

Sayısal Sistemler-H1CD2

Giriş

Dr. Meriç Çetin
versiyon10920

Bu derste öğreneceklerimiz

1	Digital Systems and Binary Numbers	1
1.1	Digital Systems	1
1.2	Binary Numbers	3
1.3	Number-Base Conversions	6
1.4	Octal and Hexadecimal Numbers	8
1.5	Complements of Numbers	10
1.6	Signed Binary Numbers	14
1.7	Binary Codes	18
1.8	Binary Storage and Registers	27
1.9	Binary Logic	30

1.1 Sayısal Sistemler

Sayısal Sistemler

- Dijital sistemler, günlük yaşamda o kadar önemli bir role sahiptir ki, günümüz teknolojik dönemine «Dijital çağ» diyoruz.
- Dijital sistemler iletişim, ticari işlemler, trafik kontrolü, uzay aracı rehberliği, tıbbi tedavi, hava durumu izleme, İnternet ve diğer birçok ticari, endüstriyel ve bilimsel kuruluştaki kullanılmaktadır.
- Dijital telefonlarımız, dijital televizyonlarımız, dijital çok yönlü disklerimiz, dijital kameralarımız, el cihazlarımız ve tabii ki dijital bilgisayarlarımız var. Taşınabilir medya oynatıcımıza ve yüksek çözünürlüklü ekranlara sahip diğer elde taşınır cihazlarımıza indirilen müziğin keyfini çıkarıyoruz.

Sayısal Sistemler-devam

- Dijital cihazların, kullanıcıya basit görünen, ancak aslında bir dizi karmaşık dahili talimatın tam olarak yürütülmesini içeren komutları yürütmelerini sağlayan **grafik kullanıcı arabirimleri** (GUI'ler) vardır.
- Bu aygıtların tümünde olmasa da çoğunun içinde gömülü özel amaçlı bir sayısal bilgisayar vardır.
- Dijital bilgisayarın en çarpıcı özelliği genelliğidir.
- Verilen veriler üzerinde çalışan program adı verilen bir dizi talimatı izleyebilir.
- Kullanıcı, programı veya verileri özel ihtiyaca göre belirleyebilir ve değiştirebilir.
- Bu esneklik nedeniyle, genel amaçlı dijital bilgisayarlar, geniş bir uygulama yelpazesine yayılan çeşitli bilgi işleme görevlerini gerçekleştirebilir.

