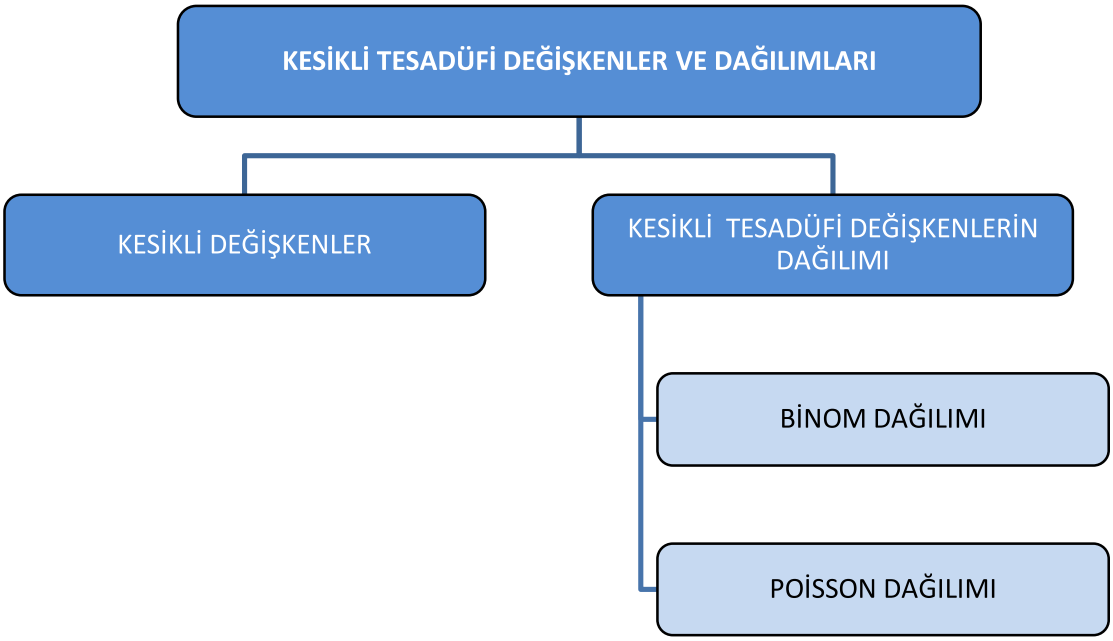

KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLER VE DAĞILIMLARI
KESİKLİ DEĞİŞKENLER
KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN DAĞILIMI
BİNOM DAĞILIMI
POİSSON DAĞILIMI

GİRİŞ

Bir önceki ünitede ihtimaller teorisinden bahsedilmişti. Bu ünitede ise kesikli tesadüfi değişkenler ve bu değişkenlere ait ihtimal dağılımlarından bahsedilecektir.

Kesikli değişken, belirli değerler arasında sadece tamsayı değerler alabilen değişkendir.

Tekrarlanan olaylara ilişkin sonuçların kesikli değişken değerleri olması hâlinden, bu tür olayların sonuçlarının gerçekleşme ihtimallerine ait dağılımlara kesikli ihtimal dağılımları denir [1].

Kesikli değişken belirli değerler arasında sadece tam sayı değerler alabilen değişkendir. Mesela 0 ila 5 değerleri arasında 0 ve 5 dâhil edilirse sadece 0, 1, 2, 3, 4 ve 5 gibi belirli tam sayı değerleri vardır. Kesikli değişken değerleri genellikle sayımla elde edilirler. Mesela bir derslikteki öğrenci sayısı, bir otobüsteki yolcu sayısı, bir ailedeki çocuk sayısı, bir para beş kez atıldığında yazı gelme sayısı, bir sinema salonundaki izleyici sayısı kesikli değişken değerlerine verilebilecek örneklerdendir [2].

KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLER

Kesikli değişken, sonuçları sayımla elde edilen değişkendir.

Kesikli değişken, sonuçları sayımla elde edilen değişkendir. Bu sebeple kesikli değişkenlere ait sonuçlar yalnızca belirli tam sayı değerler alabilir. Mesela bir köyde yaşayan ailelerdeki çocuk sayıları Tablo 12.1'de gösterilmiştir.

