Örnek: Sürekli raslantı değişkeni X in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} cx & ; \quad 0 \le x \le 3 \\ c(6-x) & ; \quad 3 \le x < 6 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olmarak verilmiş olsun. c'nin hangi değeri için f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur?

$\int_x f(x).dx = 1$ olmalıdır. Yani

$\int_0^3 cx.dx + \int_3^6 c(6-x).dx = 1$ olmalıdır.

$$c\int_0^3 xdx + 6c\int_3^6 dx - c\int_3^6 xdx = 1$$

$$c\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 6cx\Big|_3^6 - c\frac{x^2}{2}\Big|_3^6 = \frac{9c}{2} + (36c-18c) - (\frac{36c-9c}{2}) = 9c = 1$$

$c = \frac{1}{9}$ bulunur.

Örnek 4.3: Sürekli X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{k} & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X > 1/2)$, $P(X \leq 3/2)$ ve $P(1/2 < X < 3/2)$ olasılıklarını,

i) Olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre bulunuz.

ii) Dağılım fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

***Çözüm*.**

a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun 2. özelliğinden,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx}_{0} + \int_0^1 f_X(x)\,dx + \int_1^2 f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_2^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{0} = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{k}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{k}\right) dx = 1 \Rightarrow k = 3$$

b) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun 4. özelliğinden

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x/3 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ (2x-1)/3 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

c) **i)** Olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla,

$$P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_1^2 \frac{2}{3} dx = \frac{5}{6}$$

$$P(X \leq 3/2) = \int_0^1 \frac{1}{3} dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}$$

$$P(1/2 < X < 3/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3} dx = \frac{1}{2}$$

Örnek: Bir $\boldsymbol{X}$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olarak verilmektedir.

(a) C sabitinin değeri nedir?
(b) $P\{X > 1\} = ?$

Cevap: (a) f fonksiyonu bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{2} f(x)dx}_{1} + \underbrace{\int_{2}^{\infty} f(x)dx}_{0}$$

$$C\int_{0}^{2}(4x - 2x^2)dx = 1$$

sadeleştirilirse

$$\underbrace{C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2}}_{\frac{8}{3}} = 1$$

elde edilir ve

$$C = \frac{3}{8}$$

(b) $P\{X > 1\} = \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}$

Örnek 3.11 X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere,

c. c değerini hesaplayınız.

d. $E(X) =?$

e. $Var(X) =?$

f. $P(X = 1) =?$

g. $P(2 < X \leq 4) =?$

h. $P(X \leq 3) =?$

a) f fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olması için,

$$\sum_x f_X(x) = 1$$

şartını sağlaması gerekir. Buna göre,

$\sum_{x=1}^{4} cx = 1$ olmalıdır. Yani,

$c.1 + c.2 + c.3 + c.4 = 1$

$10.c = 1$

$c = \dfrac{1}{10}$

olmalıdır. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}x & , \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

biçiminde yazılabilir.

b) $E(X) = \sum_{x=1}^{4} xf(x)$

$$= 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4$$

$$= 0.1 + 0.4 + 0.9 + 1.6$$

$$= 3$$

c) $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 f(x)$$

$$= 1 \times 0.1 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.4$$

$$= 0.1 + 0.8 + 2.7 + 6.4$$

$$= 10$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$= 10 - 3^2$$

$$= 1$$

d) $P(X = 1) = 0.1$

e) $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$$= 0.3 + 0.4 = 0.7$$

f) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.6$$

Örnek 3.12 X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

olmak üzere,

a) c değerini hesaplayınız.

