İşaret İşleme
Modulasyon-H12CD1

Dr. Meriç Çetin

versiyon241120

Modulasyon

Modulation

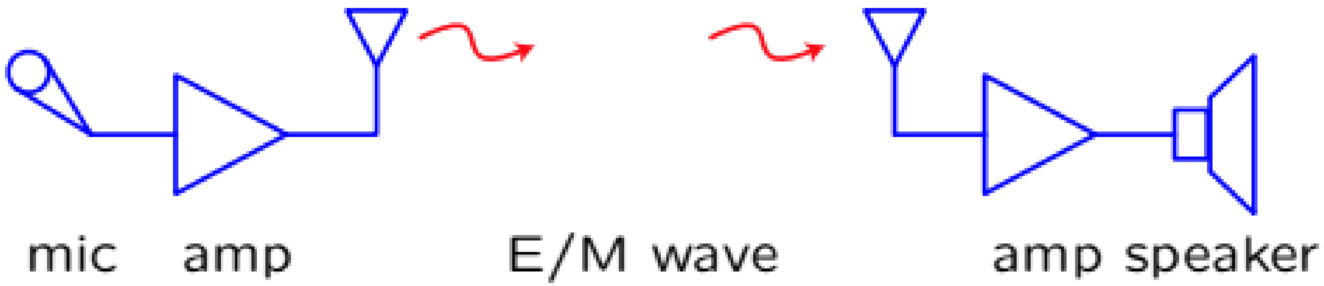
Applications of signals and systems in communication systems.

Example: Transmit voice via telephone wires (copper)

Works well: basis of local land-based telephones.

Wireless Communication

In cellular communication systems, signals are transmitted via electromagnetic (E/M) waves.



For efficient transmission and reception, antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies from 200 to 3000 Hz.

How long should the antenna be?

For efficient transmission and reception, the antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies between 200 Hz and 3000 Hz.

How long should the antenna be?

1. < 1 mm
2. $\sim$ cm
3. $\sim$ m
4. $\sim$ km
5. > 100 km

For efficient transmission and reception, the antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies between 200 Hz and 3000 Hz.

How long should the antenna be?

Wavelength is $\lambda = c/f$ so the lowest frequencies (200 Hz) produce the longest wavelengths

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{200 \text{ Hz}} = 1.5 \times 10^6 \text{ m} = 1500 \text{ km}.$$

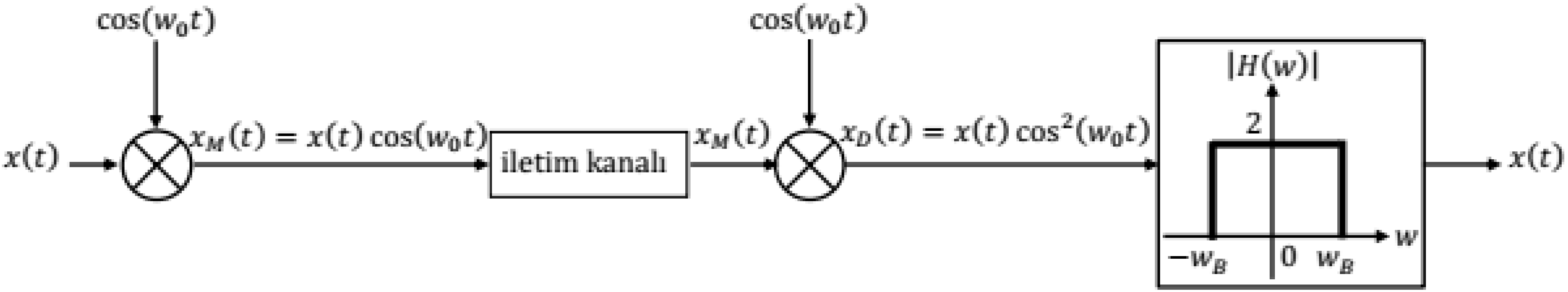
and the highest frequencies (3000 Hz) produce the shortest wavelengths

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3000 \text{ Hz}} = 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km}.$$

On the order of hundreds of miles!

Modülasyon

Modülasyon, haberleşmenin temelini oluşturan bir işlem olup zaman domenindeki w_B gibi sonlu bant genişlikli bir sinyalin kendinden çok daha yüksek frekanslı bir sinyal ile çarpılarak yüksek frekanslara taşınmasını (modülasyon) ve bu sayede daha elverişli bir şekilde iletilmesini ve ardından orjinal sinyalin tekrar geri kazanılması (demodülasyon) sağlar. Bunu aşağıdaki şekilde görmek mümkündür.



https://www.youtube.com/watch?v=beFoCZ7oMyY
https://www.youtube.com/watch?v=00ZbuhPruJw
https://www.youtube.com/watch?v=CCOX2tvgM80

Tablo 5.1 Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(w)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(w)$ $X_1(w)$ $X_2(w)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(w) + a_2X_2(w)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-jwt_0}X(w)$
Frekans -domeninde Öteleme	$e^{jw_0t}x(t)$	$X(w - w_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{w}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-w)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$jwX(w)$
Frekans-domeninde Türev	$-jtx(t)$	$\frac{d}{dw}X(w)$
Çifteşlik	$X(t)$	$2\pi x(-w)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(w)X_2(w)$
Çarpma	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(w) * X_2(w)$
Parseval Bağıntısı	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(w)\rvert^2 dw$	

