2
DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

2.1 Doğrusal Programlama Problemleri

Bir karar modelinde amaç fonksiyonu ve kısıtlardaki ilişkiler doğrusal ise bu probleme ***doğrusal programlama (DP)*** denir. Genel olarak, karar değişkeni sayısı n ve kısıt sayısı m olan bir DP problemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Karar değişkenleri

x_j : Karar değişkenleri $(j = 1, 2, \dots, n)$

Parametreler

c_j : Amaç fonksiyonu parametreleri $(j = 1, 2, \dots, n)$

b_i : Sağ taraf parametreleri (sabitleri) $(i = 1, 2, \dots\ m)$

a_{ij}: Kısıtlardaki katsayılar

Amaç fonksiyonu: Enbüyükleme (maksimizasyon) problemi için amaç fonksiyonu

$$Enb\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

veya enküçükleme (minimizasyon) problemi için amaç fonksiyonu

$$Enk\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

şeklinde ifade edilir

Kısıtlar: Modeldeki kısıtları iki grup altında toplayabiliriz i) Mevcut kaynakların kullanımı ve gereksinimlerle ilgili kısıtlar, ii) karar değişkenlerinin negatif değer alamayacağını belirten işaret kısıtları

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Modeldeki kaynak kısıtları veya gereksinim kısıtları $(=)$ veya $(\geq)$ şeklinde de olabilir.

DP modelinin nasıl oluşturulacağını aşağıdaki örnek problem üzerinde açıklayalım.

Örnek 2.1 Bir zeytinyağı firması natürel sızma ve natürel birinci olmak üzere iki farklı tipte zeytinyağı üretmektedir. Klasik yöntem ile 1 kg zeytinden ortalama 0,2 kg natürel sızma zeytinyağı elde edilmekte ve 1 kg natürel sızma zeytinyağı için 0,6 saat işlem süresi gerekmektedir. Modern yöntemde ise 1 kg zeytinden ortalama 0,25 kg natürel birinci zeytinyağı elde edilmekte ve 1 kg natürel birinci zeytinyağı için 0,2 saat işlem süresi gerekmektedir. Firmada iki yöntem için yıllık 6000 saat bulunmaktadır ve yılda en fazla 60 ton zeytin işleyebilmektedir. Zeytinin alış fiyatı 5 TL/kg olup, natürel sızma zeytinyağının satış fiyatı 60 TL/kg ve natürel birinci zeytinyağının satış fiyatı ise 40 TL/kg. Yıllık, natürel sızma zeytinyağı için en az 5 ton, natürel birinci zeytinyağı için en fazla 10 ton talep bulunmaktadır. Bu bilgilere göre firma yıllık kârını maksimum yapmak için hangi zeytinyağından kaç kilogram üretmelidir? Problemin karar modelini yazınız.

Çözüm: Önce bu problemdeki karar değişkenlerini belirleyelim. Firma sızma ve natürel zeytinyağından yıllık ne kadar üretileceğini belirlemek istemektedir. Bu nedenle karar değişkenleri her bir zeytinyağından üretilecek miktarlardır. Bu karar değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz

x_1: Üretilecek sızma zeytinyağı miktarı (ton)

x_2: Üretilecek natürel birinci zeytinyağı miktarı (ton)

Firmanın amacı yıllık kârını maksimum yapmaktır. Sızma zeytinyağının kilogramını 60 TL'den satılmakta ve bir kilogram natürel sızma zeytinyağı üretimi için 5 kg zeytin kullanılmaktadır. Zeytinin alış fiyatı 5 TL/kg olduğundan sızma zeytinyağından net 60-5(5)=35 TL/kg kâr elde edilir. Natürel birinci zeytinyağının 40 TL'den satılmakta ve bir kilogram natürel zeytinyağı için 4 kg zeytin kullanıldığından natürel zeytinyağından 40-4(5)=20 TL/kg kâr elde edilmektedir. Bu nedenle firmanın yıllık karı $35000\ x_1 + 20000x_2$ olur. Problemde amacımız yıllık karı maksimum yapmak olduğundan amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Enb\ z = 35000\ x_1 + 20000\ x_2$$

Bu problemde üç tip kısıt bulunmaktadır:

Hammadde kısıtı: 1 kg sızma zeytinyağı için 5 kg zeytin, 1 kg natürel zeytinyağı için 4 kg zeytin gerekmektedir. Firma yıllık en fazla 60 ton zeytin işleme kapasitesine sahip olduğundan zeytinyağı üretiminde kullanılacak toplam zeytin miktarı 60 tonu aşmamalıdır. Matematiksel olarak bu kısıt aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

Kapasite kısıtı: 1 kg sızma zeytinyağı için 0,6 saat, 1 kg natürel birinci zeytinyağı için ise 0,2 saat işlem gerekmektedir. Firmada yıllık 6000 saat zeytin işleme kapasitesi bulunduğundan zeytinyağı üretimi için gerekli toplam süre 6000 saati geçmemelidir. Bu kısıtı matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$600x_1 + 200\,x_2 \leq 6000$$

Talep kısıtları: Firma sızma zeytinyağının üretim miktarının en az 5000 kg, natürel zeytinyağının üretim miktarının da en fazla 10000 kg olmasını istemektedir. Bu kısıtlar da matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$x_1 \geq 5$$

$$x_2 \leq 10$$

İşaret kısıtları: Üretilecek zeytinyağı miktarları negatif olamaz. Bu nedenle aşağıdaki kısıtlar modele eklenmelidir.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problemin DP modelini toplu olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
Enb\ z = 35000\,x_1 + 25000\,x_2 & \\
5x_1 + 4x_2 \leq 60 \quad & \text{(Hammadde kısıtı)} \\
600x_1 + 200x_2 \leq 6000 \quad & \text{(İşlem Süresi kısıtı)} \\
x_1 \geq 5 \quad & \text{(Sızma zeytinyağı talep kısıtı)} \\
x_2 \leq 10 \quad & \text{(Natürel birinci zeytinyağı talep kısıtı)} \\
x_1, x_2 \geq 0 \quad & \text{(İşaret kısıtları)}
\end{aligned}$$

2.2 Excel Çözücü ile DP Problemin Çözümü

DP modelinin en iyi çözümünü bulmak için Excel'deki Çözücü eklentisini kullanabiliriz. Bunun için karar değişkenlerinin, parametrelerin Excel tablosuna girilmeli ve kısıtlardaki ve amaç fonksiyonundaki ilişkilerin formül olarak tanımlanması gerekmektedir. Tablo 2.1'de ZTN probleminin çözümü için oluşturulan excel tablosu verilmektedir.

Tablo 2.1 ZTN probleminin Excel Çözücü ile çözülmesi

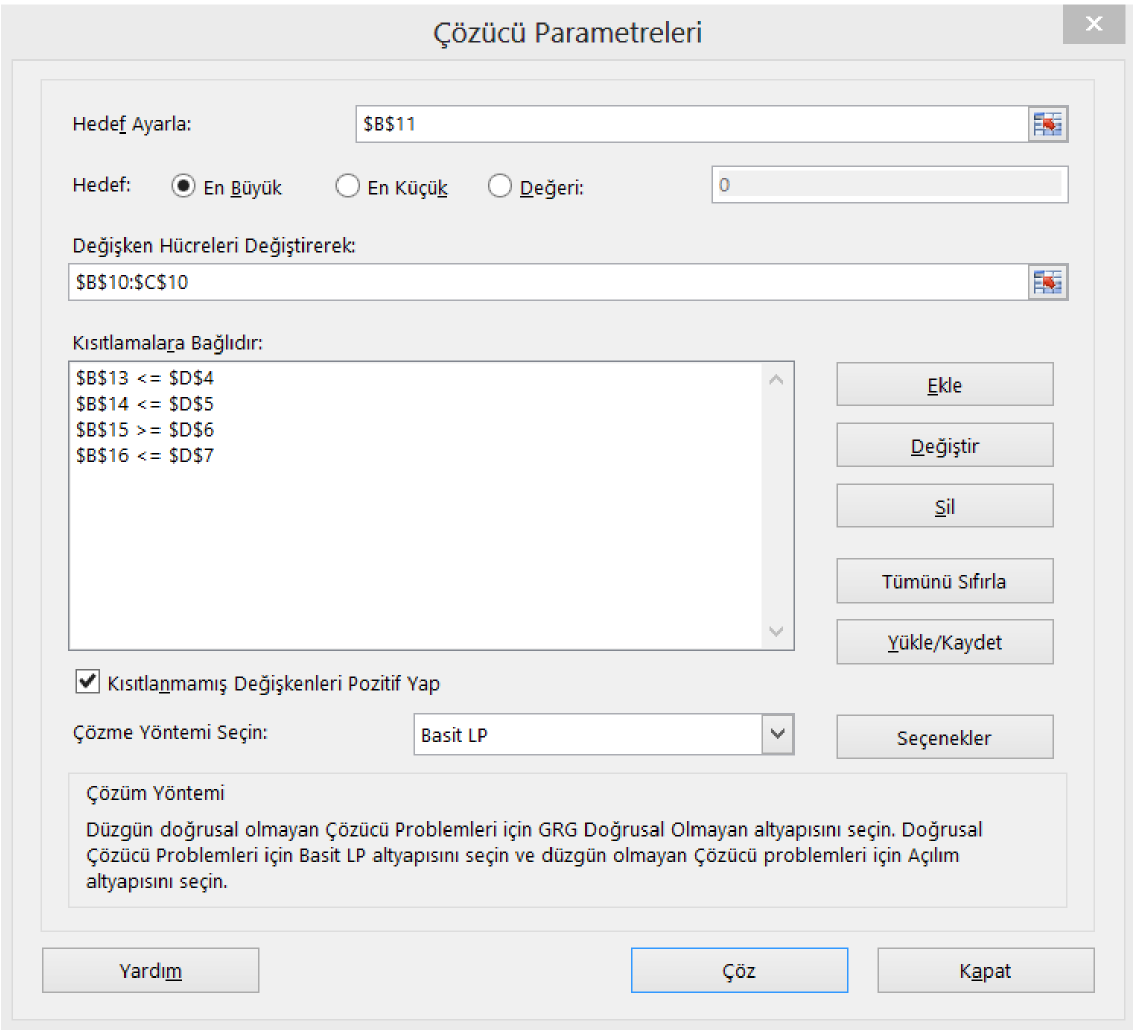
	A	B	C	D
1	Parametreler			
2	Zeytinyağı Tipi	Sızma	Birinci	Limitler
3	Kârlar	35	20	
4	Hammadde gereksinimleri	5	2.5	60000
5	İşlem süreleri	0,6	0,2	6000
6	Minimum sızma zeytinyağı üretimi			5000
7	Maksimum natürel zeytinyağı üretimi			10000
8				
9	Karar değişkenleri	x1	x2	
10		0	0	
11	Amaç fonksiyonu	=topla.çarpım(B3:C3;B10:C10)		
12	Kısıtlar			
13	Hammadde kısıtı	=topla.çarpım(B4:C4;B10:C10)		
14	İşleme kısıtı	=topla.çarpım(B5:C5;B10:C10)		
15	Minimum Sızma üretimi kısıtı	=B10		
16	Maksimum Natürel yağ üretimi kısıtı	=C10		

Tabloda karar değişkenleri B9 ve C9 hücrelerinde x1 ve x2 etiketiyle ve bu değişkenlerin alacağı değerler B10 ve C10 hücrelerinde gölgeli olarak tanımlanmıştır. Başlangıç olarak B10 ve C10 hücrelerine 0 ataması yapılabilir veya hücreler boş bırakılabilir. Çözücü en iyi çözümü bulurken B10 ve C10 hücrelerindeki değerleri değiştirecektir.

B11 hücresinde amaç fonksiyonuna ait formül yer almaktadır. Amaç fonksiyonun hesaplamak için B11 hücresine “=B3*B10+C3*C10” formülünün girilmesi gerekir. Aynı hesaplamayı **topla.çarpım** komutu “**=topla.çarpım (B3:C3; B10:C10)**” şeklinde de yapabiilirz. **topla.çarpım** komutu verilen iki dizinin elemanlarını birebir çarparak toplamaktadır.

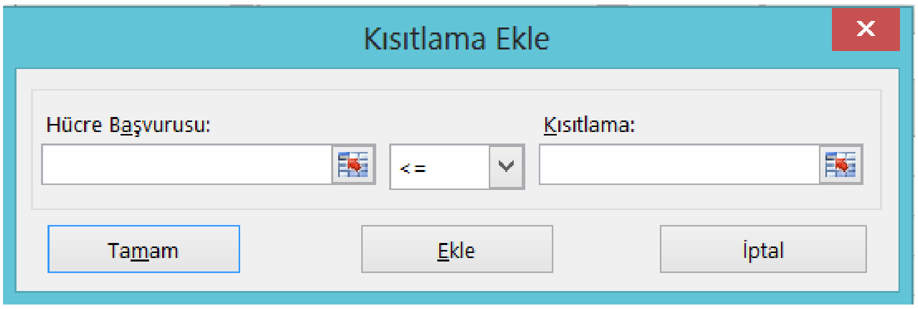
Hammadde kısıtı için B13 hücresine “**=topla.çarpım (B4:C4; B10:C10)**” ve hammadde işleme kısıtı için B14 hücresine “**=topla.çarpım (B5:C5; B10:C10)**” formüllerini yazarak kısıtları yazılır.

Çözücüyü çalıştırmak için Veri sekmesi içindeki **Çözücü** düğmesine basılır (Eğer veri düğmesinde çözücü düğmesi bulunmuyor ise Excel Seçenekleri menüsünden Eklentiler alt bölümündeki Yönet seçeneğinden Excel Eklentileri seçilerek Git düğmesine basılır ve çıkan menüde Çözücü eklentisinin soluna tik konulur). Şekil 2.1’deki pencerede modelin çözümü için gerekli diğer biligler girilmelidir. İlk olarak amaç fonksiyonu formülün bulunduğu hücrenin adresi **Hedef Ayarla** bölümüne yazılırak amaç fonksiyonu belirlenir. Amaç fonksiyonun minimum veya maksimum olduğunu belirlemek için **Hedef** bölümündeki uygun kutucuk işaretlenir. Karar değişkenlerinin bulunduğu hücrelerin adresleri **Değişen Hücreleri Değiştirerek** alanına yazılır.



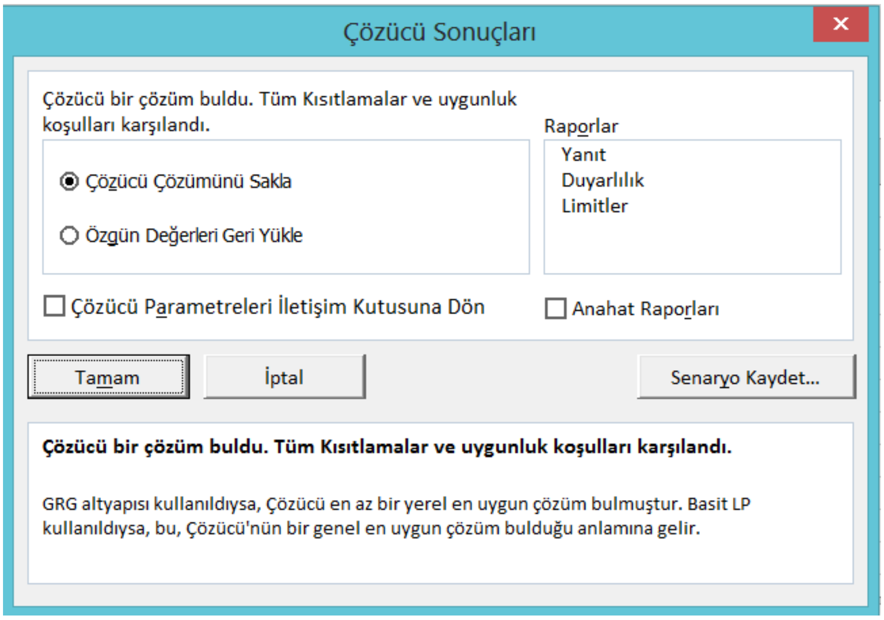
Şekil 2.1 Çözücü Penceresi

Kısıtları belirtmek için penceredeki **Ekle** düğmesine basılır ise Şekil 2.2'deki pencere açılır. Bu pencerede kısıtların sol taraflarının yer aldığı hücre adresleri **Hücre Başvurusu** alanına ve sağ taraf sabitinin bulunduğu hücre adresleri ise **Kısıtlama** alanına yazılır. Kısıtın yönü ise ortada kutucuktan seçilir. **Ekle** tuşuna basılarak kısıt eklenir. Bu işleme tüm kısıtlar bitinceye kadar devam edilir. Son kısıt için hücre adresleri girildikten sonra **Tamam** düğmesine basılır.



Şekil 2.2 Kısıt ekleme penceresi

Karar değişkenlerinin pozitif olduğunu belirlemek için Şekil 2.1'deki pencerede **Kısıtlanmamış Değişkenleri Pozitif Yap** kutucuğunun işaretli olması gerekmektedir. Girilen modelin doğrusal bir model olduğunu belirtmek için Şekil 2.1'deki penceredeki **Çözme Yöntemini Seçin** alanından **Basit LP** seçeneği seçilmelidir. Problemi çözmek için **Çöz** düğmesine basılır ise Şekil 2.3'deki **Çözücü Sonuçları** penceresi açılır. Bu pencerede eğer çözücü bir çözüm bulur ise "Çözücü bir çözüm buldu. "Tüm kısıtlar ve uygunluk koşullar karşılandı" şeklinde bir mesaj yer alacaktır. **Çözücü Çözümünü Sakla** seçeneği tıklanarak Tamam düğmesine basılır ise karar değişkenlerin değeri çalma sayfasında gösterilir. Bu pencerede istenir ise duyarlılık analizi gibi daha detaylı analizler yapılabilir.



Şekil 2.3 Çözücü sonuçları penceresi

Yukarıdaki modelin Çözücü kullanılarak bulunan en iyi çözümünde, sızma zeytinyağından $x_1^* = 8{,}572$ ton ve natürel birinci zeytinyağından $x_2^* = 4{,}286$ ton üretilmekte ve firmanın kârı $z^* = 385\ 714$ TL olmaktadır.

2.3 Grafik Çözüm Yöntemi

Bir DP probleminde iki veya üç karar değişkeni var ise problemin en iyi çözümü grafik yöntem kullanılarak bulunabilir. Grafik yöntem ile bir problemin en iyi çözümün nasıl bulunduğunu aşağıdaki örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 2.2 Masa ve sandalye imalatı yapan BNR firması, günlük üretilecek masa ve sandalye sayısını belirlemek istemektedir. Firma masa ve sandalye imalatı için günlük en fazla 75 m ağaç temin edebilmektedir. Ortalama olarak, bir masa için 3 m, bir sandalye için 1 m ağaç gerekmektedir. Firmada 15 işçi günde 8 saat çalışmaktadır. Bir masanın imalatı için ortalama 4 saat, bir sandalye için ise 3 saat işçilik süresi gerekmektedir. Satılan her masadan 12 TL, sandalyeden ise 8 TL kâr elde edilmektedir. Mobilyacı kârını maksimum yapmak için günlük kaç sandalye ve masa üretmelidir?

Çözüm: Önce problemin DP modelini oluşturalım. BNR firması günlük sandalye ve masa üretim miktarlarını belirlemek istediğinden karar değişkenlerini aşağıdaki şeklinde tanımlayabiliriz

x_1 : Günlük üretilecek masa miktarı,

x_2 : Günlük üretilecek sandalye miktarı

Firmanın amacı günlük kârını maksimum yapmaktır. Bu nedenle amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Enb\ z = 12x_1 + 8x_2$$

Bu problemde ağaç ve işçilik olmak üzere iki kısıt bulunmaktadır. Bir masa üretimi için 3 m ağaç, bir sandalye için ise 1 m ağaç gerekmektedir. Günlük kullanılan ağaç miktarı $3x_1 + x_2$ olur. Mobilyacı günlük en fazla 75 m ağaç temin edebildiğinden günlük kullanılacak ağaç miktarı 75 m'den küçük veya eşit olmak zorundadır. Bu kısıtı matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$3x_1 + x_2 \leq 75$$

Bir masa imalatı için ortalama 4 saat ve sandalye imalatı için ortalama 3 saat işçilik süresi gerekmektedir. Üretime bağlı olarak günlük $4x_1 + 3x_2$ saat işçilik süresi ihtiyaç vardır. Firmada 15 işçi günde 8 saat çalıştığından, günlük 120 saat işgücü kapasitesi bulunmaktadır. İşçilik süresi 120 saatten küçük veya eşit olmak zorundadır. Bu kısıt matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

Son olarak, masa ve sandalye sayısı negatif olamayacağından işaret kısıtlarının modele yazılması gerekir.

BNR mobilyacı için DP modeli toplu olarak aşağıdaki gibidir.

$$Enb\ z = 12x_1 + 8x_2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 75 \qquad (1)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120 \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (4)$$

Problemin karar modelini oluşturduktan sonra şimdi en iyi çözümü grafik yöntem ile bulalım. Grafik yöntem ile çözüm araştırırken ilk olarak tüm kısıtları aynı anda sağlayan noktalar belirlenir. Daha sonra bu noktalar arasından amaç fonksiyonunun değerini en iyi yapan nokta bulunur.

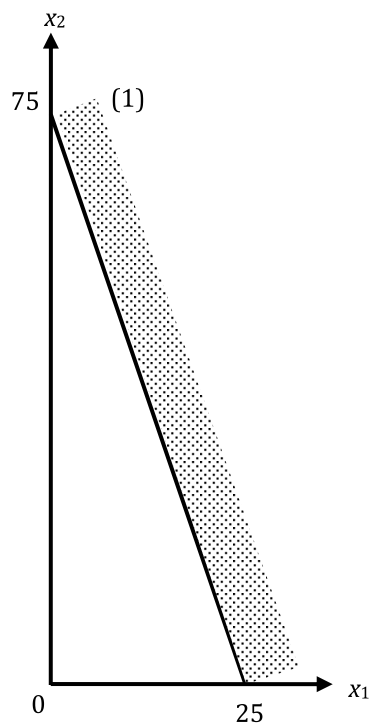
Kısıtları sağlayan noktaları belirleyebilmek için yatay ve düşey eksenlere bir karar değişkeni atayalım. BNR probleminde yatay eksene üretilen masa miktarını, düşey eksen ise üretilen sandalye miktarını atayalım.

Şimdi her kısıtı sağlayan noktalar kümesini ayrı ayrı bulalım. İlk olarak, işaret kısıtlarını dikkate aldığımızda karar değişkenleri üretilen masa ve sandalye sayısı olduğundan negatif değer alamazlar. Bu kısıtları sağlayan noktalar koordinat sisteminin birinci bölgesinde yani pozitif bölgede yer almak zorundadır.

İkinci olarak, ağaç kısıtını sağlayan noktalar kümesini bulalım. Bunun için önce eldeki ağacın tamamının kullanıldığımızda üretebileceğimiz masa ve sandalye kombinasyonlarını belirleyelim. Eğer ağacın tamamı kullanılır ise her kombinasyon için aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir.

$$3x_1 + x_2 = 75$$

Bu eşitliğe iki boyutlu uzayda bir doğru karşı gelmektedir. Bu doğrunun koordinat sistemindeki yerini belirlemek için iki noktanın bulunması yeterlidir. Bu noktaları tespit etmek için örneğin $x_1 = 0$ değerini verirsek $x_2 = 75$ ve $x_2 = 0$ değerini verirsek $x_1 = 25$ olarak buluruz. Bu doğru (0,75) ve (25,0) noktalarından geçmektedir. Şekil 2.4'deki bu doğru gösterilmektedir. Bu doğru parçası üzerindeki noktalarda 75 m ağacın tamamı kullanılmaktadır, fakat problemde kısıt (≤) olduğundan ağacın tamamını kullanmak zorunda değiliz. Aslında bu doğru üst limiti temsil etmektedir. Ağaç kısıtını sağlayan uygun çözümleri belirlemek için bu doğrunun hangi tarafının kısıtı sağladığını belirlememiz gerekir. Bunun için kolay bir yöntem olarak orijinin bu kısıtı sağlayıp sağlamadığını kontrol edebiliriz. Eğer orijin kısıtı sağlıyor ise orijinin bulunduğu taraf aksi takdirde diğer taraftaki noktalar uygun çözüm olur. (0,0) noktası ağaç kısıtını sağladığından doğrunun altındaki tüm noktalar ağaç kısıtını sağlar. Ağaç kısıtını sağlayan uygun çözümleri grafik üzerinde göstermek için kısıtı sağlamayan noktaları tarayabiliriz. Bu nedenle kısıtı sağlamayan noktaları belirtmek için doğrunun üst tarafını tarayalım. İşaret kısıtlarıyla birlikte değerlendirildiğinde Şekil 2.4'deki üçgen içinde yer alan tüm noktalar hem ağaç kısıtını hem de işaret kısıtlarını sağlamaktadır.

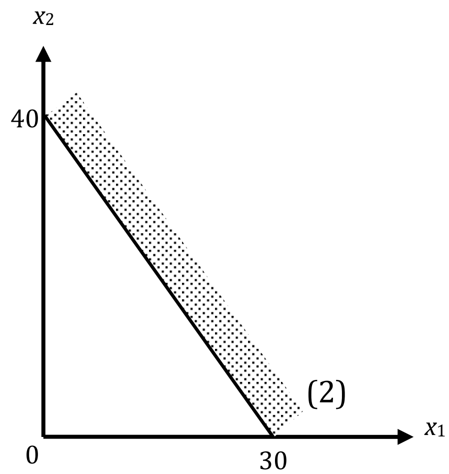


Şekil 2.4 Ağaç kısıtını sağlayan noktalar kümesi

Benzer şekilde, eğer işçilik saatinin tamamı kullanılır ise bu kısıt aşağıdaki gibi eşitlik olarak sağlanır.

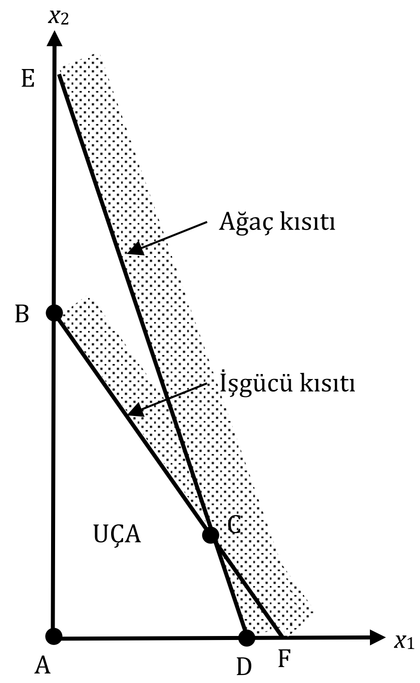
$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

Bu eşitliği temsil eden doğrunun koordinat sisteminde yerini bulmak için iki nokta belirleyelim. $x_1 = 0$ için $x_2 = 40$ ve $x_2 = 0$ için $x_1 = 30$. Şekil 2.5'de bu doğru $(0, 40)$ ve (30, 0) noktalarından geçmektedir. (0,0) noktası $4x_1 + 3x_2 \leq 120$ kısıtını sağladığından Şekil 2.5'deki üçgen içinde yer alan tüm noktalar işçilik kısıtını sağlar.



Şekil 2.5 İşçilik kısıtını sağlayan noktalar kümesi

Şimdi ağaç, işçilik ve işaret kısıtlarını aynı anda sağlayan noktaları bulalım. Bunun için ayrı ayrı olarak belirlenen noktaları tek bir grafikte birleştirilerek kesişim kümesini tespit edebiliriz. Şekil 2.6'da ağaç, işgücü ve işaret kısıtlarını sağlayan noktalar aynı grafikte verilmektedir. Tüm kısıtları aynı anda sağlayan noktalara **uygun çözüm** denir. Eğer bir nokta en az bir kısıtı sağlamıyor ise bu çözüme **uygun olmayan çözüm** denir. Uygun çözüm noktalarının oluşturduğu kümeye **uygun çözüm alanı** (**UÇA**) denir. Şekil 2.6'da ABCD ile belirlenen alan BNR problemi için bir UÇA dır. DP'de tüm kısıtları aynı anda sağlayan noktalar kümesi olarak isimlendirilmektedir. Uygun çözüm alanının köşelerindeki noktalar ise **uç noktalar** veya **köşe noktalar** olarak isimlendirilmektedir. Uç noktanın oluşması için iki boyutlu uzayda en az iki kısıtın üç boyutlu uzayda en az 3 kısıtın kesişmesi (yada eşitlik olarak sağlanması) gerekir. Örneğin Şekil 2.6'da A noktasında $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ kısıtı eşitlik olarak sağlanmaktadır. B noktasında $x_1 \geq 0$ ve $4x_1 + 3x_2 \leq 120$ kısıtı eşitlik olarak sağlanmaktadır. Bir noktanın uç nokta olması için mutlaka tüm kısıtları sağlaması gerekir. Şekil 2.6'da E ve F noktaları bir uç nokta değildir. E noktasında işgücü kısıtı, F noktasında ise ağaç kısıtı sağlanmamaktadır.

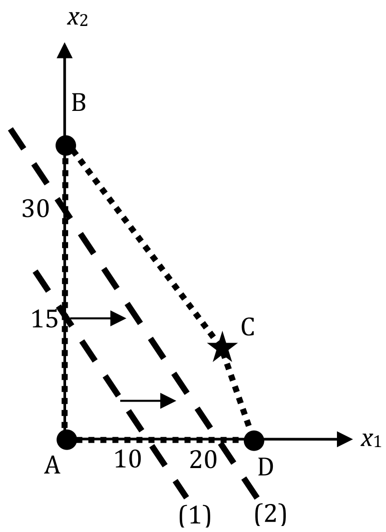


Şekil 2.6 BNR mobilyacısı için uygun çözüm alanı

UÇA belirlendikten sonra amaç fonksiyonunun en iyi değere sahip olduğu noktanın belirlenmesi gerekmektedir. UÇA'da sonsuz nokta olduğundan tüm noktaları deneyerek en iyi çözümü bulmak imkânsızdır. Bunun yerine belli kâr hedefini sağlayan çözümler olup olmadığını tespit ederek daha sonra bu hedefi arttırıp arttıramayacağımızı belirleyebiliriz. Örneğin mobilyacı günlük 120 TL kâr elde etmeyi hedeflediğini varsayalım. Bu hedefi aşağıdaki gibi eşitlik olarak ifade edebiliriz.

$$12x_1 + 8x_2 = 120$$

Şekil 2.7'de bu eşitlik (1) doğrusu ile temsil edilmektedir. Bu doğruyu **amaç fonksiyonu doğrusu** olarak isimlendirelim. Amaç fonksiyonu doğrusu üzerindeki tüm noktalarda mobilyacı 120 TL kâr elde etmektedir. (1) doğrusu UÇA içinde kaldığından 120 TL kâr hedefine ulaşılabilmektedir. Şimdi BNR'nin günlük 240 TL kâr elde etmeyi hedeflediğini varsayalım. Bu hedefi $12x_1 + 8x_2 = 240$ eşitliği ile ifade edelim. Şekil 2.7'de bu eşitliğe (2) no.lu doğru karşı gelmektedir. Bu iki doğru birbiriyle karşılaştırıldığında kâr 120 TL'den 240 TL'ye çıkardığında amaç fonksiyonu doğrusu paralel olarak sağa doğru kaymıştır. (2) doğrusu da UÇA içinde yer aldığından BNR 240 TL kâr hedefine de ulaşabilmektedir.



Şekil 2.7 BNR firması için uygun çözüm alanı

Kârı maksimum yapmak için amaç fonksiyonu doğrusunun UÇA'yı terk ettiği en son noktaya kadar sağa doğru kaydırılması gerekir. Şekil 2.7'de amaç fonksiyonu doğrusu UÇA'yı C noktasından terk eder. Bu nedenle C noktası problemin en iyi çözümüdür. Şimdi bu noktanın koordinat sisteminde yerini bulalım. C noktasında ağaç ve işçilik kısıtları aşağıdaki gibi eşitlik olarak sağlanmaktadır.

$$3x_1 + x_2 = 75$$

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

Bu denklem sisteminin çözümden $x_1^* = 21$, $x_2^* = 12$ ve amaç fonksiyonun en büyük değeri $z^* = 348$ TL olarak bulunur.

Özel olarak BNR problemi için açıklanan bu durum aslında tüm DP problemleri için geçerlidir. Amaç fonksiyonu doğrusu istenen yönde kaydırılır ise UÇA'yı her zaman bir uç noktadan terk eder. Bu nedenle DP'nin en iyi çözümü uç noktalardan birisinde olmak zorundadır.

Teorem 2.1	Bir DP probleminde en iyi çözüm uygun çözüm alanın bir uç noktası olmak zorundadır.

Teorem 2.1 UÇA'daki sonsuz çözüm sayısını sonlu sayıdaki uç noktalara indirerek en iyi çözümün bulunmasını oldukça hızlandırmaktadır. Ancak problemdeki karar değişkeni ve kısıt sayısı arttıkça uç nokta sayısı hızlı bir şekilde artmakta ve tüm uç noktaları tespit etmek imkânsız hale gelmektedir. Bölüm 3'de açıklanan simpleks algoritması sınırlı sayıda uç noktayı ziyaret ederek hızlı bir şekilde en iyi çözümü ulaştığından oldukça etkin bir algoritmadır.

Amaç fonksiyonu enbüyük olan bir problem için açıklanan grafik yöntem ufak bir değişiklikle amaç fonksiyonu en küçük olan bir problem içinde uygulanabilir. Aşağıdaki örnek problemi inceleyelim.

Örnek 2.3 [1]OMP rafinerisi iki farklı ülkeden temin ettiği ham petrolü işleyerek benzin, jet yakıtı ve fueloil üretmektedir. A ülkesinden alınan petrolün bir varilinden, 0.4 varil benzin, 0.1 varil jet yakıtı ve 0.4 varil fueloil üretilmektedir. B ülkesinden alınan ham petrolün bir varilinden ise 0.4 varil benzin, 0.2 varil jet yakıtı ve 0.3 varil fueloil elde edilmektedir. Her iki ülkeden alınan ham petrollün firmaya maliyetleri farklı olup, A ülkesinden alınan ham petrolün varil maliyeti 45 dolar, B ülkesinden alınan ham petrolün varil maliyeti ise 40 dolardır. A ülkesinden en fazla 10000 varil B ülkesinden ise 8000 varil ham petrol temin edilebilmektedir. Firma yaptığı anlaşmalar gereği en az 4000 varil benzin, 1500 varil jet yakıtı ve 2400 varil fueloil üretmek zorundadır. Bu bilgiler ışığında maliyeti enküçükleyecek satın alma politikasını belirleyiniz. Modelin en iyi çözümünü grafik yöntem ile bulunuz.

Çözüm: Problemdeki karar değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

j : Ülkeler /1,2/

x_j : j. ülkeden alınan ham petrol miktarı

Rafineri her yakıt tipi için minimum üretimleri gerçekleştirmelidir. Bu nedenle benzin için en az 4000 varil, jet yakıtı için en az 1500 varil ve fueloil için en az 2400 varil üretim yapmalıdır. Bu kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır

[1] Winston (1991)'den uyarlanmıştır

$$0.4x_1 + 0.4x_2 \geq 4000 \quad \text{(Benzin kısıtı)}$$
$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 1500 \quad \text{(Jet yakıtı kısıtı)}$$
$$0.4x_1 + 0.3x_2 \geq 2400 \quad \text{(Fueloil kısıtı)}$$

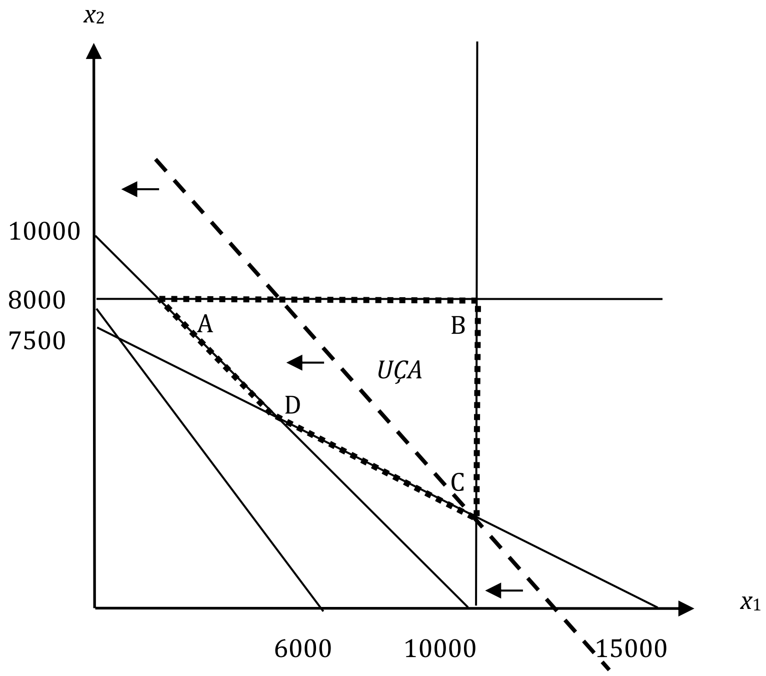
Rafineri A ülkesinden en fazla 10000 varil, B ülkesinden en fazla 8000 varil ham petrol temin edebilmektedir.

$$x_1 \leq 10000 \quad \text{(A ülkesi için ham petrol kısıtı)}$$
$$x_2 \leq 8000 \quad \text{(A ülkesi için ham petrol kısıtı)}$$

Rafinerinin amacı toplam maliyeti enküçüklemektir.

$$Enk\ z = 45x_1 + 40x_2$$

Şekil 2.8'de OMP probleminin uygun çözüm alanı ABCD olarak verilmektedir. Kesikli çizgi ile gösterilen amaç fonksiyonu doğrusu sola doğru kaydırıldığında toplam maliyet azalmaktadır. Amaç fonksiyonu doğrusu UÇA'yı en son A noktasında terk etmektedir. Bu noktada $x_1^* = 2000$, $x_2^* = 8000$ ve toplam maiyet $z^* = 410000$ TL olarak bulunur.



Şekil 2.8 OMP rafinerisi probleminin UÇA

Uygulamada karşılaşılan problemlerde değişken sayısı genellikle ikiden fazla olduğundan grafik çözüm yöntemini kullanmak imkânsızdır. Bu problemlerin en iyi çözümünü bulmak için simpleks algoritması veya alternatif yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

2.4 Doğrusal Programlamanın Varsayımları

Bir problemin DP olarak modellenebilmesi için aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekir.

Oransallık	Karar değişkenlerindeki artışa bağlı olarak kullanılan kaynak miktarları sabit bir oranda artar.
Toplanabilirlik	Bir kaynaktan kullanılan toplam miktar ayrı ayrı her bir aktivite tarafından kullanılan miktarların toplamına eşittir. Benzer şekilde amaç fonksiyonundaki toplam katkı her bir aktivitenin katkılarının toplamına eşittir. Kaynaklar arasında bir etkileşim söz konusu değildir.
Bölünebilirlik	Karar değişkenleri negatif olmayan herhangi bir sayısal değer alabilir.
Kesinlik	Modeldeki tüm parametrelerin alacağı değerler bilinmekte ve değişmemektedir.

2.5 Doğrusal Programlama Örnekleri

Bu bölümde uygulamada karşılaşılan bazı temel problemlere ait DP örneklerine yer verilmektedir.

2.5.1 Stok Kontrol Problemleri

Stok kontrol problemi talepleri minimum maliyetle karşılayacak şekilde üretim için gerekli hammadde, yarı mamul ve nihai malların, üretim veya sipariş miktarlarının ve zamanlarının belirlenmesini kapsayan bir karar problemidir.

Örnek 2.4 Makine imalatı yapan bir firma gelecek 4 çeyrek için üretim miktarlarını belirlemek istemektedir. Her bir çeyrek için firma sırasıyla, 30, 50, 60 ve 25 makine siparişi almıştır. Firma her çeyrekte normal mesaide en fazla 40 makine üretebilmektedir. Normal mesaide üretim maliyetleri her bir çeyrek için sırasıyla 40, 65, 60 ve 42 bin TL olacağı öngörülmektedir. Siparişleri karşılamak için firma isterse fazla mesai yapabilmekte ve fazla mesaide 20 makine üretebilmektedir. Fazla mesai üretim maliyeti normal mesai maliyetinden %10 daha fazla olmaktadır. Her çeyrek sonunda stokta kalan makine için 10 bin TL elde bulundurma maliyeti oluşmaktadır. Dördüncü çeyrek sonunda firma en az 15 makinenin stokta kalmasını istemektedir. Tüm siparişlerin zamanında karşılanması gerekmektedir. Bu bilgilere göre, toplam üretim ve stoklama maliyetini enküçükleyen karar modelini yazınız.

Çözüm: Firma her bir çeyrekte normal ve fazla mesaide üretmesi gereken makine sayısını belirlemek istemektedir. Bu nedenle karar değişkenlerini normal ve fazla mesaide üretilecek makine sayıları olarak tanımlayalım. Bu değişkenlerin yanı sıra üretim miktarına bağlı olarak her çeyrek sonunda stokta belli sayıda makine kalabilir. Bu nedenle stokta ne kadar makine kaldığını tespit etmek için her çeyrek sonunda stok kalan makine miktarları da karar değişkeni olarak ele alınmalıdır.

t: Çeyrekler /1,2,3,4/

x_t : t. çeyrekte normal mesaide üretilecek makine sayısı

y_t : t. çeyrekte fazla mesaide üretilecek makine sayısı

s_t : t. çeyrekteki dönem sonu stok miktarı

Firma toplam yıllık maliyeti (TM) minimum yapmak istemektedir. Toplam yıllık maliyet normal mesaide üretim maliyeti (NMÜM), fazla mesaide üretim maliyeti (FMÜM) ve stoklama maliyetlerinin (SM) toplamıdır.

$$TM = NMÜM + FMÜM + SM$$

$$TM = 40x_1 + 65x_2 + 60x_3 + 42x_4 + 44y_1 + 49.5y_2 + 66y_3 + 46.2y_4 + 10(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$$

Bu açıklamalar sonucunda amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Enk\ z = TM$$

Herhangi bir çeyrek sonunda stokta kalan makine miktarını aşağıdaki gibi tespit edebiliriz.

$(t-1)$. çeyrek sonundaki stok $+\ t.$ çeyrekteki NM üretim $+\ t.$ çeyrekteki FM üretim $-\ t.$ çeyrekteki talep $=\ t.$ çeyrek sonundaki stok

Yukarıdaki eşitlikler **stok denge eşitlikleri** olarak isimlendirilir. Problem için stok denge eşitliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x_1 + y_1 - 30 = s_1 \quad \text{(Birinci çeyrek için denge kısıtı)}$$
$$s_1 + x_2 + y_2 - 50 = s_2 \quad \text{(İkinci çeyrek için denge kısıtı)}$$
$$s_2 + x_3 + y_3 - 65 = s_3 \quad \text{(Üçüncü çeyrek için denge kısıtı)}$$
$$s_3 + x_4 + y_4 - 25 = s_4 \quad \text{(Dördüncü çeyrek için denge kısıtı)}$$

Dördüncü çeyrek sonunda 15 adet makinenin stokta kalmasını istenmektedir. Bu kısıt aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$s_4 \geq 15$$

Problemde ayrıca kapasite kısıtları bulunmaktadır. Firma normal mesaide en fazla 40, fazla mesaide en fazla 20 adet makine imalatı yapabilmektedir. Kapasite kısıtlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x_t \leq 40 \qquad t = 1, 2, 3, 4$$
$$y_t \leq 20 \qquad t = 1, 2, 3, 4$$

Son olarak, üretim ve stok miktarları negatif olamayacağından modele aşağıdaki kısıtların eklenmesi gerekmektedir.

$$x_t, y_t, s_t \geq 0 \quad \forall t = 1, 2, 3, 4$$

2.5.2 Yatırım Problemleri

Yatırım problemleri sermaye birikiminin beklenen getirisinin maksimum yapacak şekilde riskli veya risksiz alternatifler arasında paylaştırılmasını içeren bir karar problemdir.

Örnek 2.5. [2]FRX firması gelecek üç yıl için yatırım planı yapmak istemektedir. Firmanın elinde beş farklı alternatifte kullanılmak üzere 100000 TL bulunmaktadır. Yatırım dönemi boyunca her alternatife en fazla bir yatırım yapılacaktır. Herhangi bir alternatife Tablo 2.2'de 1 TL yatırım karşılığında elde edilecek gelirler ve alternatiflerin risk seviyeleri verilmektedir. (-) değerler yatırımın yapılabileceği yılları göstermektedir. Örneğin 3. alternatife ikinci yılın başında yatırım yapılabilir bu durumda dördüncü yılın başında her 1 TL yatırım için 1,2 TL gelir elde edilecektir.

Tablo 2.2 Alternatifler ve getirileri

	Alternatifler				
Yıllar	1	2	3	4	5
1. Yılın başı	- 1	-1	0	-1	0
2. Yılın başı	0.5	0.7	-1	0	0
3. Yılın başı	0	0	0	1.4	-1
4. Yılın başı	0.9	0.6	1.2	0	1.3
Risk Seviyeleri	0.14	0.11	0.15	0.13	0.14

Herhangi bir alternatif için en fazla 60000 TL yatırım yapılabilmektedir. Herhangi bir yılda kullanılmayan para yıllık %15 net faiz getirisi ile bankaya yatırılacaktır. Herhangi bir yılda yatırımlardan veya bankadan elde edilen gelir bir sonraki dönemde yatırım için kullanılacaktır. Firma yatırımlar için ortalama risk seviyesinin en fazla 0.12 olmasını istemektedir. FRX firması 4. yılın başındaki toplam gelirini maksimum yapmak için nasıl bir yatırım yapılmasını bulan karar modelini yazınız.

Çözüm: Firma her yıl hangi alternatiflere ne kadar para yatırılacağını belirlemek istemektedir. Ayrıca beş alternatif dışında firma elinde kalan paraları yıllık olarak bankaya yatırmaktadır. Bu nedenle bankaya yatırılan para miktarlarının da tespit edilmesi gerekmektedir. Böylece problemdeki karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

j : Alternatifler

t : Yıllar

x_j : j. alternatife yatırılan para miktarı

s_t : t. yılın başında bankaya yatırılan para miktarı

Herhangi bir dönemde yatırım için kullanılan para miktarı o dönemdeki eldeki para miktarına eşit olmalıdır:

t. dönem başında yatırımda kullanılan miktar $=$ t. dönem başında eldeki miktar

Birinci yılın başında yatırımlar için 100000 TL mevcuttur. Bu para 1. 2. 4. alternatiflerde veya bankada değerlendirilebilir. Bu nedenle birinci yıl için kısıt aşağıdaki gibi yazılır

$$x_1 + x_2 + x_4 + s_1 = 100000$$

İkinci yılın başında birinci ve ikinci alternatiflere yatırılan her 1 TL için 0.5 TL gelir elde edilecektir. Aynı zamanda banka yatırılan paradan %15 faiz geliri oluşacaktır. Bu paralar üçüncü alternatifte ve bankada değerlendirileceğinden kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_3 + s_2 = 1.15s_1 + 0.5x_1 + 0.7x_2$$

[2] Winston (1991)'den uyarlanmıştır

Üçüncü yılın başında dördüncü alternatiften her 1 TL için elde edilen 1.4TL ve bankadan %15 faizden elde edilen gelir. Bu paralar beşinci alternatifte ve bankada değerlendirileceğinden kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_5 + s_3 = 1.15s_2 + 1.4x_4$$

Firma herhangi bir alternatife en fazla 60000 TL yatırım yapmak istemektedir.

$$x_j \leq 60000 \quad \forall j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Yatırımların ortalama riski en fazla %12 olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.15x_3 + 0.13x_4 + 0.14x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + s_1 + s_2 + s_3} \leq 0.12$$

Bu kısıtı doğrusal hale getirmek için gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$0.02x_1 - 0.01x_2 + 0.03x_3 + 0.01x_4 + 0.02x_5 - 0.12s_1 - 0.12s_2 - 0.12s_3 \leq 0$$

FRX 3. yılın sonundaki toplam kazancını maksimum yapmak istemektedir. 4. yılın başındaki toplam kazancı 1, 2, 3 ve 5. yatırımlardan elde edilen gelir ve 3. yılın başında bankaya yatırılan paranın faizinden oluşmaktadır. Bu nedenle amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

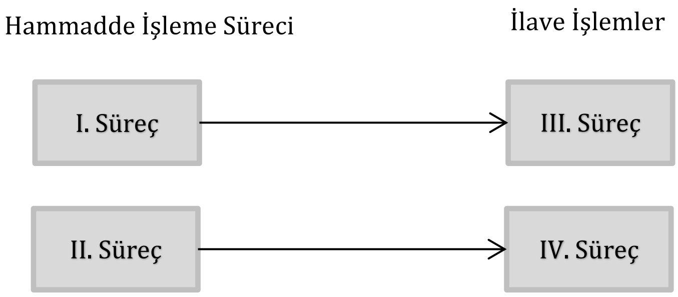
$$Enb\ z = 0.9x_1 + 0.6x_2 + 1.2x_3 + 1.3x_5 + 1.15s_3$$

2.5.3 Ürün Karması Problemleri

Örnek 2.6 [3]Bir kimya firması dört farklı kimyasal üretmektedir. Üretim için gerekli hammadde kilogramı 30 TL'den temin edilmektedir. Hammaddenin işlenmesi için iki farklı süreç bulunmaktadır. Birinci süreçte 1 kg hammaddenin işlenmesi için 3 saat gerekmekte ve bu işlem sonucunda 0.4 kg A kimyasalı elde edilmektedir. İkinci süreçte 1 kg hammaddenin işlenmesi için 2 saat gerekmekte ve bu işlem sonucunda 0.5 kg B kimyasalı elde edilmektedir. Her iki süreç için hammadde işleme maliyeti 10 TL/saat olup, bu işlemler için firmada 2000 saat kapasite bulunmaktadır. A kimyasalının satış fiyatı 200 TL/kg ve B kimyasalının satış fiyatı ise 150 TL/kg. Firma A kimyasalından 100 kg ve B kimyasalından 40 kg sipariş almıştır. A ve B kimyasalları üzerinde ilave işlemler yapılarak C ve D kimyasalları üretilmektedir. Bir kilogram A kimyasalının işlenmesi sonucunda 0.75 kg C kimyasalı elde edilmekte ve kilosu 280 TL'den satılmaktadır. Bir kilogram B kimyasalının işlenmesi sonucunda 0.8 kg D kimyasalı elde edilmekte ve kilosu 190 TL'den satılmaktadır. Bir kilogram C kimyasalı elde etmek için 2 saat işlem süresi gerekmekte ve her saat için 10 TL işleme maliyeti oluşmaktadır. Bir kilogram D kimyasalı elde etmek için 1.5 saat işlem süresi gerekmekte ve her saat için 8 TL işleme maliyeti oluşmaktadır. Firma bu ilave işlemler için 250 saat işlem süresine sahiptir. Firmanın kârını maksimum yapmak için hangi kimyasallardan ne kadar üretmesi gerektiğini bulan karar modelini yazınız.

Çözüm: Kimyasal üretim süreci aşağıda şekilde gösterilebilir

[3] Winston (1991)'den uyarlanmıştır



Problemde karar değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım

j: Kimyasallar /A, B, C, D/

x_j : j. kimyasaldan üretilecek miktar (kg)

Önce problem için gerekli parametreleri hesaplayalım. 1 kg hammaddenin işlenmesi sonucunda 0.4 kg A üretildiğinden 1 kg A için 2.5 kg hammadde gerekmektedir. 1 kg A üretimi için gerekli işlem süresi (3) (2.5)=7.5 saattir.

1 kg hammaddenin işlenmesi sonucunda 0.5 kg B üretildiğinden, 1 kg B için 2 kg hammadde gerekmektedir. 1 kg B üretimi için gerekli işlem süresi (2)(2)= 4 saattir.

1 kg hammaddenin işlenmesi sonucunda 0.4 kg A, 1 kg A'nın işlemesi sonucunda 0.75 kg C üretilmektedir. Bu nedenle1 kg hammaddenin işlenmesi sonucunda (0.4)(0.75)=0.3 kg C üretilir. Bu nedenle 1 kg C için 10/3 kg hammadde gerekir. 1 kg C kimyasalının üretimi için (3) (10/3)= 10 saat işleme süresi gerekmektedir.

1 kg hammaddenin işlenmesi sonucunda 0.5 kg B, 1 kg B'nin işlemesi sonucunda 0.8 kg D üretilmektedir. Bu nedenle 1 kg hammaddeden (0.5)(0.8)=0.4 kg D kimyasalı üretilir. 1 kg D için 2.5 kg hammadde gerekir. 1 kg D üretimi için (2) (2.5)= 5 saat işleme süresi gerekmektedir.

Hammaddelerin işlenmesi için tesiste 2000 saatlik kapasite bulunduğundan hammadde işleme kısıtı aşağıdaki gibi yazılır.

$7.5x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 2000$ (Hammadde işleme kısıtı)

Firmada Cve Düretimi için toplam 250 saat işlem kapasitesi bulunmaktadır.

$$2x_3 + 1.5x_4 \leq 250$$

A'nın talebi en az 100 kg, B'nin talebi en az 40 kg olmalıdır. Bu kısıtları aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$x_1 \geq 100$$

$$x_2 \geq 40$$

Firma kârını maksimum yapmak istemektedir. Önce her kimyasaldan elde edilen kârları bulalım.

Kâr= Satış fiyatı – Hammadde maliyeti - İşleme maliyeti

A kimyasalının kilogram başına kârı: 200 - (30) (2.5) - (10) (7.5) = 50

B kimyasalının kilogram başına kârı: 150 - (30) (2) - (10) (4) = 50

C kimyasalının kilogram başına kârı: 280 - (30) (10/3) - (10) (10)- (10)(2) = 60

D kimyasalının kilogram başına kârı: 190 - (30) (2.5) - (10) (5)- (8) (1.5) = 53

Amaç fonksiyonu toplam kârı maksimum yapmak olduğundan amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Enb\ z = 50x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 53x_4$$

Problemin en iyi çözümünde A kimyasalından 100 kg, B kimyasalından 312,5 kg üretilmekte C ve D kimyasalları üretilmemektedir. Toplam kâr 20.625 TL'dir.

2.5.4 Diyet Problemleri

Belli beslenme ihtiyaçlarını minimum maliyetle karşılamak için hangi besin maddesinden ne kadar tüketilmesinin belirlenmesi problemi genel olarak diyet problem olarak isimlendirilir.

Örnek SBF hayvancılık firması sığırların et verimini arttırmak için beslenme planını belirlemek istemektedir. Bu amaçla firma hayvanların günlük protein, enerji ve diğer temel gıda ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde üç farklı yemin karışımından elde edilecek karma bir yem kullanılacaktır. Yemlerin, protein, selüloz, kalsiyum değerleri, enerji miktarları ve kilogram fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.3 Yemlerin besin değerleri ve maliyetleri

Yem Tipi	Protein (%)	Selüloz (%)	Kalsiyum (%)	Enerji (Kcal/kg)	Maliyet (TL/Kg)
A	18	14	3	2600	10
B	13	15	3	2500	4
C	16	20	1	2300	5

Karma yemdeki protein miktarının en az %15, selüloz miktarının en az %17, kalsiyum miktarının en az %2 ve enerji miktarının en az 2400 Kcal/kg olması istenmektedir. Bu bilgiler ışığında toplam maliyeti enküçükleyecek karma yem ne şekilde oluşturulmalıdır.

Çözüm: Problemdeki karar değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

j: Yem tipleri

x_j : j yeminden 1 kg karışım için kullanılacak miktar

Amaç fonksiyonu, toplam yem maliyetinin enküçüklenmesidir.

$$Enk\ z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Üç yemin karışımından elde edilecek protein miktarı en az %15 olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$0.18x_1 + 0.13x_2 + 0.16x_3 \geq 0.15$$

Üç yemin karışımından elde edilecek selüloz miktarı en az %17 olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$0.14x_1 + 0.15x_2 + 0.2x_3 \geq 0.17$$

Üç yemin karışımından elde edilecek kalsiyum miktarı en az %2 olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$0.03x_1 + 0.03x_2 + 0.01x_3 \geq 0.02$$

Yemin enerji miktarı en az 2400 Kcal/kg olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$2600x_1 + 2500x_2 + 2300x_3 \geq 2400$$

Son olarak karışımın toplamı 1 kg olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Problemin en iyi çözümünde $x_1^* = 0.1$, $x_2^* = 0.4$ ve $x_3^* = 0.5$ olarak bulunur. Bu şekilde oluşturulan yemin maliyeti $z = 5.1$ TL/Kg'dır.

2.5.5 İşgücü Planlama Problemleri

Örnek 2.7 Bir firma altı aylık bir proje için gereksinim duyduğu işgücünü geçici işçi çalıştırarak karşılamak istemektedir. Yapılan planlama sonucunda aylık gereksinim duyulan işçi sayısı aşağıdaki gibi tespit edilmiştir. İşçiler bir taşeron firmadan temin edilecektir. Taşeron firma ile yapılan anlaşmaya göre işçilerle 3 er aylık sözleşme yapılacaktır. Eğer projenin tamamlanması için kalan süre 3 aydan daha az ise kalan süre kadar sözleşme yapılacaktır. Aylık işçilik ücretleri aylara göre değişkenlik göstermektedir.

Tablo 2.4 Aylara göre gerekli işçi sayıları ve ücretler

Aylar	1	2	3	4	5	6
İşçi sayısı	15	20	50	25	30	25
Aylık ücretler	800	900	1050	850	900	800

İşe alınan bir işçiye sözleşme boyunca alındığı aydaki ücret ödenecektir. Toplam maliyeti minimum yapmak için her ay kaç işçi ile sözleşme yapılması gerektiğini bulan karar modelini yazınız.

Çözüm: Problemde her ay sözleşme yapılacak işçi sayısı belirlenmek istenmektedir. Bu nedenle karar değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır.

j : Aylar /1*6/

x_j: j. ayın başında sözleşme yapılan işçi sayısı

Birinci ay en az 15 işçiye gereksinim duyulmaktadır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1 \geq 15$$

İkinci ayda 20 işçiye gereksinim bulunmaktadır. Sözleşmeler 3 aylık olduğu için birinci ayda işe alınan işçiler ile ikinci ayın başında işe alınacak işçilerin toplamı en az 20 kişi olmalıdır. Bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

Üçüncü ayda 50 işçiye ihtiyacı bulunmaktadır. Üçüncü ayda birinci ve ikinci ayda işe alınan işçiler çalışmaya devam edeceklerinden bu kısıt aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$$

Benzer şekilde 4. 5. 6. aylar için kısıtlar aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 25$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 30$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 25$$

Firmanın amacı toplam maliyeti enküçüklemektir. 1. 2. 3 ve 4. ayda alınan işçiler sözleşme gereği 3 ay, 5. ayda alınan işçi 2 ay ve 6. ayda çalışan işçi 1 ay çalışacağından amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Enk\ z = (3)(800)x_1 + (3)(900)x_2 + (3)(1050)x_3 + (3)(850)x_4 + (2)(900)x_5 + (1)(800)x_6$$

Bu modelin en iyi çözümünde $x_1^* = 20$, $x_3^* = 30$, $x_6^* = 25$ ve amaç fonksiyonu $z =$ 162500 TL olarak bulunur.