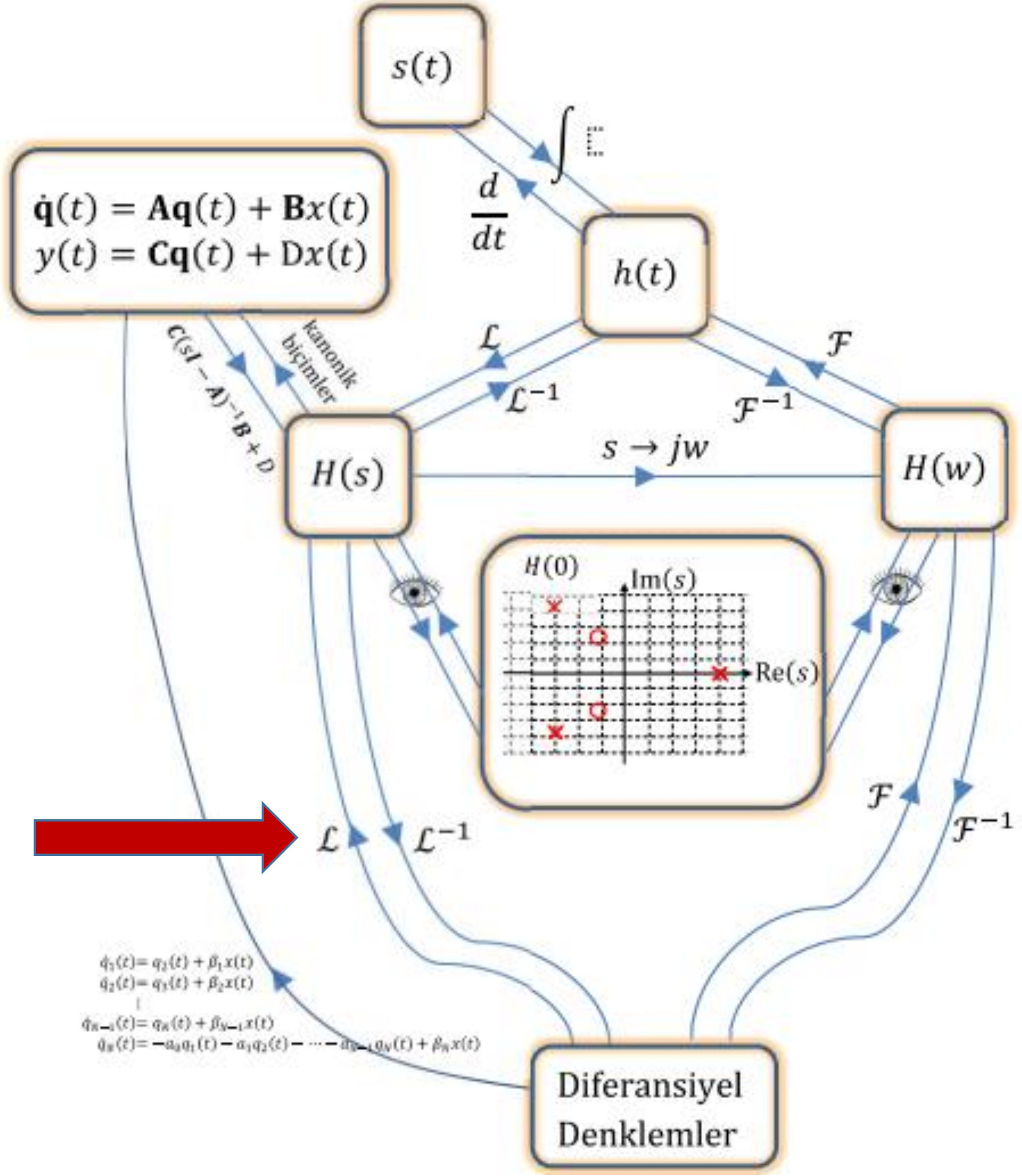
# İşaret İşleme

## Z Dönüşümü ve Ayrık Zamanlı Sistemler-H9CD3

Dr. Meriç Çetin