Tablo 5.2 Bazı Fourier Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(w)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\pi\delta(w)-\frac{1}{jw}$	$\frac{1}{s}$
1	$2\pi\delta(w)$	
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{jw}$	
$tu(t)$		$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{jw+a}$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{jw+a}$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(jw+a)^2}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(jw+a)^2}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

$x(t)$	$X(w)$	$X(s)$
$e^{-at}\cos(w_0t)u(t)$	$\frac{jw+a}{(jw+a)^2+w_0^2}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0t)u(t)$	$\frac{w_0}{(jw+a)^2+w_0^2}$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{\mp jw_0t}$	$2\pi\delta(w\pm w_0)$	
$\cos(w_0t)$	$\pi\delta(w-w_0)+\pi\delta(w+w_0)$	
$\sin(w_0t)$	$-j\pi\delta(w-w_0)+j\pi\delta(w+w_0)$	
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$	
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\|w\|}$	
$P_a(t)$	$2\frac{\sin(aw)}{w}$	
$\frac{\sin(at)}{\pi t}$	$P_a(w)$	
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$	
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$	$w_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-kw_0)$	

Modülasyon ve demodülasyon işlemleri Fourier dönüşümünün

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(w) * X_2(w)$$

şeklindeki çarpma özelliğinden yararlanır. Daha yüksek frekanslara modüle etme işlemi genellikle yüksek frekanslı sinüzoidal sinyalle çarpılarak gerçekleştirilir. $x(t)$ gibi sonlu bir bant genişliğine sahip bir sinyal ele alalım. Bu sinyali $\cos(w_0 t)$ gibi yüksek frekanslı bir sinyal ile çarparsak, çarpım sonucunun Fourier dönüşümü, çarpma özelliğine göre şu şekilde bulunur:

$$x_M(t) = x(t)\cos(w_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * \mathcal{F}\{\cos(w_0 t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(w) * \left(\pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(w) * \pi\delta(w - w_0) \quad + \quad \frac{1}{2\pi} X(w) * \pi\delta(w + w_0)$$

Konvolüsyon tanımından

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(w - \Omega)\delta(\Omega - w_0) d\Omega \; + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(w - \Omega)\delta(\Omega + w_0) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} X(w - w_0) + \frac{1}{2} X(w + w_0)$$

Görüldüğü gibi modüleli sinyalin Fourier dönüşümü

$$X_M(w) = \mathcal{F}\{x_M(t)\} = \frac{1}{2}X(\mathrm{w} - w_0) + \frac{1}{2}X(\mathrm{w} + w_0)$$

şeklindedir. Şiimdi bu modüleli sinyalin kayıpsaız bir iletim kanalından iletildikten sonra alıcı tarafta tekrar $\cos(w_0 t)$ sinyali ile çarpılarak demodüleli sinyal olan

$$x_D(t) = x(t)\,\underbrace{\cos^2(w_0 t)}$$

sinyalinin Fourier dönüşümünü elde edelim. Bunu için $\cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_0 t)$ açılımından yararlanacağız.

$$\cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_0 t) \leftrightarrow \pi\delta(w) + \frac{\pi}{2}\delta(w - 2w_0) + \frac{\pi}{2}\delta(w + 2w_0)$$

Artık demodüleli sinyalin Fourier dönüşümünü bulabiliriz.

$$x_D(t) = x(t)\cos^2(w_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(w) * \left[\pi\delta(w) + \frac{\pi}{2}\delta(w - 2w_0) + \frac{\pi}{2}\delta(w + 2w_0)\right]$$

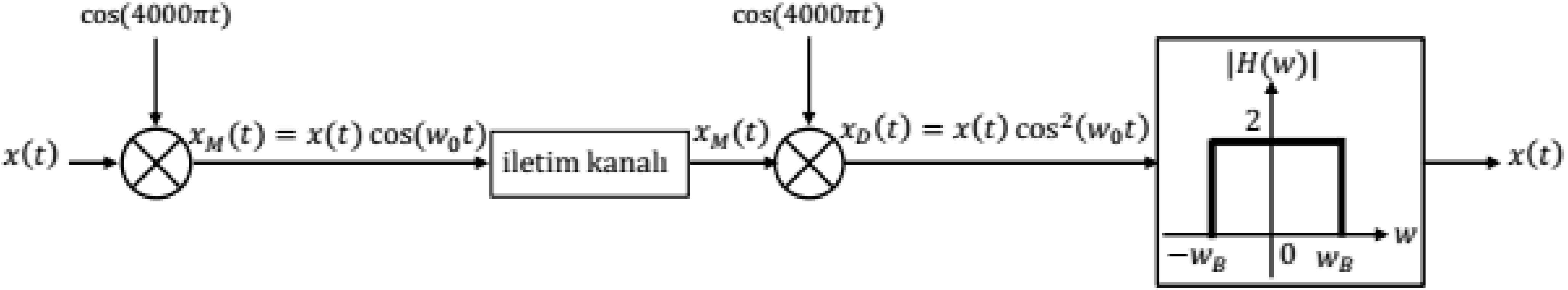
$$= \frac{1}{2\pi}X(w) * \pi\delta(w) \ + \ \frac{1}{2\pi}X(w) * \frac{\pi}{2}\delta(w - 2w_0) \ + \ \frac{1}{2\pi}X(w) * \frac{\pi}{2}\delta(w + 2w_0)$$

$$= \frac{1}{2}X(\mathrm{w}) \ + \ \frac{1}{4}X(\mathrm{w} + 2w_0) \ + \ \frac{1}{4}X(\mathrm{w} - 2w_0)$$

Görüldüğü gibi demodüleli sinyal frekans domeninde bir kaç bileşenden oluşmaktadır. Orjinal $x(t)$ sinyalini tekrar elde etmek için demodüleli sinyal, kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilir.

