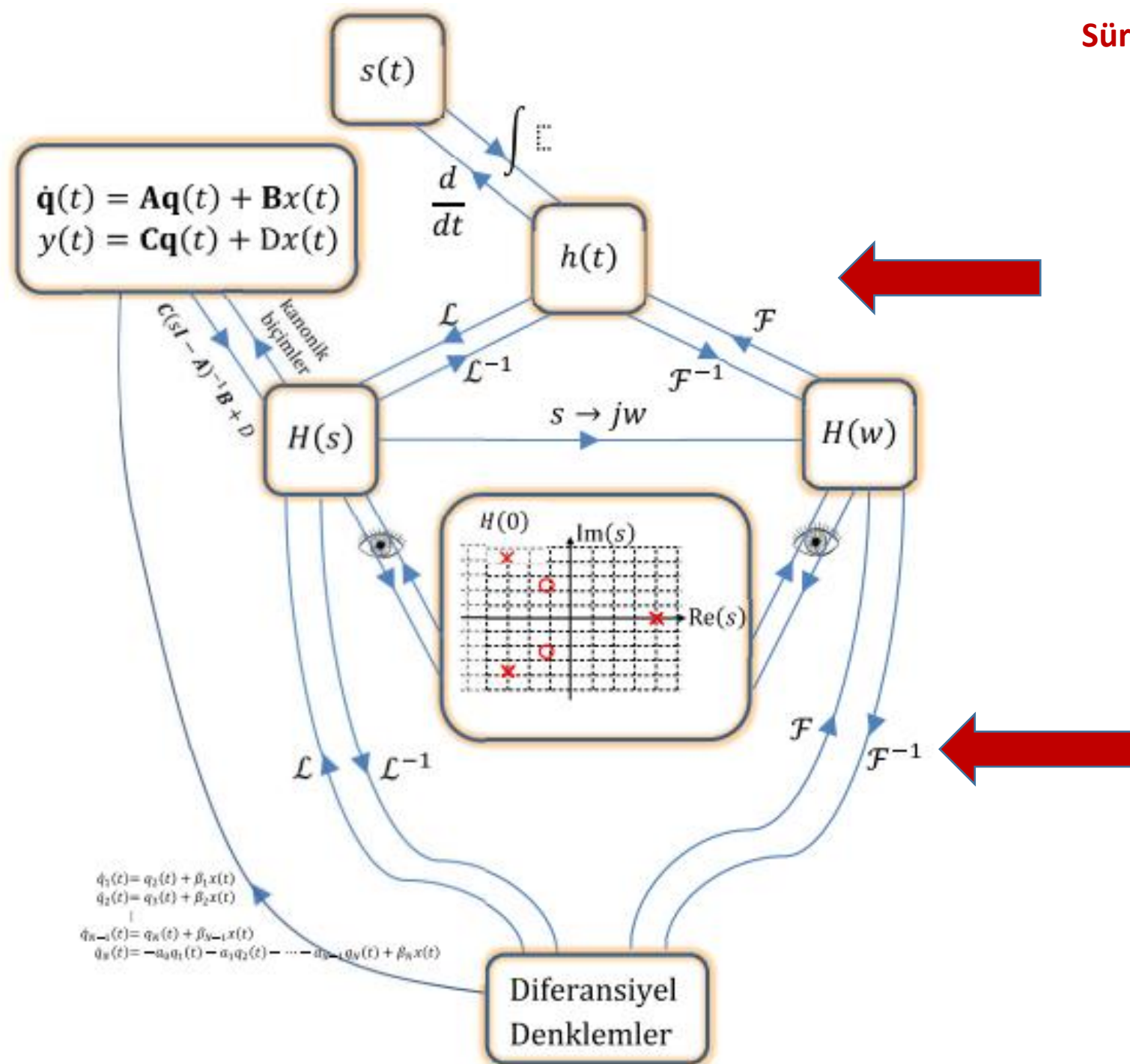


İşaret İşleme

Final Öncesi Genel Tekrar2-H15CD2

Dr. Meriç Çetin
versiyon010121



Giriş

- Önceki bölümlerde, zaman domenindeki sürekli ve ayrık-zamanlı sinyallerin Laplace ve z dönüşümleriyle **s ve z domenine** dönüştürerek daha kolay analiz ve işlem yapılabileceği görülmüştü.
- Bunun yanısıra, bu dönüşümler bir çok sinyal ve sistemin özelliklerinin daha iyi kavranmasını sağlar.
- Bu bölümde ilk olarak Fourier serileri görülecek, ardından da sürekli-zaman domenindeki sinyallerin frekans domenine dönüştürülmesi ve bu domende analiz edilmesi görülecektir.
- Fourier serileri, sinyalleri sinüzoidler cinsinden temsil eder. Bu gösterim sistemlerin yeni bir temsille (filtre gibi) gösterilmesini sağlar.

Fourier Serileri

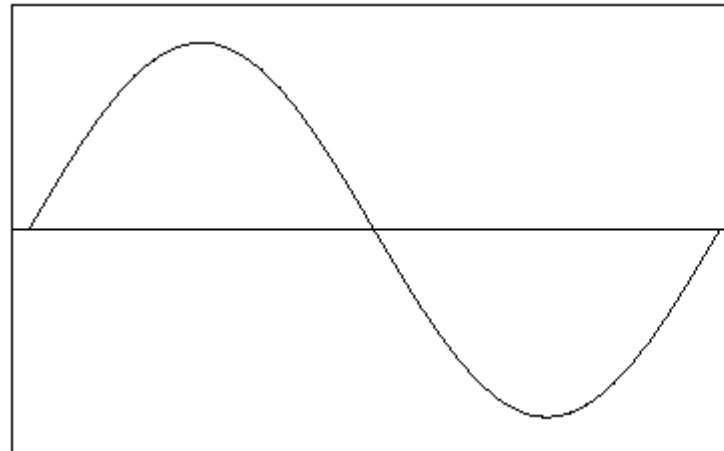
Fourier Serisi = $f(t) = A_0 + C_1 \cdot \cos(\omega t - \phi_1) + \sum_1^{\infty} C_k \cdot \cos(k \cdot \omega t - \phi_k)$

↓ ↓ ↓

DC Bileşen Temel Bileşen Harmonikler



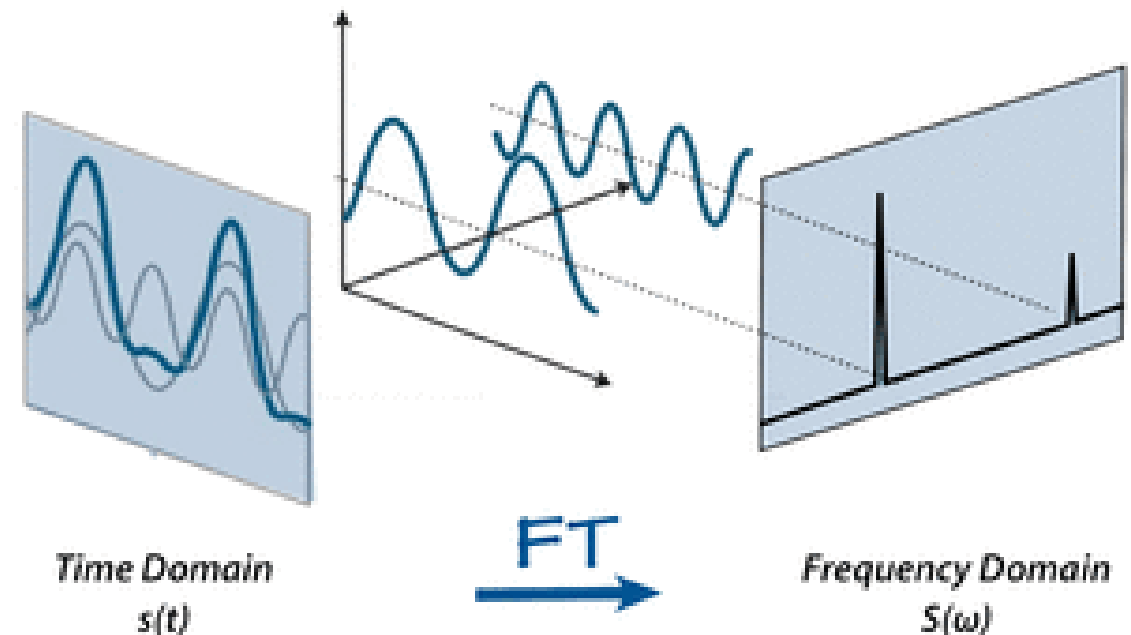
Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



- Fourier showed that any periodic signal $s(t)$ can be written as a sum of sine waves with various amplitudes, frequencies and phases

$$s(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + a_3 \sin(3\omega t + \phi_3) + \dots$$

