İşaret İşleme
Sistemlere Giriş-H2CD2

Dr. Meriç Çetin

versiyon9920

Geçen derste neler öğrendik

- Temel bilgiler
- Sinyal nedir?
- Sinyallerin sınıflandırılması
  - Analog ve Dijital Sinyaller
  - Deterministik ve Rasgele Sinyaller
  - Tek ve Çift Sinyaller
  - Periyodik - Aperiyodik Sinyaller
  - Sürekli-Zamanlı – Ayrık-Zamanlı Sinyaller, …
- Sürekli ve ayrık zamanda kullanılan bazı faydalı sinyaller
- Bağımsız değişken dönüşümü

Bağımsız değişken dönüşümünü tekrar hatırlayalım

Bağımsız değişkenin dönüşümü

- İşaret ve sistem analizindeki önemli bir kavram bir işaretin dönüştürülmesidir.

- **Bazı sinyal dönüşümleri:**

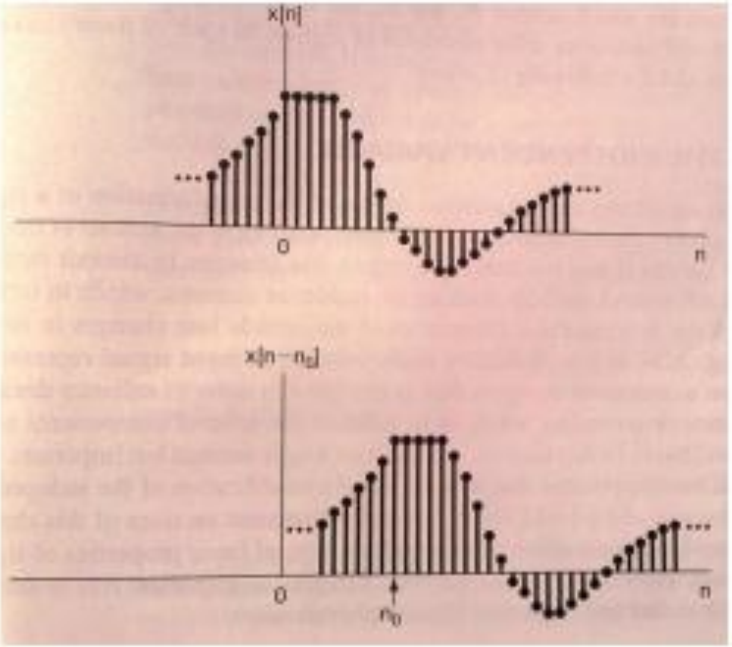
  Öteleme,

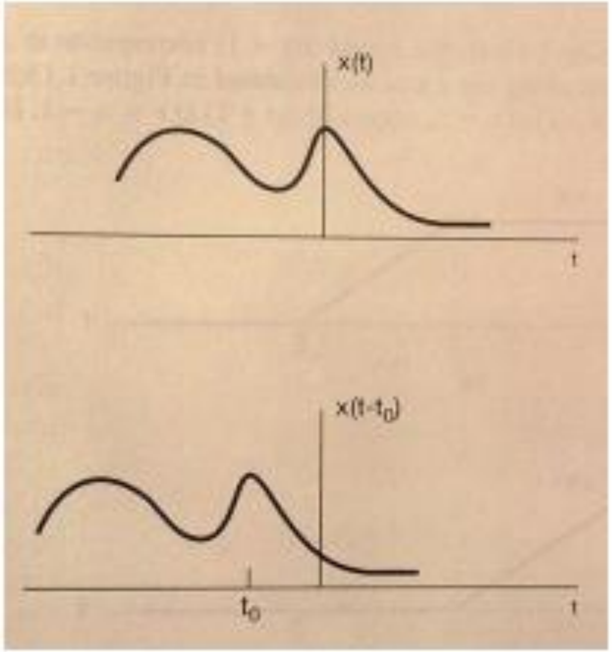
  Tersleme,

  Ölçekleme, ..

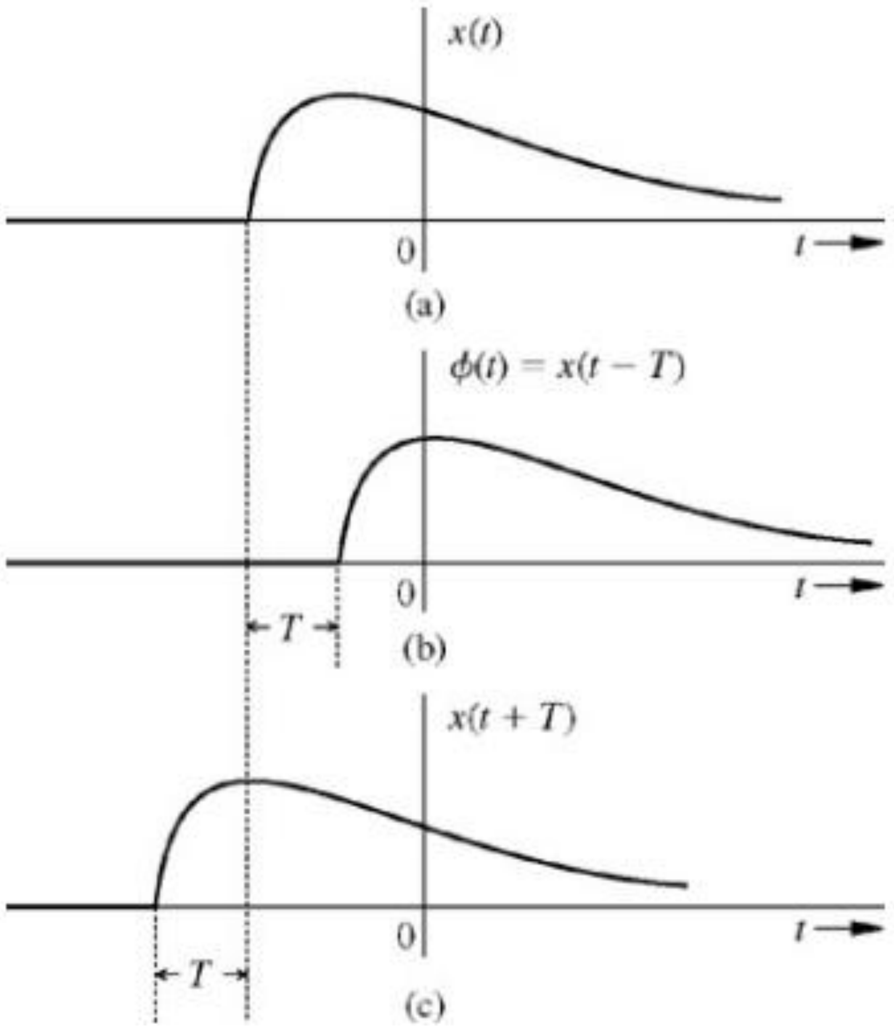
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek dönüşümlerden birisine ZAMANDA ÖTELEME denir ve sürekli durum için $x(t\text{-}t_0)$ şeklinde ifade edilir (ayrık-durumda ifade $x[n\text{-}n_0]$'dir). Orijinal ve ötelenmiş işaretlerin şekli aynıdır ancak işaretler birbirlerine göre kaymıştır.





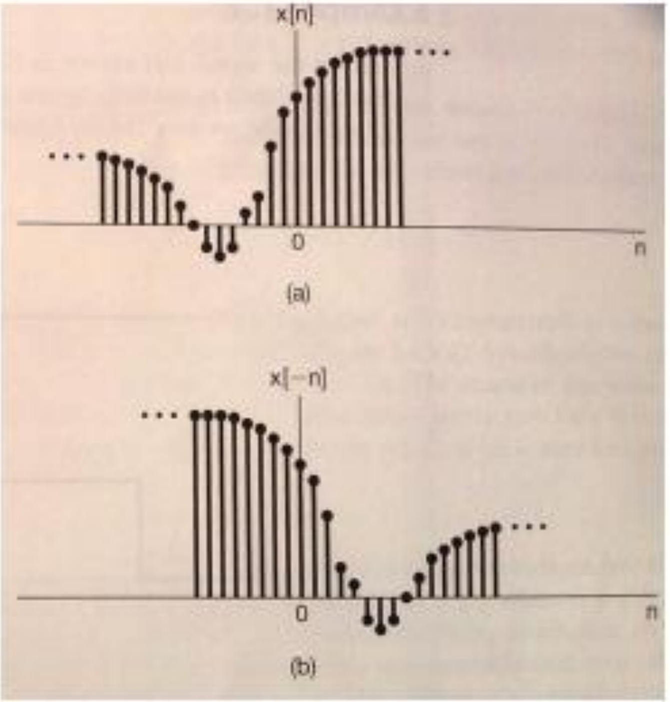
Zamanda öteleme veya geciktirme

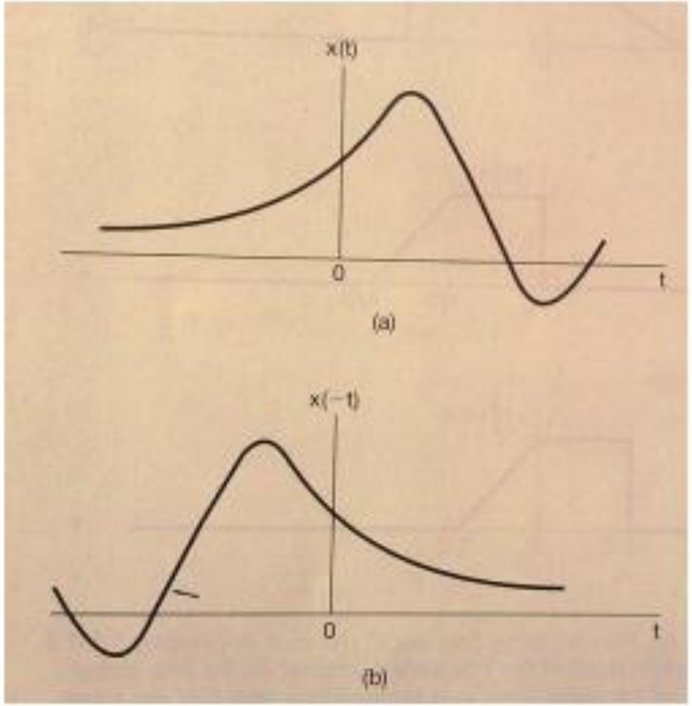


Therefore, to time-shift a signal by T, we replace t with $t - T$. Thus $x(t - T)$ represents $x(t)$ time-shifted by T seconds. If T is positive, the shift is to the right (delay), as in Fig. 1.4b. If T is negative, the shift is to the left (advance), as in Fig. 1.4c. Clearly, $x(t - 2)$ is $x(t)$ delayed (right-shifted) by 2 seconds, and $x(t + 2)$ is $x(t)$ advanced (left-shifted) by 2 seconds.

