6 ATAMA PROBLEMİ

İnsan, makine, zaman vb. kaynakların belli bir performans ölçüsünü eniyileyecek şekilde faaliyetler arasında paylaştırılmasına atama problemi denir. Atama problemini şu basit örnek ile açıklayabiliriz. Bir işyerinde 4 işi yapabilecek 4 işçi bulunmaktadır. İşçilerin bu işleri tamamlama süreleri saat olarak aşağıdaki tablo verilmektedir. İşlerin toplam tamamlanma süresinin minimum yapmak için hangi işçi hangi işe atanmalıdır?

	İşler			
İşçiler	1	2	3	4
1	8	9	7	5
2	6	5	10	6
3	7	6	12	3
4	7	12	6	9

İlk olarak bu problemin karar modelini yazalım.

Karar değişkenleri: Problemde işçilerin atanacağı işler belirlenmek istenmektedir. Bu nedenle karar değişkenini bir işçi bir işe atanırsa 1, atanmaz ise 0 değeri alacak şekilde tanımlayabiliriz.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i.\text{ işçi } j.\text{ işe atanır ise} \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Bu tarz mantıksal değişkenler genel olarak 0-1 karar değişkeni olarak isimlendirilmektedir.

Kısıtlar: Atama probleminde her işçi bir işe atanması gerekmektedir. x_{ij} değişkeni 0 veya 1 değeri aldığından bu kısıtları aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

İkinci olarak, her iş bir işçi tarafında yapılmalıdır. Bu kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır.

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

Bu iki grup kısıtlar atama kısıtları olarak isimlendirilmektedir.

Amaç fonksiyonu: Problemde işlerin toplam tamamlanma süreleri minimum olması istenmektedir. Bu amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Enkz = 8x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 5x_{14} + 6x_{21} + 5x_{22} + 10x_{23} + 6x_{24} + 7x_{31} + 6x_{32} + 12x_{33} + 3x_{34} + 6x_{41} + 12x_{42} + 6x_{43} + 9x_{44}$$

Genel olarak, atama probleminin karar modelini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

c_{ij}: i. işçinin j. işe atama maliyeti olmak üzere

$$Enk\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall\ j = 1,2,\dots,n \tag{6.1}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Atama problemi aslında arz merkezlerinin kapasitesi ve talep merkezlerinin talebi 1 olan ulaştırma problemidir. Ulaştırma probleminde olduğu gibi atama probleminin çözümünde özel yöntemeler kullanılır. Macar algoritması bu yöntemler içinde en çok bilinen yöntemdir.

6.1 Macar Algoritması

Macar algoritması Harold Khun (1955) tarafından geliştirilmiştir. Algoritmayı geliştirirken iki Macar matematikçinin yaptığı çalışmalardan faydalandığı için bu yönteme Macar algoritması ismini vermiştir.

Macar algoritmasının tüm işlemleri **maliyet matrisi** veya **atama matrisi** olarak isimlendirilen aşağıdaki matris üzerinden yapılır.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & \dots & n \\
\hline
1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\
\hline
\end{array}
$$

Problemde maliyet matrisinin her satır ve sütuna toplam maliyeti minimum yapacak şekilde bir atama yapılır. Bunun için Teorem 6.1 gereğince önce her satırdan o satırdaki minimum değeri ve daha sonra her sütunundan sütundaki minimum değeri çıkarılarak atamaların yapılacağı potansiyel hücreler belirlenir.

Teorem 6.1 Maliyet matrisinin herhangi bir satırından veya sütunundan sabit bir sayı çıkarılır ise en iyi çözüm değişmez.

İspat: a_i i. satırdan çıkarılan değer, b_j j. Sütundan çıkarılan değer olsun. Atama problemi için yeni amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Enk\ z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - a_i - b_j)x_{ij}$$

$$Enk\ z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij}$$

Yukarıdaki ifadedeki son iki toplamı aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$Enk\ z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

Parantez içindeki toplamlar 1’e eşit olduğundan amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazarız

$$Enk\ z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

Parantez içindeki toplam sabit olduğundan yukarıdaki eşitlikte ilk terimin minimum olması tüm fonksiyonun minimum olmasını sağlayacaktır. Bu nedenle

$$Enk\ z' \equiv Enk\ z$$

Satır ve sütunlardan minimum değerlerin çıkarılması atama matrisinin her satır ve sütunda en az bir sıfır değeri bulunur. Sıfır değerleri atama yapılabilecek en iyi hücreleri temsil etmektedir. Eğer atama matrisindeki sıfırlar dikkate alınarak n atama yapılabilir ise aynı zamanda en iyi çözüme erişilmiş olur.