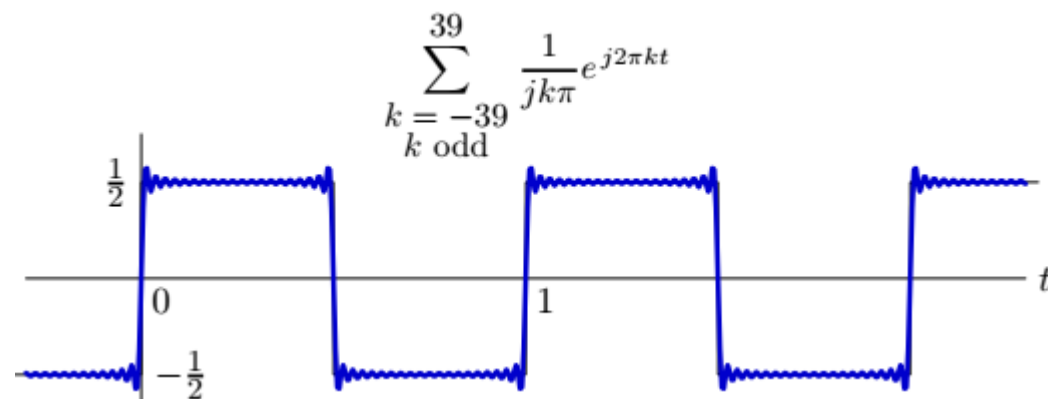
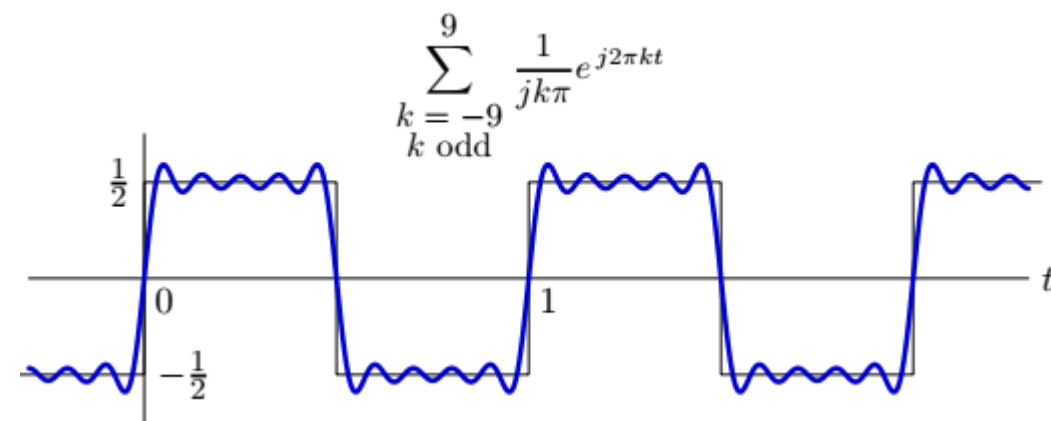
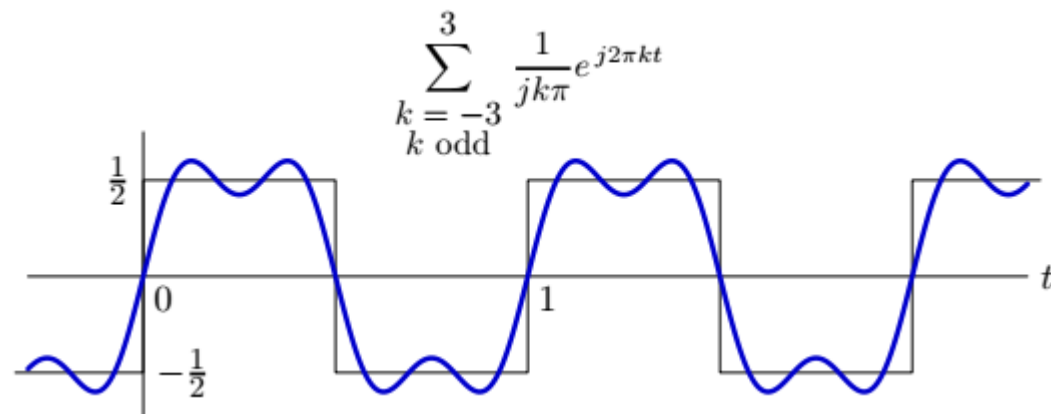
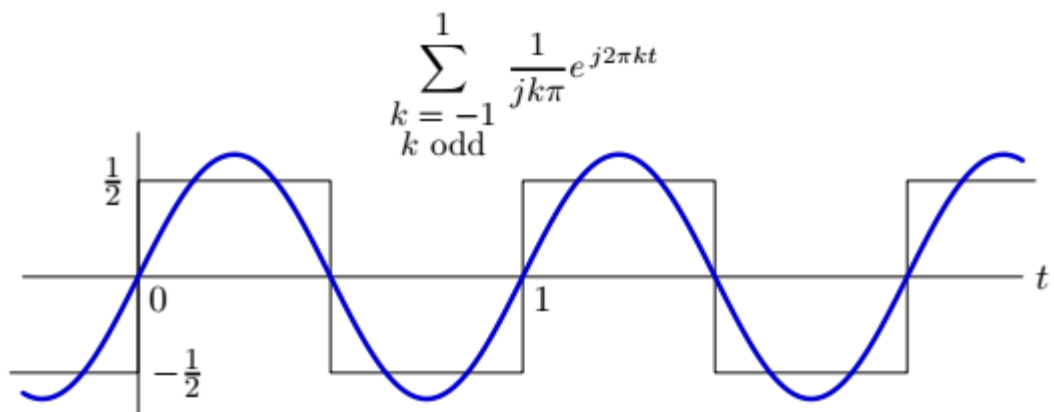
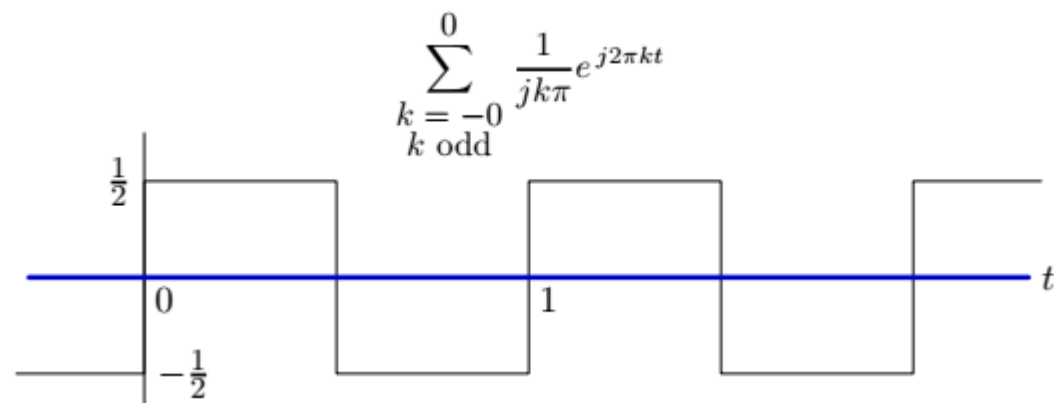
- where a_i 's are amplitudes, ϕ_i 's are phase shifts, and ω is the **fundamental frequency**. The higher order frequencies 2ω , 3ω , etc. are called **harmonics**.
- The **time domain** signal of the square wave, $s(t)$, is shown on the left. The so-called **frequency domain** representation, $S(\omega)$, is shown on the right. $S(\omega)$ is called the **Fourier transform** of $s(t)$



Fourier Series

One can visualize convergence of the Fourier Series by incrementally adding terms.

Example: square wave



Periyodik bir sinyalin genlik ve faz spektrumu

- Temel periyodu T_0 olan bir $x(t)$ periyodik sinyalinin karmaşık üstel Fourier serisi gösterilimi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

buradaki c_k katsayılar

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Periyodik bir sinyalin genlik ve faz spektrumu

