İşaret İşleme

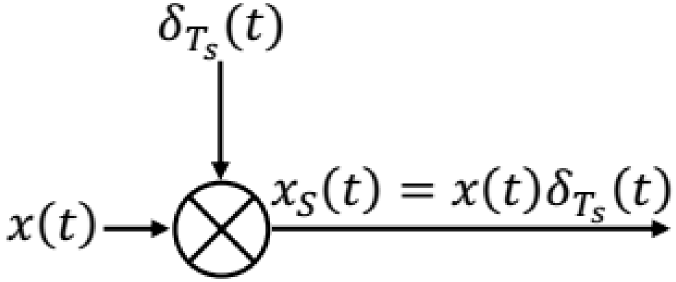
Örnekleme Teoremi için Örnek Sorular-H13CD3

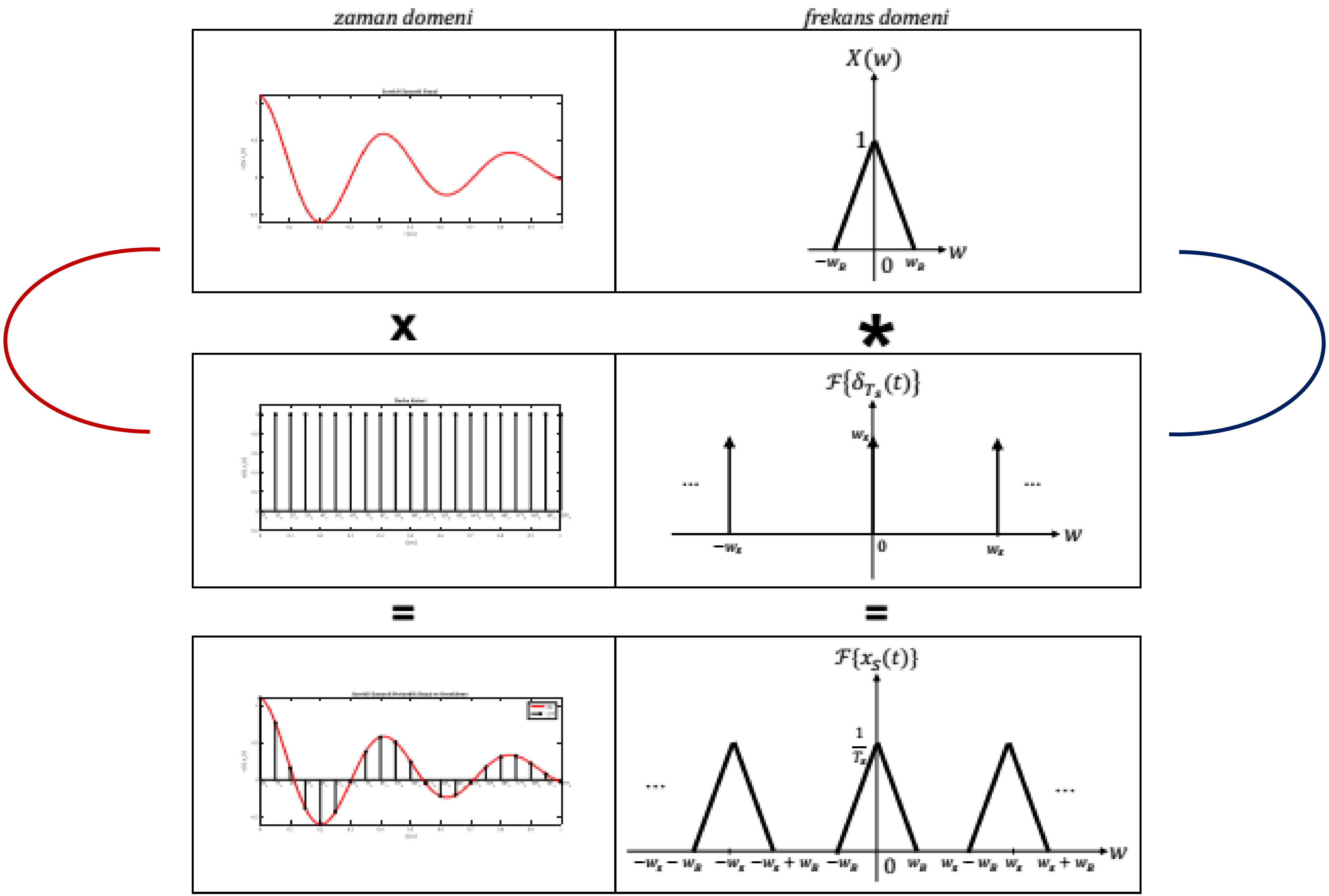
Dr. Meriç Çetin

versiyon281220

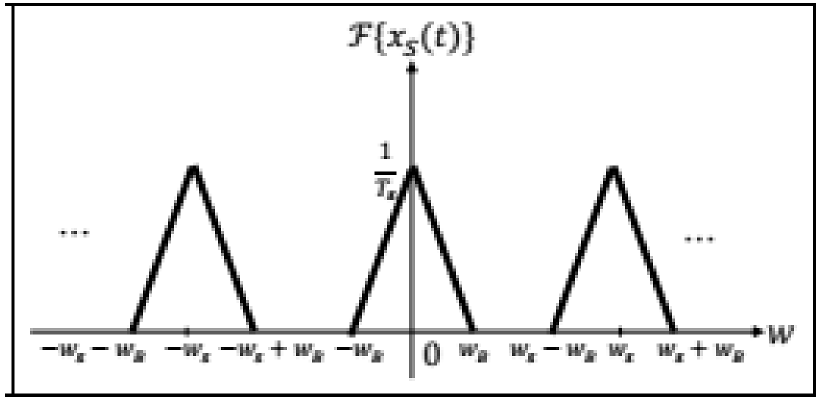
Örnekleme

Örnekleme, dijital sinyal işlemenin temelini oluşturan bir işlem olup zaman domenindeki w_B gibi sonlu bant genişlikli sürekli-zamanlı bir sinyalin T_s periyotlu $\delta_{T_s}(t)$ darbe katarı çarpılarak ayrık-zamanlı hale getirilmesini ve bu sayede dijital sinyal işlemeye uygun hale getirilmesini sağlar. Bunu aşağıdaki şekilde görmek mümkündür.




zaman domeni
frekans domeni
X(w)
1
−w_B 0 w_B W
x
*
𝓕{δ_Ts(t)}
w_s
…
−w_s 0 w_s W
=
=
𝓕{x_S(t)}
1/T_s
−w_s − w_B −w_s −w_s + w_B −w_B 0 w_B w_s − w_B w_s w_s + w_B W

Burada en önemli soru T_s periyodunun nasıl seçileceğidir. Şekle bakıldığında, Fourier dönüşümleri arasında bir girişim ya da örtüşmenin olmaması için