versiyon231020

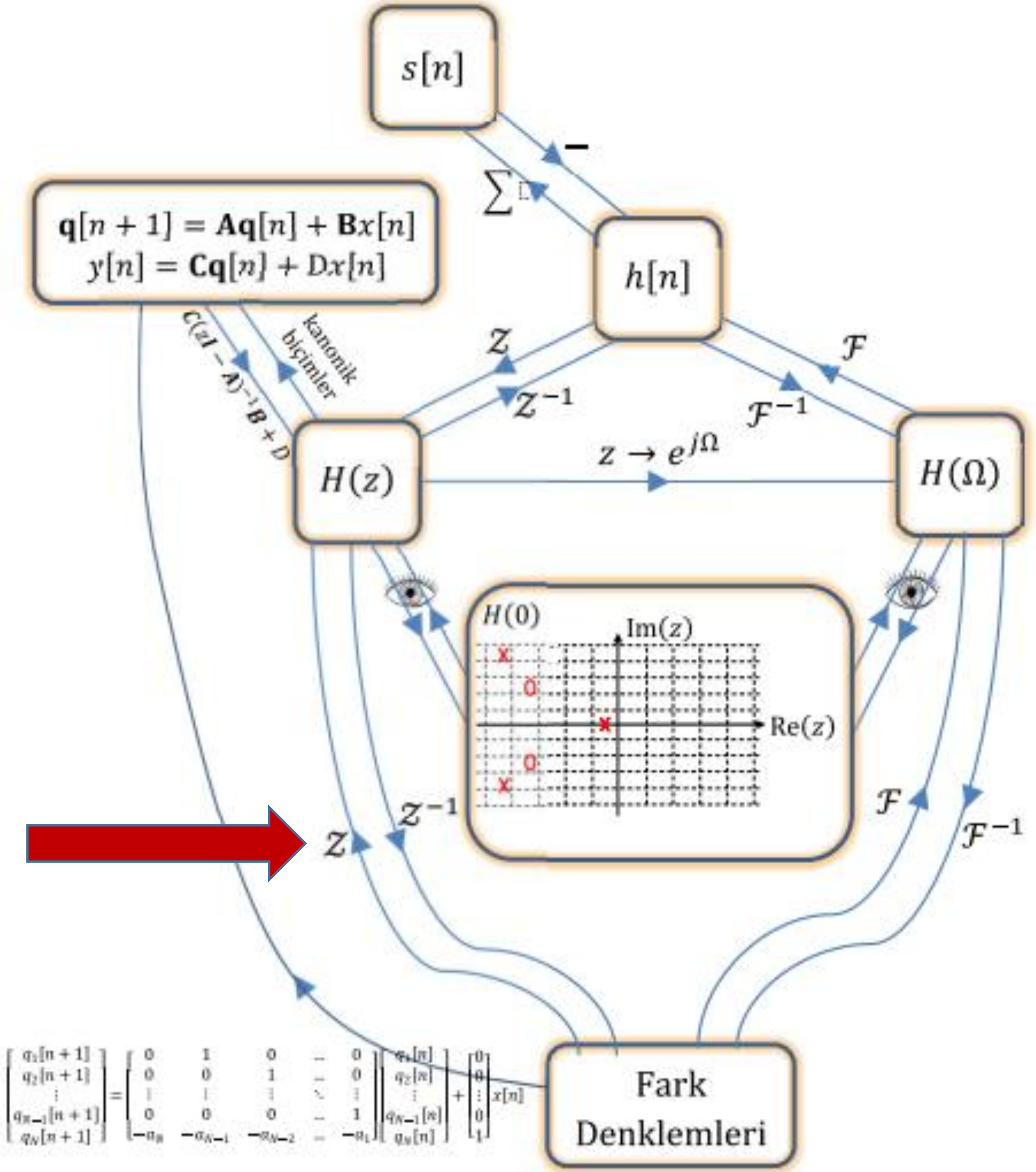
# Sürekli-zamanlı sistemlerde giriş-çıkış ilişkileri