b) $E(X) =?$

c) $Var(X) =?$

d) $P(1 \leq X \leq 3) =?$

e) $P(2 \leq X < 4) =?$

f) $P(X \leq 3) =?$

a) $\int_0^5 cxdx = 1$

$$c\int_0^5 xdx = 1$$

$$c\frac{x^2}{2}|_0^5 = 1$$

$$c = \frac{2}{25}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & , \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^5 x\frac{2}{25}xdx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^2dx$$

$$= \frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx = \frac{2}{25}\frac{x^3}{3}|_0^5 = \frac{10}{3}$$

c) $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \int_0^5 x^2\frac{2}{25}xdx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^3dx = \frac{2}{25}\frac{x^4}{4}|_0^5 = \frac{25}{2}$$

$$Var(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

d) $P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\frac{x^2}{2}|_1^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{25}$

e) $P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\frac{x^2}{2}|_2^4 = \frac{2}{25}\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{12}{25}$

f) $P(X \le 3) = \int_0^3 \frac{2}{25}xdx = \frac{2}{25}\frac{x^2}{2}|_0^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{9}{25}$

3.5. Bazı Kesikli Dağılımlar

3.5.1. Bernoulli Dağılımı

Bir deneyde başarı ve başarısızlık diye nitelendirilen iki sonuçla ilgilenildiğinde bu deneye (iki sonuçlu) Bernoulli deneyi ya da Bernoulli denemesi denir.

başarı olasılığı → p , $(0 < p < 1)$

başarısızlık olasılığı → $1 - p = q$

başarı-başarısız/ sağlam-bozuk/ olumlu-olumsuz/ ölü-canlı

Bernoulli dağılımının olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \;\; x = 0,1$$

şeklinde verilir.

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Bernoulli dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 0(1 - p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\, f(x) = 0^2(1 - p) + 1^2 p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

3.5.2. Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında (bağımsız olarak) n kez tekrarlanması ile oluşan deneye binom deneyi denir.

Binom deneyinin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- Deney süresince örneklemde denek sayısı ya da deneme sayısı değişmez olmalıdır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Her denemede iki olası sonuç vardır (istenen ve istenmeyen olay).
- Her denemede ilgilenilen olay olasılığı p değişmezdir. Dolayısıyla istenmeyen olay olasılığı $q = 1 - p$ de değişmezdir.

Binom dağılımı kesikli bir olasılık dağılımıdır. X rasgele değişkeni binom dağılımına sahip olduğunda $X \sim b(n,p)$ ile gösterilir.

Binom dağılımının olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \;\; x = 0,1,\ldots,n$$

şeklinde verilir.

Binom dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$\mu = E(X) = np$

$\sigma^2 = Var(X) = npq$

Çarpıklık katsayısı $ÇK = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, basıklık katsayısı $BK = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$

Örnek 3.15. Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Bu kutudan yerine koyarak 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

X: Çekilen tabletin aspirin olması

$X \sim b(n = 3, p = \frac{1}{2})$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.375$$

Örnek 3.16. İlaç üreten bir firma ürettiği ilaçları ambalajlayarak satışa sunmaktadır. Ambalajlanan ilaç paketlerinin %10'unun istenen standarda uymadığı bilinmektedir. Bu ambalajlanmış ilaç paketlerinden 5 tanesi yerine koyularak rasgele olarak seçildiğinde,

a) Hepsinin de ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
b) Sadece 2'sinin ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
c) En az 4'ünün ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
d) En fazla 2'sini ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
e) Ambalajı istenilen standarda uygun olması beklenen ilaç paketi sayısı nedir?

X: Ambalajı istenilen standarda uyan ilaç paketi sayısı

$X \sim b(n = 5, p = 0.90)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \;\; x = 0,1,\ldots,n$$

a) $P(X = 5) = \binom{5}{5}(0.90)^5(0.10)^0 = \frac{5!}{5!0!}(0.90)^5 = 0.59049$

b) $P(X = 2) = \binom{5}{2}(0.90)^2(0.10)^3 = \frac{5!}{2!3!}(0.90)^2(0.10)^3 = 0.0081$

c) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$
$= \binom{5}{4}(0.90)^4(0.10)^1 + \binom{5}{5}(0.90)^5(0.10)^0 = \frac{5!}{4!1!}(0.90)^4(0.10)^1 + \frac{5!}{5!0!}(0.90)^5$

