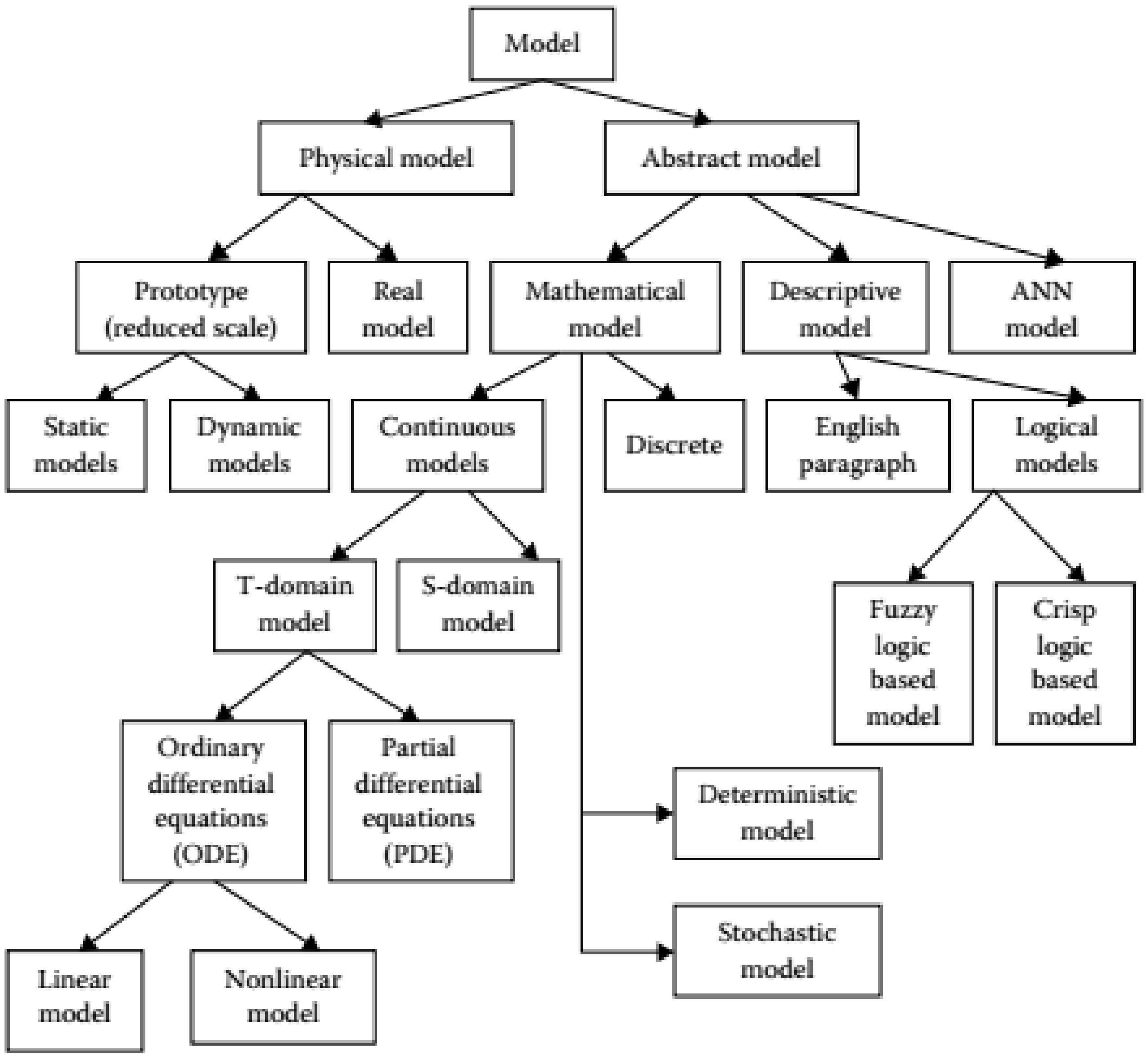
İşaret İşleme

Laplace Dönüşümü ve Sürekli Zamanlı Sistemler-H7CD1

Dr. Meriç Çetin

