EHM2141 LOJİK DEVRELER

2024-2025 BAHAR DÖNEMİ

HAFTA 3 – DERS 2

6 Mart 2025

Dr. Sibel ÇİMEN

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Boole Fonksiyonları ve Standart Biçimleri

Boole cebrinin VE, VEYA ve DEĞİL işlemleri uygulanarak elde edilen n-değişkenli bir f fonksiyonuna **Boole fonksiyonu** denir.

Boole fonksiyonlarını oluşturan her bir terimde, değişkenlerin tamamının kendisi veya tümleyeninin olması gereken şekline fonksiyonun **kanonik biçimi** denir.

Boole fonksiyonlarının, **minimum terimler (minterimler-minterms) kanonik biçimi** ve **maksimum terimler (maksterimler-maxterms) kanonik biçimi** olmak üzere iki temel biçimi vardır. Bu biçimler doğruluk tablosundan doğrudan elde edilebilen ifadelerdir. Bu fonksiyon yazılış şekillleri Boole fonksiyonunun indirgenmiş (minimal) halleri değildir.

İki değişkenli Boole Fonksiyonu için Minimum ve Maksimum terimler

a	b	*Minterm*	*sembolik*	*Maksterm*	*sembolik*
0	0	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	m_0	$a + b$	M_0
0	1	$\bar{a} \cdot b$	m_1	$a + \bar{b}$	M_1
1	0	$a \cdot \bar{b}$	m_2	$\bar{a} + b$	M_2
1	1	$a \cdot b$	m_3	$\bar{a} + \bar{b}$	M_3

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Minimum terimlerin kanonik biçimi

Minterimlerin toplamından oluşan ifadeye Minimum terimlerin kanonik biçimi adı verilir. Bu ifadede yer alan ifadeler çarpımlardan oluştuğu için bu biçime Çarpımların Toplamı (Sum-of-Products) kanonik biçimi adı da verilir.

a	b	c	Minterm	sembolik
0	0	0	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$	m_0
0	0	1	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$	m_1
0	1	0	$\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$	m_2
0	1	1	$\bar{a}\cdot b\cdot c$	m_3
1	0	0	$a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$	m_4
1	0	1	$a\cdot\bar{b}\cdot c$	m_5
1	1	0	$a\cdot b\cdot\bar{c}$	m_6
1	1	1	$a\cdot b\cdot c$	m_7

Örnek: Aşağıda doğruluk tablosu verilmiş üç değişkenli Boole fonksiyonunu, çarpımlar toplamı kanonik biçiminde olacak şekilde yazınız?

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.y.z + x.y.z$$

$$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_7$$

$$f(x,y,z) = \sum m(0,1,2,3,7)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Minimum terimlerin kanonik biçimi

a	*b*	*c*	*d*	*F(a,b,c,d)*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Örnek: Yanda doğruluk tablosu verilmiş dört değişkenli Boole fonksiyonunu, çarpımlar toplamı kanonik biçiminde olacak şekilde yazınız?

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.\bar{d}$$

$$f(x,y,z) = m_1 + m_2 + m_3 + m_8 + m_9 + m_{12} + m_{14}$$

$$f(x,y,z) = \sum m(1,2,3,8,9,12,14)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Maksimum terimlerin kanonik biçimi

Maksterimlerin çarpımından oluşan ifadeye Maksimum terimlerin kanonik biçimi adı verilir. Bu ifadede yer alan ifadeler toplamlardan oluştuğu için bu biçime Toplamların Çarpımı (Product-of-Sums) kanonik biçimi adı da verilir.

Üç değişkenli Boole Fonksiyonu için Minimum ve Maksimum terimler

a	*b*	*c*	*Minterm*	*sembolik*	*Maksterm*	*sembolik*
0	0	0	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	m_0	$a + b + c$	M_0
0	0	1	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	m_1	$a + b + \bar{c}$	M_1
0	1	0	$\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$	m_2	$a + \bar{b} + c$	M_2
0	1	1	$\bar{a} \cdot b \cdot c$	m_3	$a + \bar{b} + \bar{c}$	M_3
1	0	0	$a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$	m_4	$\bar{a} + b + c$	M_4
1	0	1	$a \cdot \bar{b} \cdot c$	m_5	$\bar{a} + b + \bar{c}$	M_5
1	1	0	$a \cdot b \cdot \bar{c}$	m_6	$\bar{a} + \bar{b} + c$	M_6
1	1	1	$a \cdot b \cdot c$	m_7	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	M_7

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Maksimum terimlerin kanonik biçimi

Örnek: Aşağıda doğruluk tablosu verilmiş üç değişkenli Boole fonksiyonunu, çarpımlar toplamı kanonik biçiminde olacak şekilde yazınız?

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x,y,z) = (\bar{x} + y + z).(\bar{x} + y + \bar{z}).(\bar{x} + \bar{y} + z)$$

$$f(x,y,z) = M_4.M_5.M_6$$

$$f(x,y,z) = \prod M(4,5,6)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Örnek:

a	b	c	f(a,b,c)	Minterm	Maksterm
0	0	0	1	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$	-
0	0	1	1	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c$	-
0	1	0	0	-	$a+\overline{b}+c$
0	1	1	0	-	$a+\overline{b}+\overline{c}$
1	0	0	1	$a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$	-
1	0	1	1	$a\cdot\overline{b}\cdot c$	-
1	1	0	0	-	$\overline{a}+\overline{b}+c$
1	1	1	0	-	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$

$$f(a,b,c) = \sum m(0,1,4,5)$$

$$f(a,b,c) = \prod M(2,3,6,7)$$

minimum terimler

$$f(a,b,c) = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + a\cdot\overline{b}\cdot c$$

maksimum terimler

$$f(a,b,c) = (a+\overline{b}+c)\cdot(a+\overline{b}+\overline{c})\cdot(\overline{a}+\overline{b}+c)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Örnek:

Bu örnekte, $f(a,b,c) = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$ şeklinde verilen fonksiyonun Minimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla "Shannon teoremi" yazılarak,

$$f(a,b,c) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot f(0,0,0) + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot f(0,0,1) + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot f(0,1,0) + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot f(0,1,1)$$
$$+ a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot f(1,0,0) + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot f(1,0,1) + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot f(1,1,0) + a \cdot b \cdot c \cdot f(1,1,1)$$

fonksiyonu göz önüne alınır. Bu fonksiyondaki her bir f değeri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$f(0,0,0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0+0 = 0$$
$$f(0,0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0+1 = 1$$
$$f(0,1,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0+0 = 0$$
$$f(0,1,1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0+1 = 1$$
$$f(1,0,0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0+0 = 0$$
$$f(1,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0+0 = 0$$
$$f(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1+0 = 1$$
$$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1+0 = 1$$

$f(a,b,c)$ fonksiyonunda, değeri "1" olan f değerleri olan alınır ve bu terimlerin toplamı Minimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$f(a,b,c) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = \sum(1,3,6,7)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Örnek:

Bu örnekte, $f(a,b,c) = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$ şeklinde verilen fonksiyonun Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla "Shannon teoremi" yazılarak,

$$f(a,b,c) = [a+b+c+f(0,0,0)] \cdot [a+b+\overline{c}+f(0,0,1)] \cdot [a+\overline{b}+c+f(0,1,0)]$$
$$\cdot [a+\overline{b}+\overline{c}+f(0,1,1)] \cdot [\overline{a}+b+c+f(1,0,0)] \cdot [\overline{a}+b+\overline{c}+f(1,0,1)]$$
$$\cdot [\overline{a}+\overline{b}+c+f(1,1,0)] \cdot [\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+f(1,1,1)]$$

fonksiyonu göz önüne alınır. Bu fonksiyondaki her bir f değeri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$f(0,0,0) = 0\cdot0 + 1\cdot0 = 0+0 = 0$$
$$f(0,0,1) = 0\cdot0 + 1\cdot1 = 0+1 = 1$$
$$f(0,1,0) = 0\cdot1 + 1\cdot0 = 0+0 = 0$$
$$f(0,1,1) = 0\cdot1 + 1\cdot1 = 0+1 = 1$$
$$f(1,0,0) = 1\cdot0 + 0\cdot0 = 0+0 = 0$$
$$f(1,0,1) = 1\cdot0 + 0\cdot1 = 0+0 = 0$$
$$f(1,1,0) = 1\cdot1 + 0\cdot0 = 1+0 = 1$$
$$f(1,1,1) = 1\cdot1 + 0\cdot1 = 1+0 = 1$$

$f(a,b,c)$ fonksiyonunda, değeri "0" olan f değerleri olan alınır ve bu terimlerin çarpımı Maksimum Terimler Kanonik Biçimini oluşturur.

$$f(a,b,c) = [a+b+c] \cdot [a+\overline{b}+c] \cdot [\overline{a}+b+c] \cdot [\overline{a}+b+\overline{c}]$$
$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 = \prod(0,2,4,5)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Kanonik Biçimler Arasındaki Dönüşüm

Çarpımlar toplamı kanonik biçimi ve toplamlar çarpımı kanonik biçimi deMorgan teoremi kullanılarak birbirine dönüştürülebilir. Örneğin;

$$f(x,y,z) = \sum m(0,1,2,3,7)$$

$$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_7$$

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.y.z + x.y.z$$

$$\overline{\overline{f(x,y,z)}} = \overline{\overline{(\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) + (\bar{x}.\bar{y}.z) + (\bar{x}.y.\bar{z}) + (\bar{x}.y.z) + (x.y.z)}}$$

$$\overline{\overline{f(x,y,z)}} = \overline{(x+y+z).(x+y+\bar{z}).(x+\bar{y}+z).(x+\bar{y}+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})}$$

$$\overline{\overline{f(x,y,z)}} = \overline{M_0.M_1.M_2.M_3.M_7}$$

$$f(x,y,z) = M_4.M_5.M_6$$

$$f(x,y,z) = \prod M(4,5,6)$$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Minimum Terimler ile Maksimum Terimler arasındaki dönüşüm, $\overline{m_i} = M_i$ şeklinde gösterilebilir.

Kanonik Biçimler Arasındaki Dönüşüm

Bu örnekte, $f(a,b,c)=\sum(1,3,5,7)$ şeklinde Minimum Terimler Kanonik Biçimi verilen fonksiyonun Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilecektir. Bu amaçla öncelikle terimlerin tümleyeni olan fonksiyonu yazılır.

$$\overline{f(a,b,c)}=\sum(0,2,4,6)=m_0+m_2+m_4+m_6$$

Bu ifade, De Morgan Kuralı kullanılarak farklı bir şekilde yazılabilir.

$$f=\overline{(m_0+m_2+m_4+m_6)}=\overline{m_0}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_6}$$

Minimum terimlerin tümleyeni yerine Maksimum Terimler yazılır.

$$f=\overline{m_0}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_6}=M_0\cdot M_2\cdot M_4\cdot M_6=\prod(0,2,4,6)$$

Bu şekilde Maksimum Terimler Kanonik Biçimi elde edilir.

REFERANSLAR:

1. ‘Lojik Devreler’, Tuncay UZUN Ders Notları, http://tuncayuzun.com/Dersnot_LDT.htm, 2020.
2. ‘Lojik Devre Tasarımı’, Taner ASLAN ve Rifat ÇÖLKESEN, Papatya Yayıncılık, 2013.
3. M. Morris Mano, Sayısal Tasarım (Çeviri), Literatür Yayıncılık: İstanbul, 2003.