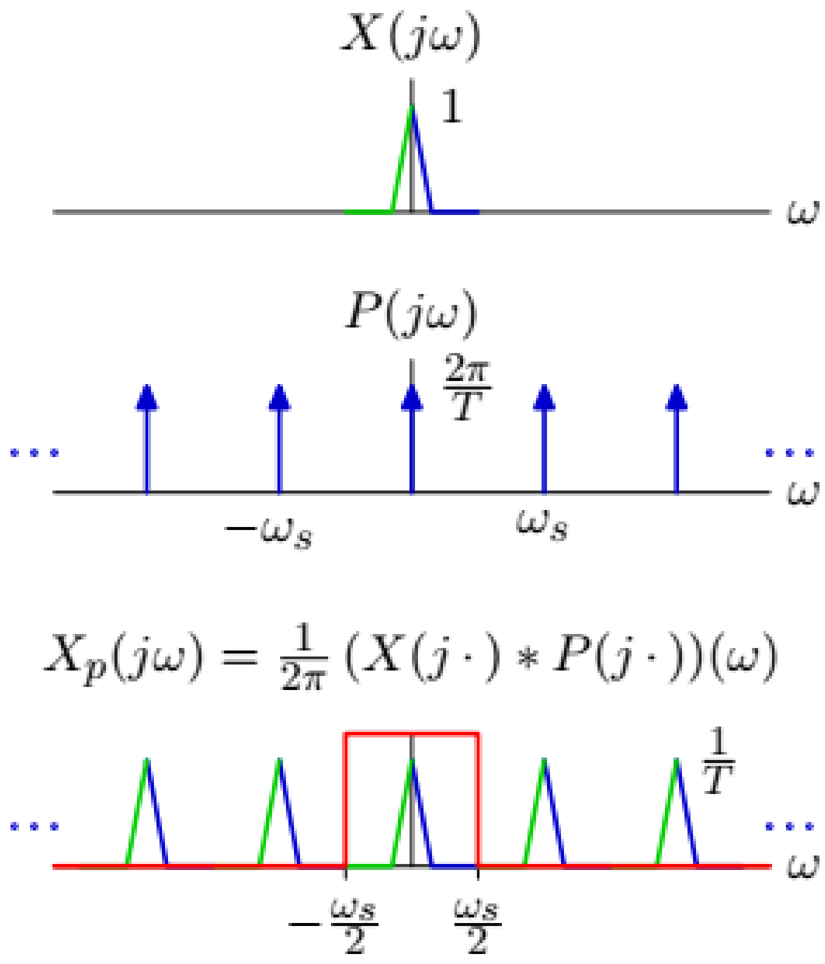


$$w_B < 2w_s$$

şartının sağlanması gerekir ki bu da örnekleme teoreminin en önemli sonuçlarından biridir. Buna göre, örnekleme frekansı, örneklenecek sinyalin bant genişliğinin en az iki katı olmalıdır.

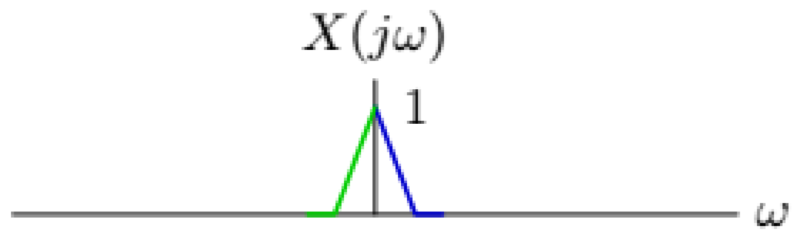
Aliasing

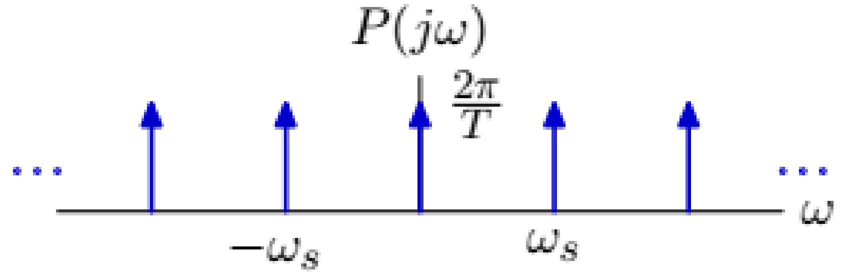
High frequency components of complex signals also wrap.



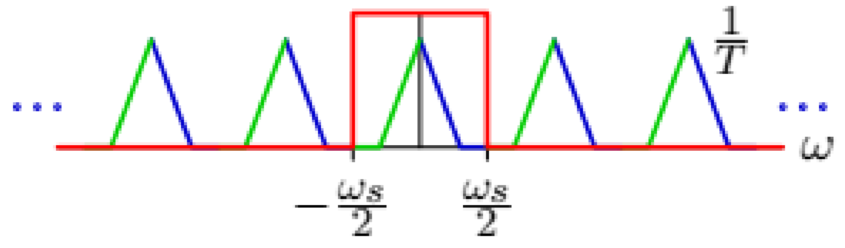
Aliasing

High frequency components of complex signals also wrap.



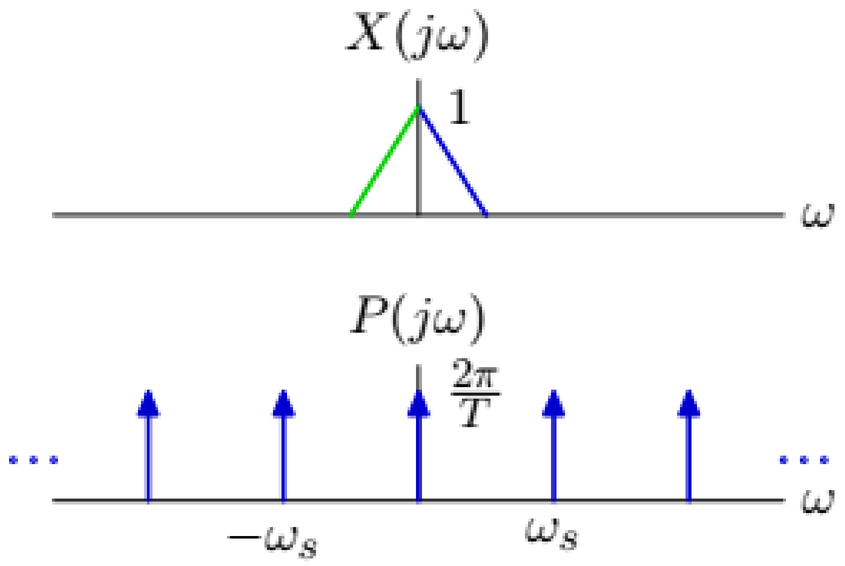


$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\,\cdot) * P(j\,\cdot)\right)(\omega)$$

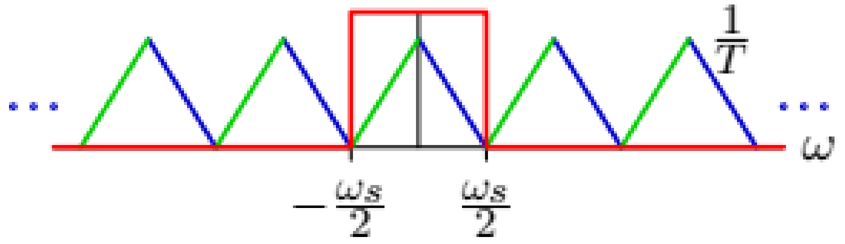


Aliasing

High frequency components of complex signals also wrap.

