.le_iff]****.*

Die Unterlokale bilden daher eine Duale Ordnung zu den Nuklei. [11, S. 51] [5] Dadurch können Resultate auf der einen Ordnung zu der dualen Version auf der anderen Ordnung übertragen werden. Um im Folgenden zwischen Unterlokalen und Nuklei zu unterscheiden bezeichnen wir Nuklei mit n und Unterlokale mit s (von engl. sublocale). Das größte Element der Nuklei $\top_n$ ist somit das kleinste Unterlokal $\bot_s$ und umgekehrt ($\bot_n = \top_s$).
Aufgrund der Dualen Ordnung der Nuklei können wir von der Frame-Struktur der Nuklei auf die Coframe Struktur **[Mathlib: OrderDual.instCoframe]** der Unterlokale schließen und damit die Interaktionen zwischen Unterlokalen definieren.
Wir wollen uns nun aber noch etwas genauer mit der Definition der Vereinigung von Unterlokalen beschäftigen, da sie einen Unterschied zwischen der Arbeit von Johnstone und Leroy darstellt: Johnstone hat das Supremum der Unterlokale implizit über das Infimum der Nuklei definiert; Leroy definiert das Supremum hingegen direkt über die Unterlokale:

Definition 16. *Der Schnitt einer Menge S an Unterlokalen von E bildet einen Nukleus mit folgender Funktion:*

$$(\bigcup_s S)(a) = \bigcup\{w \in E \mid \forall x \in S, w \subseteq x\} \quad \textit{für alle } a \in E$$

Hier haben wir ebenfalls bereits in Lean verifiziert, dass die Funktion die Bedingungen für einen Nukleus und die Bedingungen des beliebigen Supremums erfüllt.

Lemma 17. *Die Definitionen von Johnstone und Leroy [13, S. 5] sind äquivalent:*

$$(\bigwedge S)(a) = (\bigcup_s S)(a)$$

für alle Mengen an Nuklei S und für alle $a \in E$

Beweis. Da wir verifiziert haben, dass beide Suprema die Bedingungen für beliebige Suprema erfüllen, wissen wir, dass beide eine obere Schranke für S bilden [3]. Wir wissen aber ebenfalls, dass beide Suprema die kleinste obere Schranke bilden, daher haben wir $(\bigwedge_n S) \leq (\bigcup_s S)$ und $(\bigcup_s S) \leq (\bigwedge_n S)$, woraus die Gleichheit folgt. □

4.4 Offene und abgeschlossene Unterlokale

Wie in der klassischen Topologie gibt es auch in der Theorie der Lokale offene und geschlossene Unterlokale. Da die offenen Mengen $O(E)$ eines Topologischen Raumes E immer eine Lokale bilden (siehe Beispiel 4), hängen die offenen Unterlokale mit den Elementen $O(E)$ der Lokale E zusammen und entsprechen damit den offenen Mengen eines klassischen Topologischen Raumes. Die Komplemente dieser offenen Unterlokale (bzw. offenen Mengen) bilden die abgeschlossenen Unterlokale, die mit den abgeschlossenen Mengen eines Topologischen Raumes zusammenhängen.
Johnstone [11, S. 50] und MacLane [16, S. 488] definieren beide in ihren Büchern die offenen Unterlokale folgendermaßen:

Definition 18. *Jedes Element v einer Lokale E erzeugt eine offene Unterlokale von E mit der Funktion:*

$$o_v(a) = v \Rightarrow a \quad \text{für alle } a \in E \text{ [Lean: Open]}$$

Johnstone und MacLane verwenden hier $v \Rightarrow a$, die sogenannte Heyting-Implikation (auch relatives-Pseudokomplement)[9, 8].

Definition 19. *Die Heyting-Implikation erfüllt die Bedingung $a \leq b \Rightarrow c$ genau dann, wenn $a \cap b \leq c$ für alle a, b, c. Eine Heyting Algebra ist ein Verband, bei dem diese Operation für alle Elemente definiert ist.*

Die Heyting-Implikation kann hier verwendet werden, da die Elemente einer Lokale einen Frame, also eine vollständige Heyting Algebra bilden.
Anhand dieser Eigenschaften haben wir hier auch in Lean wieder verifiziert, dass es sich bei o_v für alle $v \in E$ um einen Nukleus handelt.

