

BLM2041

AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERDE KONVOLÜSYON
İŞLEMİ ÖDEV RAPORU



Berkay Gözübüyük

21011044

Erkan Uslu

Video Linki : https://youtu.be/_vou8TswIG8

1. Sinüs ve Cosinüs Sinyalleri

Kullanıcı tarafından girilen üç farklı sinyal için aşağıdaki fonksiyonlar kullanılmıştır:

$$y_{sin}(t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \theta)$$

$$y_{cos}(t) = A \cdot \cos(2\pi ft + \theta)$$

Burada:

- A : Genlik (amplitude)
- f : Frekans (Hz cinsinden)
- θ : Faz açısı (radyan cinsinden)
- t : Zaman vektörü (numpy ile oluşturulan 0–1 saniye arası 1000 nokta)

Bu fonksiyonlar, `numpy.sin()` ve `numpy.cos()` fonksiyonlarıyla hesaplanmıştır.

2. Sentez Sinyali (Toplam)

Üç sinyalin hem sinüs hem kosinüs bileşenleri toplandıktan sonra elde edilen bileşik sinyal:

$$y_{sentez}(t) = \sum_{i=1}^3 [y_{sin,i}(t) + y_{cos,i}(t)]$$

Bu sinyal matplotlib ile çizilmiştir ve kullanıcıya dördüncü alt grafik olarak gösterilir.

3. Fourier Serisi ile Yeniden Oluşturma

Fourier serisi formülü:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Burada:

- a_0 : DC (sabit) bileşen
- a_k, b_k : kosinüs ve sinüs katsayıları
- ω_0 : temel açısal frekans $= \frac{2\pi}{T}$
- T : periyot

Kullanıcı bu katsayıları manuel olarak girebilir ya da “Analiz Et” butonuyla tabloya göre otomatik girilir.

Bu formül numpy.cos ve numpy.sin ile sayısal olarak uygulanmıştır. Grafiği matplotlib ile ayrı pencerede çizilir.

4. Sayısal İntegrasyon: a_k, b_k Hesabı

Eğer kullanıcı grafiksel tanımlı bir periyodik işareti analiz etmek isterse, formül şu şekilde uygulanır:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Bu integraller sayısal olarak numpy.trapz() fonksiyonu (trapez kuralı) ile hesaplanmıştır. Zaman vektörü yaklaşık 10,000 noktadan oluşur.

5. Even Triangle Wave

3. soruda verilen periyodik işaret bir Even Triangle Wave'dir. Çözümü ise şu işlemlerle olur :

Ortalama değer (yani 0. Fourier Serisi Katsayısı) $a_0=0$ 'dır. $n>0$ için diğer katsayılar hesaplanırken çift fonksiyonun simetrisinden yararlanılır.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$n > 0$ için diğer katsayılar hesaplanırken fonksiyonun çift (even) simetrisinden yararlanılır.

$t = 0$ ile $t = T/2$ arasında fonksiyon şu şekilde tanımlanır: $x_T(t) = A - \frac{4A}{T}t$ Bu nedenle :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \left(A - \frac{4A}{T}t \right) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4A}{T} \left(\int_0^{+\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt - \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} t \cos(n\omega_0 t) dt \right)$$

İntegralleri (kısmi integrasyon yöntemiyle elle, integral tablolarıyla ya da bilgisayarla) çözün ve $\omega_0 \cdot T = 2\pi$ olduğunu kullanın.

$$a_n = \frac{4A}{T} \left(\frac{T \sin(\pi n)}{2\pi n} + \frac{4}{T} \frac{T^2 \left(2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 - \pi n \sin(\pi n) \right)}{4\pi^2 n^2} \right)$$

$\sin(\pi \cdot n) = 0$ olduğundan bu ifade sadeleşir.

$$a_n = \frac{4A}{T} \frac{4}{T} \frac{T^2 2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{4\pi^2 n^2} = \frac{8A \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2}{\pi^2 n^2}$$

Bu sonuç doğrudur, ancak şu gözlem yapılırsa...

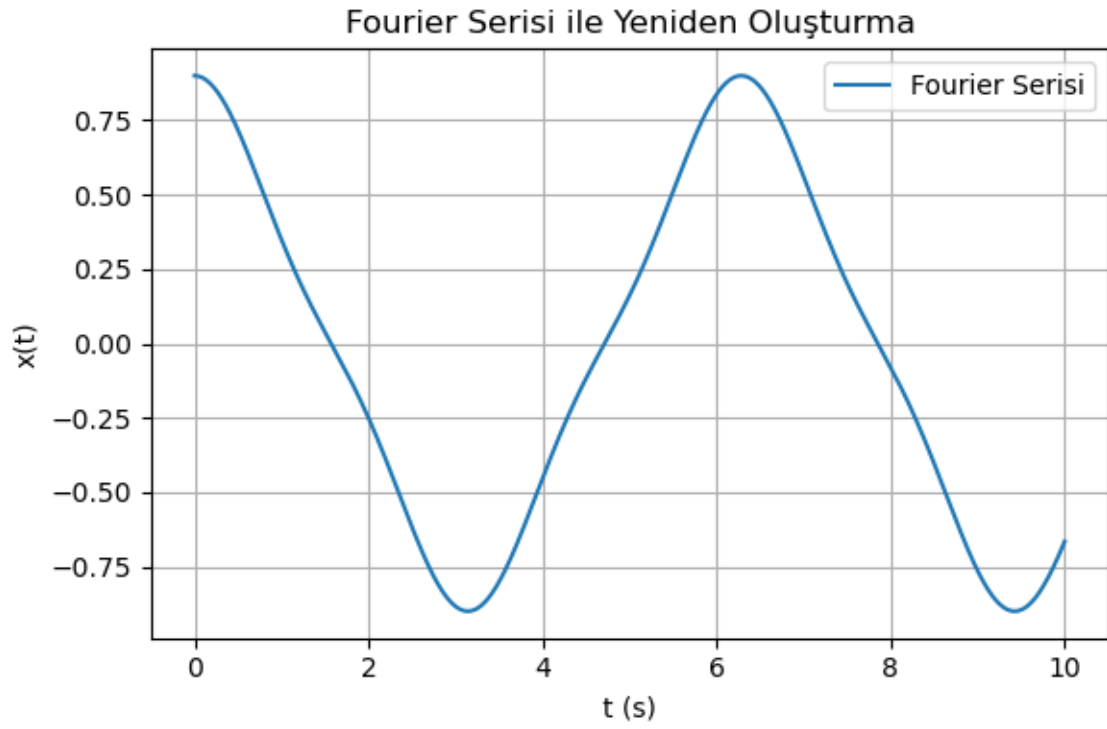
$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \quad \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

daha da basit bir sonuca ulaşılır.

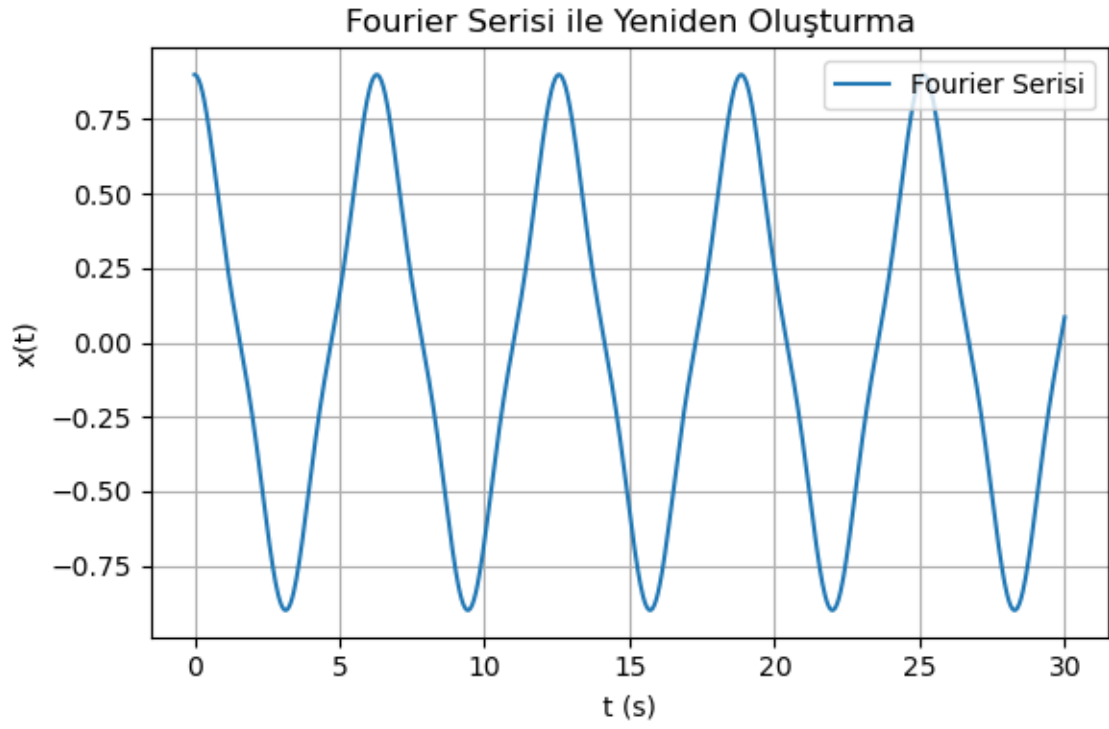
$$a_n = \begin{cases} 4A \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}, & \text{nodd} \\ 0, & \text{neven} \end{cases}$$

6. 3. Soru İçin Bulduğum Sonuçlar

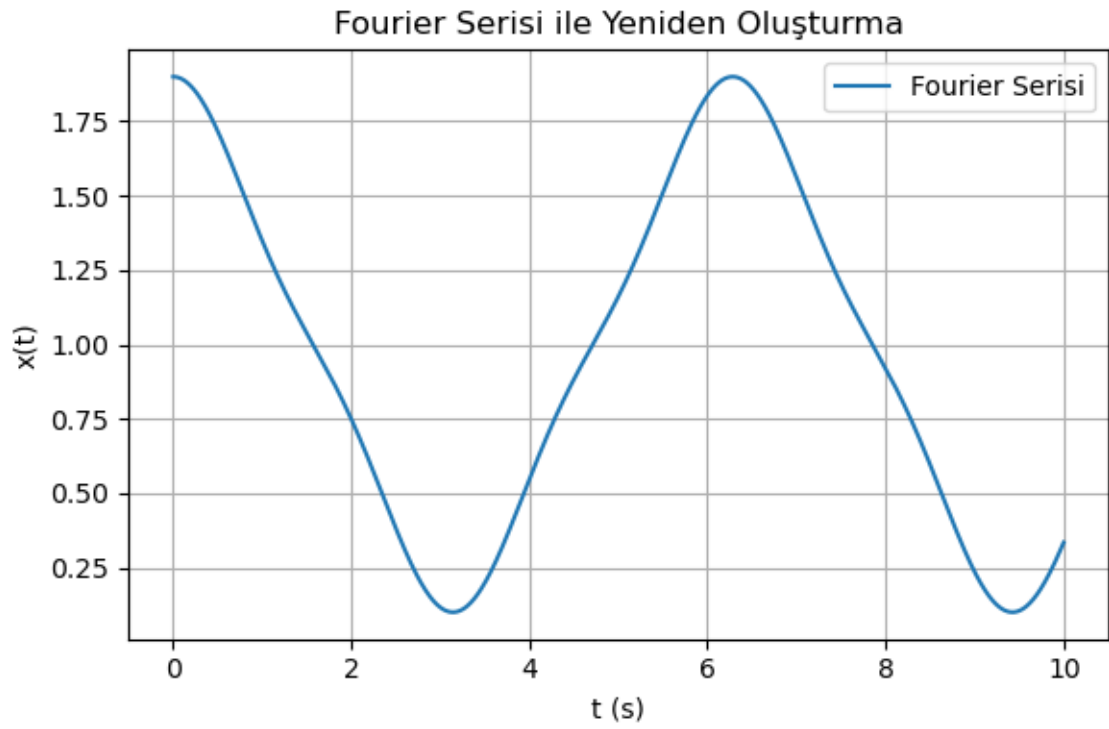
A = 0, T = 10 için



A=0 , T = 30 için



$A = 1, T = 10$ için



7. PyQt5 İle Arayüz

- QDoubleSpinBox: Sayısal parametre girişleri (float değerler)

- QPushButton: Butonlar ile çizim ve analiz işlemleri
- QVBoxLayout, QGridLayout: Arayüz düzenleme

8. matplotlib Kullanımı

- plt.subplots() ile çoklu alt grafik (subplot)
- ax.plot(), ax.set_title(), ax.grid(True) fonksiyonları
- plt.tight_layout() ve plt.show() ile pencere açma

9. Sonuç

Bu kodda temel olarak sinyal işleme ve Fourier analizi üzerine odaklanılmış, hem teorik hem de görsel geri bildirim sağlayacak bir eğitim aracı geliştirilmiştir. Matematiksel ifadeler doğrudan kod yapısına karşılık gelecek şekilde uygulanmıştır.