$= 0.32805 + 0.59049 = 0.91854$

d) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= \binom{5}{0}(0.90)^0(0.10)^5 + \binom{5}{1}(0.90)^1(0.10)^4 + \binom{5}{2}(0.90)^2(0.10)^3$
$= 0.00001 + 0.00045 + 0.0081 = 0.00856$

e) $\mu = E(X) = np = 5(0.90) = 4.5$

Örnek 3.17. Belli bir ameliyatın başarılı sonuçlanması olasılığı %80'dir. Ameliyat edilen 10 hastadan,

a) 6' sının iyileşmesi olasılığı nedir?
b) En az 9' unun iyileşmesi olasılığı nedir?
c) En fazla 7' sinin iyileşmesi olasılığı nedir?
d) Ameliyatı başarılı sonuçlanacak hastaların beklenen sayısını ve varyansını hesaplayınız.

X: Ameliyat sonrası iyileşen hasta sayısı

$X \sim b(n = 10, p = 0.80)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}(0.80)^x(0.20)^{n-x}, \;\; x = 0,1,\dots,10$$

a) $P(X = 6) = \binom{10}{6}(0.80)^6(0.20)^{10-6} = \frac{10!}{6!(10-6)!}(0.80)^6(0.20)^4 = 0.088$

b) $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$

$$= \binom{10}{9}(0.80)^9(0.20)^{10-9} + \binom{10}{10}(0.80)^{10}(0.20)^{10-10}$$

$$= \frac{10!}{9!\,(10-9)!}(0.80)^9(0.20)^1 + \frac{10!}{10!\,(10-10)!}(0.80)^{10}(0.20)^0$$

$= 0.2684 + 0.1073 = 0.3758$

c) $P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - \big(P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)\big)$

$P(X=8)=\binom{10}{8}(0.80)^8(0.20)^2=0.3019$

$P(X=9)+P(X=10)=0.3758$ daha önce bulunmuştu.

$$P(X\le 7)=1-\big(P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\big)$$

$$=1-(0.3019+0.3758)=0.3224$$

d) $\mu=E(X)=np=10(0.80)=8$

$\sigma^2=Var(X)=npq=10(0.80)(0.20)=1.6$

3.5.3. Poisson Dağılımı

Bu dağılım, belirli bir aralıkta gerçekleşme olasılığının çok küçük olduğu durumlarda kullanılır. Örneğin Ankara'da Beşevler kavşağında bir gün içerisinde meydana gelen trafik kazaları, belli bir yılda meydana gelen doğal afetler, az rastlanan hastalıklar gibi.

Denek sayısı olan n büyük iken p de çok küçük ise binom dağılımı poisson dağılımına yaklaşır. Genel olarak $np\le 5$ olduğu zaman binom dağılımı yerine poisson dağılımı kullanılabilir. Ayrıca n' nin 20 den büyük olması koşulu vardır.

X rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse, bu değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\;\; x=0,1,2,\ldots$$

λ gerçekleşen ortalama olay sayısı olup $\lambda=np$ dir.

Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$\mu=E(X)=\lambda$

$\sigma^2=Var(X)=\lambda$

Çarpıklık katsayısı $ÇK=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, basıklık katsayısı $BK=3+\frac{1}{\lambda}$

Örnek 3.18. Bir şehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta içinde ortalama ölen kişi sayısı 4' dür. Belli bir hafta içinde bu hastalıktan,

a) Hiç kimsenin ölmemesi
b) En az 2 kişinin ölmesi
c) 3 kişinin ölmesi

olasılıklarını hesaplayınız.

X: *bir haftada bu hastalıktan ölenlerin sayısı*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2, \ldots, \lambda = 4$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.0183$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - \left(\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!}\right) =$
$= 1 - (0.0183 + 0.0733) = 1 - 0.0916 = 0.9084$

c) $P(X = 3) = \frac{e^{-4}4^3}{3!} = 0.195$

Örnek 3.19. Acil servise saat 14^{00}-15^{00} arasında her 15 dakikada ortalama 3 ambulans gelmektedir. Saat 14^{00}-15^{00} arasında herhangi bir 15 dakika içinde acil servise,

a) Hiç araç gelmemesi
b) En az 1 araç gelmesi
c) 4 araç gelmesi
d) 5 araç gelmesi
e) En çok 2 araç gelmesi

olasılıklarını bulunuz.