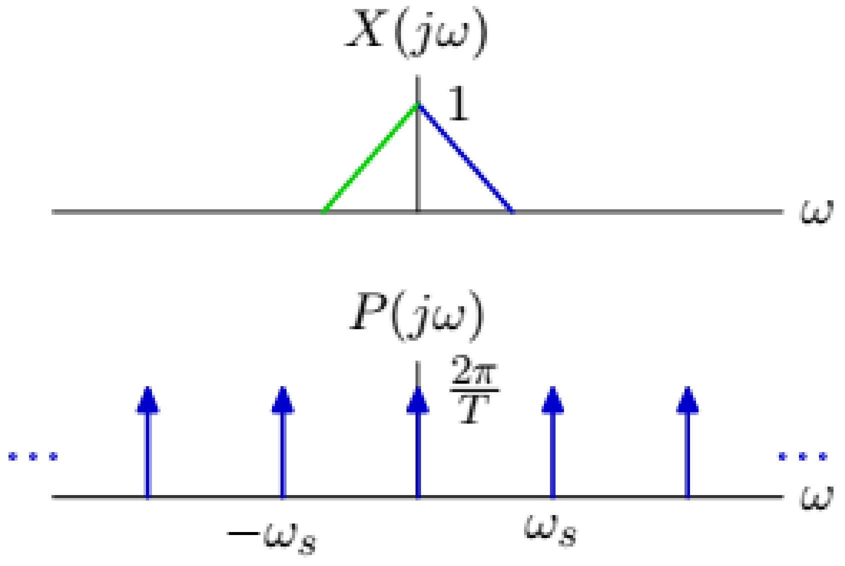


$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\,\cdot\,) * P(j\,\cdot\,)\right)(\omega)$$

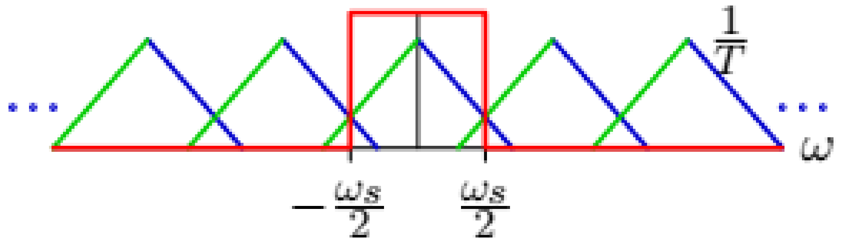


Aliasing

High frequency components of complex signals also wrap.

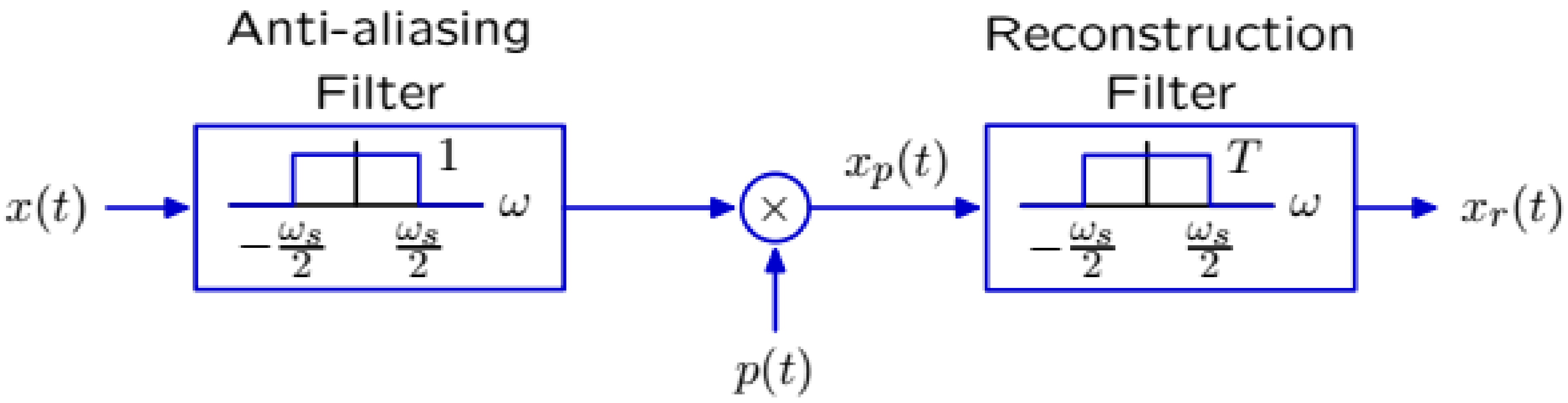


$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\,\cdot\,) * P(j\,\cdot\,)\right)(\omega)$$



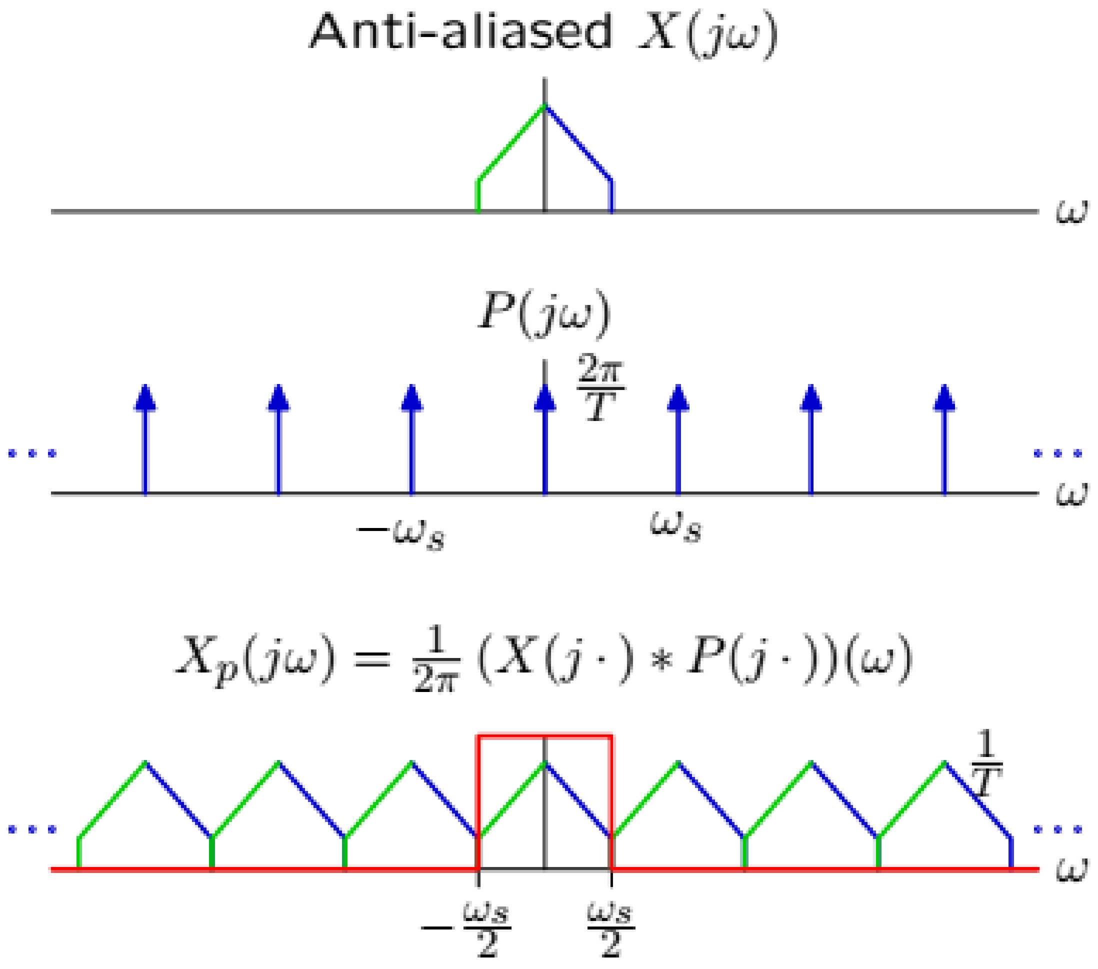
Anti-Aliasing Filter

To avoid aliasing, remove frequency components that alias before sampling.