Lemma 20. *Die Definition der offenen Unterlokale von Johnstone 18 ist äquivalent zu der Definition von Leroy:*

$$o_v(a) = \bigcup \{W \in E | W \cap V \leq a\}$$

Beweis. Es genügt hier zu zeigen, dass $v \Rightarrow a$ das größte Element in der Menge $S = \{W \in E \mid W \cap V \leq a\}$ ist. Wir wissen, dass $c \leq c \Rightarrow a$ genau dann, wenn $c \cap v \leq a$, daher sind alle Elemente S kleiner oder gleich $v \Rightarrow a$ **[Mathlib: himp_eq_sSup]**. □

Wir können nun anhand einiger Eigenschaften der offenen Unterlokale (analog zu Leroy [13, S. 10]) zeigen, dass die offenen Unterlokalen von E nahezu austauschbar mit ihrem entsprechenden Element von E verwendbar sind. Um den folgenden Teil etwas übersichtlicher darzustellen, verwenden wir die Notation $[V]$ für o_v.
Uns ist es gelungen, zu verifizieren, dass $[V] \subseteq [U]$ genau dann, wenn $V \subseteq U$ für alle $u, v \in E$ **[Lean: Open.le_iff]**. Wir haben außerdem gezeigt, dass die offenen Unterlokalen mit beliebigen Suprema kommutieren **[Lean: Open.preserves_sSup]**:

$$\bigcup_i [V_i] = \left[\bigcup_i V_i\right]$$

Für alle Familien V_i aus Elementen von E.
Die offenen Unterlokale kommutieren zudem mit endlichen Infima **[Lean: Open.preserves_inf]**: $[U \cap V] = [U] \cap [V]$ für alle $U, V \in E$. Diese Eigenschaften haben wir bereits alle in Lean verifiziert.
Johnstone, MacLane und Leroy definieren die abgeschlossenen Unterlokalen alle ähnlich:

Definition 21. *Jedes Element $V \in E$ erzeugt eine geschlossene Unterlokale mit dem Nukleus:*

$$c_v(a) = v \cap a \quad \text{für alle } a \in E$$

[Lean: Closed] Es lässt sich leicht verifizieren, dass es sich bei c_v um einen Nukleus handelt. Leroy zeigt außerdem, dass es sich bei c_v für alle $v \in E$ um das Komplement von o_v handelt. Dies lässt sich anhand der folgenden Eigenschaften beweisen:

Lemma 22.

$$c_v \cap o_v = \bot_s \text{ und } c_v \cup o_v = \top_s$$

*für alle $v \in E$. **[Lean: Open.inf_compl_eq_bot] [Lean: Open.sup_compl_eq_top]***

Wir können also definieren:

Definition 23. *Das Komplement einer offenen Unterlokale o_v entspricht $o_v^c = c_v$ für alle $v \in E$ **[Lean: Open.compl]**.*

Definition 24. *Im Folgenden bezeichnen $O(E)$ und $C(E)$ die Menge der offenen bzw. abgeschlossenen Unterlokale von E*

Wir können hier $O(E)$ für die offenen Unterlokale verwenden, da sie mit den Elementen $O(E)$ einer Lokale übereinstimmen.
Mit diesen Definitionen der offenen und abgeschlossenen Unterlokale können wir nun einige klassische topologische Operationen auf den Unterlokalen definieren. Diese werden später oft in verschiedenen Beweisen verwendet.

Definition 25. *Der Abschluss einer Unterlokale X entspricht der kleinsten geschlossenen Unterlokale, die X enthält **[Lean: Sublocale.closure]**:*

$$\overline{X} = \bigcap \{W \in C(E) \mid X \leq W\}$$

Definition 26. *Das Äußere einer Unterlokalen X entspricht der größten offenen Unterlokale, die disjunkt zu X ist **[Lean: Sublocale.exterior]**:*

$$Ext\ X = \bigcap \{W \in O(E) \mid W \cap X = \bot_s\}$$

Definition 27. *Die offene Umgebung eines Unterlokals X ist die Menge aller offenen Unterlokale V, für die $X \subseteq V$ gilt. **[Lean: Sublocale.Open_Neighbourhood]**.*

Definition 28. *Eine Lokale E heißt regulär, wenn für alle offenen Unterlokale U von E die offenen Unterlokale V von E mit $\overline{V} \subseteq U$ ganz U abdecken **[Lean: regular]**.*

Sei E im Folgenden eine reguläre Lokale.