X: 15 *dakikalık süre içinde acil servise gelen araç sayısı*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2, \ldots, \lambda = 3$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0.04979$
b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.04979 = 0.95021$

c) $P(X = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0.16803$

d) $P(X = 5) = \frac{e^{-3}3^5}{5!} = 0.10082$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.04979 + 0.14936 + 0.22404 = 0.42319$$

Örnek 3.20. Bir ülkedeki her 100000 ölüm vakasında ortalama 3 tanesi gıda zehirlenmesinden ortaya çıkmaktadır. Belirli bir zaman dilimindeki 200000 ölüm vakasında gıda zehirlenmesinden dolayı,

a) Sıfır ölüm vakasına
b) 6 ölüm vakasına
c) 6,7 ya da 8 ölüm vakasına,

rastlama olasılıklarını hesaplayınız.

$n = 100000, \quad \lambda = np = 3$

$3 = 100000p \Longrightarrow p = 0.00003$

$n = 200000, \quad \lambda = np = 200000(0.00003) = 6$

X: $gıda\ zehirlenmesinden$ $ölen\ kişi\ sayı$sı

$P(X = x) = \dfrac{e^{-6}6^x}{x!}, \ \ x = 0,1,2,\ldots$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0.0025$

b) $P(X = 6) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} = 0.162$

c) $P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} + \frac{e^{-6}6^7}{7!} + \frac{e^{-6}6^8}{8!}$

$$= 0.162 + 0.1388 + 0.1041 = 0.4049$$

3.5.4. Geometrik Dağılım

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde ilk istenen sonucun (başarı ya da başarısızlık) elde edilmesi için yapılan deney sayısı olan X' e geometrik rasgele değişken denir. Bu değişkenin dağılımı geometrik dağılım adını alır.

X rasgele değişkeni geometrik dağılıma sahipse, $X \sim Geo(p)$ biçiminde gösterilir.

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1,2,3,\ldots \quad 0 < p < 1$$

biçimindedir.

Geometrik dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$

$\sigma^2 = Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Örnek 3.21. Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.

a) Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
b) X rasgele değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise X rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı nedir?

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deney sayısı

$$X \sim Geo(p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3})$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3})^{x-1}, \ \ x = 1,2,3, \ldots$$

a) $P(X = 5) = \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{3})^{5-1} = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^4 = \frac{2}{243}$

b) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{(2/3)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Örnek 3.22. Bir sınıfta sigara içen öğrenci olma olasılığı 0.40' dır. Devam çizelgesinde ismi belirlenen öğrenciye sigara içip içmediği soruluyor. 4' üncü sırada sorulan öğrencinin ilk sigara içen öğrenci olma olasılığı nedir?

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deneme sayısı

$$X \sim Geo(p = 0.40)$$

$$f(x) = P(X = x) = 0.40(1 - 0.40)^{x-1}, \ \ x = 1,2,3, \ldots$$

$$P(X = 4) = 0.40(1 - 0.40)^{4-1} = 0.0864$$

5.2. Sürekli Dağılımlar

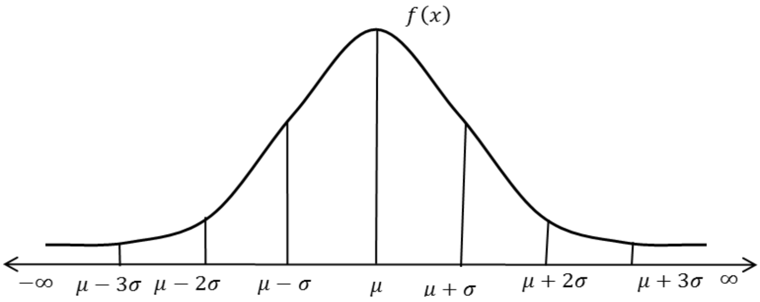
5.2.1. Normal Dağılım

Normal dağılım ya da Gauss dağılımı pratikte çok sık karşılaşılan sürekli bir dağılımdır. İnsanların boy uzunlukları, zekâ seviyeleri gibi değişkenler normal dağılmış tesadüfi değişkenlere örnek olarak verilebilir.