Örnek problem için satırlardan minimum değerleri çıkardığımızda aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Bu matrisin her sütunundan yine minimum değerleri çıkarttığımızda aşağıdaki atama matrisi elde ederiz.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Atama matrisindeki sıfırlar yapılacak potansiyel atamaları göstermektedir. Bu atamaları belirlemek için aşağıdaki yöntemi kullanabiliriz.

Adım 1: Satırlardan başlayarak tek sıfır olan bir satırda, sıfırın bulunduğu değeri çerçeve içine al ve karşı gelen sütunu çiz. Satır ve sütunu çıkar. Tüm satırlar için bu işlemi tekrarla.

Adım 2: Kalan sütunlar içinde tek sıfır olan bir sütunda, sıfırın bulunduğu değeri çerçeve içine al ve karşı gelen satırı çiz. Satır ve sütunu çıkar. Tüm sütunlar için bu işlemi tekrarla.

Adım 3: Atama sayısı n ise dur. Satır veya sütunlarda atama yapılacak değerler var ise 1. ve 2. adımları tekrarla. Eğer satır ve sütunlarda 2 veya daha fazla sıfır var ise en üstteki satır ve en soldaki sütunu çerçeve içine al ve karşı gelen satırı çiz. 1. ve 2. adımları tekrarla. Tüm sıfırlar bitti ise dur.

Örneğimizde atama matrisinin birinci satırında tek sıfır olduğundan 1. işçi 4. işe atanır. Bu atama sonucunda dördüncü sütunu çizilir. İkinci satırda iki sıfır olduğundan bu satır atlanır. Üçüncü satırda hiç sıfır bulunmadığından (dördüncü sütun işlemlerden çıkarıldığından bu sütundaki sıfır dikkate alınmaz) atlanır. Dördüncü satırda iki sıfır olduğundan bu satırı atlanır. Adım 2 için birinci sütunda iki sıfır olduğundan bu sütun atlanır. İkinci sütunda bir sıfır olduğundan ikinci işçiyi ikinci işi atayalım ve ikinci satırı çizelim. Üçüncü sütunda bir sıfır olduğundan, dördüncü işçiye üçüncü işi atayalım ve dördüncü satırı çizelim. Tüm sıfırlar çizildiğinden başka bir atama gerçekleştirilemez.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & 0 & \boxed{0} & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & \boxed{0} & 3 \\ \hline \end{array}$$

Toplam 3 atama yapıldığından uygun bir çözüm değildir. Üçüncü işçiye ve birinci işe bir atama yapılmamıştır. Üçüncü işçinin birinci işe atanması en iyi çözümü maalesef garanti etmemektedir. Bu nedenle tüm atamaların yeniden değerlendirilmesi gereklidir.

Atama matrisindeki çizgiler aynı zamanda atama sayısını göstermektedir. Dördüncü sütundaki düşey çizgi dördüncü işe atama yapıldığını, ikinci ve dördüncü satırdaki yatay çizgiler ise ikinci ve dördüncü işçilere atama yapıldığını temsil etmektedir. Aynı zamanda, bu çizgilerin atama matrisindeki tüm sıfırların üzerinden geçtiğine dikkat ediniz. Yani, sıfırlar ve çizgiler arasında bir ilişki bulunmaktadır: Atama matrisindeki tüm sıfırlar en az sayıda çizgi ile kapatıldığında çizgi sayısı aynı zamanda yapılacak maksimum atama sayısına eşittir. Küçük problemlerde bu ilişkiyi kullanarak çizgiler yukarıdaki açıklanan yönteme alternatif olarak daha basit olarak oluşturulabilir.

Eğer atama matrisindeki çizgi sayısı atama sayısından daha az ise üzerinden çizgi geçmeyen değerler potansiyel atamaların yerlerini göstermektedir. Bu nedenle, açıkta kalan minimum değere atama yapılmalıdır. Algoritmanın gereği olarak açıkta kalan değerlerden minimum değer çıkararak matriste atama yerlerini göster yeni sıfır değerleri elde edilir. Örneğimizde açıkta kalan hücrelerden minimum değer olan 2’yi tüm değerlerden çıkardığımızda aşağıdaki atama matrisini elde ederiz.