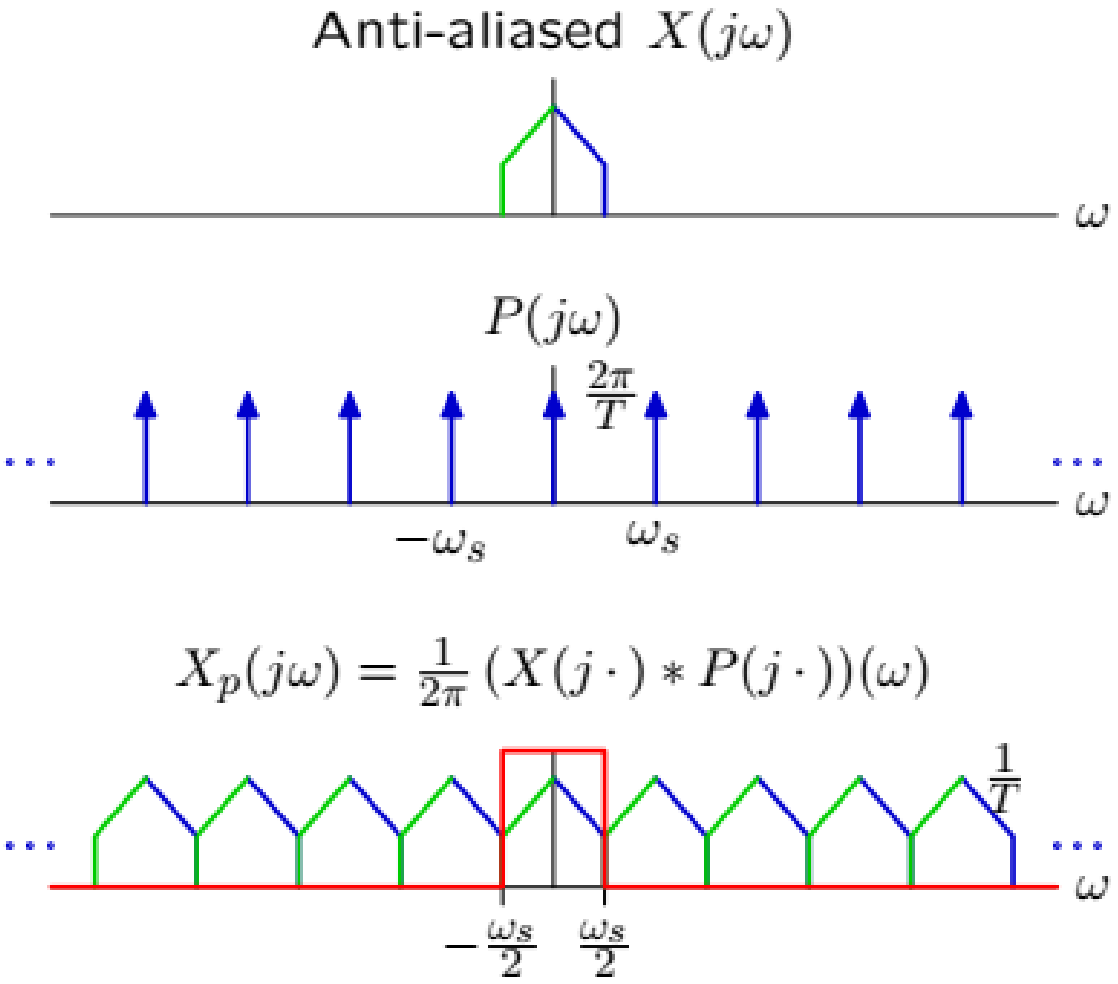
Aliasing

Aliasing increases as the sampling rate decreases.

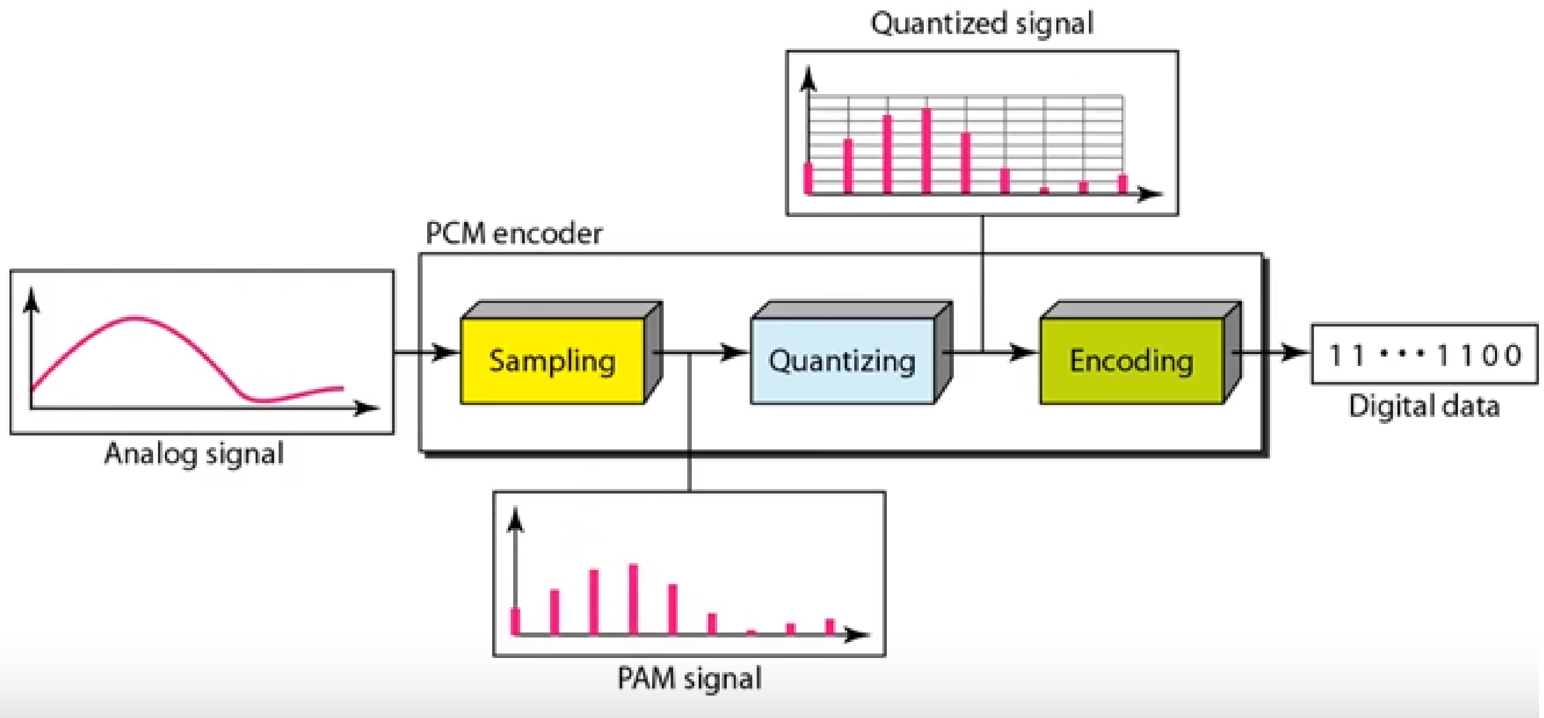


Aliasing

Aliasing increases as the sampling rate decreases.



