

## 12.1. VARYANS ANALİZİ (ANOVA)

Varyans analizi ikiden fazla örneklem grubunun ortalamalarının birbirine eşit olup olmadığının sınanmasında kullanılır. Önceki derslerden hatırlanacağı üzere iki örneklem ortalamasının testi için örneklem büyüklüğüne bağlı olarak z ve t testleri kullanılmıştı.

Bu iki testi ikiden fazla örneklem için kullanılması halinde I. Tip hata artacak yani doğru olduğu halde yanlışlıkla sıfır hipotezi reddedilebilecektir. Örneğin, 3 örneklem için t testi ikili gruplar 1-2, 1-3, 2-3 halinde ayrı ayrı uygulanacaktır ve her testin I.tip hata yapmama olasılığı 0,95 olduğunda üç ayrı t testinde I.tür hata yapmama olasılığı 0,857'ye düşecektir ( $0,95 * 0,95 * 0,95 = 0,857$ ). Yani I.tür hata yapma olasılığı 0,05'ten 0,143'e yükselir ( $1 - 0,857 = 0,143$ ). Bu sonuç kabul edilemeyeceğinden ANOVA testine başvurulur.

ANOVA testinin uygulanabilmesi için çeşitli varsayımların sağlanması beklenir:

- örneklemelerin elde edildiği anakütlelerin dağılımı normal olmalı
- bağımsız örneklemeler olmalı
- anakütle varyansları eşit olmalı

ANOVA tek yönlü ve çift yönlü şeklinde sınıflandırılabilir

## 12.2. Tek Yönlü Anova

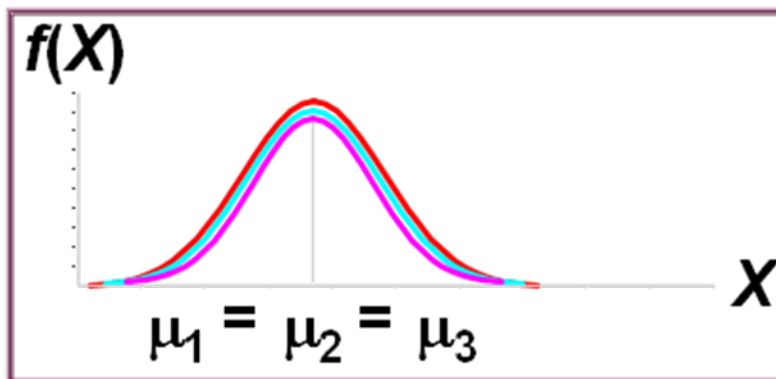
ANOVA ile amaç k tane anakütleden n hacimli bağımsız tesadüfi örnekler seçildiğinde, bu örneklerin ortalamalarından hareketle anakütle ortalamalarının birbirinden farklı olup olmadığı test etmektir.

Hipotezler şöyle ifade edilir:

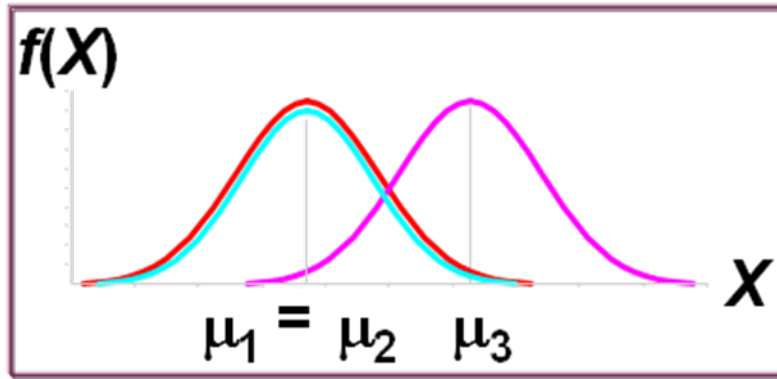
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_1 : \text{En az iki anakütle ortalaması birbirine eşit değildir}$$

Sıfır hipotezinde tüm anakütle ortalamalarının eşit olduğu varsayılır:



Alternatif hipotez de ise en az bir anakütlesi ortalaması diğerlerinden farklıdır.



	İşlemler					
	1	2	...	i	...	k
	$X_{11}$	$X_{21}$	...	$X_{i1}$	...	$X_{k1}$
	$X_{12}$	$X_{22}$	...	$X_{i2}$	...	$X_{k2}$
	.					
	.					
	$X_{1n}$	$X_{2n}$	...	$X_{in}$	...	$X_{kn}$
<b>Toplam</b>	$T_1$	$T_2$		$T_i$	$T_k$	$T$
<b>Ortalama</b>	$\overline{X}_1$				$\overline{X}_k$	$\overline{X}$

Anakütle ortalamalarını karşılaştırmak için varyans analizi uygulanırken, herbir gruptaki gözlemlerin,  $X_{ij}$ , grup ortalaması olan  $\overline{X}_i$  değerlerinden farklarına dayalı olan grup içi değişim ve gruplara ait olan ortalama değerler  $\overline{X}_i$  genel ortalama değeri olan  $\overline{X}$  dan farklarının kareler toplamına dayalı olan gruplar arası değişim iki önemli ölçüttür. Grup içi değişim ve gruplar arası değişim toplamı, Toplam Değişkenliği verir.

ANOVA ile gruplar (örnekler) arasında uygunluk olup olmadığı yani incelenen grupların aynı anakütleyle ait olup olmadıkları sorusuna cevap aranır.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \overline{X})^2$$

Toplam Değişkenlik (Genel Kareler Toplamı-GKT)

$$\text{Gruplar arası Değişkenlik (Gruplar arası Kareler Toplamı-GAKT)} = n \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2$$

Grup ortalamalarının genel ortalamadan gösterdiği sapmalar hesaplanır.

$$\text{Gruplar içi Değişkenlik (Gruplar içi Kareler Toplamı- GİKT)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

Her bir gözlemin dâhil olduğu grubun ortalamasından gösterdiği sapmalar hesaplanır.

Toplam değişimi oluşturan gruplar içi ve gruplar arası değişim aslında varyans analizinde test sürecinin temelini oluşturur.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2 = n \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

Test sürecinin temel varsayımı anakütle varyanslarının eşit olduğudur. Eğer gruplar birbirine eşitse yani sıfır hipotezi doğru ise GİKT anakütle varyansının tahmininde kullanılır, yansız tahminciyi bulmak için “n-k” ya bölünür. Bulunan bu değer grup içi kareler ortalaması olarak isimlendirilir. Benzer şekilde gruplar arası kareler ortalama değeri de “k-1” serbestlik derecesine oranlanır.

Eğer sıfır hipotezi doğru ise gruplar arası kareler ortalama değeri gruplar içi kareler ortalama değerine oranlanır.

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
işlem	GAKT	$v_1=k-1$	$s_1^2 = \frac{GAKT}{k-1}$	
Hata	GİKT	$v_2= n-k$	$s_2^2 = \frac{GİKT}{n-k}$	
Toplam	GKT	$n-1$		$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Çeşitli önem seviyeleri ve örnek büyüklükleri için  $s_1^2 / s_2^2$  nin hangi noktaya kadar rastlantısallıktan, hangi noktadan sonra istatistiksel olarak önemli bir farktan yani grupların farklı anakütlelere ait olmasından kaynaklandığı F tablosu ile değerlendirilir.

Hesaplanan F değeri, F tablosundan elde edilen kritik değerden küçükse grup ortalamaları arasındaki farklılık tesadüfidir ve söz konusu gruplar aynı anakütleyle aittir sonucuna varılır.

Eğer hesaplanan test istatistiği, kritik değerden büyükse örnek ortalamaları arasındaki fark istatistiksel olarak önemlidir ve bu grupların farklı anakütlelere ait olduklarına karar verilir.

F değeri, iki varyansın birbirine bölümü olduğu için negatif değer almaz.

Bu yüzden F dağılımı sağa çarpıktır.  $H_0$  hipotezinin red bölgesi eğrinin sağ ucunda yer alır.

Aşağıda F tablosuna yer verilmiştir, görüleceği üzere, iki serbestlik derecesi vardır.

*The critical values for $q$ corresponding to $\alpha = .05$ (lightface type) and $\alpha = .01$ (boldface type).											
df FOR ERROR TERM	$k = \text{NUMBER OF TREATMENTS}$										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
	<b>5.70</b>	<b>6.98</b>	<b>7.89</b>	<b>8.42</b>	<b>8.91</b>	<b>9.32</b>	<b>9.67</b>	<b>9.97</b>	<b>10.24</b>	<b>10.48</b>	<b>10.70</b>
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
	<b>5.24</b>	<b>6.33</b>	<b>7.03</b>	<b>7.56</b>	<b>7.97</b>	<b>8.32</b>	<b>8.61</b>	<b>8.87</b>	<b>9.10</b>	<b>9.30</b>	<b>9.48</b>
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43
	<b>4.95</b>	<b>5.92</b>	<b>6.54</b>	<b>7.01</b>	<b>7.37</b>	<b>7.68</b>	<b>7.94</b>	<b>8.17</b>	<b>8.37</b>	<b>8.55</b>	<b>8.71</b>
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
	<b>4.75</b>	<b>5.64</b>	<b>6.20</b>	<b>6.62</b>	<b>6.96</b>	<b>7.24</b>	<b>7.47</b>	<b>7.68</b>	<b>7.86</b>	<b>8.03</b>	<b>8.18</b>
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98
	<b>4.60</b>	<b>5.43</b>	<b>5.96</b>	<b>6.35</b>	<b>6.66</b>	<b>6.91</b>	<b>7.13</b>	<b>7.33</b>	<b>7.49</b>	<b>7.65</b>	<b>7.78</b>
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
	<b>4.48</b>	<b>5.27</b>	<b>5.77</b>	<b>6.14</b>	<b>6.43</b>	<b>6.67</b>	<b>6.87</b>	<b>7.05</b>	<b>7.21</b>	<b>7.36</b>	<b>7.49</b>
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71
	<b>4.39</b>	<b>5.15</b>	<b>5.62</b>	<b>5.97</b>	<b>6.25</b>	<b>6.48</b>	<b>6.67</b>	<b>6.84</b>	<b>6.99</b>	<b>7.13</b>	<b>7.25</b>
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61
	<b>4.32</b>	<b>5.05</b>	<b>5.50</b>	<b>5.84</b>	<b>6.10</b>	<b>6.32</b>	<b>6.51</b>	<b>6.67</b>	<b>6.81</b>	<b>6.94</b>	<b>7.06</b>
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53
	<b>4.26</b>	<b>4.96</b>	<b>5.40</b>	<b>5.73</b>	<b>5.98</b>	<b>6.19</b>	<b>6.37</b>	<b>6.53</b>	<b>6.67</b>	<b>6.79</b>	<b>6.90</b>
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46
	<b>4.21</b>	<b>4.89</b>	<b>5.32</b>	<b>5.63</b>	<b>5.88</b>	<b>6.08</b>	<b>6.26</b>	<b>6.41</b>	<b>6.54</b>	<b>6.66</b>	<b>6.77</b>
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40
	<b>4.17</b>	<b>4.84</b>	<b>5.25</b>	<b>5.56</b>	<b>5.80</b>	<b>5.99</b>	<b>6.16</b>	<b>6.31</b>	<b>6.44</b>	<b>6.55</b>	<b>6.66</b>
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35
	<b>4.13</b>	<b>4.79</b>	<b>5.19</b>	<b>5.49</b>	<b>5.72</b>	<b>5.92</b>	<b>6.08</b>	<b>6.22</b>	<b>6.35</b>	<b>6.46</b>	<b>6.56</b>
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31
	<b>4.10</b>	<b>4.74</b>	<b>5.14</b>	<b>5.43</b>	<b>5.66</b>	<b>5.85</b>	<b>6.01</b>	<b>6.15</b>	<b>6.27</b>	<b>6.38</b>	<b>6.48</b>
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27
	<b>4.07</b>	<b>4.70</b>	<b>5.09</b>	<b>5.38</b>	<b>5.60</b>	<b>5.79</b>	<b>5.94</b>	<b>6.08</b>	<b>6.20</b>	<b>6.31</b>	<b>6.41</b>
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23
	<b>4.05</b>	<b>4.67</b>	<b>5.05</b>	<b>5.33</b>	<b>5.55</b>	<b>5.73</b>	<b>5.89</b>	<b>6.02</b>	<b>6.14</b>	<b>6.25</b>	<b>6.34</b>
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20
	<b>4.02</b>	<b>4.64</b>	<b>5.02</b>	<b>5.29</b>	<b>5.51</b>	<b>5.69</b>	<b>5.84</b>	<b>5.97</b>	<b>6.09</b>	<b>6.19</b>	<b>6.28</b>
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10
	<b>3.96</b>	<b>4.55</b>	<b>4.91</b>	<b>5.17</b>	<b>5.37</b>	<b>5.54</b>	<b>5.69</b>	<b>5.81</b>	<b>5.92</b>	<b>6.02</b>	<b>6.11</b>
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00
	<b>3.89</b>	<b>4.45</b>	<b>4.80</b>	<b>5.05</b>	<b>5.24</b>	<b>5.40</b>	<b>5.54</b>	<b>5.65</b>	<b>5.76</b>	<b>5.85</b>	<b>5.93</b>
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90
	<b>3.82</b>	<b>4.37</b>	<b>4.70</b>	<b>4.93</b>	<b>5.11</b>	<b>5.26</b>	<b>5.39</b>	<b>5.50</b>	<b>5.60</b>	<b>5.69</b>	<b>5.76</b>
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81
	<b>3.76</b>	<b>4.28</b>	<b>4.59</b>	<b>4.82</b>	<b>4.99</b>	<b>5.13</b>	<b>5.25</b>	<b>5.36</b>	<b>5.45</b>	<b>5.53</b>	<b>5.60</b>
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71
	<b>3.70</b>	<b>4.20</b>	<b>4.50</b>	<b>4.71</b>	<b>4.87</b>	<b>5.01</b>	<b>5.12</b>	<b>5.21</b>	<b>5.30</b>	<b>5.37</b>	<b>5.44</b>
$\infty$	2.77	3.31	3.63	3.85	4.03	4.17	4.28	4.39	4.47	4.55	4.62
	<b>3.64</b>	<b>4.12</b>	<b>4.40</b>	<b>4.60</b>	<b>4.76</b>	<b>4.88</b>	<b>4.99</b>	<b>5.08</b>	<b>5.16</b>	<b>5.23</b>	<b>5.29</b>

Table 29 of E. Pearson and H. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 1966. Adapted and reprinted with permission of the Biometrika trustees.

**Örnek:**

Fakülteye alınan 4 farklı markadaki 20 fotokopi makinesinin 1 sene içerisinde çıkardığı arıza sayıları aşağıdaki gibidir. Ortalama servis dışı kalma süreleri arasında fark olduğu söylenebilir mi %5 anlamlılık düzeyinde değerlendiriniz.

	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
<b>1</b>	10	11	16	12
<b>2</b>	10	10	13	10
<b>3</b>	11	10	15	14
<b>4</b>	12	9	16	13
<b>5</b>	12	10	15	11
<b>T<sub>i</sub></b>	<b>55</b>	<b>50</b>	<b>75</b>	<b>60</b>

$$\bar{X}_I = \frac{55}{5} = 11 \quad \bar{X}_{II} = \frac{50}{5} = 10 \quad \bar{X}_{III} = \frac{75}{5} = 15 \quad \bar{X}_{IV} = \frac{60}{5} = 12$$

$$G_{IKT} = (10-11)^2 + (10-11)^2 + \dots + (13-12)^2 + (11-12)^2 = 22$$

$$\text{Genel ortalama} = (55+50+75+60)/20 = 12$$

$$G_{AKT} = 5(11-12)^2 + 5(10-12)^2 + 5(15-12)^2 + 5(12-12)^2 = 70$$

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	Test İstatistiği
işlem (GAKT)	70	$v_1=4-1$	$s_1^2 = \frac{70}{3} = 23.333$	
Hata (GİKT)	22	$v_2= 20-4$	$s_2^2 = \frac{22}{16} = 1.375$	
Toplam (GKT)	92	20-1		$F = \frac{23.333}{1.375} = 16.97$

Tablo değerine bakılırsa  $\alpha = 0.05$  ,  $v_1=3$ ,  $v_2=16$  serbestlik derecesi ile  $F=3.24$

Test istatistiği  $F = 16.97 > F_{\text{tab}} = 3.24$

$H_0$  hipotezini reddedilir, en az iki grup ortalamasının birbirinden farklı olduğuna karar verilir.

### ÖRNEK

X	Z	W	Q
32	36	42	16
35	30	28	18
38	30	23	22
26	20	15	14
46	24	26	20

Yukarıda verilen dört birimin ortalamaları arasında fark var mıdır %5 anlamlılık düzeyinde değerlendiriniz.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$H_1 : En \text{ az biri farklıdır}$

$$X_{ort} = 541 / 20 = 27.05$$

$$X_{1ort} = 35.4$$

$$X_{2ort} = 28$$

$$X_{3ort} = 26.8$$

$$X_{4ort} = 18$$

$$GAKO = [5(18 - 27.05)^2 + \dots + 5(26.8 - 27.05)^2] / 3 = 254.31$$

$$GIKO = ((32 - 35.4)^2 + \dots + (20 - 18)^2) / (20 - 4) = 49.875$$

$$F = 254.31 / 49.875 = 5$$

$$F_{(3,16),0.05} = 3.24$$

Söz konusu ortalamalar farklıdır.

**Örnek:** Bir işletmenin 4 atölyesinde üretilen aynı ürünün ortalama ağırlıkları arasında 0.05 önem düzeyinde anlamlı bir farklılık var mıdır?

A	B	C	D
61	81	65	92
90	72	80	79
78	75	60	97
84	73	69	84
67	69		93
	80		

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$H_1 : En \text{ az iki anakütle ortalaması birbirine eşit değildir}$

$$\bar{Y}_A = 76 \quad \bar{Y}_B = 75 \quad \bar{Y}_C = 68.5 \quad \bar{Y}_D = 89$$

$$\bar{Y} = 77.5$$

$$GAKT_{ort} = (5(76 - 77.5)^2 + 6(75 - 77.5)^2 + 4(68.5 - 77.5)^2 + 5(89 - 77.5)^2) / 3 = 344.65$$

$$GIKT_{ort} = ((61 - 76)^2 + \dots + (93 - 89)^2) / 16 = 69.44$$

$$F = 4.96$$



F kritik değeri 3.24 olduğundan H0 reddedilir.

**Örnek:** Bir ürün A, B ve C atölyelerinde üretilmektedir. Bu üç atölyede üretilen ürünlerinin ortalama ağırlıkları arasında anlamlı bir fark olup olmadığını 0.05 önem düzeyinde değerlendiriniz.

A	B	C
8	7	6
10	6	8
9	8	9
13		5
		7

$$\bar{Y}_A = 10 \quad \bar{Y}_B = 7 \quad \bar{Y}_C = 7$$

$$\bar{Y} = \frac{40 + 21 + 35}{12} = 8$$

$$GAKT = 4(10 - 8)^2 + 3(7 - 8)^2 + 5(7 - 8)^2 = 24$$

$$GIKT = (8 - 10)^2 + \dots + (7 - 7)^2 = 26$$

$$GAKT_{ort} = \frac{24}{3 - 1} = 12$$

$$GIKT_{ort} = \frac{26}{12 - 3} = 2.89$$

$$F = \frac{12}{2.89} = 4.15$$

F tablo değeri 4.26 olduğundan fark yoktur.

## Bölüm Soruları

1-Üç farklı eğitim düzeyine sahip grubun haftalık gelirlerine ait veri aşağıdaki gibidir. Bu üç grubun ortalama gelirleri arasında fark var mıdır? (alfa=0.05)

Lise Mezunları	Üniversite Mezunları	Yüksek Lisans
300	520	530
320	540	538
400	490	600
410	470	650
500	600	



## BÖLÜM 12 SORULAR

- 1- Birden fazla kitle ortalamasının testi için aşağıdakilerden hangisi kullanılır?  
a) İki örneklem t testi b) Kikare testi c) Korelasyon d) Regresyon e) ANOVA

A) Aşağıdaki soruları tablodan hareketle yanıtlayınız  
3 farklı yabancı dil eğitim tekniğinin uygulandığı bir toplulukta öğrencilerin aldığı notlar aşağıdaki gibidir. A, B ,C teknikleri arasında bir fark olup olmadığı araştırılacaktır.

A	B	C
8	8	8
10	6	7
9	7	6
13	9	
	5	

- 2- Sıfır hipotezi nasıl kurulmalıdır?  
a) Her üç tekniğin ortalama başarıları eşittir  
b) Tekniklerin ortalama başarıları birbirinden farklıdır  
c) En az bir tekniğin ortalama başarıları diğerlerinden farklıdır  
d) A tekniğinin başarıları diğerlerinden daha fazladır  
e) Hiçbiri
- 3-Gruplar arası kareler toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?  
a) 34 b) 28 c) 24 d) 26 e) 16
- 4-Gruplar içi kareler toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?  
a) 34 b) 28 c) 24 d) 26 e) 16
- 5- Gruplar arası kareler ortalaması nedir?  
a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16
- 6- %5 önem düzeyinde F tablosu kritik değeri nedir?  
a) 4.26 b) 5.26 c) 6.18 d) 7.14 e) 9.12
- 7-Gruplar içi kareler ortalaması nedir?  
a) 7.14 b) 6.17 c) 5.87 d) 2.89 e) 1.13
- 8- Hesaplanan F istatistik değeri kaçtır?  
a) 5.17 b) 4.15 c) 3.89 d) 2.79 e) 1.49

9) Aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

I) Sıfır hipotezi reddedilir

II) Sıfır hipotezi reddedilemez

III) Teknikler arasında önemli bir fark yoktur

a) Yalnız I   b) Yalnız II   c) Yalnız III   d) I ve III   e) II ve III

Yanıtlar

1)E   2)A   3)C   4)D   5)A   6)A   7)D   8)B   9)E