Bu c_k katsayıları karmaşık sayılar olup

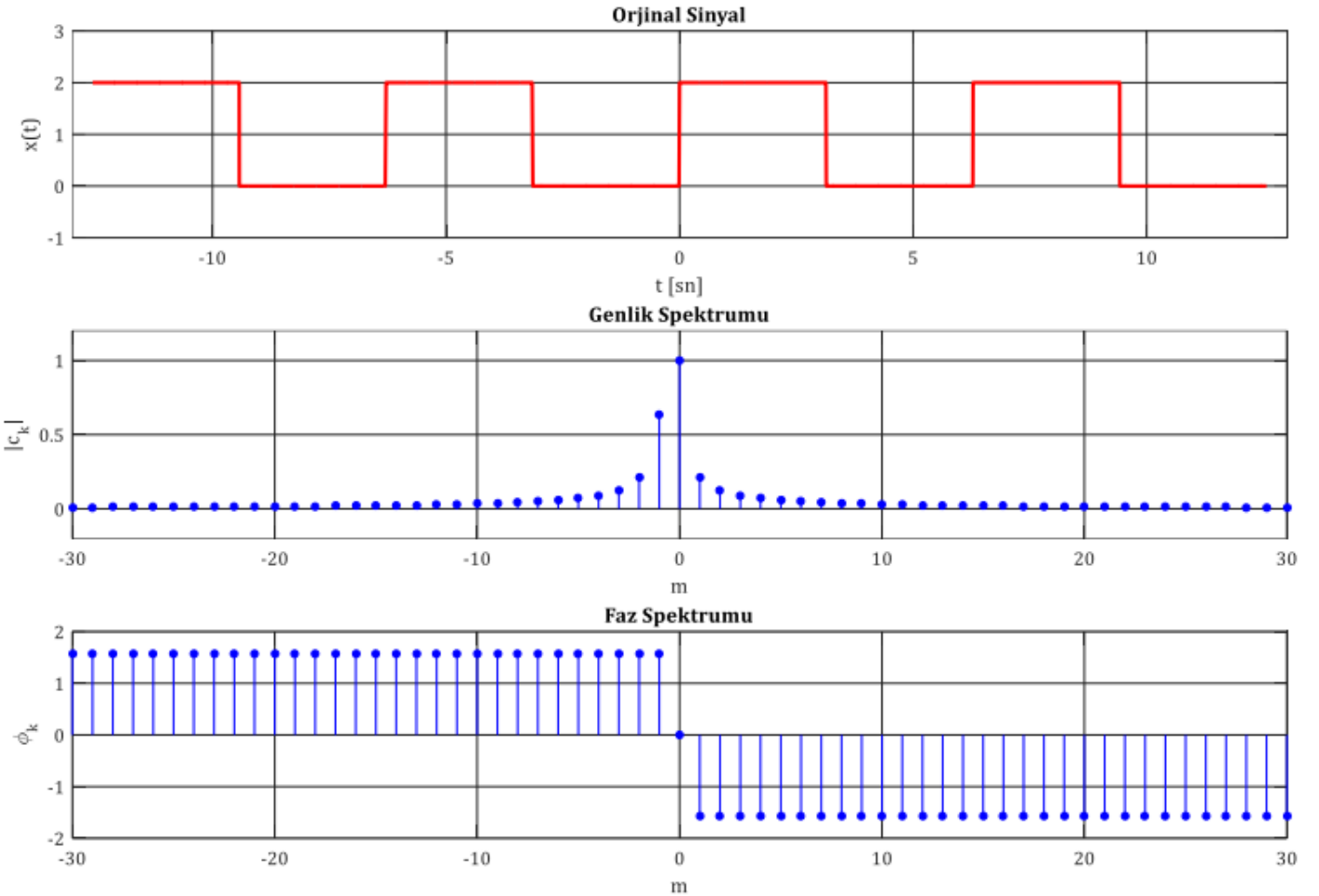
$$c_k = |c_k|e^{j\phi_k}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $|c_k|$ genlik, ϕ_k ise fazdır. Açısal frekans ω 'a karşı $|c_k|$ 'nin grafiğine $x(t)$ periyodik sinyalinin *genlik spektrumu*, açısal frekans ω 'a karşı ϕ_k 'nin grafiğine $x(t)$ periyodik sinyalinin *faz spektrumu* denir. k indisi yalnızca tamsayı değerler aldığı için bu spektrumlar sürekli eğriler olmayıp yalnızca $k\omega_0$ ayırık frekans değerlerinde ortaya çıkarlar. Bu nedenle de bunlara *ayırık frekans spektrumları* ya da *çizgi spektrumları* denir. Şekil 5.3'te, karmaşık üstel Fourier serisi katsayıları

Periyodik bir sinyalin genlik ve faz spektrumu

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

$$c_k = |c_k| e^{j\phi_k}$$



Şekil 5.3 Periyodik bir Sinyalin Genlik ve Faz Spektrumları

Fourier Transformu

Fourier Dönüşümü

Sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü $X(w) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ ile gösterilir

$$x(t) \leftrightarrow X(w) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

buradaki w değişkeni açısal frekansı temsil eden bağımsız bir değişkendir. Fourier dönüşümünün bulunduğu ortama *frekans-domaini* adı verilmektedir. Benzer şekilde, Fourier dönüşümü $X(w)$ olan sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işareti, aşağıdaki gibi verilen ters Fourier dönüşümü ile elde edilir:

$$X(w) \leftrightarrow x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{j\omega t} dw.$$

Tablo 5.1 Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(w)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(w)$ $X_1(w)$ $X_2(w)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(w) + a_2X_2(w)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(w)$
Frekans -domeninde Öteleme	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(w - \omega_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{w}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-w)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(w)$
Frekans-domeninde Türev	$-jtx(t)$	$\frac{d}{d\omega}X(w)$
Çiftleşlik	$X(t)$	$2\pi x(-w)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(w)X_2(w)$
Çarpma	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(w) * X_2(w)$
Parseval Bağıntısı	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) ^2 dw$	

Tablo 5.2 Bazı Fourier Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(w)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\pi\delta(w) - \frac{1}{jw}$	$\frac{1}{s}$
1	$2\pi\delta(w)$	
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{jw}$	
$tu(t)$		$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{jw + a}$	$\frac{1}{s + a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{jw + a}$	$\frac{1}{s + a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(jw + a)^2}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(jw + a)^2}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$

$x(t)$	$X(w)$	$X(s)$
$e^{-at}\cos(w_0t)u(t)$	$\frac{jw + a}{(jw + a)^2 + w_0^2}$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0t)u(t)$	$\frac{w_0}{(jw + a)^2 + w_0^2}$	$\frac{w_0}{(s + a)^2 + w_0^2}$
$e^{\mp jw_0t}$	$2\pi\delta(w \pm w_0)$	
$\cos(w_0t)$	$\pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0)$	
$\sin(w_0t)$	$-j\pi\delta(w - w_0) + j\pi\delta(w + w_0)$	
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$	
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a w }$	
$P_a(t)$	$2\frac{\sin(aw)}{w}$	
$\frac{\sin(at)}{\pi t}$	$P_a(w)$	
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$	
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$w_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - kw_0)$	

Fourier Dönüşümü ile Laplace Dönüşümü Arasındaki İlişki

Bilindiği gibi, sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

eşitliği ile bulunurken Laplace dönüşümü de

$$x(t) \leftrightarrow X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

eşitliği ile bulunmaktadır. Bu iki eşitlik karşılaştırıldığında aralarında

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = X(s)|_{s \rightarrow j\omega}$$

Frekans Cevabı

$h(t)$ darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir $x(t)$ sinyali uygulandığında $y(t)$ çıkışının

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

konvolüsyonu ile bulunabileceği ve bu nedenle de $h(t)$ darbe cevabının sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabileceği ifade edilmişti. Fourier dönüşümünün özelliklerinden olan

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(w)X_2(w) \quad \text{şeklindeki konvolüsyon özelliği kullanılırsa,}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(w)H(w) = Y(w)$$

ifadesi elde edilir. Burada $X(w)$, $H(w)$ ve $Y(w)$ sırasıyla $x(t)$, $h(t)$ ve $y(t)$ 'nin Fourier dönüşümleridir. Aynı eşitlik

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

Frekans Cevabı - devam

Frekans cevabı $H(w)$, bağımsız frekans değişkenine bağlı bir fonksiyon olup karmaşık değerler alabilmektedir. Bu nedenle $H(w)$ kutupsal olarak

$$H(w) = |H(w)|e^{j\angle H(w)}$$

$$\begin{aligned} Y(w) &= X(w)H(w) \\ |Y(w)|e^{j\angle Y(w)} &= |X(w)|e^{j\angle X(w)}|H(w)|e^{j\angle H(w)} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceği için çıkış sinyalinin genliği

$$|Y(w)| = |X(w)||H(w)|$$

fazı da

$$\angle Y(w) = \angle X(w) + \angle H(w)$$

biçiminde ifade edilebilir.

