Tesadüfi Değişken

Tesadüfi değişkenler $X, Y, Z, \ldots$ gibi büyük harflerle veya $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ gibi yunan harfleri ile bunların aldığı değerler de $x, y, z, \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Tesadüfi değişkenler kesikli veya sürekli olmak üzere iki kısma ayrılır. Örneğin 150 kişilik bir sınıftan tesadüfi olarak seçilen bir öğrencinin boy uzunluğu ve ağırlığı sürekli tesadüfi değişken iken bu öğrencinin dakikadaki nabız sayısı ve kardeş sayısı kesikli tesadüfi değişkene örnek olarak verilebilir. Belirli bir saatte bir benzin istasyonuna gelen araç sayısı kesikli tesadüfi değişkene bir örnektir. Bir fabrikada üretilen televizyonların ömürleri saat olarak sürekli bir tesadüfi değişkendir. Yani herhangi bir tesadüfi değişkenin aldığı değer sayılabilir ise bu tesadüfi değişkene kesikli tesadüfi değişken, sayılamaz ise sürekli tesadüfi değişken denir.

Tanım. $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$olasılık uzayı olmak üzere

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow X(w)$$

fonksiyonu, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için, $\{w : X(w) \leq x\} \in \Im$ özelliğini sağlıyorsa bu fonksiyona tesadüfi değişken denir. Burada bir fonksiyonun ters görüntüsü tanımından $X^{-1}(-\infty,\ x] = \{w : X(w) \leq x\}$ yazılır, bu bağlamda yukarıda tanımlanan fonksiyonun bir tesadüfi değişken olabilmesi için gerekli koşul, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(-\infty,\ x] \in \Im$ olarak yazılabilmesidir.Tesadüfi değişken kısaca, örnek uzayının her noktasına bir reel sayı eşleştiren bir fonksiyon olarak da tanımlanır.

Örnek. Hilesiz bir madeni paranın üç kez havaya atılması deneyini düşünelim. $\Im$, kuvvet kümesi olsun ve olasılık ölçüsü de $A \epsilon \Im$ için $P(A) = n(A)/8$ olarak tanımlansın.$(\Omega, \Im, \mathrm{P})$bir olasılık uzayı ve buradaki örnek uzayı,

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TTY, TYT, TTT\}$$

dır. X paranın havaya üç kez atıldığında üste gelen yazıların sayısını göstersin.X fonksiyonubir tesadüfi değişken midir?

Çözüm. X paranın havaya üç kez atıldığında üste gelen yazıların sayısını gösterdiği bilindiğinden

$$X: w \longrightarrow X(w) = \begin{cases} 0, & w = TTT \\ 1, & w = YTT, TYT, TTY \\ 2, & w = YTY, TYY, YYT \\ 3, & w = YYY \end{cases}$$

olarak yazılır. Bu X fonksiyonunun tesadüfi değişken olabilmesi için Tanım gereğince $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{w: X(w) \leq x\} \in \mathfrak{I}$ olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$x < 0 \quad ise \ \{ \text{w}: X(w) \leq x\} = \emptyset \in \mathfrak{I}$$

$$0 \leq x < 1 \quad ise \ \{ \text{w}: X(w) \leq x\} = \{TTT\} \in \mathfrak{I}$$

$$1 \leq x < 2 \quad ise \ \{ \text{w}: X(w) \leq x\} = \{TTT, TTY, TYT, YTT\} \in \mathfrak{I}$$

$$x \geq 3 \quad ise \ \{ w: X(w) \leq x\} = \Omega \in \mathfrak{I}$$

Yukarıdaki tüm aralıkların birleşimi $\mathbb{R}$ kümesini verdiğinden X fonksiyonu bir tesadüfideğişkendir. X tesadüfi değişkenin tanım kümesi D_X ile gösterilecektir.

$$D_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

X tesadüfi değişkenine ait aşağıdaki olasılıklar

$$P(X \leq 0) = P\{ \text{w}: X(w) \leq 0\} = 1/8$$

$$P(X \leq 1) = 4/8, \qquad P(X = 2) = 3/8,$$

$$P(X=1/2) = P(\emptyset) = 0 \text{ ve } P(X = 5) = P(\emptyset) = 0$$

bulunur.