**EEN343 Sinyaller ve Sistemler**

**Ders Notları**


**Prof. Dr. Serdar İplikçi**




**EEN343 Sinyaller ve Sistemler**

**Ders Notları**

**Prof. Dr. Serdar İplikçi**

# Z Dönüşümü

# Giriş

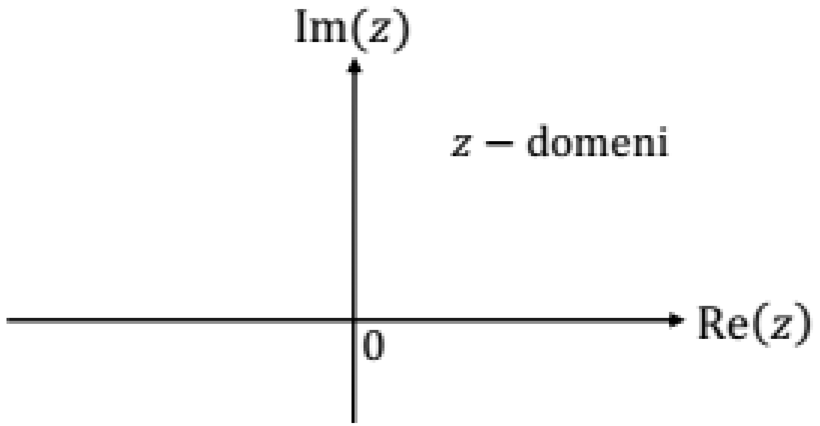
- Önceki bölümde görüldüğü gibi darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, ayrık-zamanlı giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Buna alternatif olarak zdönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce Z-domenine dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar zaman domenine dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Z-dönüşümü sayesinde bir DZD sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

# Z Dönüşümünün Tanımı

Ayrık-zamanlı bir $x[n]$ işaretinin z-dönüşümü $X(z) = Z\{x[n]\}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

buradaki $z$ değişkeni $z = re^{j\Omega}$ biçiminde karmaşık bir değişkendir. z-dönüşümünün bulunduğu ortama aşağıda görüldüğü gibi $z$-*domeni* adı verilmektedir. z-dönüşümü ile ayrık zaman değişkeni olan $n$-domenindeki bir $x[n]$ sinyali $z$-domenindeki bir $X(z)$ sinyaline dönüştürülmektedir.



# Bir örnek

$x[n] = a^n u[n]$ sinyalinin z-dönüşümü

$$x[n] = a^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

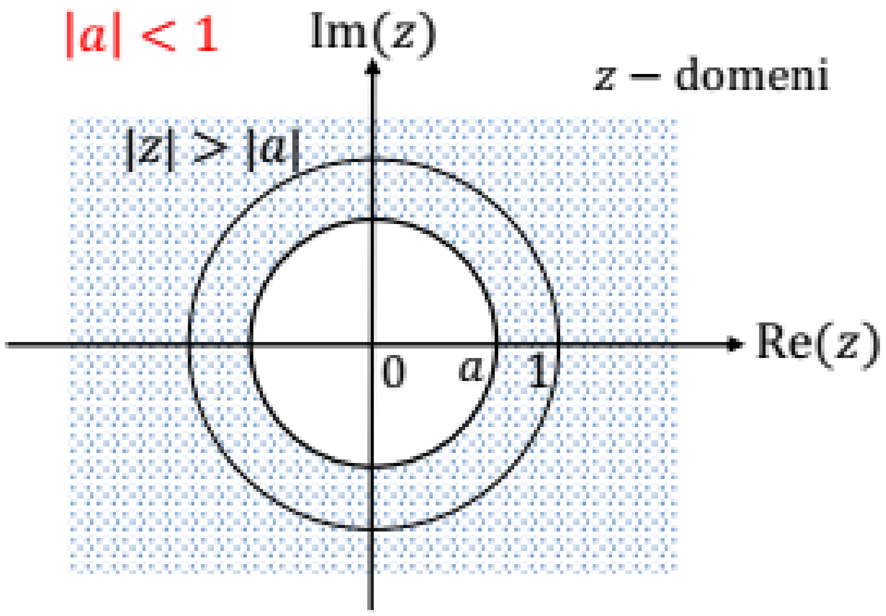
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