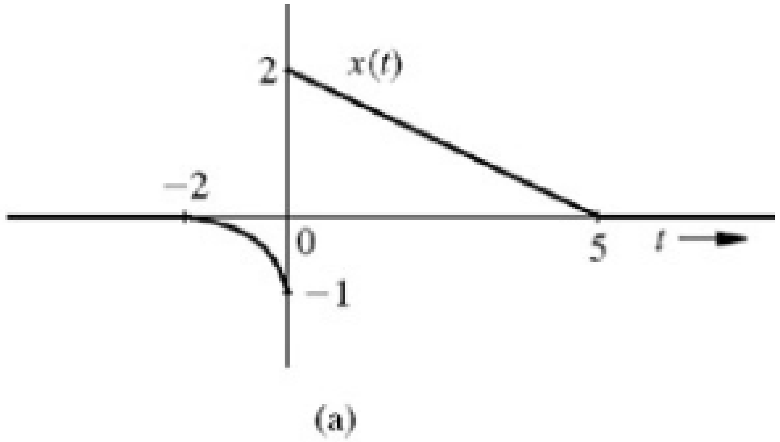
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek ikinci bir dönüşüme ZAMANI TERSİNE ÇEVİRME denir ve sürekli durumda matematiksel olarak $x(-t)$ şeklinde ifade edilir. Orijinal işaretin dikey eksen ($t = 0$) etrafında döndürülmesiyle zaman tersine çevrilmiş işaret elde edilir.





Zamanda tersleme



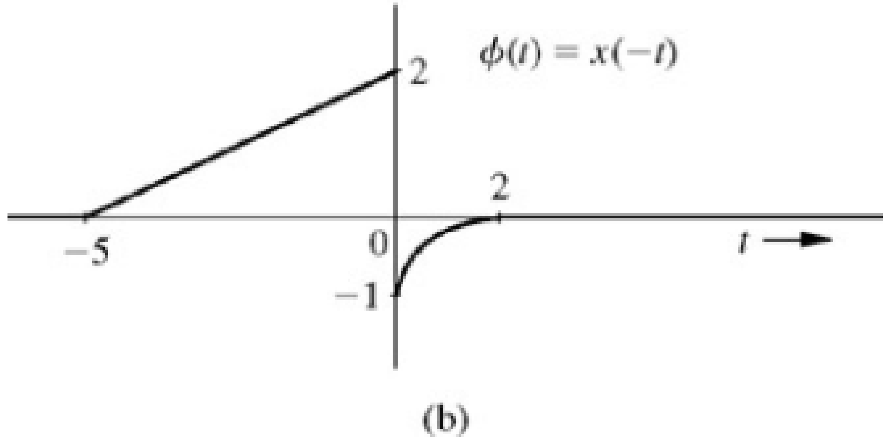
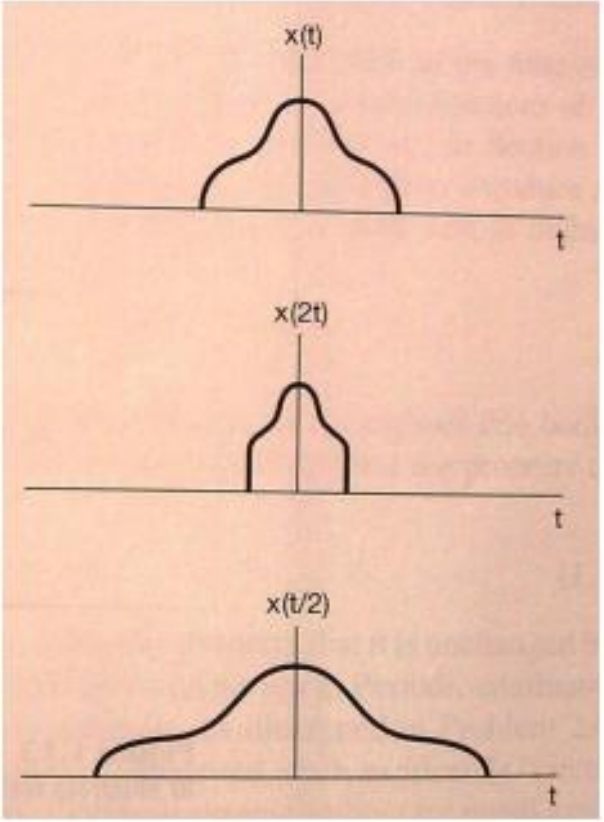


Figure 1.8: Time reversal of a signal.

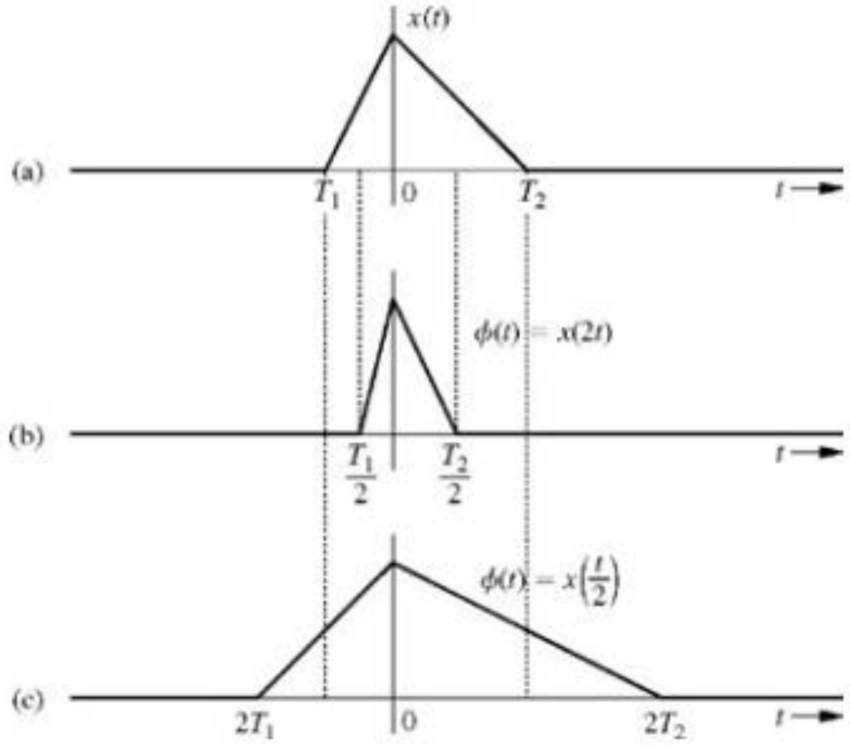
Thus, to time-reverse a signal we replace t with $-t$, and the time reversal of signal $x(t)$ results in a signal $x(-t)$. We must remember that the reversal is performed about the vertical axis, which acts as an anchor or a hinge. Recall also that the reversal of $x(t)$ about the horizontal axis results in $-x(t)$.

Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek üçüncü dönüşüme ÖLÇEKLEME denir ve sürekli durumda $x(\alpha t)$ biçiminde temsil edilir. α'ya ölçekleme katsayısı denir. α'nın 1'den büyük olması durumunda orijinal işaretin şeklini bozmadan işareti α kadar daraltarak öçeklenmiş işareti elde ederiz. Aksi durumda, orijinal işaret α'nın tersi kadar genişletilir.



Zamanda ölçekleme



Observe that because $x(t) = 0$ at $t = T_1$ and T_2, we must have $\phi(t) = 0$ at $t = T_1/2$ and $T_2/2$, as shown in Fig. 1.6b. If $x(t)$ were recorded on a tape and played back at twice the normal recording speed, we would obtain $x(2t)$. In general, if $x(t)$ is compressed in time by a factor a ($a > 1$), the resulting signal $\phi(t)$ is given by

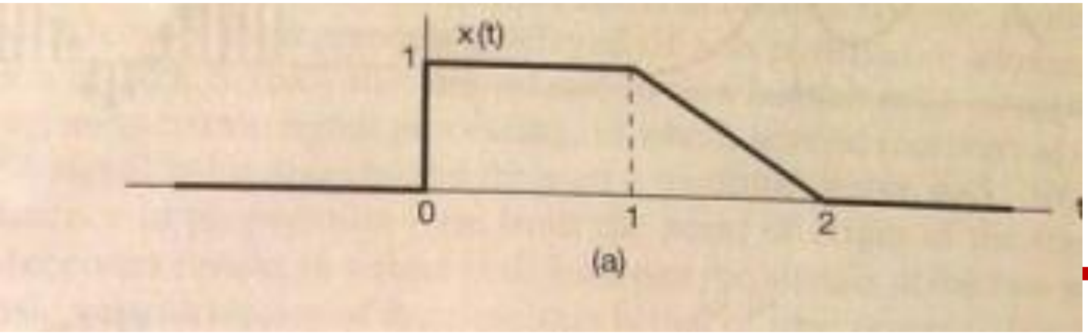
$$\phi(t) = x(at) \qquad (1.12)$$

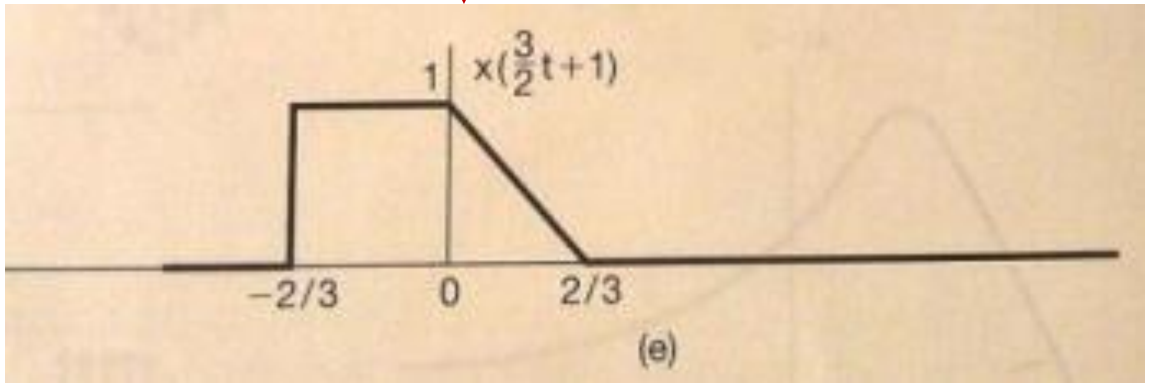
Using a similar argument, we can show that $x(t)$ expanded (slowed down) in time by a factor a ($a > 1$) is given by