Dağılım Fonksiyonu

Dağılım fonksiyonuna birikimli dağılım fonksiyonu da denir. Buna göre aşağıdaki tanım veriliyor.

Tanım. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için$X$ rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad , \ 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

bağıntısı ile tanımlanır. X t.d. yardımıyla ifade edilen tesadüfi bir deneme hakkındaki bilginin çoğu, $F_X(x)$iletanımlanır. $P(x > x) = 1 - F_X(x)$ ifadesine dağılım fonksiyonunun kuyruğu denir ve $P(x > x) = \overline{F_X(x)}$ ile gösterilir.

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

$F_X(x)'$ in özellikleri ile ilgili aşağıda veriliyor:

1) $F_X(x)$ monoton artan bir fonksiyondur

$x_1 < x_2$ ise $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad , \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3) $x_1 < x_2$ için $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

4) $F_X(x)$ sağdan süreklidir: $\lim_{\Delta x \to 0^+} F_X(x + \Delta x) = F_X(x)$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun

.Veya, X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ her yerde türevlenebilir ise,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$f_X(x)$ ‘e olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Özellikleri

1. $f_X(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3. $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

4. $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds$

olarak veriliyor.

Örnek. X sürekli t.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0\ , & d.d. \end{cases}$$

olmak üzere, X sürekli t.d. nin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.

olarak elde edilir. Burada

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(s)ds = x^2$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ x^2, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 0.5^2$$

$$P(0.5 < X < 1) = F_X(1) - F_X(0.5) = 1 - 0.5^2$$

$$P(X > 0.75) = 1 - P(X \leq 0.75) = 1 - 0.75^2$$

Örnek . Sürekli X t.d.nin olasılık yoğunlukfonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{k}, & 1 < x < 2 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(1/2 < X)$, $P(3/2 \geq X) ve$ $P(1/2 < X < 3/2)$olasılıklarını,

i) olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre bulunuz.

ii) dağılım fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

d) Olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonunun grafiklerini çiziniz.

Çözüm .a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun 2.özelliğinden

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\, dx}_{0} + \int_{0}^{1} f_X(x)\, dx + \int_{1}^{2} f_X(x)\, dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f_X(x)\, dx}_{0} = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{k}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{k}\right) dx = 1 \Rightarrow k = 3$$

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \\ x/3, & 0 \leq x < 1 \\ \left(\frac{2x-1}{3}\right), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

c) Olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla olasılıklar

$$P\left(\frac{1}{2} < X\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_1^2 \frac{2}{3} dx = \frac{5}{6}$$

$$P\left(\frac{3}{2} \geq X\right) = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3}dx = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3}dx = \frac{1}{2}$$

Olarak bulunur.

Dağılım fonksiyonu fonksiyonu yardımıyla

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

$$P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek X t.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor.

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a) $F_X(x)$'i bulunuz.
b) $F_X(x)$ yardımıyla $P(X \leq 50)$, $P(50 < X < 100)$ ve $P(X > 100)$ olasılıklarını bulunuz.
c) $F_X(x)$ ve $f_X(x)$'in grafiklerini çiziniz.

Çözüm a) $f_X(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

o.y.f.' nun son özelliğinden

$$P(X \leq x) = \int_0^x se^{-\frac{s^2}{2}}ds = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0 \\ 1, & x \to \infty \end{cases}$$

b) $P(X \leq 50) = F_X(50) = 1 - e^{-1250}$

$P(50 < X < 100) = F_X(100) - F_X(50) = e^{-1250} - e^{-5000}$

$P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = e^{-5000}$

olarak elde edilir.

Olasılık Fonksiyonu

Tanım. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X t.d. i bu uzayda tanımlı olsun, $\forall\, x \in D_X$ olmak üzere, X t.d. nin D_X 'deki değerleri alma olasılıklarını gösteren fonksiyona olasılık fonksiyonu denir ve $p_X(x)$veya $p(x)$ ile gösterilir. Yani,

$$p_X(x) = P(X = x)$$

olur.

Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

1.Eğer $x \notin D_X$ise $p_X(x) = 0$,

2. $\forall\, x \in D_X$ise $0 \leq p_X(x) \leq 1$,

3.$\sum_{x \in D_X} p_X(x)$=1,

4. $F_X(x) = \sum_{\boldsymbol{n \leq x}} p_X(n)$**,** $n \in$ Z

biçimindedir.

Örnek. X kesikli t.d. nin olasılık fonksiyonu,

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{21}\,, & x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

olarak veriliyor.

a) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) $P(X \leq 3)$, $P(2 < X < 4)$ ve $P(X > 5)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

a) $F_X(x)$ dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x(x+1)}{42}, & x = 1,2,3,4,5,6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

b) Olasılık fonksiyonu yardımıyla:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) = \frac{6}{21}$$

$$P(2 < X < 4) = P(X = 3) = \frac{3}{21}$$

$$P(X > 5) = P(X = 6) = \frac{6}{21}$$

Dağılım fonksiyonu yardımıyla:

$$P(X \leq 3) = \frac{3(3+1)}{42} = \frac{6}{21}$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \frac{5(5+1)}{42} = \frac{6}{21}$$

Örnek.X t.d. nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor

$$p_X(x) = \begin{cases} k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}, & x = 1,2,\ldots \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

a) k sabitinibulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X > 5),\ P(10 \le X \le 100)$ve $P(X \le 23)$

olasılıklarını bulunuz.

Çözüm a) $\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1$ ve geometrik seri olduğundan,

$$\sum_{x=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = k\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

bulunur.

b) Olasılık fonksiyonunun özelliklerinden

$$P(X \le x) = \sum_{n=1}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]}{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)\right]} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 1 \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x} & , x = 1,2,3, \ldots \\ 1 \quad , & x \to \infty \end{cases}$$

c) $P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F_X(5) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

$$P(10 \le X \le 100) = F_X(100) - F_X(10) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

$$P(X \le 23) = F_X(23) = \left(\frac{2}{3}\right)^{23}$$

Örnek. Bir torbada beş beyaz 10 kırmızı bilye vardır.

a) İadeli olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde$X$ t.d.ni beyaz bilyelerin sayısını göstermek üzere X 'in olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) İadesiz olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde$Y$ t.d.ni kımızı bilyelerin sayısını göstersin. Bu durumda Y'nin olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) Y t.d.nin olasılık ve dağılım fonksiyonunun grafiklerini çiziniz.

Çözüm. a) İadeli çekim yapıldığında X tesadüfi değişkenibeyaz bilyelerin sayısını göstermek üzere X t.d. nin olasılık fonksiyonu $p_X(x) = P(X = x)$ aşağıdadır.

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & , x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

$X = x$	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu da şöyledir:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{8}{27}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{20}{27}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{26}{27}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

yazılır.

b) İadesiz olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde Y t.d. kırmızı bilyelerin sayısını gösteriyor ve bunun olasılık fonksiyonu$p_Y(y) = P(Y = y)$ aşağıdadır.

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{y}\binom{5}{3-y}}{\binom{15}{3}}, & y = 0,1,2,3 \text{ için} \\ 0\,, & d.d. \end{cases}$$

Veya

$Y = y$	0	1	2	3
$p_Y(y)$	$\frac{10}{455}$	$\frac{100}{455}$	$\frac{225}{455}$	$\frac{120}{455}$

Y tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu da şöyledir:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 10/455\ , & 0 \le y < 1 \\ 110/455, & 1 \le y < 2 \\ 335/455, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$

Beklenen Değer ve Momentler

Beklenen Değer

Beklenen değer ve varyans kitlenin dağılımını gösteren parametrelerdir. Yani kitlenin istatistiksel ölçüleridir. Beklenen değer geniş anlamda *ortalama* olarak ele alınır. Bu bağlamda beklenen değerin aşağıdaki tanımı verilir.

Tanım $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X t.d ni bu uzayda tanımlı olsun. X t.d.nin beklenen değeri:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) < \infty, & X \text{ kesikli t. d. ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty, & X \text{ sürekli t. d. ise} \end{cases}$$

olarak verilir. Bununla birlikte beklenen değer mutlak yakınsak olmalıdır.