Lemma 29. *In einer regulären Lokale entspricht jede Unterlokale U dem Schnitt ihrer offenen Umgebung.*

Jetzt haben wir die notwendigen Voraussetzungen definiert und kleinere Lücken geschlossen, um mit der Maßtheorie über Lokale zu beginnen.

5 Maßtheorie über Lokale, weitere Ergebnisse unserer Arbeit

Die Maßtheorie über Lokale bietet einen abstrakten Zugang zur Definition von Maßen, der direkt auf der Struktur offener Mengen bzw. offener Unterlokale basiert, ohne auf Punkte oder klassische Mengenoperationen angewiesen zu sein. Statt einzelner Punkte stehen hier offene Teilstrukturen und deren algebraische Beziehungen im Mittelpunkt. Dieser Ansatz erlaubt es, Maßbegriffe auf einer rein strukturellen Ebene zu formulieren. Entsprechend definieren wir ein Maß über Lokale wie folgt:

Definition 30. *Ein Maß auf einer Lokale E ist eine Abbildung $\mu : O(E) \to \mathbb{R}^+$, die für alle Unterlokale U und V von E die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $U \subseteq V \implies \mu(U) \leq \mu(V)$
- $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V) - \mu(U \cap V)$
- $\mu\left(\bigcup_i V_i\right) = \sup_i \mu(V_i)$ *für jede monoton steigende Familie $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $O(E)$. D. h., dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $V_i \cup V_j \subset V_k$ bzw. $V_i \subset V_k$ und $V_j \subset V_k$.*

Analog zu der klassischen Maßtheorie, können wir auch hier eine Erweiterung eines Maßes definieren.

Definition 31. *Sei E eine Lokale und μ ein Maß über E. Sei A eine beliebige Unterlokale von E, also insbesondere nicht unbedingt offen. Dann ist $\mu(A)$ definiert durch $\mu(A) := \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \in O(E)\}$.*

5.1 Elementare Eigenschaften der Maßtheorie über Lokale

Wir haben bereits zu großen Teilen in Lean gezeigt, dass ein Maß über Lokale die Eigenschaften eines klassischen Maßes erfüllt, die da wären:

Satz 32. *Jedes Maß μ mit Caratheodory-Erweiterung über ein Lokal E erfüllt folgende Eigenschaften:*

- *Für alle Unterlokale A, B von E gilt $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (**Monotonie**)*
- *Für offene Unterlokale U von E gilt $\mu(U) + \mu(E \setminus U) = \mu(E)$*
- *Für offene Unterlokale U von E und Unterlokale A von E gilt $\mu(A) = \mu(A \cap U) + \mu(A \cap (E \setminus U))$*
- *Für eine monoton steigende Familie $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Unterlokalen von E gilt: $\mu(\sup_i V_i) = \sup_i \mu(V_i)$*
- *Für eine monoton steigende Familie $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Unterlokalen von E und für ein Unterlokal A von E gilt: $\mu(A \cap \sup_i V_i) = \sup_i \mu(A \cap V_i)$*
- *Für eine monoton fallende Familie $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Unterlokalen von E gilt $\mu(\inf_i V_i) = \inf_i \mu(V_i)$*

Insbesondere gilt für zwei offene Unterlokale U, V von E und eine Unterlokale A von E

$$\mu(A \cap (U \cup V)) = \mu(A \cap U) + \mu(A \cap V) - \mu(A \cap U \cap V)$$

[Lean: Measure.caratheodory.monotonic] [Lean: Measure.add_complement] [Lean: Measure.add_complement_inf] [Lean: Measure.inf_filtered] [Lean: Measure.preserves_inf] [Lean: Measure.preserves_inf] [Lean: Measure.restrict_subadditive] Dass wir die grundlegenden Bausteine der klassischen Maßtheorie übertragen können, hat zur Folge, dass auch andere fundamentale Konzepte in der Theorie der Lokale erhalten bleiben. Insbesondere wird es uns dadurch erleichtert, die Theorie der Lokale zu verstehen und bestehendes Wissen aus der klassischen Maßtheorie entsprechend anzupassen.

Um exemplarisch den Prozess des Beweisens einer solchen Eigenschaft zu zeigen, beschäftigen wir uns nun mit der folgenden Eigenschaft. Den Beweis dafür haben wir dabei eigenständig ausgearbeitet.

