BÖLÜM 2 : OLASILIK

<u>Giriş:</u> Olasılık kavramına P. Fermat ile B. Pascal'ın büyük katkıları olmuştur. Pascal hesap makinesini geliştirerek Fermat ile birlikte olasılığın temellerini oluşturmuştur. Daha sonra Rus matematikçi Kolmogorov olasılık aksiyomlarını ile sürmüştür.

Olasılığın gelişmesinde 4 anahtar sözcük önemli rol oynamaktadır.

-Deney $\longrightarrow$ experiment
-Örneklem sonucu $\longrightarrow$ sample outcome
-Örneklem uzayı $\longrightarrow$ sample space
-Olay $\longrightarrow$ event

2.1. Örneklem Uzayı:
Deney, teorik olarak belirli koşullar altında sonsuz defa tekrarlanabilen, her tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen ve olası sonuçların çok iyi tanımlandığı bir süreçten oluşur. Bir deneyin potansiyel hesaplamalarından her biri bir örneklem sonucu olarak bilinir ve "s_i ; i=1,2,3,4,…. " ile gösterilir. Bütün örneklem sonuçlarının içinde bulunduğu kümeye örneklem uzayı denir ve "S" ile gösterilir. Deneyin sonuçlarından her birine veya belli özellikleri sağlayan deney sonuçlar kümesine de olay denir.

<u>Örnek :</u> Madeni bir paranın üç kez atıldığını göz önüne alalım.

a) Örneklem uzayını belirleyiniz.

b) A olayı, yazıların turalardan daha fazla olduğu deneyleri göstersin. A olayını tanımlayınız.

Cevaplar:

a) Böyle bir deneyde 8 tane farklı sonuç vardır. Bu sonuçlar örneklem uzayını oluşturur.

$S=\{\text{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT}\}$ Örneklem uzayındaki bu 8 örneklem sonucundan başka bir sonuç yoktur.

b) Örneklem uzayından, yazıların turalardan daha fazla olduğu örneklem sonuçlarının sayısı 4'tür. Buna göre A olayı,

$$A = \{\text{YYY, YYT, YTY, TYY}\} \text{ olur.}$$

<u>Örnek:</u> İki farklı renkteki zarın birlikte (veya farklı zamanlarda) atıldığı durumu göz önüne alalım.

a) Örneklem uzayını belirleyiniz.

b) A olayı zarların üzerindeki sayıların toplamının 7 olmasını ve B olayı da iki zarın üzerindeki sayıların aynı olmasını göstersin. Buna göre A ve B olaylarını belirleyen kümeleri yazınız.

Cevaplar:

a) İki zarın atılması durumunda örneklem uzayı 6 x 6'lık bir matris olarak gösterilebilir.

$S = \{x, y = 1,2,3,4,5,6\}$.Burada x birinci zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısını, y de ikinci zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısını gösteren tam sayılardır.

A olayı

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (2,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

B olayı

b) A olayı zorların üzerindeki sayıların toplamlarının 7 olması olduğuna göre

A = $\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$ biçimindedir.

B olayı iki zarın üzerindeki sayıların aynı olması olarak tanımlanırsa,

B = $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ biçimindedir.

Bir deneyle bağlantılı olarak S örneklem uzayında tanımlanan olaylarla ilgili bir sonuç ile değil, birkaç sonuçla ilgilenilebilir. Bu durumda Kümeler Cebrinden yararlanılır. Küme, olasılık çalışmalarında olaylarla bağlantılı olarak ortaya çıkan ve matematiksel olarak olayları değerlendiren bir kurallar dizisidir. Kümeler Cebri ise birden fazla olayla ilgilendiğinde kullanım açısından büyük yararlar sağlamaktadır.

2.2. Kümelerin Birleşimi (Union) ve Kesişimi: (Intersection):

A ve B , aynı S örneklem uzayında tanımlanmış iki olay olmak üzere;
-A ve B olaylarının birleşimi AUB olarak gösterilir. AUB olayının sonuçları ya A ya B ya da her ikisinden birinden ortaya çıkar.
-A ve B olaylarının kesişimi A∩B olarak gösterilir. A∩B olayının sonuçları hem A hem de B olayından ortaya çıkar.

Örnek: Bir deste oyun kağıdından tek bir kağıt çekilsin. A olayı yedili, B olayı da karo çekilme olayını göstersin. A∩B ve AUB'yi bulunuz.

A ve B olaylarını tanımlayalım:

A = $\{$Sinek 7, Maça 7, Kupa 7, Karo 7$\}$

B = $\{$Karo1, Karo2, ..., Karo 7, … Karo Kiz, Karo Papaz$\}$

A∩B = Karo 7 ve ,

AUB={Karo 1, Karo 2, ..., Karo 6, Karo 8,…, Karo Papaz, Sinek 7, Maça 7, Kupa 7, Karo 7} olur.

<u>Örnek:</u> A olayı X^2-8X-9=0 denklemini sağlayan X'lerin;
B olayı da $X^2 + X = 0$ denklemini sağlayan X'lerin kümesi olsunlar.
A∩B ve AUB'yi belirtiniz.

A= $\{-1, 9\}$ x^2-8x-9=0 (x +1) (x-9)

B = $\{-1, 0\}$ $x^2 + x = 0$ x x+1

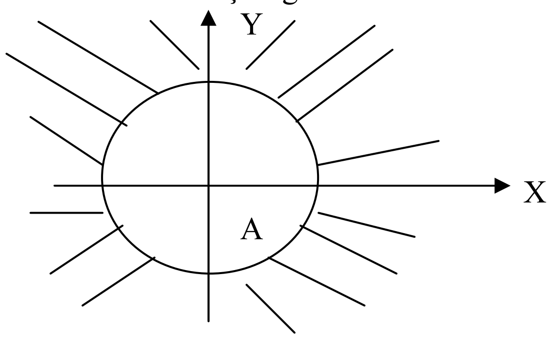
A∩B = $\{-1\}$ ve AUB = $\{-1, 0, 9\}$ olur.

AYRIK OLAYLAR: Aynı örneklem uzayında tanımlanmış A ve B olaylarının hiçbir ortak sonucu yok ise A ve B olaylarına AYRIK OLAYLAR denir. Yani A∩B = ∅ dir.

TÜMLEYEN OLAY: A, bir örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir olay olsun. A'nın tümleyeni (complement), A olayında içerilen sonuçlar hariç S örneklem uzayındaki tüm sonuçları içeren bir olaydır. A olayının tümleyeni $\overline{A}$ ya da A^c ile gösterilir.

<u>Örnek:</u> A, $x^2+y^2 < 1$ eşitsizliğini sağlayan (x,y)'lerin bir kümesi olsun. $\overline{A}$ ile bağlantılı olarak xy düzlemindeki bölgeyi çiziniz.

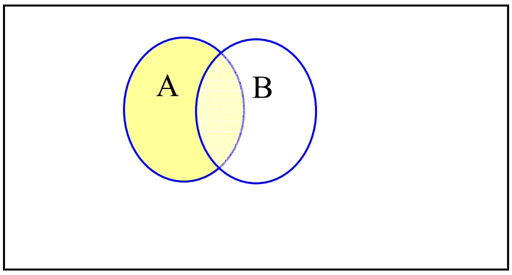
Analitik geometriden bilindiği gibi, $x^2+y^2 < 1$ eşitsizliği merkezi orijinde (yani (0,0) da) yarıçapı 1 olan bir dairenin içini gösterir.



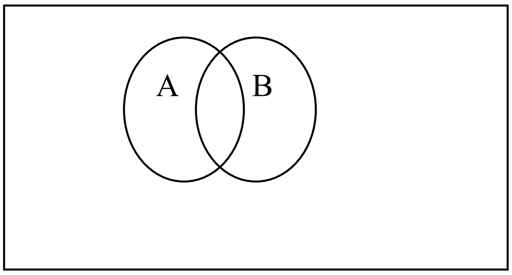
$\overline{A} = x^2 + y^2 \geq 1$

A'nın tümleyeni ($\overline{A}$), A nın dışında kalan bölgedir.

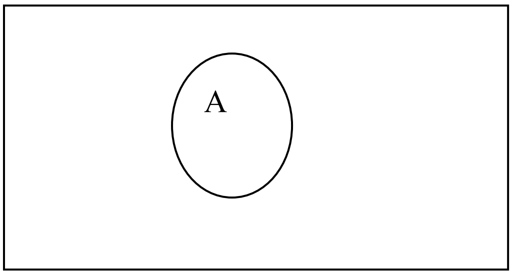
OLAYLARIN GRAFİKSEL İFADESİ:
İkiden fazla olay arasındaki bağıntıları; sadece birleşim, kesişim ve tümleyeni tanımlamalarını kullanarak anlamak zordur. Karmaşık olayların anlaşılmasında kolaylıklar sağlayan grafiksel gösterime Venn Şeması (diyagramı) denir.