Örnek

Örnek: Aşağıdaki şekildeki gibi, bant genişliği w_B $x(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t}$ sinyalinin $\cos(4000\pi t)$ işareti ile çarpılması (modüle edilmesi) ile elde edilen $x_M(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t}\cos(4000\pi t)$ işareti, kayıpsız bir iletim kanalından geçtikten sonra alıcı tarafında $\cos(4000\pi t)$ işareti ile çarpılarak demodüle edilmiş ve ardından orjinal $x(t)$ sinyalini tekrar elde etmek için demodüleli sinyal, kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilir.

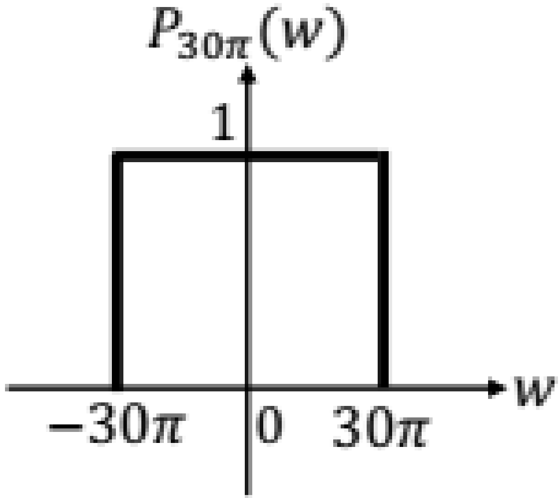


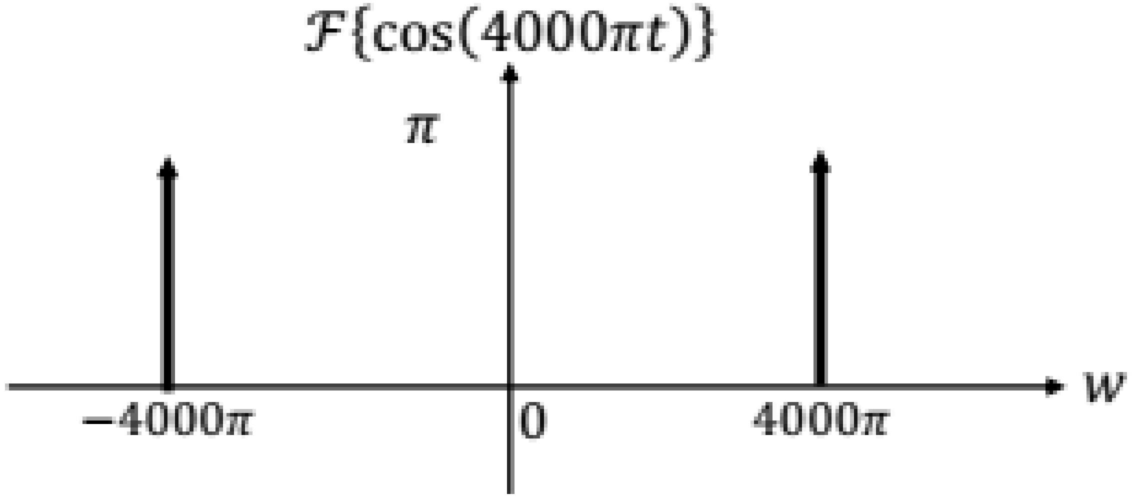
Öncelikle bu iki sinyalin Fourier dönüşümlerini bulalım:

$$x(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow P_{30\pi}(w)$$

$$\cos(4000\pi t) \leftrightarrow \pi\delta(w - 4000\pi) + \pi\delta(w + 4000\pi)$$

Bu sinyallerin Fourier dönüşümlerinin grafik olarak aşağıdaki gibidir.





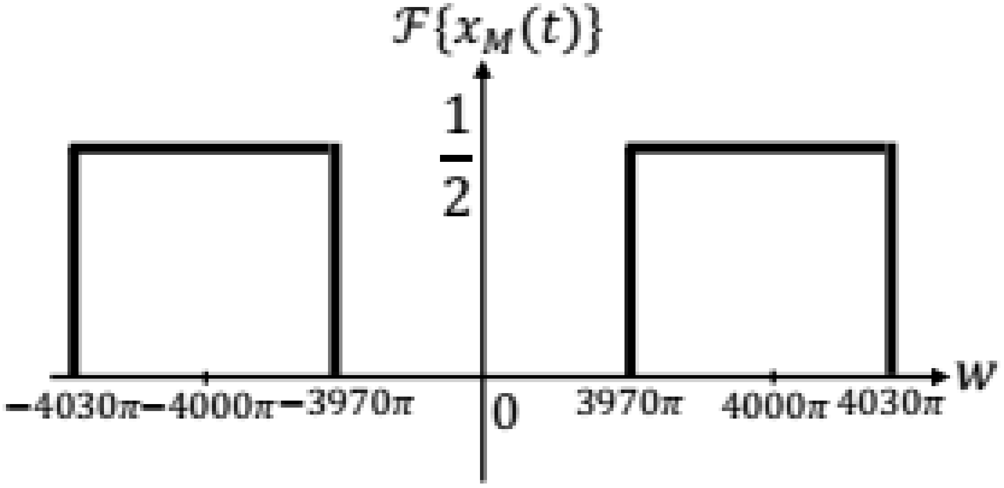
Şimdi, modüleli işaretin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$x_M(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t}\cos(4000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(w) * \mathcal{F}\{\cos(4000\pi t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}P_{30\pi}(w) * \left(\pi\delta(w - 4000\pi t) + \pi\delta(w + 4000\pi t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}P_{30\pi}(\mathrm{w} - w_0) + \frac{1}{2}P_{30\pi}(\mathrm{w} + w_0)$$