	1	2	3	4
1	0	2	0	$\boxed{-2}$
2	-2	$\boxed{-2}$	3	-1
3	1	1	7	-2
4	-2	4	$\boxed{-2}$	1

Fakat bu işlem sonucunda önceden sıfır olan değerler negatif olur. Daha önce sıfır olan değerleri tekrar sıfır yapmak için uygun satır ve sütunlara çıkarılan değer yeniden ilave edebiliriz. Örnekte 4. sütuna ve 2. ve 4. satıra değerlere 2 ilave edelim. Bu işlemler sonucunda aşağıdaki matris elde edilir.

	1	2	3	4
1	0	2	0	$\boxed{0}$
2	0	$\boxed{0}$	5	3
3	1	1	7	0
4	0	6	$\boxed{0}$	5

Teorem 6.1 gereğince bu yeni atama matrisi başlangıçtaki maliyet matrisine özdeştir. Yukarıda açıklanan işlemleri daha kısa olarak aşağıdaki gibi yapabiliriz.

1. Açıkta kalan elemanlar içinden minimum değeri çıkar
2. Üzerinden tek çizgi geçen hücreleri aynen bırak,
3. Üzerinden çift çizgi geçen hücreleri minimum değer kadar arttır.

Şimdi bu yeni atama matrisi üzerinde sıfırları dikkate alarak atama yapmaya çalışalım. Birinci satırda 3 sıfır olduğundan bu satırı atlayalım. İkinci satırda 2 sıfır olduğundan bu satırı atlayalım. 3. satırda 1 sıfır olduğundan 3. işçiyi 4. işe atayalım ve 4. sütunu çizelim. Satırlar bittiğinden sütun bazında atamalar araştırılır. 1. sütunda 3 sıfır olduğundan birinci sütunu atlayalım. 2. sütunda 1 sıfır olduğundan 2. işe 2. işçiyi atayalım ve ikinci satırı çizelim. 3. sütunda 2 sıfır kaldığından bu sütunu atlayalım. Matriste atama yapılmayan sıfırlar olduğundan atama işlemine aynı şekilde devam edilir. 1 ve 4. satırda 2 sıfır ve 1. ve 3. sütunda 2 sıfır olduğundan bu durumda 1. işçiyi 1. İşe atayarak 1. sütunu, 4. işçiye 3. işi atayarak 3. sütunu çizebiliriz. Atama sayısı 4 olduğundan en iyi çözüme erişilmiştir.

	1	2	3	4
1	$\boxed{0}$	2	0	0
2	0	$\boxed{0}$	5	3
3	1	1	7	$\boxed{0}$
4	0	6	$\boxed{0}$	5

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda Macar algoritmasının adımları aşağıdaki özetleyebiliriz.

Adım 1: Maliyet matrisinin her satırı için minimum değeri bul ve satırdaki tüm değerlerden çıkar.

Adım 2: Yeni matriste her sütundaki minimum değeri bul ve sütundaki tüm değerlerden çıkar.

Adım 3: Atama matrisinde atamaları yaparak çizgileri çiz. Eğer çizgi sayısı atama sayısına eşit ise dur. Değilse 4. adıma git.

Adım 4: Açıkta kalan elemanlar içinden minimum değeri bul. Açıkta kalan tüm elemanlardan bu değeri çıkar ve üzerinden çift çizgi geçen elemanlara bu değeri ekle. Diğer elemanları aynen bırak ve 3. adıma git.

Örnek 6.2 Bir inşaat firması 5 inşaat projesi için 5 alternatif yer tespit etmiştir. Projelerin yapılacağı yerlere göre maliyetleri (milyon TL) aşağıdaki tabloda verilmektedir. Toplam maliyeti minimum yapmak için hangi proje nereye yapılmalıdır?

	Yerler				
Projeler	1	2	3	4	5
1	10	5	12	9	15
2	8	6	13	10	10
3	11	7	10	5	7
4	10	15	14	13	15
5	13	9	8	11	15

Çözüm: Satırlardan ve sütunlardan minimum değerler çıkarıldığında aşağıdaki atama matris elde edilir. Uygun atamalar yapıldığında atama matrisindeki çizgiler aşağıdaki gibi belirlenir. Çizgi sayısı 4 olduğu için en iyi çözüm bulunmamıştır.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 5 & \boxed{0} & 7 & 4 & 8 \\
2 & 2 & 0 & 7 & 4 & 2 \\
3 & 6 & 2 & 5 & \boxed{0} & 0 \\
4 & \boxed{0} & 5 & 4 & 3 & 3 \\
5 & 5 & 1 & \boxed{0} & 3 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