Tanım 5.10. X normal dağılmış bir tesadüfi değişken iken bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , \quad -\infty < x < \infty \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{5.22}$$

biçimindedir. Bu dağılım iki parametrelidir, bunlar $-\infty < \mu < \infty$ ve $\sigma^2 > 0$ dır. Normal dağılım için $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gösterimi kullanılır. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağı şekildeki gibidir.



Şekil 5.2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Şekilde görüldüğü gibi normal dağılım $\mu -$ ye göre simetriktir. μ nün sağındaki ve solundaki iki alan eşittir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 0.5 + 0.5 = 1$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu x-eksenine sağdan ve soldan asimptotik olarak yaklaşır. $x = \mu$ noktasında $f(x)$ maksimum değeri olan $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ değerini alır. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonun büküm noktaları $\mu - \sigma$ ve $\mu + \sigma$ dır.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğunda bazı özel olasılık değerleri aşağıda verilmiştir.

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \cong \%68$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \cong \%95$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \cong \%99$$

Normal dağılıma sahip X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} ds \tag{5.23}$$

ile gösterilir.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ için simetri özelliğinden $F_X(\mu - x) = 1 - F_X(\mu + x)$ olur.

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$E(e^{tX}) = M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = u \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

olur. Böylece $dx = du\sigma$ ve $x = u\sigma + \mu$'ye eşittir. u'için yeni sınırlar yerine konulduğunda sınır değerleri aynı kalır.

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(u\sigma+\mu)} e^{-\frac{u^2}{2}} du\sigma$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu\sigma-\frac{u^2}{2}} du$$

$t\sigma u - \frac{u^2}{2}$ parabolü tam kareye tamamlanırsa

$$t\sigma u - \frac{u^2}{2} + \frac{(t\sigma)^2}{2} - \frac{(t\sigma)^2}{2}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2} du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2} du$$

integralinde $u - t\sigma = v \Longrightarrow dv/du = 1 \Longrightarrow dv = du$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \sqrt{2\pi}$$

olduğundan

$$M_X(t) = e^{\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}}$$

ve $M_X(0) = 1$ bulunur. Ayrıca $M'_X(0) = E(X)$, $M''_X(0) = E(X^2)$ yardımıyla,

$$M'_X(0) = E(X) = \mu$$

$$M''_X(0) = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$$

elde edilir.

5.2.2. Standart Normal Dağılım

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken $F(x)$'e ait integralin kapalı hali elde edilememektedir. Dolayısıyla $F(x)$ değerlerinin hesaplanması için tablolar geliştirilmiştir. Bu bağlamda X tesadüfi değişkeni standartlaştırılarak Z değişkenine dönüştürülür.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

alındığında

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

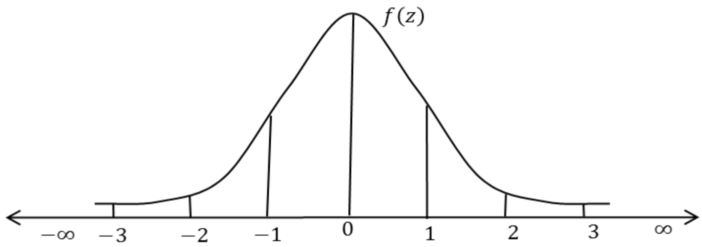
$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) = 1$$

bulunur. Ayrıca Normal dağılıma sahip bir X tesadüfi değişkenin herhangi bir lineer fonksiyonu da normal dağılıma sahip olduğundan dolayı $Z \sim N(0,1)$ yazılır.