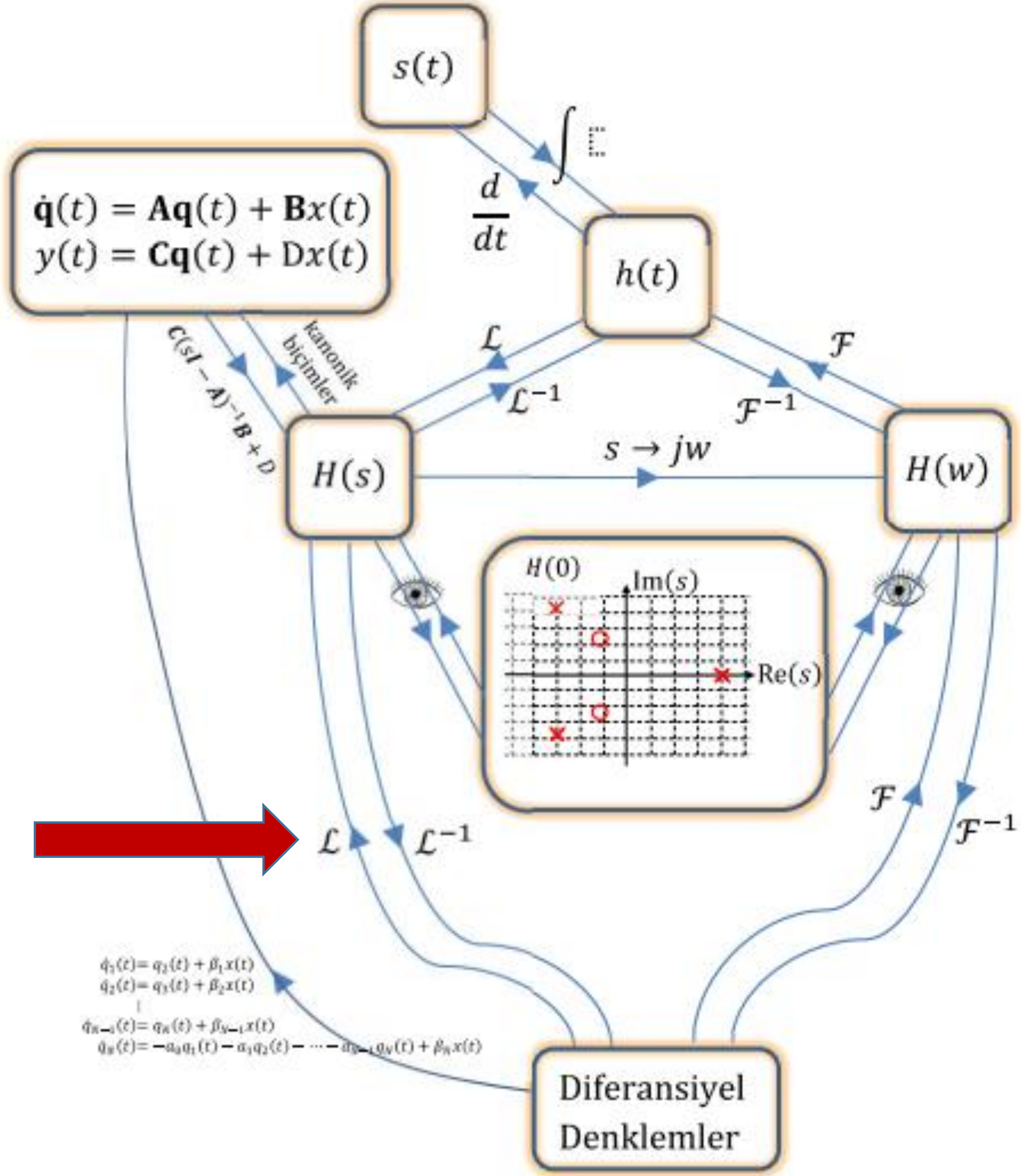
versiyon211020

2. Hafta notlarını hatırlayalım!



Pictorial representation of the classification of models.