Atama matrisinde açıkta kalan en küçük değer 2 olan iki için aşağıdaki yeni atama matrisi elde edilir. Bu yeni atama matrisi için atamalar ve çizgiler aşağıdaki gibi bulunur. Çizgi sayısı 5 olduğundan en iyi çözüme ulaşılmıştır. Bu çözüme göre toplam maliyet 5+10+5+10+8=38 milyon TL olarak bulunur.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 5 & \boxed{0} & 7 & 2 & 6 \\
2 & 2 & 0 & 7 & 2 & \boxed{0} \\
3 & 8 & 4 & 7 & \boxed{0} & 0 \\
4 & \boxed{0} & 5 & 4 & 1 & 1 \\
5 & 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

6.2 Amaç Fonksiyonu Maksimum olan Atama Probleminin Çözümü

Atama probleminde amaç fonksiyonu örneğin toplam karı maksimum yapacak şekilde atama belirlemek olduğunu varsayalım. Bu problemin çözümünde iki farklı yaklaşım kullanılabilir. Birincisi işlemleri maksimizasyon problemine göre uyarlamak veya ikincisi, kar matrisini maliyet matrisine dönüştürerek problemi minimizasyon problemine dönüştürmek. Klasik olarak genellikle ikinci yöntem kullanılır. Kâr matrisini maliyet matrisine dönüştürmek için aşağıdaki iki yöntemden birisi kullanılabilir.

- $Enb\ z = Enk\ (-z)$ ilişkisi kullanılarak atama matrisindeki tüm değerler (-1) ile çarparak maliyet matrisine dönüştür.

- Her satırdaki en büyük değerden o satırdaki değerleri çıkararak maliyet matrisine dönüştür.

Problemi minimizasyon problemine dönüştürmek için genellikle ikinci yöntem kullanılır. Atama matrisi maliyet matrisine dönüştürüldükten sonra Macar algoritmasının adımları uygulanır.

Örnek 6.2 Bir işletmenin insan kaynakları bölümü açık olan beş pozisyon için yapılan mülakatlarda en yüksek puanı alan beş adayı atamak istemektedir. Adayların her bir pozisyon için almış olduğu mülakat puanları aşağıdaki tabloda verilmektedir. Toplam puanı maksimum yapacak şekilde adaylar hangi bölümlerde işe alınmalıdır?

	Bölümler				
Adaylar	Pazarlama	Satın alma	Muhasebe	Kalite Kontrol	Planlama
A1	7	8	7	6	6
A2	7	8	7	6	5
A3	9	9	8	7	7
A4	6	7	6	6	7
A5	10	6	8	8	9

Çözüm: Problemde amaç toplam puanı maksimum yapan atamayı belirlemek olduğundan önce atama matrisini dönüştürelim. Bunun için puan matrisindeki satırlardaki en büyük değerden diğerlerini çıkaralım.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & P & S & M & K & PL \\
\hline
A1 & 7 & 8 & 7 & 6 & 6 \\
A2 & 7 & 8 & 7 & 6 & 5 \\
A3 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 \\
A4 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 \\
A5 & 10 & 6 & 8 & 8 & 9 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|ccccc|}
 & P & S & M & K & PL \\
\hline
A1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
A2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
A3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
A4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
A5 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Dönüştürülmüş matris üzerinde Macar algoritmasının adımları uygulanır ise aşağıdaki atama matrisi elde edilir. Bu matriste sıfırlar dikkate alınarak en fazla 4 atama yapılabilmektedir ve karşı gelen çizgiler matris üzerinde gösterilmektedir.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & P & S & M & K & PL \\
\hline
A1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 2 \\
A2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 & 3 \\
A3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
A4 & 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\
A5 & \boxed{0} & 4 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Açıkta kalan en küçük değer için algoritmanın adımları uygulanır ise aşağıdaki matris elde edilir. Bu matriste sıfırlar dikkate alınarak 5 atama yapılabildiğinden algoritma sonlandırılır. En iyi çözümde toplam puan 39 olarak bulunmuştur. Ayrıca problemde çok sayıda alternatif söz konusudur.

	P	S	M	K	PL
A1	1	0	0	0	1
A2	1	0	0	0	2
A3	0	0	0	0	1
A4	2	1	1	0	0
A5	0	4	1	0	0

6.3 Atama Problemlerinde Özel Durumlar

Uygulamada atama problemlerinde özel durumlar ile karşılaşılabilir. Birincisi, bazı atamaların yapılması uygun olmayabilir. Örneğin bir işçi bir işi yapacak yetkinliğe sahip değil ise bu atama engellenmelidir. Bunun için modele yeni kısıtlar eklenerek bu atamalara karşı gelen karar değişkenleri sıfır olarak atanabilir. Modele yeni kısıtlar eklemek yerine amaç fonksiyonundan faydalanarak bu atamalar engellenebilir. Ulaştırma probleminde olduğu gibi, uygun olmayan atamalara karşı gelen maliyetlere M gibi çok büyük bir değer verilerek bu atamaların yapılması engellenebilir. İkinci yöntemde yeni kısıt eklemeye gerek olmadığından daha çok tercih edilmektedir. İkinci özel durum olarak bazı problemlerde atama problemi dengeli olmayabilir. Örneğin işçi sayısı iş sayısından küçük veya büyük olabilir. Bu durumda problemin çözülebilmesi için hayali işçi veya iş yaratılarak eşitlik sağlanabilir. Hayali işçilere veya işlere atama yapılamayacağından bu atamalara karşı gelen maliyetler özel durumlar hariç sıfır olarak tanımlanır. Örneğin bir işçinin mutlaka bir işe atanması veya bir işin mutlaka yapılması gibi özel durumlar için hayali iş ve işçilerin maliyetleri M olarak tanımlanabilir.

Bu iki özel durumu aşağıdaki örnek üzerinde ele alalım.

Örnek 6.3 [1]Bir yüzme antrenörü, erkekler karışık 100 m yarışındaki yüzücüleri belirlemek istemektedir. Yüzücülerin farklı stillerdeki ortalama süreleri aşağıdaki tabloda verilmektedir. *A* yüzücüsünün kurbağalama, *B* ve *D* yüzücülerinin ise serbest stilde yüzmeleri istenmemektedir. Bu bilgilere göre, yüzme takımına hangi oyuncuların yer almalı ve bu yüzücüler hangi stilde yüzmelidir?

Yüzücüler	Serbest	Sırtüstü	Kelebek	Kurbağalama
A	55	61	56	- -
B	- -	60	54	64
C	52	63	54	66
D	- -	61	54	65
E	52	61	58	65
F	53	68	57	66

Çözüm: Yüzücü sayısı 6 stil sayısı 4 olduğundan iki hayali yüzme stili oluşturulur. Bu stillere karşı gelen süreler sıfır olarak belirlenir. *A* yüzücüsü kurbağalama, *B* ve *D* yüzücüleri ise serbest stilde yüzmeleri istenmediğinden, bu stillerdeki süreleri *M* olarak

[1] Winston (1991)'den uyarlanmıştır

verilir. Bu düzenlemelerden sonra aşağıdaki atama matrisi elde edilir.

	Ser	Sır	Kel	Kur	H_1	H_2
A	55	61	56	M	0	0
B	M	60	54	64	0	0
C	52	63	54	66	0	0
D	M	61	54	65	0	0
E	52	61	58	65	0	0
F	53	68	57	66	0	0

Satırlardan ve sütunlardan en küçük değerler çıkarılır ise aşağıdaki atama matrisi elde edilir. Sıfır değerleri dikkate alınarak atamalar yapıldığında 5 atama ve aşağıdaki çizgiler elde edilir.

	Ser	Sır	Kel	Kur	H_1	H_2
A	3	1	2	M	$\boxed{0}$	0
B	M	$\boxed{0}$	0	0	0	0
C	$\boxed{0}$	3	0	2	0	0
D	M	1	$\boxed{0}$	1	0	0
E	0	1	4	1	0	$\boxed{0}$
F	1	8	3	2	0	0

Macar algoritmasının diğer adımları uygulandığında aşağıdaki atama matrisi elde edilir. Bu matriste sıfırlar dikkate alınarak 6 atama yapıldığından en iyi çözüme erişilmiştir. Bu çözüme göre A, B, C, D yüzücüleri takımda yer almalı ve sırasıyla sırtüstü, kurbağalama, serbest, kelebek sitili yüzmelidir. Yarışmada beklenen ortalama minimum süre 231 sn'dir.

	Ser	Sır	Kel	Kur	H_1	H_2
A	3	$\boxed{0}$	2	M	0	0
B	M	0	1	$\boxed{0}$	1	1
C	$\boxed{0}$	2	0	1	0	0
D	M	0	$\boxed{0}$	0	0	0
E	0	0	4	0	$\boxed{0}$	0
F	1	7	3	1	0	$\boxed{0}$

Bu problemde ayrıca alternatif çözümlerde söz konusudur. Örneğin A, B, C, D yüzücüleri sırasıyla sırtüstü, kurbağalama, serbest, kelebek tarzında yarışmaya katıldığında yine minimum ortalama süre 231 saniye olacaktır.