Lemma 33. *Für alle offenen Unterlokale U von E gilt:* $\mu(U) + \mu(U^c) = \mu(\top_s)$

Beweis. Sei V die Familie der offenen Umgebungen von U^c. Sei W die Familie der Äußeren von V: $W_i := Ext(V_i)$ für alle i. Die Vereinigung von W entspricht U, da $\bigcap_i V_i = U$ (siehe Lemma 29). W ist außerdem monoton filtriert, da $U \cup V$ für alle $U, V \in W$ ein Element bildet, das U und V enthält. $U \cup V$ ist in W enthalten, da endliche Schnitte von offenen Umgebungen auch immer eine offene Umgebung bilden. Da V also unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, sind die äußeren von V (also W) unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen. Da W also monoton filtriert ist, können wir (aufgrund der Eigenschaften von μ auf den offenen Unterlokalen) folgende Umformung durchführen:

$$\mu(U) = \mu(\bigcup_i W_i) = \sup_i \mu(W_i)$$

Des Weiteren zeigen wir, dass $\mu(W_i) + \mu(V_i) \leq \mu(\top_s)$ für alle i gilt. Aufgrund der Definition des Äußeren wissen wir, dass $W_i \cap V_i = \bot_s$ und $W_i \cup V_i \leq \top_s$. Da $\mu(\bot_s) = 0$ und da μ monoton ist, können wir zeigen:

$$\mu(W_i) + \mu(V_i) = \mu(W_i) + \mu(V_i) + \mu(W_i \cap V_i) = \mu(W_i \cup V_i) \leq \mu(\top_s)$$

für alle i. Da $U^c \leq V_i$ (also $\mu(U^c) \leq \mu(V_i)$) wissen wir: $\mu(W_i) + \mu(U^c) \leq \mu(\top_s)$. Da dies für alle i gilt und wir vorher gezeigt haben, dass $\mu(U) = \sup_i \mu(W_i)$, haben wir die eine Richtung gezeigt: $\mu(U) + \mu(U^c) \leq \mu(\top_s)$.
Um die andere Richtung der Inklusion zu zeigen, beginnen wir mit der Definition der Caratheodory Erweiterung: $\mu(U^c) = \inf_i \mu(V_i)$. Daher wissen wir, dass $\mu(U^c) + \epsilon > \inf_i \mu(V_i)$ für alle $\epsilon > 0$. Es gibt also für alle $\epsilon > 0$ ein $W \in V_i$, sodass $\mu(U^c) + \epsilon > \mu(w)$. Da W eine offene Umgebung von U^c ist, haben wir: $W \cup U^c \geq \top_s$ und daher: $\mu(W) \cup \mu(U) \geq \mu(\top_s)$. Daraus folgt:

$$\mu(\top_s) \leq \mu(U) + \mu(U^c) + \mu(\epsilon)$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, können wir $\mu(\epsilon)$ auch mit $inf\{\mu(\epsilon) \mid \epsilon > 0\} = 0$ ersetzen und können damit den Beweis abschließen. □

Unsere (noch nicht gerkürzte) Lean Formalisierung dieses Beweises nimmt ungefähr 200 Code-Zeilen ein [14] **[Lean: Measure.add_complement]**. Im Vergleich zu den vier Zeilen im Originaldokument von Leroy [13, S. 25] erkennt man gut, dass es, vor allem in diesem Fall oft ein signifikanter Aufwand ist, schriftliche Beweise in Lean zu formalisieren. Es ist nämlich nicht nur nötig, den Text in Code zu übersetzen, sondern es müssen oft auch wichtige Teile des Beweises „neu gefunden" werden, da sie im Originaldokument nicht enthalten sind. Dafür erhalten wir aber die absolute Sicherheit, dass der Beweis korrekt ist, was den einmaligen Aufwand rechtfertigt.

5.2 Neue Eigenschaften der Maßtheorie über Lokale

Um den Banach-Tarski-Mengen eine sinnvolle Größe in der Theorie der Lokale zuordnen zu können, braucht es selbstverständlich mehr als nur die auch in klassischen Maßen auffindbaren elementaren Eigenschaften. Aktuell sind wir dabei in Lean zu zeigen, dass ein Maß über Lokale mit Caratheodory-Erweiterung folgende neue Eigenschaften aufweist:

Lemma 34. *Sei E ein Lokal und μ ein Maß über E mit Caratheodory-Erweiterung. Dann besitzt μ folgende Eigenschaften:*

- *Für alle Unterlokale A, B von E gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (**strikte Additivität**)*
- *Für eine Familie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Unterlokalen von E gilt $\mu(\inf A_i) = \inf \mu(A_i)$ (**kommutiert mit Infimumbilden**)*
- *Sei A ein Unterlokal von E. Die Menge $\{A' \subset A \text{ Unterlokal von } E \mid \mu(A') = \mu(A)\}$ hat ein minimales Element (**Reduzierbarkeit**).*