Tanım 5.11. $Z \sim N(0,1)$ tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} & , \quad -\infty < z < \infty \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \tag{5.24}$$

yazılır. $f_Z(z)'$ nin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.3 $Z \sim N(0,1)$ tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekilde görüldüğü gibi standart normal dağılım $f_Z(z)$ eksenine göre simetriktir. $f_Z(z)$ fonksiyonu z-eksenine sağdan ve soldan asimtotik olarak yaklaşır. $z = 0$ noktasında $f(z)$ maksimum değeri olan $1/\sqrt{2\pi}$ değerini alır. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonun büküm noktaları -1 ve $+1$ noktalarıdır. $Z \sim N(0,1)$ olduğunda aşağıdaki bazı özel olasılık değerleri verilmiştir.

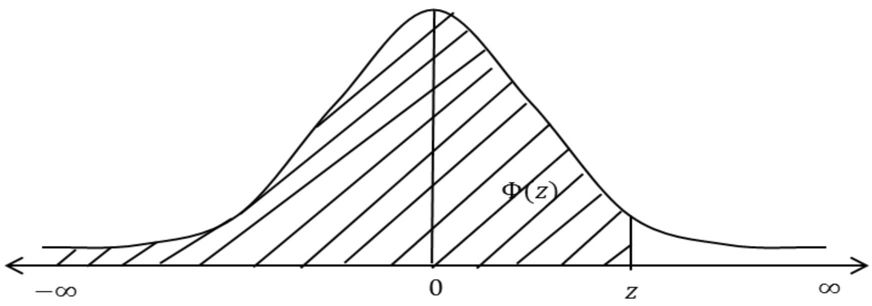
$$P(-1 < Z < 1) \cong \%68$$

$$P(-2 < Z < 2) \cong \%95$$

$$P(-3 < Z < 3) \cong \%99$$

Standart normal dağılımın birikimli dağılım değerleri tablo halinde Ek-A da verilmiştir.

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \Phi(z) \tag{5.25}$$



Şekil 5.4 $Z \sim N(0,1)$ tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu.

$F(z) = \Phi(z)$ tablo değerlerinden yararlanarak Normal dağılımla ilgili problemlerin tamamı çözülür.

Örnek 5.20: Bir konserve fabrikasındaki konserve kutularının ağırlıkları $\mu = 500$ gr ve $\sigma^2 = 100$ gr olarak normal dağılıma sahiptir. Buna göre tesadüfi olarak seçilen bir kutunun,

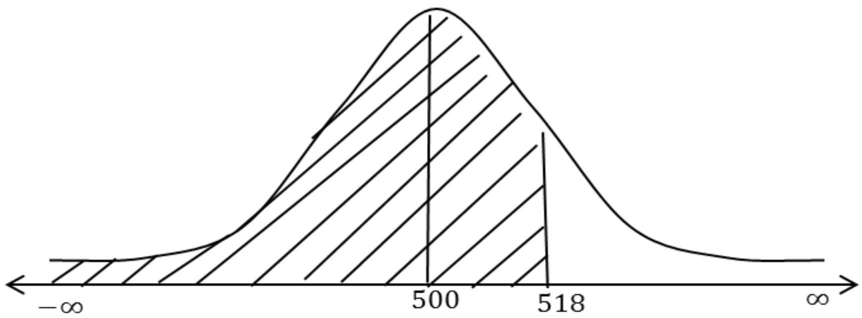
a) 518 gr dan az olma olasılığı nedir?

b) 480 gr dan çok olma olasılığı nedir?

c) 485 ile 515 gr arasında olma olasılığı nedir?