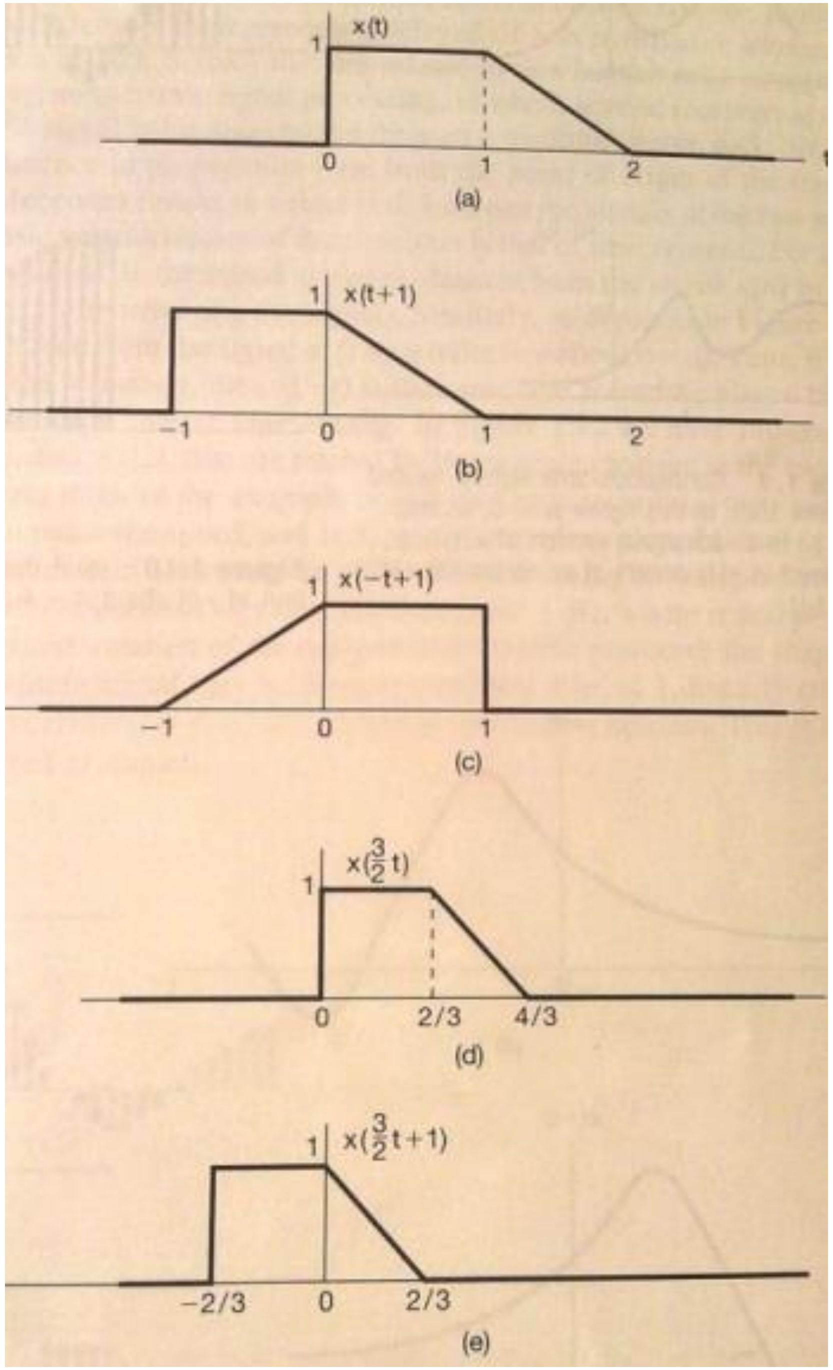
$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (1.13)$$

Figure 1.6c shows $x(t/2)$, which is $x(t)$ expanded in time by a factor of 2. Observe that in a time-scaling operation, the origin $t = 0$ is the anchor point, which remains unchanged under the scaling operation because at $t = 0$, $x(t) = x(at) = x(0)$.

Bağımsız değişken dönüşümü ile bir sinyalde yapılabilecek değişikliklere bir örnek






x(t)
1
0
1
2
t
(a)
1
x(t+1)
−1
0
1
2
(b)
1
x(−t+1)
−1
0
1
(c)
x(3/2 t)
1
0
2/3
4/3
(d)
1
x(3/2 t+1)
−2/3
0
2/3
(e)

Sistemleri sınıflandıralım

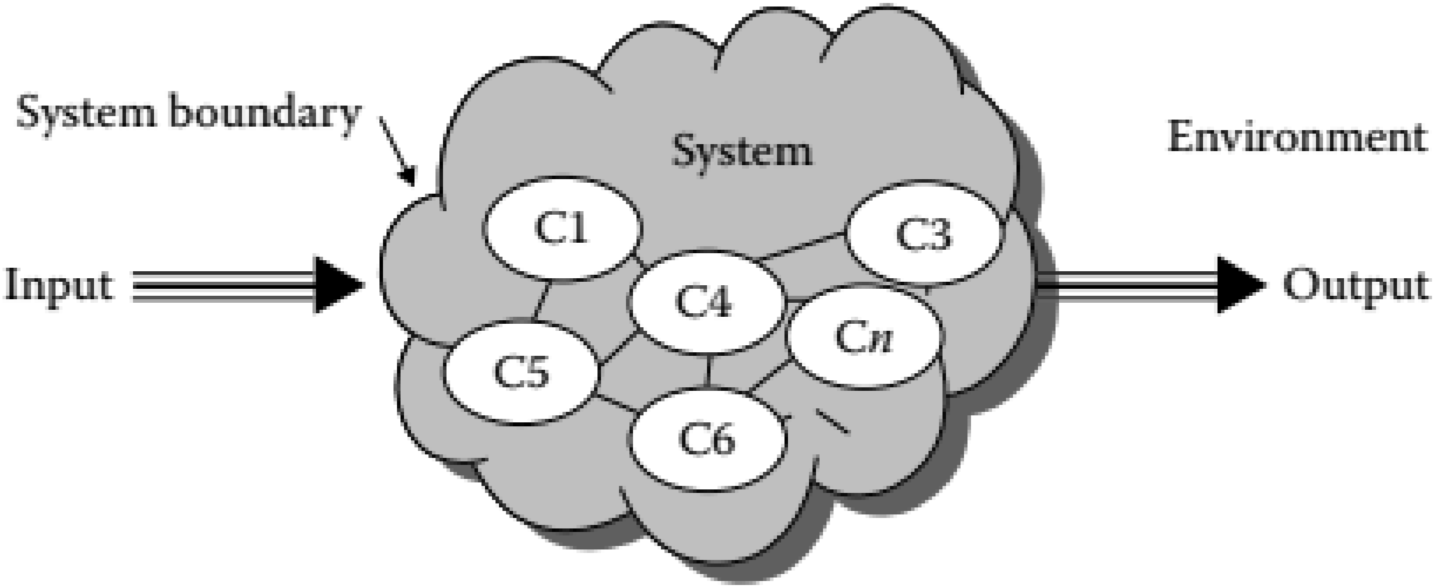
Sistemler ve Sınıflandırılmaları

- Bir sistem, girişine uygulanan bir sinyali belli bir matematiksel kurala göre işleyerek çıkışında bir sinyal üreten mekanizmadır.

  - Medical/biological systems
  - Socioeconomic systems
  - Communication and information systems
  - Planning systems
  - Solar system
  - Environmental systems
  - Manufacturing systems
  - Management systems
  - Transportation systems
  - Physical systems—electrical, mechanical, thermal, hydraulic systems, and combinations of them

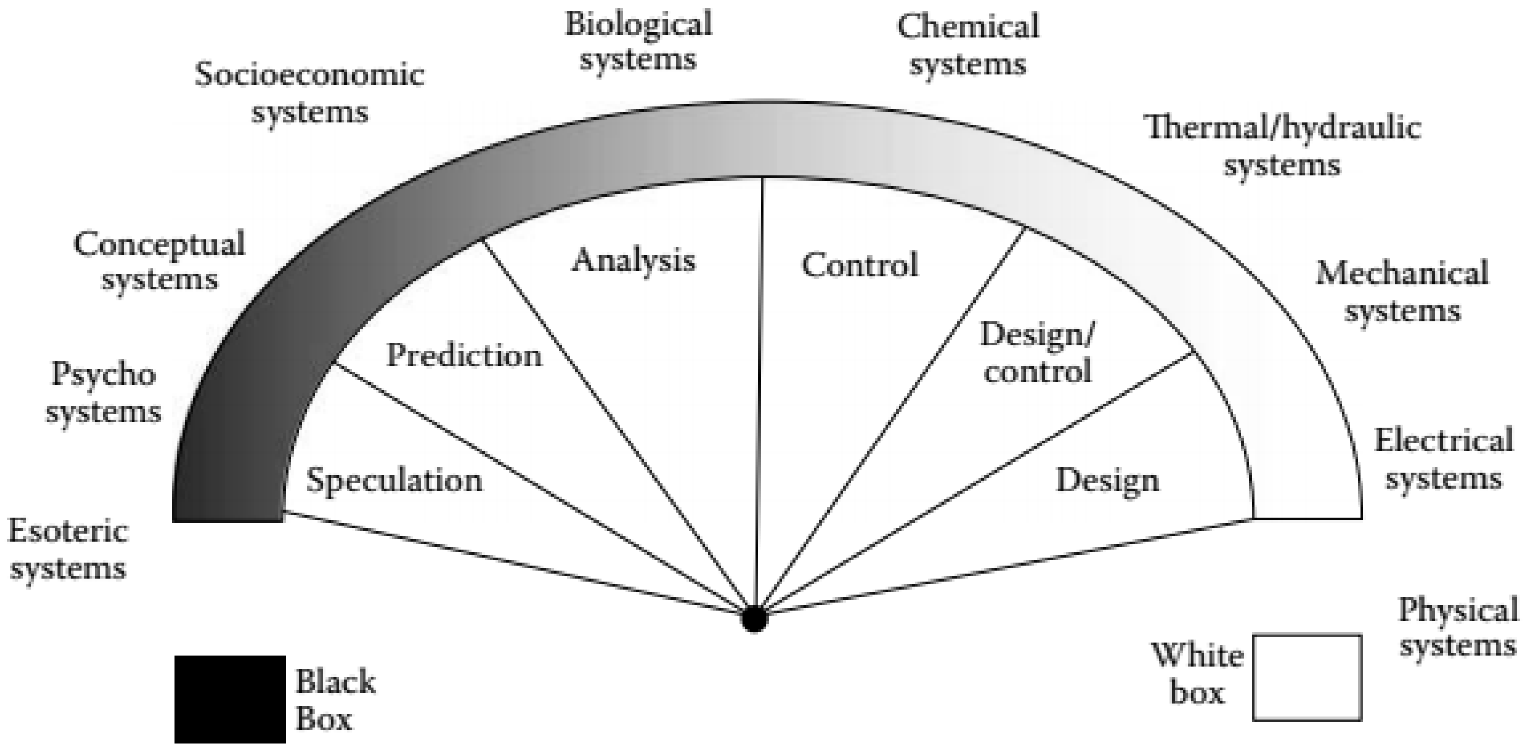
Sistemler ve Sınıflandırılmaları

- Bir sistem, girişine uygulanan bir sinyali belli bir matematiksel kurala göre işleyerek çıkışında bir sinyal üreten mekanizmadır.



System as collection of interconnected components.

According to the Interactions



Classification of system based on complexity.

Sistemler

x sinyali sistemin giriş ve y sistemin çıkış sinyali olmak üzere

$$y = \mathbb{T}\{x\} \qquad \xrightarrow{x} \boxed{\mathbb{T}\{.\}} \xrightarrow{y}$$

$\mathbb{T}\{.\}$ sembolü giriş işaretini çıkış işaretine dönüştüren sistemin matematiksel kuralını temsil etmektedir.