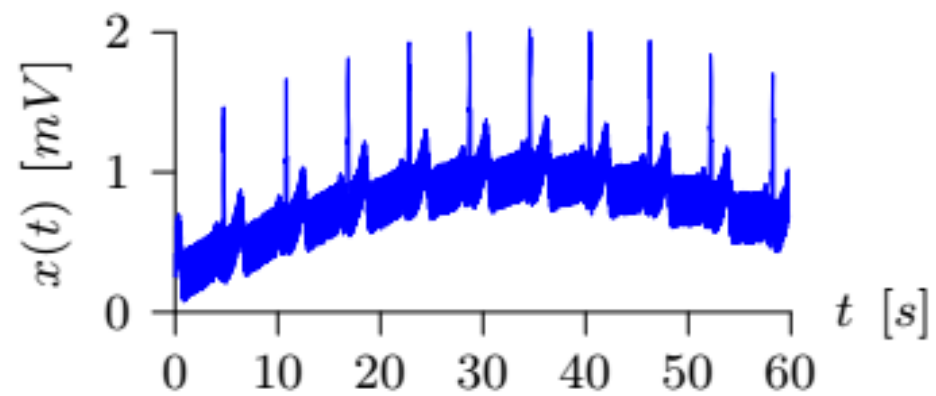
Filtre Kavramı

Önceki altkısımda da görüldüğü gibi DZD bir sistemin girişinden periyodik bir sinyal uygulandığında, sistem bu giriş sinyalinin frekans bileşenlerinden bazılarını geçirmekte bazılarını da süzmektedir. Bu açıdan bakıldığında her DZD sistem aslında frekans domeninde bir filtre gibi görülebilir. DZD sistem giriş sinyalinin frekans bileşenlerinden bazılarının genliklerini sıfırlamakta ve dolayısıyla bu bileşenleri süzmektedir. Bileşenlerin faz ve genliklerinin nasıl etkileneceği tamamen DZD sistemin frekans cevabı tarafından belirlenmektedir. Literatürde pek çok filtre tipi mevcuttur. Bunlardan belli başlı olanları şunlardır:

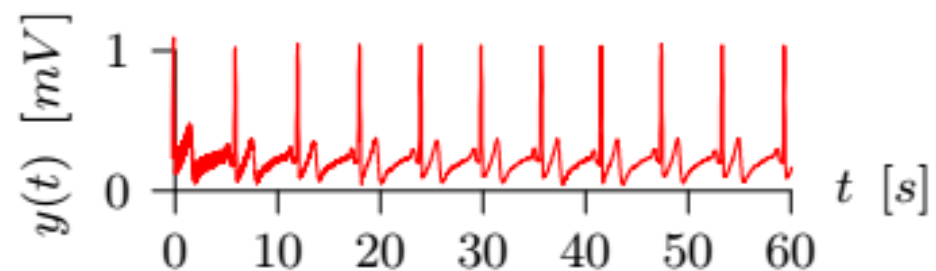
Filtering Example: Electrocardiogram

Filtering is a simple way to reduce unwanted noise.

Unfiltered ECG



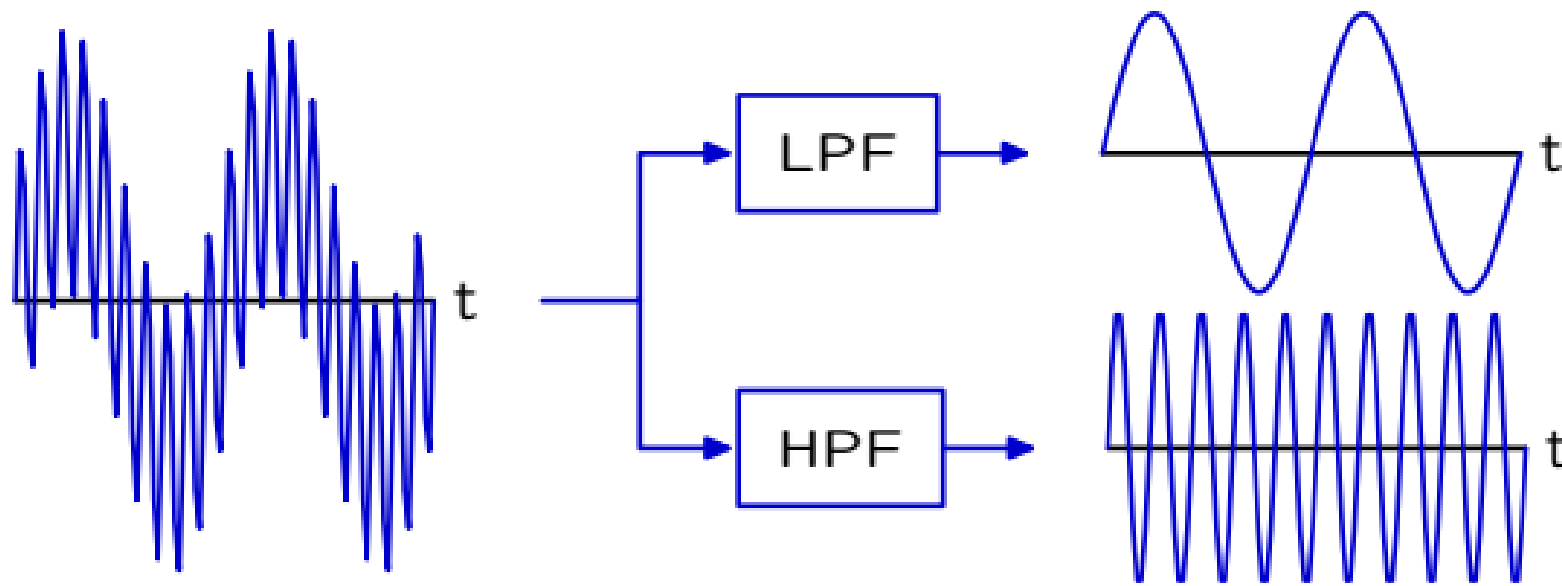
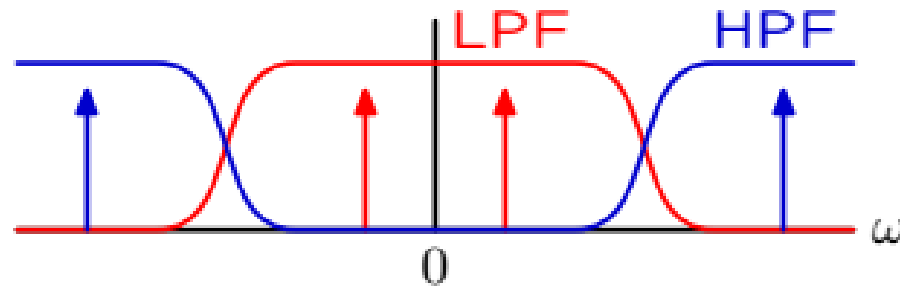
Filtered ECG



Filtering

Systems can be designed to selectively pass certain frequency bands.

Examples: low-pass filter (LPF) and high-pass filter (HPF).



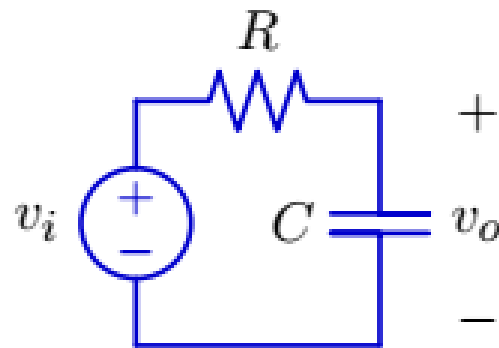
Filtering

Notion of a filter.

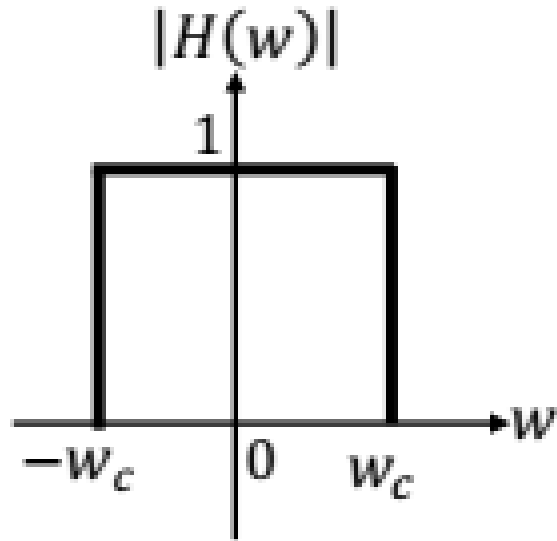
LTI systems

- cannot create new frequencies.
- can scale magnitudes and shift phases of existing components.

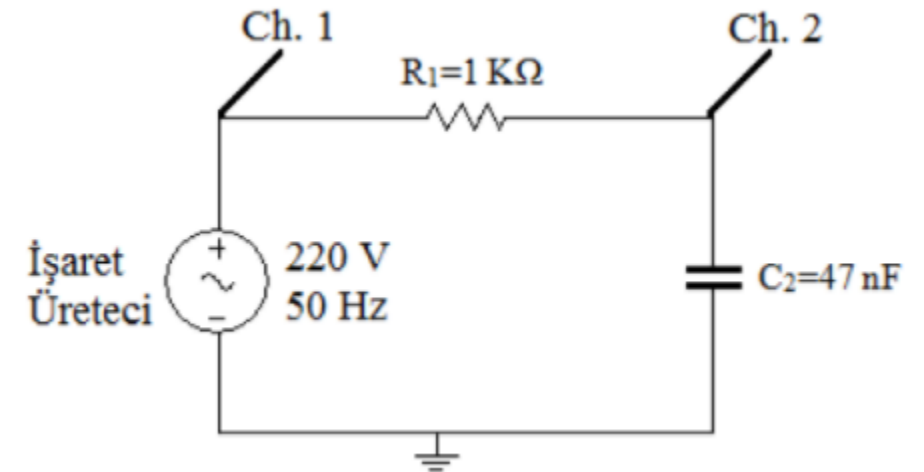
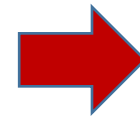
Example: Low-Pass Filtering with an RC circuit



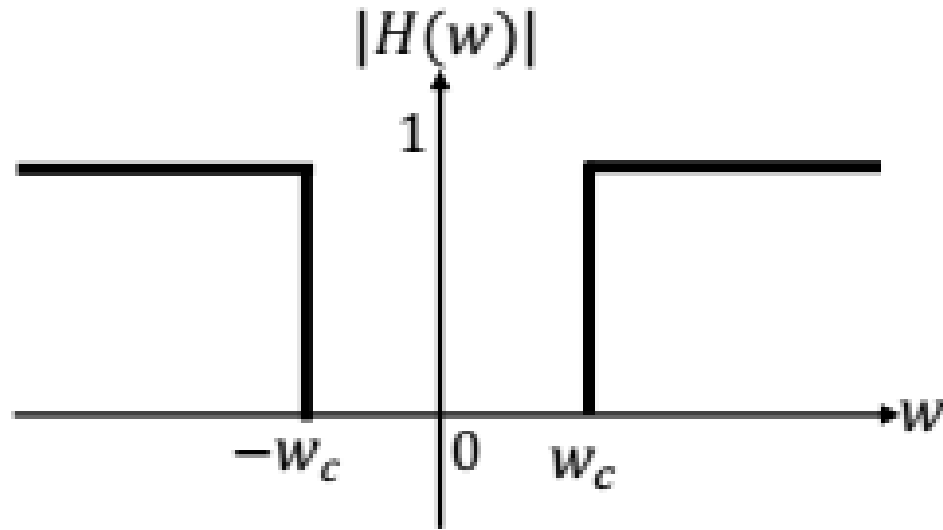
İdeal Alçak Geçiren Filtre



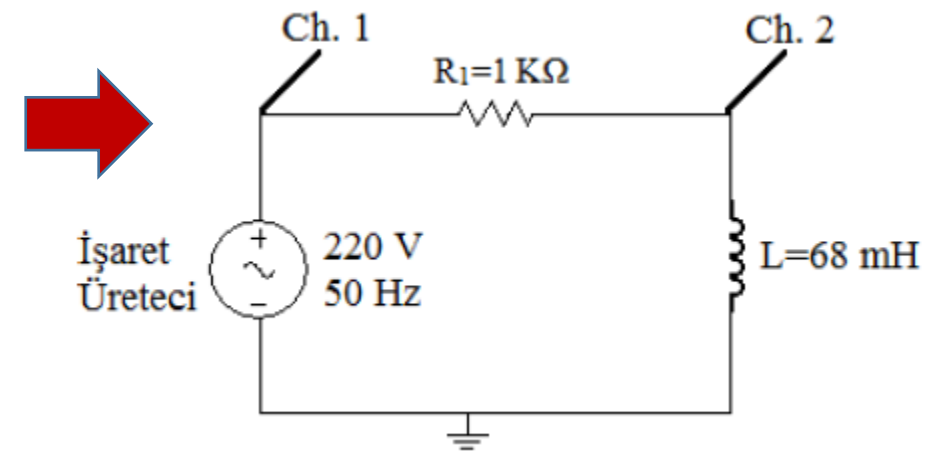
$$|H(\omega)| = P_a(\omega_c) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



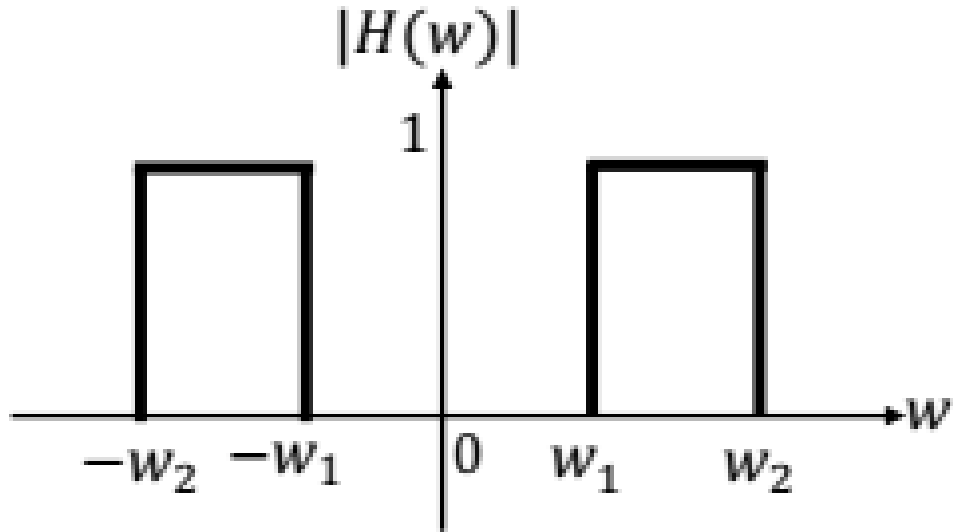
İdeal Yüksek Geçiren Filtre



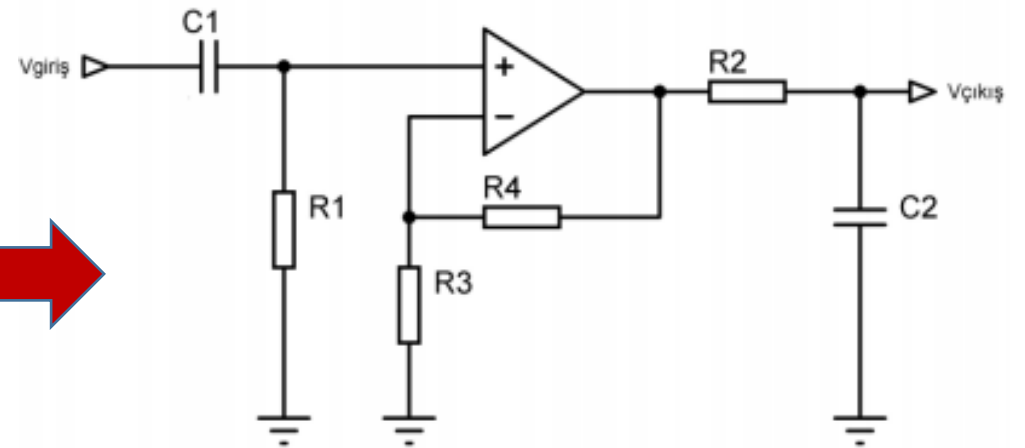
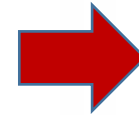
$$|H(\omega)| = P_a(\omega_c) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_c \\ 0 & |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$



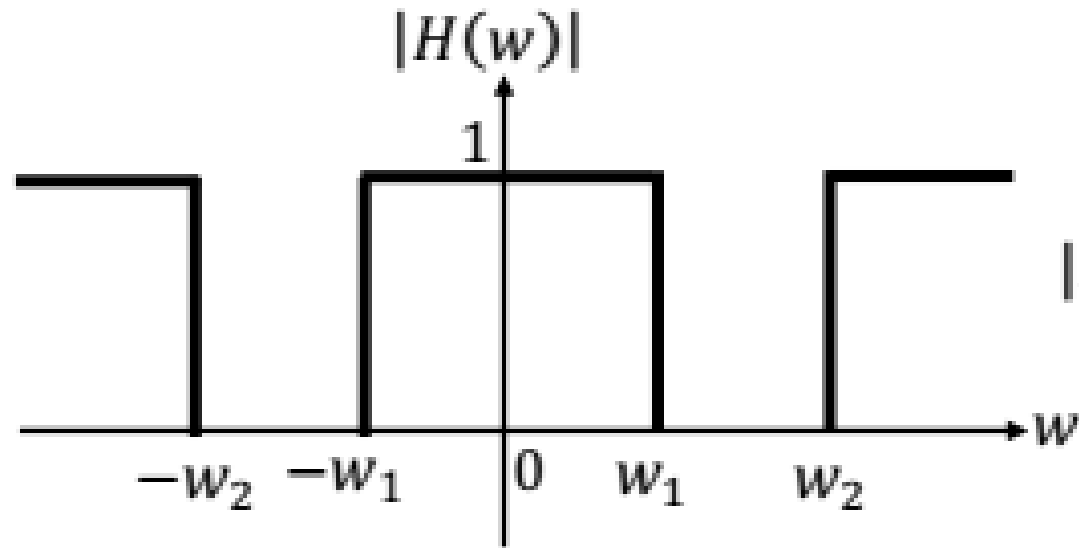
İdeal Bant Geçiren Filtre



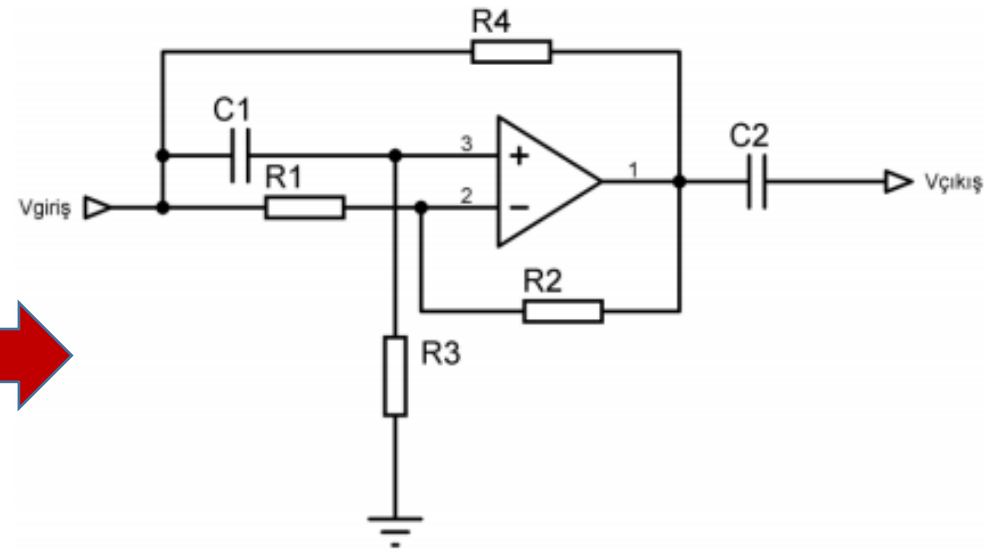
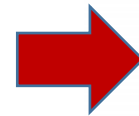
$$|H(w)| = P_a(w_c) = \begin{cases} 1 & w_1 < |w| < w_2 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$



İdeal Bant Söndüren Filtre



$$|H(w)| = P_a(w_c) = \begin{cases} 0 & w_1 < |w| < w_2 \\ 1 & \text{diger} \end{cases}$$



Diferansiyel Denklemlerle İlişkisi

$$a_0y(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2\ddot{y}(t) + \dots + a_Ny^{(N)}(t) = b_0x(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2\ddot{x}(t) + \dots + b_Mx^{(M)}(t)$$

buradaki a_k ve b_k katsayıları reel ve sabit katsayılardır. Şimdi, giriş-çıkış ilişkisi bu şekildeki bir denklem ile ifade edilen DZD bir sistemin frekans cevabını bulalım: İlk olarak denklemin her iki tarafının Fourier dönüşümünü alalım:

$$\begin{aligned} a_0Y(w) + a_1jwY(w) + a_2(jw)^2Y(w) + \dots + a_N(jw)^NY(w) &= b_0X(w) + b_1jwX(w) + \dots + b_M(jw)^MX(w) \\ (a_0 + a_1jw + a_2(jw)^2 + \dots + a_N(jw)^N)Y(w) &= (b_0 + b_1jw + \dots + b_M(jw)^M)X(w) \end{aligned}$$

Şimdi frekans cevabını yazabiliriz:

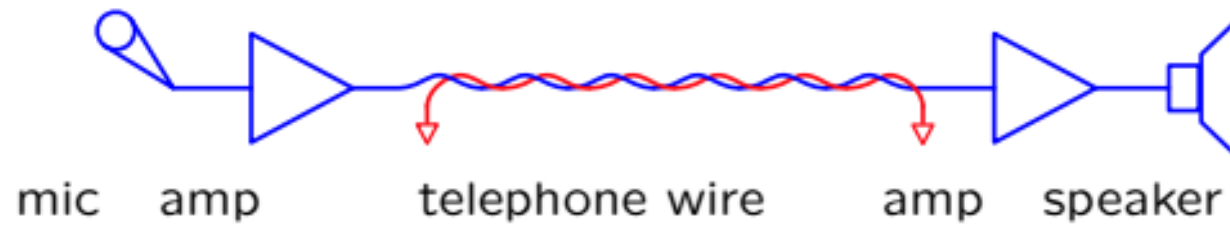
$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{b_0 + b_1jw + \dots + b_M(jw)^M}{a_0 + a_1jw + a_2(jw)^2 + \dots + a_N(jw)^N}$$

Modulasyon

Modulation

Applications of signals and systems in communication systems.

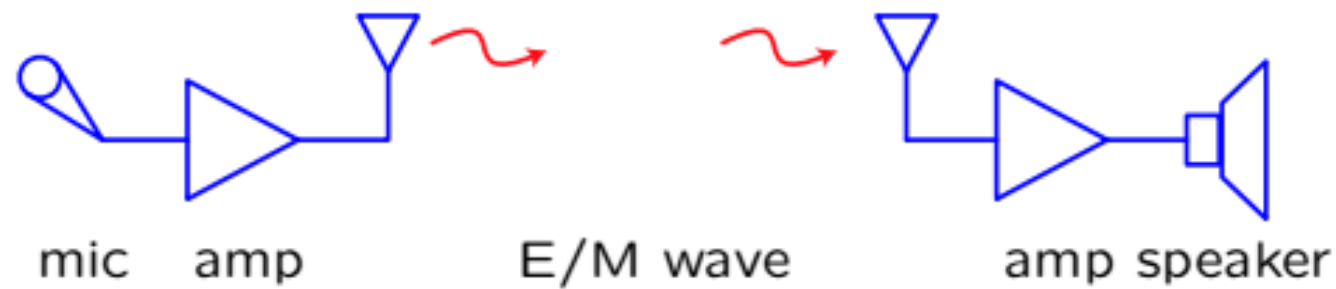
Example: Transmit voice via telephone wires (copper)



Works well: basis of local land-based telephones.

Wireless Communication

In cellular communication systems, signals are transmitted via electromagnetic (E/M) waves.



For efficient transmission and reception, antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies from 200 to 3000 Hz.

How long should the antenna be?



For efficient transmission and reception, the antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies between 200 Hz and 3000 Hz.

How long should the antenna be?

1. $< 1 \text{ mm}$
2. $\sim \text{cm}$
3. $\sim \text{m}$
4. $\sim \text{km}$
5. $> 100 \text{ km}$

For efficient transmission and reception, the antenna length should be on the order of the wavelength.

Telephone-quality speech contains frequencies between 200 Hz and 3000 Hz.

How long should the antenna be?

Wavelength is $\lambda = c/f$ so the lowest frequencies (200 Hz) produce the longest wavelengths

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{200 \text{ Hz}} = 1.5 \times 10^6 \text{ m} = 1500 \text{ km}.$$

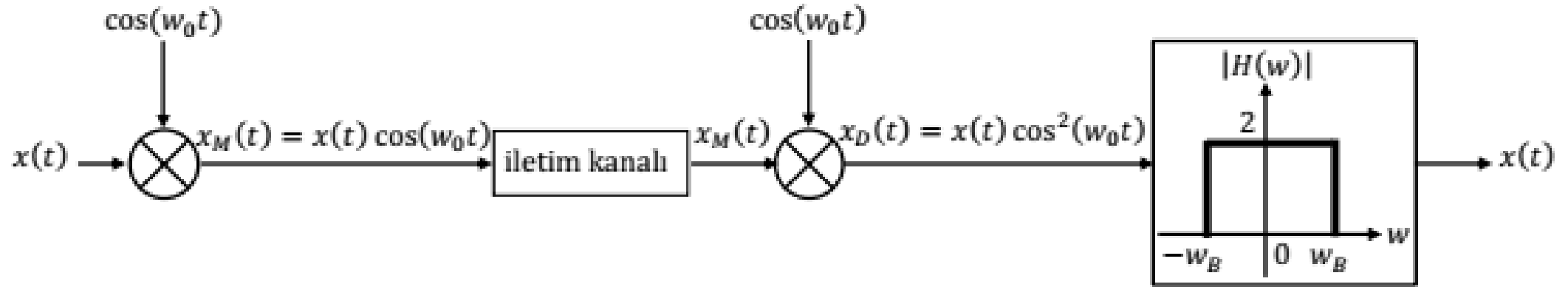
and the highest frequencies (3000 Hz) produce the shortest wavelengths

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3000 \text{ Hz}} = 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km}.$$

On the order of hundreds of miles!

Modülasyon

Modülasyon, haberleşmenin temelini oluşturan bir işlem olup zaman domenindeki w_B gibi sonlu bant genişlikli bir sinyalin kendinden çok daha yüksek frekanslı bir sinyal ile çarpılarak yüksek frekanslara taşınmasını (modülasyon) ve bu sayede daha elverişli bir şekilde iletilmesini ve ardından orjinal sinyalin tekrar geri kazanılması (demodülasyon) sağlar. Bunu aşağıdaki şekilde görmek mümkündür.



