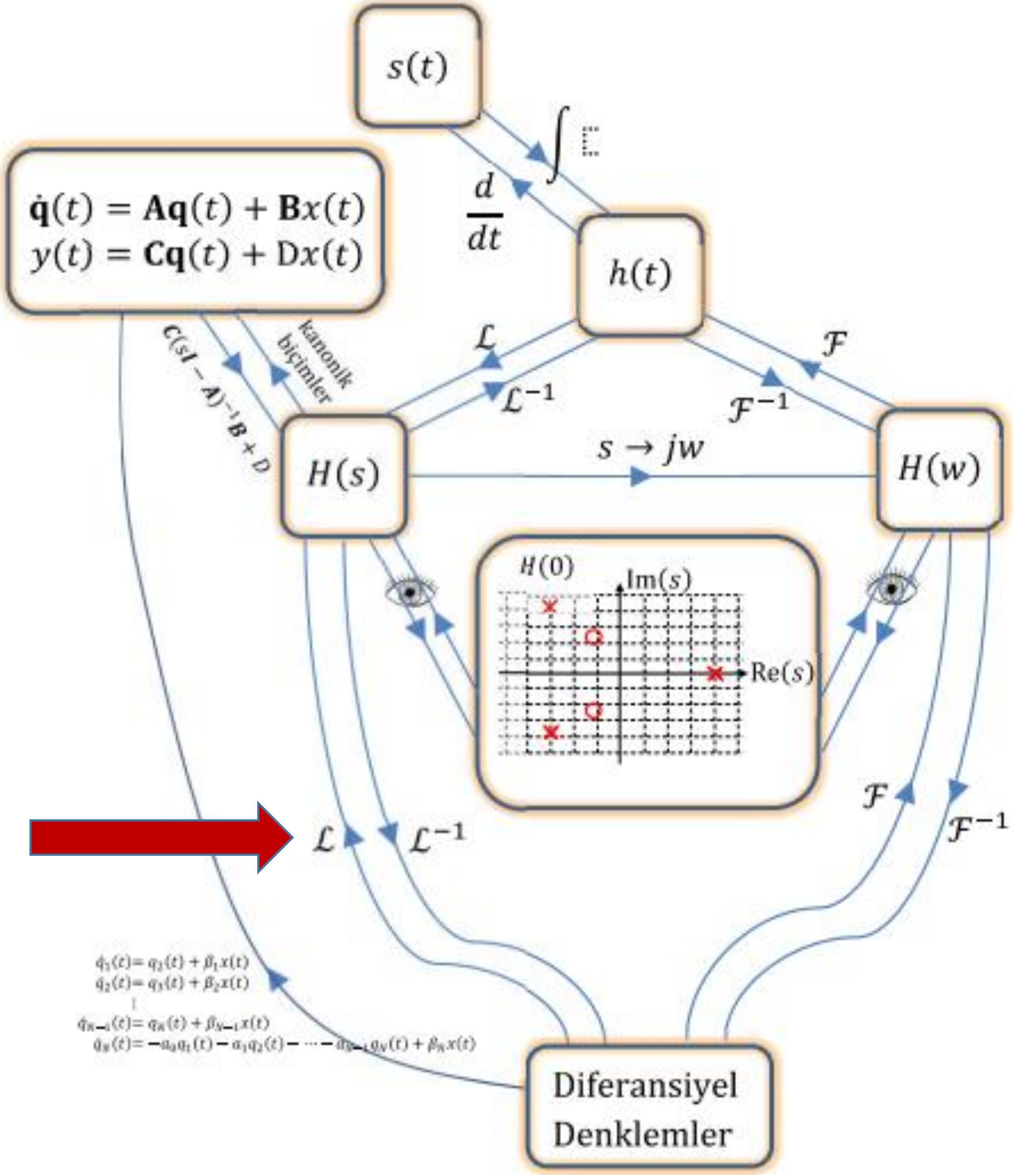
İşaret İşleme

Laplace Dönüşümü ve Sürekli Zamanlı Sistemler-H9CD1

Dr. Meriç Çetin

versiyon211020

Sürekli-zamanlı sistemlerde giriş-çıkış ilişkileri



EEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi

Laplace Dönüşümü

Giriş

- Darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Alternatif olarak Laplace dönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce **s–domenine** dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar **zaman domenine** dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Laplace dönüşümü sayesinde bir LTI sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

Pierre-Simon de Laplace
Pierre-Simon de Laplace

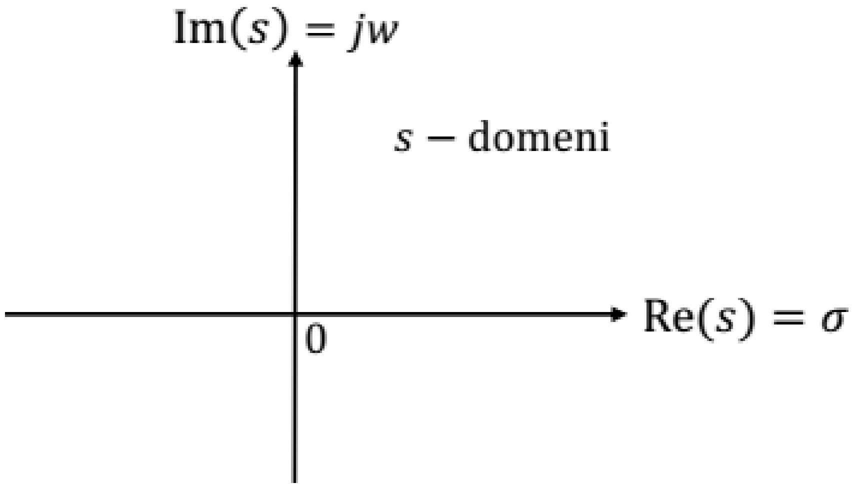
Laplace Dönüşümünün Tanımı

Sürekli-zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Laplace dönüşümü $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

buradaki s değişkeni $s = \sigma + jw$ şeklinde karmaşık bir değişkendir.



Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$ sinyalinin Laplace dönüşümü ?

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)\infty} - \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)0}$$

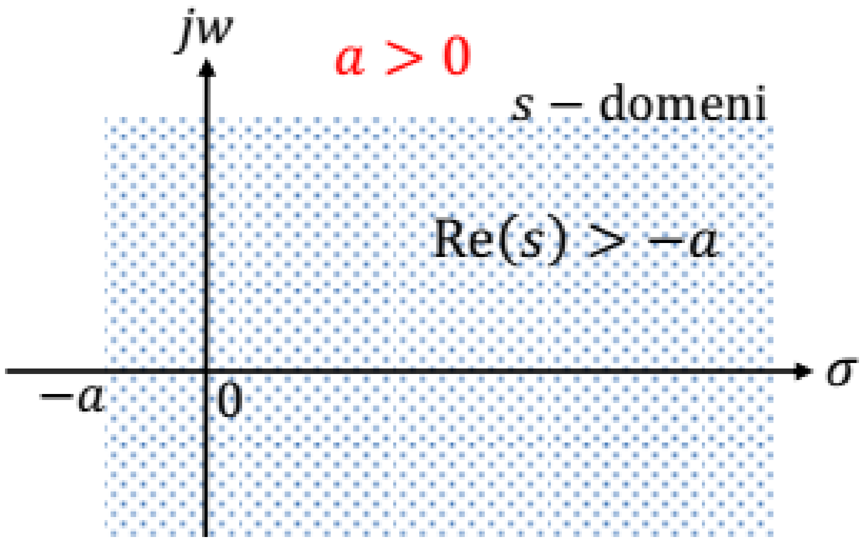
$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)\infty} + \frac{1}{s+a}$$

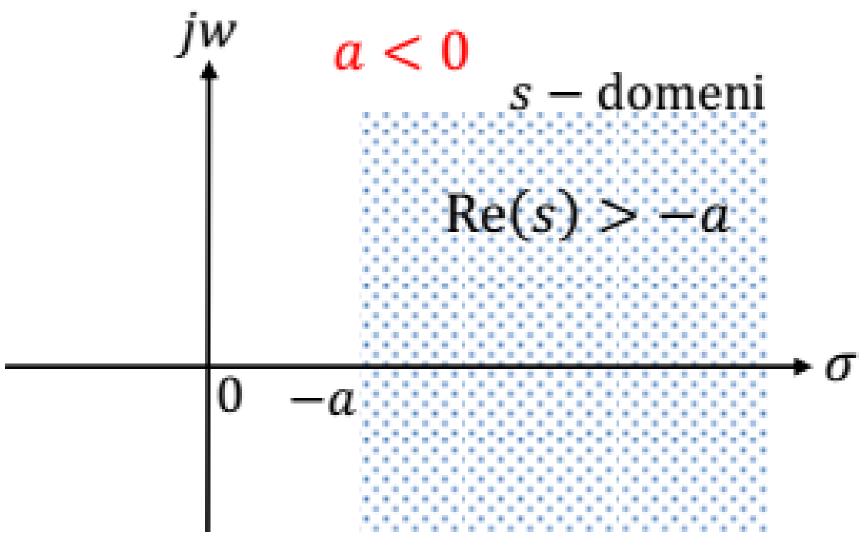
$$= \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$ sinyalinin Laplace dönüşümü

Görüldüğü gibi bu integralin yani Laplace dönüşümünün mevcut olabilmesi için $\mathrm{Re}(s+a) > 0$ şartının sağlanması gerekir. s-domeninde bu şart aşağıdaki gibi bir bölgeye denk düşmektedir ki bu bölgeye yakınsama bölgesi denir.





Laplace Dönüşümü X(s)'in Sıfırları ve Kutupları

Laplace dönüşümü olan $X(s)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n} \qquad = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

burada a_k ve b_k'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \le n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k'lara $X(s)$'in *sıfırları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k'lara da $X(s)$'in *kutupları* denmektedir çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = \infty$ olmaktadır.

$X(s)$'i ifade etmenin bir yolu da sıfır ve kutuplarını s-düzleminde yerlerinin belirtilmesidir.

Geleneksel olarak sıfırlar **o** ile kutuplar da **x** ile gösterilmektedir.

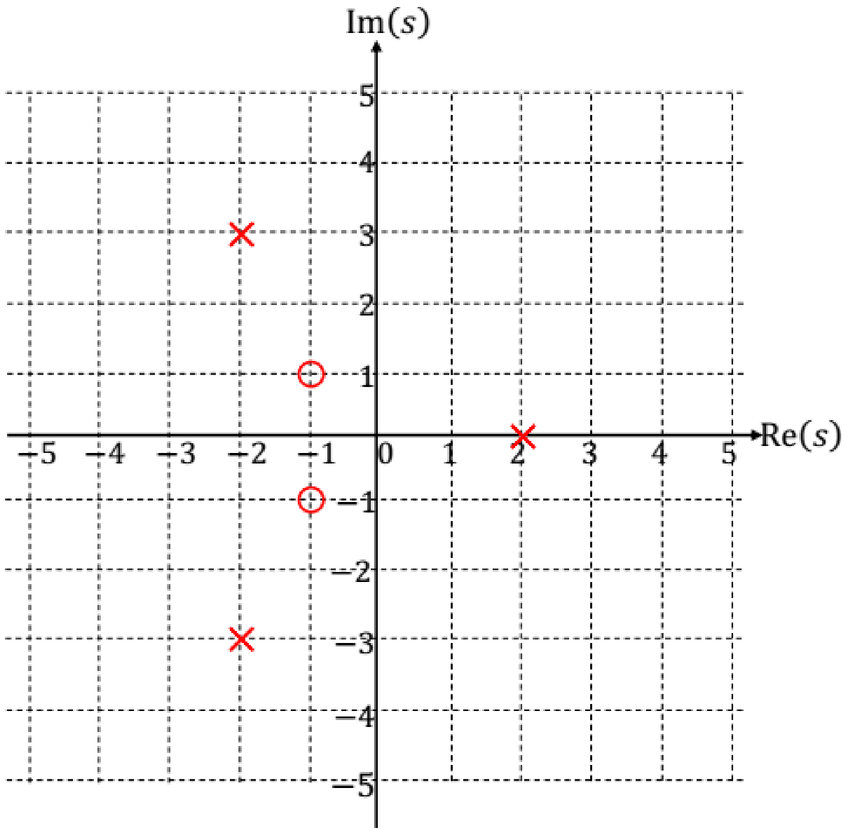
örneğe bakalım:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s^3 + 4s^2 + s - 26} = 2\frac{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}{(s - 2)(s + 3 + 2j)(s + 3 - 2j)}$$

$X(s)$'in $s = -1 + j$ ve $s = -1 - j$'de sıfırları,

$s = 2$, $s = -3 + 2j$'de ve $s = -3 - 2j$'de kutupları vardır ve

sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



Tablo Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(s)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
s-domeninde Öteleme	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$X\left(\frac{s}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-s)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$
s-domeninde Türev	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$
Türev	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

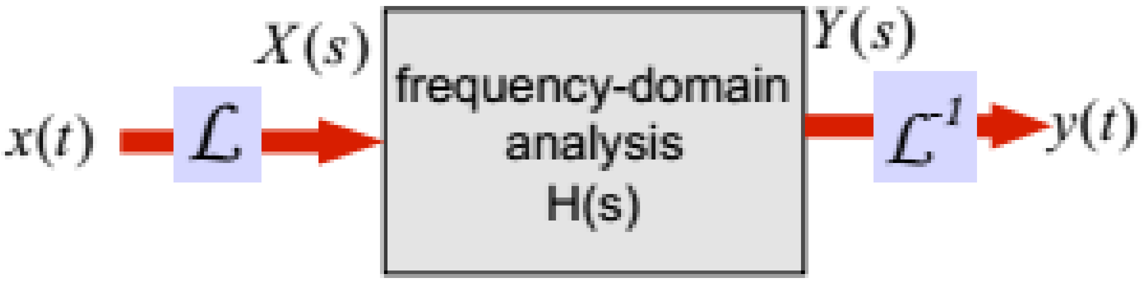
Ters Laplace Dönüşümü

Ters Laplace Dönüşümü

$X(s)$ sinyalinden $x(t)$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters Laplace dönüşümü ile sağlanır:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

bu derste ters Laplace dönüşümü almak için kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.



Bir Örnek

$X(s)=\frac{2s+4}{s^2+4s+3}$'in ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle $X(s)$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$X(s)=\frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$
$$=2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$
$$=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s+3}$$
$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}$$

Laplace Tablosundan

$$x(t)=e^{-t}u(t)+e^{-3t}u(t)$$

Örneğin devamı

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

Laplace Tablosundan

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

COMPUTER EXAMPLE C4.1

Using the MATLAB residue command, determine the inverse Laplace transform of each of the following functions

a.

$$X_a(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$$

```
num = [2 0 5]; den = [1 3 2]; [r, p, k] = residue(num,den)
```

$$F(s) = \frac{-13}{s+2} + \frac{7}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (-13e^{-2t} + 7e^{-t})u(t) + 2\delta(t)$$

b.

$$X_b(s) = \frac{2s^2+7s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

```
num = [2 7 4]; den = [conv([1 1],conv([1 2], [1 2]))]; [r, p, k] = residue(num,den)
```

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (3e^{-2t} + 2te^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

c.

$$X_c(s) = \frac{8s^2+21s+19}{(s+2)(s^2+s+7)}$$

```
num = [8 21 19]; den = [conv([1 2], ([1 1 7]))]; [r, p, k] = residue(num,den)
```

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3.5329\,e^{-j0.1366}}{s+0.5-j2.5981} + \frac{3.5329\,e^{j0.1366}}{s+0.5+j2.5981}$$

$$f(t) = [e^{-2t} + 1.766\,e^{-0.5t}\cos(2.5981t - 0.1366)]\,u(t)$$

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

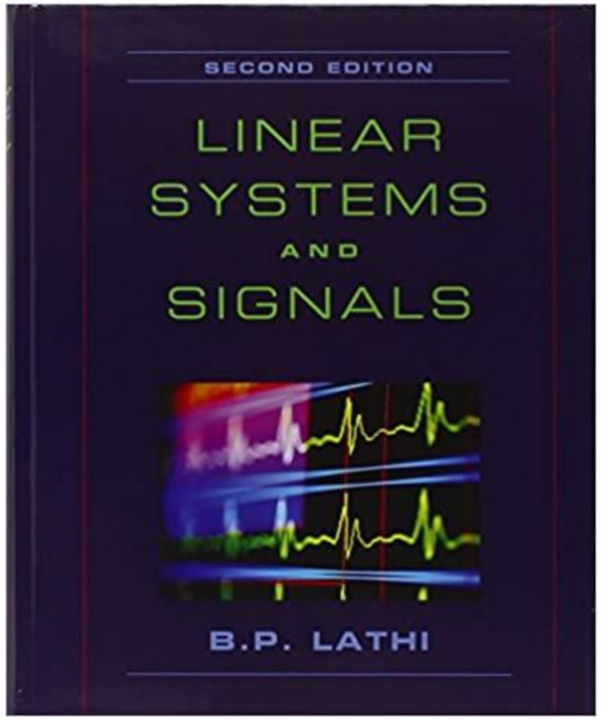
Lecture 6

Frequency-domain analysis: Laplace Transform
(Lathi 4.1 – 4.2)

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

EEEN343 Sinyaller ve Sistemler Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği



MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011