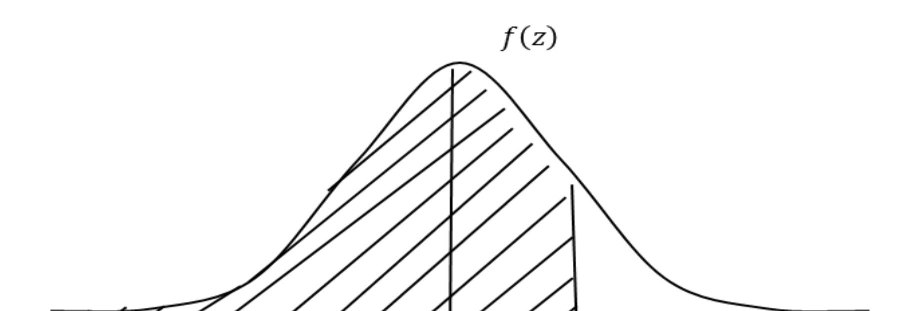
Çözüm.

a) $P(X < 518) = P\left(Z < \frac{518-500}{10}\right) = P(Z < 1{,}8)$



Şekil 5.5 $X \sim N(500,100)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(X < 518)$ olasılığı

X tesadüfi değişkeni standartlaştırıldığında istenen olasılık aşağıdaki şekilde gösterilir.



Şekil 5.6 $Z \sim N(0,1)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Z < 1.8)$ olasılığı

$$P(Z < 1.8) = \Phi(1.8) = 0,9641$$

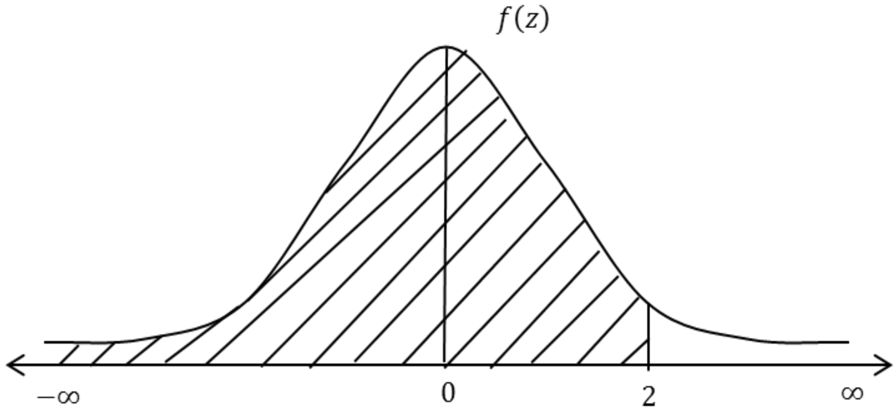
olarak bulunur.

b)

$$P(X > 480) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = \Phi(2) = 0,9772$$

veya şöyle bulunur.

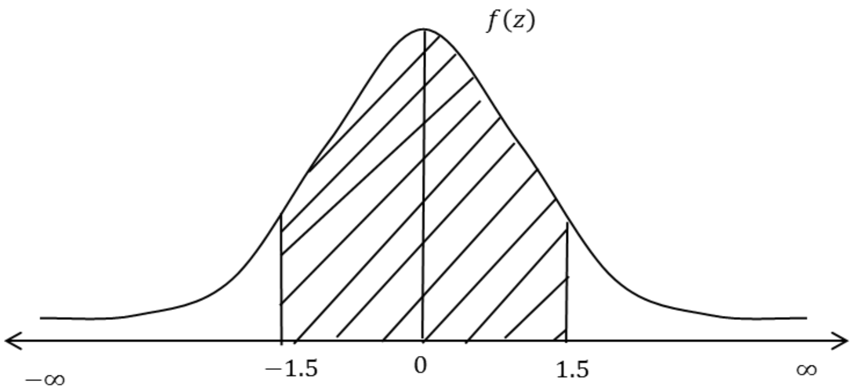
$$\begin{aligned} P(X > 480) &= P(Z > -2) = 1 - P(Z \leq -2) \\ &= 1 - \Phi(-2) = 1 - 0,0228 = 0,9772 \end{aligned}$$



Şekil 5.7 $Z \sim N(0,1)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Z < 2)$

c)

$$\begin{aligned} P(485 < X < 515) &= P\left(\frac{485-500}{10} < Z < \frac{515-500}{10}\right) \\ &= P(-1.5 < Z < 1.5) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0,8664 \end{aligned}$$