Beklenen Değerin Özellikleri

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ için

i **)**$E(c) = c$

***ii*)** $E(cX) = cE(X)$

iii **)**$E(aX + b) = \mathrm{a}E(X) + b$

***iv*)** X tesadüfi değişkeni pozitif değerler aldığındave dağılım fonksiyonunun kuyruğu $1 - F_X(x) = \overline{F_X(x)}$

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{0}^{\infty} \overline{F_X(x)} & X \text{ kesikli t.d. ise} \\ \int\limits_{0}^{\infty} \overline{F_X(x)}dx & X \text{ sürekli t.d. ise} \end{cases}$$

olur.

Örnek4.10. İki hilesiz zar atıldığında üste gelen noktaların toplamının bir asal sayı olmasını X tesadüfi değişkeni ile gösteriliyor.

a) Örnek uzayını oluşturunuz.
b) Olasılık ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.
c) $P(X \leq 4),\ P(4 < X \leq 8)$ olasılıklarını hesaplayınız.
d) $E(3X - 4)$ beklenen değerini bulunuz..

Çözüm. a)

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2) \\ (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5) \end{Bmatrix}$$

x	2	3	5	7	11
$p_X(x)$	$1/15$	$2/15$	$4/15$	$6/15$	$2/15$

x	$x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$3 < x \leq 5$	$5 < x \leq 7$	$7 < x \leq 11$	$x > 11$
$F_X(x)$	0	1/15	3/15	7/15	13/15	1

a) $P(X \leq 4) = F_X(4) = 3/15$

$P(4 < X \leq 8) = P(X = 5) + P(X = 7) = 10/15$

b) $E(X) = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x) = 2.\frac{1}{15} + 3.\frac{2}{15} + 5.\frac{4}{15} + 7.\frac{6}{15} + 11.\frac{2}{15} = \frac{92}{15}$

$$E(3X - 4) = \frac{88}{5}$$

Örnek. X bir cep telefonu bataryasının yıl olarak dayanma süresini gösteren bir t.d. ve bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-x}, & x > 0 \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases}$$

olarak veriliyor. Buna göre,

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu elde ediniz.

c) Tesadüfi olarak seçilen bir bataryanın ortalama dayanma süresini hesaplayınız.

d) $E(X^k)'$yı bulunuz.

e) $P\big(X > E(X)\big)$ =?

f) $P(X > 5|X > 2) = P(X > 3)$olduğunu gösteriniz.

Çözüm a)

$$\int_0^\infty ke^{-x}\, dx = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases}$$

b) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x e^{-s}\,ds = 1 - e^{-x}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \\ 1, & x \to \infty \end{cases}$$

c. $E(X) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$

Veya beklenen değerin dördüncü özelliğinden

$$E(X) = \int_0^\infty \overline{F_X(x)}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

d. $E(X) = 1, E(X^2) = 2, E(X^3) = 6, \dots, E(X^k) = k!$

e. $P\big(X > E(X)\big) = P(X > 1) = 1 - P(X \le 1)$

$$= 1 - F_X(1) = \frac{1}{e}$$

f. $P(X > 5|X > 2) = \frac{P(X>5)}{P(X>2)} = \frac{1-P(X\le5)}{1-P(X\le2)} = \frac{1-F_X(5)}{1-F_X(2)} = e^{-3}$

$$P(X > 3) = e^{-3}$$

Bu durum üstel dağılımın belleksizlik özelliği olarak bilinir.

4.6.2 Tesadüfi Değişkenin *n*-inci Momenti

Tanım $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X t.d ni bu uzayda tanımlı olsun. X t.d.nin sıfır etrafındaki $n -$ inci momenti,

$$\mu_n = E(X^n) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} x^n\, p_X(x) & X \text{ kesikli t.d.ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx & X \text{ sürekli t.d.ise} \end{cases}$$

olur. Bu tanımlardan anlaşılacağı üzeri, X t.d.nin birinci momenti X'in beklenen değeri veya ortalamasıdır. Yani,

$$\mu_X = E(X) = \mu_1$$

olur.