[Lean: Measure.strictly_additive] Insbesondere gilt nun die strikte Additivität des Maßes mit Caratheodory-Erweiterung für alle Unterlokale eines gegebenen Lokals. Da jede Teilmenge einer gegebenen Menge ein Unterlokal induziert, lässt sich die strikte Additivität auf diese Teilmengen übertragen. Entsprechend können wir festhalten, dass die Caratheodory-Erweiterung nun bessere Eigenschaften hat, die es zusammen mit der besseren Definition des Schnitts möglich machen, den Banach-Tarski-Mengen eine sinnvolle Größe zuzuordnen und dem „Banach-Tarski-Paradoxon“ seinen paradoxen Charakter entziehen, indem ein Duplizieren einer Kugel im Sinne des Banach-Tarski Paradoxons nicht mehr möglich ist.

6 Zusammenfassung der Ergebnisse in Lean

Ein wichtiger Teil unseres Projektes ist es, die Resultate nicht nur zu verstehen und zu Papier zu bringen, sondern parallel auch in Lean zu formalisieren. Das hat einerseits natürlich den Vorteil, dass Beweise mit Lean automatisch sicher verifiziert werden können. Ein weiterer wichtiger Aspekt, bei dem Lean großes Potenzial hat, ist die Zusammenarbeit zwischen Mathematikern. Hier spielt natürlich auch wieder die Verifizierung eine Rolle, da so vor allem in großen Teams nicht jedes Mitglied alle Beweise verstehen und überprüfen muss. Für unser Projekt war es allerdings von deutlich größerer Bedeutung, dass Lean dem Nutzer die Möglichkeit gibt, Definitionen mit einer formalen Sprache standardisiert zu verfassen und in der Mathlib [12] zu veröffentlichen. Bei dem Aufnahmeprozess in die Mathlib werden Definitionen zudem ausführlich mit anderen Mitwirkenden der Mathlib diskutiert, was die Möglichkeit für wertvolles Feedback gibt. Da eine sogenannte „Pull Request“ [10] dadurch (in Abhängigkeit von der Komplexität des hinzugefügten Materials) auch etwas länger dauern kann, haben wir uns vorgenommen, bereits vor dem Ende unseres Projektes erste Definitionen und Resultate in der Mathlib zu veröffentlichen. Daher haben wir bereits einige Pull Requests [7] zu verschiedenen Themen erstellt, die auch schon zur Mathlib hinzugefügt wurden:

[#21718]	fix(Order/Nucleus): Remove outdated comment
[#21560]	feat(Order/Nucleus): nuclei form a frame
[#21515]	feat(Order/Nucleus): nuclei form a complete lattice
[#21418]	doc(Order/Heyting/Basic): Coheyting difference is not right adjoint
[#21391]	refactor(Order/CompleteBooleanAlgebra): a complete lattice which is a Heyting Algebra is automatically a frame
[#21346]	feat(Order/Nucleus): coe_mk simp lemma
[#20918]	doc(Order/Hom/Lattice): warn against `toFun`

[#20328]	feat(Order/CompleteBooleanAlgebra): Himp in terms of sSup
[#20246]	feat(Order/CompleteLattice): instances for CompleteSemilatticeInf/CompleteSemilatticeSup for Dual types
[#19440]	feat(Order/Nucleus): Nucleus

Man sieht, dass wir einen wichtigen Teil unserer Arbeit (den Nukleus und dessen Frame-Struktur) bereits in die Mathlib gebracht haben. So kann nun jeder, der die Mathlib benutzt, unsere Definition des Nukleus verwenden. In einer anderen Pull Request haben wir die Definition des Frames, die bereits in der Mathlib enthalten war, optimiert. Wir konnten zeigen, dass das Axiom der Distributivität, das vorher in der Definition enthalten war, nicht benötigt wurde, da es allein daraus folgt, dass ein vollständiger Verband in Kombination mit einer Heyting Algebra vorliegt.