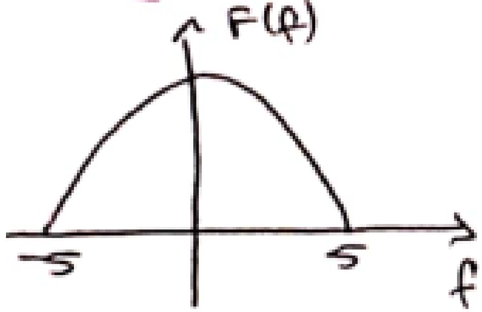
Quantization



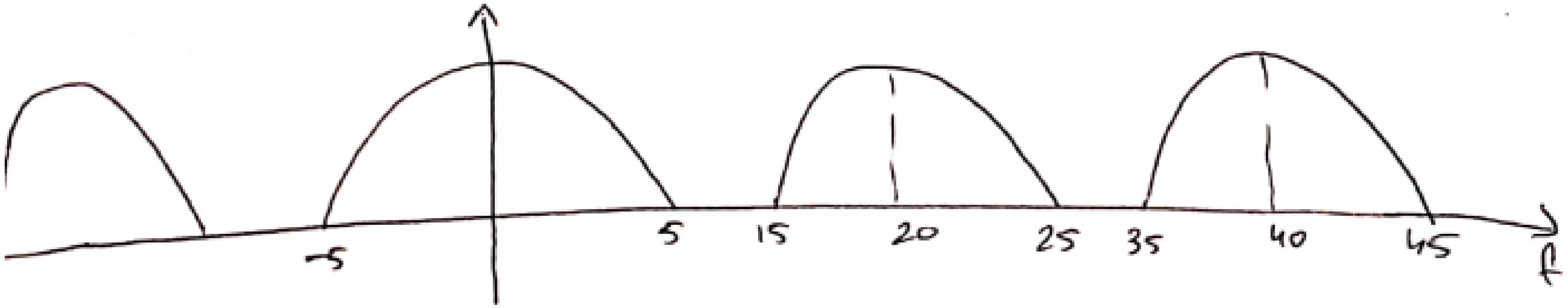
- https://www.youtube.com/watch?v=YJmUkNTBa8s

Örnekleme Teoremi ile ilgili bir örnek

Örn

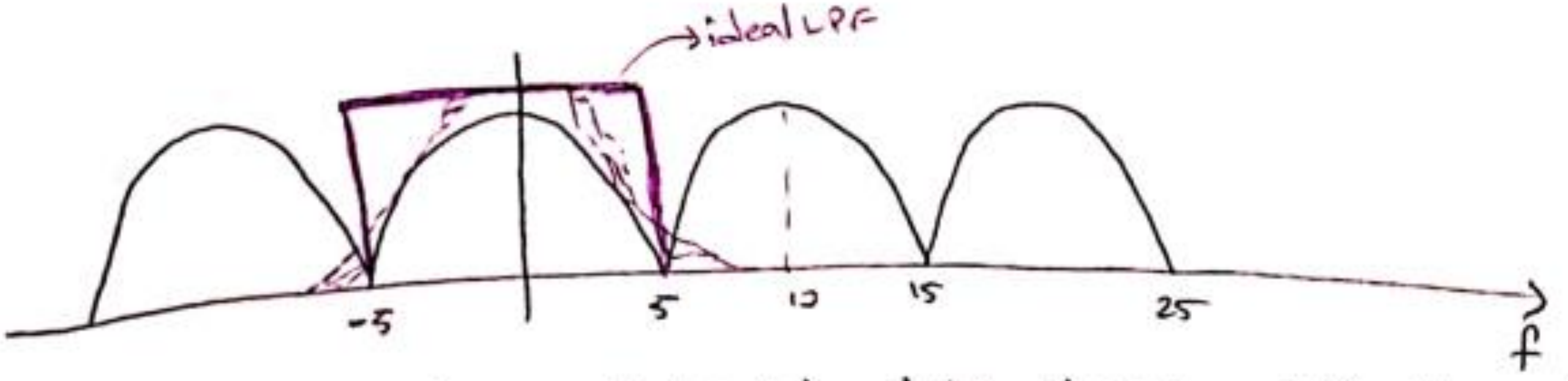


$B=5Hz$, $f_{Nyq}=10$, $f_s=20Hz$

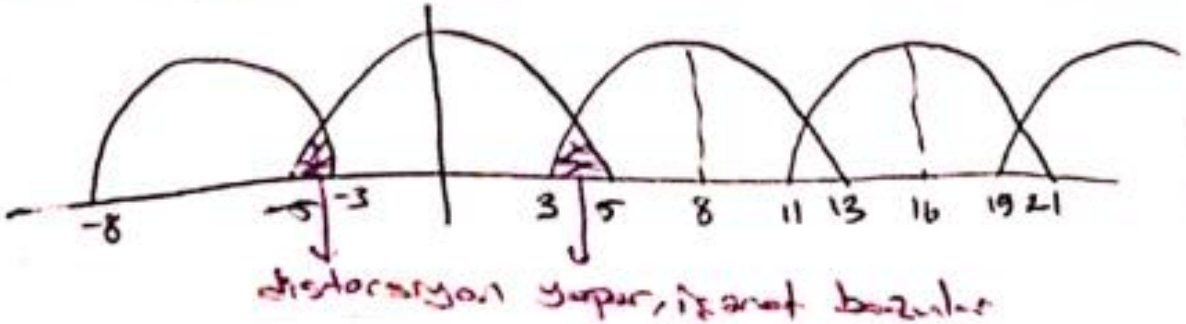


Bunu LPF'dan geçirirsek F işaretini elde ederiz. $f_s=10Hz$ seçilirse,

Örnekleme Teoremi ile ilgili bir örnek



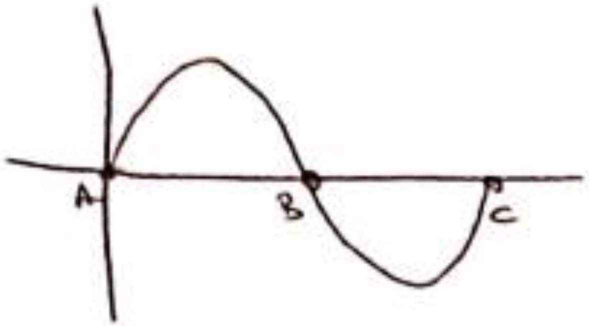
fs tam N'ye yakın seçilirse yukarıdaki gibi bir şekil elde edilir. İdeal bir LPF'den geçirilirse tam olarak %100 işaret elde edilir