Sürekli-zamanlı sistemlerde giriş-çıkış ilişkileri

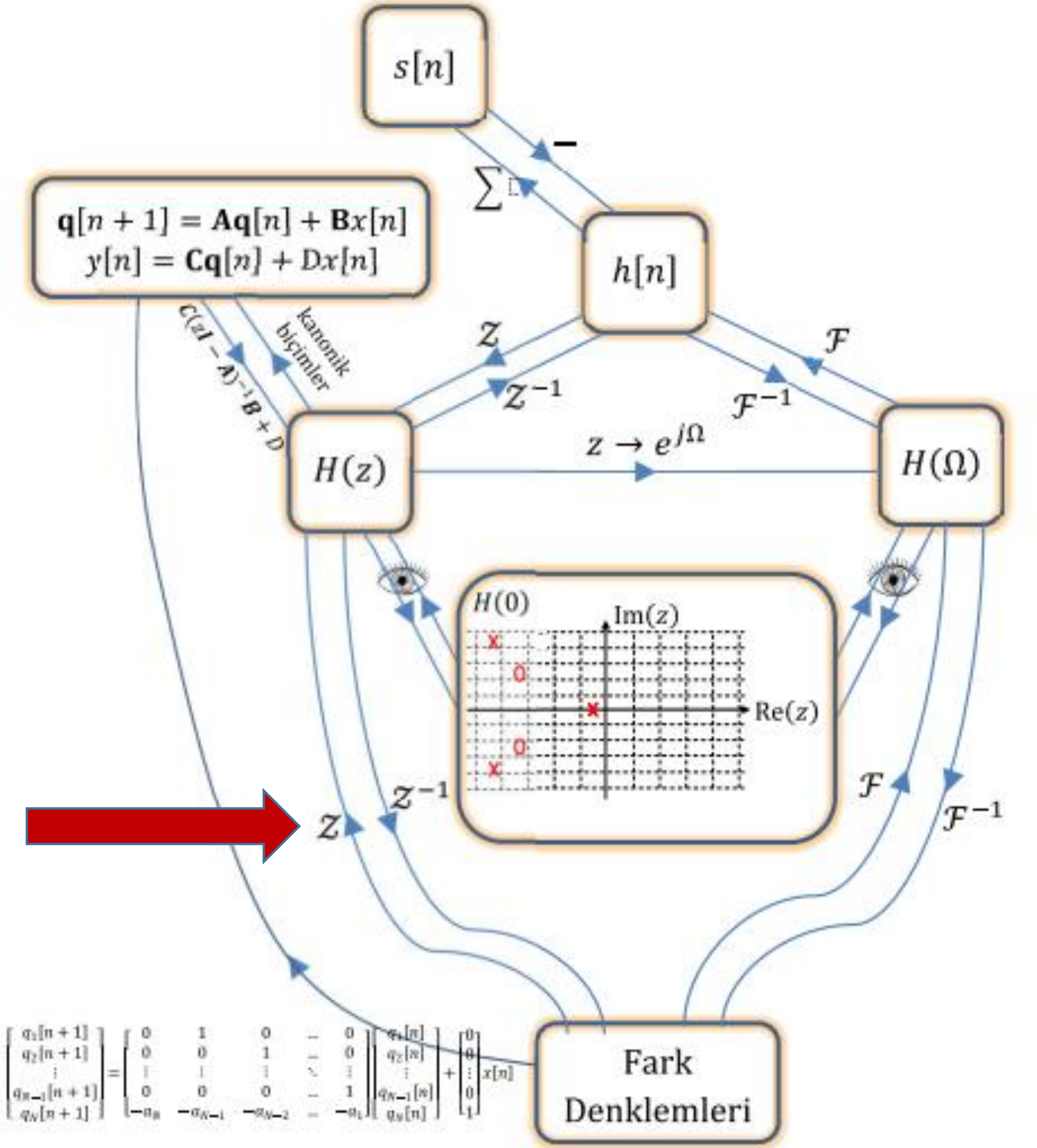


EEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi

Ayrık-zamanlı sistemlerde giriş-çıkış ilişkileri



EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi

Laplace Dönüşümü

Giriş

- Darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Alternatif olarak Laplace dönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce **s–domenine** dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar **zaman domenine** dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Laplace dönüşümü sayesinde bir LTI sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

Pierre-Simon de Laplace