Neben der Arbeit für die Mathlib haben wir parallel in unserem eigenen Github Repository [2] große Teile der elementaren Theorie der Lokale formalisiert. Dazu gehören zum Beispiel die zu den Nuklei dualen Unterlokale mit den entsprechenden Operationen. Auch die offenen Unterlokale und deren Komplemente, die abgeschlossenen Unterlokale, haben wir bereits in Lean fertiggestellt. Es ist uns außerdem gelungen bereits viele der Definitionen und Lemmata der Maßtheorie auf Lokalen zu formalisieren. Dazu gehört einerseits die Definition eines Maßes auf den offenen Unterlokalen, aber auch einige Eigenschaften der Caratheodory Erweiterung dieses Maßes.

Um die Arbeit mit Lean zu veranschaulichen, werden wir nun beispielhaft die Definition eines Nukleus betrachten. In der Mathlib haben wir den Nucleus als Erweiterung eines `InfHom` definiert. Die folgendeDefinition ist etwas anschaulicher, ändert aber nichts an der Bedeutung. Unter folgendem Link kann man den Lean-Code auf Live-Lean, einer online Lean Plattform, nachvollziehen: livelean. Während eines Beweises wird auf der rechten Seite der aktuelle Stand angezeigt.

```
/--
The Type of Nuclei on a Frame.
-/
structure Nucleus (X : Type*) [SemilatticeInf X] where
  /-- The function of the nucleus.-/
  toFun : X → X
  /-- A Nucleus is idempotent.-/
  idempotent (x : X) : toFun (toFun x) ≤ toFun x
  /-- A Nucleus is increasing.-/
  increasing (x : X) : x ≤ toFun x
  /-- A Nucleus preserves infima.-/
  preserves_inf (x y : X) : toFun (x ⊓ y) = toFun x ⊓ toFun y
```

Wir definieren den Nukleus als **`structure`**, die Funktion des Nukleus und die notwendigen Bedingungen enthält. Eine **`structure`** in Lean ist vergleichbar mit structs in C oder mit Klassen in objektorientierten Programmiersprachen wie Python. Die **`structure`** definiert in Lean den Typ aller Nuklei, der aber vom Typ `X` der Lokale, in der sich der Nukleus befindet, abhängt. `[SemilatticeInf X]` stellt sicher, dass der Typ, von dem der Nukleus abhängt, ein Infimum besitzt und mindestens die Eigenschaften eines Semilattices erfüllt. Wir verwenden den Nukleus aber nur auf Lokalen, d.h. der Typ `X` hat bei uns immer eine Frame Struktur.

Das erste Feld der **`structure`** enthält die Funktion des Nukleus, die vom Typ `X → X` sein muss. Das nächste Feld `idempotent` erwartet einen Beweis, der versichert, dass die Funktion idempotent ist. Die

nächsten beiden Felder enthalten ebenfalls Beweise für die zwei anderen Eigenschaften des Nukleus.
Nun zeigen wir exemplarisch, dass jeder Nukleus monoton ist:

```
lemma Nucleus.monotone (n : Nucleus X) : Monotone n := by
  rw [Monotone]
  intro a b h
  have h1 : a ⊓ b = a := inf_eq_left.mpr h
  have h2 := n.preserves_inf a b
  rw [h1] at h2
  exact left_eq_inf.mp h2
```

Wir müssen zeigen, dass $n(a) \leq n(b)$, wenn $a \leq b$, um den Beweis der Monotonie abzuschließen. Daher wissen wir nun in unserem Lean-Beweis, dass $a \leq b$ und müssen zeigen, dass $n(a) \leq n(b)$. Zuerst zeigen wir $a \cap b = a$ in `h2`, mit einem Mathlib-Lemma, das besagt, dass $a \cap b = a$, wenn $a \leq b$. Nun betrachten wir mit `h2` die dritte Eigenschaft von Nuklei, nämlich dass Infima erhalten bleiben: $n(a \cap b) = n(a) \cap n(b)$. In dieser Gleichung ersetzen wir mithilfe von `h1` $a \cap b$ durch a. Zum Schluss verwenden wir die andere Richtung des vorherigen Mathlib Lemmas und zeigen, dass $n(a) \leq n(b)$, da $n(a) = n(a) \cap n(b)$.
Dies war nur ein sehr einfaches Beispiel für einen Lean-Beweis unsere, teilweise deutlich komplexeren Beweise befinden sich in unserem Github Repository [2].