fs=8 ise
LPF'den geçirilse bile işaret süzülemez

Analog Dijital Dönüştürücüler

Analog Dijital Dönüştürücüler

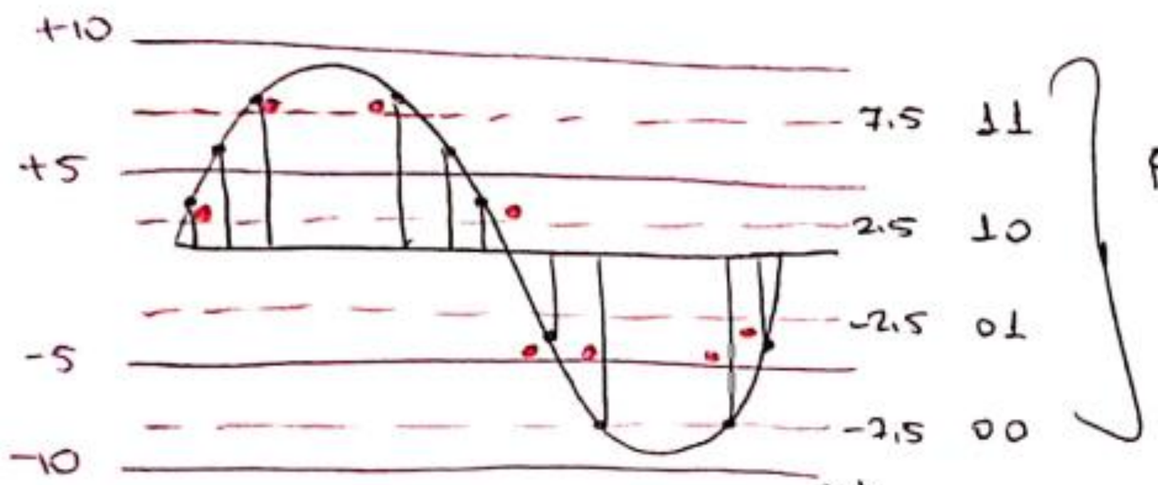


$f = 2Hz$ ise $T = 0,5sn$

$f_s \geq 4Hz$ olmalı bu durumda

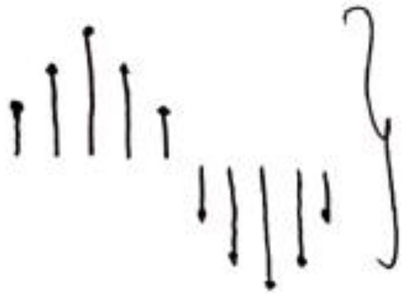
0,25sn'de bir örneklenmelidir. Ancak A,B,C noktaları gibi hep sıfır noktalarından örnekleme alındığında sorun oluşur. Bu analog sürekli zamanlı işareti analog ayrık zamanlı bir işarete dönüştürürsek;

Analog Dijital Dönüştürücüler



PCM - Pulse Code Modulation

seviyelendirme yaparsak;

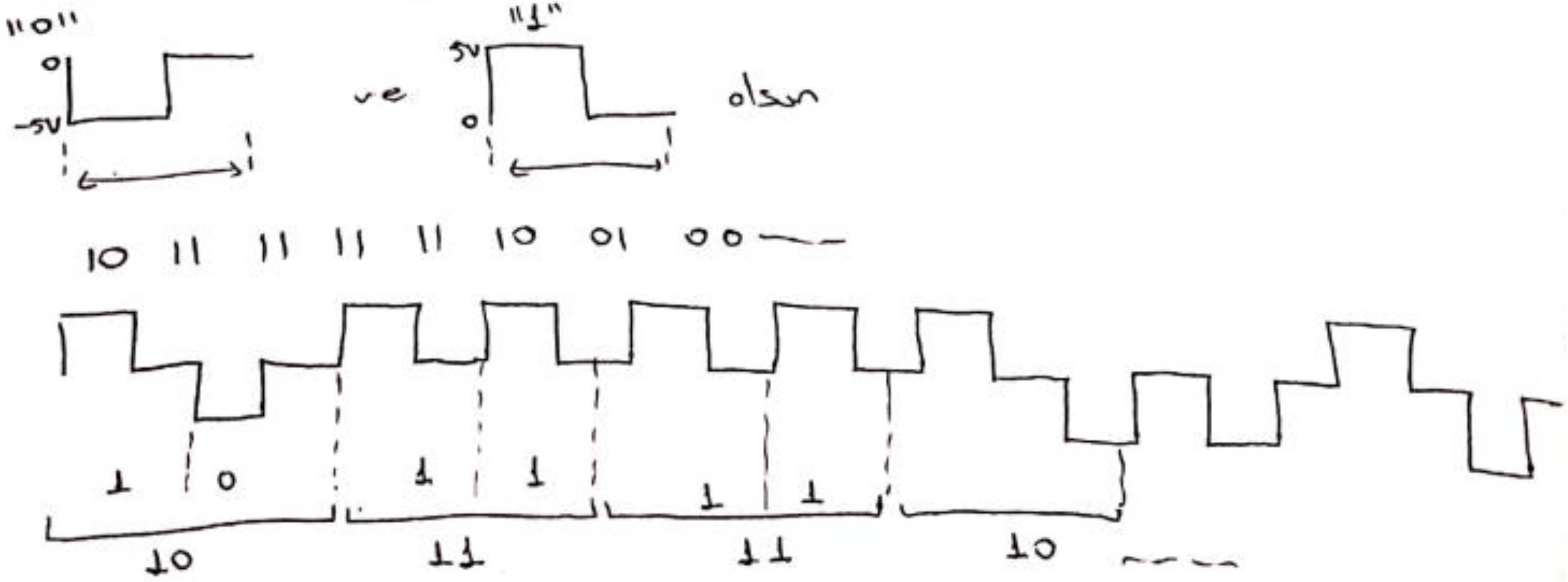


analog discret işaret

		Temsil	Kod
$-10 \leq f(t) < -5$	$\Rightarrow$	-7.5	00
$-5 \leq f(t) < 0$	$\Rightarrow$	-2.5	01
$0 \leq f(t) < 5$	$\Rightarrow$	2.5	10
$5 \leq f(t) \leq 10$	$\Rightarrow$	7.5	11