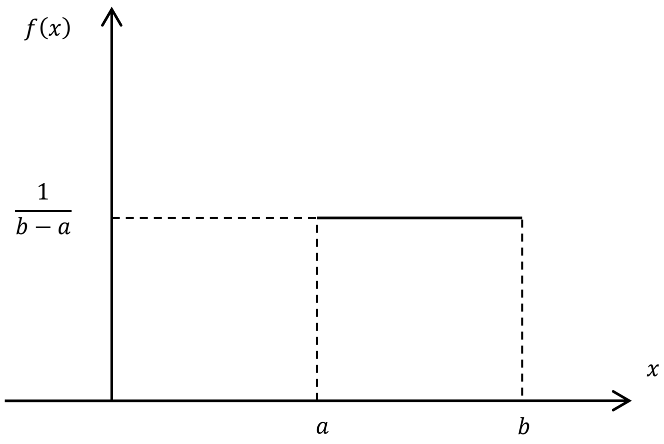
Şekil 5.8 $Z \sim N(0,1)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(-1.5 < Z < 1.5)$

5.2.4. Düzgün Dağılım

Tanım 5.13. X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) \quad = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases} \qquad (5.26)$$

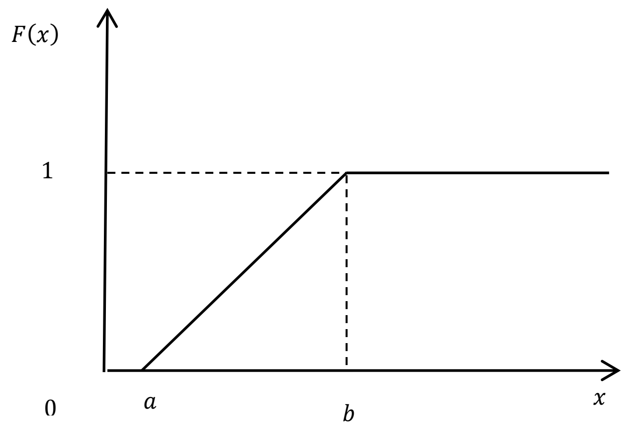
ise, X tesadüfi değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün dağılıma sahiptir denir ve $X \sim U(a, b)$ biçiminde gösterilir.
$f_X(x)$ ' in grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.9 $X \sim U(a, b)$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$X \sim U(a, b)$'nin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 1 & , \quad x > b \end{cases} \qquad (5.27)$$



Şekil 5.10 $X \sim U(a, b)$'nin dağılım fonksiyonu

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \int_{D_X} x f_X(x)dx$$

$$E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

bulunur.

$$E(X^2) = \int_{D_X} x^2 f_X(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{(b-a)}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = \int_{D_X} e^{tx} f_X(x)dx$$

$$M_X(t) = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{1}{t(b-a)}e^{tx}\right|_a^b$$

$$= \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

Örnek 5.24: Bir otobüs durağına saat 10.00'da geldiğimizi varsayalım. Bu durağa otobüs, saat 10.00 ile 10.30 arasında düzgün dağılıma uygun herhangi bir zamanda gelmektedir. Buna göre,

a) Otobüsün gelmesi için 10 dakikadan fazla bekleme olasılığını hesaplayınız.

b) Eğer saat 10.15 ve otobüs hala gelmemiş ise, en az 10 dakika daha bekleme olasılığı nedir?

***Çözüm*.a)**

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & , \quad 10.00 < x < 10.30 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 10.00 \\ \dfrac{x}{30} & , \quad 10.00 < x < 10.30 \\ 1 & , \quad x \geq 10.30 \end{cases}$$

X: "Otobüsün gelmesi için beklediğimiz süre" olsun.

$$P(10 < X) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \frac{10}{30} = 0{,}67$$

b)

$$P(X > 25 | X > 15) = \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} = \frac{1 - P(X \leq 25)}{1 - P(X \leq 15)}$$

$$= \frac{1 - \frac{25}{30}}{1 - \frac{15}{30}} = \frac{1}{3}$$