Bu sinyalin Fourier dönüşümü grafik olarak aşağıdaki gibidir:



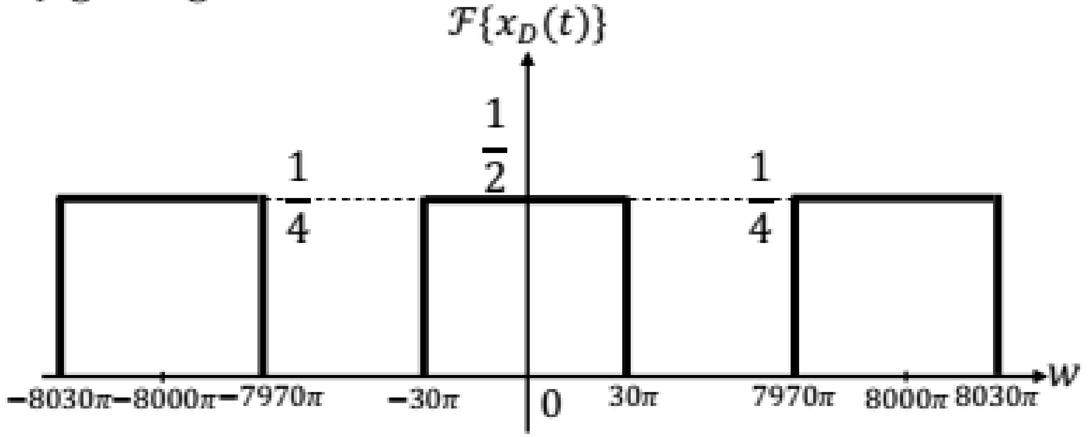
Şimdi de iletim kanalından geçen modüleli sinyalin $\cos(4000\pi t)$ sinyali ile çarpılmasıyla elde edilen demodüleli $x_D(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$x_D(t) = x(t)\cos^2(w_0 t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t}\cos^2(4000\pi t)$$

$$x_D(t) = x(t)\cos^2(w_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\mathrm{w}) + \frac{1}{4}X(\mathrm{w} + 2w_0) + \frac{1}{4}X(\mathrm{w} - 2w_0)$$

$$= \frac{1}{2}P_{30\pi}(w) + \frac{1}{4}P_{30\pi}(w + 8000\pi) + \frac{1}{4}P_{30\pi}(w - 8000\pi)$$

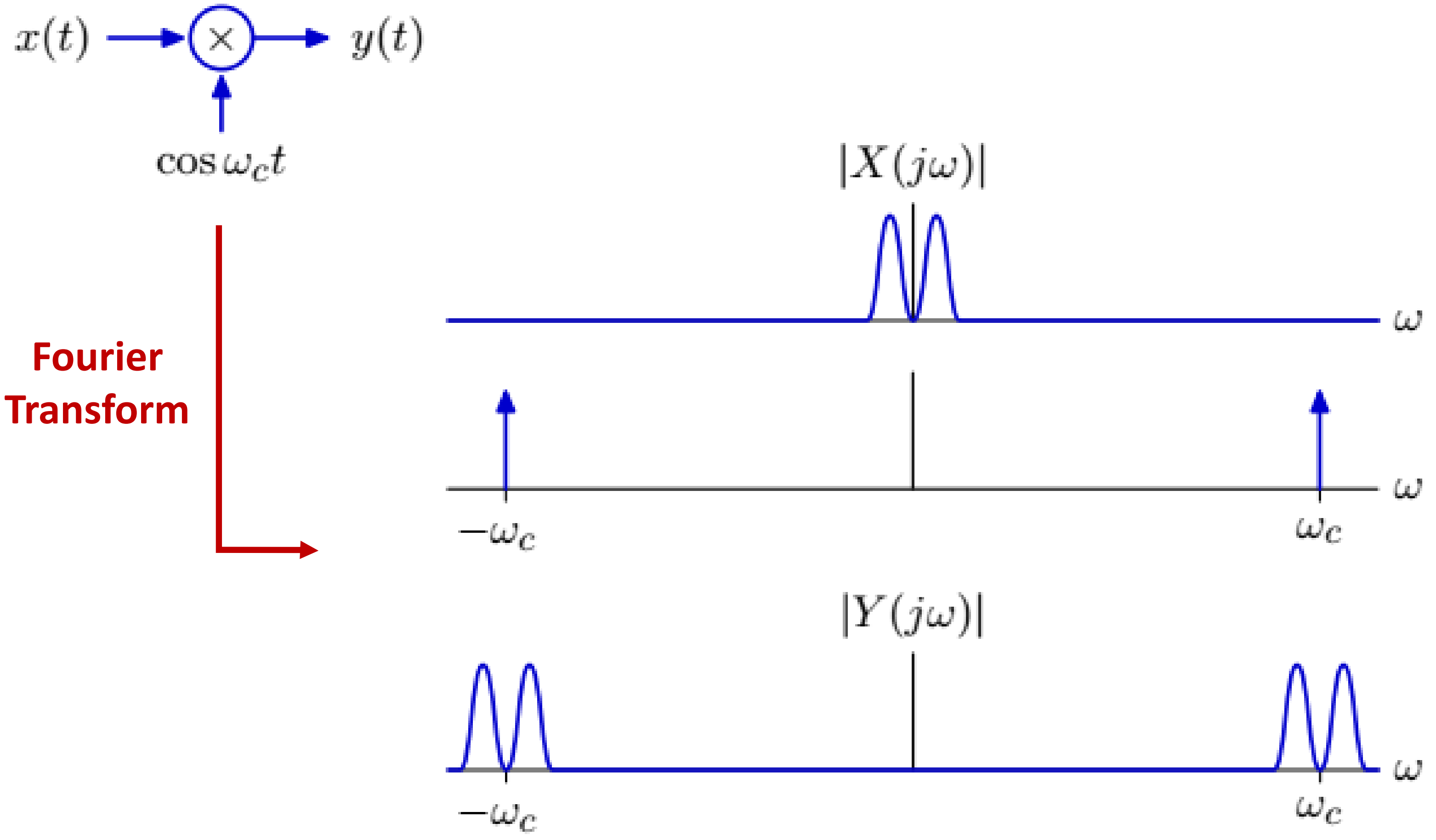
Bu sinyalin Fourier dönüşümü grafik olarak aşağıdaki gibidir:



Demodüleli $x_D(t)$ işareti kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilirse orjinal $x(t)$ sinyali elde edilir.

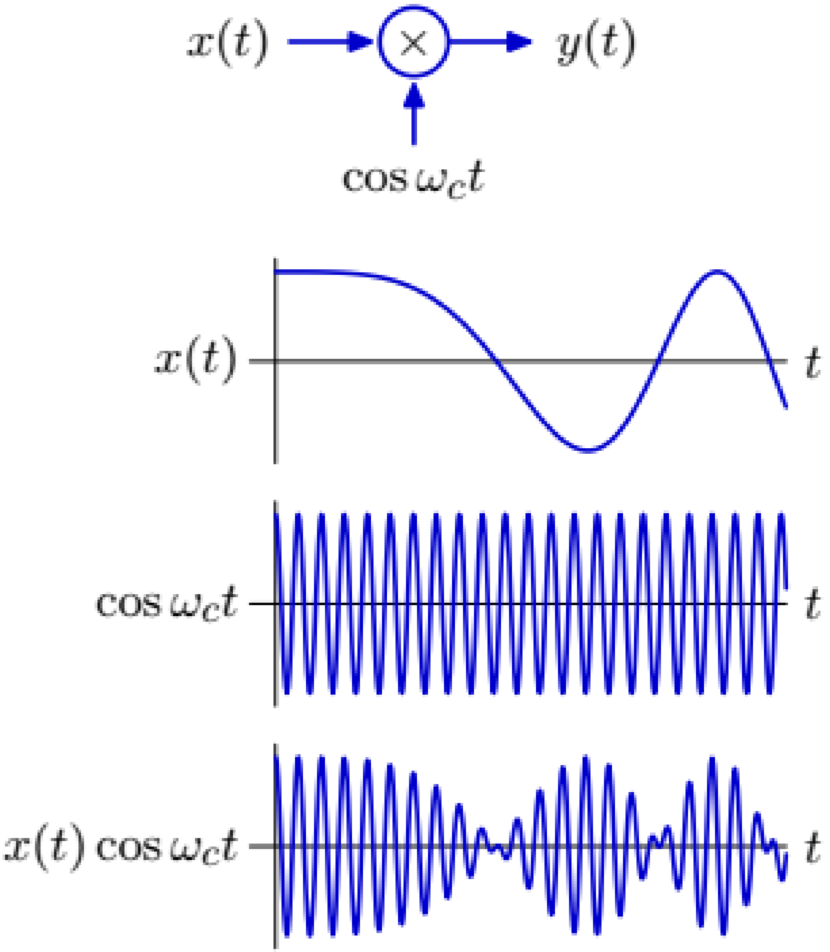
Amplitude Modulation

Multiplying a signal by a sinusoidal **carrier** signal is called amplitude modulation (AM). AM shifts the frequency components of X by $\pm\omega_c$.



Amplitude Modulation

Multiplying a signal by a sinusoidal **carrier** signal is called amplitude modulation. The signal "modulates" the amplitude of the carrier.