7 Betrachtung der Ergebnisse und Ausblick

Das naheliegenste Ziel war und ist es, die Resultate von Leroy vollständig in Lean zu formalisieren und anschließend gemeinsam mit den Grundlagen der Theorie der Lokale in die Mathlib zu übertragen. Diese Ziele werden wir in den nächsten Wochen erreichen. Ausgehend davon kann es aber noch viel weiter gehen. Da wir dann einen Begriff für das Maß über Lokale haben, könnten wir uns damit beschäftigen, ob auch eine Integrationstheorie über Lokale möglich ist und man könnte betrachten, wie mathematische Standard-Sätze in die Theorie der Lokale übertragen werden können. Um die Erkenntnisse aus unserer Arbeit in noch allgemeineren Strukturen betrachten zu können, wäre es zudem eine interessante Möglichkeit, u.a. die von uns in Abschnitt 5 beschriebene Maßtheorie über Lokale in die Topostheorie einzubetten, um potentiell bessere und allgemeiner geltende Resultate zu erhalten.

Erwähnenswert ist außerdem die wie bereits in Kapitel 4.2 aufgezeigte Ähnlichkeit zwischen Lokale und Topologischen Räumen. Schaut man genauer hin, so kann man erkennen, dass Lokale eine Verallgemeinerung von Topologischen Räumen darstellen. Insbesondere induzieren Unterräume hinreichend guter Räume wie etwa Hausdorff Räume oder kompakte Räume, eine Unterlokale. Man kann zeigen, dass dabei die Ordnung der Unterräume in den induzierten Unterlokalen erhalten bleibt. Daraus resultiert, dass ein Maß auf einem hinreichend guten Topologischen Raum X auch ein Maß auf der entsprechenden Lokale induziert, wobei die klassische Caratheodory-Erweiterung auf $\mathcal{P}(X)$ der Einschränkung der Caratheodory-Erweiterung des Maßes auf der induzierten Lokale entspricht. Dieser Zusammenhang zwischen Topologischen Räumen und Lokale ist aber nur nebensächlich, weshalb wir uns zunächst auf die Maßeigenschaften der Maße über Lokale konzentrieren. Wir haben für diesen Teil des Projekts schon, einen Blueprint erstellt [4], ihn aber noch nicht in Lean formalisiert.

8 Unterstützungsleistungen

Ein besonderer Dank gilt unseren Betreuern Noa Bihlmaier, Student an der Universität Tübingen, und Helmut Ruf, Lehrer in Tuttlingen. Durch Sie haben wir überhaupt erst von der Theorie der Lokale erfahren. Während der ganzen Zeit haben sie stets geduldig unsere mathematischen Verständnisfragen beantwortet und durch regelmäßige Feedback-Runden unser Projekt strukturiert.
Auch wenn wir aufgrund der Unterschiede unserer Wohnorte viel online gearbeitet haben, haben wir uns immer wieder in den Räumen des SFZ in Tuttlingen getroffen. Wir sind sehr dankbar für diese Möglichkeit.
Besonders motiviert hat uns der dritte Platz und das Feedback von der Jury auf dem Landeswettbewerb 2024, vor allem da wir von Dr. Victoria Schleiß eine Einladung auf den International Congress für Mathematical Software in Durham erhielten. Dort hatten wir die Möglichkeit, viele interessante Vorträge, u.a. über Lean, zu hören und mit Mathematikern ins Gespräch zu kommen.

9 Quellen

[1] *Banach-Tarski-Paradoxon*. In: *Wikipedia*. Page Version ID: 251752457. 31. Dez. 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Banach-Tarski-Paradoxon&oldid=251752457 (besucht am 06. 01. 2025).

[2] Bergschaf. *Bergschaf/Localic-Caratheodory-Extensions*. original-date: 2024-10-27T14:42:51Z. 6. Jan. 2025. URL: https://github.com/Bergschaf/Localic-Caratheodory-Extensions (besucht am 09. 01. 2025).

[3] *Beschränkte Menge*. In: *Wikipedia*. Page Version ID: 218197807. 14. Dez. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beschr%C3%A4nkte_Menge&oldid=218197807 (besucht am 04. 01. 2025).

[4] *Blueprint Teil 2*. URL: https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/blueprint/dep_graph_chapter_2.html.

[5] *Category:Dual Orderings - ProofWiki*. URL: https://proofwiki.org/wiki/Category:Dual_Orderings (besucht am 04. 01. 2025).

[6] *frame in nLab*. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/frame#definition (besucht am 12. 01. 2025).

[7] *github*. URL: https://github.com/leanprover-community/mathlib4/blob/6d2cbb58e68c7424d746005d5bbf75a31cb14cb6/Mathlib/Order/CompleteLattice.lean#L176.