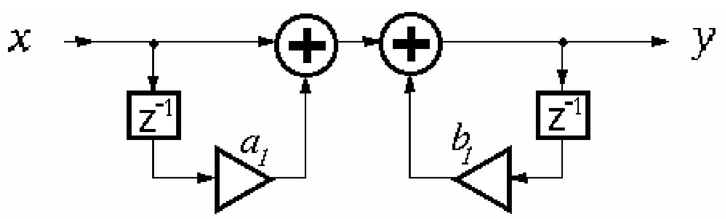
$\mathbb{T}\{.\}$ operatörü

- sürekli-zamanlı sistemler için diferansiyel denklemler, ayrık-zamanlı sistemler içinse fark denklemleri

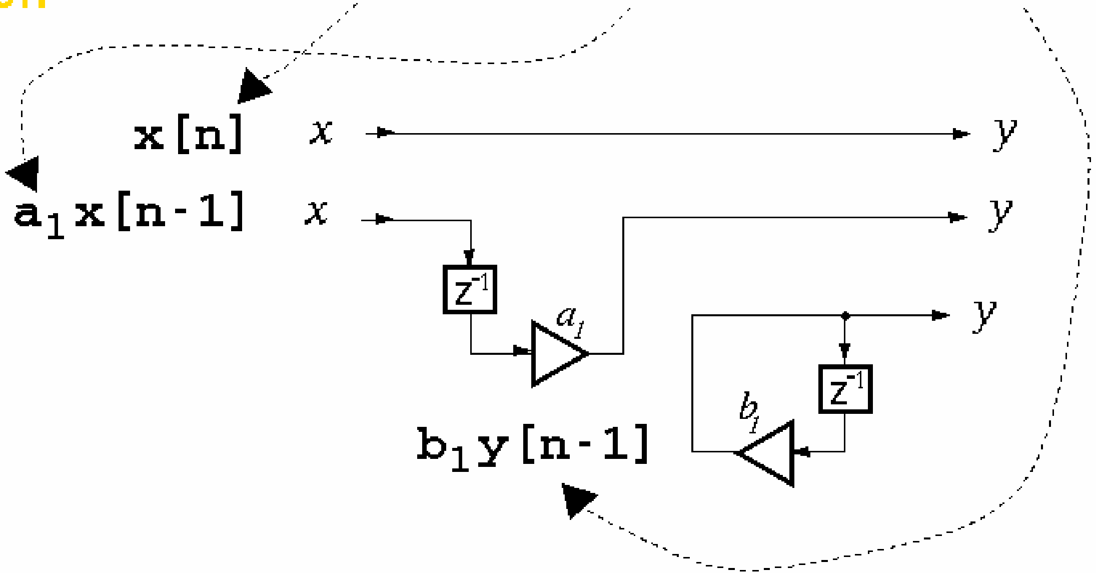
Diferansiyel denklem örneği

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_e(t) =& ((h_e^{rest} - h_e) + \psi_{ee}(h_e)I_{ee} + \psi_{ie}(h_e)I_{ie})/\tau_e, \\
\dot{h}_i(t) =& ((h_i^{rest} - h_i) + \psi_{ei}(h_i)I_{ei} + \psi_{ii}(h_i)I_{ii})/\tau_i, \\
\dot{I}_{ee}(t) =& J_{ee}, \\
\dot{J}_{ee}(t) =& -2\gamma_e J_{ee} - \gamma_e^2 I_{ee} + [N_{ee}^{\beta} S_e(h_e) + \phi_e + p_{ee}]G_e\gamma_e e \\
& + \Gamma_1, \\
\dot{I}_{ei}(t) =& J_{ei}, \\
\dot{J}_{ei}(t) =& -2\gamma_e J_{ei} - \gamma_e^2 I_{ei} + [N_{ei}^{\beta} S_e(h_e) + \phi_i + p_{ei}]G_e\gamma_e e \\
& + \Gamma_2, \\
\dot{I}_{ie}(t) =& J_{ie}, \\
\dot{J}_{ie}(t) =& -2\gamma_i J_{ie} - \gamma_i^2 I_{ie} + [N_{ie}^{\beta} S_i(h_i) + p_{ie}]G_i\gamma_i e + \Gamma_3, \\
\dot{I}_{ii}(t) =& J_{ii}, \\
\dot{J}_{ii}(t) =& -2\gamma_i J_{ii} - \gamma_i^2 I_{ii} + [N_{ii}^{\beta} S_i(h_i) + p_{ii}]G_i\gamma_i e + \Gamma_4, \\
\dot{\phi}_e(t) =& \chi_e, \\
\dot{\chi}_e(t) =& -2\bar{\nu}\Lambda_{ee}\chi_e - (\bar{\nu}\Lambda_{ee})^2\phi_e + \\
& \bar{\nu}\Lambda_{ee}N_{ee}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\nu}\Lambda_{ee}\right)S_e(h_e), \\
\dot{\phi}_i(t) =& \chi_i, \\
\dot{\chi}_i(t) =& -2\bar{\nu}\Lambda_{ei}\chi_i - (\bar{\nu}\Lambda_{ei})^2\phi_i + \\
& \bar{\nu}\Lambda_{ei}N_{ei}^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\nu}\Lambda_{ei}\right)S_e(h_e),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Fark denklemi örneği

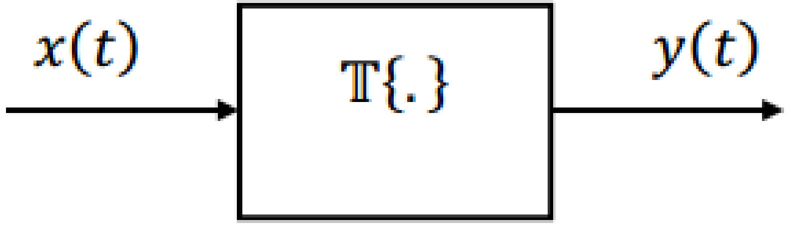


Difference Equation $y[n] = x[n] + a_1 x[n-1] + b_1 y[n-1]$

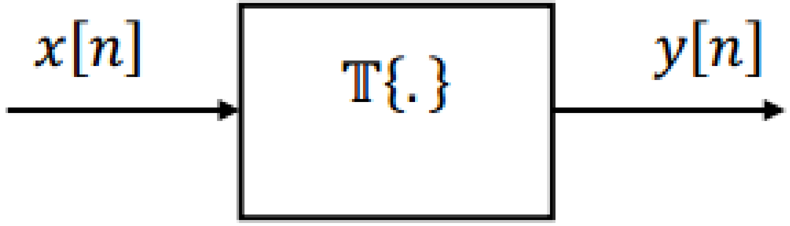


- **Sürekli ve Ayrık Zamanlı Sistemler:**

Sürekli-zamanlı bir sinyali belli bir kurala göre işleyerek yine sürekli-zamanlı bir sinyal üreten sistem *sürekli-zamanlı sistem*, ayrık-zamanlı bir sinyali belli bir kurala göre işleyerek yine ayrık-zamanlı bir sinyal üreten sistem *ayrık-zamanlı sistem* olarak adlandırılır.

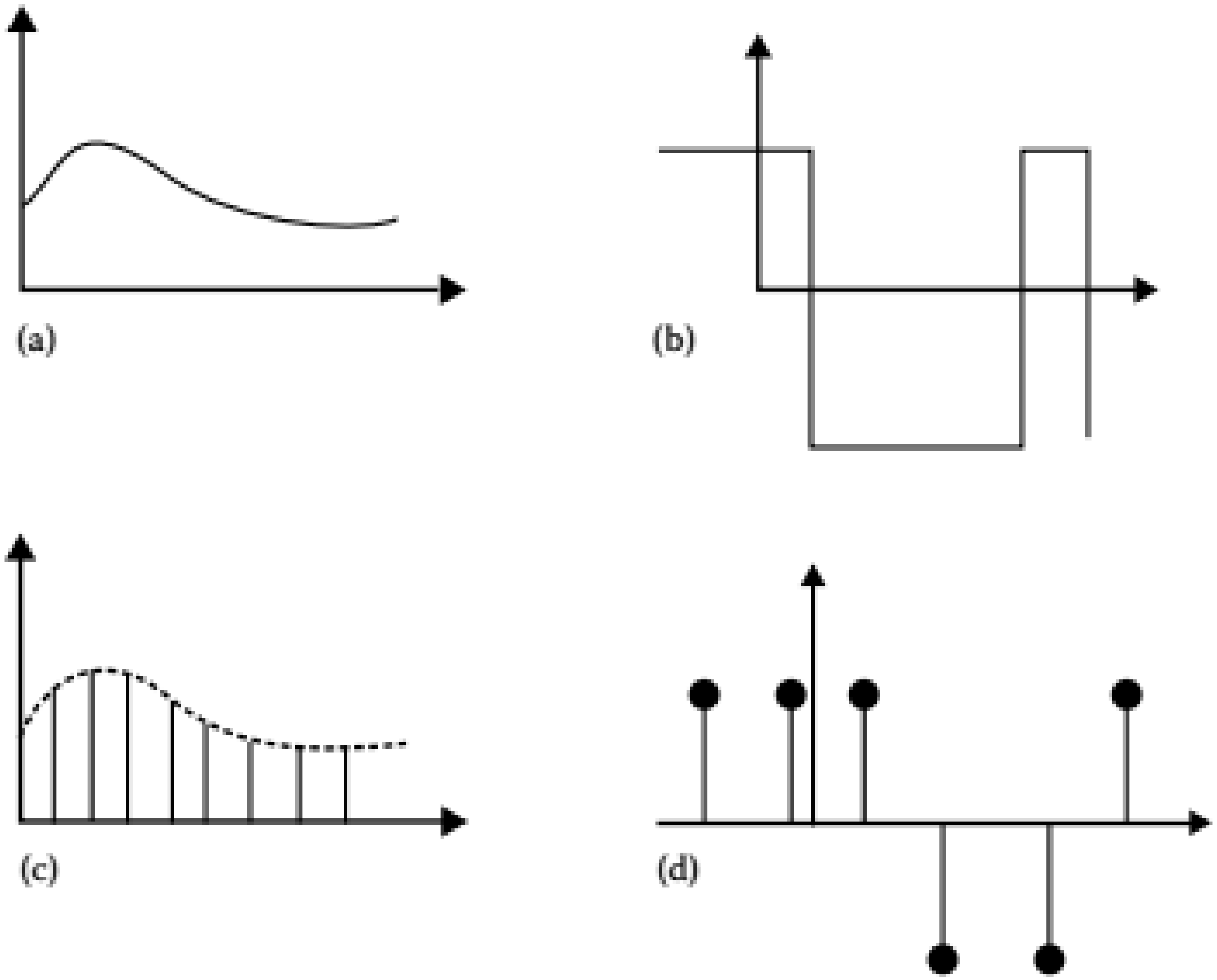


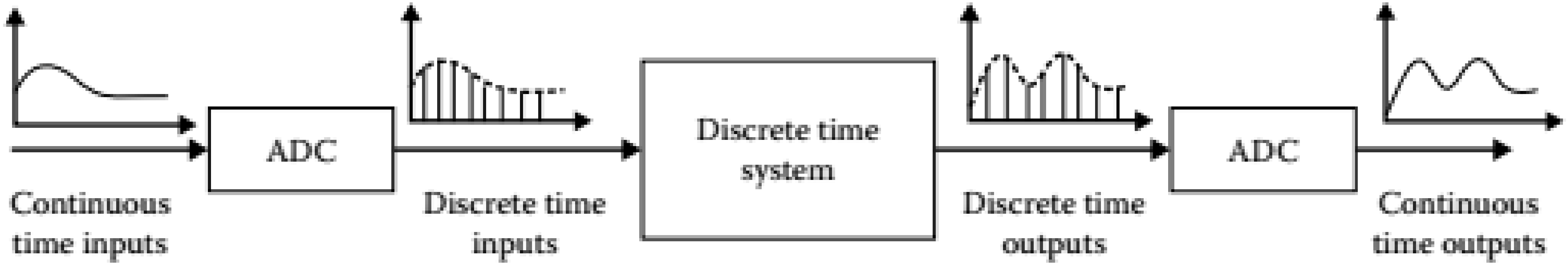
Sürekli-zamanlı sistem



Ayrık-zamanlı sistem

Dijital?
Ayrık?
Analog?
Sürekli?

