İşaret İşleme

Final Öncesi Genel Tekrar1-H15CD1

Dr. Meriç Çetin

versiyon010121

Laplace Dönüşümü

Giriş

- Darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Alternatif olarak Laplace dönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce **s–domenine** dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar **zaman domenine** dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Laplace dönüşümü sayesinde bir LTI sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

Pierre-Simon de Laplace

Laplace Dönüşümünün Tanımı

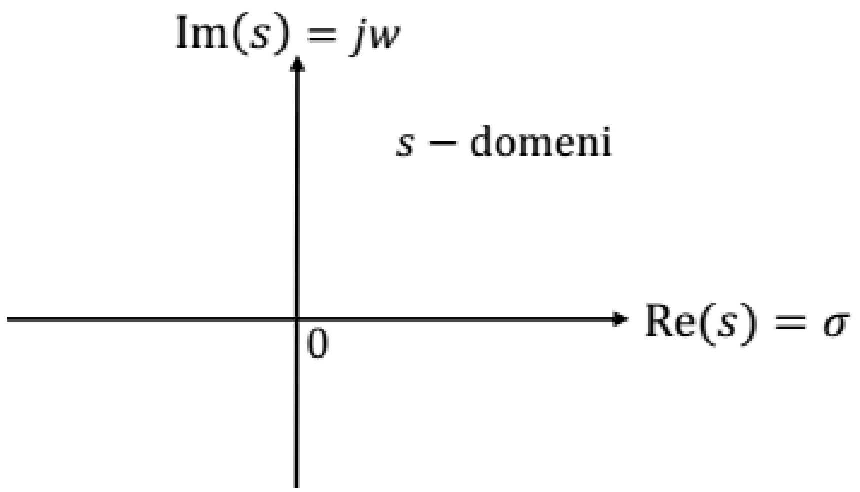
Sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümü $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ile gösterilir

ve şu şekilde tanımlanır:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

buradaki s değişkeni $s = \sigma + jw$ şeklinde karmaşık bir değişkendir.



Laplace Dönüşümü X(s)'in Sıfırları ve Kutupları

Laplace dönüşümü olan $X(s)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n} \qquad = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

burada a_k ve b_k'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \leq n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k'lara $X(s)$'in *sıfırları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k'lara da $X(s)$'in *kutupları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = \infty$ olmaktadır.

Tablo Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(s)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
s-domeninde Öteleme	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$X\left(\frac{s}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-s)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$
s-domeninde Türev	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$
Türev	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

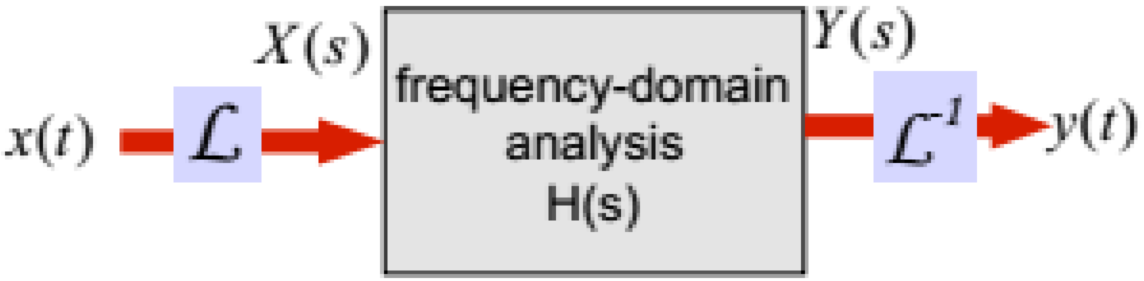
Ters Laplace Dönüşümü

Ters Laplace Dönüşümü

$X(s)$ sinyalinden $x(t)$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters Laplace dönüşümü ile sağlanır:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

bu derste ters Laplace dönüşümü almak için kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.



Transfer Fonksiyonu

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Bir önceki bölümde, $h(t)$ darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir $x(t)$ sinyali uygulandığında $y(t)$ çıkışının

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

konvolüsyonu ile bulunabileceği ve bu nedenle de $h(t)$ darbe cevabının sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabileceği ifade edilmişti. Laplace dönüşümünün özelliklerinden olan

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

şeklindeki konvolüsyon özelliği kullanılırsa,

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) = Y(s)$$

Transfer Fonksiyonu Kavramı-devam

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) = Y(s)$$

ifadesi elde edilir. Burada $X(s)$, $H(s)$ ve $Y(s)$ sırasıyla $x(t)$, $h(t)$ ve $y(t)$'nin Laplace dönüşümleridir. Aynı eşitlik

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ile ifade edilebilir. $h(t)$'nin Laplace dönüşümü $H(s)$'ye *transfer fonksiyonu* denir. Artık, darbe cevabı bilinen bir sisteme belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali transfer fonksiyonu yardımıyla bulunabilir.

Laplace Transformu ve Diferansiyel Denklemler

Laplace Transformu ve Diferansiyel Denklemler

Önceki bölümden bilindiği gibi, N. mertebeden sürekli-zamanlı DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi, aşağıdaki gibi sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemle ifade edilebilmektedir:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \cdots + a_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \cdots + b_M x^{(M)}(t)$$

buradaki a_k ve b_k katsayıları reel ve sabit katsayılardır. Şimdi, giriş-çıkış ilişkisi bu şekildeki bir denklem ile ifade edilen DZD bir sistemin transfer fonksiyonunu bulalım: İlk olarak denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım:

$$a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 s^2 Y(s) + \cdots + a_N s^N Y(s) = b_0 X(s) + b_1 s X(s) + \cdots + b_M s^M X(s)$$
$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N) Y(s) = (b_0 + b_1 s + \cdots + b_M s^M) X(s)$$

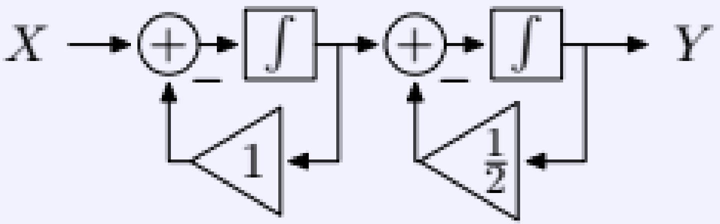
Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_M s^M}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N}$$

Özetle;

Summary: Relations among CT representations

Block Diagram



System Functional

$$\frac{Y}{X} = \frac{2\mathcal{A}^2}{2 + 3\mathcal{A} + \mathcal{A}^2}$$

Impulse Response

$$h(t) = 2(e^{-t/2} - e^{-t})\,u(t)$$

Laplace transform

Differential Equation

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 2x(t)$$

System Function

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{2s^2 + 3s + 1}$$

Z Dönüşümü

Giriş

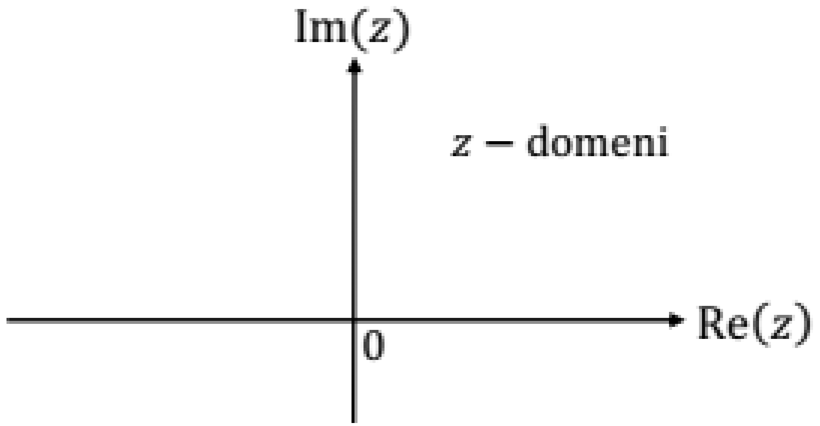
- Önceki bölümde görüldüğü gibi darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, ayrık-zamanlı giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Buna alternatif olarak zdönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce Z-domenine dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar zaman domenine dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Z-dönüşümü sayesinde bir DZD sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

Z Dönüşümünün Tanımı

Ayrık-zamanlı bir $x[n]$ işaretinin z-dönüşümü $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

buradaki z değişkeni $z = re^{j\Omega}$ biçiminde karmaşık bir değişkendir. z-dönüşümünün bulunduğu ortama aşağıda görüldüğü gibi z-*domeni* adı verilmektedir. z-dönüşümü ile ayrık zaman değişkeni olan n-domenindeki bir $x[n]$ sinyali z-domenindeki bir $X(z)$ sinyaline dönüştürülmektedir.



Z Dönüşümü X[z]'in Sıfırları ve Kutupları

z-dönüşümü olan $X(z)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n)}$$

burada a_k ve b_k'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \le n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k'lara $X(z)$'nin *sıfırları* denmektedir çünkü z'nin bu değerleri için $X(z) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k'lara da $X(z)$'nin *kutupları* denmektedir

Tablo z-Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x[n]$	$X(z)$
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Doğrusallık	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Zamanda Öteleme	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$
z_0^n ile Çarpma	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Zamanda Genişletme	$x_{(m)}[n]$	$X(z^m)$
Zamanda Geri Dönüş	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Zamanda Fark	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
n ile Çarpma	$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(z)X_2(z)$

Tablo Bazı z-Dönüşüm Çiftleri

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert \le N \\ 0 & \lvert n\rvert > N\end{cases}$	$\frac{z^{N+1}-z^{-N}}{z-1}$
$e^{\mp j\Omega_0 n}u[n]$	$\frac{z}{z-e^{\mp j\Omega_0}}$
$\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-\cos(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
$\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
$r^n\cos(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-r\cos(\Omega_0)z}{z^2-2r\cos(\Omega_0)z+r^2}$
$r^n\sin(\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\Omega_0)z}{z^2-2r\cos(\Omega_0)z+r^2}$

Ters Z Dönüşümü

$X(z)$ sinyalinden $x[n]$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters z dönüşümü ile sağlanır:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

burada C eğrisi orjini saat yönünün tersinde çevreler. Ancak, bu derste ters z-dönüşümü almak için daha çok aşağıda anlatıldığı gibi kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.

Ters Z Dönüşümü

- Kısmi Kesirlere Açılım

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_t)}$$

burada z_k'lar $X(z)$'in sıfırları, p_k'lar da $X(z)$'in kutuplarıdır ve hepsi tek katlıdır. Ters z-dönüşümünde kolaylık olması açısından $X(z)$ yerine $\frac{X(z)}{z}$ kısmi kesirlere ayrılır:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_t}$$

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Bir önceki bölümde, $h[n]$ darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir $x[n]$ sinyali uygulandığında $y[n]$ çıkışının

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

konvolüsyonu ile bulunabileceği ve bu nedenle de $h[n]$ darbe cevabının sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabileceği ifade edilmişti. z-dönüşümünün özelliklerinden olan

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

şeklindeki konvolüsyon özelliği kullanılırsa,

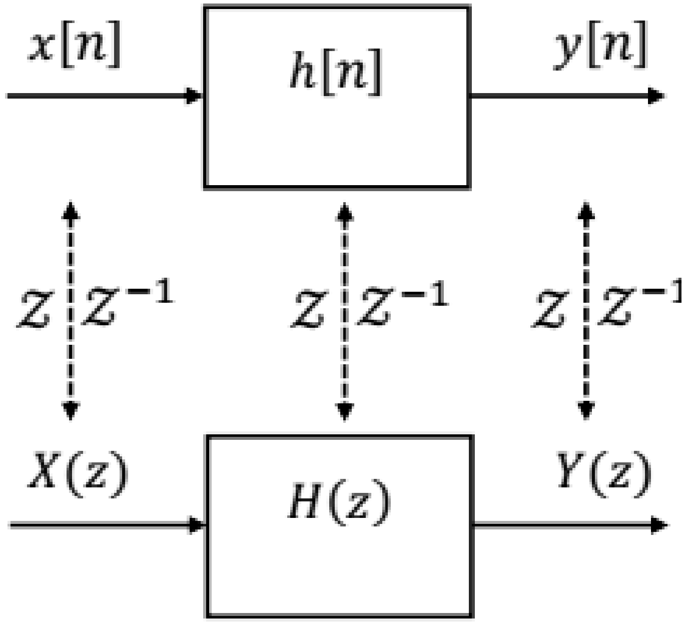
$$y[n] = x[n] * h[n] \leftrightarrow X(z)H(z) = Y(z)$$

ifadesi elde edilir. Burada $X(z)$, $H(z)$ ve $Y(z)$ sırasıyla $x[n]$, $h[n]$ ve $y[n]$'nin z-dönüşümleridir.

Transfer Fonksiyonu Kavramı-devam

Aynı eşitlik $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ile ifade edilebilir. $h[n]$'nin z-dönüşümü $H(z)$'ye *transfer fonksiyonu* denir. Artık, darbe cevabı bilinen bir sisteme belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali transfer fonksiyonu yardımıyla bulunabilir. Bu nedenle de DZD bir sistemin transfer fonksiyonu sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabilir. Bunu aşağıdaki şekille görmek mümkündür.



Z Dönüşümü ve Fark Denklemleri

Önceki bölümlerden bilindiği gibi, N. mertebeden ayrık-zamanlı DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi, aşağıdaki gibi sabit katsayılı doğrusal bir fark denklemiyle ifade edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M] \end{aligned}$$

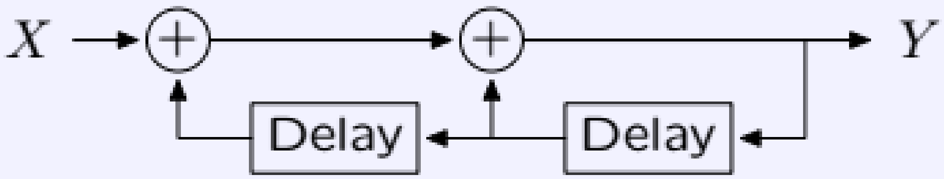
buradaki a_k ve b_k katsayıları reel ve sabit katsayılardır. Şimdi, giriş-çıkış ilişkisi bu şekildeki bir denklem ile ifade edilen DZD bir sistemin transfer fonksiyonunu bulalım: İlk olarak denklemin her iki tarafının z-dönüşümünü alalım:

$$\begin{aligned} a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \cdots + a_N z^{-N} Y(z) \\ = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z) \end{aligned}$$

Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Block Diagram



System Functional

$$\frac{Y}{X} = \mathcal{H}(\mathcal{R}) = \frac{1}{1 - \mathcal{R} - \mathcal{R}^2}$$

Unit-Sample Response

$$h[n]:\ \ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Difference Equation

$$y[n] = x[n] + y[n-1] + y[n-2]$$

System Function

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Today we will look at relations between CT and DT representations.