[8] *Heyting algebra in nLab*. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/Heyting+algebra (besucht am 04. 01. 2025).

[9] *Heyting-Algebra*. In: *Wikipedia*. Page Version ID: 251689778. 29. Dez. 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Heyting-Algebra&oldid=251689778 (besucht am 04. 01. 2025).

[10] *How to contribute to mathlib*. URL: https://leanprover-community.github.io/contribute/index.html#how-to-contribute-to-mathlib (besucht am 04. 01. 2025).

[11] Peter T. Johnstone. *Stone Spaces*. Google-Books-ID: CiWwoLNbpykC. Cambridge University Press, 1982. 398 S. ISBN: 978-0-521-33779-3.

[12] *leanprover-community/mathlib4*. original-date: 2021-05-09T07:52:01Z. 4. Jan. 2025. URL: https://github.com/leanprover-community/mathlib4 (besucht am 04. 01. 2025).

[13] Olivier Leroy. *Théorie de la mesure dans les lieux réguliers. ou : Les intersections cachées dans le paradoxe de Banach-Tarski*. 22. März 2013. DOI: 10.48550/arXiv.1303.5631. arXiv: 1303.5631[math]. URL: http://arxiv.org/abs/1303.5631 (besucht am 04. 01. 2025).

[14] *Leroy_Lemme3*. URL: https://github.com/Bergschaf/Localic-Caratheodory-Extensions/blob/f4791ce3d0f99c0590694b34aaf7b27ff374815e/Leroy/Measure.lean#L274.

[15] *locale in nLab*. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/locale (besucht am 09. 01. 2025).

[16] Saunders Mac Lane und Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Universitext. New York, NY: Springer, 1994. ISBN: 978-0-387-97710-2 978-1-4612-0927-0. DOI: 10.1007/978-1-4612-0927-0. URL: https://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0927-0 (besucht am 04. 01. 2025).

[17] Patrick Massot. *PatrickMassot/leanblueprint*. original-date: 2021-01-22T10:50:48Z. 1. Jan. 2025. URL: https://github.com/PatrickMassot/leanblueprint (besucht am 05. 01. 2025).

[18] *sublocale in nLab*. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/sublocale (besucht am 04. 01. 2025).

Lean-Quellen

Measure https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure

f_injective_one https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/f_injective_one

Sublocale https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Sublocale

Sublocale.le_iff https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Sublocale.le_iff

Open https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open

Open.le_iff https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.le_iff

Open.preserves_sSup https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.preserves_sSup

Open.preserves_inf https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.preserves_inf

Closed https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Closed

Open.inf_compl_eq_bot https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.inf_compl_eq_bot

Open.sup_compl_eq_top https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.sup_compl_eq_top

Open.compl https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Open.compl

Sublocale.closure https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Sublocale.closure

Sublocale.exterior https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Sublocale.exterior

Sublocale.Open_Neighbourhood https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Sublocale.Open_Neighbourhood

regular https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/regular

Measure.caratheodory.monotonic https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.caratheodory.monotonic

Measure.add_complement https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.add_complement

Measure.add_complement_inf https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.add_complement_inf

Measure.inf_filtered https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.inf_filtered

Measure.preserves_inf https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.preserves_inf

Measure.restrict_subadditive https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.restrict_subadditive

Measure.strictly_additive https://bergschaf.github.io/Localic-Caratheodory-Extensions/docs/find/#doc/Measure.strictly_additive

Nucleus https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus

Order.Frame https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Order.Frame

TopologicalSpace.Opens.instFrame https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/TopologicalSpace.Opens.instFrame

Nucleus.instPartialOrder https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instPartialOrder

Nucleus.instBot https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instBot

Nucleus.instTop https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instTop

Nucleus.instInfSet https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instInfSet

Nucleus.instCompleteLattice https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instCompleteLattice

HeytingAlgebra https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/HeytingAlgebra

Nucleus.instHImp https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instHImp

Nucleus.instHeytingAlgebra https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/Nucleus.instHeytingAlgebra

OrderDual.instCoframe https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/OrderDual.instCoframe

himp_eq_sSup https://leanprover-community.github.io/mathlib4_docs/find/#doc/himp_eq_sSup

Pull-Requests

21718 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21718

21560 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21560

21515 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21515

21418 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21418

21391 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21391

21346 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/21346

20918 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/20918

20328 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/20328

20246 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/20246

19440 https://github.com/leanprover-community/mathlib4/pull/19440