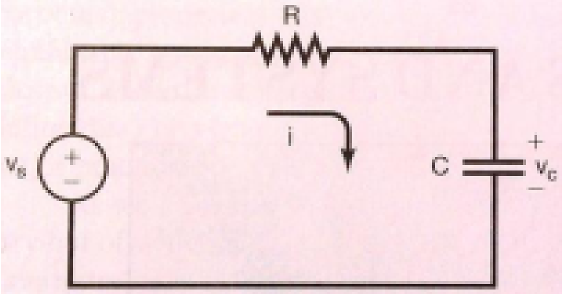




Processing continuous-time signals by discrete-time systems.

Feature	Analog Processing	Digital Processing
Speed	Fast	Moderate
Cost	Low to moderate	Moderate
Flexibility	Low	High
Performance	Moderate	High
Self-calibration	No	Yes
Data logging capability	No	Yes
Adaptive capability	Limited	Yes

Örnek: Bir sürekli-zaman sistemine örnek olarak, aşağıda verilen RC devresinde giriş işareti $v_s(t)$ ile çıkış işareti $v_c(t)$ arasındaki ilişkiyi bulalım.



Ohm yasasından, direnç üzerinden geçen akım, direnç üzerindeki gerilimin dirençin değerine bölünmesiyle elde edilir:

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

Kapasitenin tanımından $i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$

Bu iki eşitlikten, giriş ile çıkış arasındaki ilişki aşağıda verilen diferansiyel denklem olarak elde edilir:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Örnek: Bir ayrık-zaman sistemine örnek olarak, ay sonunda banka hesabındaki para miktarını ele alalım. $x[n]$ ay boyunca net para girişi (yatırılan-çekilen) ve $y[n]$ ay sonunda hesaptaki para olmak üzere, $y[n]$'nin aşağıda verilen fark denklemiyle belirlendiğini varsayalım:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n]$$

Modeldeki $1.01y[n-1]$ terimi, ilgili ayda % 1 oranında faizi modellemektedir.

- **Bellekli ve Belleksiz Sistemler:**

Bir sistemin çıkışı yalnızca o anki girişe bağlıysa bu sistem belleksiz aksi halde belleklidir.

Bir elektrik devresindeki bir direnç belleksiz bir sisteme örnek olarak gösterilebilir.

$$y(t) = Rx(t)$$

Bellekli bir sisteme örnek olarak da yine bir elektrik devresindeki bir kondansatör verilebilir.

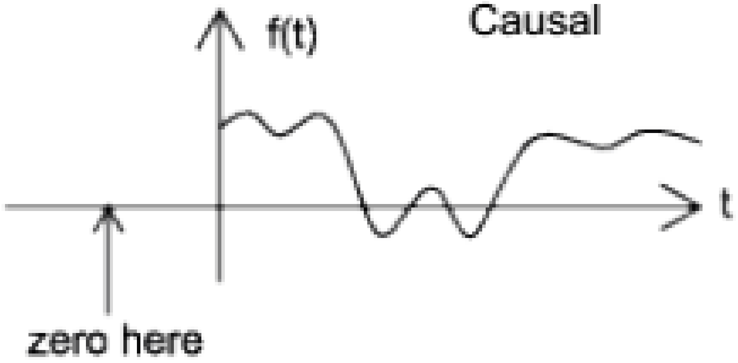
Giriş işareti $x(t)$'nin akım, çıkış işareti $y(t)$'nin de gerilim olduğu düşünülürse,

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad \text{yazılabilir}$$

• Nedensel ve Nedensel-Olmayan Sistemler:

Bir sistemin herhangi bir $t = t_0$ anındaki $y(t)$ çıkışı, gelecekteki $(t > t_0)$ girişlere değil de sadece daha önceki $(t \leq t_0)$ girişlere bağlıysa bu sistem nedenseldir. Dolayısıyla, nedensel sistemlerde sisteme bir giriş uygulamadan sistemden çıkış alınamaz.

$$y(t) = 6x(t)$$
$$y(t) = 3x(t) + x(t - 0.4)$$
$$y[n] = 2x[n]$$
$$y[n] = 3x[n] + x[n - 1]$$

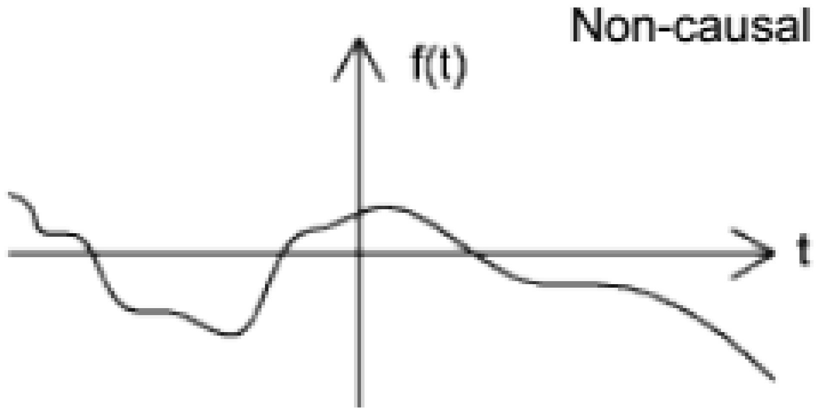


- **Nedensel ve Nedensel-Olmayan Sistemler:**

Aksi halde, yani sistemin gelecekteki girişlerine de bağlı olması durumunda nedensel-olmayan sistem olur. Aşağıdaki sistemler nedensel değildir.

$$y(t) = 6x(t + 0.1)$$
$$y(t) = 3x(t) + x(t + 0.4)$$
$$y[n] = 2x[n + 1]$$
$$y[n] = 3x[n] + x[n + 2]$$

Belleksiz sistemlerin tümü nedenseldir ama bunun tersi her zaman doğru değildir.



• Doğrusal ve Doğrusal-Olmayan Sistemler:

$y = \mathbb{T}\{x\}$ Buradaki $\mathbb{T}\{.\}$ operatörü aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa o zaman bu operatör doğrusaldır ve doğrusal bir $\mathbb{T}\{.\}$ operatörü ile temsil edilen bir sistem doğrusaldır:

1) *Toplamsallık*
   x_1 ve x_2 gibi herhangi iki sinyal için $y_1 = \mathbb{T}\{x_1\}$ ve $y_2 = \mathbb{T}\{x_2\}$ olmak üzere,

$\mathbb{T}\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2$ ise $\mathbb{T}\{.\}$ operatörü toplamsallık özelliğini sağlar.

2) *Homojenlik (Ölçekleme)*
   x gibi herhangi bir sinyal ve α gibi herhangi bir skaler için $y = \mathbb{T}\{x\}$ olmak üzere,

$\mathbb{T}\{\alpha x\} = \alpha y$ ise $\mathbb{T}\{.\}$ operatörü homojenlik özelliğini sağlar.

iki özelliği aynı anda sağlamayan bir operatör doğrusal değildir.

- A **linear system** exhibits the **additivity** property:

$$x_1 \longrightarrow y_1 \quad x_2 \longrightarrow y_2 \qquad\qquad x_1 + x_2 \longrightarrow y_1 + y_2$$

- It also must satisfy the **homogeneity** or **scaling** property:

$$x \longrightarrow y \qquad\qquad kx \longrightarrow ky$$

- These can be combined into the property of **superposition**:

$$x_1 \longrightarrow y_1 \quad x_2 \longrightarrow y_2 \qquad\qquad k_1x_1 + k_2x_2 \longrightarrow k_1y_1 + k_2y_2$$

- A non-linear system is one that is NOT linear (i.e. does not obey the principle of superposition)

Aşağıdaki sistemler doğrusaldır.

$$y(t) = 6x(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = 2x[n]$$

Aşağıdaki sistemler doğrusal değildir.

$$y(t) = 6x(t)x(t - 0.4)$$

$$y(t) = \cos x(t)$$

$$y[n] = 3(x[n])^2 + x[n - 2]$$

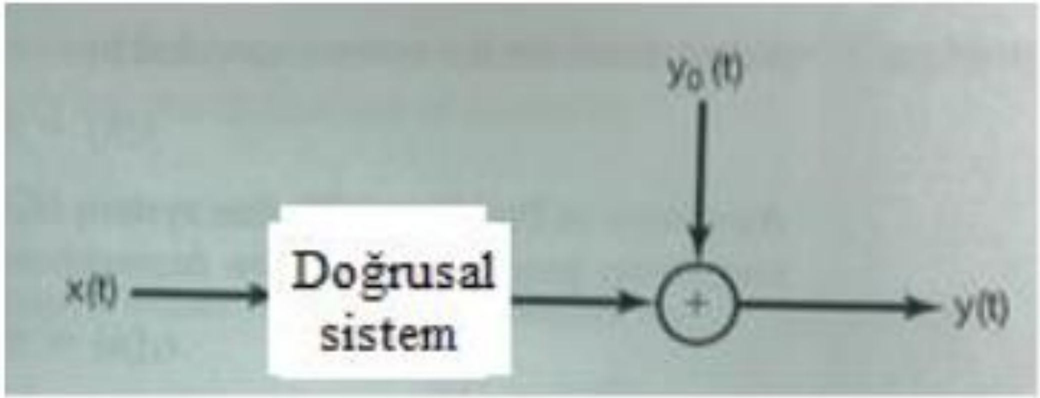
Peki…

y = 2x + 3

doğrusal bir sistem midir?