Synchronous Demodulation

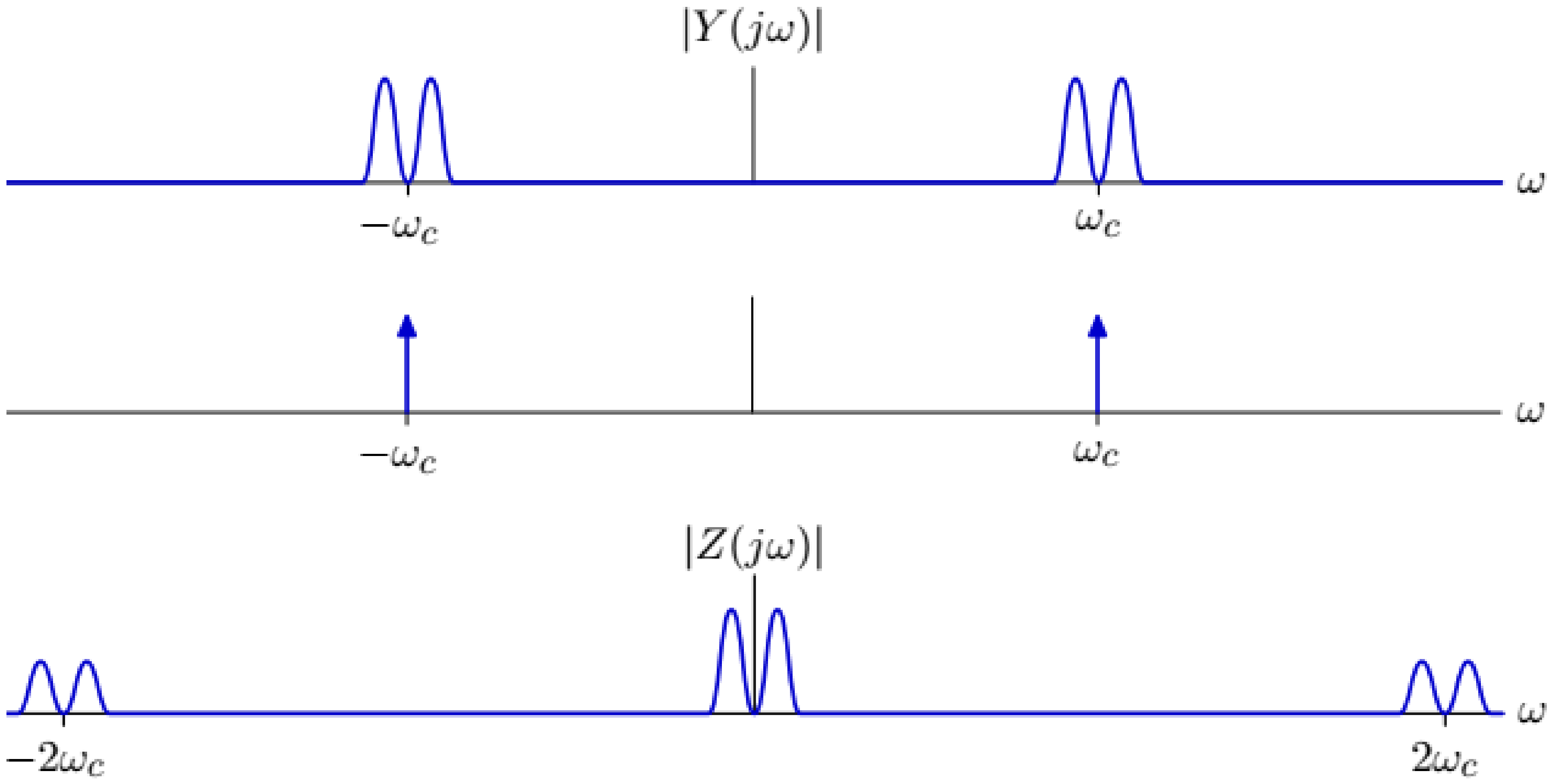
X can be recovered by multiplying by the carrier and then low-pass filtering. This process is called **synchronous demodulation**.

$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t$$

$$z(t) = y(t)\cos\omega_c t = x(t) \times \cos\omega_c t \times \cos\omega_c t = x(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\right)$$

