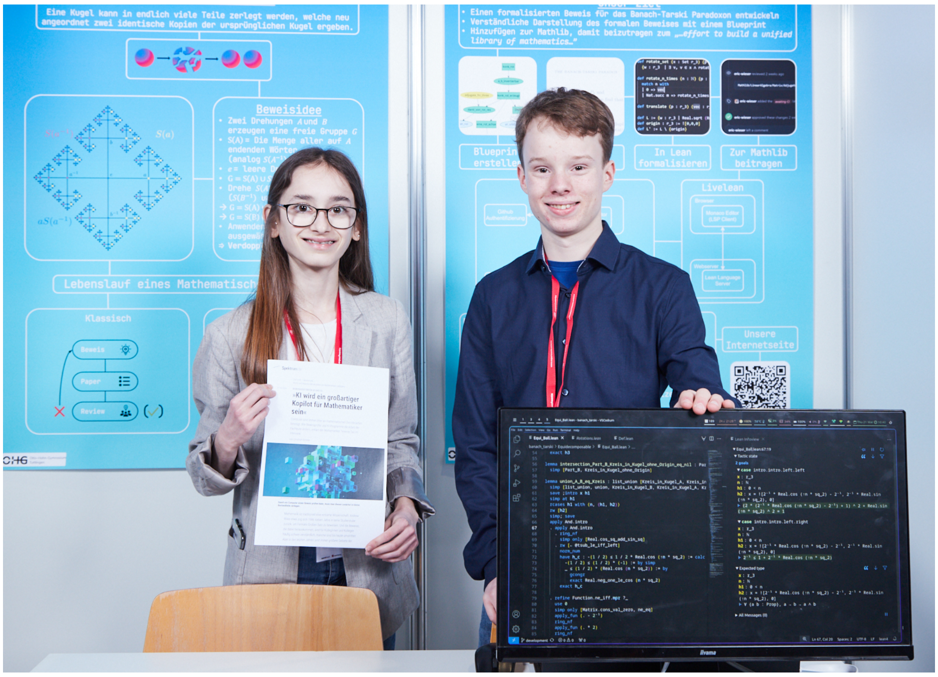
# Jugend forscht 2025

# LEAN, Logik, Lokale: Banach-Tarski im Licht moderner Mathematik!





Chiara Cimino, Otto-Hahn-Gymnasium Tuttlingen

Christian Krause, Gymnasium Ochsenhausen

Schülerforschungszentrum Südwürttemberg e.V.

Standorte Tuttlingen und Ochsenhausen


9. April 2025

## Projektübersicht

Das Ziel unseres Jugend-forscht-Projekts des letzten Jahres war es, das Banach-Tarski-Paradoxon, welches besagt, dass wir eine Kugel allein durch Zerlegen und Neuanordnen in zwei identische Kugeln duplizieren können, mithilfe des Beweisassistenten Lean zu formalisieren und der Lean-Community zur Verfügung zu stellen. Aber warum ist diese Art der Kugelverdopplung, die ja offensichtlich den Gesetzen der Physik widerspricht, in der Mathematik überhaupt möglich? Wir machten es uns vor dem Hintergrund dieser Frage deshalb zur Aufgabe, die Problematik hinter Banach-Tarski zu beheben und damit das Paradoxon aufzulösen. Da unsere Arbeit über die Jugend-forscht-Phase hinausging, erreichte uns in einem von zahlreichen Gesprächen mit Mathematikern der Hinweis von Fields Medaillen Träger Laurent Lafforgue auf das französische Manuskript von Olivier Leroy „Les intersections cachees dans le paradoxe de Banach-Tarski". Dieses Manuskript weist auf eine allgemeinere Theorie hin, in der die Problematik hinter Banach-Tarski behoben wird, weshalb wir uns intensiv mit Leroys Arbeit beschäftigten. Da diese nie in einem Journal veröffentlicht und damit auch nie offiziell geprüft wurde, begannen wir, seine Ideen mit anderen Theorien in Verbindung zu setzen und damit das Manuskript zu vervollständigen. Hierfür mussten wir zunächst einige mathematische Definitionen und Lemmata leanen, wobei es uns bereits gelang, einen signifikanten Teil der Lean-Community zur Verfügung zu stellen. Ausgehend davon haben wir bereits das gesamte Manuskript von Leroy in Lean formalisiert und dadurch vervollständigt und verifiziert. Mit Leroys Ansatz ist dann der Satz von Banach-Tarski kein Paradoxon mehr, da mit dieser Theorie die Banach-Tarski-Zerlegung nicht mehr disjunkt wäre.

## Inhaltsverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

# 1 Fachliche Kurzfassung

Wenn man in der klassischen Maßtheorie ein Maß mithilfe der Caratheodory Erweiterung auf die gesamte Potenzmenge erweitert, so besitzt diese Erweiterung im Allgemeinen nicht mehr dieselben nützlichen Eigenschaften wie bspw. die strikte Additivität. Die Folgen sind im Banach-Tarski-Paradoxon zu erkennen, welches eine Kugelverdopplung ermöglicht. Im Zuge dieses Projektes beschäftigen wir uns mit einer Theorie, bei der solche Probleme nicht mehr auftauchen, ohne jedoch die zu messenden Mengen einschränken zu müssen, wobei diese Theorie insbesondere nie in einem mathematischen Journal veröffentlicht wurde. Es handelt sich dabei um die Theorie der Lokale, auf die der französische Mathematiker Olivier Leroy in seinen Notizen aufbaut. Lokale sind dabei intuitiv als die offenen Mengen eines Topologischen Raums zu verstehen, wobei wir nicht mehr fordern, dass das zugrundeliegende geordnete Mengensystem eine Teilmenge der Potenzmenge eines festen gegebenen Raums ist. Daraus resultieren neue Definitionen von Konzepten wie der „Teilmenge“ (Unterobjekte), der Vereinigung und dem Schnitt. Damit lässt sich dann ebenfalls eine Maßtheorie konstruieren, wobei man ein Maß auf einer Lokale ähnlich wie ein klassisches Maß verstehen kann. Betrachtet man allerdings die Caratheodory Erweiterung eines Maßes auf einer Lokale, so erhält man im Gegensatz zu den mangelhaften Eigenschaften der Caratheodory Erweiterung in der klassischen Maßtheorie u. a. eine Reduzibilität und eine strikte Additivität, d. h. die Caratheodory Erweiterung eines Maßes auf einer Lokale bleibt insbesondere ein Maß. Daher erhält man eine bessere Maßtheorie! Da dieses unglaubliche Resultat aber nie formal veröffentlicht und damit peer-reviewed wurde, besteht unsere Arbeit darin, genau das zu tun. Hierfür verwenden wir den mathematischen Beweisassistenten Lean, mit dessen Hilfe wir Ungenauigkeiten und Lücken im Beweis von Leroy aufdecken und beheben konnten und damit den Großteil seiner Theorie bereits in Lean formalisiert haben. Des Weiteren gelang es uns bereits, Teile des von uns formalisierten Beweises in der Mathlib zu veröffentlichen. Dort werden viele bereits in Lean formalisierte Definitionen und Theoreme gespeichert.

# 2 Motivation und Aufgabenstellung

„Wir können eine Kugel allein durch Zerschneiden und anschließendem Drehen wieder zu zwei identischen Kopien der Ausgangskugel zusammenfügen, also insgesamt verdoppeln.“ Dass das mit der klassischen Mengenlehre gilt, folgt aus dem Satz von Banach-Tarski [1]. Uns erschien diese Aussage anfänglich unglaublich, weshalb wir in unserem Jugend-forscht-Projekt des letzten Jahres den mathematischen Beweis des Banach-Tarski-Paradoxons näher beleuchteten. Indem wir den Beweis Stück für Stück durchdrangen, gingen wir automatisch den Weg einer klassischen Verifikation eines mathematischen Papers (siehe Abbildung 1, linke Spalte). Da der Prozess der menschlichen Kontrolle aber durchaus fehleranfällig ist, stellten wir uns die Frage, ob man diese Fehlbarkeit nicht umgehen könnte. Dabei stießen wir auf den mathematischen Beweisassistenten Lean. Diese auf der gleichnamigen Programmiersprache Lean basierende Software erlaubt es uns, die entsprechenden mathematischen Objekte zu definieren, sowie deren Eigenschaften inkl. Beweis zu formalisieren. Basierend auf Typentheorie überprüft Lean die Standhaftigkeit des Beweises und markiert ggf. Fehler, was das Beweisen erleichtert. Dies bedeutet im Umkehrschluss aber auch, dass Lean den Anspruch einer absoluten mathematischen Korrektheit erheben kann (siehe Abbildung 1, rechte Spalte). Die Mathlib Community von mittlerweile fast 400 Contributern, zu der wir nun seit einem Jahr gehören, hat bereits über die Hälfte des Grundstudiums der Mathematik, sowie einige sehr fortgeschrittene Konzepte in insgesamt über eine Million Zeilen Code digitalisiert.