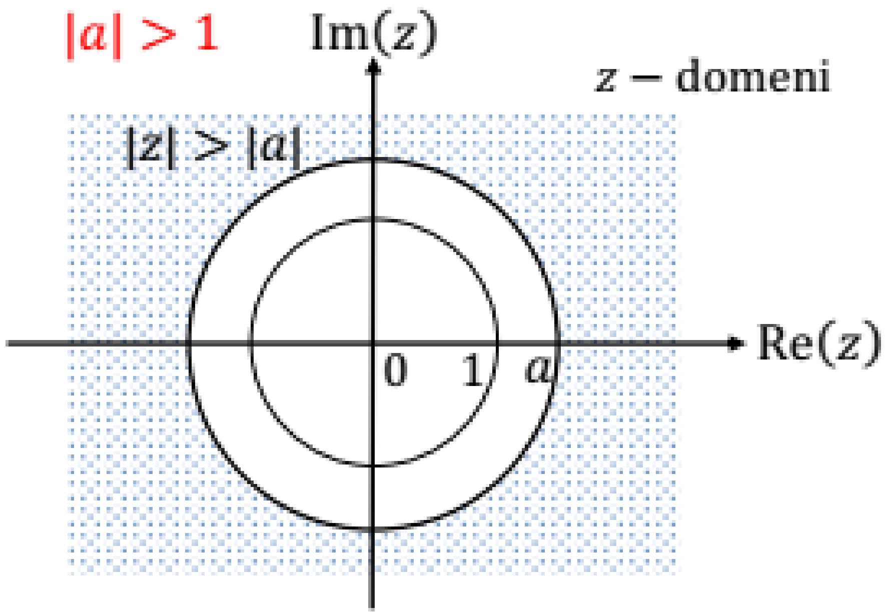
$$= \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

# Bir örnek

$x[n] = a^n u[n]$ sinyalinin z-dönüşümü

Görüldüğü gibi bu toplamın yani z-dönüşümünün mevcut olabilmesi için $|z| > |a|$ şartının sağlanması gerekir. $z$-domeninde bu şart aşağıdaki gibi bir bölgeye denk düşmektedir ki bu bölgeye yakınsama bölgesi denir.



# Z Dönüşümü X[z]'in Sıfırları ve Kutupları

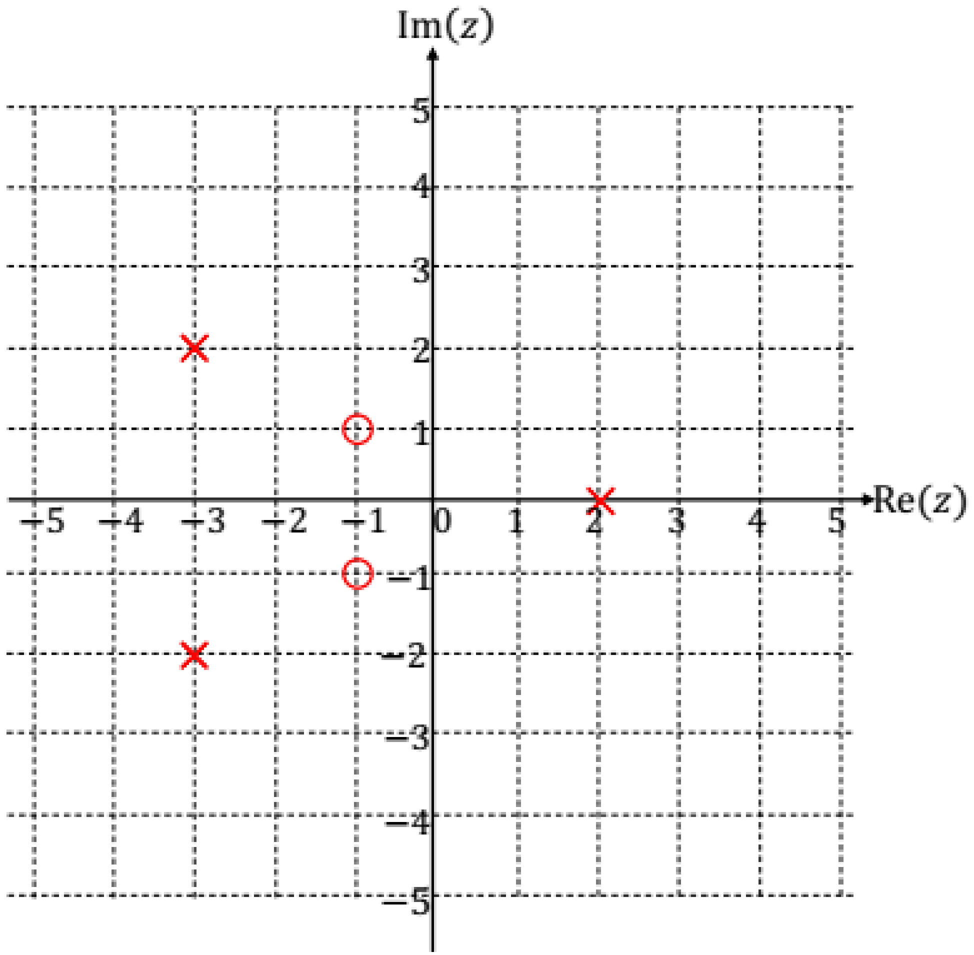
z-dönüşümü olan $X(z)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