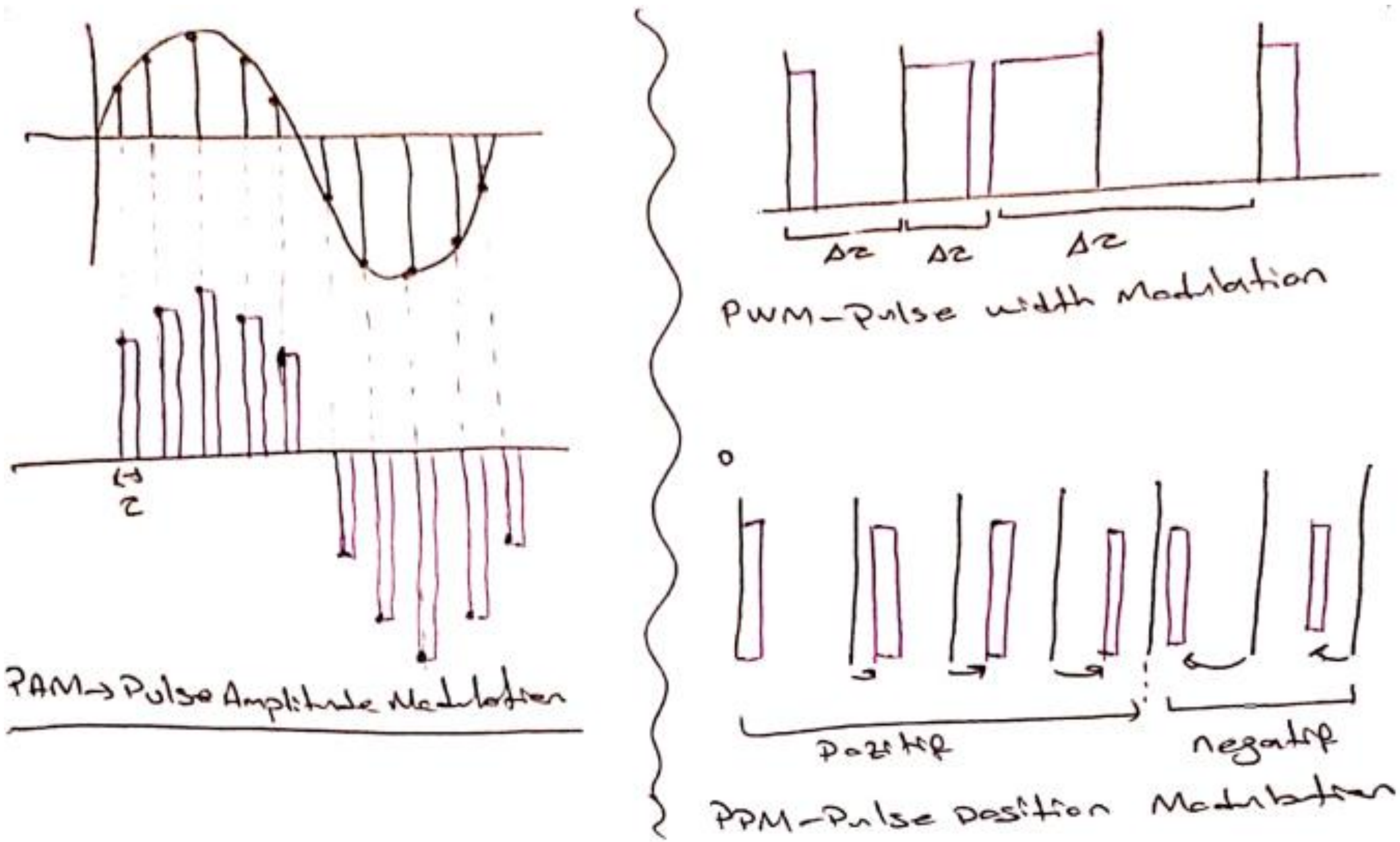
Analog Dijital Dönüştürücüler

Örneklenen işaret hangi seviyeye düşüyorsa işareti o seviyeye öteleriz.
Her örneklemede bir üst seviyeden örnekleme yapılır. İlk işarete benzemesi için daha fazla sayıda örnekleme yapılmalıdır.

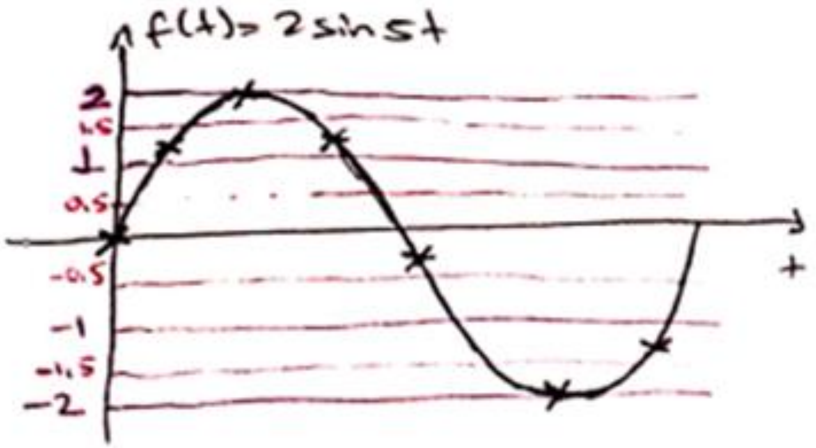


şeklinde ifade edebiliriz.

Farklı kodlama türleri

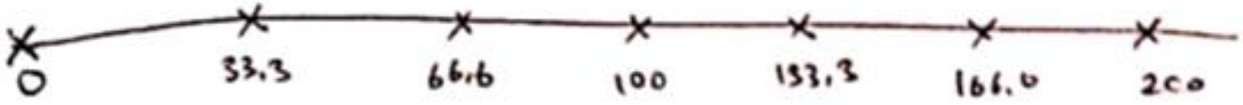


Örnek

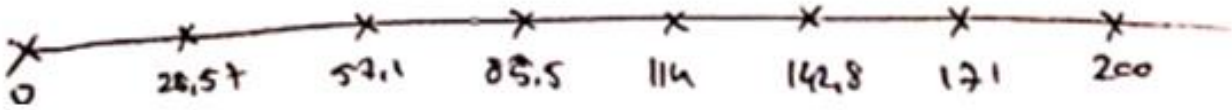


Bu işaret için periyot başına 7 örnek alın. İlk örnek t=0 anında olsun. Bu sıraya göre örneklenmiş işareti çizin

$T = periyot = \frac{1}{5} = 200ms$



Periyodu 6'ya böldüğümüzde 6 örnek almış oluruz. Çünkü 200ms'deki örnek bir sonraki periyoda da dahildir. Bu yüzden 200ms/7 = 28,57ms ye göre 7 örnek alınır.



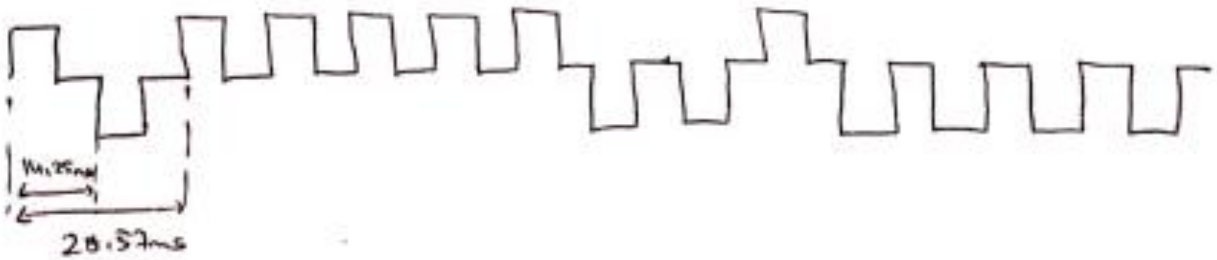
⇒ 2 örnek arası 28,57 ms alın.

Örnek

Değer	Temsil gerilim	Kod
$-2 \leq f(t) < -1$	-1.5	00
$-1 \leq f(t) < 0$	-0.5	01
$0 \leq f(t) < 1$	0.5	10
$1 \leq f(t) < 2$	1.5	11

$\rightarrow 2\sin(2 \cdot 180 \cdot 5 \cdot 28.57)$

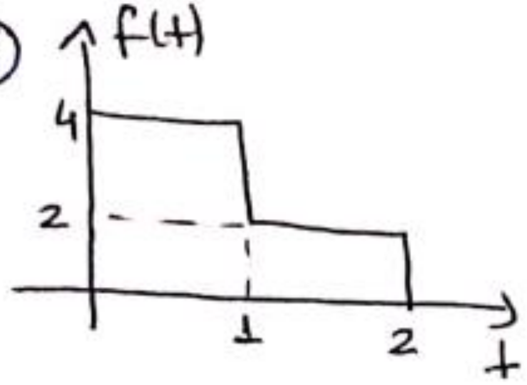
	1	2	3	4	5	6	7
Zaman	0	28.57	57.1	85.7	114	142.5	171
f(t)	f(0) 0	f(28.57) 1.56	1.95	0.87	−0.85	−1.94	−1.58
Temsil	0.5	1.5	1.5	0.5	−0.5	−1.5	−1.5
Kod	10	11	11	10	01	00	00
İşaret							