Tanım $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X t.d ni bu uzayda tanımlı olsun. X t.d.nin ortalama etrafındaki n-inci momenti

$$\mu'_n = E(X-\mu_X)^n = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n p_X(x) & X \text{ kesikli t.d. ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n f_X(x)\,dx & X \text{ sürekli t.d. ise} \end{cases}$$

bulunur.

Varyans

Tanım $\mu'_n = E(X-\mu_X)^n$ eşitliğinde $n = 2$ alındığındavaryans elde edilir. Yani

$$\mu'_2 = \sigma_X^2 = Var(X)$$

ile gösterilir. Bu bağlamda,

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X-\mu_X)^2$$

olarak tanımlanır. Varyans değişim ölçüsüdür.

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 p_X(x) & X \text{ kesikli t.d. ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx & X \text{ sürekli t.d. ise} \end{cases}$$

dir. Varyansın yukarıda verilen tanımı göre $Var(X) \geq 0$ olduğu açıktır, t.d.nin standart sapması ise σ_X olup, varyansının pozitif kareköküne eşittir. Yani $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ dir.

Varyans momentler cinsinden yazılırsa,

$$\mu'_2 = \mu_2 - [\mu_1]^2$$

elde edilir, ki bu varyansı bulmak için daha pratik bir formüldür.

Varyansın Özellikleri

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ için,

i)$Var(a) = 0$

ii) $Var(bX + c) = b^2 Var(X)$

iii) X_1 ve X_2 bağımsız tesadüfi değişkenler ise

$$Var(aX_1 \pm bX_2) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2)$$

olur.

Moment çıkaran fonksiyon

Moment Çıkaran Fonksiyon yardımıyla beklenen değer, varyans, değişim katsayısı, çarpıklık ve basıklık ölçüleri ile momentler bulunur. Bu bağlamda aşağıdaki tanım veriliyor.

Tanım. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlı bir X tesadüfi değişkeni verilsin. $\forall\, t \in \mathbb{R}$için, X tesadüfi değişkeni kesikli ise,

$$M_X(t) = \sum_{D_X} e^{tx} p_X(x)$$

Xtesadüfi değişkeni sürekli ise,

$$M_X(t) = \int_{D_X} e^{tx} f_X(x)dx$$

Fonksiyonlarına X tesadüfi değişkeninin *moment çıkaran* fonksiyonu denir. Aynı zamanda $M_X(t) = E(e^{tX})$ olur.

Moment çıkaran fonksiyonun özellikleri

i) $M_X(0) = 1$

ii) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için, $Y = aX + b$ tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

olarak bulunur.

iii) X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olsun. Bu taktirde$X - \mu$'nun moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{X-\mu}(t) = E\left[e^{(X-\mu)t}\right] = e^{-\mu t} M_X(t)$$

olarak verilir ve,

$$\frac{d^n}{dt^n} M_{X-\mu}(t)|_{t=0} = E[(X-\mu)^n] = \mu_n$$

elde edilir.

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla momentlerin bulunması

e^{tx}'in MacLaurin seri açılımı,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!} + \cdots$$

olarak yazılır. e^{tx}'in yakınsak olduğu da gösterilebilir. Şimdi, moment çıkaran fonksiyonun tanımından,

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = E\left[1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tX)^n}{n!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + tE[X] + \frac{(t)^2}{2!} E(X^2) + \cdots + \frac{(t)^2}{n!} E(X^n) + \cdots$$

veya momentler cinsinden,

$$M_X(t) = 1 + t\mu_1 + \frac{(t)^2}{2!}\mu_2 + \cdots + \frac{(t)^2}{n!}\mu_n + \cdots$$

bulunur. Moment çıkaran fonksiyonun t'ye göre türevini alınır ve $t = 0$ yazılırsa,

$$\frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = \mu_1$$

bulunur. Benzer biçimde, moment çıkaran fonksiyonun t 'ye göre n-inci mertebeden türevi alınır ve yine $t = 0$ yazılırsa,

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0} = \mu_n$$

bulunmuş olur.