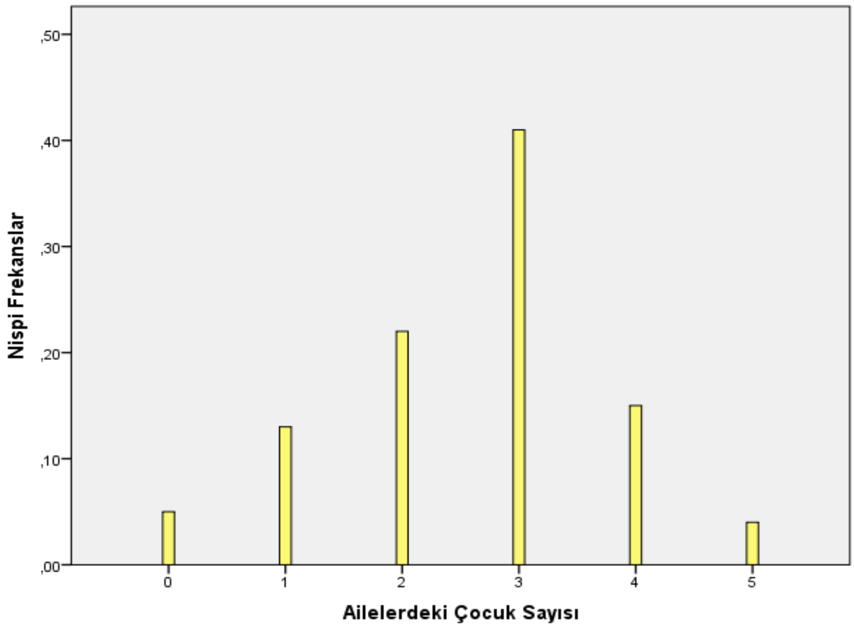
Tablo 12.1. Bir Köydeki Ailelerin Çocuk Sayılarına Göre Dağılımı

Çocuk Sayısı (X_i)	Aile Sayısı	Nispi Frekans
0	50	0.05
1	130	0.13
2	220	0.22
3	410	0.41
4	150	0.15
5	40	0.04
Toplam	**1000**	**1.00**

Beş çocuklu ailelerdeki erkek çocuk sayısı dağılımı kesikli dağılımdır. Sonuçları; 0, 1, 2, 3, 4 ve 5'tir.

Tablo 12.1'de gösterilen değişken ailelerdeki çocuk sayısıdır. Bu değişken sayımla elde edilen değerler verir. Bir ailedeki çocuk sayısı 0 olabilir, 1 olabilir; fakat 1.5 olamaz. Çocuk sayısı belirli tam sayı değerlerle ifade edilebilir. Bu örneğimizdeki değişkenimizin alabileceği muhtemel sonuçlar 0, 1, 2, 3, 4, ve 5'tir. Değişkenin sonuçlarından birinin gözlenmesi şansa bağlı olarak ortaya çıkar. Bu sebeple bu değişkene tesadüfi değişken denir. Her bir frekans toplam frekansa bölünerek nispi frekanslar elde edilmiştir. Nispi frekans terimi mevcut durum ve geçmiş için kullanılır. Olayın gelecekte meydana gelme ihtimalinden bahsedildiğinde nispi frekanslara ihtimal değerleri nazarıyla bakılabilir.

Tablo 12.1'deki tesadüfi değişkenin sonuçları kesikli olduğu için bu değişkene, kesikli tesadüfi değişken denir. Mesela bahse konu olan köydeki ailelerden biri tesadüfi olarak seçilirse ailenin iki çocuklu bir aile olması ihtimali 0.22'dir.



Şekil 12.1. Bir Köydeki Ailelerin Çocuk Sayılarına Göre Dağılımı

Tablo 12.1'deki değişkene ait sonuçlar X-Y koordinat sistemine taşınırsa Şekil 12.1'deki grafik elde edilir. Tablo 1'den de görüleceği gibi ailelerdeki çocuk sayısı tesadüfi değişkeninin sadece 0, 1, 2, 3, 4 ve 5 sonuçları vardır ve bu sonuçlar için ihtimallerden bahsedilebilir.

X kesikli değişkenine ait mümkün sonuçları ve bu sonuçların meydana gelme ihtimallerini gösteren dağılımlara kesikli ihtimal dağılımları denir.

KESİKLİ İHTİMAL DAĞILIMLARI

X değişkeni tesadüfi bir değişken olmak üzere, X değişkenine ait mümkün sonuçları ve bu sonuçların meydana gelme ihtimallerini gösteren dağılımlara kesikli ihtimal dağılımları denir [1]. Mesela yukarıda bahsi geçen köyden tesadüfi olarak bir aile seçildiğinde ailedeki çocuk sayısına ait ihtimal dağılım tablosu aşağıdaki gibidir. Unutmayınız olayın gelecekte tekrar edebilmesi durumunda Tablo 2'deki ihtimaller Tablo 1'deki nispi frekanslardan elde edilmiştir.

Tablo 12.1. Bir Köydeki Ailelerin Çocuk Sayılarının İhtimal Dağılımı

Çocuk Sayısı (X_i)	**İhtimal, P(X_i)**
0	0.05
1	0.13
2	0.22
3	0.41
4	0.15
5	0.04
Toplam	1.00

Tablo 12.1'e göre bahse konu olan köyden tesadüfi olarak bir aile seçilirse bu ailede 0 çocuk olması ihtimali 0.05, 1 çocuk olması ihtimali 0.13, …, 5 çocuk olması ihtimali 0.04'tür.

Tablo 12.1'de de görüleceği üzere ihtimal dağılım tablosundaki ihtimaller 0 ile 1 arasındadır. Olayın tüm sonuçları ilgili tabloda gösterilmiştir ve bu sonuçların gerçekleşmesi ihtimallerinin toplamı 1'dir.