Das ist auch der Grund, weshalb sich Mathematikerinnen und Mathematiker weltweit vernetzen, um weitere Sätze in Lean zu formalisieren. Hier erleben wir eine wunderbare und effektive Zusammenarbeit der Informatik und der Mathematik.

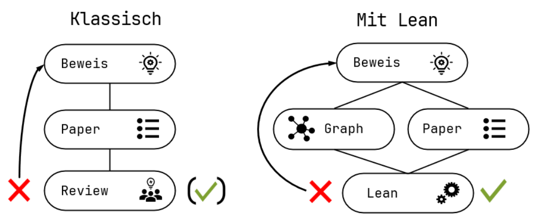


Abbildung 1: Verifikation mit bzw. ohne Beweisassistent

Je länger wir uns jedoch mit dem Beweis des Satzes von Banach-Tarski beschäftigten, desto öfter kam die Frage auf, warum das Duplizieren einer Kugel allein durch Zerlegung der Ausgangskugel sowie anschließender Translationen und Zusammenfügen der einzelnen Teile in der Mathematik überhaupt erlaubt sein sollte und ob wir diese Defekte in der klassischen Topologie, die dieses Paradoxon überhaupt ermöglichen, nicht mithilfe einer anderen Sichtweise auf die Dinge, genauer gesagt mithilfe einer anderen mathematischen Theorie, beheben könne. Um das aber sauber abgrenzen zu können, ist es essentiell, dass wir die Lücken in der klassischen Maßtheorie identifizieren, was zunächst eine nähere Betrachtung erfordert.

# 3 Kurzer Einblick in die benötigte klassische Maßtheorie

Das Grundprinzip der Maßtheorie besteht darin, einer Ansammlung an Mengen eine sinnvolle Größe zuzuordnen. Allgemein versteht man unter einem Maß allerdings folgendes:

**Definition 1.** *Sei $X$ eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge und $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Man nennt $\mu$ ein Maß, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A)$ *ist monoton*
- $\mu$ *ist $\sigma$-additiv, insbesondere $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$*

*Im Folgenden nennen wir $\mathcal{M}$ die messbaren Mengen.*

Wie man erkennen kann, ist ein Maß aber auf ein bestimmtes Mengensystem begrenzt, d. h. Objekte, die nicht in diesem System enthalten sind, kann keine Größe zugeordnet werden. Um diesen Mengen dennoch eine Größe zuzuordnen gibt es die Caratheodory Erweiterung. Sie approximiert die Größe einer beliebigen Menge $Y \subseteq X$ von außen, indem sie den Grenzwert des Maßes aller messbaren Mengen, die $Y$ enthalten, betrachtet:

**Definition 2.** *Sei $\mu$ ein Maß auf einem Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Die Caratheodory Erweiterung des Maßes ist definiert als*

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A_i \in \mathcal{M},\ Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}$$

*für alle $Y \subseteq X$*

Jetzt haben wir zwar einen sinnvollen Größenbegriff für eine größere Ansammlung an Mengen, jedoch ist zu vermerken, dass bei der Caratheodory Erweiterung Eigenschaften wie bspw. die allgemeine strikte

Additivität verloren gehen. Dieser Verlust der strikten Additivität spiegelt sich bspw. im Banach-Tarski-Paradoxon wider. Dass man somit eine Kugel verdoppeln kann, hat uns ziemlich gestört und wir haben uns gefragt, ob es nicht eine Möglichkeit gibt, dass eine Caratheodory Erweiterung eines Maßes die strikte Additivität des Ausgangsmaßes übernimmt. Dabei sind wir auf die Theorie der Lokale gestoßen.

## 4 Die Theorie der Lokale und erste Ergebnisse unserer Arbeit

Unsere Arbeit basiert auf dem Dokument „Théorie de la mesure dans les lieux réguliers“ (1995) [13], das behauptet, dass die Caratheodory Erweiterung eines Maßes auf die Unterlokale einer Lokale ein Maß mit guten Eigenschaften (z.B: strikte Additivität) liefert und damit das Banach-Tarski-Paradoxon auflöst.
Das Problem an diesem Dokument ist allerdings, dass es lediglich aus den Notitzen von Olivier Leroy besteht, die nach seinem Tod im Jahr 1996 digitalisiert wurden. Daher wurde das Paper auch nie in einem mathematischen Journal veröffentlicht und damit auch nie peer-reviewed (also durch andere Mathematiker kontrolliert). Da die Notizen von Leroy zudem teilweise sehr vage formuliert sind, keine Quellenangaben enthalten und mit kleinen Fehlern behaftet sind, haben wir es uns zur Aufgabe gemacht, das Dokument zu vervollständigen, in Lean zu formalisieren und damit zu verifizieren.