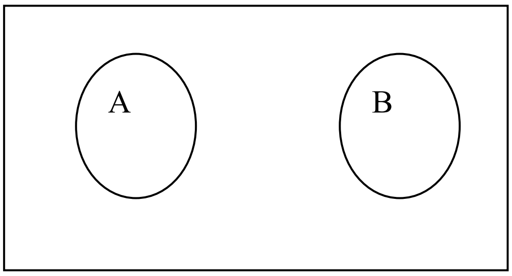
(A ve B'nin kesişimi)



AUB (A ve B'nin birleşimi)



A'nın tümleyeni



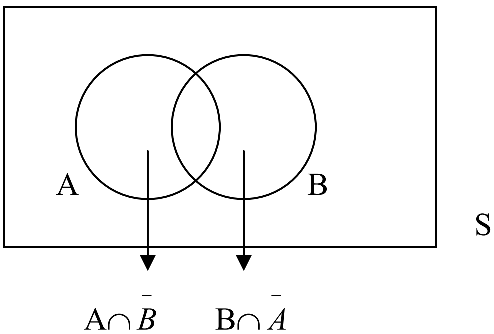
$A \cap B = \phi$

<u>Örnek:</u> Aynı örneklem uzayında tanımlanmış A ve B olayları olduğu zaman sıkça bilinmek istenilen iki durum vardır:

a) Tam olarak ikisinden birinde olma olayı
b) En fazla ikisinden birinde olma olayıdır.

Bu iki durumu Venn Şeması ile inceleyelim.

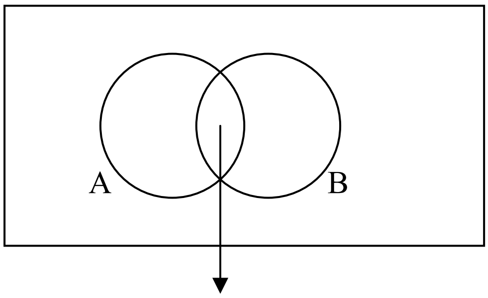
a) E olayı, ya A ya da B olayınının (ikisi birden hariç) olma durumunu göstersin.



E olayının formüle edersek,

$E = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

b) F olayı, iki olayın en fazla ikisinden birinde olma durumudur.



F = $(\overline{A \cap B})$

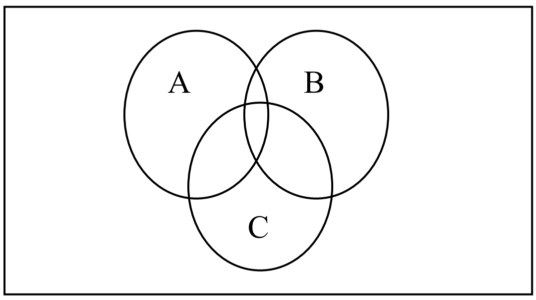
$(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

Birleşim ve kesişimin toptan tamamlayıcılarının açılımı De Morgan Kanunu olarak bilinir.

Örnek: Okul kantininde 100 öğrenci üzerinden bir araştırma yapılmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Çocuklardan 74'ü dondurmadan, 53'ü şekerden, 78'i tatlılardan, 57'si hem tatlı hem de dondurmadan hoşlanmaktadır. 46 çocuk tatlı ve şekerden hoşlanırken, sadece 31'i üçünden de hoşlanmaktadır. Hem dondurma hem de şekerlerden hoşlanan kaç çocuk vardır?

A $\longrightarrow$ dondurmadan hoşlanan çocukların kümesi,
B $\longrightarrow$ şekerden hoşlanan çocukların kümesi,
C $\longrightarrow$ tatlılardan hoşlanan çocukların kümesi,
olsun.

N(S)=100	$N(A \cap C)=57$
N(A)=74	$N(B \cap C)=46$
N(B)=53	$N(A \cap B \cap C)=31$
N(C)=78	



$N(A \cap B)=31+x=?$
x+y+z+26+31+15+6=100
x+y+57=74
x+z+46=53

Bu denklem sisteminin çözümünden x,y ve z bulunur.

x+y+z=22 (17)+z=22 z=5
x+y=17 x+5=7 x=2
z+y=17 y=15

bulunur.

$N(A \cap B)$=x+31=2+31=33 öğrenci hem dondurma hem de şekerden hoşlanır.

2.3. OLASILIK TEORİSİ

Olasılık teorisi, raslantı ya da kesin olmayan olaylarla ilgilenir. Raslantı olayı, gerçekleşmesi şansa bağlı olan önceden kesinlikle bilinmeyen olaylardır. Olasılık teorisi, raslantı olayları belli kurallara göre matematiksel yöntemlerle inceleyen bir bilim dalıdır.

Bir olayın gerçekleşme olasılığına ilişkin farklı tanımlar yapılmıştır:

Klasik Olasılık:

Bir deneyin ya da oyunun n tane olası sonucu olduğu ve bu sonuçların her birinin eşit olasılıklı olarak ortaya çıktığı kabul edilsin. Eğer A olarak tanımlanan bir olay, toplam n eşit olasılıklı durumdan m tanesinde gerçekleşiyorsa o zaman A olayının olasılığı P(A)=m/n olarak ifade edilir.
Örneğin, iki hilesiz zarın atılması durumunda 36 tane eşit olaslıklı sonuç vardır. A olayı, iki zarın üst yüzlerindeki noktaların toplamının 7olduğu biçiminde tanımlanırsa, bunu sağlayan olası 6 sonuç vardır.

$$A = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$$

A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ olarak bulunur.

Örneğin, bir para atma deneyinde, A olayı yazı gelmesi biçiminde ise $P(A)=\frac{1}{2}$ olur.

Olasılığın klasik tanımı bazı kısıtlamalara sahiptir. Örneğin sonuçların sayısının belli olmadığı durumda ne olacaktır? Bu tür sorulara cevap verebilmek için olasılığın daha genel ve deneysel bir tanımına ihtiyaç vardır.

Deneysel Olasılık:
S bir örneklem uzayı ve A bu örneklem uzayında tanımlanmış bir olay olsun. Deney aynı koşullarda n defa tekrar edilecek olsun. Deneyin her tekrarında ya A veya $\bar{A}$ gerçekleşmiş olacaktır. Toplam n tekrar içinde A nın oluş sayısı m ise ve n sonsuz derecede büyük bir sayı ise , m/n oranının n sonsuza giderken aldığı değere A olayının deneysel olasılığı denir. Yani $P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$ olarak ifade edilir.
Bu tanımın da bazı sakıncaları vardır. Örneğin n tane deneyin aynı fiziksel koşullar altında çok büyük sayıda gerçekleştirmek her zaman mümkün değildir.

Çağdaş Olasılık:
Olasılığın gerek oran gerekse limit olarak tanımlanmasındaki zorlukları gören modern matematikçiler olasılığı bir fonksiyon olarak ifade etmişlerdir. Rus matematikçi Kolmogorov (1933) dört aksiyomla (belit) olasılık fonksiyonunu tanımlamıştır.

1.Aksiyom: S örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir olay A olmak üzere bu olayın olasılığı eski değer olmayan reel bir sayıdır.
$P(A) \geq 0$'dır.

2.Aksiyom: $P(S) = 1$

3.Aksiyom: A ve B, S örneklem uzayı üzerinde tanımlanmış iki ayrık olay (mutlually exclusive events) olmak üzere, yani $A \cap B = \emptyset$ olduğunda,

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)\text{'dir.}$$

4.Aksiyom: A_1, A_2, ... olayları S örneklem uzayında tanımlanmış olsun. Her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ dir.

P Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri:

<u>Teorem 2.3.1</u>: $P(\overline{A}) = 1-P(A)$'dır.

Tanıt: $P(A \cup \overline{A})=P(S)=1$ Aks. 2'den

A ve $\overline{A}$ ayrık olaylar olduğundan, ($A \cap \overline{A} = \emptyset$)

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

$1 = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1-P(A)$ olur.

<u>Teorem 2.3.2</u>: $P(\emptyset) = 0$'dır.

Tanıt: $\emptyset = \overline{S}$ olduğundan,

$P(\emptyset) = P(\overline{S}) = 1-P(S) = 1-1 = 0$ olur.

<u>Teorem 2.3.3:</u> Eğer $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$'dir.

Tanıt: B olayı, iki ayrık olayın bileşimi olarak yazılabilir.

$B = A \cup (B \cap \overline{A})$

Buradan, $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

$P(B \cap \overline{A}) \geq 0$ olacağından $P(B) \geq P(A)$ ya da

$P(A) \leq P(B)$ olur.

<u>Teorem.2.3.4:</u> Herhangi bir A olayı için $P(A) \leq 1$'dir.

Tanıt: $A \subset S$ olduğundan Teorem 2.3.3'den

$P(A) \leq P(S)$ $P(A) \leq 1$ olur.

<u>Teorem 2.3.5:</u> $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$'dir.

