EHM2141 LOJİK DEVRELER

2024-2025 BAHAR DÖNEMİ

HAFTA 3 – DERS 1

4 Mart 2025

Dr. Sibel ÇİMEN

BOOLE CEBRİ

George Boole, 1854 yılında mantığın sistematik olarak incelenmesi için bir cebir sistemi geliştirmiştir. 1938 Yılında C.E. Shannon ise iki değerlikli Boole cebrini geliştirmiştir. Boole cebrinin aksiyomatik tanımı için farklı bilim insanlarının geliştirdikleri yaklaşımlar mevcuttur. Bu ders kapsamında E.V. Huntington'un 1904 yılında önerdiği aksiyomatik tanımlama kullanılacaktır [1].

Boole Cebri içinde **üç temel lojik işlemi** tanımlanmıştır. Bu işlemler VE (AND), VEYA (OR) ve TÜMLEME (DEĞİL-NOT) [2].

VE (AND) Lojik İşlemi:

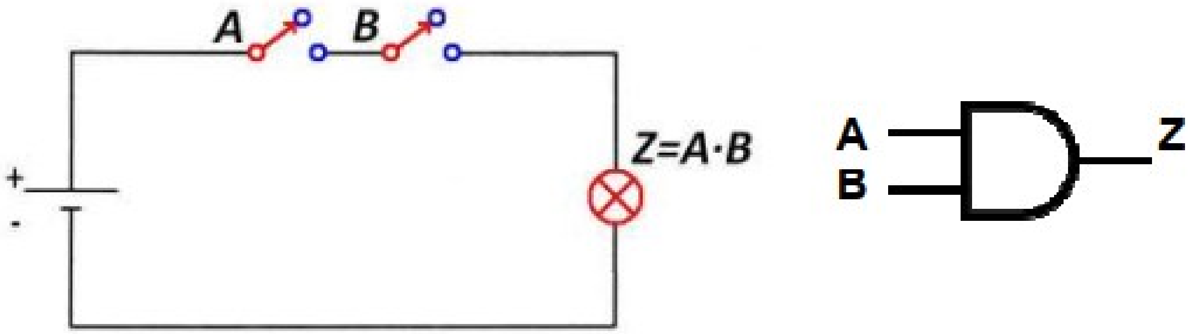
Birbirine VE işlemi ile bağlı iki önermeden oluşan bir birleşik önermenin doğru olması, her iki önermenin de doğru olmasına bağlıdır [2]. Burada adı geçen önermeler 'a, b, c, … x, y, z' gibi değişkenlerle ifade edilirler ve sadece '0' ve '1' değerlerinden birini alabilirler. a, b ile ifade edilen önermelerin doğruluğu '1', yanlışlığı '0' ile gösterilir. VE işlemi «.» veya « boşluk» ile ifade edilir [2].

$$f(a,b) = a.b \qquad veya \qquad f(a,b) = ab$$

a	b	a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VE işleminin doğruluk tablosu

NOT: Bir Boole fonksiyonuna ait olası olan tüm girişleri ile bunlar sonucunda elde edilen çıkışları gösteren tabloya 'DOĞRULUK TABLOSU' denir.



VE işleminin anahtar devresindeki karşılığı [1]

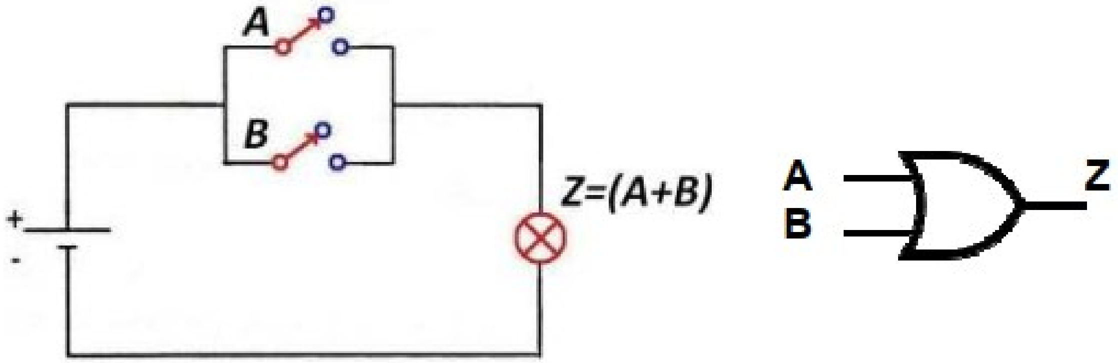
BOOLE CEBRİ

VEYA (OR) Lojik İşlemi:

Birbirine VEYA işlemi ile bağlı iki önermeden oluşan bir birleşik önermenin doğru olması, en az bir önermenin doğru olmasına bağlıdır [2]. VEYA işlemi «+» sembolü ile ifade edilir.

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

VEYA işleminin doğruluk tablosu

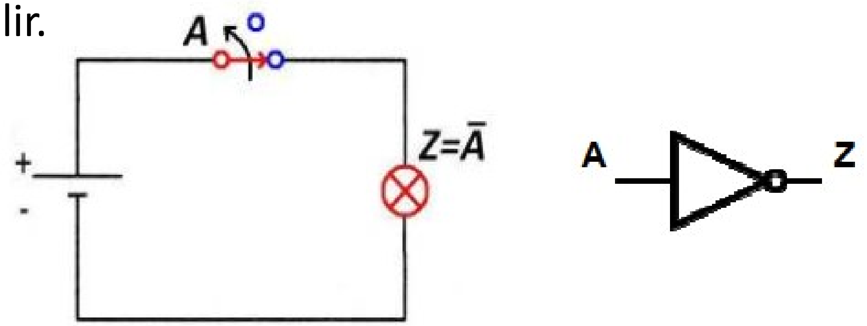


VEYA işleminin anahtar devresindeki karşılığı [1]

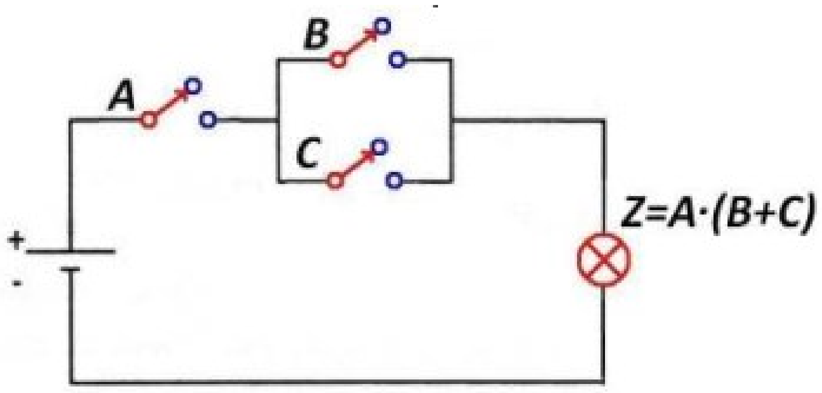
TÜMLEME-DEĞİL (NOT) Lojik İşlemi:

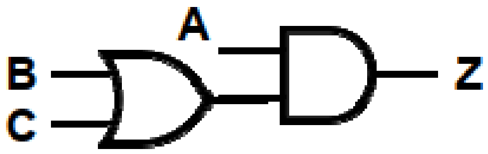
TÜMLEME işlemi uygulanan önerme, başlangıçta doğru ise yanlış, yanlış ise doğru olacaktır [2]. TÜMLEME(DEĞİL) işlemi «$\bar{a}$» veya «a’»sembolleri ile ifade edilir.

a	$\bar{a}$
0	1
1	0



BOOLE CEBRİ





A	B	C	A.(B+C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

NOT: TÜMLEME(NOT) işlemi VE işleminden daha önceliklidir. VE işlemi de VEYA işleminden daha önceliklidir. Boole fonksiyonları yazılırken ayrıca parantezler de kullanılır.

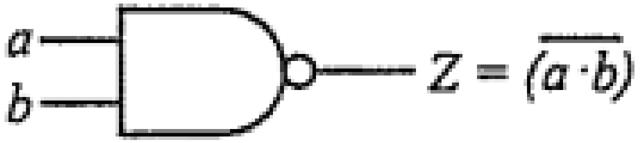
BOOLE CEBRİ

Türetilen Lojik İşlemleri:

VEDEĞİL (TÜMLEYEN-VE, NAND) Lojik İşlemi:

VE İşlemine DEĞİL (TÜMLEME - NOT) işleminin uygulanması ile elde edilir. $f(a,b) = \overline{a.b}$ işlemine karşılık gelir.

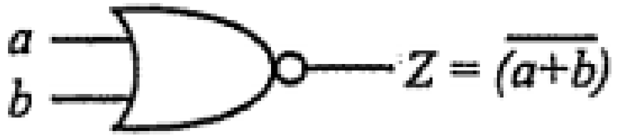
a	b	$\overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



VEYADEĞİL (TÜMLEYEN-VEYA, NOR) Lojik İşlemi:

VEYA İşlemine DEĞİL (TÜMLEME - NOT) işleminin uygulanması ile elde edilir. $f(a,b) = \overline{a+b}$ işlemine karşılık gelir.

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

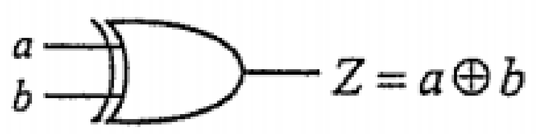


BOOLE CEBRİ

ÖZEL VEYA (AYRICALI-VEYA, YA DA, XOR(Exclusive OR)) Lojik İşlemi:

Özel-VEYA (XOR) işlemi aşağıdaki doğruluk tablosu ile tanımlanır. İşlem «⨁» sembolü ile gösterilir.
$f(a,b) = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$ işlemine karşılık gelir.

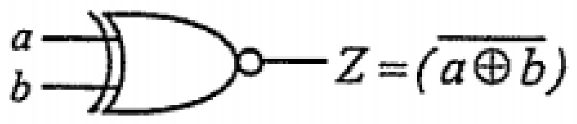
a	b	a⨁b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



ÖZEL VEYADEĞİL (AYRICALI-VEYADEĞİL, XNOR(Exclusive NOR)) Lojik İşlemi:

Özel VEYADEĞİL(XNOR) işlemi aşağıdaki doğruluk tablosu ile tanımlanır. $f(a,b) = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$ işlemine karşılık gelir.

a	b	$\overline{a \oplus b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

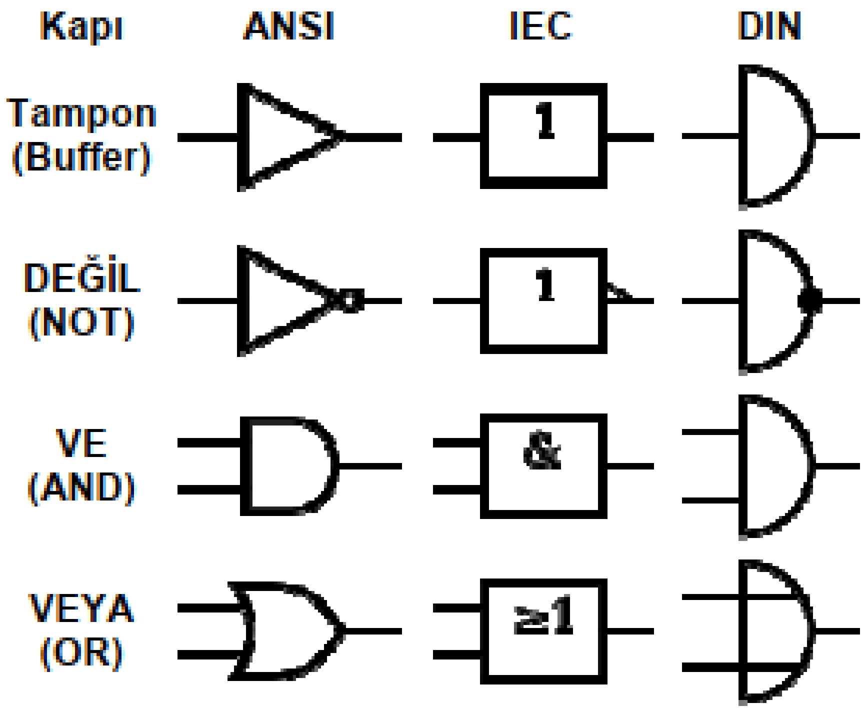


BOOLE CEBRİ

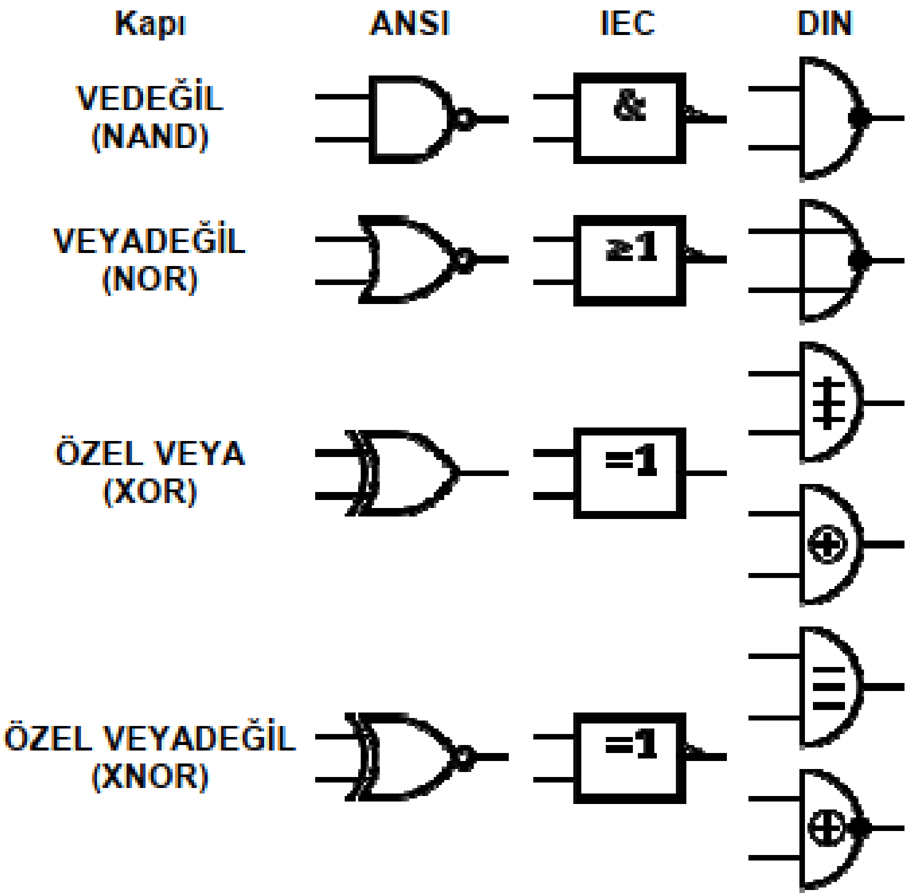
LOJİK KAPI SEMBOLLERİ

Lojik işlemlerini grafik olarak göstermek için farklı standartlar geliştirilmiştir. Bu standartlar; ANSI (American National Standards Institute), IEC (International Electrotechnical Commission) ve DIN (Deutsches Institut für Normung-Alman Standartları Enstitüsü).

Temel lojik kapıların grafik sembolleri



Diğer lojik kapıların grafik sembolleri



BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Boole Cebri, Huntington aksiyomarını sağladığı sürece, + ve . İkili işlemleri olan bir A kümesi üzerinde tanımlanan cebirsel bir yapıdır [3]. ‘0’ ve ‘1’ ikilisinden oluşan bir kümeye + ve/veya . İşlemleri uygulandığında, her bir değişken ‘0’ veya ‘1’ değerlerinden sadece birini alabilir.

BOOLE CEBRİ AKSİYOMLARI (Huntington postulatları) [3]

1. **a)** + işlemine göre kapalılık.
   b) . İşlemine göre kapalılık.
2. **a)** +’ya göre 0, birim eleman olarak belirlenmiştir. x+0 = 0+x=x
   b) .’ya göre 1, birim eleman olarak belirlenmiştir. x.1 = 1.x=x
3. **a)** +’ya göre değişme özelliği. x+y = y+x
   b) .’ya göre değişme özelliği. x.y = y.x
4. **a) .,+** üzerinde dağılma özelliği. x.(y+z) =x.y+x.z
   b) +,. üzerinde dağılma özelliği. x+(y.z) =(x+y).(x+z)
5. Her x∈ A için bir $\bar{x} \in A$ elemanı vardır ve böylece
   a) $\boldsymbol{x+\bar{x}=1}$
   b) $\boldsymbol{x.\bar{x}=0}$ olur.
6. x≠y olacak şekilde en az iki x,y ∈ A vardır.

Dualite: Huntington aksiyomları (a) ve (b) şıkları halinde bir çift olarak verilmiştir. İkili işlemler ve birim elemanlar değiştirilerek diğer şık elde edilebilir. Bu özelliğe Boole Cebrinin <u>dualite prensibi</u> denir. Cebirsel bir işlemin duali istendiğinde VEYA ve VE işlemleri değiştirilir, 0’lar yerine ‘1’, ‘1’ ler yerine ‘0’ konur.

BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Aksiyom 4(b)'yi doğruluk tablosu ile inceleyelim.

+,. üzerinde dağılma özelliği. x+(y.z) =(x+y).(x+z)

x	y	z	x+(y.z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x	y	z	(x+y).(x+z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

BOOLE CEBRİNDE TEMEL TEOREMLER [3]

Teorem 1: **a)** x+x=x **b)** x.x=x

Teorem 2: **a)** x+1=1 **b)** x.0=0

Teorem 3 (Ters alma): $\overline{(\bar{x})} = x$

Teorem 4 (Birleşme): **a)** x+(y+z)=(x+y)+z **b)** x.(y.z)=(x.y).z

Teorem 5 (De Morgan): **a)** $\overline{(x+y)} = \bar{x}.\bar{y}$ **b)** $\overline{(x.y)} = \bar{x} + \bar{y}$

Teorem 6 (Yutma): **a)** x+x.y=x **b)** x.(x+y)=x

Teorem 7: **a)** x+$\bar{x}$.y=x+y **b)** x.($\bar{x}$+y)=xy

Teorem 8: **a)** xy+x$\bar{y}$=x **b)** (x+y).(x+$\bar{y}$)=x

Teorem 9 (Consensus Teoremi): **a)** xy+$\bar{x}z + yz$=xy+$\bar{x}z$ **b)** (x+y).($\bar{x} + z$)(y+z)=(x+y)($\bar{x} + z$)

BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Teorem 1a'nın ispatı [3]: **Teorem 1:** **a)** x+x=x

$x + x = (x+x).1$	aksiyom 2b	x.1 = 1.x=x
$= (x+x).(x+\bar{x})$	" 5a	**a)** $\boldsymbol{x+\bar{x}=1}$
$= x+x.\bar{x}$	" 4b	x+(y.z) =(x+y).(x+z)
$= x+0$	" 5b	**b)** $\boldsymbol{x.\bar{x}=0}$
$= x$	" 2a	x+0 = 0+x=x

Teorem 2a'nın ispatı [3]: **Teorem 2:** **a)** x+1=1

$x + 1 = 1.(x+1)$	aksiyom 2b	
$= (x+\bar{x}).(x+1)$	" 5a	
$= x+\bar{x}.1$	" 4b	
$= x+\bar{x}$	" 2b	x.1 = 1.x=x
$= 1$	" 5a	

BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Teorem 7a'nın ispatı:

Teorem 7: a) $x+\bar{x}.y=x+y$

$x+\bar{x}.y = (x+\bar{x}).(x+y)$	aksiyom 4b	$x+(y.z) = (x+y).(x+z)$
$= 1.(x+y)$	" 5a	
$= x+y$	" 2b	

Teorem 6a'nın ispatı:

Teorem 6 (Yutma): a) $x+x.y=x$

$x + xy = x.1+xy$	aksiyom 2b	$x.1 = 1.x=x$
$= x.(1+y)$	" 4a	$x.(y+z) = x.y+x.z$
$= x.1$	" 2a	
$= x$	" 2b	

BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Cebirsel ifadeler üzerinden Boole fonksiyonlarının basitleştirilmesi

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y} + xyz + \bar{x}y$$

Fonksiyon basitleştirilebilir mi?

$$= \bar{x}.(\bar{y} + y) + xyz$$

$$= \bar{x}.1 + xyz$$

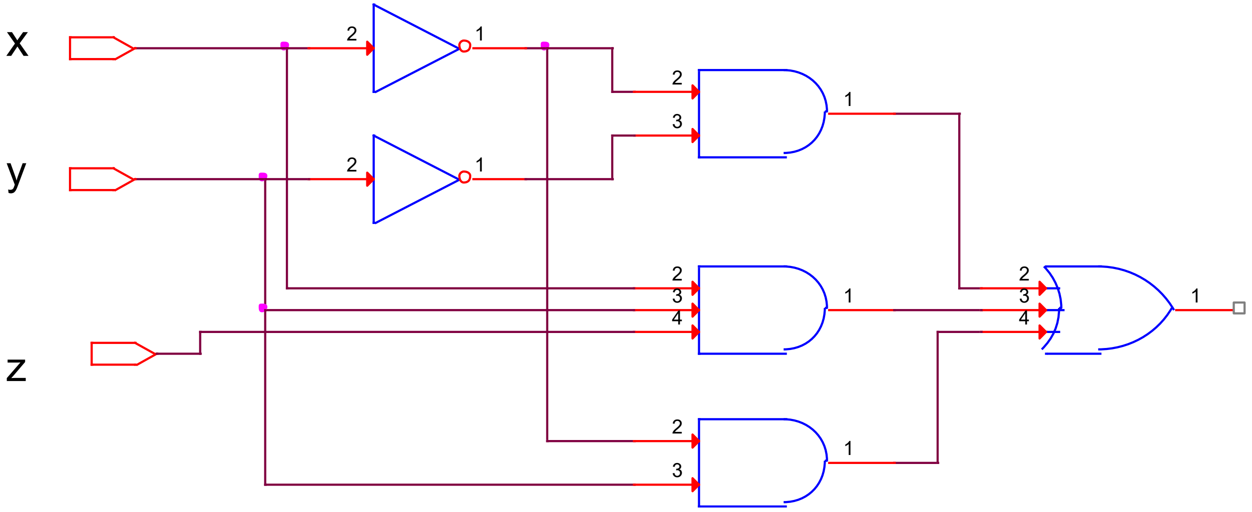
$$= \bar{x} + xyz$$

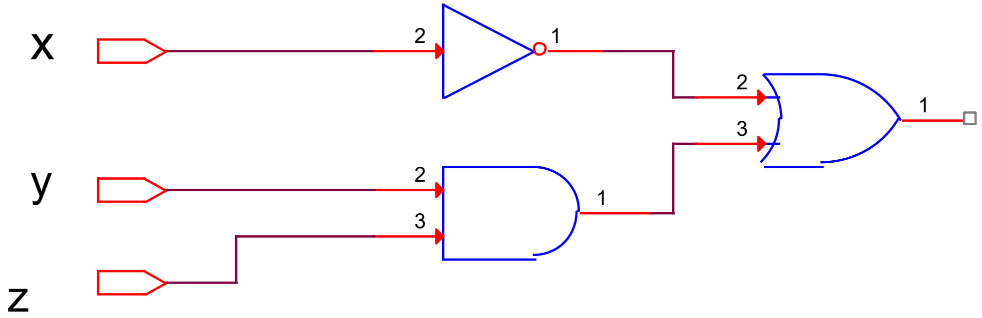
$$= (\bar{x} + x).(\bar{x} + yz)$$

$$= 1.(\bar{x} + yz)$$

$$f(x,y,z) = \bar{x} + yz$$

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y} + xyz + \bar{x}y$$





BOOLE CEBRİNİN AKSİYOMATİK TANIMI

Cebirsel ifadeler üzerinden Boole fonksiyonlarının basitleştirilmesi

$f(x, y, z) = (x + y).z + \bar{x}$ Fonksiyon basitleştirilebilir mi?

REFERANSLAR:

1. 'Lojik Devreler', Tuncay UZUN Ders Notları, http://tuncayuzun.com/Dersnot_LDT.htm, 2020.
2. 'Lojik Devre Tasarımı', Taner ASLAN ve Rifat ÇÖLKESEN, Papatya Yayıncılık, 2013.
3. M. Morris Mano, Sayısal Tasarım (Çeviri), Literatür Yayıncılık: İstanbul, 2003.