Laplace Dönüşümünün Tanımı

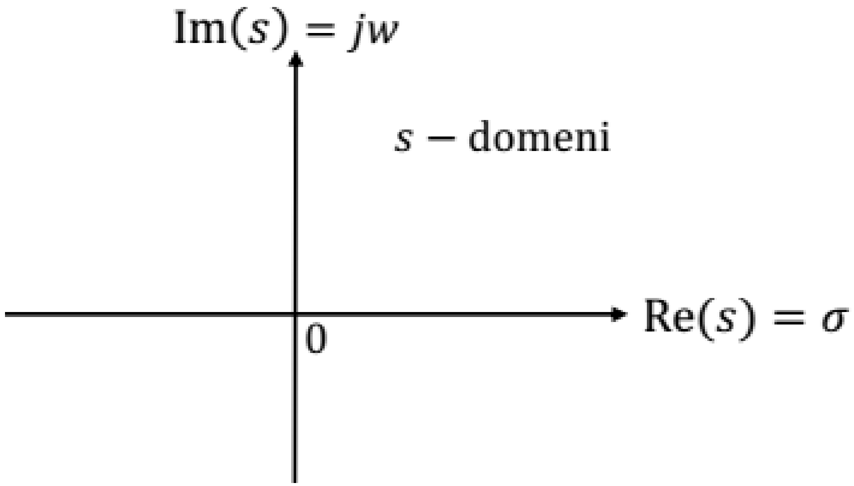
Sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümü $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ile gösterilir

ve şu şekilde tanımlanır:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

buradaki s değişkeni $s = \sigma + jw$ şeklinde karmaşık bir değişkendir.



Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$ sinyalinin Laplace dönüşümü

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)\infty} - \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)0}$$

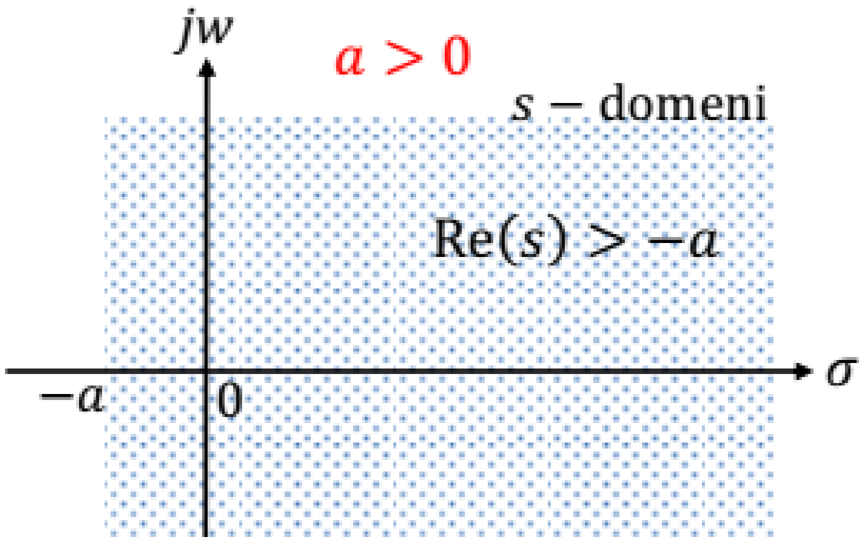
$$= \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)\infty} + \frac{1}{s+a}$$

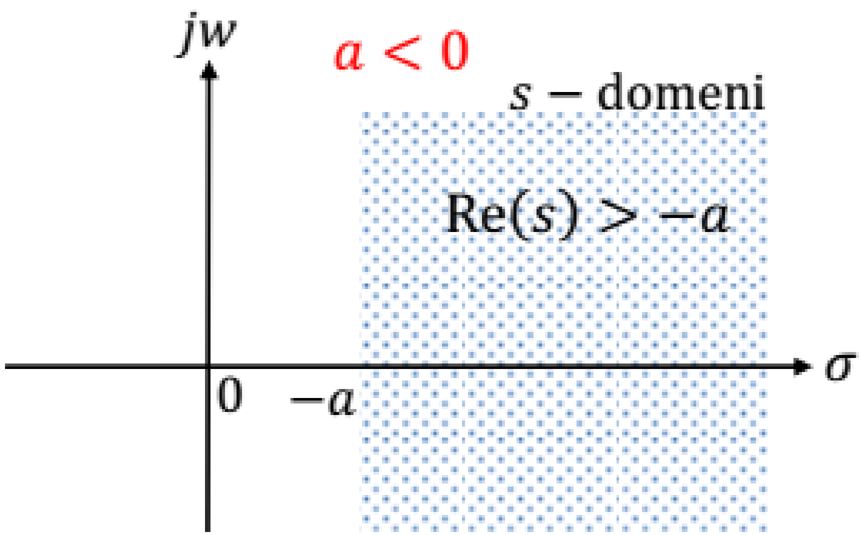
$$= \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$ sinyalinin Laplace dönüşümü

Görüldüğü gibi bu integralin yani Laplace dönüşümünün mevcut olabilmesi için $\text{Re}(s+a) > 0$ şartının sağlanması gerekir. s-domeninde bu şart aşağıdaki gibi bir bölgeye denk düşmektedir ki bu bölgeye yakınsama bölgesi denir.





Laplace Dönüşümü X(s)'in Sıfırları ve Kutupları

Laplace dönüşümü olan $X(s)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n} \qquad = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

burada a_k ve b_k'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \leq n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k'lara $X(s)$'in *sıfırları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k'lara da $X(s)$'in *kutupları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = \infty$ olmaktadır.

$X(s)$'i ifade etmenin bir yolu da sıfır ve kutuplarını s-düzleminde yerlerinin belirtilmesidir.

Geleneksel olarak sıfırlar **o** ile kutuplar da **x** ile gösterilmektedir.