burada $a_k$ ve $b_k$'lar reel sabitler, $m$ ve $n$ ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \leq n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan $z_k$'lara $X(z)$'nin *sıfırları* denmektedir çünkü $z$'nin bu değerleri için $X(z) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan $p_k$'lara da $X(z)$'nin *kutupları* denmektedir

$$X(z)=\frac{2z^2+4z+4}{z^3+4z^2+z-26}=2\frac{(z+1+j)(z+1-j)}{(z-2)(z+3+2j)(z+3-2j)}$$

$X(z)$'nin $z=-1+j$ ve $z=-1-j$'de sıfırları, $z=2, z=-3+2j$'de ve $z=-3-2j$'de kutupları vardır ve sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



**Tablo z-Dönüşümünün Özellikleri**

| Özellik | $x[n]$ | $X(z)$ |
|---|---|---|
| | $x[n]$<br>$x_1[n]$<br>$x_2[n]$ | $X(z)$<br>$X_1(z)$<br>$X_2(z)$ |
| Doğrusallık | $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ | $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$ |
| Zamanda Öteleme | $x[n - n_0]$ | $z^{-n_0}X(z)$ |
| $z_0^n$ ile Çarpma | $z_0^n x[n]$ | $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ |
| Zamanda Genişletme | $x_{(m)}[n]$ | $X(z^m)$ |
| Zamanda Geri Dönüş | $x[-n]$ | $X\left(\frac{1}{z}\right)$ |
| Zamanda Fark | $x[n] - x[n-1]$ | $(1 - z^{-1})X(z)$ |
| $n$ ile Çarpma | $nx[n]$ | $-z\frac{d}{dz}X(z)$ |
| Konvolüsyon | $x_1(t) * x_2(t)$ | $X_1(z)X_2(z)$ |

**Tablo Bazı z-Dönüşüm Çiftleri**

| $x[n]$ | $X(z)$ |
|---|---|
| $\delta[n]$ | $1$ |
| $u[n]$ | $\dfrac{z}{z-1}$ |
| $-u[-n-1]$ | $\dfrac{z}{z-1}$ |
| $a^n u[n]$ | $\dfrac{z}{z-a}$ |
| $-a^n u[-n-1]$ | $\dfrac{z}{z-a}$ |
| $nu[n]$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ |
| $-nu[-n-1]$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ |
| $na^n u[n]$ | $\dfrac{az}{(z-a)^2}$ |
| $-na^n u[-n-1]$ | $\dfrac{az}{(z-a)^2}$ |
| $x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \le N \\ 0 & \lvert n\rvert > N \end{cases}$ | $\dfrac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}$ |
| $e^{\mp j\Omega_0 n} u[n]$ | $\dfrac{z}{z - e^{\mp j\Omega_0}}$ |
| $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{z^2 - \cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$ |
| $\sin(\Omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$ |
| $r^n \cos(\Omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{z^2 - r\cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$ |
| $r^n \sin(\Omega_0 n)u[n]$ | $\dfrac{r\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$ |