$f_s = \dfrac{1}{14{,}25 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{f_s = 70\text{k Hz}}$

Fourier Transform örneği

3



$$f(t) = \begin{cases} 4 \;; & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 \;; & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

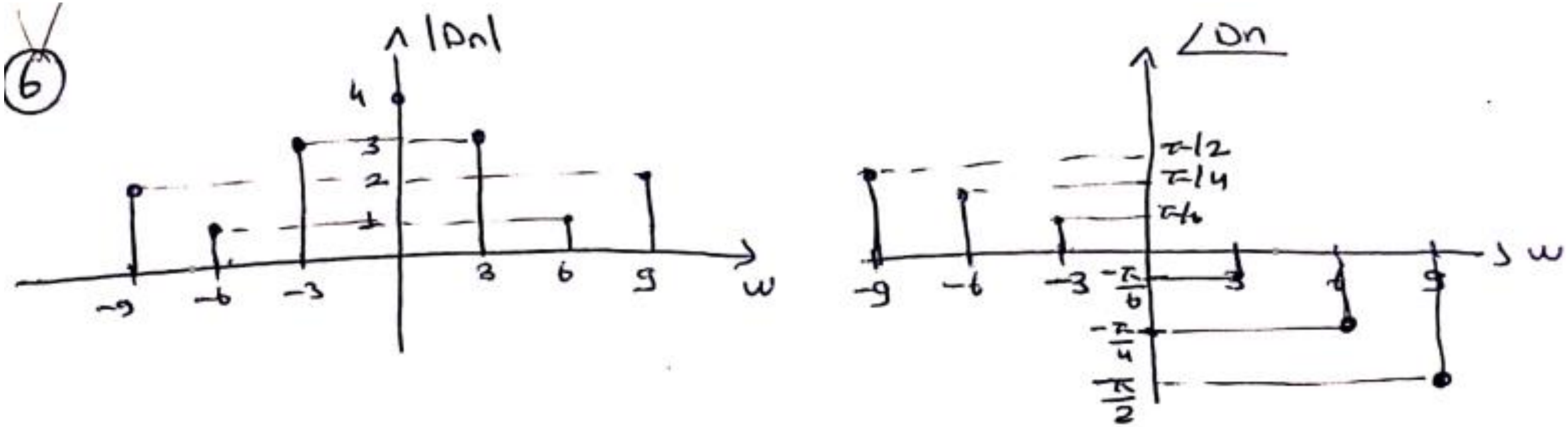
f(t)'nin fourier transformunu tablodan bulunuz

$$f(t) = 4 \cdot u(t) - 4u(t-1) + 2 \cdot u(t-1) - 2u(t-2) \Rightarrow$$

$$f(t) = 4 \cdot u(t) - 2u(t-1) - 2u(t-2)$$ tabloya göre;

$$F(w) = 4 \cdot \pi \delta(w) + \frac{4}{jw} - 2\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right] \cdot e^{-jw} - 2\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right] \cdot e^{-2jw}$$

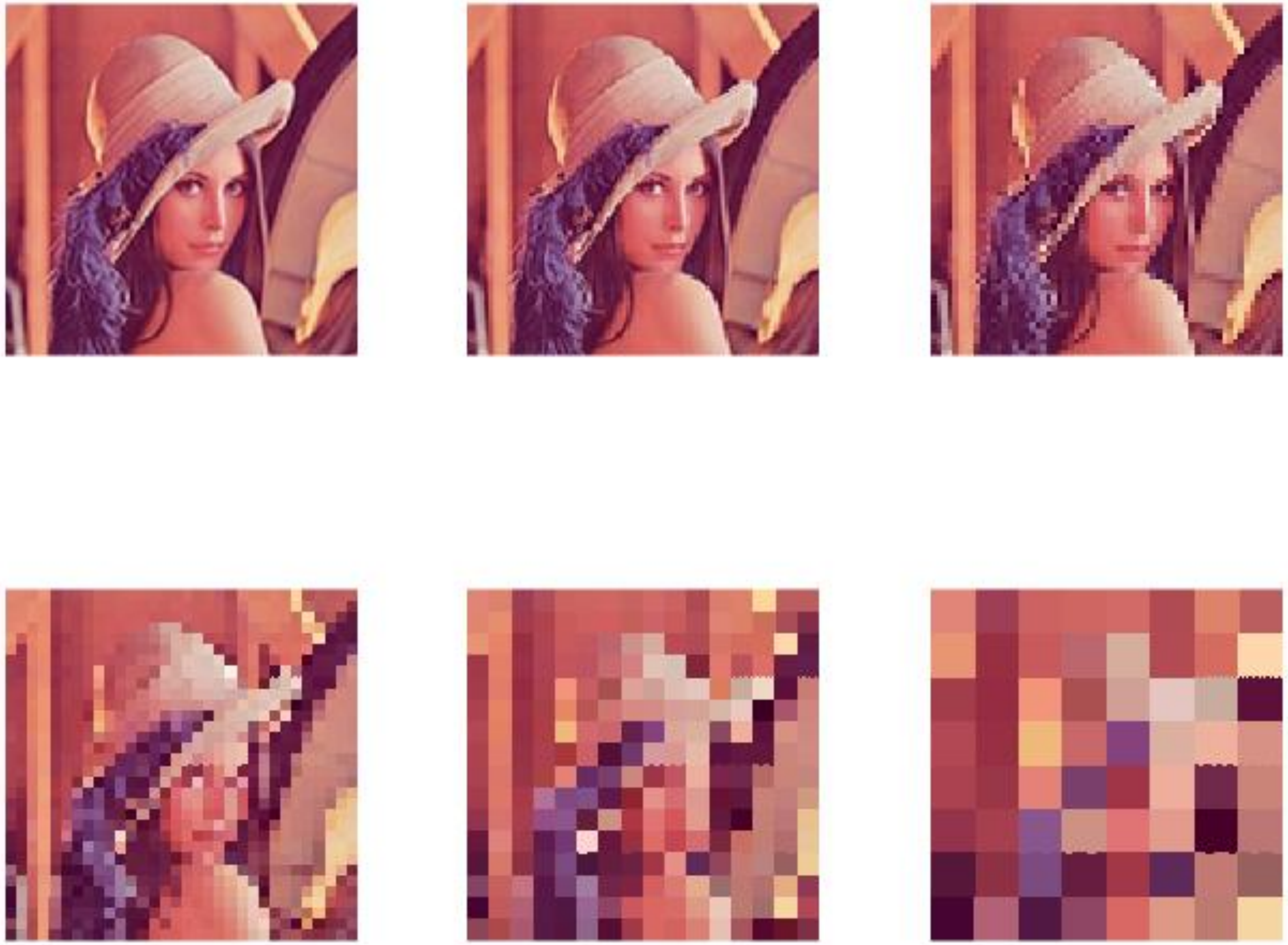
Frekans spektrum örneği



Yukarıda fourier spektrumu verilen x(t) işaretini trigonometrik fourier serisi şeklinde yazınız.

$$x(t) = 4 + 6\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(6t - \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(9t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2 boyutlu veri için örnekleme



2 boyutlu veri için quantalama