Tanıt: A ve B olaylarını iki ayrık olayın birleşimi olarak yazılabiliriz.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

Bu iki denklemin olasılıklarının toplamını alırsak,

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + \underbrace{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})}_{P(A \cup B)\text{'dir.}}$$

Buradan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

Teorem 2.3.6: A, B ve C olayları aynı S örneklem uzayında tanımlanmış üç olay olmak üzere bu üç olayın birleşim;

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C)$ olarak yazılır.

Örnek**:** Bir konfeksiyon firması işçi alımında bir model oluşturmak istiyor. Bunun için şirket yöneticileri, gelecek beş yıl içinde yeni işçilerin %80'ninin kadın ve %30'unun da bekar olmasını istiyor. Her yeni beş işçiden birinin de evli erkek olmasını planlıyor. Yöneticilerin bekar bir kadını ise alması olasılığı nedir?
Burada 4 temel olay vardır:
A $\longrightarrow$ işçinin bekar olması
B $\longrightarrow$ işçinin evli olması
C $\longrightarrow$ işçinin kadın olması
D $\longrightarrow$ işçinin erkek olması
Üç olasılık soruda verilmiş. $P(C) = 0.80 \Longrightarrow P(D) = 0.20$,

$P(A) = 0,30 \Longrightarrow P(B) = 0,70$ olur. $P(B \cap D) = \frac{1}{5} = 0.20$

2x 2'lik bir çapraz tabloda verilenleri özetleyelim.

	A	B	Toplam
C			0.80
D		0.20	0.20
Toplam	0.30	0.70	1.00

$P(A \cap C) = ?$
$P(A \cap C) = P(C) - P(B \cap C)$ bulunabilir.
$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap D)$
$0.70 = P(B \cap C) + 0.20 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0.50$
$P(A \cap C) = 0.80 - 0.50 = 0.30$'u bekar kadın olur.

Örnek: Bir 5 YKr. ile bir 10 YKr. birlikte atılıyor. Örneklem uzayındaki birinci harf 5 YKr. ile ilgili sonucu, ikinci harf 10 YKr. ile ilgili sonucu göstersin.

A: En az bir T gelmesi,
B: İki T gelmesi,
C: İki Y gelmesi olarak tanımlanmış olsun.
a)A ve B ayrık olaylar mıdır?
b)A ve C ayrık olaylar mıdır?
c)A ya da B'nin gerçekleşmesi olasılığı nedir?
d)B ya da C'nin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Önce örneklem uzayını tanımlayalım: $S = \{YT, TY, YY, TT\}$ örneklem uzayındaki sonuçlar eşit olasılıklıdır.

$P(YT) = P(TY) = P(YY) = P(TT) = \frac{1}{4}$

$A = \{YT, TY, TT\} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{3}{4}$

$B = \{TT\} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{1}{4}$

$C = \{YY\} \Longrightarrow P(C) = \dfrac{1}{4}$

a) $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ayrık olaylardır.

$P(A \cap B) = P(TT) = \dfrac{1}{4}$ olduğundan A ve B ayrık olaylar değildir.

b) $A \cap C = \emptyset$ olduğu için A ve C ayrık olaylardır.

d) $P(A \cup B) = ?$ Teo. 2.3.5

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ bulunur.

d) $P(B \cup C) = ?$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ $\quad (B \cap C) = \phi$

$P(B \cup C) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ olur. $\quad$ [$P(B \cap C) = 0$'dır.]

<u>Örnek:</u> A ve B olaylarına ilişkin

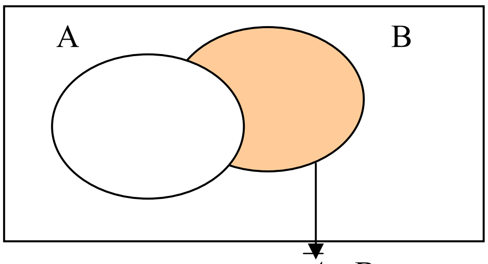
$P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{2}{5}$ ve $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ olmak üzere $P(\overline{A} \cup B)$ ve $P(A \cap \overline{B})$ olasılıklarını hesaplayınız.

$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

Teorem 2.3.1'den $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P((\overline{A} \cap B) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$



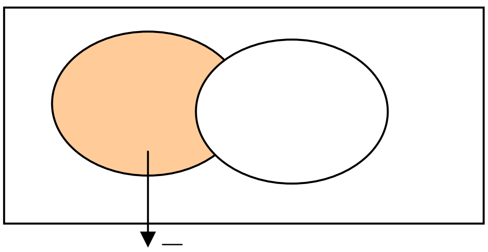
$\overline{A} \cap B$

Bulunan değerler yerine konursa,

$P(\overline{A} \cup B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5} - (\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{4}) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{12}$ bulunur.

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$



$A \cap \overline{B}$

Örnek: Bir kutuda 85 kırmızı (K) ve 5 mavi (M) bilye vardır. Bu kutudan bir çekilişte 5 bilye rasgele seçiliyor.

A: 5 bilyenin tümünün mavi

B: 2 kırmızı ve 3 mavi

olayları olsun. P(A) ve P(B) olasılıklarını bulunuz.
Klasik olasılığın tanımına göre herhangi bir A olayının ortaya çıkma olasılığı,

$$P(A) = \frac{(\dot{I}\lg ilenilen\, olayıl\;\, oluşluşsay(m))}{Deneyin\, olsı\, sonuçlarıoın\, tümü\, (n)}$$ biçimindedir. Buna göre

$$P(A) = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43949268}$$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{35700}{43949268}$$ bulunur.

2.4. OLASILIK FONKSİYONLARI

Örneklem uzayının yapısına bağlı olarak iki tür olasılık fonksiyonu vardır.
Eğer herhangi bir olasılık fonksiyonu sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıda sonuçları içeren örneklem uzayından belirlenmişse buna olasılık fonksiyonu ya da kesikli olasılık fonksiyonu denir.

Sonuçların sayılamayacak sonsuz sayıda oluşmasından meydana gelen örneklem uzaylarında tanımlanmış fonksiyonlara da olasılık yoğunluk fonksiyonuna da sürekli olasılık fonksiyonu denir. (probability density function)

Olasılık ve olasılık yoğunluk fonksiyonları, sahip oldukları örneklem uzayındaki farklılıklardan dolayı birbirinden farklı matematiksel sembollerle işlem görürler. Olasılık ve betimleyici değerlerin hesabında, kesikli olasılık fonksiyonlarının kullanılması halinde toplam işareti ($\sum$) kullanılırken, olasılık yoğunluk fonksiyonun (sürekli) kullanılması halinde de integral işareti ($\int$) kullanılır.

2.4.1: Kesikli Olasılık Fonksiyonu:

Bir deneye ilişkin örneklem uzayının sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta olması durumunda P'nin bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

a) $0 \le P(s)$, her $s \in S$ için

b) $\sum_{s \in S} P(s) = 1$

(a) ve (b)'ye bağlı olarak bir A olayı tanımlanmak istenirse herhangi bir A olayının olasılığı, A olayındaki sonuçlara bağlı olan olasılıkların toplamıdır. Yani,

$P(A) = \sum_{s \in A} P(s)$ 'dir.

Örnek: İki hilesiz (dengeli)zarın birlikte atıldığı deneyi göz önüne alalım.
a) A=(Zarların yüzeyindeki en büyük sayının 5 olması) olsun. A nın olasılığını bulunuz.
b) B=(Zarların yüzeyindeki sayıların toplamının 10 olması) olsun.B nin olasılığını bulunuz.
Çözüm:
Örneklem uzayının eleman sayısı 36'dır.

a) Örneklem uzayındaki A olayının sağlandığı sonuçlar $\{(1,5),(2,5)(3,5),(4,5),(5,5)(5,4),(5,3),(5,2),(5,1)\}$ kümesi ile verilebilir.

P(A)= $\sum_{s\in A} P(s) = \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$,

b) Örneklem uzayındaki B olayının sağlandığı sonuçlar $\{(4,6),(6,4)(5,5)\}$ kümesindeki elemanlarla verilir.

P(B) = $\sum_{s\in B} P(s) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ bulunur.

Soru:2.4.2

P(s) = $\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^s$; s=0,1,3,4,......; ve λ>0 olarak verilen bu P(s) nin bir kesikli olasılık fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

Bu fonksiyonun, kesikli olasılık fonksiyonu olabilmesi için P(s)≥0, her $s\varepsilon$ Siçin ve $\sum_{sES} P(s) = 1$ koşullarının sağlanması gerekir.

- Tüm s'ler için P(s)≥0'dır.

- $\sum_{s=0}^{\infty} P(s) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^s = \frac{1}{1+\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^s$

bir geometrik serinin toplamı için

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$; 0< x < 1 yazılabilir.

$=\frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{1+\lambda}}\right) = \frac{1}{1+\lambda}.\frac{1+\lambda}{1} = 1$ bulunur. Yani, P(s) kesikli olasılık fonksiyon olur.

Soru: 2.4.6: S örneklem uzayının sonuçları,

S=$\{s : s = 2,3,4....\}$olmak üzere P(s)=k$\left(\frac{2}{3}\right)^s$'nin olasılık fonksiyonu olması için k ne olmalıdır?

$\sum_{sES} P(s) = 1$ olma koşulundan yararlandım:

$\sum_{s=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^s = 1$ $\qquad$ $k\sum_{s=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^s = 1$

$$k\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{s}-\left(\frac{2}{3}\right)^{0}-\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=1 \text{ yazılabilir.}$$

$$\mathrm{k}\left\{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-1-\frac{2}{3}\right\}=1 \qquad \mathrm{k}\left(3-1-\frac{2}{3}\right)=1$$

$$\mathrm{k}\left(\frac{4}{3}\right)=1 \longrightarrow \mathrm{k}=\frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

2.5. Sürekli Olasılık Fonksiyonu:

Bir deneyle bağlantılı olarak S örneklem uzayının sonsuz sayıda sonuç içerdiği yani gerçek sayılar ekseninde bir aralığa düşen gerçek(reel) değerlerin tümünü aldığını varsayalım. f(*) da, S üzerinde tanımlanmış gerçek değer fonksiyonu olsun. f'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için

a) $f(y) \geq 0$; her $y \in S$ için

b) $\int_S f(y)dy = 1$

koşullarının sağlanması gerekir.

Olasılık fonksiyonu için P(s) gösterimi kullanılırken, sürekli fonksiyonların olasılık yoğunluk fonksiyonu için f(y) gösterimi kullanılmıştır.

Bir olasılık ile olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki farkın daha iyi anlaşılabilmesi için S örneklem uzayı üzerinde tanımlanmış bir A olayını göz önüne alalım.

Bu şekil üzerinde f, bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ise; y deneyin sonuçları olduğundan f(y) bir olasılık değildir. Ancak A olayının olasılığı, P(A), A şartını sağlayan interval üzerinde f fonksiyonunun integralidir.

Kesikli olasılık fonksiyonu (olasılık fonksiyonu) ile sürekli olasılık fonksiyonu (olasılık yoğunluk fonksiyonu) arasındaki temel farklılık şöyle açıklanabilir. Kesikli örneklem uzayı noktalarla ilgili olasılıklarla ilgilenirken, sürekli örneklem uzayı aralıklarla ilgili olasılıklarla ilgilenir ve bu aralıkların olasılıkları f(y) fonksiyonu altında kalan alandır.

Örnek: Başkent Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesindeki bir öğrencinin ikinci sınıftan üçüncü sınıfa geçme süresi y ile ilgili olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{9} & ; 0<y\leq 3 \text{ için} \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda biçiminde verilmiş olsun.} \end{cases}$$

a) f(y)'nin bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

b) Bir öğrencinin ikinci sınıftan üçüncü sınıfa geçme süresinin, iki ile üç yıl arasında bir süre olması olasılığını, yani P(2<Y<3) olasılığını, hesaplayınız.

Cevaplar:

a) f(y)'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için

$f(y) \geq 0$; $0 < y \leq 3$ ve

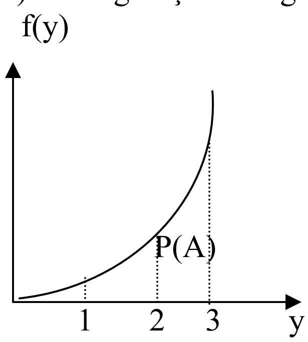
$$\int_0^3 f(y).dy = \int_0^3 \frac{y^2}{9} dy = \frac{1}{9}\frac{y^3}{3}\Big|_0^3 = 1$$

olması gerekir. Dolayısıyla f(y) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) A olayı, bir öğrencinin iki ile üç yıl arasında üçüncü sınıfa geçme olayı olsun.

P(A)= $\int_A f(y)dy = \int_2^3 \frac{y^2}{9} dy = \frac{y^3}{27}\Big|_2^3 = \frac{27}{27} - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ bulunur.

P(A) olasılığını şekil ile gösterelim.



<u>Örnek:</u> X'e ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} kx & ; \quad 0 \leq x < 1 \text{ için} \\ k & ; \quad 1 \leq x < 2 \text{ için} \\ -kx+3k & ; \quad 2 \leq x < 3 \text{ için} \\ 0 & ; \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

olmak üzere k değişmezinin(sabitinin) değerini bulunuz.

f(x) bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğuna göre tanımlı olduğu aralıklardaki integral değerleri, toplam olasılık olan 1'e eşit olmalıdır.

$$\int_0^1 kxdx + \int_1^2 kdx + \int_2^3 (-kx + 3k)dx = 1$$

$$k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + kx\Big|_1^2 - k\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + 3kx\Big|_2^3 = 1$$

$$k\left(\frac{1}{2}\right) + k(2-1) - k\left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) + 3k(3-2) = 1$$

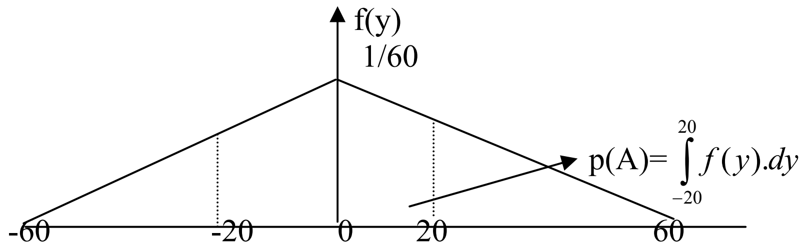
$$\frac{1}{2}k + k - \frac{5}{2}k + 3k = 1$$

$$\frac{4}{2}k = 1 \qquad \text{k=}\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Irak-Kuveyt Savaşı sırasında, Kerkük-Yumurtalık petrol borusu hattı ABD uçakları tarafından vurulabilirdi. Eğer atılan bomba boru hattının 20m. Yakınına düşerse petrol boru hattı çok büyük zarar görecektir. Y atılan bombanın petrol düştüğü noktanın boru hattına olan uzaklığı olsun. Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibi olsun..

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{60+y}{3600} & ; -60 < x < 0 \text{ için} \\ \dfrac{60-y}{3600} & ; 0 \le y < 60 \text{ için} \\ 0 & ; \text{d.d.} \end{cases}$$

Petrol boru hattının büyük zarar görme olasılığı nedir?
A olayı, petrol boru hattının zarar görmesini göstersin.
A olayının olasılığını şekil üzerinde gösterelim.



Şekilden de görüleceği gibi A'nın olasılığı (-20, 20) aralığında kalan alandır. $A = \{y : -20 \le y \le 20\}$ olarak tanımlana interval olduğu için

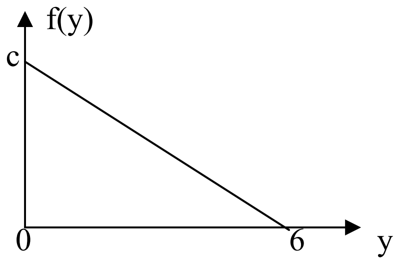
$$P(A) = \int_{-20}^{20} f(y).dy = \int_{-20}^{0} \frac{60+y}{3600} dy + \int_{0}^{20} \frac{60-y}{3600} dy$$

$$= \frac{60}{3600} y \Big|_{-20}^{0} + \frac{y^2}{7200} \Big|_{-20}^{0} + \frac{60}{3600} y \Big|_{0}^{20} - \frac{y^2}{7200} \Big|_{0}^{20}$$

$$\frac{-60}{3600}(-20) - \frac{(-20)^2}{7200} + \frac{60}{3600}(20) - \frac{(20)^2}{7200} = \frac{5}{9}$$

Petrol boru hattının zarar görme olasılığı $\frac{5}{9}$, yani yaklaşık olarak, 0.56'dır.

Soru 2.5.2: Bir Y ölçümüne ilişkin sürekli olasılık fonksiyonunun şekli aşağıda verilmiştir.



Y'nin 4'ten büyük olması olasılığı nedir? Yani, P(Y>4)=?
Önce bu şekli ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bunun için c'nin değeri bulunmalıdır. Sürekli olasılık fonksiyonu grafiğinin altındaki alan (Üçgenin alan formülünü

hatırlayınız) $\frac{c(6)}{2}$ biçiminde hesaplanabilir. Bunun 1'e eşit olması için $\frac{1}{2}6c=1$ c=$\frac{1}{3}$ olur. Buna göre yukarıda grafiği verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu

f(y)=$\frac{1}{3}-\frac{1}{18}y$, 0<y<6 olacaktır.

$$\left(\begin{array}{l}\int_0^6 f(y).dy=1 \ \ mi?\\ \int_0^6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{18}y\right)dy=\frac{1}{3}y\Big|_0^6-\frac{1}{18}\frac{y^2}{2}\Big|_0^6=\frac{6}{3}-\left(\frac{36}{2}\right)=2-1=1\end{array}\right)$$

P(Y>4)=1-P(Y≤4)=1-$\int_0^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{18}y\right)dy$=1-$\left(\frac{1}{3}y\Big|_0^4-\frac{1}{18}\frac{y^2}{2}\Big|_0^4\right)$

=1-$\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{18}\frac{16}{2}\right)=1-\left(\frac{24-8}{18}\right)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$ bulunur.

Soru 2.5.11: Sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonunu

f(y) = ye^{-y} ; y>0 olarak verilmiş olsun.

P(Y>1.5) olasılığını hesaplayalım.

P(Y>1.5) =1-P(Y≤1,5)=1- $\int_0^{1,5} y.e^{-y}dy$ burada kismi integrasyon kullanırsak:

u=y ⇒ du=dy

dv=e^{-y}dy ⇒ v=$-e^{-y}$

$uv-\int vdu=-y.e^{-y}\Big|_0^{1.5}+\int_0^{1.5}e^{-y}dy$== $-1.5e^{-1.5}+1-e^{-1.5}$= $1-2.5e^{-1.5}$

Sonuç olarak: P(Y>1.5)= $1-(1-2.5e^{-1.5})=2.5e^{-1.5}$ bulunur.

2.6 KOŞULLU OLASILIK (Conditional Probability)

Koşullu olasılık P(A|B) biçiminde gösterilir. P(A|B)'nın anlamı, B gibi bir olayın gerçekleştiği bilindiğinde A olayının olasılığı olarak ifade edilir.

A ve B, aynı örneklem uzayında tanımlanmış iki olay ve P(B)>0 olmak üzere B olayının gerçekleştiği varsayımı altında A olayının koşullu olasılığı

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Biçiminde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanılarak A ve B olaylarının birlikte gerçekleşme olasılığını koşullu olasılık yardımı ile

$$P(A\cap B) = P(A|B).P(B)$$

biçiminde bulabiliriz.

Örneğin; S, n tane eşit olasılıklı sonuca sahip bir örneklem uzayı olsun. Bu örneklem uzayı üzerindeki A ve B olayları sırası ile a ve b tane sonuca sahip iki olayı göstersin. A ve B olaylarının ara kesitlerindeki eleman sayısı da c olsun. B olayının gerçekleştiği bilindiğinde A'nın koşullu olasılığı

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{b}{n}} = \frac{c}{b}$$

olarak bulunur.

<u>Örnek:</u> 52'lik bir oyun kağıdı destesinden bir kart çekiliyor. Kartın vale olduğu bilindiğine göre çekilen kartın kupa olma olasılığı nedir?

A ve B olaylarını tanımlarsak,

A: Çekilen kartın kupa olması.

B: Çekilen kartın vale olması.

Bu durumda B olayının 4 elemanı (kupa, karo, sinek ve maça valeleri) vardır.

$P(B) = \frac{4}{52}$ ve $P(B \cap A) = \frac{1}{52}$ olur.

Aranan koşullu olasılık P(A|B)'dır.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4}$$

<u>Örnek:</u> Okulumuz öğrencilerinden %45'i istatistik, %35'i bilgisayar derslerinden ve %25'i hem istatistik hem de bilgisayar derslerinden başarısızdır. Rasgele seçilen bir öğrencinin,

a) Bilgisayardan başarısız ise, istatistikten de başarısız olma olasılığını,
b) İstatistikten başarısız ise, bilgisayardan da başarısız olma olasılığını,
c) Bu iki dersten en az birinden başarısız olma olasılığını bulunuz.

İ, istatistik dersinden başarısız öğrencileri; ve B, bilgisayar dersinden başarısız öğrencileri göstersin.

P(İ)=0.45, P(B)=0.35 ve $P(İ \cap B) = 0.25$

a) $P(İ|B) = \frac{p(\dot{I} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.35} = \frac{5}{7}$

b) $P(B|İ) = \frac{P(B \cap \dot{I})}{P(\dot{I})} = \frac{0.25}{0.45} = \frac{5}{9}$

c) $P(\dot{I} \cup B) = P(\dot{I}) + P(B) - P(\dot{I} \cap B) = 0.45 + 0.35 - 0.25 = 0.55$

Bulunur.

Tam Bağımsızlık (İkiden Çok olayların Bağımsızlığı)

A, B ve C gibi üç olayın tam bağımsız olması için aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekir.

$* \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)$

$* \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(C)$

$* \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B).\mathrm{P}(C)$

$* \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(C)$

n tane olayın bağımsız olabilmesi için

$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = \mathrm{P}(A_1).\mathrm{P}(A_2)...\mathrm{P}(A_k), k = 2,3,4,...,n$ eşitliğinin sağlanması gerekir.

Örnek: Bir zar atılıyor. A olayı zarın 1 ya da 2 gelmesi, B olayı zarın çift gelmesi olmak üzere A ve B olayları bağımsız mıdır?

$A = \{1,2\}$ $\qquad B = \{2,4,6\}$

$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$ $\qquad \mathrm{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$ $\qquad P((A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}((B)$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ olduğundan A ve B olayları bağımsızdır.

Örnek: iki dengeli zar birlikte atılıyor.
A: 1. zarın bir ya da iki gelmesi,
B: İkinci zarın 3,4 ya da 5 gelmesi,
C: Zarlardaki sayıların toplamının 4,11 ve 12 olmak üzere bu üç olayın tam bağısız olup olmadıklarını araştınız.

C B A

$$S \left\{ \begin{matrix} (1,2), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

C

$\mathrm{P}(A) = \frac{12}{36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$ $\qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $\qquad P(A\cap C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}$ olarak bulunur.Üç olaya ilişkin tam bağımsızlık koşullarının sağlanıp sağlanmadığı incelenir.

$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

$\frac{1}{36}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{6}$ sağlanır.

$P(A\cap B)=P(A).(B)$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ sağlanır.

$P(A\cap C)=P(A).(C)$

$\frac{1}{18}=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}$ sağlanır.

$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

$\frac{1}{18}=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{18}\neq\frac{1}{12}$ sağlanmaz.

A ile B, Aile C, olayları bağımsız olmasına rağmen Bile C olayları bağımsız olmadığından, bu üç olayın tam bağımsız olduğu söylenemez.

Örnek: Bir deterjan firması alışveriş gelen 600 kişiye kendi ürünlerinden alıp almadıklarını ve TV'ye verdikleri son reklamı hatırlayıp, hatırlamadıklarını soruyor. Elde edilen sonuçlar ile aşağıdaki çizelge oluşturuluyor.

Reklam	**Hatırlayan**	**Hatırlamayan**	**Toplam**
Satın Alan	120	60	180
Satın Almayan	80	340	420
Toplam	200	400	600

H:{TV reklamını hatırlayan}
$\overline{H}$: {TV reklamını hatırlamayan}
S: {Satın alan}
$\overline{S}$: {Satın almayan)

Aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

$P(H), P(\overline{H}), P(S), P(\overline{S}), P(H \cap S), P(\overline{H} \cap S), P(H \mid S), P(S \mid \overline{H}) = ?$

Çözüm: $P(H) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$, $P(\overline{H}) = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$, $P(S) = \frac{180}{600} = \frac{3}{10}$, $P(\overline{S}) = \frac{420}{600} = \frac{7}{10}$

$P(\overline{H} \cap S) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$, $P(H \cap S) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}$

$$P(H \mid S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{1/5}{3/10} = \frac{2}{3},$$

$$P(S \mid \overline{H}) = \frac{P(S \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{1/10}{2/3} = \frac{3}{20}$$

Ayrık olaylarla, bağımsız olayları birbirine karıştırmamak gerekir. Ayrık olayların ortak noktası yoktur.
$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$' dır. (A ve B ayrık olaydır.)
Olayların aynı zamanda olma olasılıkları sıfır değilse, ortak noktaları var demektir. Ortak noktalarının olması ayrık olmadıkları anlamına gelir, ancak bağımsız oldukları anlamına da gelmez.
Bağımsız olaylarda, olayların aynı zamanda olma olasılığı, kesişime dahil olan olayların olasılıkları çarpımına eşittir.

Soru 2.7.1: A ve B olayları ayrık olaylar ve olasılıkları sıfırdan farklı ise A ve B bağımsız olaylar mıdır?
$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ (A ve B ayrık olaylar)
a) Eğer $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ ve
$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow$ A ve B olayları bağımsızdır.

$\downarrow$

$0 \neq P(A).(P(B)$ olacağından A ve B olayları bağımsız değildir.

Soru 2.7.2: $P(A \cap B) = 0.2, P(A) = 0.6$ ve $P(B) = 0.2$ ise,

a) A ve B ayrık olaylar mıdır.
b) A ve B bağımsız olaylar mıdır.
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = ?$

a) $P(A \cap B) = 0.2 > 0$ olduğundan A ve B ayrık olaylar değildir. Ayrık olaylar olabilmesi için $P(A \cap B) = 0$ olmalıdır.
b) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$0.2 \stackrel{?}{=} (0.6).(0.5)$

$0.2 \neq 0.3$ olduğu için A ve B bağımsız olaylar değildir. [($P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B bağımsızdır.]

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ olduğunu söylemiştik. Buna göre
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$ bulunur.

Not: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)'$ dir.

Soru 2.7.4: Başarı durumu çok iyi olmayan bir öğrencinin kimya dersinden geçme şansı 0.35, matematik dersinden geçme şansı 0.40 ve her ikisinden geçme şansı 0.12'dir. Öğrencinin kimya dersinden geçmesi ve matematik dersinden geçmesi olasılıkları bağımsız mıdır? Her iki dersten de başarısız olma olasılığı nedir?

K: Kimya dersinden geçme
M: Matematik dersinden geçme

olayları olsun

$P(K \cap M) = P(K).P(M)\, ise \Rightarrow$ K ve M olayları bağısızdır.
$P(K) = 0.35, \quad P(M) = 0.40, \quad P(K \cap M) = 0.12$

$P(K \cap M) = P(K).P(M)$

$0.12 \neq (0.35)(0.40) = 0.14$ olduğundan K ve M olayları bağımsız değildir.

P (her iki dersten de başarısız)=1-P(En az birinden başarılı)

$$= 1 - P(K \cup M) = 1 - [P(K) + P(M) - P(K \cap M)]$$
$$= 1 - [0.35 + 0.40 - 0.12]$$
$$= 1 - 0.63 = 0.37' dir.$$

Soru 2.7.8: $A_1 .....A_N$ bağımsız olaylar ise

$P(A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_N) = 1 - [1 - P(A_1)].[1 - P(A_2)...[1 - P(A_N)]]$

olduğunu gösteriniz.

Adı geçen olaylar bağımsız olduğuna göre

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_N) = P(A_1).P(A_2)...P(A_N)'$ dir.
$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_N}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})...P(\overline{A_N})'$ dir.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n})$$
$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]..[1 - P(A_n)] \quad \text{bulunur.}$$

Soru (C: Homur)
A, B, ve C ayrık olmayan olaylar ise

$P[A \cup B) \mid C] = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P[(A \cap B) \mid C]$ olduğunu gösteriniz.

$$P[(A \cup B) \mid C] = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)}$$

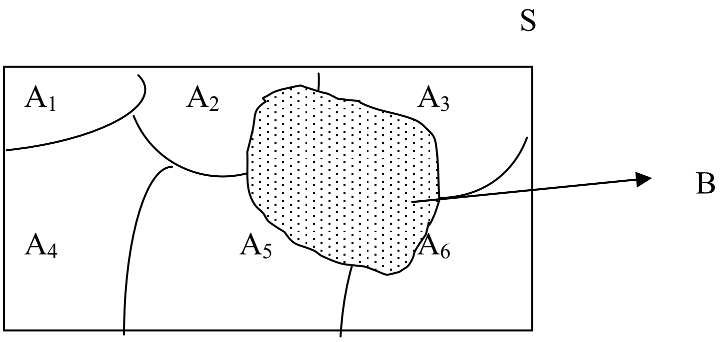
$$= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A \mid C) + P(B \mid C) - P[(A \cap B) \mid C] \quad \text{elde edilir.}$$

TOPLAM OLASILIK KURALI

Bir B olayının olasılığı doğrudan hesaplanamadığı zaman toplam olasılık kuralından yararlanılır. Örneğin bir sigara fabrikasındaki 6 makine tarafından üretilen sigara paketlerinden rasgele bir tanesi alındığında bu paketin bozuk olması olasılığı araştırılsın. Burada B olayı, çekilen sigara paketinin bozuk olması ise bu paket A_1, A_2,....A_6 makinelerin birisinde üretilmiş olabilir.



P(B) olasılığını bulabilmek için topla olasılık formülünden yararlanılır.

Teorem: A_i; i=ı....,n

$$- A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \quad \text{için}$$
$$- P(A_i) > 0; \quad i = 1,....,n$$
$$- S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

biçiminde olmak üzere herhangi bir B olayı için

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)$$

eşitliğine **toplam olasılık kuralı** denir.

Tanıt: $P(B) = P(B \cap S)'dıı$

$$= P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n))$$
$$= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ..... \cup (B \cap A_n)]$$
$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$$

$$= P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + ... + P(B \mid A_n).P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i) olur.$$

Örnek: Bir fabrikada üretilen malları %50'si 1. makineden, %30'u 2. makineden ve %20'si 3. makineden üretilmektedir. Bu makinelerin ürettikleri malların sırasıyla %3, %4 ve %5'inin bozuk olduğu gözlenmiştir. Üretilen mallardan rasgele seçilen bir tanesinin bozuk olma olasılığı nedir?

A_i: Seçilen mal i. Makinede üretilmiştir. (ı=1,2,3)

B: Seçilen mal bozuktur.

$P(A_1)= 0.50$, $P(A_2)=0.30$, $P(A_3)=0,20$

$P(B|A_1)=0.03$, $P(B|A_2)=0.04$,$P(B|A_3)=0.05$

Üretilen mallar bu üç makineden çıktığı için, B olayı A_1, A_2 ve A_3 olaylarının birisiyle birlikte ortaya çıkar. Bu durumda B olayı ayrık üç olayın toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2 + P(B \cap A_3) \\
&= P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + P(B \mid A_3).P(A_3) \\
&= (0.03).(0.50) + (0.04).(0.30) + (0.05).(0.20) \\
&= 0.015 + 0.012 + 0.010 = 0.037
\end{aligned}$$

Rasgele seçilen bir malın bozuk olması olasılığı 0.037'dır. Bir başka deyişle bu fabrikadan 1000 tane mal alınırsa, bu seçilen 1000 mal içinde bozuk olacaklar sayısının beklenen değeri 37 olacaktır.

Örnek: Bir çocuğun önünde 4 tane kavanoz bulunmaktadır. Kavanozların ikisinde 3 siyah, 4 beyaz bilye, birinde 9 siyah, 5 beyaz ve bir diğerinde de 1 siyah 6 beyaz bilye bulunmaktadır. Rasgele seçilen herhangi bir kavanozdan bir bilye çekiliyor. Çocuğun çektiği bilyenin siyah olma olasılığı nedir?

B_1={Kavanozda 3 siyah, 4 beyaz bilye olması}

B_2= {Kavanozda 9 siyah, 5 beyaz bilye olması}

B_3 ={Kavanozda 1 siyah, 6 beyaz bilye olması}

A={Kavanozdan siyah bilye çekilmesi}

Olayları olsun.

Burada B_1, B_2 ve B_3 ayrık olaylardır.

$P(B_i)$: Seçilen kavanozun B_i özelliğinde olma olasılığı i=1,2,3;

$P(A|B_i)$: Seçilen kavanozun B_i özelliğinde olduğu biliniyorsa, çekilen bilyenin siyah olması olasılığı olsun.

$P(B_1) = \frac{2}{4}$ (3 siyah, 4 beyaz olan 2 kavanoz var. Toplam 4 kavanoz var.)

$P(B_2) = \frac{1}{4}$ (3 siyah, 5 beyaz olan 1 kavanoz var.)

$P(B_3) = \frac{1}{4}$ (1 siyah, 6 beyaz olan 1 kavanoz var)

P(A|B$_1$)=$\frac{3}{7}$, $P(A \mid B_2) = \frac{9}{14}$, P(A|B$_3$)=$\frac{1}{7}$

P(A)=$\sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i).P(B_i)$ =P(A|B$_1$).(B$_1$)+P(A|B$_2$)+P(A|B$_3$).P(B$_3$)

$= (\frac{1}{7})(\frac{2}{4}) + (\frac{9}{14})(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{7})(\frac{1}{4}) = \frac{15}{56}$

Dört kavanozun herhangi birinden çekilen bilyenin siyah olması olasılığı $\frac{15}{56}$ dır.

BAYES TEOREMİ

Olasılık kuramının önemli teoremlerinden birisi olan Bayes teoremi şöyle ifade edilir.

Teorem:

$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, P(Ai)>0 ve her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \phi$ olsun . S örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir B olayı için P(B)>0 olmak kaydıyla ,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)} \;,\; 1 \leq j \leq n \text{ , olur.}$$

Tanıt: Koşullu olasılık tanımından,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{P(B)} \quad \text{yazılabilir.}$$

Toplam olasılık koşulundan yararlanılarak,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i) \quad \text{yazılabilir.}$$

Buradan,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_1).P(A_1)} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek: Bir danışmanlık şirketin üyeleri, 1. işletmeden %60 , 2. işletmeden %30 ve 3. işletmeden %10 oranında olmak üzere üç işletmeden araba kiralamaktadırlar. 1. işletmeden gelen araçların %9'u, 2. işetmeden gelen araçların %20'si ve 3. işletmeden gelen araçların %6'sı bakım gerektiriyorsa,

a) Şirkete kiralanan bir aracın bakım gerektirme olasılığı nedir?
b) Bakım gerektiren aracın 2. işletmeden gelmiş olma olasılığı nedir?

B: Bir arabanın bakım gerektirmesi,
A_i: Arabanın 1, 2 ya da 3. işletmeden gelme i= 1, 2, 3 olayları olsun.

$P(A_1) = 0{,}60,$ $\quad P(A_2) = 0.30,$ $\quad$ P(A3)=0.10

$P(B \mid A_1) = 0.09$ $\quad P(B \mid A_2) = 0.20,$ $\quad P(B \mid A_3) = 0.06$

a) P(B)$\rightarrow$arabanın bakım gerektirme olasılığı soruluyor. Toplam olasılıktan yararlanılarak bulunur.

$$P(B) = (P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + P(B \mid A_3).P(A_3)$$
$$= (0.60).(0.09) + (0.30).(0.20) + (0.10).(0.06)$$
$$= 0.12$$

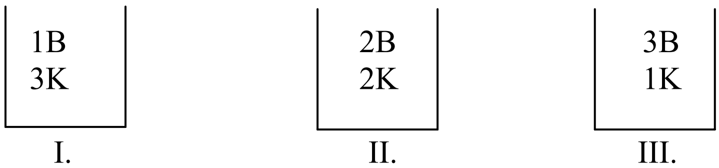
Bu şirkette kiralanan araçların %12'sini bakım gerektirecektir.

b) Danışmanlık şirketinin kiraladığı araba bakım gerektiriyorsa bu arabanın 2. işletmeden gelmiş olma olasılığı Bayes teoreminden yararlanılarak bulunabilir.

$$P(A\ \mid B) = \frac{P(B \mid A_2).P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i).P(A_i)} = \frac{(0.30).(0.20)}{0.12} = 0.50$$

danışmanlık şirketinin kiraladığı arabalardan yalnızca%30'nun 2. işletmeden gelmesine karşın, bakım gerektiren arabaların yarısı (%50 si) 2. işletmeden gelmektedir.

Örnek: (C. Homur) Üç torbada beyaz (B) ve kırmızı (K) toplar bulunmaktadır. I. Torbada; 1 beyaz, 3 kırmızı top, II. Torbada; 2 beyaz, 2 kırmızı, III. Torbada; 3 beyaz, 1 kırımızı top vardır. Rasgele seçilen bir torbadan çekilen top beyaz ise bu topun I. Torbadan çekilmiş olması olasılığı nedir?



B: Çekilen topun beyaz olması

A_i: Seçilen torbanın I., II, veya III. Torba olması olayları olsun. İ=1, 2, 3

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B \mid A_2) = \frac{2}{4}, \quad P(B \mid A_3) = \frac{3}{4}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1).P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i).P(A_i)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right).\left[\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right]}$$

$= \frac{1}{12}.\frac{12}{6} = \frac{1}{6}.$ Çekilen beyaz topun, I. Torbadan gelmesi olasılığı %17'dir.

Örnek: (M. Aytaç S: 41)
Bir hava üssünde tehlike olduğu zaman alarm sisteminin çalışması olasılığı 0.99, tehlike olmadığında alarm vermemesi olasılığı 0.98 ve herhangi bir anda tehlike olması olasılığı da 0.003'tür.

a) Hava üssündeki alarm çalıştığına göre, tehlike nedeniyle çalmış olması olasılığı nedir?
b) Tehlike olması ve alarm sisteminin çalışmaması olasılığı nedir?

A: Alarm sisteminin çalışması,
B: Tehlike olması olaylarını göstersin.

$P(A \mid B) = 0.99, \quad P(B) = 0.003 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0.997$ olur.

$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.98 \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 0.02$ olur.

a) Alarm sistemi çalışıyorsa tehlike nedeniyle olması olasılığı P(B|A)=? Bayes Teoremi

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) : P(B)}{P(A \mid B).P(B) + P(A \mid \overline{B}).P(\overline{B})} = \frac{(0.99).(0.003)}{(0.99).(0.003) + (0.02).(0.997)} = \frac{297}{2291}$$

Alarm sisteminin çalıştığı bilindiğine göre tehlike nedeniyle çalışması olasılığı, yaklaşık olarak, %13'tür.

b) Çarım kuralı uygulanırsa

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B).P(B) = (0.01)(0.003) = 0.00003$$

Çünkü, burada

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - 0.99 = 0.01 = P(\overline{A})$ 'dır.

Örnek:
İ, istatistik dersinden başarısız öğrencileri ve B; bilgisayar dersinden başarısız öğrencileri göstersin.

P(İ)=0,45, P(B)=0,35 ve P(İ∩B) = 0,25 verilmiş olsun

a)P(İ|B) = $\frac{P(\dot{I} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,35} = \frac{5}{7}$ = Bilgisayar Dersinde Başarılı olduğu bilinen öğrencinin İstatistik dersinden geçme olasılığı;

b)P(B|İ) = $\frac{P(B \cap \dot{I})}{P(\dot{I})} = \frac{0,25}{0,45} = \frac{5}{9}$ = İstatistik Dersinde Başarılı olduğu bilinen öğrencinin Bilgisayar dersinden geçme olasılığı;

c)$P(\dot{I} \cup B) = P(\dot{I}) + P(B) - P(\dot{I} \cap B)$
= 0,45+0,35-0,25=0,55= Bu iki dersten en az birinde başarılı olma olasılığı

__**Örnek:**__ Bir fabrikada üretilen malların %40'ı A makinesinde, %50'si B makinesinde ve %10'nu C makinesinde üretilmektedir. Bu makinelerdeki üretimden, A makinesindekilerin %4'ü, B'dekilerin %5'i ve C'dekilerin %3'nün bozuk olduğu bilinmektedir.

a) Üretilen mallardan rasgele alınan bir tanesinin bozuk olma olasılığını,

b) Rasgele alınan malın bozuk olduğu bilindiğinde, bu malın A makinesinde üretilmiş olması olasılığını bulunuz.

Cevaplar:

a) Bir malın A, B, ve C makinelerinde üretilme olasılıklar, sırasıyla: P(A)=0.40 P(B)=0.50 ve P(C)=0.10 olarak verilmiştir.

E : Rasgele alınan bir malın bozuk olması olayı olsun

P(E|A)=0.04, P(E|B)=0.05 ve P(E|C)=0.03 olur.

Üretilen mallardan rasgele alınan bir tanesinin bozuk olması olasılığı (E) olacaktır. P(E)'ye ilişkin toplam olasılık,

P(E)= $P(E \cap A) + (P(E \cap B) + P(E \cap C)$

Koşullu olasılık tanımından,

$P(E) = P(E \mid A).P(A) + P(E \mid B).P(B). + p(E \mid C).P(C)$ yazılabilir. Buna göre,

$P(E) = 0.04.(0.40) + 0.05.(0.50) + 0.03(0.10) = 0.044$ bulunur.

b) P(A|E)=?

$$P(A \mid E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \mid A).P(A)}{P(E)} = \frac{(0.04).(0,40)}{0.044} = \frac{16}{44}$$ bulunur.

Soru 2.6.4: y herhangi bir kişinin ölüm yaşını göstermek üzere, yaşam süresini tanımlayan olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(y) = 3.10^{-9}.y^2(100-y)^2; 0 \le y \le 100$

olarak verilmiş olsun. Bir kişi en azından 70 yaşında ise bu kişinin 80 ile 85 yaşları arasında ölmesi olasılığı nedir?

$P(80 \le Y \le 85 \mid Y \ge 70) = ?$

$$P(80 \le Y \le 85 \mid Y \ge 70) = \frac{P(80 \le Y \le 85)}{P(Y \ge 70)}$$

$$\frac{\int_{80}^{85} 3.10^{-9} y^2 (100-y)^2 dy}{\int_{70}^{100} 3.10^{-9} y^2 (100-y)^2 dy} = \frac{0.031}{0.163} = \frac{31}{163}$$ bulunur.

Pay ve paydadaki integralleri ayrı ayrı hesaplarsak:

$$3.10^{-9}\int_{80}^{85} y^2(100^2-200y+y^2)dy = 3.10^{-9}\left\{100^2\frac{y^3}{3}\Big|_{80}^{85} - 200\frac{y^4}{4}\Big|_{80}^{85} + \frac{y^5}{5}\Big|_{80}^{85}\right\} = 0.031$$

$$\int_{70}^{100} 3.10^{-9} y^2(100-y)^2 dy = 3.10^{-9}\left\{100^2\frac{y^3}{3}\Big|_{70}^{100} - 200\frac{y^4}{4}\Big|_{70}^{100} + \frac{y^5}{5}\Big|_{70}^{100}\right\} = 0.163$$

Soru 2.6.6: Eğer P(A|B)<P(A)ise P(B|A)<P(B) olduğunu gösteriniz.

$$P(A\mid B) < P(A) \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} < P(A)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) < P(A).P(B) \text{ olur.}$$

$$P(B\mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} < \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B) \quad \Rightarrow P(B\mid A) < P(B) \text{ olur.}$$

<u>İkiden Çok Olay Olması Durumunda Kesişimler İçin Koşullu Olasılığın Kullanılması.</u>

Koşullu olasılıklar, kesişim olaylarının olasılıklarının bulunmasında da kullanılmaktadır. A ve B gibi iki olay olması durumunda,

$$P(A\cap B) = P(A\mid B).P(B) = P(B\mid A).P(A)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır.

Eğer ikiden çok olay söz konusu ise bir genelleme yapılır. A_1,...., A_n n tane olay olmak üzere

$$P(A_1\cap A_2\cap....\cap A_n) = P(A_n\mid A_1\cap A_2\cap....\cap A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-2})......P(A_2\mid A_1).P(A_{\cdot 1})$$

eşitliğinden bulunur.

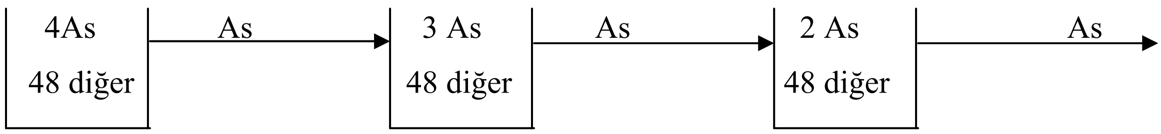
Örneğin; A,B ve C gibi üç olayımız olsun ve A∩B=D olarak adlandırılsın.

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) = P(D\cap C) = P(C\mid D).P(D) \\ = P(C\mid A\cap B).P(A\cap B) \\ = P(C\mid A\cap B).P(A\cap B) \\ = P(C\mid A\cap B).P(B\mid A).P(A) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

<u>Örnek:</u> 52'lik bir oyun kağıdı destesinden art arda üç kağıt seçiliyor. Bu üç kağıdın üçünün de As olma olasılığını bulunuz.

A birinci kağıdın, B ikinci kağıdın ve C üçüncü kağıdın As olmasını göstersin. Bu durumda aranan olasılık $P(A\cap B\cap C)'dir.$



$$P(A\cap B\cap C) = P(C\mid A\cap B).P(A\cap B)$$

$$P(C \mid A \cap B).P(B \mid A).P(A)$$

$P(A)=\dfrac{1}{52}$, P(B|A)=$\dfrac{3}{51}$, $P(C \mid A \cap B)=\dfrac{2}{50}$

$$P(A \cap B \cap C)=P(A)(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$

$$=\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}=\frac{1}{5525}$$ olarak hesaplanır.

<u>Örnek:</u> Bir torbada 6 beyaz (B), 8 siyah (S) ve 4 kırmızı (K) top bulunmaktadır. Dört top yerine koymadan (iadesiz) çekiliyor. B, K, B, S serisinin elde edilme olasılığı nedir?

A: İlk seçimde çekilen topun beyaz olması,

B: İkinci seçimde çekilen topun kırmızı olması;

C: Üçüncü seçimde çekilen topun beyaz olması,

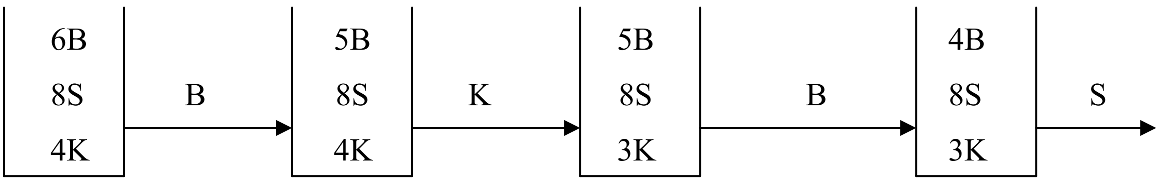
D: Dördüncü seçimde çekilen topun siyah olması olayları olsun

$$P(A \cap B \cap C \cap D)=?$$

Genel olarak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n)=P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2})......P(A_2 \mid A_1).P(A._1)$$

yazabiliriz.



$P(A)=\dfrac{6}{18}$, $P(B \mid A)=\dfrac{4}{17}$, $P(C \mid A \cap B)=\dfrac{5}{16}$, $P(D \mid A \cap B \cap C)=\dfrac{8}{15}$

$$P(A \cap B \cap C \cap D)=\frac{8}{15}.\frac{5}{16}.\frac{4}{17}.\frac{6}{18}=\frac{2}{153}$$ olur.

<u>Koşullu Olasılığın Özelliklerine İlişkin Teoremler:</u>

Teorem: P(A|S)=(A)'dır

Tanıt: P(A|S)=$\dfrac{P(A \cap S)}{P(S)}=\dfrac{P(A)}{1}=P(A)$ olur.

Teorem: **P**(A)$\neq O$ ise P(S|A)=1’dir

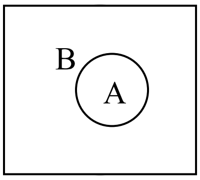
Tanıt: P(S|A)=$\frac{P(A\bigcap S)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$ olur.

Teorem: P(A)$\neq$ 0, P(B)$\neq$ 0 ve $A\bigcap B=\phi$ (A ve B ayrık olaylar) ise P(A|B)=0 ve P(B|A)=0’dır.

Tanıt: $P(B\mid A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$ ve $P(A\mid B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$ olur

Teorem: A$\subset B$ ve P(B)$\neq$ 0 ise P(A|B)=$\frac{P(A)}{P(B)}$'*dir*.

Tanıt:

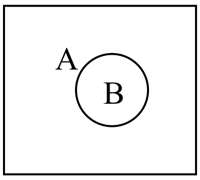


$A\subset B\Rightarrow A\bigcap B=A$ olur.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$ olur.

Teorem: B$\subset A$ ve $P(B)\neq 0$ *ise* $P(A\mid B)=1'dir$

Tanıt: $B\subset A\Rightarrow A\bigcap B=B$ olur.



$$P(A\mid B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

olur.

Teorem: $A\bigcap B)=\phi$ (A ve B ayrık olaylar), P(A)$\neq$ 0 ya da P(B)$\neq$ 0 ise

$$P[A\mid A\bigcup B)]=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

Tanıt: $$P[A\mid (A\bigcup B)]=\frac{P[A\bigcap (A\bigcup B)]}{P(A\bigcup B)}$$

$$=\frac{P[(A\bigcap A)\bigcup (A\bigcap B]}{P(A\bigcup B)}$$

$$=\frac{P(A\bigcap A)+P(A\bigcap B)}{P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)}=\frac{P(A)+P(\phi)}{P(A)+P(B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$ bulunur.

Teorem: (B_1 ve B_2 ayrık olaylar) $P(A) \neq 0$ ise $P[(B_1 \cup B_2) \mid A] = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$'dır.

Tanıt. $P[(B_1 \cup B_2) \mid A] = \dfrac{P[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{P(A)}$

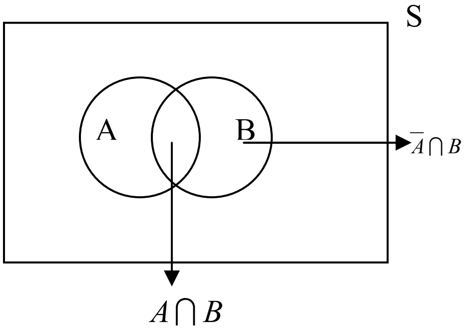
$$= \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$$ elde edilir

Teorem: $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$'dir.

Tanıt: $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$ $= 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= 1 - P(A \mid B)$ elde edilir.



2.7. BAĞIMSIZLIK (Independence)

A ve B gibi iki olaydan birinin gerçekleşmesi ötekinin gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olayları bağımsızdır. Yani bir olayın gerçekleşme olasılığı önceki olayın gerçekleşip gerçekleşmediğine bağlı değilse bu olaylara bağımsız olaylar denir.

Simgelerle gösterirsek,

- $P(A \mid B) = P(A)$ ve/veya $P(B \mid A) = P(B)$ ve/veya $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır.
- A ve B olaylarının bağımsız olduğu biliniyorsa $P(A \mid B) = P(A)$, $P(B \mid A) = P(B)$ ve $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ eşitlikleri sağlanır.

Teorem: A ve B olayları bağımsız ise $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$ olur

Tanıt: $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

ve

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$ yazılabilir.

Her iki eşitlikten

1- $P(A \cap B) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

A ve B bağımsız olduğu için $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ 'dir.

$1 - P(A).P(B) = 2 - P(A) - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = [1 - P(A)].[1 - P(B)]$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

elde edilir.