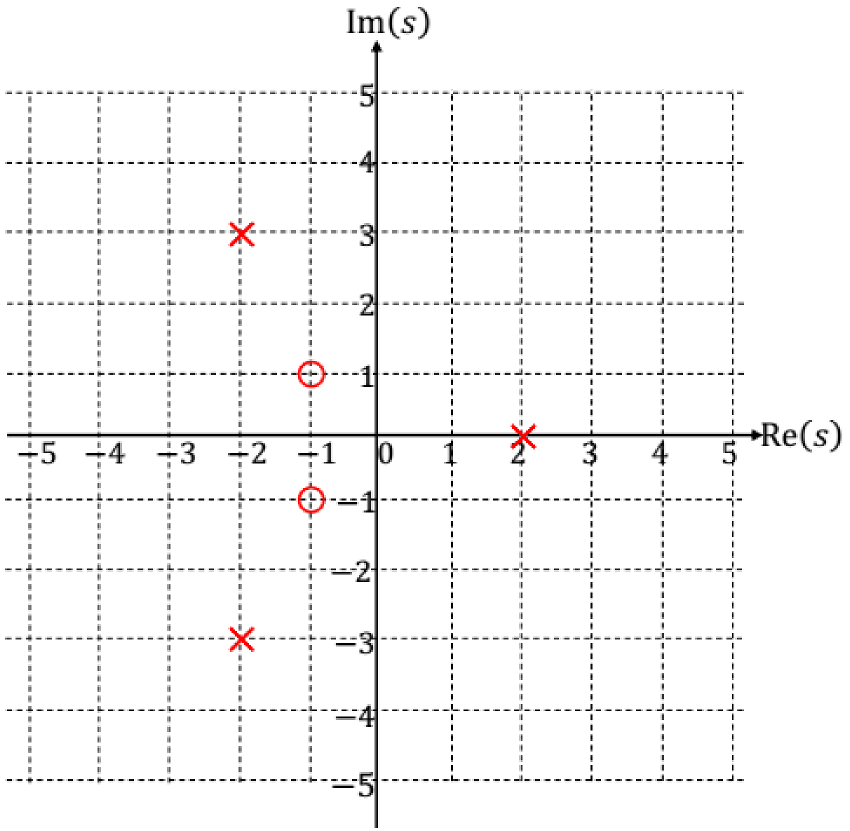
örneğe bakalım:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s^3 + 4s^2 + s - 26} = 2\frac{(s+1+j)(s+1-j)}{(s-2)(s+3+2j)(s+3-2j)}$$

$X(s)$'in $s = -1 + j$ ve $s = -1 - j$'de sıfırları,

$s = 2$, $s = -3 + 2j$'de ve $s = -3 - 2j$'de kutupları vardır ve

sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



Tablo Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(s)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
s-domeninde Öteleme	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$X\left(\frac{s}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-s)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$
s-domeninde Türev	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$
Türev	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

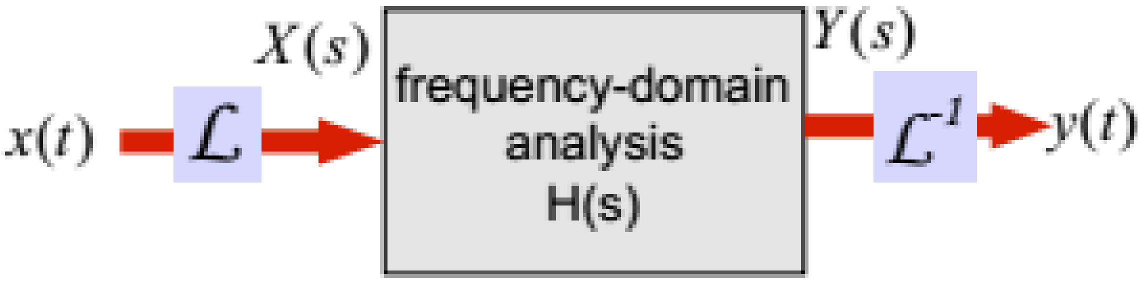
Ters Laplace Dönüşümü

Ters Laplace Dönüşümü

$X(s)$ sinyalinden $x(t)$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters Laplace dönüşümü ile sağlanır:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

bu derste ters Laplace dönüşümü almak için kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.



Bir Örnek

$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$'in ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle $X(s)$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$
$$= 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$
$$= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$
$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

Laplace Tablosundan

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Örneğin devamı

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \Rightarrow$$

Laplace Tablosundan

$$\Downarrow$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

Örnek: $X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$'in ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle $X(s)$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$$
$$= \frac{c_1}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\lambda_2}{(s+5)^2}$$
$$= \frac{2}{s+3} + \frac{-1}{s+5} + \frac{-10}{(s+5)^2}$$

Şimdi ters dönüşümü bulalım:

Laplace Tablosundan $\Rightarrow$ $x(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t)$

Örnek

- Finding inverse Laplace transform of $\dfrac{7s-6}{s^2-s-6}$. (use partial fraction)

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3}$$

- To find k_1 which corresponds to the term (s+2), cover up (s+2) in X(s), and substitute s = -2 (i.e. s+2=0) in the remaining expression:

$$k_1 = \left.\frac{7s-6}{(s+2)\,(s-3)}\right|_{s=-2} = \frac{-14-6}{-2-3} = 4$$

- Similarly for k_2:

$$k_2 = \left.\frac{7s-6}{(s+2)\,(s-3)}\right|_{s=3} = \frac{21-6}{3+2} = 3$$

- Therefore

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

L4.1 p349

Örnek

- Finding the inverse Laplace transform of $\dfrac{2s^2-5}{(s+1)(s+2)}$.
- The partial fraction of this expression is less straight forward. If the power of numerator polynomial (M) is the same as that of denominator polynomial (N), we need to add the coefficient of the highest power in the numerator to the normal partial fraction form:

$$X(s) = 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

- Solve for k_1 and k_2 via "covering":

$$k_1 = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7$$

$$k_2 = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

- Therefore $X(s) = 2 + \dfrac{7}{s+1} - \dfrac{13}{s+2}$
- Using pairs 1 & 5:

$$x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$$

L4.1 p350

COMPUTER EXAMPLE C4.1

Using the MATLAB residue command, determine the inverse Laplace transform of each of the following functions

a.

$$X_a(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$$

num = [2 0 5]; den = [1 3 2]; [r, p, k] = residue(num,den)

$$F(s) = \frac{-13}{s+2} + \frac{7}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (-13e^{-2t} + 7e^{-t})u(t) + 2\delta(t)$$

b.

$$X_b(s) = \frac{2s^2+7s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

num = [2 7 4]; den = [conv([1 1],conv([1 2], [1 2]))]; [r, p, k] = residue(num,den)

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (3e^{-2t} + 2te^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

c.

$$X_c(s) = \frac{8s^2+21s+19}{(s+2)(s^2+s+7)}$$

num = [8 21 19]; den = [conv([1 2], ([1 1 7]))]; [r, p, k] = residue(num,den)

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3.5329\, e^{-j0.1366}}{s+0.5-j2.5981} + \frac{3.5329\, e^{j0.1366}}{s+0.5+j2.5981}$$

$$f(t) = \left[e^{-2t} + 1.766\, e^{-0.5t} \cos(2.5981t - 0.1366)\right] u(t)$$

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

Lecture 6

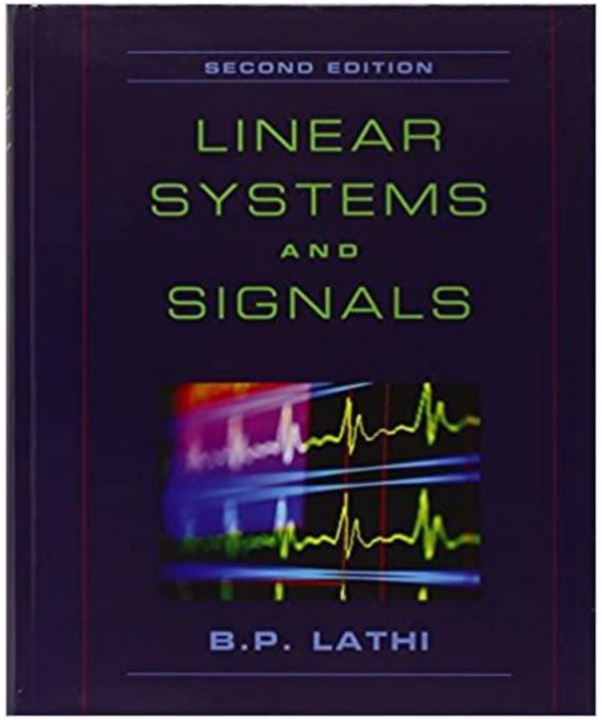
Frequency-domain analysis:
Laplace Transform
(Lathi 4.1 – 4.2)

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

EEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği



MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011