# Ters Z Dönüşümü

# Ters Z Dönüşümü

$X(z)$ sinyalinden $x[n]$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters z dönüşümü ile sağlanır:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

burada $C$ eğrisi orjini saat yönünün tersinde çevreler. Ancak, bu derste ters z-dönüşümü almak için daha çok aşağıda anlatıldığı gibi kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.

# Ters Z Dönüşümü

- Kısmi Kesirlere Açılım

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_t)}$$

burada $z_k$'lar $X(z)$'in sıfırları, $p_k$'lar da $X(z)$'in kutuplarıdır ve hepsi tek katlıdır. Ters z-dönüşümünde kolaylık olması açısından $X(z)$ yerine $\frac{X(z)}{z}$ kısmi kesirlere ayrılır:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \dots + \frac{c_n}{z-p_t}$$

**Tablo Bazı z-Dönüşüm Çiftleri**

| $x[n]$ | $X(z)$ |
|---|---|
| $\delta[n]$ | $1$ |
| $u[n]$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $-u[-n-1]$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $a^n u[n]$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $-a^n u[-n-1]$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $nu[n]$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| $-nu[-n-1]$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| $na^n u[n]$ | $\frac{az}{(z-a)^2}$ |
| $-na^n u[-n-1]$ | $\frac{az}{(z-a)^2}$ |
| $x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \le N \\ 0 & \lvert n\rvert > N \end{cases}$ | $\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}$ |
| $e^{\mp j\Omega_0 n} u[n]$ | $\frac{z}{z - e^{\mp j\Omega_0}}$ |
| $\cos(\Omega_0 n) u[n]$ | $\frac{z^2 - \cos(\Omega_0) z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0) z + 1}$ |
| $\sin(\Omega_0 n) u[n]$ | $\frac{\sin(\Omega_0) z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0) z + 1}$ |
| $r^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$ | $\frac{z^2 - r\cos(\Omega_0) z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0) z + r^2}$ |
| $r^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$ | $\frac{r\sin(\Omega_0) z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0) z + r^2}$ |

# Bir Örnek

$X(z)=\frac{z}{2z^2-3z+1}$'in ters z-dönüşümünü için $\frac{X(z)}{z}$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{2z^2-3z+1}$$
$$=\frac{1}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{c_1}{(z-1)}+\frac{c_2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \quad c_1=\left[(z-1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z\to 1}=1 \quad c_2=\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{X(z)}{z}\right]_{z\to\frac{1}{2}}=-1$$
$$=\frac{1}{(z-1)}+\frac{-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Buradan, $X(z)=\frac{z}{(z-1)}-\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ için ters dönüşümü bulalım:

**Z Tablosundan** ➡ $x[n]=u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

**Örnek**: $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$'in ters z-dönüşümünü bulalım. $\frac{X(z)}{z}$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \qquad c_1=1$$

$$=\frac{c_1}{(z-1)}+\frac{\lambda_1}{(z-2)}+\frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \qquad \lambda_1=-1$$

$$=\frac{1}{(z-1)}+\frac{-1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-2)^2} \qquad \lambda_2=1$$

Buradan, $X(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{(z-2)^2}$

Şimdi ters dönüşümü bulalım:

**Z Tablosundan** ➡ $x[n]=u[n]-2^n u[n]+n2^{n-1}u[n]$

# Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

**Lecture 15**

**Discrete-Time System Analysis using z-Transform**
**(Lathi 5.1)**

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011



**EEN343 Sinyaller ve Sistemler**

**Ders Notları**

**Prof. Dr. Serdar İplikçi**
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği