Doğrusal olmayan Denklem sistemleri

sistem 1

Bu bölümde iki değişkenli doğrusal olmayan denklem sistemlerinin nümerik çözümleri üzerinde duracağız.

$$(1)\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$ iki değişkenli doğrusal olmayan denklem sistemi

$$(2)\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \\ f_3(x,y,z)=0 \end{cases}$$ üç değişkenli doğrusal olmayan denklem sistemi

verilecek olan yöntemler n değişkenli n tane non-li~~near~~ ~~denklem~~ denklem sistemine uygulanabilir.

işlem kolaylığından kurtulmak için

$$(1')\begin{cases} \underline{f}(\underline{x})=0, & \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \underline{f}(\underline{x})=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

vektor

ile gösterilecek

$$(2')\begin{cases} \underline{f}(\underline{x})=0, & \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \underline{f}(\underline{x})=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Analiz derslerinden de biliyoruz ki $\underline{f}(\underline{x})$ fonksiyonlarının Jakobian Matrisi (Türev Matrisi) iki boyut için

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

üç boyut için

sistem 2

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$ şeklindedir

$\underline{f}(\underline{x})$ fonksiyonunun $\underline{X}_0$ noktasındaki değerleri verilmiş ise, herhangi bir $\underline{X}$ noktasındaki değerler önceden bilinmek isteniyorsa, bağımlı değişkenlerdeki değişim du, dv, dw ve bağımsız değişkenlerdeki değişim $dx\ dy\ dz$ ile verilirse, bu değişim

2D (iki boyutlu) 'da

$$d\underline{f} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J(x,y)\Big|_{\underline{x}_0} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J(x,y)\Big|_{\underline{x}_0} \cdot d\underline{x}$$

3D (3 boyutta)

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = J(x,y,z)\Big|_{\underline{x}_0} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = J(x,y,z)\Big|_{\underline{x}_0} d\underline{x}$$

olur. Açık bir şekilde

$$du = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz$$

$$dv = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz$$

$$dw = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz$$

örnek: $f_1(x,y) = 7x^3 - 10x - y - 1$ sistemindeki
$f_2(x,y) = 8y^3 - 11y + x - 1$

değişim $(1,0)$ dan $(0.2, -0.1)$ noktasına doğru ise (du, dv) değişimini bulunuz.

Çözüm: Sistem 3

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J(x,y)\Big|_{x_0} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J(x,y)\Big|_{x_0} \cdot d\underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{x_0} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21x^2-10 & -1 \\ 1 & 24y^2-11 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-10 & -1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 * (0.2) + (0.1) \\ 0.2 + 11 * (0.1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.3 \end{pmatrix}$$ bulunur.