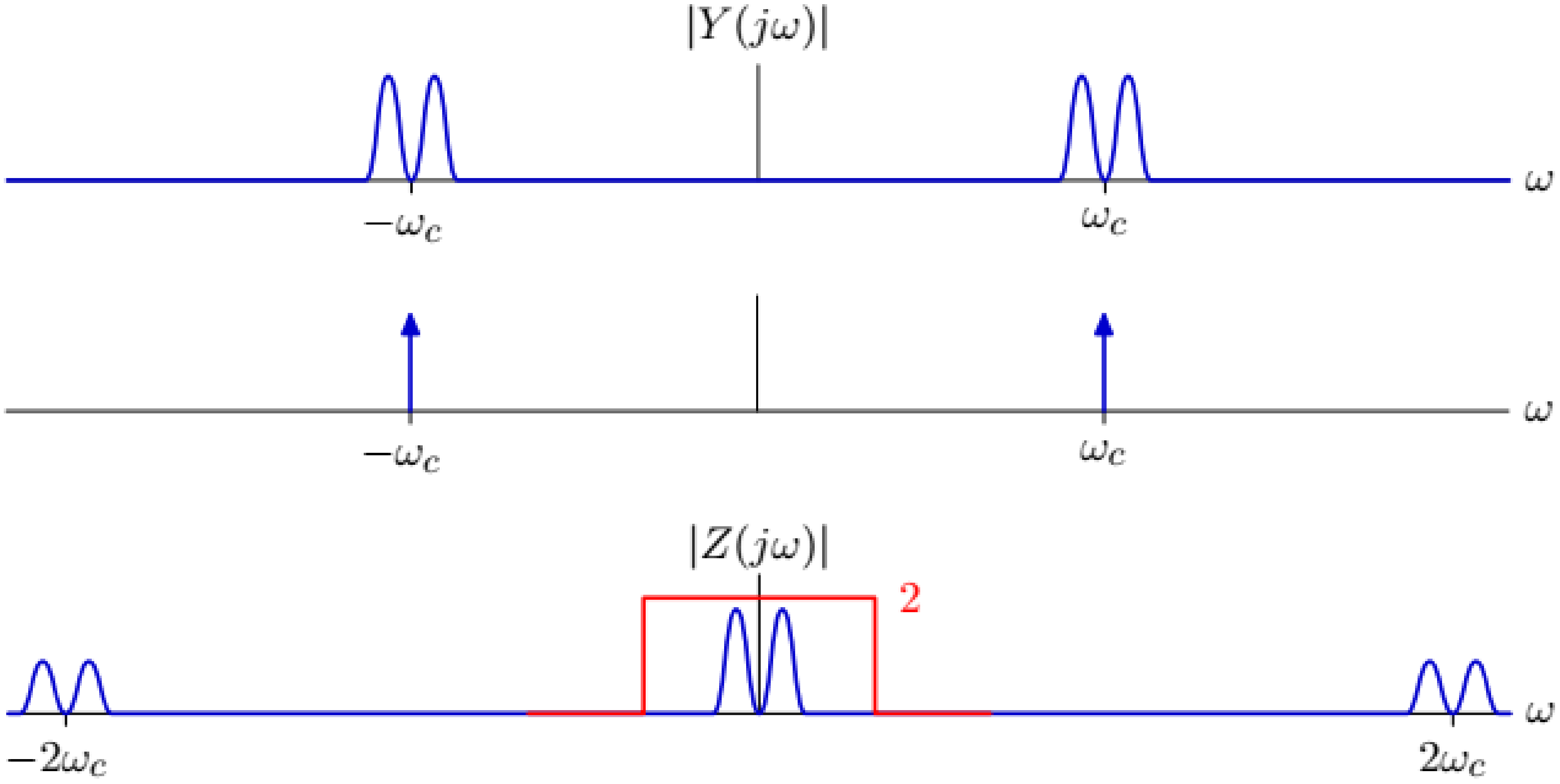
Synchronous Demodulation

Synchronous demodulation: convolution in frequency.