<https://www.youtube.com/watch?v=beFoCZ7oMyY>

<https://www.youtube.com/watch?v=00ZbuhPruJw>

<https://www.youtube.com/watch?v=CCOX2tvzM80>

Modülasyon ve demodülasyon işlemleri Fourier dönüşümünün

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(w) * X_2(w)$$

şeklindeki çarpma özelliğinden yararlanır. Daha yüksek frekanslara modüle etme işlemi genellikle yüksek frekanslı sinüzoidal sinyalle çarpılarak gerçekleştirilir. $x(t)$ gibi sonlu bir bant genişliğine sahip bir sinyal ele alalım. Bu sinyali $\cos(w_0 t)$ gibi yüksek frekanslı bir sinyal ile çarparsak, çarpım sonucunun Fourier dönüşümü, çarpma özelliğine göre şu şekilde bulunur:

$$x_M(t) = x(t) \cos(w_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * \mathcal{F}\{\cos(w_0 t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(w) * (\pi\delta(w - w_0) + \pi\delta(w + w_0))$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(w) * \pi\delta(w - w_0) + \frac{1}{2\pi} X(w) * \pi\delta(w + w_0)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(w - \Omega) \delta(\Omega - w_0) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(w - \Omega) \delta(\Omega + w_0) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} X(w - w_0) + \frac{1}{2} X(w + w_0)$$

Konvolüsyon tanımından

Görüldüğü gibi modüleli sinyalin Fourier dönüşümü

$$X_M(w) = \mathcal{F}\{x_M(t)\} = \frac{1}{2}X(w - w_0) + \frac{1}{2}X(w + w_0)$$

şeklindedir. Şimdi bu modüleli sinyalin kayıpsız bir iletim kanalından iletdikten sonra alıcı tarafta tekrar $\cos(w_0 t)$ sinyali ile çarpılarak demodüleli sinyal olan

$$x_D(t) = x(t) \underbrace{\cos^2(w_0 t)}_{\rightarrow}$$

sinyalinin Fourier dönüşümünü elde edelim. Bunu için $\cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_0 t)$ açılımından yararlanacağız.

$$\cos^2(w_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_0 t) \leftrightarrow \pi\delta(w) + \frac{\pi}{2}\delta(w - 2w_0) + \frac{\pi}{2}\delta(w + 2w_0)$$

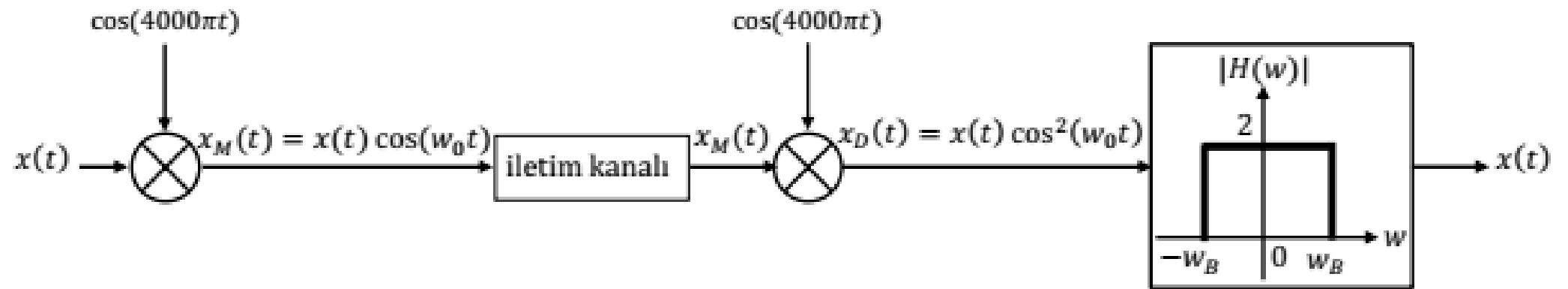
Artık demodüleli sinyalin Fourier dönüşümünü bulabiliriz.

$$\begin{aligned}x_D(t) = x(t) \cos^2(w_0 t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * \left[\pi \delta(w) + \frac{\pi}{2} \delta(w - 2w_0) + \frac{\pi}{2} \delta(w + 2w_0) \right] \\&= \frac{1}{2\pi} X(w) * \pi \delta(w) + \frac{1}{2\pi} X(w) * \frac{\pi}{2} \delta(w - 2w_0) + \frac{1}{2\pi} X(w) * \frac{\pi}{2} \delta(w + 2w_0) \\&= \frac{1}{2} X(w) + \frac{1}{4} X(w + 2w_0) + \frac{1}{4} X(w - 2w_0)\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi demodüleli sinyal frekans domeninde bir kaç bileşenden oluşmaktadır. Orjinal $x(t)$ sinyalini tekrar elde etmek için demodüleli sinyal, kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilir.

Örnek

Örnek: Aşağıdaki şekildeki gibi, bant genişliği w_B $x(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t}$ sinyalinin $\cos(4000\pi t)$ işareti ile çarpılması (modüle edilmesi) ile elde edilen $x_M(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t} \cos(4000\pi t)$ işareti, kayıpsız bir iletim kanalından geçtikten sonra alıcı tarafında $\cos(4000\pi t)$ işareti ile çarpılarak demodüle edilmiş ve ardından orjinal $x(t)$ sinyalini tekrar elde etmek için demodüleli sinyal, kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilir.

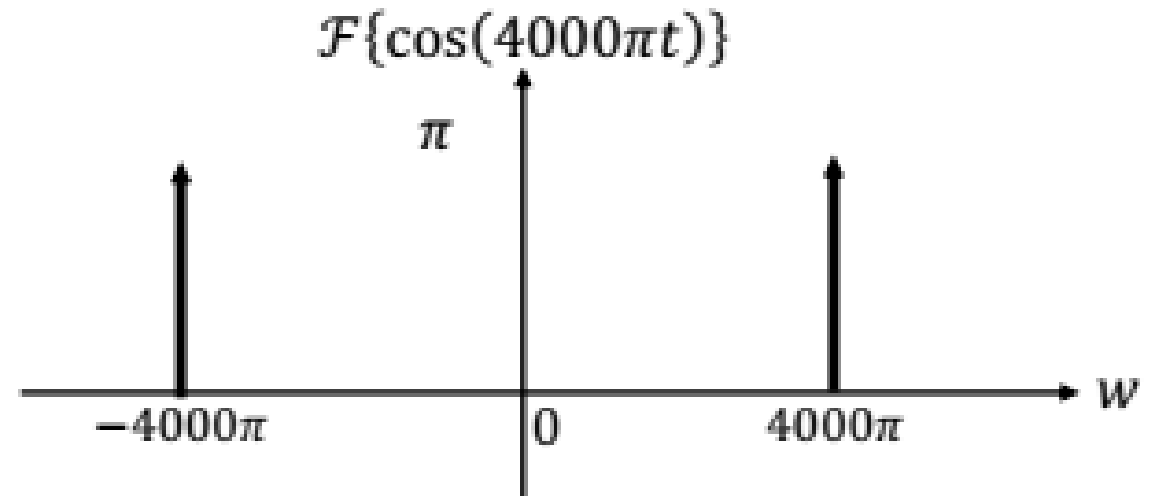
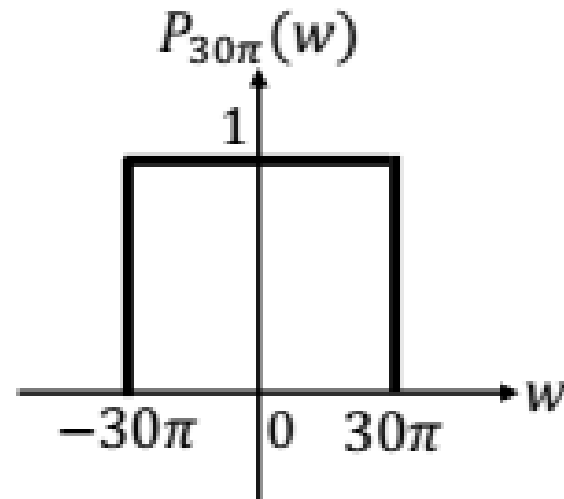


Öncelikle bu iki sinyalin Fourier dönüşümlerini bulalım:

$$x(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow P_{30\pi}(w)$$

$$\cos(4000\pi t) \leftrightarrow \pi\delta(w - 4000\pi) + \pi\delta(w + 4000\pi)$$

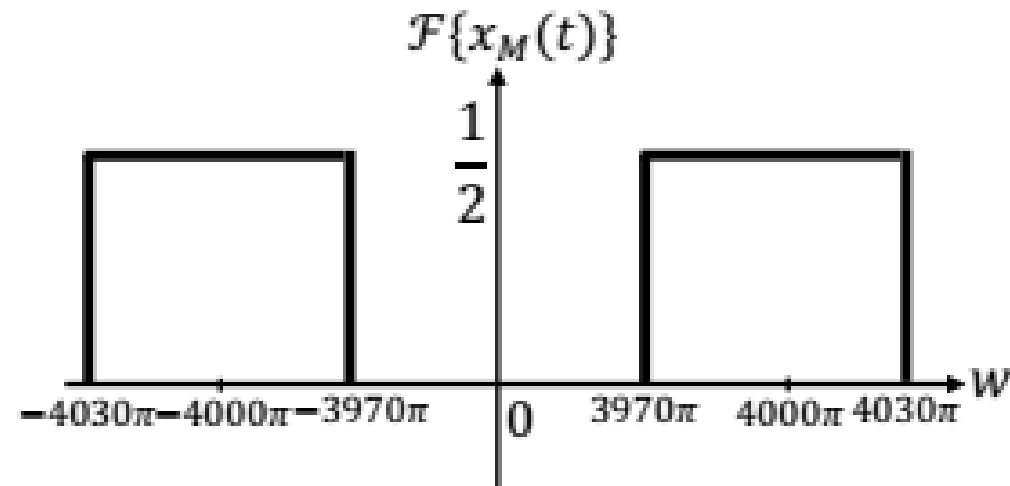
Bu sinyallerin Fourier dönüşümlerinin grafik olarak aşağıdaki gibidir.



Şimdi, modüleli işaretin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$\begin{aligned}
 x_M(t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t} \cos(4000\pi t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(w) * \mathcal{F}\{\cos(4000\pi t)\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} P_{30\pi}(w) * (\pi\delta(w - 4000\pi) + \pi\delta(w + 4000\pi)) \\
 &= \frac{1}{2} P_{30\pi}(w - w_0) + \frac{1}{2} P_{30\pi}(w + w_0)
 \end{aligned}$$

Bu sinyalin Fourier dönüşümü grafik olarak aşağıdaki gibidir:

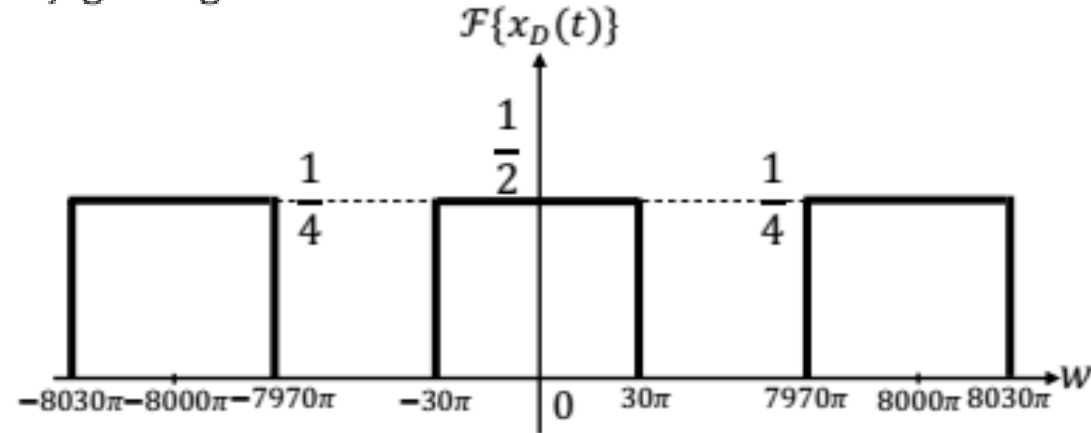


Şimdi de iletim kanalından geçen modüleli sinyalin $\cos(4000\pi t)$ sinyali ile çarpılmasıyla elde edilen demodüleli $x_D(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulalım:

$$x_D(t) = x(t) \cos^2(w_0 t) = \frac{\sin(30\pi t)}{\pi t} \cos^2(4000\pi t)$$

$$\begin{aligned} x_D(t) = x(t) \cos^2(w_0 t) &\leftrightarrow \frac{1}{2}X(w) + \frac{1}{4}X(w + 2w_0) + \frac{1}{4}X(w - 2w_0) \\ &= \frac{1}{2}P_{30\pi}(w) + \frac{1}{4}P_{30\pi}(w + 8000\pi) + \frac{1}{4}P_{30\pi}(w - 8000\pi) \end{aligned}$$

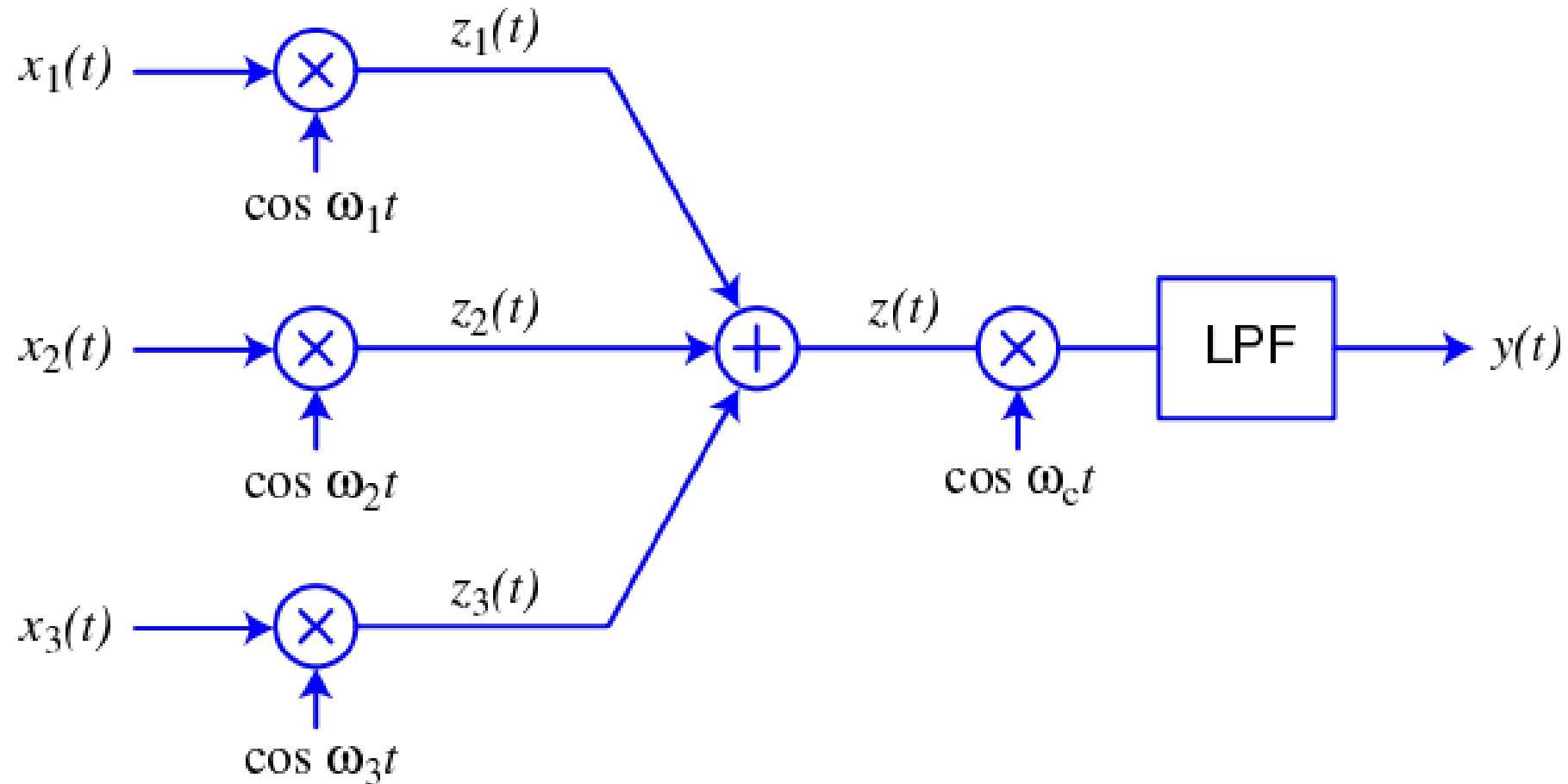
Bu sinyalin Fourier dönüşümü grafik olarak aşağıdaki gibidir:



Demodüleli $x_D(t)$ işareti kesim frekansı w_B kazancı da 2 olan alçak geçiren bir filtreden geçirilirse orjinal $x(t)$ sinyali elde edilir.

Frequency-Division Multiplexing

Multiple transmitters simply sum (to first order).



Amplitude, Phase, and Frequency Modulation

There are many ways to embed a “message” in a carrier.

Amplitude Modulation (AM) + carrier: $y_1(t) = (x(t) + C) \cos(\omega_c t)$

Phase Modulation (PM): $y_2(t) = \cos(\omega_c t + kx(t))$

Frequency Modulation (FM): $y_3(t) = \cos\left(\omega_c t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)$

PM: signal modulates instantaneous phase of the carrier.

$$y_2(t) = \cos(\omega_c t + kx(t))$$

FM: signal modulates instantaneous frequency of carrier.

$$y_3(t) = \cos\left(\omega_c t + \underbrace{k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau}_{\phi(t)}\right)$$

$$\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d}{dt}\phi(t) = \omega_c + kx(t)$$