Tablo 12.1'deki verilere göre bahse konu olan köyden tesadüfi olarak bir aile seçilirse, ailede en fazla bir çocuk olması ihtimali $P(X\leq1) = P(X=0) + (X=1) = 0.05 + 0.13 = 0.18$'dir.

Tablo 12.1'deki verilere göre bahse konu olan köyden tesadüfi olarak bir aile seçilirse, ailede en az üç çocuk olması ihtimali $P(X\geq3) = P(X=3) + (X=4) + (X=5) = 0.41 + 0.15 + 0.04 = 0.6$'dır.

Tablo 12.1'deki verilere göre bahse konu olan köyden tesadüfi olarak bir aile seçilirse ailede üçten fazla çocuk olması ihtimali $P(X>3) = P(X=4) + (X=5) = 0.15 + 0.04 = 0.19$'dur.

Kesikli tesadüfi değişkenin ortalaması, kesikli değişken değerleri ile bu değişken değerlerinin ihtimallerinin çarpılıp toplanması sonucu elde edilir.

Kesikli değişkene ait ihtimal dağılımının ortalaması μ ile gösterilir. Ortalamaya beklenen değer de denir ve E(X) ile gösterilir. Kesikli tesadüfi değişkenin ortalaması, kesikli değişken değerleri ile bu değişken değerlerinin ihtimallerinin çarpılıp toplanması sonucu elde edilir. Kesikli tesadüfi değişkenin ortalaması,

$$\mu = E(X_i) = \sum_{i=0}^{n} X_i P(X_i)$$

formülü yardımıyla elde edilir [4]. Tablo 2'deki kesikli değişkene ait sonuçları ve sonuçların gerçekleşmesi ihtimallerini kullanarak dağılıma ait ortalamayı elde edebiliriz.

Tablo 12.3. Ailelerdeki Çocuk Sayıları Dağılımının Ortalaması

Çocuk Sayısı (X_i)	$P(X_i)$	$X_iP(X_i)$
0	0.05	0(0.05)=0.00
1	0.13	1(0.13)=0.13
2	0.22	2(0.22)=0.44
3	0.41	3(0.41)=1.23
4	0.15	4(0.15)=0.60
5	0.04	5(0.04)=0.20
Toplam	1.00	$\sum_{i=0}^{n} X_i P(X_i)$=2.60

$$\mu = \sum_{i=0}^{n} X_i P(X_i) = 2.6$$

Tablo 3'e göre bahsi geçen köydeki ailelerde ortalama 2.6 çocuk bulunmaktadır. Bir başka ifadeyle tesadüfi olarak bir aile seçildiğinde bu ailede ortalama 2.6 çocuk bulunmasını bekleriz. Üzerinde durulan değişken kesikli değişken olmasına rağmen ortalama veya beklenen değer 2.6 gibi kesikli olmayan bir değer alabilir.

Kesikli tesadüfi değişkenin standart sapması, kesikli ihtimal dağılımının değişkenliğinin bir ölçüsüdür ve σ sembolü ile gösterilir. Standart sapmanın büyük olması kesikli değişken değerlerinin daha geniş bir aralıkta dağılım gösterdiğini ifade eder.

Standart sapmanın büyük olması, kesikli değişken değerlerinin daha geniş bir aralıkta dağılım gösterdiğini ifade eder.

Kesikli tesadüfi değişkenin standart sapması,

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} X_i^2 P(X_i) - \mu^2}$$

veya

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (X_i - \mu)^2 P(X_i)}$$

formüllerinden biri ile hesaplanabilir [5]. Tablo 12.2'deki kesikli değişkene ait sonuçları ve sonuçların gerçekleşmesi ihtimallerini kullanarak dağılıma ait standart sapmayı elde edebiliriz.

Tablo 12.4. Ailelerdeki Çocuk Sayıları Dağılımının Ortalaması

(X_i)	*P(X_i)*	X_i^2	$X_i^2 P(X_i)$
0	0.05	0	0(0.05)=0.00
1	0.13	1	1(0.13)=0.13
2	0.22	4	4(0.22)=0.88
3	0.41	9	9(0.41)=3.69
4	0.15	16	16(0.15)=2.40
5	0.04	25	25(0.04)=1.00
Toplam	1.00		$\sum_{i=0}^{n} X_i^2 P(X_i)$**=8.10**

Tablo 12.4'teki $\sum_{i=0}^{n} X_i^2 P(X_i)$=8.10 değerini ve daha önce elde edilen μ = 2.6 değerini kullanarak,

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} X_i^2 P(X_i) - \mu^2} = \sqrt{8.1 - 2.6^2} = \sqrt{8.1 - 6.76} = 1.16$$

olarak bulunur. Bahsi geçen köydeki ailelerin çocuk sayılarına göre dağılımı incelenirken ailelerdeki ortalama çocuk sayısının 2.6 olduğunu ve dağılımın standart sapmasının 1.16 olduğunu unutmayınız.