

① Aşağıdakilerden hangisi $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi DEĞİLDİR?

A) $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$

B) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots$

C) $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$

D) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots$

② $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x=1$ deki Taylor açılımında x^3 terimin başındaki katsayı nedir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

Çözüm:

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$

$f(x) = 0 + 1(x-1) + (-1)\frac{(x-1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$

$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots$

③ $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x=1$ deki Taylor açılımındaki 4. terimin yarıdır.

A) $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$

8) $X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{3}{X_n} \right)$ iterasyon hangisinin hesaplar?

A) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{5}$

D) 3

9) $(n+1)$ data olan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları kaçinci dereceden polinom üretir?

A) n - dereceden!

B) n - dereceden veya n - dereceden A2!

C) $(n+1)$ - dereceden

D) $(n+1)$ - dereceden veya daha fazla

10) $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, y_2 = f(x_2))$ noktalarını geçen Lagrange interpolasyon polinomu?

A) $p(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)}{x_2-x_1} f(x_2)$

B) $p(x) = \frac{(x_1-x_2)}{(x-x_2)} f(x_1) + \frac{(x_2-x_1)}{x-x_1} f(x_2)$

C) $p(x) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} x + \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{x_1-x_2}$

D) $p(x) = \frac{x}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x}{x_2-x_1} f(x_2)$

4) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$. $a=0$ daki açılımı

hangisi Serlesiyunadır?

A) e^x

B) $\sin x$

C) $\cos x$

D) $\ln(x+1)$

5) n .ci dereceden polinomun kaç tane köşüğü vardır?

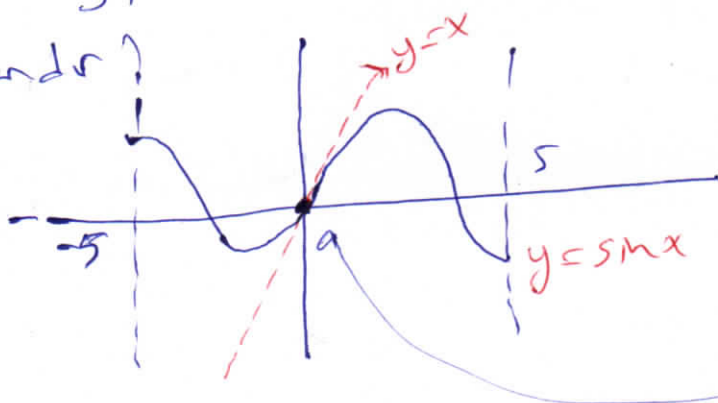
A) $n+1$

B) $n+2$

C) n

D) $n-1$

6) $\sin x - x = 0$ denkleminin kaç tane köşüğü (reel) vardır?



$y = \sin x$

$y = x$

$y = y$

$x = \sin x$

$0 = 0$

$x = 0$

1

7) $x_{n+1} = g(x_n)$ sabit noktası iterasiyonu için $f(x) = 0$ nedir?

$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x}$ ise

A) $x^2 - 2 = 0$

B) $\frac{x}{3} + \frac{4}{3x} = 0$

C) $\frac{1}{3} - \frac{4}{3x} = 0$

D) $x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3x} = 0$

$x = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x}$

$x = \frac{x^2 + 4}{3x}$

$3x^2 = x^2 + 4$

$2x^2 - 4 = 0$

$f(x) = x^2 - 2 = 0$

- 11) Bir ülkede her 5 yıllık nüfus verisi, 2000 - 2015 aralığında

Yıl	2000	2005	2010	2015
Nüfus (milyon)	30.69	32.24	34.01	35.83

$$p(x) = L_0(x) 30.69 + L_1(x) 32.24 + L_2(x) 34.01 + L_3(x) 35.83$$

ise $L_0(x) = ?$

A)
$$\frac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(2005-2000)(2005-2010)(2005-2015)}$$

B)
$$\frac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(2000-2005)(2000-2010)(2000-2015)} = \frac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(-5)(-10)(-15)} = \frac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{-750}$$

B)
$$\frac{(x-2000)(x-2010)(x-2015)}{-50}$$

C)
$$\frac{(x-2000)(x-2010)(x-2015)}{-150}$$

12)

x	y	
1	1	
3	9	a
4	16	b

c

Batınmaz denklemler sistemi
a, b, c nedir?

A) $a = 4$ $b = 2$ $c = 1$ ✓

B) $a = 8$ $b = 2$ $c = 3$

C) $a = 8$ $b = 4$ $c = 3$

D) $a = 7$ $b = 4$ $c = 3$

$$a = \frac{9-1}{3-1} = 4, \quad b = \frac{16-9}{4-3} = 7, \quad c = \frac{7-4}{4-1} = 1$$

(13)

$$P_2(x) = a_1 + a_2(x-1)$$

X	y		
1	1	→ 4	→ 1
3	9	→ 7	→ 0
4	16	→ 1	
5	25	→ 9	

$$P(x) = 1 + 4(x-1) + 1(x-1)(x-3) + 0 \cdot (x-1)(x-3)(x-4)$$

(14) $y = \alpha e^{\beta x}$ için $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ noktaları
en uygun kareler ile

- $\ln y = \ln \alpha + \beta x$

- $\alpha = e^{a_0}, \beta = a_1$ ve $y = e^{a_0} e^{a_1 x}$

$(x_0, \ln y_0), (x_1, \ln y_1), \dots, (x_m, \ln y_m)$ noktaları
en uygun kareler ile $a_0 = \ln(\alpha), \beta = a_1$ katsayıları
alınır.

(15) $y = \alpha x^\beta$, $(x_0, y_0), \dots, (x_m, y_m)$ noktaları
en uygun kareler için

- $\ln y = \ln \alpha + \beta \ln(x)$

- $a_0 = \ln(\alpha), a_1 = \beta, \{(\ln x_0, \ln y_0), \dots, (\ln x_m, \ln y_m)\}$

- $\alpha = e^{a_0}, \beta = a_1$ ve $y = e^{a_0} x^{a_1}$

Newton Turev

①. fonksiyonun tanımlanmış olduğu aralıkta her yerde türetilebilir mi?

A) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

B) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$

C) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

D) Yukarıdakilerin hepsi

② $x_i - x_{i-1} = h$ için $f'(x_i) = ?$

A) $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$

B) $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$

C) $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$

D) hepsi

③ Analiz Temel Teoremi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x) \quad \checkmark$$

④ $\int_a^b f(x) dx$ in anlamı:

$x=a$ ve $x=b$ aralarında $y=f(x)$ fonksiyonunun altında kalan ALAN.

örnek $I = \int_{0.5}^{3.5} x \cdot \sqrt{(16-x^2)^3} dx$ integralini $\Delta x = h = 0.5$

için Yarıklar ile yaklaşık hesaplayalım.

çözüm: $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.5 = \frac{3.5-0.5}{n} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{n} \Rightarrow n=6$

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.5	31.25
2	1.0	58.09
3	1.5	76.48
4	2.0	83.18
5	2.5	76.11
6	3.0	55.56
7	3.5	25.42

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right]$$

veya

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]$$

$$I = \frac{0.5}{2} [31.25 + 2 \times (58.09) + \dots + 2 \times (55.56) + 25.42]$$

$$\approx 188.88 \quad \checkmark$$

$I = \int_{0.5}^{3.5} x \cdot \sqrt{(16-x^2)^3} dx$ integralini $n=6$ için Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle hesaplayalım.

çözüm: $h = \frac{3.5-0.5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

n	1	2	3	4	5	6	7
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
f(x)	31.25	58.09	76.48	83.18	76.11	55.56	25.42

$$I = \int_{0.5}^{3.5} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$= \frac{0.5}{3} [31.25 + 4 \times 58.09 + 2 \times 76.48 + \dots + 4 \times 55.56 + 25.42]$$

$$= 191.504$$

Örnek : $I = \int_{0.5}^{3.5} x \cdot \sqrt{(16-x^2)^3} dx$ için

$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$ dönüşümü ile

$x = \frac{1}{2}(3)t + \frac{1}{2}(4) = 1.5t + 2$

$dx = 1.5 dt \Rightarrow$

$I = \int_{0.5}^{3.5} x \sqrt{(16-x^2)^3} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3t}{2} + 2\right) \sqrt{\left(16 - \left(\frac{3t}{2} + 2\right)^2\right)^3} \frac{3}{2} dt$

$I = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1.5t + 2) \sqrt{16 - (1.5t + 2)^2}^3 dt$

$I = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1.5t + 2) \sqrt{(12 - 6t - 2.25t^2)^3} dt$

x	y	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	2	$\rightarrow 5 = \frac{7-2}{1-0} = 5$	$\rightarrow \frac{4-5}{2-0} = -\frac{1}{2}$	
1	7	$\rightarrow -4 = \frac{3-7}{2-1} = -4$	$\rightarrow \frac{3+4}{5-1} = \frac{7}{4}$	
2	3	$\rightarrow \frac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3}$		
5	1			

① $f(x) = x^4 - 3x + 1$ fonksiyon için $x_0 = 0$ için Newton-Raphson ile $x_1 = ?$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 3 D) -3 E) 0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(x_0^4 - 3x_0 + 1)}{(4x_0^3 - 3)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{(0 - 0 + 1)}{(0 - 3)} = \frac{1}{3}$$

② $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ denklemin kökleri için Newton-Raphson ile $x_0 = 2$ için $x_1 = ?$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^3 - x_0^2 + 4x_0 - 4)}{(3x_0^2 - 2x_0 + 4)} = 2 - \frac{8}{12}$$

③ $-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$
 $6x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -7$
 $3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

④ $\int_{0.5}^{3.5} x \sqrt{(16 - x^2)^3} dx$

Geçerlik = 191.45

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$d.o = \frac{3.5 - 0.5}{n}$$

$$n = 3$$

$$x = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$$

$$= h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right] = \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3]$$

$$= \frac{1}{2} [31.25 + 2(76.48) + 2(76.11) + 75.4] = 180.92$$

Örnek $f(x) = -x^3 - \cos x = 0$ $\pi \cup n$

$x_0 = -1$ $1 \leq n$ $x_2 = ?$

$$f(x) = -x^3 - \cos x$$

$$f'(x) = -3x^2 + \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(-x_n^3 - \cos x_n)}{-3x_n^2 + \sin x_n}$$

$n=0 \Rightarrow$

$$x_1 = x_0 - \frac{(-x_0^3 - \cos x_0)}{-3x_0^2 + \sin x_0} = -1 - \frac{1 - \cos(1)}{-3 + \sin(1)}$$

$$x_1 = -0.787032$$

$n=1 \Rightarrow$

$$x_2 = x_1 - \frac{(-x_1^3 - \cos x_1)}{-3x_1^2 + \sin x_1} = \underline{\underline{-0.574064}}$$

I) $P(x) = c$ Sabit fonksiyon

II) $P(x) = ax + b$ Doğrusal (lineer) fonksiyon

III) $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuadratik fonksiyon

(5) Hengisi: dikdörtgenlerin genel sonuç kurur.

(I)

(6) Hengisi: yamukların genel sonuç kurur.

(II)

(7) Hengisi: Simpson $\frac{1}{3}$ yantem için Tam sonuç kurur?

(III)

(8)	t	2	5	7	9	12
$\sqrt{}$		12	16	24	15	33

$\int_{t=2}^{12} \sqrt{t} dt$ integralin yamuk yantem (Le Sonuç!)

$$h = \frac{12-2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$= h \left[\frac{\sqrt{0}}{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{4}}{2} \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{12}{2} + 16 + 24 + 15 + \frac{33}{2} \right]$$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1.1	1	1.1
2	1.8	4	3.6
3	3.3	9	9.9
4	4.6	16	18.4

$$n = 4$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 10,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 30, \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 10.8$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 33$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x, \quad \sum_{i=1}^4 (p(x_i) - y_i)^2$$

Örnekler

1) $f(x) = x^2 - 7$ ifadesinin bir kökünü $x_0 = 3$ başlangıç değeri için Newton-Raphson yöntemiyle 4 ondalıklı olarak hesaplayınız.

2) $x^2 - \sin x - 1 = 0$ denkleminin bir reel kökünü $x_0 = 1.5$ başlangıç değeri için sabit nokta iterasyonu yöntemiyle 4 ondalıklı (4 d.p) bulunuz.

3) $\int_0^{0.8} e^{x^2} dx$ integralini $n=3$ için

- a) Sağdan dikdörtgenler
- b) Soldan dikdörtgenler
- c) Ortanoktalar
- d) Yarımlar
- e) Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle

yaklaşık olarak hesaplayınız.

4) $\int_{0.2}^{1.5} e^{x^2} dx$ int. için

n	Simp $\frac{1}{3}$
2	→ 0.65181
4	→ 0.65860
6	→ 0.65878
8	→ 0.65881
10	→ 0.65882

n	Simp $\frac{3}{8}$
3	→ 0.65593
6	→ 0.65872
9	→ 0.65881
12	→ 0.65882

örnek

$$y(x) = 2 \int_0^1 e^{\left(\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)} dt \text{ ifadesini } x=1 \text{ için}$$

a) $n=10$ için Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle yaklaşık hesaplama

çözüm simp $\frac{1}{3}$ yöntemi

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + (f_{n-1} + f_n)]$$

$$n=10$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$t_j = t_0 + j \cdot h$$

$$y(1) = 2 \int_0^1 e^{\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)} dt$$

$$y(1) = 2 \int_0^1 e^{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}} dt = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10}]$$

$$y(1) = 1.4496$$

örnekler $\int_1^5 \frac{\ln x}{x^4} dx$ için

a) integralde $x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$, $\Rightarrow dx = \frac{(b-a)}{2} dt$

yöntemle $\int_{-1}^1 f(t) dt$ ifadesine çeviriniz

$$x = \frac{(5-1)t + (5+1)}{2} = 2t+3 \Rightarrow dx = 2dt$$

$$\int_1^5 \frac{\ln x}{x^4} dx = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2t+3)}{(2t+3)^4} (2 \cdot dt)$$

$$f(t) = \frac{2 \ln(2t+3)}{(2t+3)^4}$$

$$b) \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

ifadesini hesaplayınız.

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(2t+3)}{(2t+3)^4} dt \approx \frac{5}{9} \times 0.1680 + \frac{8}{9} \times 0.0271 + \frac{5}{9} \times 0.0071$$

$$= \underline{\underline{0.1214}}$$

örnek: $y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt\right)$ ifadesinde

$x=2$ için ve $n=10$ için

cosm: $y(2) = \tan\left[\frac{\pi}{4} + \int_1^2 \frac{\sin t}{t} dt\right]$

$a=1$

$b=2$

$n=10$

$h = \frac{b-a}{10} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$

$I = \int_1^2 \frac{\sin t}{t} dt \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_9 + f_{10}]$

≈ 0.6593

$y(2) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.6593\right) = \underline{\underline{7.8883}}$