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y[n] = 2x[n] + 3$

Bu sistemin çıkışı, aşağıda gösterildiği gibi doğrusal bir sistemin çıkışıyla sistemin SIFIR-GİRİŞ yanıtına eşit olan bir işaretin toplamı olarak düşünülebilir:



Örneğimizde doğrusal sistem $x[n] \rightarrow 2x[n]$, sıfır-giriş yanıtı $y_0[n] = 3$'dür. Böyle sistemlerde, iki girişe olan yanıtlar arasındaki fark, girişlerin farkının doğrusal bir fonksiyonudur:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}$$

• Zamanla Değişen ve Zamanla Değişmeyen Sistemler:

Bir sistemin girişindeki bir zaman ötelemesi (veya gecikmesi) çıkış sinyalinde de aynı zaman ötelemesine (veya gecikmesine) neden oluyorsa o zaman bu sistem *zamanla-değişmeyen* bir sistemdir.

$$\mathbb{T}\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$$

Bu koşul ayrık-zamanlı sistemler için $\mathbb{T}\{x[n-k]\} = y[n-k]$

Aşağıdaki sistemler zamanla-değişmez.

$$y(t) = 6x(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = 2x[n]$$

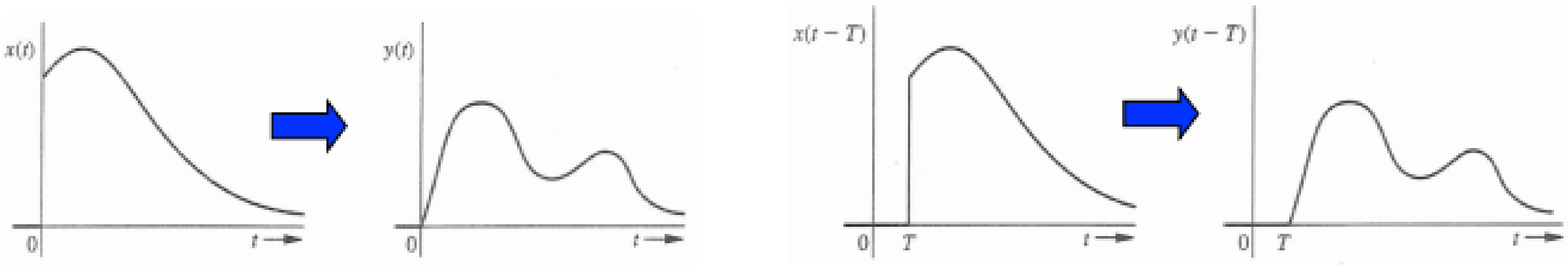
Aşağıdaki sistemler zamanla-değişir.

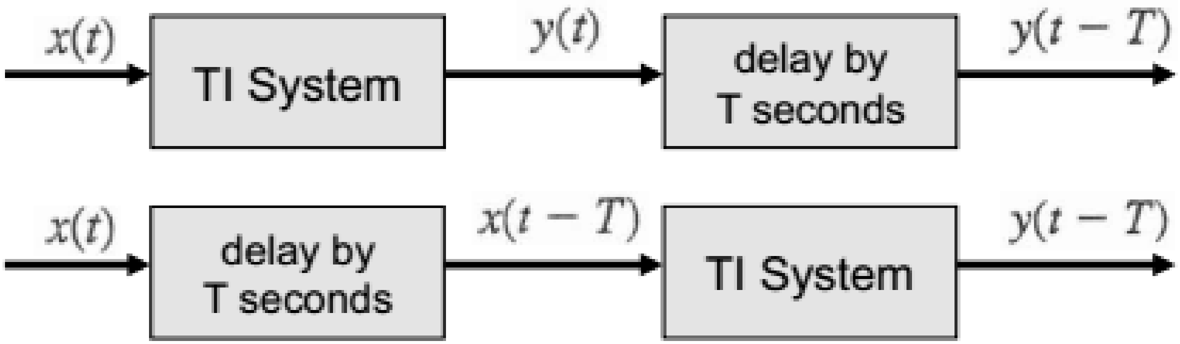
$$y(t) = x(t)\cos t$$

$$y[n] = 3nx[n] + x[n-2]$$

• Zamanla Değişen ve Zamanla Değişmeyen Sistemler:

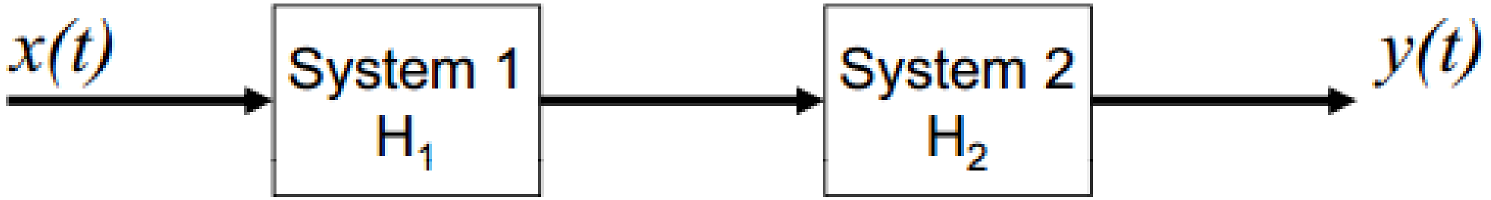
- **Time-invariant system** is one whose parameters do not change with time:





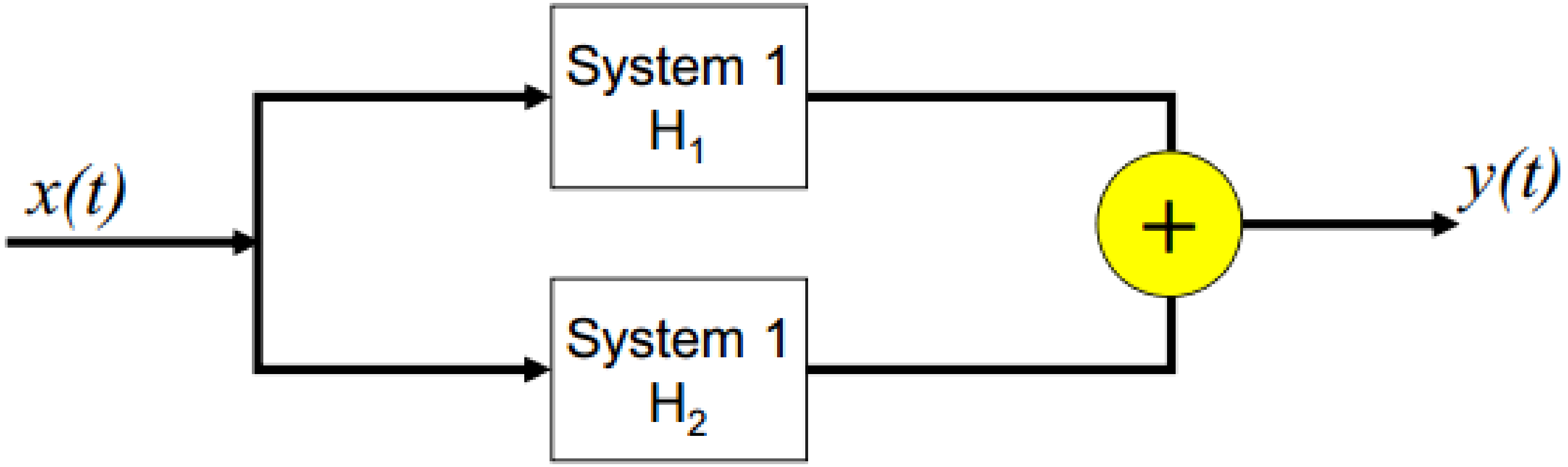
- Linear time-invariant (**LTI**) systems – main concern for this course and the Control course in 2nd year. (Lathi: LTIC = LTI continuous, LTID = LTI discrete)

Series (or cascade) Connection: $y(t) = H_2(H_1(x(t)))$



- e.g. radio receiver followed by an amplifier

Parallel Connection: $y(t) = H_2(x(t)) + H_1(x(t))$

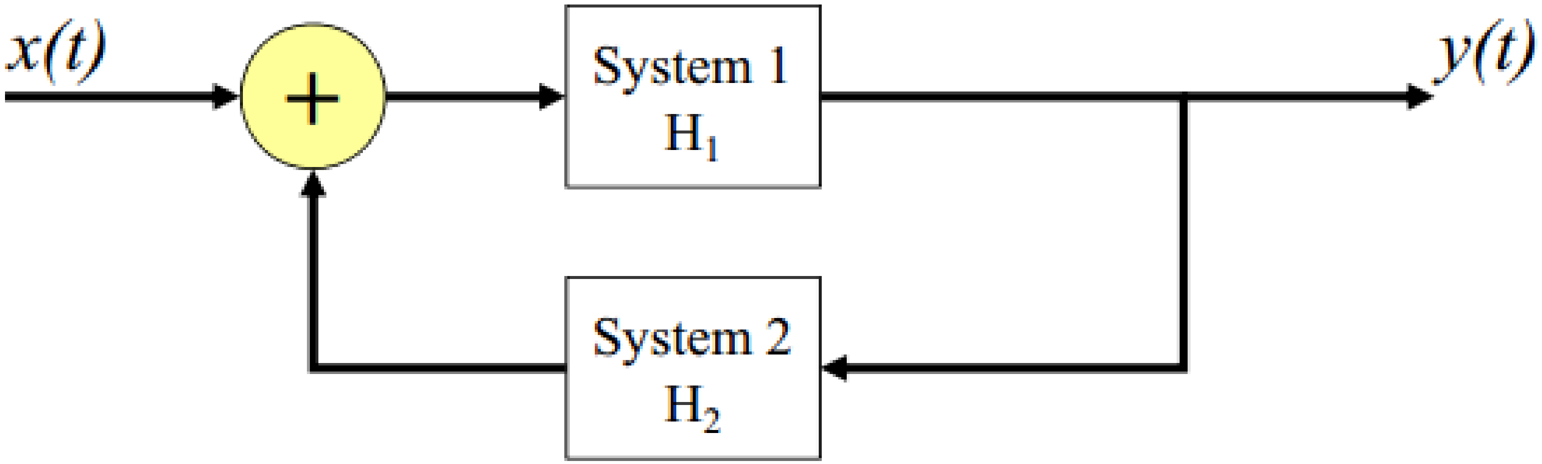


- e.g. phone line connecting parallel phone microphones

Previous interconnections were "feedforward systems"

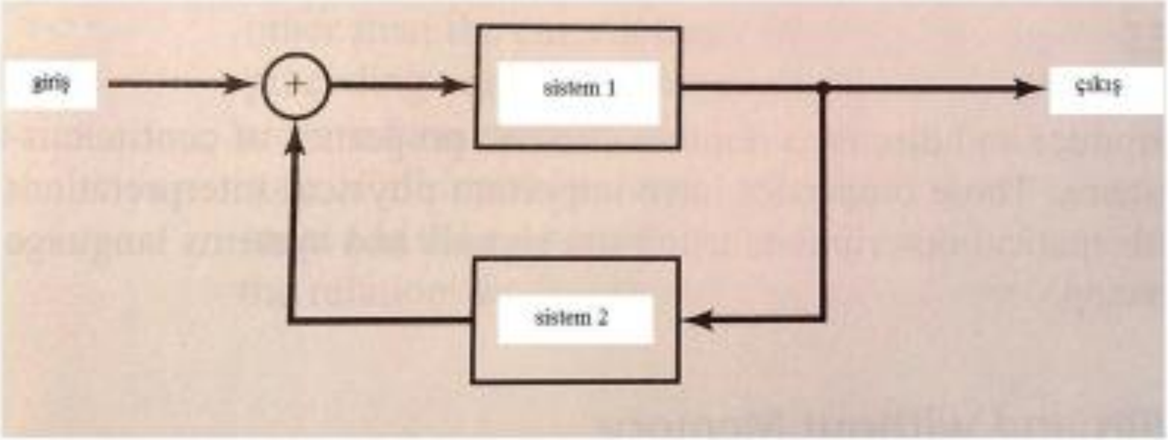
- The systems has no idea what the output is