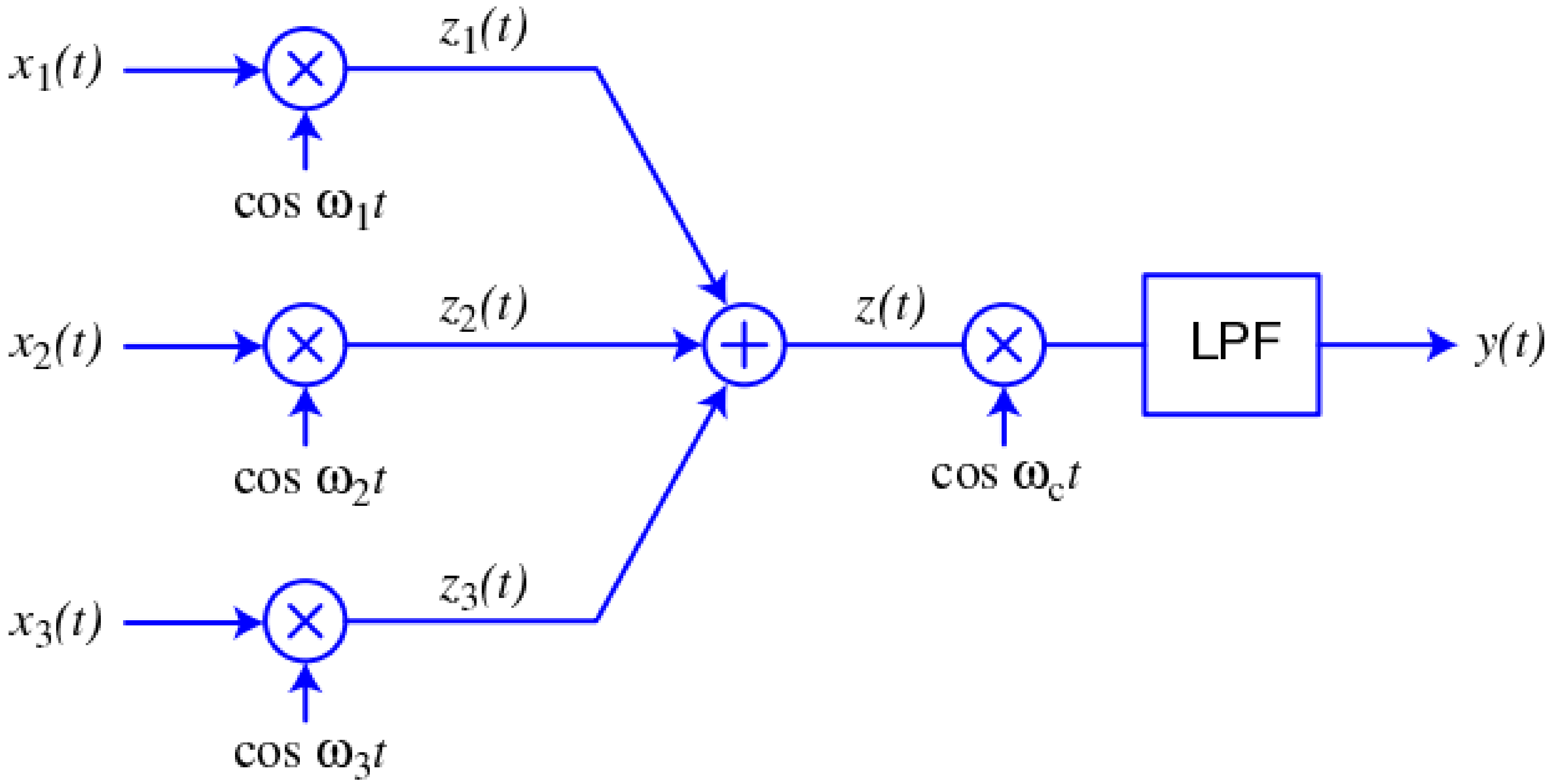
Synchronous Demodulation

We can recover X by low-pass filtering.



Frequency-Division Multiplexing

Multiple transmitters simply sum (to first order).



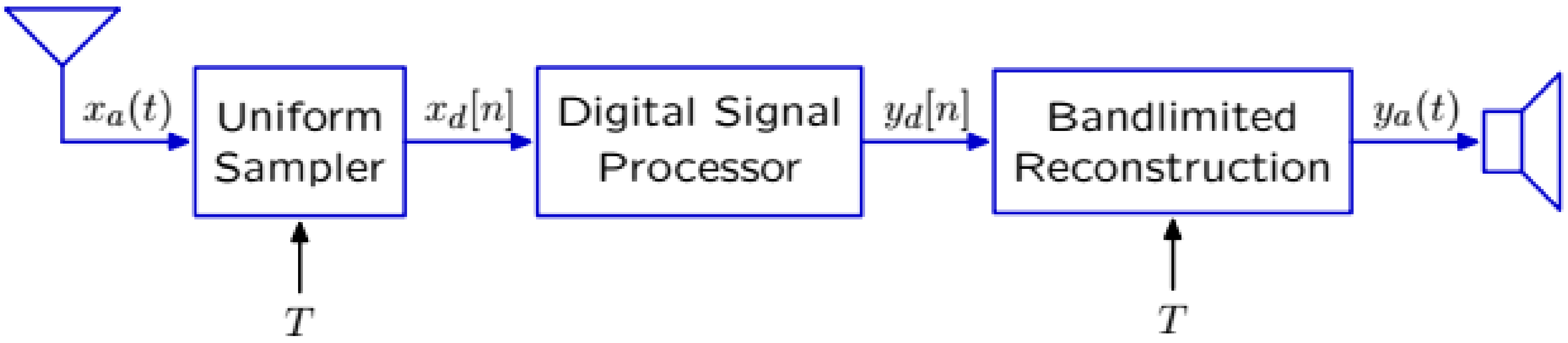
Frequency-Division Multiplexing

Digital Radio

Could we implement a radio with digital electronics?

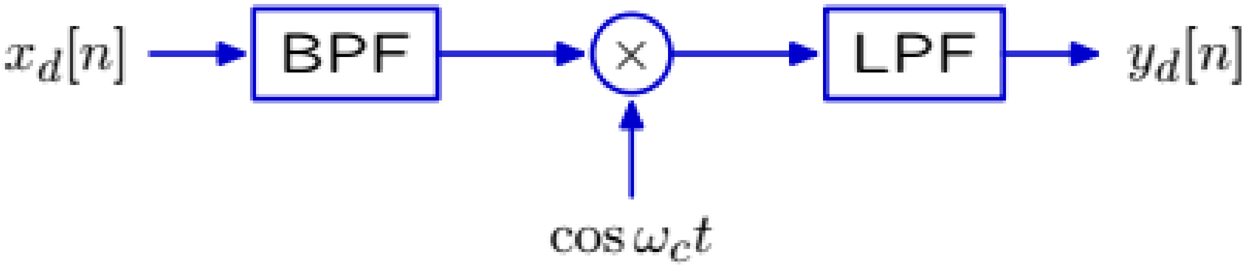
Commercial AM radio

- 106 channels
- each channel is allocated 10 kHz bandwidth
- center frequencies from 540 to 1600 kHz



Digital Radio

The digital electronics must implement a bandpass filter, multiplication by $\cos \omega_c t$, and a lowpass filter.



Amplitude, Phase, and Frequency Modulation

There are many ways to embed a "message" in a carrier.

Amplitude Modulation (AM) + carrier: $y_1(t) = \big(x(t) + C\big)\cos(\omega_c t)$

Phase Modulation (PM): $y_2(t) = \cos(\omega_c t + kx(t))$

Frequency Modulation (FM): $y_3(t) = \cos\left(\omega_c t + k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right)$

PM: signal modulates instantaneous phase of the carrier.

$$y_2(t) = \cos(\omega_c t + kx(t))$$

FM: signal modulates instantaneous frequency of carrier.

$$y_3(t) = \cos\left(\omega_c t + \underbrace{k \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}_{\phi(t)}\right)$$

$$\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d}{dt}\phi(t) = \omega_c + kx(t)$$

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011

For information about citing these materials or our Terms of Use, visit: http://ocw.mit.edu/terms.

EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği