

3.5. Bazı Kesikli Dağılımlar

3.5.1. Bernoulli Dağılımı

Bir deneyde başarı ve başarısızlık diye nitelendirilen iki sonuçla ilgilenildiğinde bu deneye (iki sonuçlu) Bernoulli deneyi ya da Bernoulli denemesi denir.

başarı olasılığı $\rightarrow p$, ($0 < p < 1$)

başarısızlık olasılığı $\rightarrow 1 - p = q$

başarı-başarısız/ sağlam-bozuk/ olumlu-olumsuz/ ölü-canlı

Bernoulli dağılımının olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

şeklinde verilir.

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Bernoulli dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \sum_x x f(x) = 0(1 - p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 0^2(1 - p) + 1^2p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

3.5.2. Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında (bağımsız olarak) n kez tekrarlanması ile oluşan deneye binom deneyi denir.

Binom deneyinin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- Deney süresince örnekleme denek sayısı ya da deneme sayısı değişmez olmalıdır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Her denemede iki olası sonuç vardır (istenen ve istenmeyen olay).
- Her denemede ilgilenilen olay olasılığı p değişmezdir. Dolayısıyla istenmeyen olay olasılığı $q = 1 - p$ de değişmezdir.

Binom dağılımı kesikli bir olasılık dağılımıdır. X rasgele değişkeni binom dağılımına sahip olduğunda $X \sim b(n, p)$ ile gösterilir.

Binom dağılımının olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

şeklinde verilir.

Binom dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir:

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = Var(X) = npq$$

$$\text{Çarpıklık katsayısı } \zeta K = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \quad \text{basıklık katsayısı } BK = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

Örnek 3.15. Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Bu kutudan yerine koyarak 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

X : Çekilen tabletin aspirin olması

$$X \sim b(n = 3, p = \frac{1}{2})$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2! (3-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.375$$

Örnek 3.16. İlaç üreten bir firma ürettiği ilaçları ambalajlayarak satışa sunmaktadır. Ambalajlanan ilaç paketlerinin %10'unun istenen standarda uymadığı bilinmektedir. Bu ambalajlanmış ilaç paketlerinden 5 tanesi yerine koyularak rasgele olarak seçildiğinde,

- a) Hepsinin de ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
- b) Sadece 2'sinin ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
- c) En az 4'ünün ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
- d) En fazla 2'sini ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
- e) Ambalajı istenilen standarda uygun olması beklenen ilaç paketi sayısı nedir?

X : Ambalajı istenilen standarda uyan ilaç paketi sayısı

$$X \sim b(n = 5, p = 0.90)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{a) } P(X = 5) = \binom{5}{5} (0.90)^5 (0.10)^0 = \frac{5!}{5!0!} (0.90)^5 = 0.59049$$

$$\text{b) } P(X = 2) = \binom{5}{2} (0.90)^2 (0.10)^3 = \frac{5!}{2!3!} (0.90)^2 (0.10)^3 = 0.0081$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} (0.90)^4 (0.10)^1 + \binom{5}{5} (0.90)^5 (0.10)^0 = \frac{5!}{4!1!} (0.90)^4 (0.10)^1 + \frac{5!}{5!0!} (0.90)^5 \\ &= 0.32805 + 0.59049 = 0.91854 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{5}{0} (0.90)^0 (0.10)^5 + \binom{5}{1} (0.90)^1 (0.10)^4 + \binom{5}{2} (0.90)^2 (0.10)^3 \\ &= 0.00001 + 0.00045 + 0.0081 = 0.00856 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \mu = E(X) = np = 5(0.90) = 4.5$$

Örnek 3.17. Belli bir ameliyatın başarılı sonuçlanması olasılığı %80'dir. Ameliyat edilen 10 hastadan,

a) 6' sının iyileşmesi olasılığı nedir?

b) En az 9' unun iyileşmesi olasılığı nedir?

c) En fazla 7' sinin iyileşmesi olasılığı nedir?

d) Ameliyatı başarılı sonuçlanacak hastaların beklenen sayısını ve varyansını hesaplayınız.

X : Ameliyat sonrası iyileşen hasta sayısı

$$X \sim b(n = 10, p = 0.80)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x} (0.80)^x (0.20)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

$$\text{a) } P(X = 6) = \binom{10}{6} (0.80)^6 (0.20)^{10-6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} (0.80)^6 (0.20)^4 = 0.088$$

$$\text{b) } P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$\begin{aligned} &= \binom{10}{9} (0.80)^9 (0.20)^{10-9} + \binom{10}{10} (0.80)^{10} (0.20)^{10-10} \\ &= \frac{10!}{9!(10-9)!} (0.80)^9 (0.20)^1 + \frac{10!}{10!(10-10)!} (0.80)^{10} (0.20)^0 \\ &= 0.2684 + 0.1073 = 0.3758 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - (P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10))$$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} (0.80)^8 (0.20)^2 = 0.3019$$

$$P(X = 9) + P(X = 10) = 0.3758 \text{ daha önce bulunmuştu.}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= 1 - (P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)) \\ &= 1 - (0.3019 + 0.3758) = 0.3224 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \mu = E(X) = np = 10(0.80) = 8$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = npq = 10(0.80)(0.20) = 1.6$$

3.5.3. Poisson Dağılımı

Bu dağılım, belirli bir aralıkta gerçekleşme olasılığının çok küçük olduğu durumlarda kullanılır. Örneğin Ankara’da Beşevler kavşağında bir gün içerisinde meydana gelen trafik kazaları, belli bir yılda meydana gelen doğal afetler, az rastlanan hastalıklar gibi.

Denek sayısı olan n büyük iken p de çok küçük ise binom dağılımı poisson dağılımına yaklaşır. Genel olarak $np \leq 5$ olduğu zaman binom dağılımı yerine poisson dağılımı kullanılabilir. Ayrıca n ’nin 20 den büyük olması koşulu vardır.

X rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse, bu değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

λ gerçekleşen ortalama olay sayısı olup $\lambda = np$ dir.

Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda$$

$$\text{Çarpıklık katsayısı } \text{ÇK} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{basıklık katsayısı } \text{BK} = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

Örnek 3.18. Bir şehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta içinde ortalama ölen kişi sayısı 4’ dür. Belli bir hafta içinde bu hastalıktan,

- a) Hiç kimsenin ölmemesi
- b) En az 2 kişinin ölmesi
- c) 3 kişinin ölmesi

olasılıklarını hesaplayınız.

X: bir haftada bu hastalıktan ölenlerin sayısı

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \lambda = 4$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = 0.0183$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\frac{e^{-4} 4^0}{0!} + \frac{e^{-4} 4^1}{1!} \right) =$
 $= 1 - (0.0183 + 0.0733) = 1 - 0.0916 = 0.9084$

c) $P(X = 3) = \frac{e^{-4} 4^3}{3!} = 0.195$

Örnek 3.19. Acil servise saat 14⁰⁰-15⁰⁰ arasında her 15 dakikada ortalama 3 ambulans gelmektedir. Saat 14⁰⁰-15⁰⁰ arasında herhangi bir 15 dakika içinde acil servise,

- a) Hiç araç gelmemesi
- b) En az 1 araç gelmesi
- c) 4 araç gelmesi
- d) 5 araç gelmesi
- e) En çok 2 araç gelmesi

olasılıklarını bulunuz.

X: 15 dakikalık süre içinde acil servise gelen araç sayısı

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \lambda = 3$$

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0.04979$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.04979 = 0.95021$

c) $P(X = 4) = \frac{e^{-3} 3^4}{4!} = 0.16803$

d) $P(X = 5) = \frac{e^{-3} 3^5}{5!} = 0.10082$

e) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
 $= \frac{e^{-3} 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = 0.04979 + 0.14936 + 0.22404 = 0.42319$

Örnek 3.20. Bir ülkedeki her 100000 ölüm vakasında ortalama 3 tanesi gıda zehirlenmesinden ortaya çıkmaktadır. Belirli bir zaman dilimindeki 200000 ölüm vakasında gıda zehirlenmesinden dolayı,

- a) Sıfır ölüm vakasına
- b) 6 ölüm vakasına
- c) 6,7 ya da 8 ölüm vakasına,

rastlama olasılıklarını hesaplayınız.

$$n = 100000, \quad \lambda = np = 3$$

$$3 = 100000p \Rightarrow p = 0.00003$$

$$n = 200000, \quad \lambda = np = 200000(0.00003) = 6$$

X : gıda zehirlenmesinden ölen kişi sayısı

$$P(X = x) = \frac{e^{-6} 6^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{a) } P(X = 0) = \frac{e^{-6} 6^0}{0!} = 0.0025$$

$$\text{b) } P(X = 6) = \frac{e^{-6} 6^6}{6!} = 0.162$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) &= \frac{e^{-6} 6^6}{6!} + \frac{e^{-6} 6^7}{7!} + \frac{e^{-6} 6^8}{8!} \\ &= 0.162 + 0.1388 + 0.1041 = 0.4049 \end{aligned}$$

3.5.4. Geometrik Dağılım

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde ilk istenen sonucun (başarı ya da başarısızlık) elde edilmesi için yapılan deney sayısı olan X ' e geometrik rasgele değişken denir. Bu değişkenin dağılımı geometrik dağılım adını alır.

X rasgele değişkeni geometrik dağılıma sahipse, $X \sim Geo(p)$ biçiminde gösterilir.

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad 0 < p < 1$$

biçimindedir.

Geometrik dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Örnek 3.21. Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.

- a) Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
b) X rasgele değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise X rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı nedir?

X : İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deney sayısı

$$X \sim Geo(p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3})$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{a) } P(X = 5) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{243}$$

$$\text{b) } E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Örnek 3.22. Bir sınıfta sigara içen öğrenci olma olasılığı 0.40' dır. Devam çizelgesinde ismi belirlenen öğrenciye sigara içip içmediği soruluyor. 4' üncü sırada sorulan öğrencinin ilk sigara içen öğrenci olma olasılığı nedir?

X : İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deneme sayısı

$$X \sim Geo(p = 0.40)$$

$$f(x) = P(X = x) = 0.40(1 - 0.40)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(X = 4) = 0.40(1 - 0.40)^{4-1} = 0.0864$$

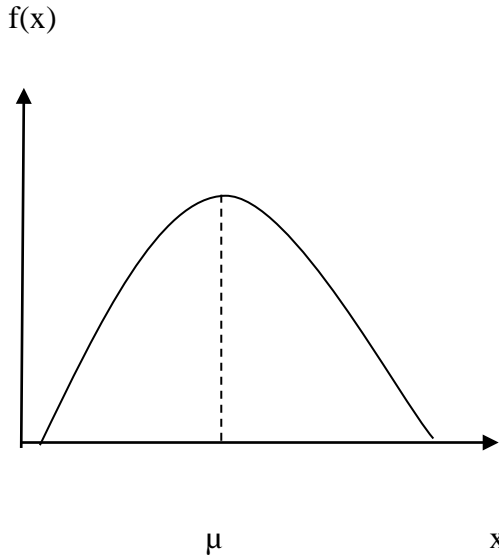
1.2. Sürekli Bir Fonksiyonun Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Olabilmesi İçin Gerekli Şartlar

1) $\forall x_i$ için $f(x_i) \in [0,1]$, Yani X rd'nin alacağı her bir x değerini alma olasılığı $[0,1]$ aralığında olmak zorundadır. Zaten, olasılığın tanımından da bilindiği üzere, hiçbir olayın olasılığı negatif bir sayı veya 1'den büyük bir sayı olamaz.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 'dir. Yani $f(x)$ 'in tanım aralığındaki toplam olasılık yani $f(x)$ eğrisinin altında kalan alan 1'e eşittir.

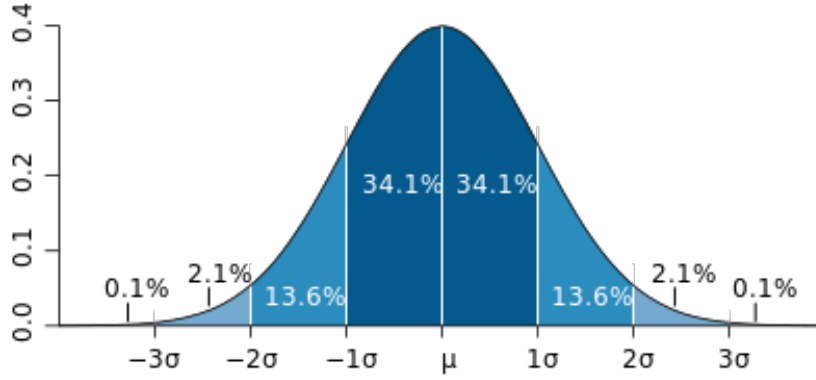
1.3. Normal Dağılım

İstatistikte sürekli dağılım denildiğinde ilk akla gelen en temel sürekli dağılım “normal dağılım”dır. Normal dağılım çan eğrisi biçimindedir.



μ normal dağılımın ortalamasıdır. Eğriyi iki eşit parçaya bölmektedir. Eğrinin altındaki toplam alan 1'e eşit olmak üzere, μ 'nün sağındaki ve solundaki alanlar birbirine eşit ve 0.5'tir. Normal dağılım simetrik bir yapıya sahiptir. Yani çarpıklık sıfırdır. Normal dağılımda; ortalama=medyan=mod'dur. Basıklığı ise idealdir, yani 4.moment ile hesaplanan α_4 basıklık katsayısı 3'e eşittir. Zaten diğer dağılımların basıklıkları değerlendirilirken, basık veya sivrilik durumlarına normal dağılım ile kıyaslama yapılarak karar verilir. Şayet $\alpha_4 < 3$ ise dağılım normalden basık, $\alpha_4 > 3$ ise normalden daha sivri bir dağılım olduğu söylenir.

Verilerin ortalama dolayındaki dağılımları aşağıdaki gibidir:

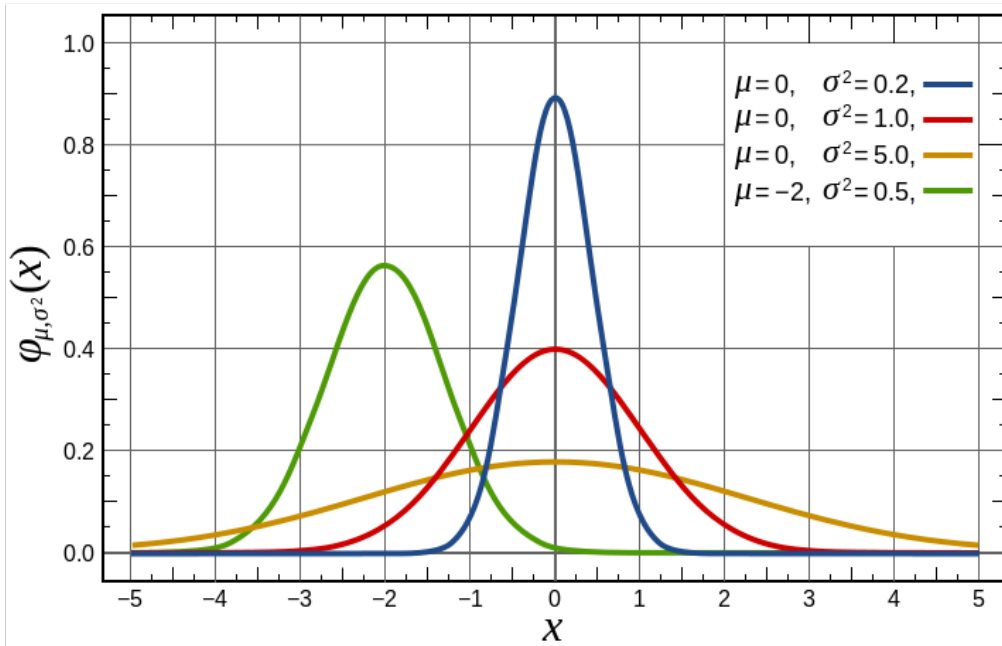


Verilerin %68.2'si (bu değer 2×34.1 'den elde edilmiştir) ortalamanın 1 standart sapma dolayında bulunur. %95.4'ü (bu değer 2×47.7 'den elde edilmiştir) ortalamanın 2 standart sapma dolayında bulunur. %99.6'sı (bu değer 2×49.8 'den elde edilmiştir) ortalamanın 3 standart sapma dolayında bulunur.

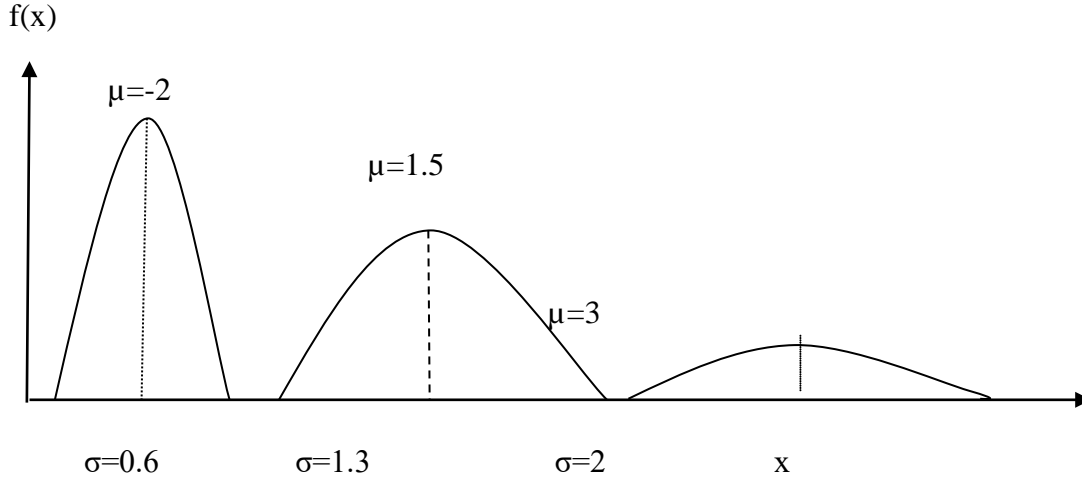
1.3.1. Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

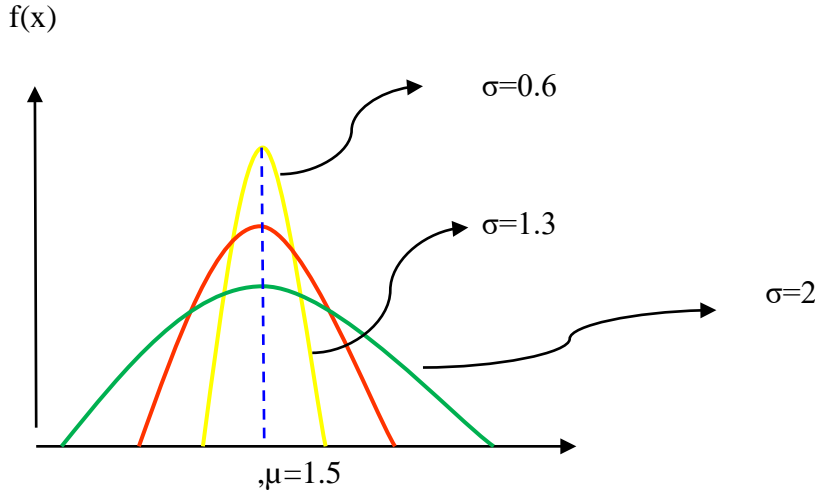
Burada $e=2.718$, $\pi=3.14$, σ : standart sapmadır.



Dağılımların yayılımları (değişimleri) standart sapma yani σ ile belirlenir. Aşağıdaki şekilde farklı varyanslara sahip normal dağılımlar görülmektedir:



veya daha açık bir şekilde ifade edersek, ortalaması aynı fakat varyansları farklı normal dağılım eğrilerinin grafiklerine bakalım:



X sürekli rd'nin olasılığını bulmak demek, verilen aralıkta belirli integral almaktır demiştik.

Örneğin $P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ 'tir. Bu olasılık değerinin hesaplanması

mümkün olmakla birlikte, bizi oldukça karışık ve alınması zor integrallerle karşı karşıya bırakmaktadır. Ancak olasılıklar bu integraller alınmadan da hesaplanabilmektedir. Bunu sağlayan ise “*standart normal dağılım*” dır.

Normal dağılımın standart hale getirilmesiyle yani normal dağılan X rd'nin standardize edilmesiyle standart normal dağılım bulunmuştur. z standart normal değişken,

normal dağılan X rd'nin ortalamasından saptırılarak standart sapmasına bölünmesiyle elde edilmektedir. Standart normal dağılım, normal dağılımla aynı özelliklere sahiptir, ancak, ortalaması sıfır, varyansı 1'dir.

$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ iken; yapılan $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ dönüşümüyle elde edilen z standart değişkeni; $z \sim \text{Standart Normal}(0,1)$ dağılmaktadır. Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

$f(z)$ o.y.f., $f(x)$ normal o.y.f'da $\mu=0$, $\sigma=1$ konularak elde edilmiştir. Bu dönüşüm sayesinde artık olasılıkların bulunması son derece kolaylaşmıştır. X 'ten z 'ye dönüşüm yapılarak X 'in çeşitli değerleri için son derece basit hale gelen integrallerin alınmasıyla z tablosu oluşturulmuştur. Aşağıda X rd ve z std. değişkenine ilişkin o.y.f. ları görülmektedir:

$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	$z \sim \text{Standart Normal}(0,1)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	dönüşümü yapılarak	$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$

Örnek 1.1: $X \sim \text{Normal}(1,4)$ olmak üzere, $P(2 < X < 3) = ?$

1.çözüm:

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} dx$$

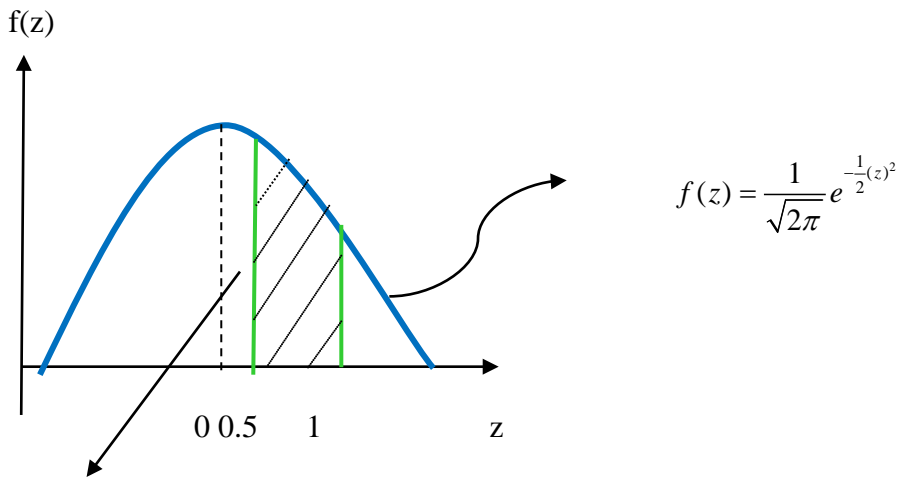
2.çözüm:

$$z_1 = \frac{2-1}{2} = 0.5$$

$$z_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2} dx = P(0.5 < z < 1) \text{ yani; standart normal dağılım}$$

eğrisinin altında (0.5,1) arasındaki alandır. Bu durum aşağıda görülmektedir:

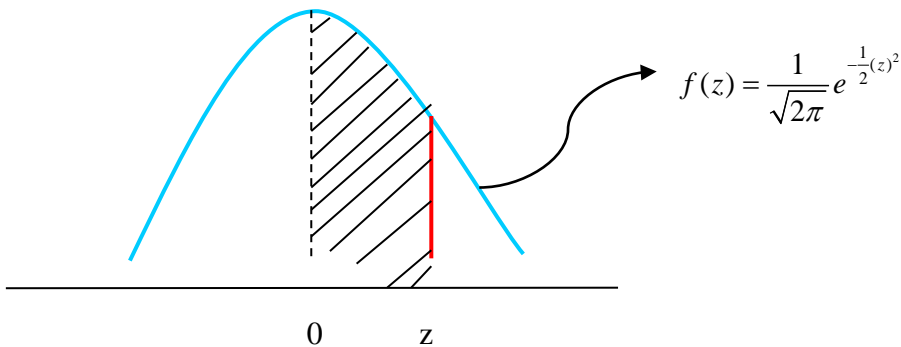


z tablosuna bakıldığında (0,0.5) arasındaki alanın büyüklüğü yani $P(0 < x < 0.5) = 0.1915$ 'tir. $P(0 < x < 1) = 0.3413$ 'tür. O halde $P(0.5 < x < 1)$ olasılığını bulmak için $P(0 < x < 1)$ 'den $P(0 < x < 0.5)$ çıkarılmalıdır.

$$P(0.5 < x < 1) = 0.3413 - 0.1915 = 0.1498$$

1.4. Z tablosunun (normal dağılım tablosu) özellikleri ve okunuşu

Z tablosu, X rd nin çeşitli değerleri için hesaplanan belirli integrallerden oluşan bir sayılar tablosudur. Tablonun en başında şöyle bir şekil vardır:



Bu şekil, z tablosundaki değerlerin 0 ile z arasındaki alana karşılık geldiği anlamına gelmektedir. ve tablo sayılarla şu şekilde devam eder:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0753
0.2	0.0793	0.1141
0.3	0.1179
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9	0.3389
1.0	0.3621
1.1	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
...
...
...
...
...
...
...
...

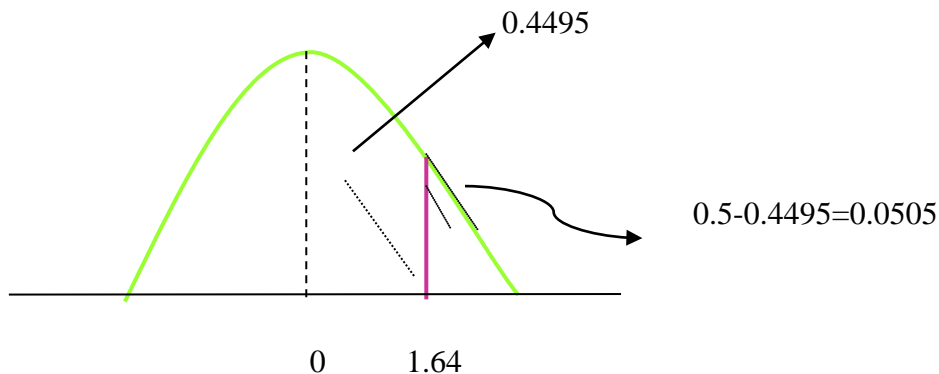
...
...
...
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4952
2.6	0.4964
2.7	0.4974
2.8	0.4980	0.4981
2.9	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

z tablosunu okurken, en soldaki sütun z'nin tam kısmını, en üst satır ,se ondalık kısmını göstermektedir. Örneğin $z=1.26$ değerine bakarken, en soldaki sütundan 1.2'yi bulup, 0.06'lık küsuratı en üst satırdan bularak, ikisinin kesiştiği yere bakacağız. Bulduğumuz bu değer, z tablosunun en başında görülen grafik uyarınca, $z=0$ ile $z=1.26$ arasındaki alandır. Yani $P(0 < z < 1.26) = 0.3962$ 'dir.

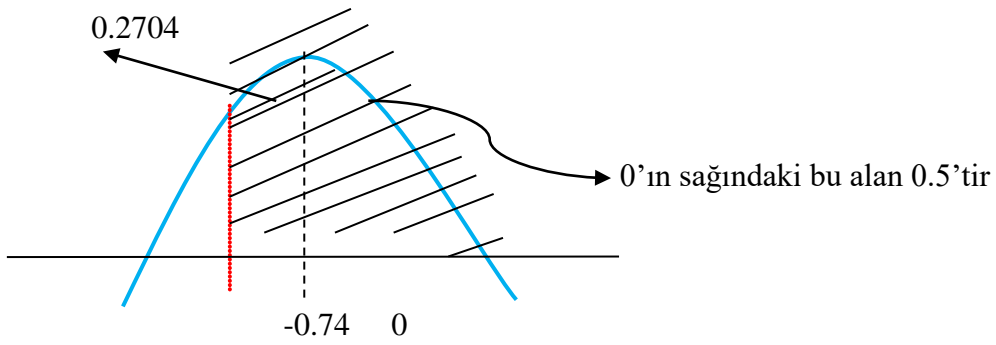
Örnek 1.2 : $P(-1.33 < z < 1.33) = ?$

Z tablosunda en soldaki sütundan 1.3'ü buluyoruz, en üst satırdan da küsuratı yani 0.03'ü buluyoruz, ikisinin kesiştiği yerdeki değer yani $P(0 < z < 1.33) = 0.4082$ olarak buluyoruz. Fakat bize sorulan $P(-1.33 < z < 1.33)$ olasılığıdır yani bizim bulduğumuz bu alanın iki katıdır, bu da 0.8164'tür.

Örnek 1.3: $P(z > 1.64) = ?$ Z tablosunda en soldaki sütundan 1.6'yı buluyoruz, en üst satırdan da küsuratı yani 0.04'ü buluyoruz, ikisinin kesiştiği yerdeki değer yani $P(0 < z < 1.64) = 0.4495$ 'tir. Fakat bize sorulan $P(z > 1.64)$ olasılığıdır yani bizim bulduğumuz bu alanı 0.5'ten çıkarmalıyız



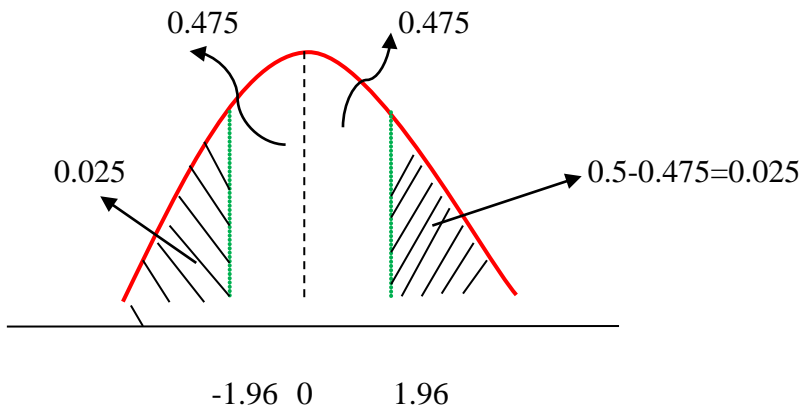
Örnek 1.4: $P(z > -0.74) = ?$



$$P(z > -0.74) = 0.2704 + 0.5 = 0.7704$$

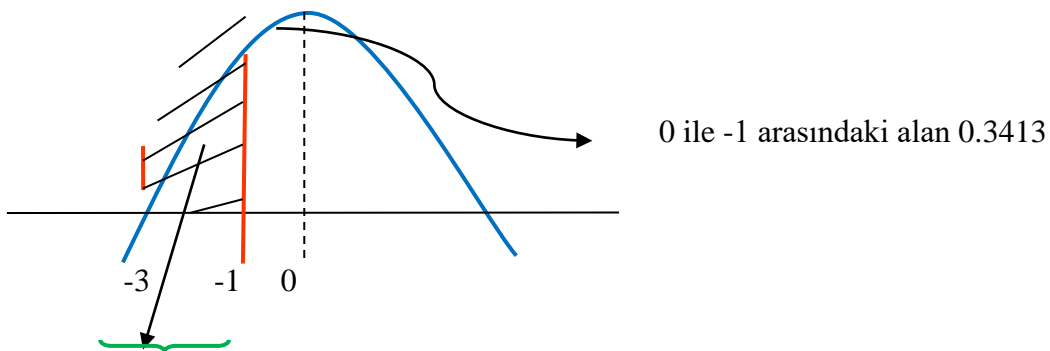
Örnek 1.5: $P(|z| > 1.96) = ?$

$P(z < -1.96) + P(z > 1.96)$ demektir.



$$P(|z| > 1.96) = P(z < -1.96) + P(z > 1.96) = 2 \times 0.025 = 0.05 \text{ tir.}$$

Örnek 1.6: $P(-3 < z < -1) = ?$



$$P(-3 < z < -1) = 0.4987 - 0.3413 = 0.1574$$

Bu değer, 0 ile 3.0 arasındaki alandır yani $P(0 < Z < 3) = 0.4987$ 'dir.

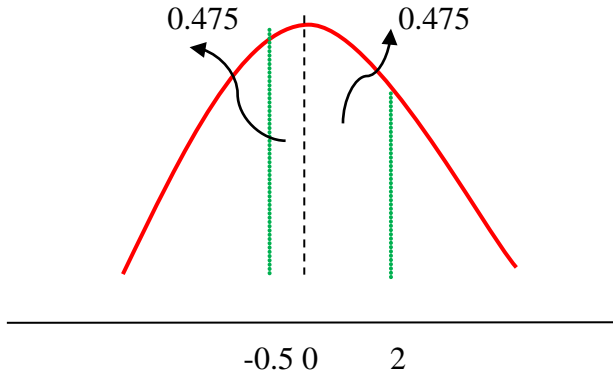
Örnek 1.7: $X \sim \text{Normal}(12, 16)$ veriliyor. $P(10 < X \leq 20) = ?$

X rd'nin ortalaması 12, varyansı 16'dır. Bu olasılık aşağıdaki integralin alınmasıyla bulunur.

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-12}{4} \right)^2} dx$$

Fakat bu integrali almak zor olduęundan z tablosunu kullanacaęız. Bunun için de öncelikle X leri z 'lere dönüřtüreceęiz.

$$P\left(\frac{10-12}{4} < Z < \frac{20-12}{4}\right) = P(-0.5 < Z < 2) = 0.6687$$

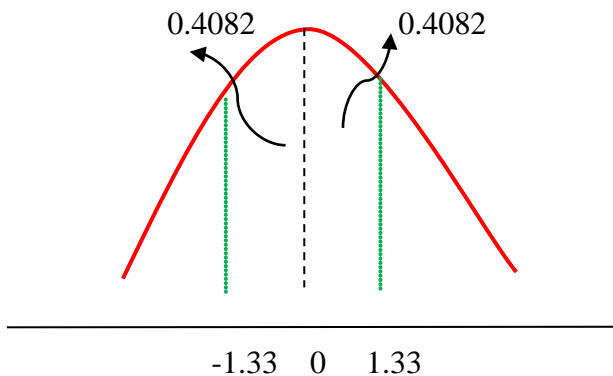


Örnek 1.8: $X \sim \text{Normal}(100, 225)$ veriliyor. $P(80 < X < 120) = ?$

$$\mu = 100$$

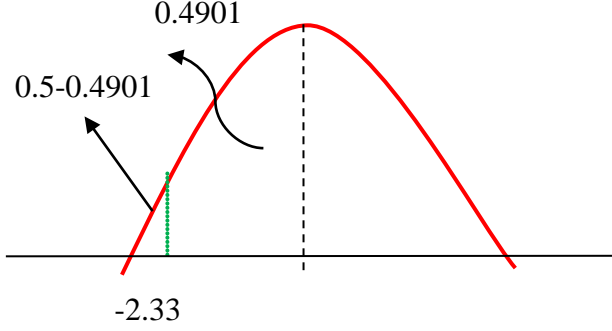
$$\sigma = 15$$

$$P\left(\frac{80-100}{15} < Z < \frac{120-100}{15}\right) = P(-1.33 < Z < 1.33) = 2 \times 0.4082 = 0.8164$$

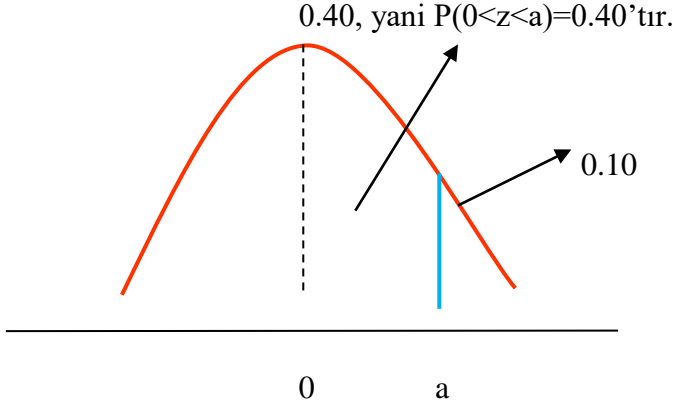


Örnek 1.9: $X \sim \text{Normal}(27,9)$ veriliyor. $P(X < 20) = ?$

$$P\left(z < \frac{20 - 27}{3}\right) = P(z < -2.33) = 0.5 - 0.4901 = 0.0099$$



Örnek 1.10: $P(z > a) = 0.10$ ise $a = ?$



Z tablosuna bakarak 0.40 olasılığına denk gelen z değerini bulacağız. Tabloya bakıyoruz, fakat tamı tamına 0.40 değeri bulunmamakta. Böyle durumlarda 0.40'ı kapsayan en dar aralığı göz önüne alarak, *interpolasyon* denilen tekniği uygulamak suretiyle, 0.40'a denk gelen z tablo değerini kendimiz hesaplıyoruz. 0.40'ı kapsayan en dar aralık şöyledir:

1.28	0.3997
a	0.40
1.29	0.4015

İnterpolasyon şu şekilde uygulanır:

$$\frac{1.28 - a}{a - 1.29} = \frac{0.3997 - 0.40}{0.40 - 0.4015}$$

Bu denklemi çözünce, a'yı elde etmiş olacağız.

$0.00192 - 0.0015a = 0.0003a - 0.000387$ 'den, $a = 1.2816$

Yani $P(z > 1.2816) = 0.10$ 'dur.

Örnek 1.11: $P(z > a) = 0.26$ ise $a = ?$

0.64	0.2389
a	0.24
0.65	0.2422

İnterpolasyon uyguladığımızda;

$$\frac{0.64 - a}{a - 0.65} = \frac{0.2389 - 0.24}{0.24 - 0.2422}$$

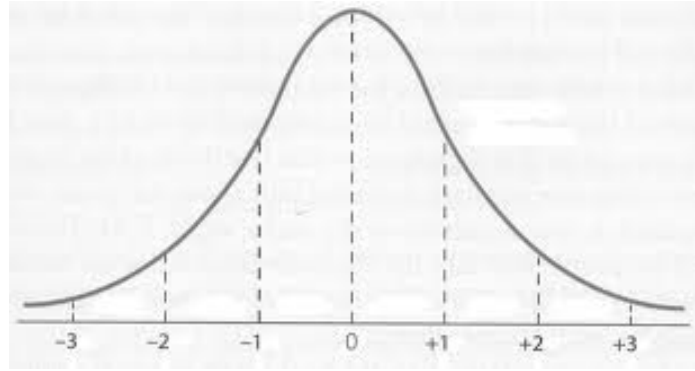
$a = 0.6433$ 'tür.

$P(z > 64.33) = 0.26$

BÖLÜM 11

Z DAĞILIMI

Z dağılımı; ortalaması $\mu=0$ ve standart sapması $\sigma=1$ olan Z puanlarının evren dağılımı olarak tanımlanabilmektedir. Z dağılımı olasılıklı bir normal dağılımdır. Yani Z dağılımının genel karakteristiği normal dağılımla aynıdır. Bu nedenle Z dağılımı 'standart normal dağılım' olarak da isimlendirilmektedir.



Şekil 1. Z Dağılımı

Standart Z dağılımı olarak da bilinen Z dağılımının özellikleri şu şekildedir:

1. Simetriktir.
2. Asimptotiktir.
3. $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alır.
4. Eğri altındaki toplam alanın olasılığı 1'dir. $[P (-\infty < X < +\infty) = 1]$
5. Ortalama, mod ve medyan değerleri çakışiktir. $[\mu = \text{Medyan} = \text{Mod}]$
6. Olasılık yoğunluk fonksiyonu vardır.

Z dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, normal dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak elde edilebilmektedir. Normal dağılım eğrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma}$$

Bu fonksiyonda μ yerine 0, σ yerine 1 yazıldığında Z dağılım eğrisinin fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Normal dağılım, ortalama ve standart sapma değerlerine göre tanımlı bir evren dağılımıdır. Bu nedenle ortalama ve standart sapmaya göre sonsuz sayıda evren dağılımı belirlemek mümkündür. Z dağılımı ise standart bir dağılım olup ortalama ve standart sapma değerleri sabitlenmiştir. Bu durum Z dağılımının olasılıklı kestirimlerde kullanılmasını kolaylaştırmaktadır.

Z dağılımının bir diğer avantajı, tam sayı olarak verilen standart sapma aralıklarının yanı sıra bu tam sayılar arasındaki aralıklar için de hesaplama yapılabilmesi kolaylığıdır. Örneğin ortalaması 50, standart sapması 10 olarak belirlenen bir normal dağılım eğrisinde, 50 ile 60 arası, 70'in üzeri, 40'ın altı gibi tam sayı standart sapma aralıklarında değer alma olasılığı kolaylıkla belirlenebilir. Fakat örneğin 55 ile 75 arası, 45 üzeri, 75 aşağısı gibi tam sayı olmayan standart sapma aralıklarının olasılığının hesaplanması zordur. Bu hesaplamalar için, normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak bir integral işlemi yapılması gerekmektedir.

Z dağılımının eğrisi standart ve 'iyi' tanımlı olduğu için standart sapma açısından tam sayı aralıklarının yanı sıra tam sayı olmayan aralıkların da olasılığı daha kolay belirlenebilmektedir. Dahası bu hesaplamalar yapılarak hazırlanmış 'Standart Z Değerleri' tabloları da bulunmaktadır. Hesaplama şeklini bilmeyenler, bu tablolardan yararlanarak Z dağılımı üzerinde belli aralıkların olasılıklarını hesaplayabilir. Bu amaçla hazırlanmış bir Z değerleri tablosu, Tablo 1 olarak sona verilmiştir.

Tablo 1'de verilen Z değerleri tablosu, pozitif bir Z değeri ile 0 arasında kalan eğri altındaki alanın olasılığını göstermektedir. Olasılık değerleri 0 ile 1 arasında değişir. Bu nedenle tablodaki değerler ondalıklı sayı olarak gösterilmektedir. Tablodaki ilk sütun ve ilk satırda yer alan değerler istenen Z değerinin belirlenmesi için kullanılır. İstenen Z değerinin birler ve onda birler basamakları ilk sütundan, yüzde birler basamağı ise ilk satırdan belirlenir. Bu değerlerin kesiştiği hücredeki değer, bu Z değeri ile 0 arasındaki alanın olasılık değeridir.

Bir Z dağılımı üzerinde belli aralıklarda eğri altında kalan alanın yani belli değerlerin görülme olasılığının belirlenmesinde temelde üç işlem yapılmaktadır:

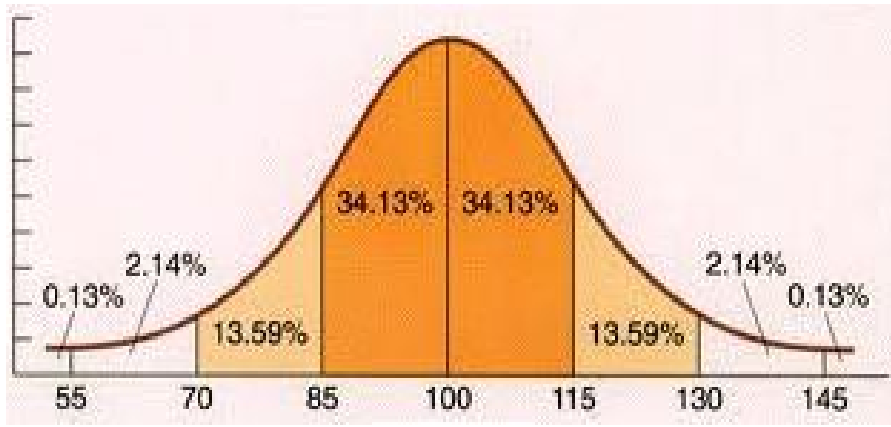
1. İstenen alanı belirleme ve dağılım üzerinde gösterme
2. Z puanlarına dönüştürme
3. Z değerleri tablosunu okuyarak istenen alanı belirleme

ÖRNEK

Bir okulda öğrencilerin zeka düzeyleri bu amaçla geliştirilmiş bir zeka testi kullanılarak ölçülmüştür. Ölçme sonuçlarına göre her bir öğrenciye bir zeka puanı verilmiştir. Zeka puanlarının ortalaması $\mu=100$ ve standart sapması $\sigma=15$ olarak hesaplanmıştır. Ayrıca zeka puanlarının normal dağılım gösterdiği belirlenmiştir. Bu bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Zeka puanlarının dağılımını gösteriniz.

Zeka puanları normal dağılım gösterdiği, ortalaması ve standart sapması bilindiğine göre bu puanların dağılımının şekli aşağıdaki gibi olacaktır.



b) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 100'ün üzerinde olma olasılığı nedir?

Yukarıdaki eğride, aynı zamanda simetri eksenini olan 100 değerindeki dikey çizginin sağ tarafı ile eğri altında kalan toplam alan sorulmaktadır. Bu alan %50'lik bir kısım oluşturmaktadır. O halde bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 100'ün üzerinde olma olasılığı 0,5'tir.

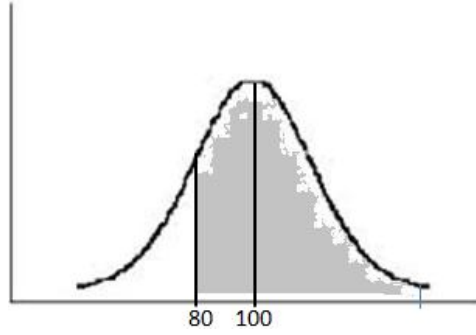
c) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 70'in altında olma olasılığı nedir?

Yukarıdaki eğride 70 değerindeki dikey çizginin sol tarafı ile eğri altında kalan alan sorulmaktadır. BU alanın yüzde değeri $2,14 + 0,13 = 2,27$ 'dir. Yani %2,27'dir. O halde bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 70'in altında olma olasılığı 0,0227'dir.

d) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 80'in üzerinde olma olasılığı nedir?

Bu soruda 80 değerinden çizilecek olan dikey doğrunun sol tarafında eğri altında kalan toplam alanın olasılığı sorulmaktadır. Dikkat edilirse 80 değeri, tam sayı olarak belirlenen standart sapma aralıklarına denk gelmemektedir. Yani ortalama ile -1 standart sapma arasındadır. Bu durumda istenen olasılığı hesaplamak daha güçtür.

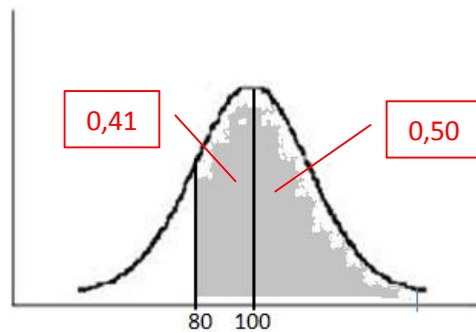
İstenen alanı hesaplamak için Z dağılımından yararlanalım. Öncelikle istenen alanı belirleyelim.



İkinci olarak istenen alanı belirlemekte kullanılacak olan 80 değerini Z puanına dönüştürelim. Dikkat edilirse 100 değeri ortalama olduğu için bu değer Z puanı karşılığı 0 olacaktır.

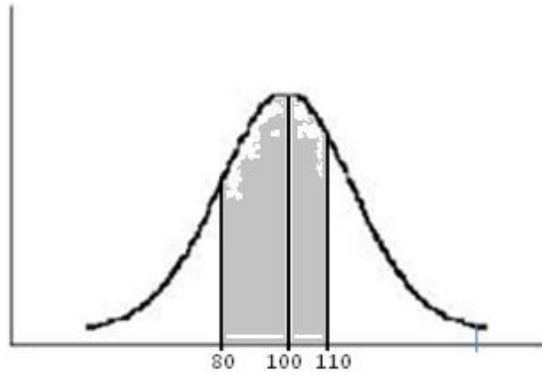
$$\begin{aligned} Z_{80} &= (80 - 100) / 15 \\ &= -20 / 15 \\ &= -1,33 \end{aligned}$$

Üçüncü olarak -1,33 ile 0 arasındaki alanın olasılığını belirleyelim. Bunun için Tablo 1'de verilen Z değerlerinden yararlanalım. Dikkat edilirse Tablo 1'deki Z değerleri, orta nokta ile pozitif bir Z değeri arasındaki alanı vermektedir. Fakat Z eğrisi simetrik olduğu için negatif değerlere yönelik alanlar, bu değerlerin pozitifleri için olan alanlarla örtüşür. Yani -1,33 ile 0 arasında kalan alan +1,33 ile 0 arasında kalan alana eşit olacaktır. O halde tabloda satırda 1,3 ve sütunda 0,03 değerlerinin kesiştiği hücreye bakılır. Bu hücredeki değer 0,4082'dir. 0'ın sağındaki alan da bilindiği üzere 0,50'dir. Buna göre toplam alanın olasılığı bu değerlerin toplamıyla yaklaşık 0,41 elde edilir.



e) Bu okuldaki bir öğrencinin zeka puanının 80 ile 110 arasında olma olasılığı nedir?

Öncelikle istenen alanı belirleyelim.



İkinci olarak 80 ve 110 puanlar için Z puanlarını belirleyelim.

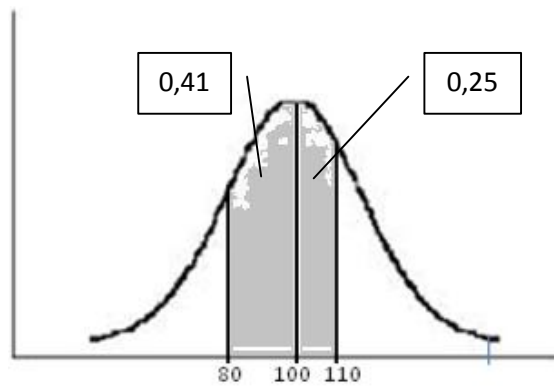
$$\begin{aligned} Z_{80} &= (80 - 100) / 15 \\ &= -20 / 15 \\ &= -1,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{110} &= (110 - 100) / 15 \\ &= 10 / 15 \\ &= 0,67 \end{aligned}$$

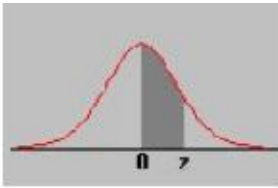
Üçüncü olarak Z tablosundan bu Z değerlerine karşılık gelen değerleri okuyalım:

- Z=-1,33 için sütunda 1,3 ve satırda 0,03'ün kesiştiği hücredeki değer; 0,4082
- Z=0,67 için sütunda 0,6 ve sütunda 0,07'nin kesiştiği hücredeki değer; 0,2486

Son olarak bu değerleri şekil üzerinde gösterelim;



O halde toplam alanın olasılığı $0,41 + 0,25 = 0,66$ olarak elde edilir. Yani 80 ile 110 arasında puan alma olasılığı 0,66'dır.

Tablo 1. Standart Z Değerleri


	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990