<u>*Feedback Connection:*</u> $y(t) = H_2(\, y(t)\,) + H_1(\, x(t)\,)$

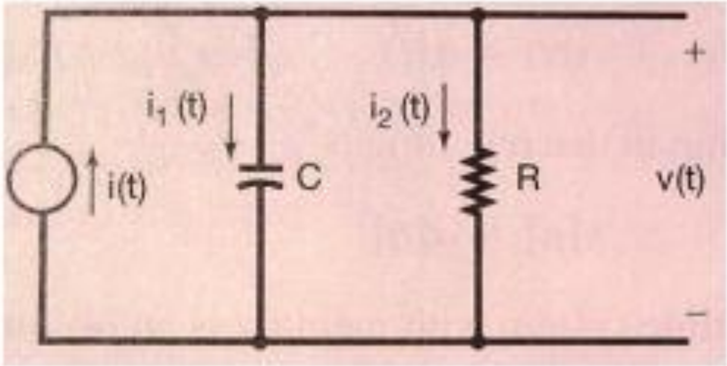


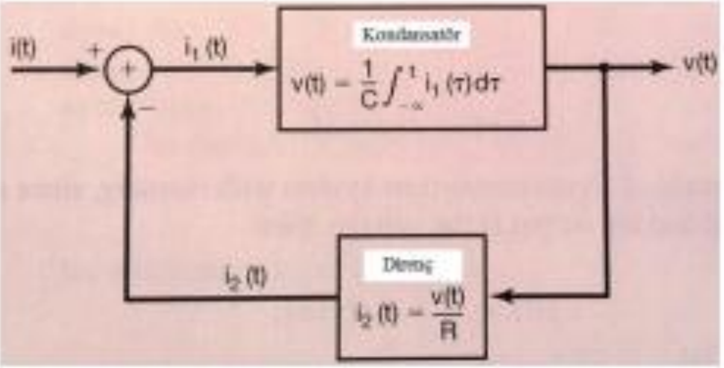
- In feedback connection, the system has the knowledge of output
- e.g. cruise control

Diğer önemli bir sınıf, aşağıda gösterilen GERİBESLEMELİ bağlamadır.

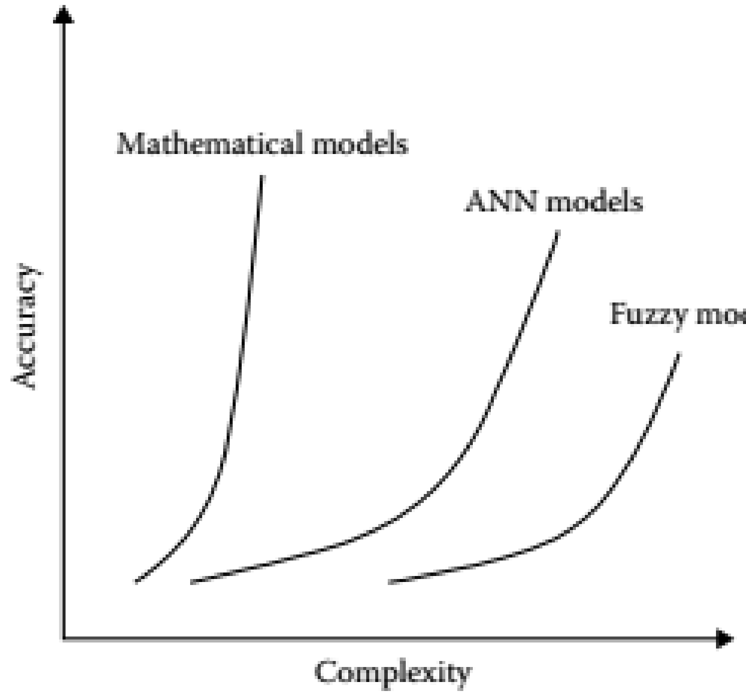


Geribesleme sistemleri birçok uygulamada kullanılmaktadır. Örneğin, sayısal olarak kontrol edilen bir uçak sisteminde gerçek ve gerekli hız, yön ve yükseklik arasındaki farklar gerekli düzeltmeleri yapmak üzere geri besleme işaretleri olarak kullanılır. Elektrik devrelerinde de geribesleme mevcuttur. Aşağıda bir elektrik devresi ve karşılık gelen blok diyagram verilmiştir

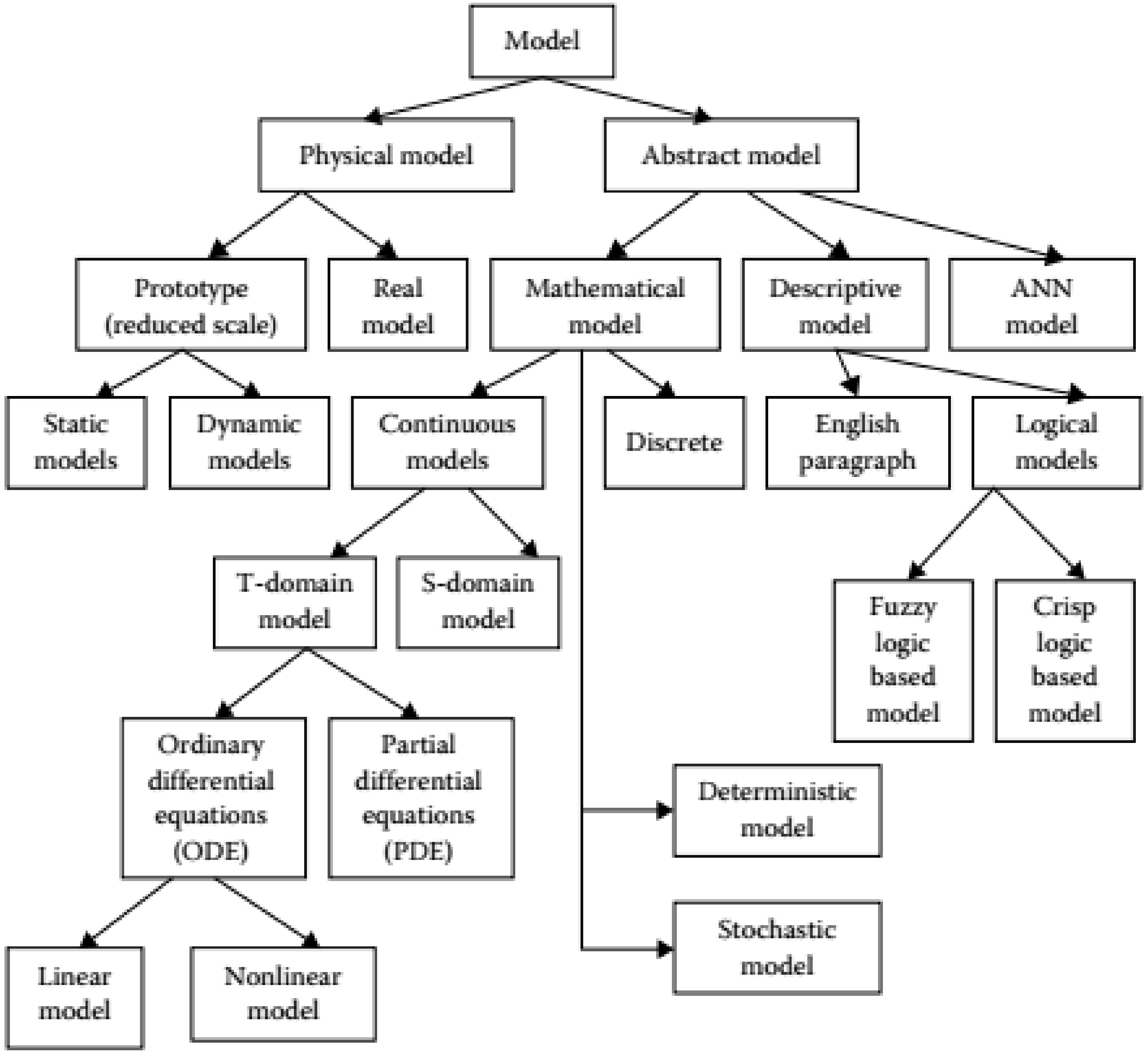




Sistem Modelleme



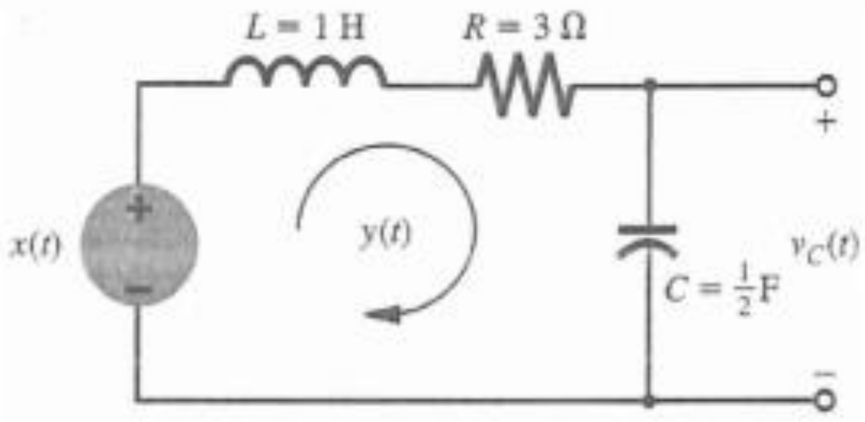
Different modeling approaches.



Pictorial representation of the classification of models.