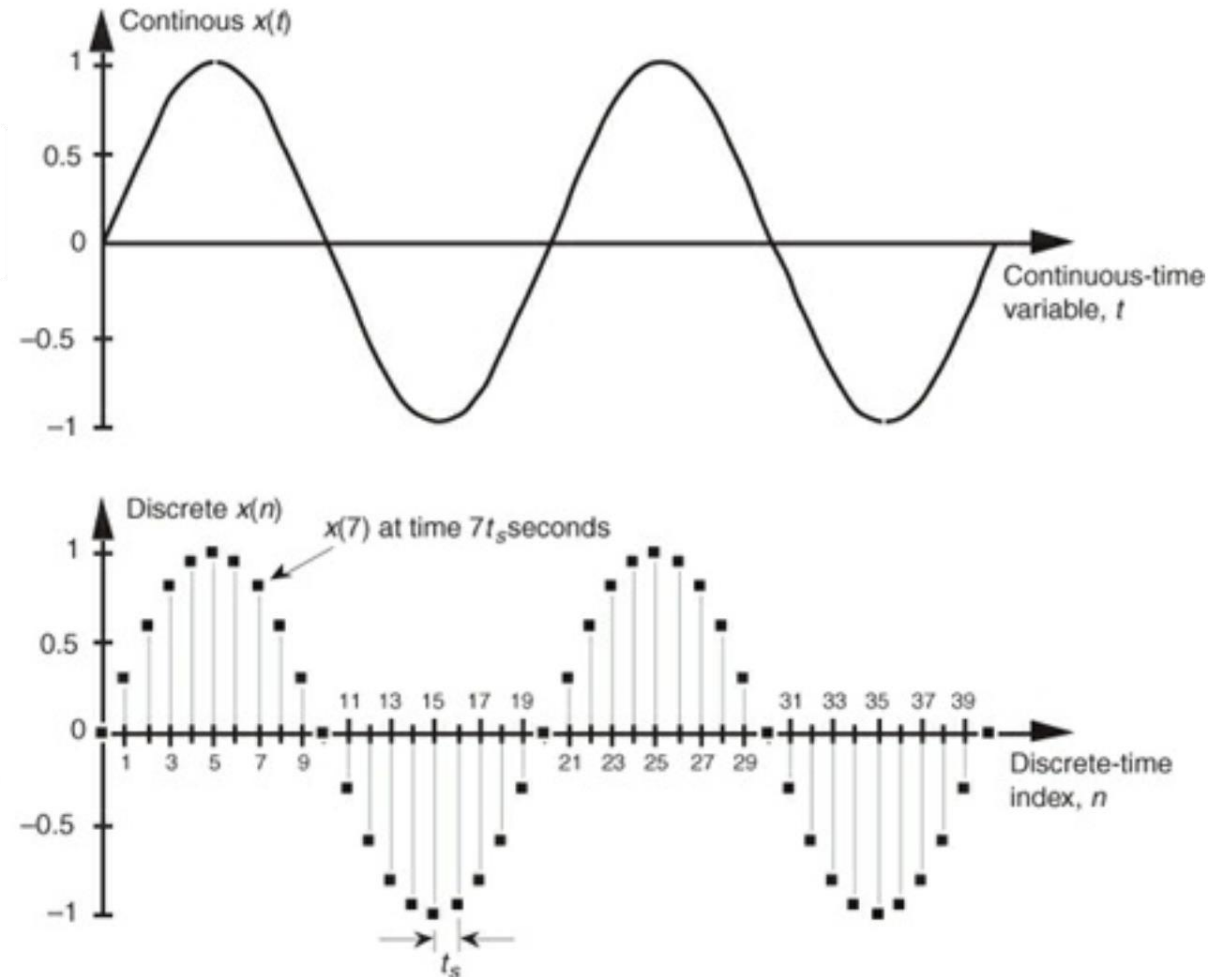
Sayısal Sistemler-devam

- Dijital sistemlerin bir özelliği, **ayrık bilgi** öğelerini temsil etme ve kullanma yetenekleridir.

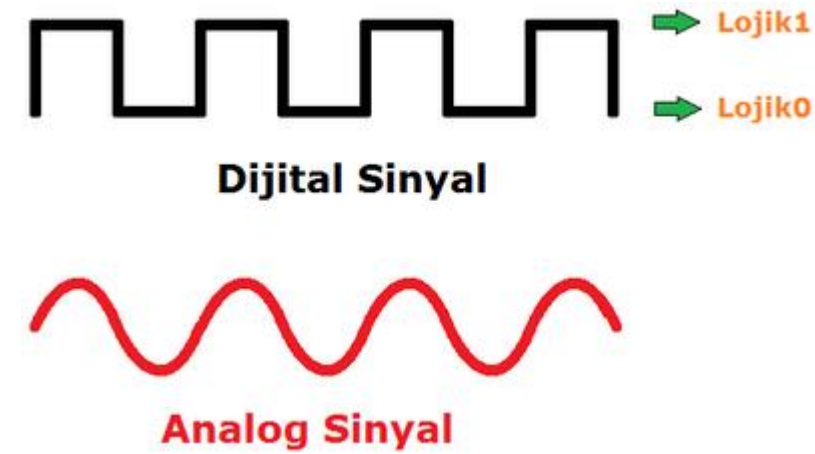


Sayısal Sistemler-devam

- Sınırlı sayıda elemanla sınırlı olan herhangi bir küme, ayırık bilgi içerir.
- Ayırık setlerin örnekleri 10 ondalık basamak, alfabenin 29 harfi, 52 oyun kartı ve bir satranç tahtasının 64 karesidir.
- Bilginin ayırık öğeleri, dijital bir sistemde sinyaller adı verilen fiziksel niceliklerle temsil edilir.
- Gerilim ve akım gibi elektrik sinyalleri en yaygın olanıdır.



Sinyal kavramı



- Bir **sinyal**, fiziksel bir büyüklüğü veya değişkeni temsil eden bir fonksiyon olup, bir olgunun doğasına veya davranışına ilişkin bilgiler içerir.
- Günümüzün çoğu elektronik dijital sistemdeki sinyaller yalnızca iki ayrı değer kullanır ve bu nedenle ikili (binary) olduğu söylenir.
- Bit adı verilen ikili bir rakamın iki değeri vardır: **0 ve 1**.
- Bilginin ayrık öğeleri, ikili kodlar adı verilen bit grupları ile temsil edilir. Örneğin, 0'dan 9'a kadar olan ondalık basamaklar, dijital bir sistemde dört bitlik bir kodla temsil edilir (örneğin, 7 sayısı 0111 ile temsil edilir).

Many human-made DT Signals

Ex.#1 Weekly Dow-Jones industrial average



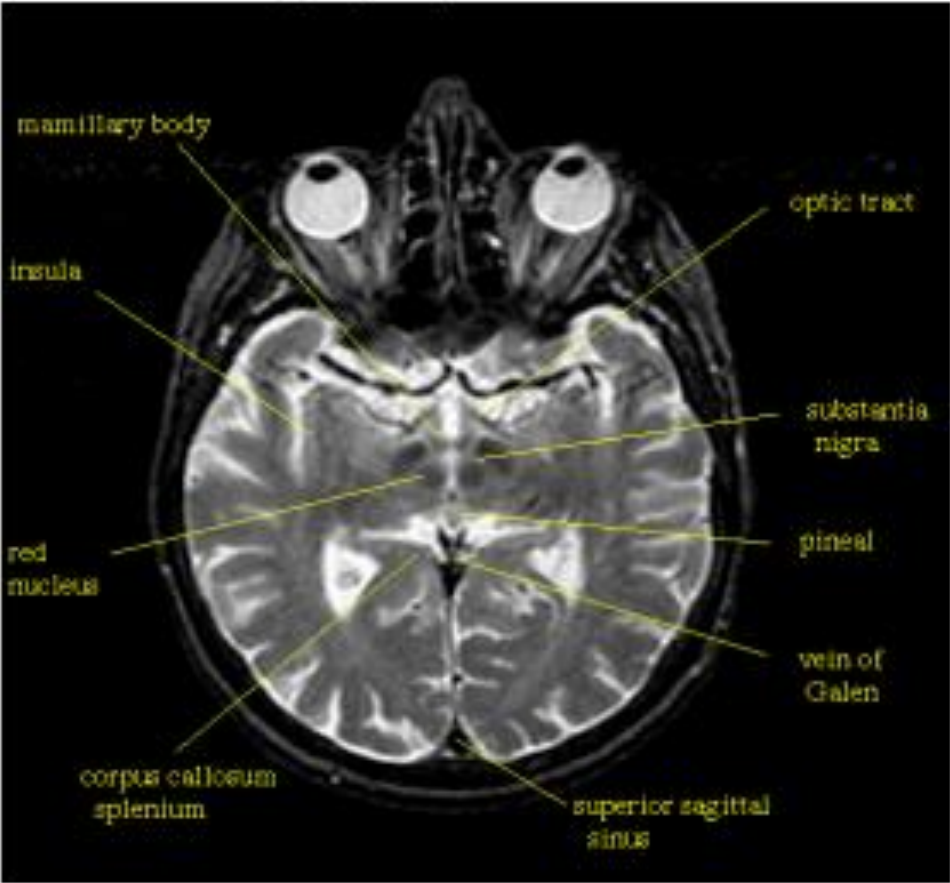
Ex.#2 digital image



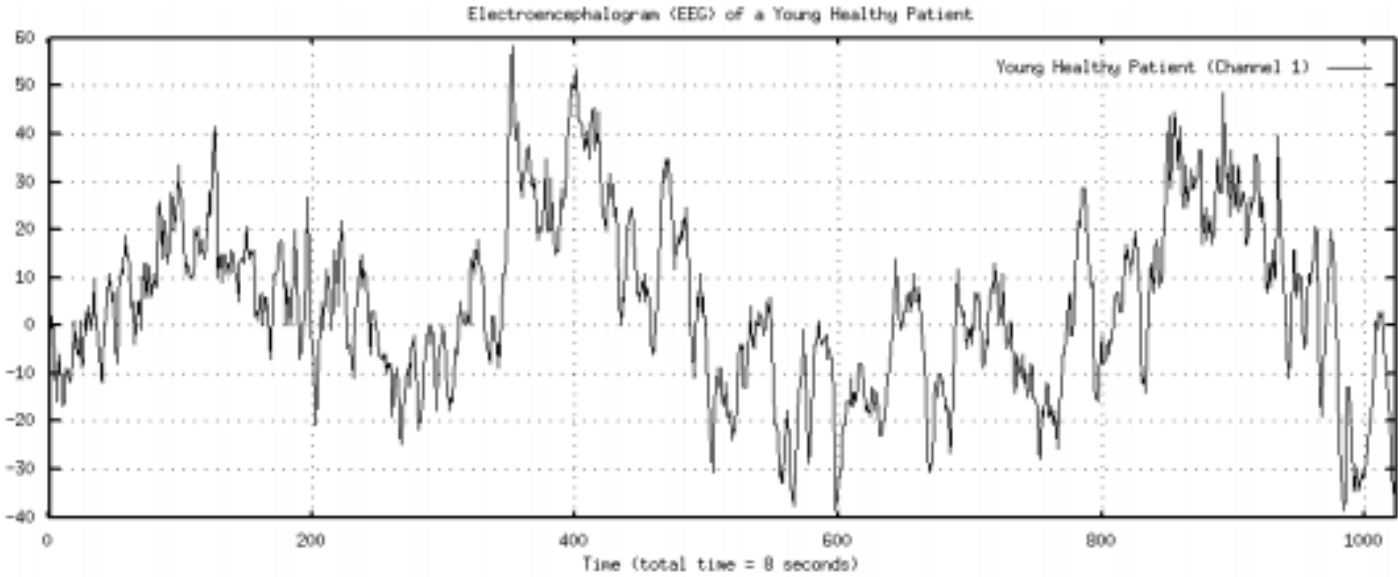
Courtesy of Jason Oppenheim.
Used with permission.

Why DT? — Can be processed by modern digital computers and digital signal processors (DSPs).

Magnetic Resonance Image (MRI) data as 2-dimensional signal

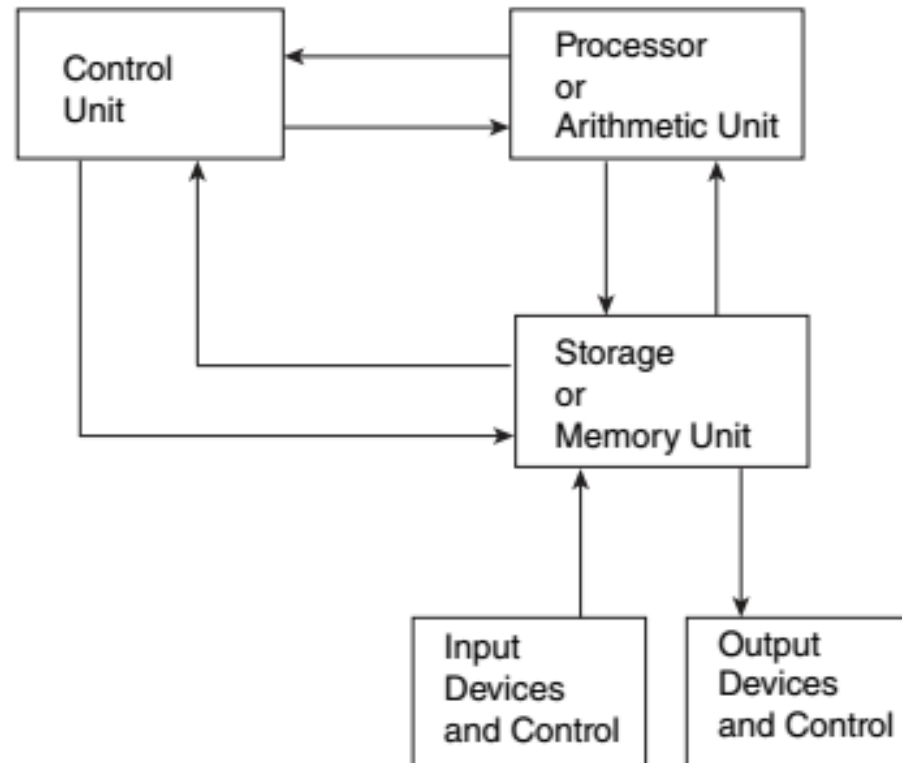


◆ Electroencephalogram (EEG) signal (or brainwave)



Sayısal Bilgisayarlar

- Genel amaçlı sayısal bilgisayar, bir dijital sistemin en iyi bilinen örneğidir.
- Bir bilgisayarın ana parçaları bir bellek birimi, bir merkezi işlem birimi ve giriş-çıkış birimleridir.



Sayısal Bilgisayarlar

- Bellek birimi, programları ve aynı zamanda giriş, çıkış ve ara verileri depolar. Merkezi işlem birimi, program tarafından belirlenen aritmetik ve diğer veri işleme işlemlerini gerçekleştirir.
- Bir kullanıcı tarafından hazırlanan program ve veriler klavye gibi bir giriş cihazı aracılığıyla hafızaya aktarılır. Yazıcı gibi bir çıktı cihazı, hesaplamaların sonuçlarını alır ve yazdırılan sonuçlar kullanıcıya sunulur.
- Dijital bir bilgisayar birçok giriş ve çıkış cihazını barındırabilir.
- Dijital bilgisayar, yalnızca aritmetik hesaplamaları değil aynı zamanda mantıksal işlemleri de gerçekleştirebilen güçlü bir araçtır. Ayrıca iç ve dış koşullara göre kararlar almak için programlanabilir.

Sayısal Bilgisayarlar

- Ticari ürünlerin dijital devrelerle yapılmasının temel nedenleri vardır. Çoğu dijital cihaz dijital bir bilgisayar gibi programlanabilir.
- Dijital entegre devre teknolojisindeki gelişmeler nedeniyle dijital cihazlarda önemli maliyet düşüşleri meydana gelmiştir.
- Bir silikon parçasına konulabilen transistörlerin sayısı karmaşık işlevler üretmek için arttıkça, birim başına maliyet azalır ve dijital cihazlar giderek daha düşük bir fiyata satın alınabilir.
- Dijital entegre devrelerle oluşturulan ekipman, saniyede yüz milyonlarca işlem hızında performans gösterebilir.
- Hata düzeltme kodları kullanılarak dijital sistemler son derece güvenilir bir şekilde çalıştırılabilir.

1.2 İkili Sayılar

Sayısal Sistemler ve İkili Sayılar

- Genel olarak, **ondalık** noktalı bir sayı aşağıdaki gibi bir dizi katsayı ile temsil edilir:

$$a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \cdot a_{-1}a_{-2}a_{-3} \quad \rightarrow$$

$$10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 + 10^{-1}a_{-1} + 10^{-2}a_{-2} + 10^{-3}a_{-3}$$

- Birçok farklı sayı sistemi vardır. Genel olarak, bir **temel-r sayı sisteminde** ifade edilen bir sayının katsayıları r'nin katlarıyla şu şekilde çarpılır:

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_0 + a_{-1} \cdot r^{-1} \\ + a_{-2} \cdot r^{-2} + \dots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$

Sayısal Sistemleri → Örnek

$$(4021.2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (511.4)_{10}$$

$$(127.4)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = (87.5)_{10}$$

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (46,687)_{10}$$

$$(110101)_2 = 32 + 16 + 4 + 1 = (53)_{10}$$

Table 1.1
Powers of Two

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	8	256	16	65,536
1	2	9	512	17	131,072
2	4	10	1,024 (1K)	18	262,144
3	8	11	2,048	19	524,288
4	16	12	4,096 (4K)	20	1,048,576 (1M)
5	32	13	8,192	21	2,097,152
6	64	14	16,384	22	4,194,304
7	128	15	32,768	23	8,388,608

1.3 Sayı-Taban Dönüşümleri

Sayı Tabanlarında Dönüşüm

	Integer Quotient		Remainder	Coefficient
$41/2 =$	20	+	$\frac{1}{2}$	$a_0 = 1$
$20/2 =$	10	+	0	$a_1 = 0$
$10/2 =$	5	+	0	$a_2 = 0$
$5/2 =$	2	+	$\frac{1}{2}$	$a_3 = 1$
$2/2 =$	1	+	0	$a_4 = 0$
$1/2 =$	0	+	$\frac{1}{2}$	$a_5 = 1$

Therefore, the answer is $(41)_{10} = (a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_2 = (101001)_2$.

Sayı Tabanlarında Dönüşüm

	Integer		Fraction	Coefficient
$0.6875 \times 2 =$	1	+	0.3750	$a_{-1} = 1$
$0.3750 \times 2 =$	0	+	0.7500	$a_{-2} = 0$
$0.7500 \times 2 =$	1	+	0.5000	$a_{-3} = 1$
$0.5000 \times 2 =$	1	+	0.0000	$a_{-4} = 1$

Therefore, the answer is $(0.6875)_{10} = (0. a_{-1} a_{-2} a_{-3} a_{-4})_2 = (0.1011)_2$.

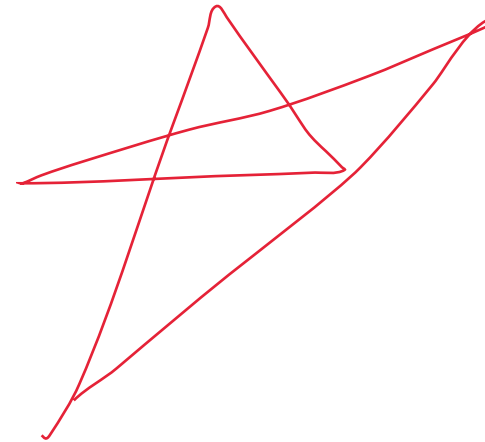
Sayı Tabanlarında Dönüşüm

$$\begin{array}{ccccccccc} (10 & 110 & 001 & 101 & 011 & \cdot & 111 & 100 & 000 & 110)_2 = & \text{8 li sayı sisteminde karşılığı?} \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & & 7 & 4 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (10 & 1100 & 0110 & 1011 & \cdot & 1111 & 0010)_2 = & \text{16 lı sayı sisteminde karşılığı?} \\ 2 & C & 6 & B & & F & 2 \end{array}$$

$$(673.124)_8 = \text{2 li sayı sisteminde karşılığı?}$$

$$(306.D)_{16} = \text{2 li sayı sisteminde karşılığı?}$$



Sayı Tabanlarında Dönüşüm

$$\begin{array}{ccccccccc} (10 & 110 & 001 & 101 & 011 & \cdot & 111 & 100 & 000 & 110)_2 & = & (26153.7406)_8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & & 7 & 4 & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (10 & 1100 & 0110 & 1011 & \cdot & 1111 & 0010)_2 & = & (2C6B.F2)_{16} \\ 2 & C & 6 & B & & F & 2 \end{array}$$

$$(673.124)_8 = \begin{array}{ccccccc} (110 & 111 & 011 & \cdot & 001 & 010 & 100)_2 \\ 6 & 7 & 3 & & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$(306.D)_{16} = \begin{array}{ccccccc} (0011 & 0000 & 0110 & \cdot & 1101)_2 \\ 3 & 0 & 6 & & D \end{array}$$

Table 1.2
Numbers with Different Bases

Decimal (base 10)	Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

BCD-Binary Code to Decimal



1.5 Tümleyen işlemi

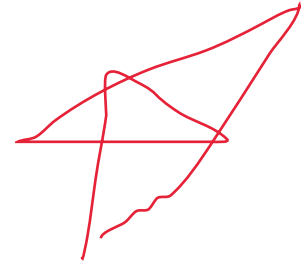
Tümleme (Complement)

- Sayısal bilgisayarlar tüm aritmetik işlemleri toplama işlemine çevirerek gerçekleştirirler. Sayısal bilgisayarlardaki tümleyiciler genellikle çıkarma işlemini basitleştirmek ve mantıksal işlemler için kullanılır.
- Her r -tabanlı sayı sistemi için iki tür tümleme işleminden bahsedilir:
 - (r) 'ye tümleyen
 - $(r-1)$ 'e tümleyen

(r)'ye göre tümlleme işlemi

- **n** haneli **r**-tabanlı **N** pozitif sayı için N sayısının **r'**'ye tümlenyeni:

$$r^n - N \text{ for } N \neq 0$$



(r)'ye göre tümlleme örnekleri

$$r^n - N \text{ for } N \neq 0$$

The 10's complement of $(52520)_{10}$

The 10's complement of $(25.639)_{10}$

The 2's complement of $(101100)_2$

The 16's complement of $(4B7)_{16}$

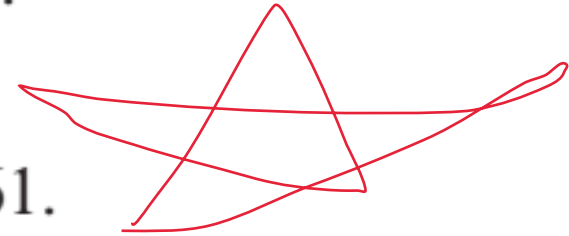


(r)'ye göre tümlleme örnekleri

$$r^n - N \text{ for } N \neq 0$$

The 10's complement of $(52520)_{10}$ is $10^5 - 52520 = 47480$.

The 10's complement of $(25.639)_{10}$ is $10^2 - 25.639 = 74.361$.



The 2's complement of $(101100)_2$ is $(2^6)_{10} - (101100)_2 = (1000000 - 101100)_2 = 010100$.

The 16's complement of $(4B7)_{16}$ is $(16^3 - 4B7)_{10} = (1000 - 4B7)_{16} = (B49)_{16}$

$(.)_2$ 'ye göre tümleyen alırken;

- **Kural1:**

- Bütün en düşük değerlikli sıfırları ve sıfırdan farklı ilk haneyi olduğu gibi bırakıp diğer bütün bitlerdeki
 - **1'leri \rightarrow 0**
 - **0'ları \rightarrow 1**
- yaparak 2'ye tümleyen bulunabilir.

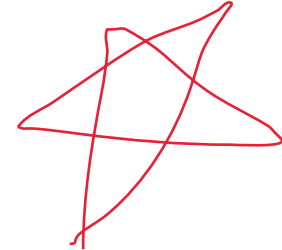
- **Kural2:**

- Önce 1'e göre tümleyen alınır daha sonra bu sonuca 1 eklenir.

(r-1)'ye göre tümleme işlemi

- **n** haneli bir tam sayı ve **m** haneli bir kesirli kısmı bulunan **r**-tabanlı **N** pozitif sayı için N sayısının (r-1)'e tümleyeni:

$$r^n - r^m - N.$$



(r-1)'ye göre tümlleme örnekleri

$$r^n - r^m - N.$$

The 9's complement of $(52520)_{10}$

The 9's complement of $(0.3267)_{10}$

The 1's complement of $(101100)_2$



(r-1)'ye göre tümlleme örnekleri

$$r^n - r^m - N.$$

The 9's complement of $(52520)_{10}$ is $(10^5 - 1 - 52520) = 99999 - 52520 = 47479$.

The 9's complement of $(0.3267)_{10}$ is $(1 - 10^{-4} 0.3267) = 0.9999 - 0.3267 = 0.6732$.

The 1's complement of $(101100)_2$ is $(2^6 - 1) - (101100) = (111111 - 101100)_2 = 010011$.

$(.)_1$ 'e göre tümleyen alırken;

- **Kural3:**
 - 1'e tümleyeni bulmak için tümleyeni alınacak olan ikili (binary) sayıdaki bütün
 - **1'ler \rightarrow 0**
 - **0'lar \rightarrow 1**
 - yapılır.