Sistemlerin modellenmesine örnek

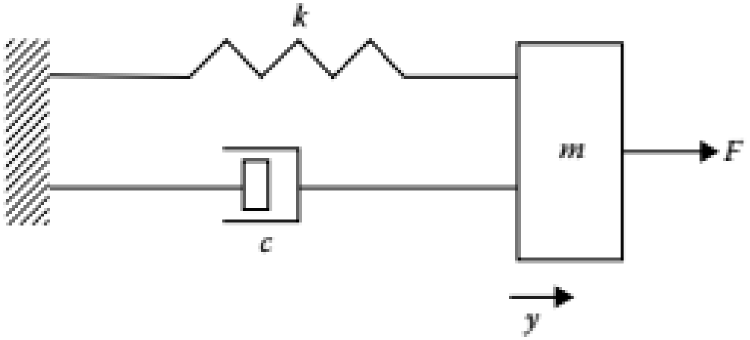
- Many systems in electrical and mechanical engineering where input *x(t)* and output loop current *y(t)* are related by **differential equations**
- For example:



$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = x(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$



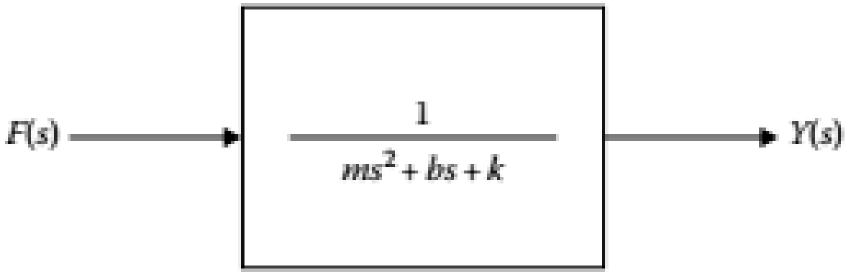
$$F - ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

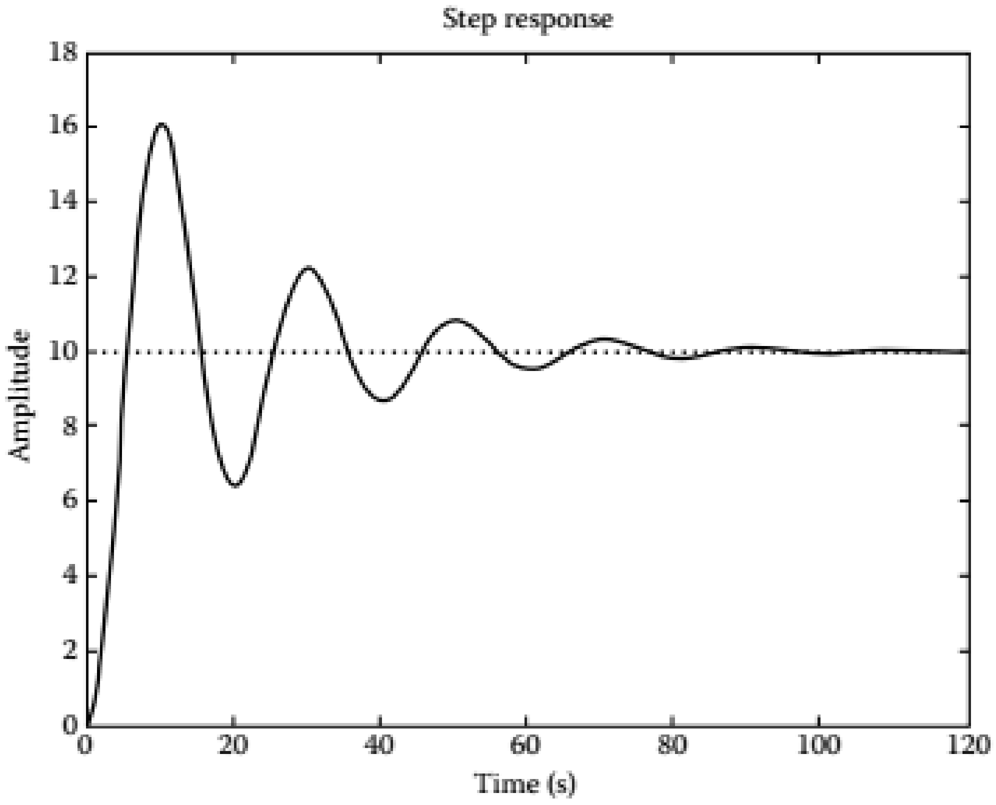
$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky$$

$$F(s) = ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

```
m=1.0; % kg
c=0.1; %
k=0.1; %
Num = [1];
Den=[m c k];
Step (Num, Den)
```





Sürekli-zamanlı sistemlerin diferansiyel denklemlerle ifadesine bir örnek

EXAMPLE 1.10

For the series *RLC* circuit of Fig. 1.34, find the input-output equation relating the input voltage $x(t)$ to the output current (loop current) $y(t)$.

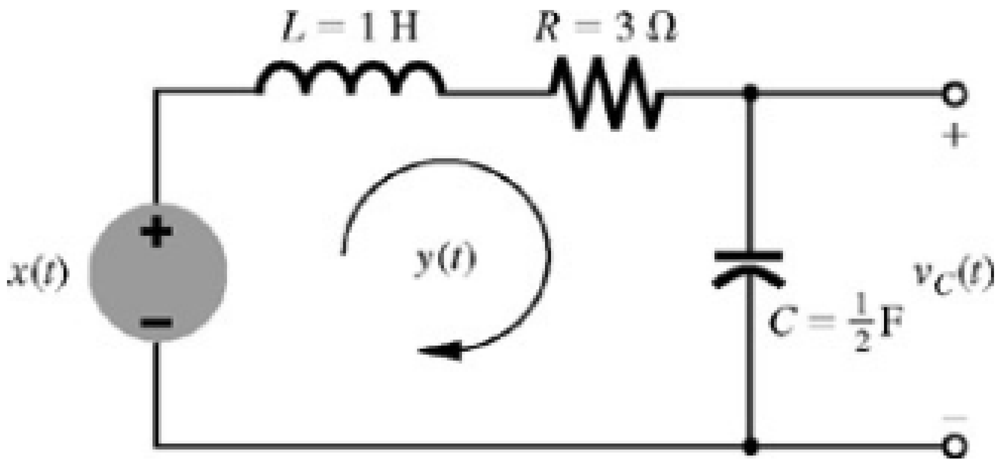
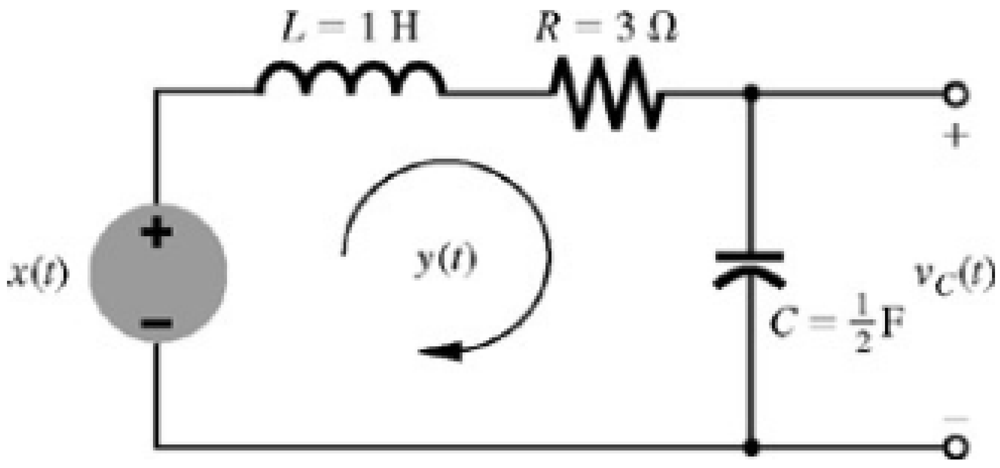


Figure 1.34

Sürekli-zamanlı sistemlere bir örnek



Application of Kirchhoff's voltage law around the loop yields

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t) \tag{1.47}$$

By using the voltage-current laws of each element (inductor, resistor, and capacitor), we can express this equation as

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau = x(t) \tag{1.48}$$

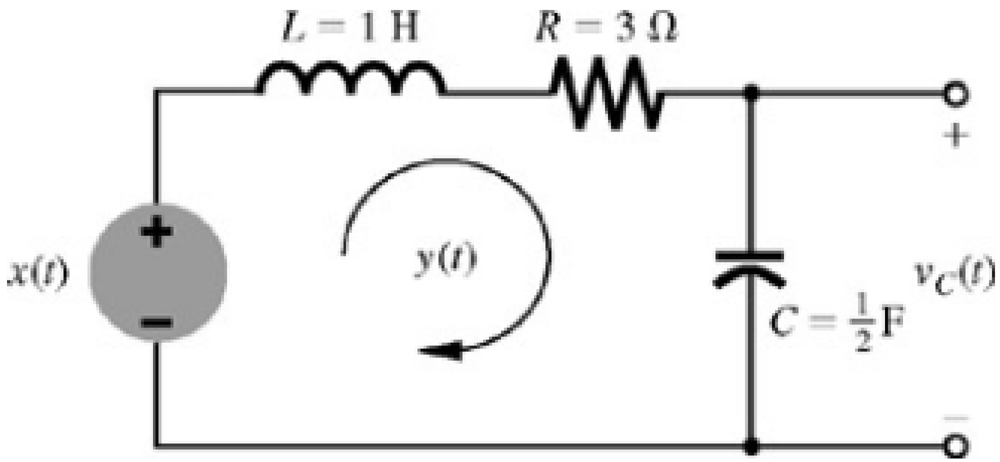
Differentiating both sides of this equation, we obtain

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1.49}$$

This differential equation is the input-output relationship between the output $y(t)$ and the input $x(t)$.

Notasyon

$$\frac{dy}{dt} \equiv Dy(t) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \equiv D^2y(t)$$



and so on. With this notation, Eq. (1.49) can be expressed as

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t) \tag{1.52}$$

The differential operator is the inverse of the integral operator, so we can use the operator $1/D$ to represent integration.[†]

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau \equiv \frac{1}{D}y(t) \tag{1.53}$$

Consequently, the loop equation (1.48) can be expressed as

$$\left(D + 3 + \frac{2}{D}\right)y(t) = x(t) \tag{1.54}$$

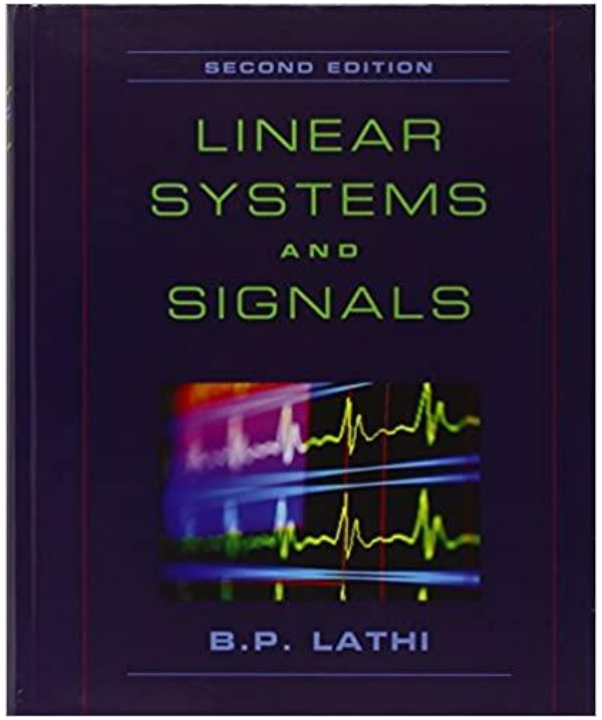
Multiplying both sides by D, that is, differentiating Eq. (1.54), we obtain

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t) \tag{1.55}$$

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

E 2.5
Signals & Linear Systems

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London



EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği