Elektrik Devre Temelleri

2024-2025 Bahar Dönemi

Hafta 14

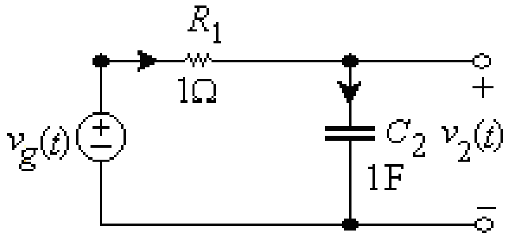
23 Mayıs 2025

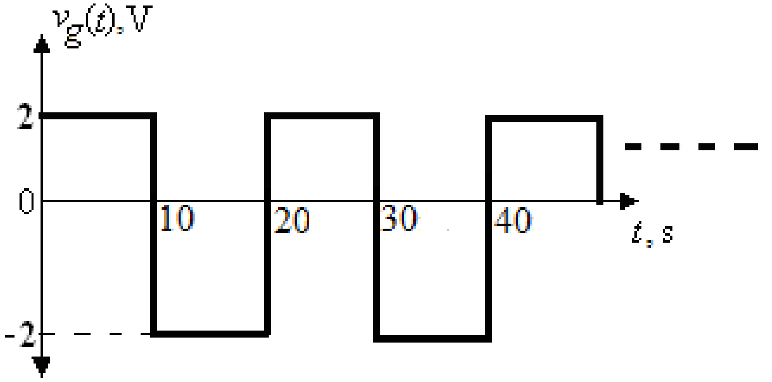
Sibel ÇİMEN

Umut Engin AYTEN

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

Yanda verilen *RC* devresinin girişine $v_g(t)$ gerilim kaynağı uygulanmıştır.



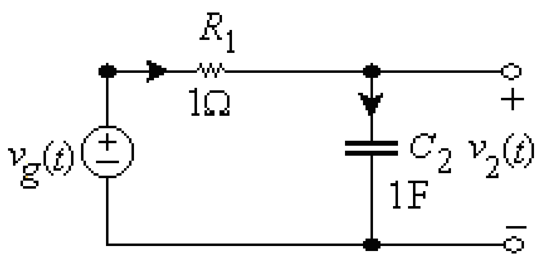


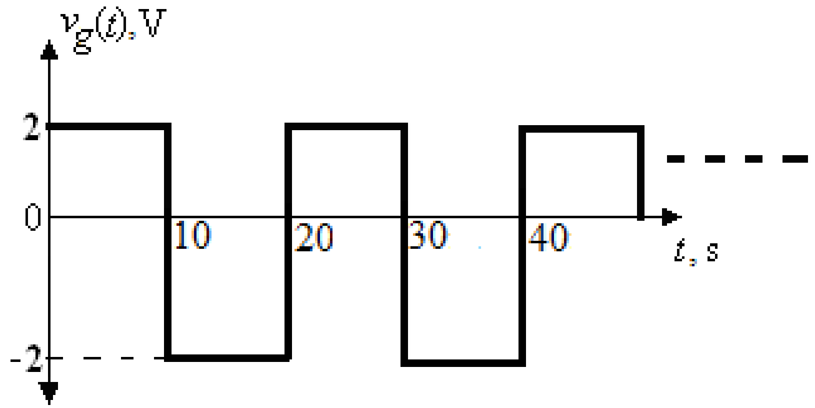
a) $v_2(t)$ gerilimine ilişkin diferansiyel denklemi, $v_g(t)$'nin her değişimi için ayrı ayrı yazınız ve her adım için $v_2(t)$ geriliminin tam çözümünü bulunuz (İki periyot için çözüm yapınız).

b) $i_1(t)$ akımının tam çözümünü bulunuz (Bir periyot için çözüm yapınız).

c) $v_g(t)$ gerilim kaynağının frekansı 10 kHz olacak şekilde işaret ayarlanırsa, $v_2(t)$ geriliminin ve $i_1(t)$ akımının değişimleri nasıl olacaktır. Açıklayınız.

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER





$$v_2(0^+) = v_2(0^-) = 0\ V$$

$$\boxed{\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_2(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_g(t)}$$

$v_2(t)$ ‘ye ilişkin diferansiyel denklem

$0 \leq v_g(t) < 10$ saniye için;

$$v_g(t) = 2V$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = 2$$

$$(s+1) = 0 \Rightarrow \boxed{s = -1}$$

$$v_{2hg}(t) = Ke^{-1.t}$$

$$v_{2ö} = A \qquad \frac{dv_{2ö}}{dt} = 0$$

$$0 + A = 2 \Rightarrow v_{2ö} = 2$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$0 \leq v_g(t) < 10$ saniye için;

$$v_g(t) = 2V$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = 2$$

Genel çözüm:

$$v_{2g}(t) = v_{2hg}(t) + v_{2ö}(t)$$

$$v_{2g}(t) = Ke^{-1.t} + 2$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$v_2(0^+) = Ke^{-1.0^+} + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = K + 2 \quad \Rightarrow \quad K = -2$$

Tam çözüm:

$$v_2(t) = -2e^{-1.t} + 2 \qquad 0 \leq t < 10\ s\ için$$

Tam çözüm:

$$v_2(t) = -2e^{-1.t} + 2 \qquad 0 \leq t < 10\ s\ için$$

$$t = 10^-\ saniye\ için:$$

$$v_2(10^-) = -2e^{-1.10^-} + 2 \cong 2\ V$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$10 \leq v_g(t) < 20$ saniye için;

$$v_g(t) = -2V$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t) = -2$$

$$v_2(10^+) = v_2(10^-) = 2\,V$$

$$v_{2hg}(t) = Ke^{-1.t}$$

$$v_{2ö} = A \qquad \frac{dv_{2ö}}{dt} = 0$$

$$0 + A = -2 \;\rightarrow\; v_{2ö} = -2$$

Genel çözüm:

$$v_{2g}(t) = v_{2hg}(t) + v_{2ö}(t)$$

$$v_{2g}(t) = Ke^{-1.t} - 2$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

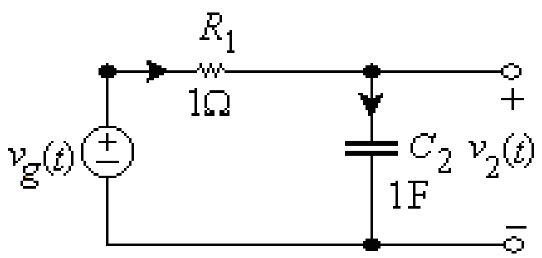
$$v_2(10^+) = Ke^{-1.(10^+)} - 2 \;\rightarrow\; 2 = Ke^{-10} - 2 \;\rightarrow\; K = 4e^{10}$$

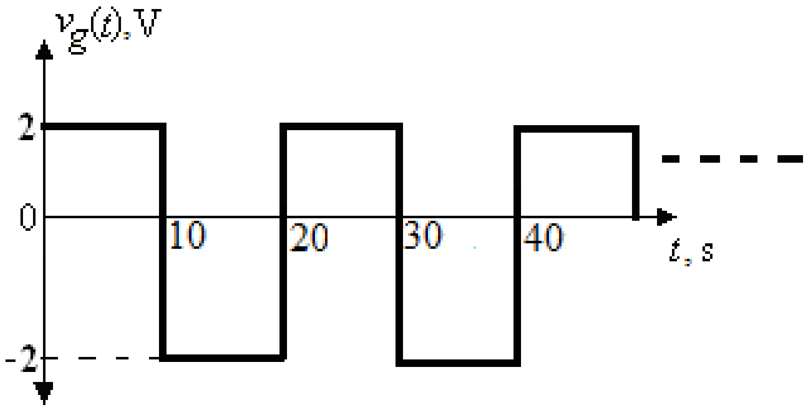
Tam çözüm:

$$v_2(t) = 4e^{10}e^{-1.t} - 2 \qquad 10 \leq t < 20\ s\ için$$

$$v_2(t) = 4e^{-1(t-10)} - 2 \qquad 10 \leq t < 20\ s\ için$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

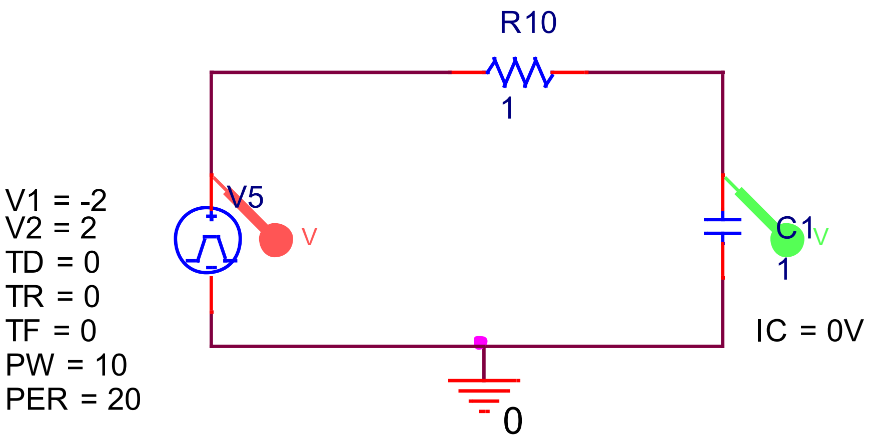


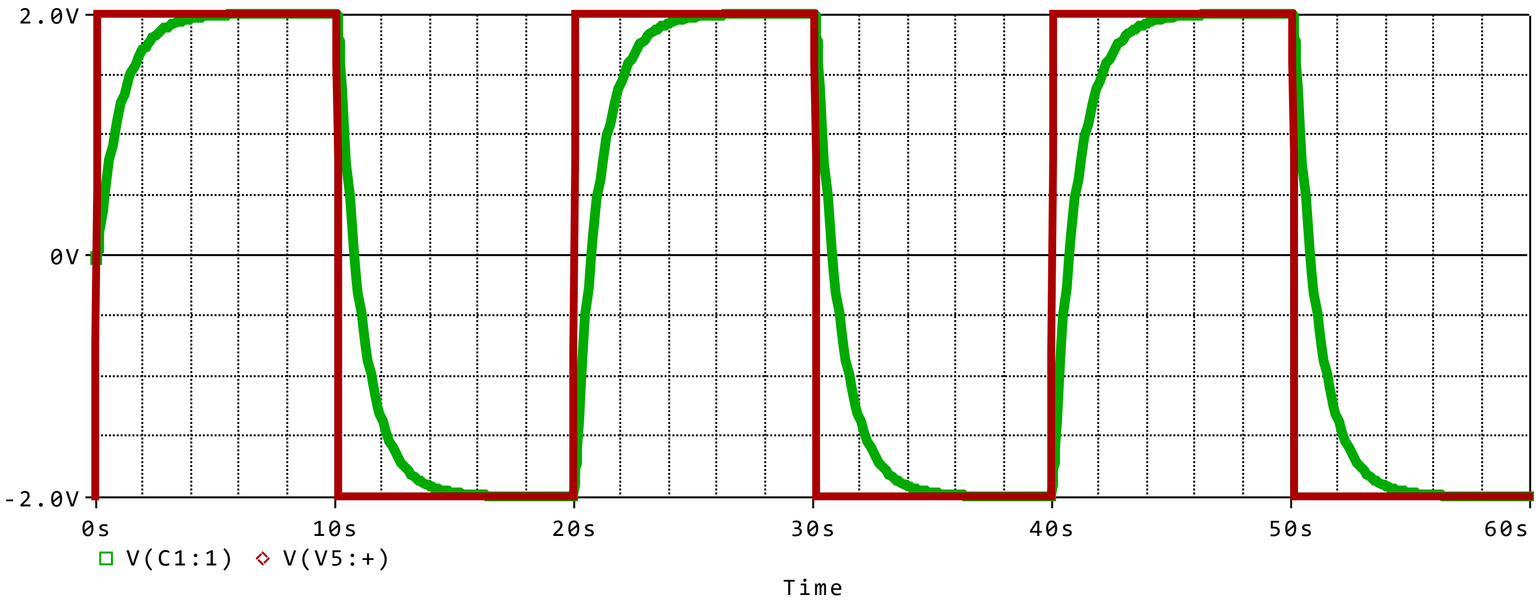


Tam çözüm:

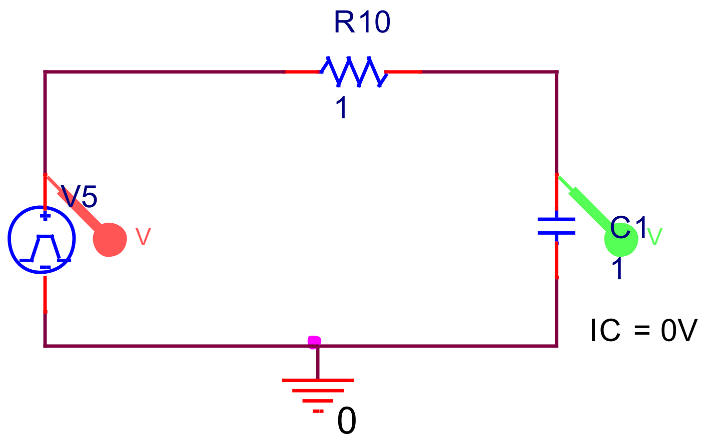
$$v_2(t) = -2e^{-1.t} + 2 \qquad 0 \leq t < 10\ s\ için$$

$$v_2(t) = 4e^{-1(t-10)} - 2 \qquad 10 \leq t < 20\ s\ için$$

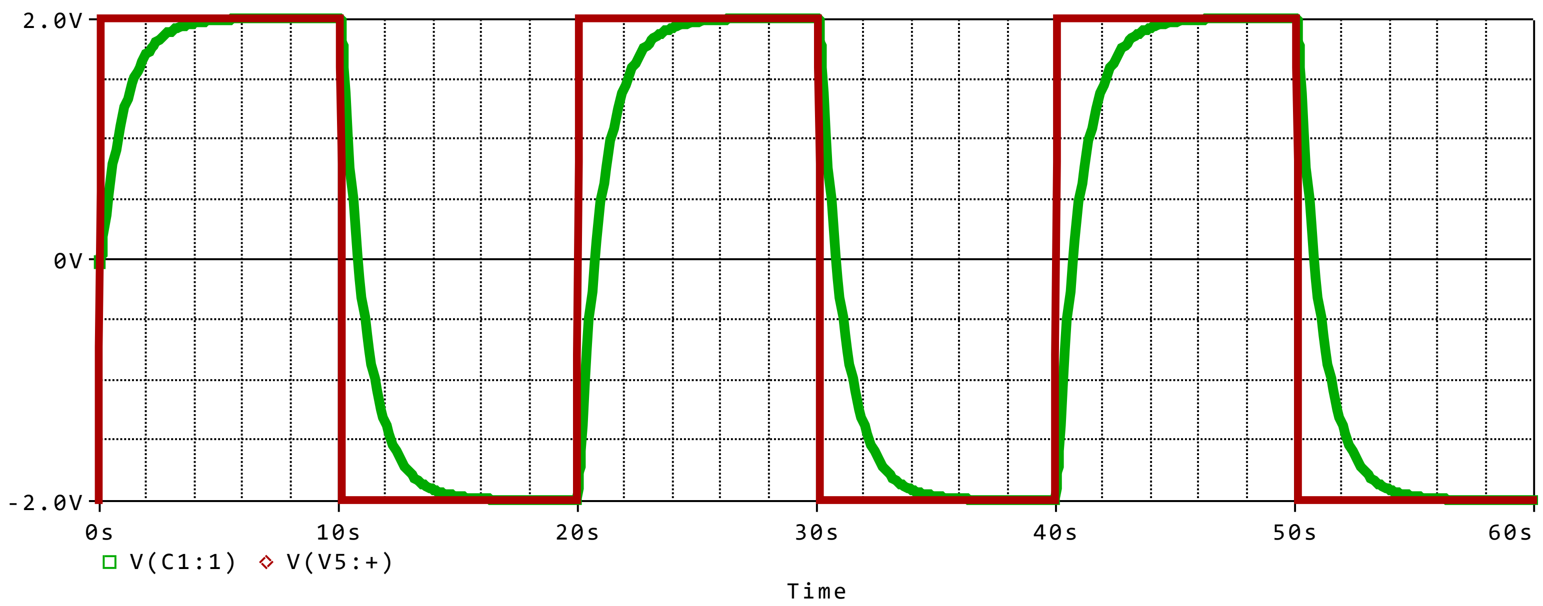




BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER



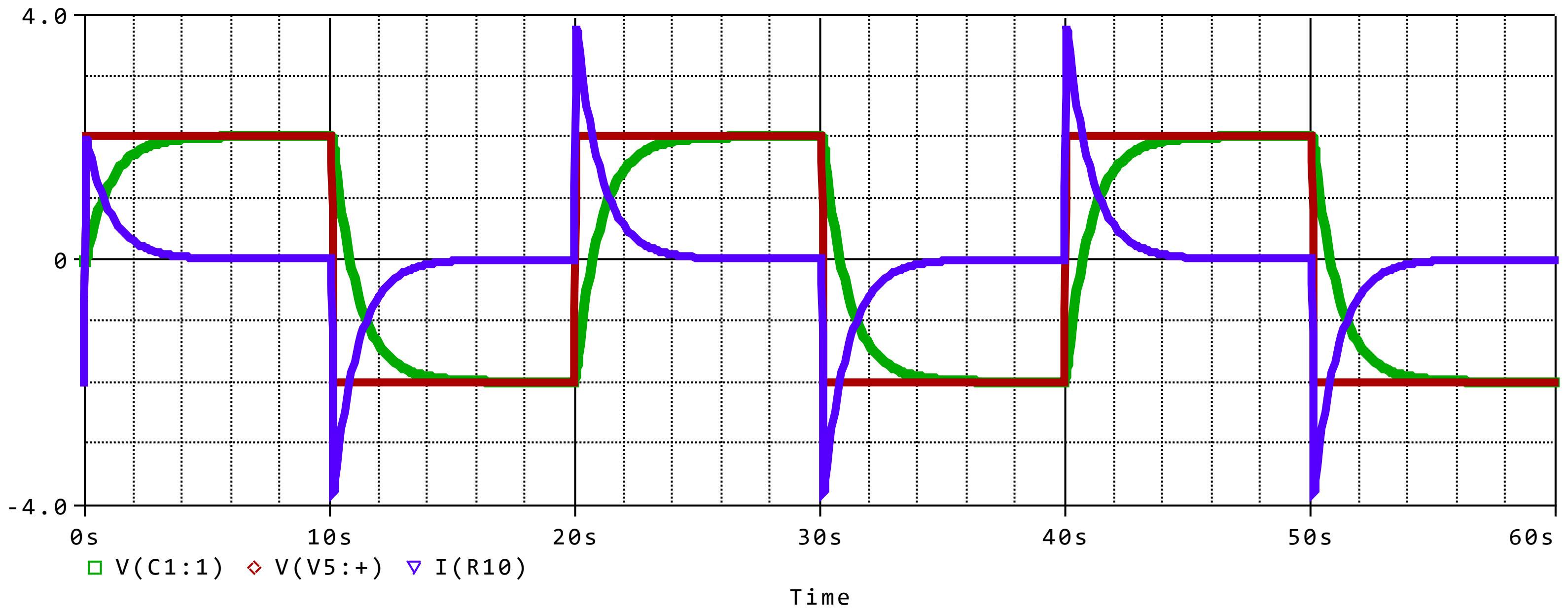
V1 = -2
V2 = 2
TD = 0
TR = 0
TF = 0
PW = 10
PER = 20



Tam çözüm:

$$v_2(t) = -2e^{-1.t} + 2$$

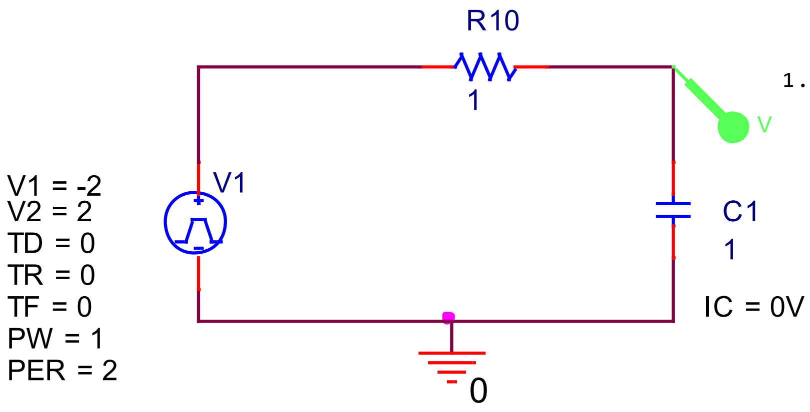
$$i_2(t) = i_1(t) = 2e^{-1.t} \qquad 0 \le t < 10\ s\ için$$

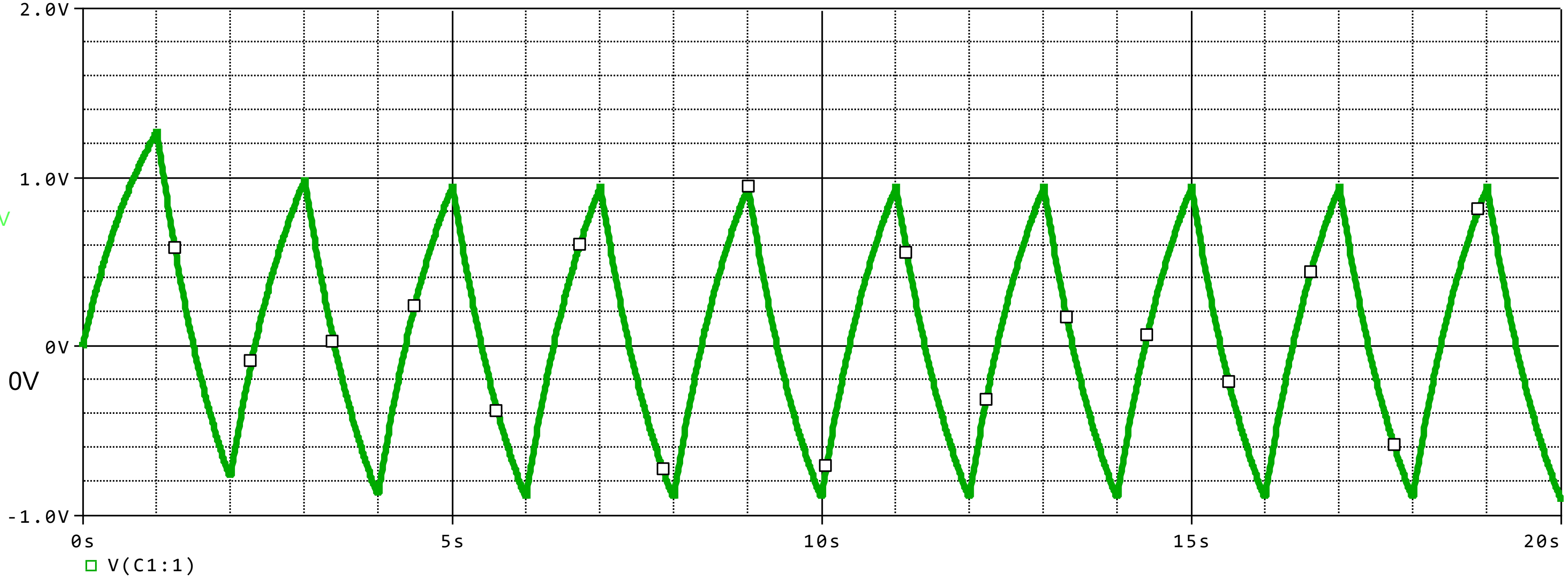


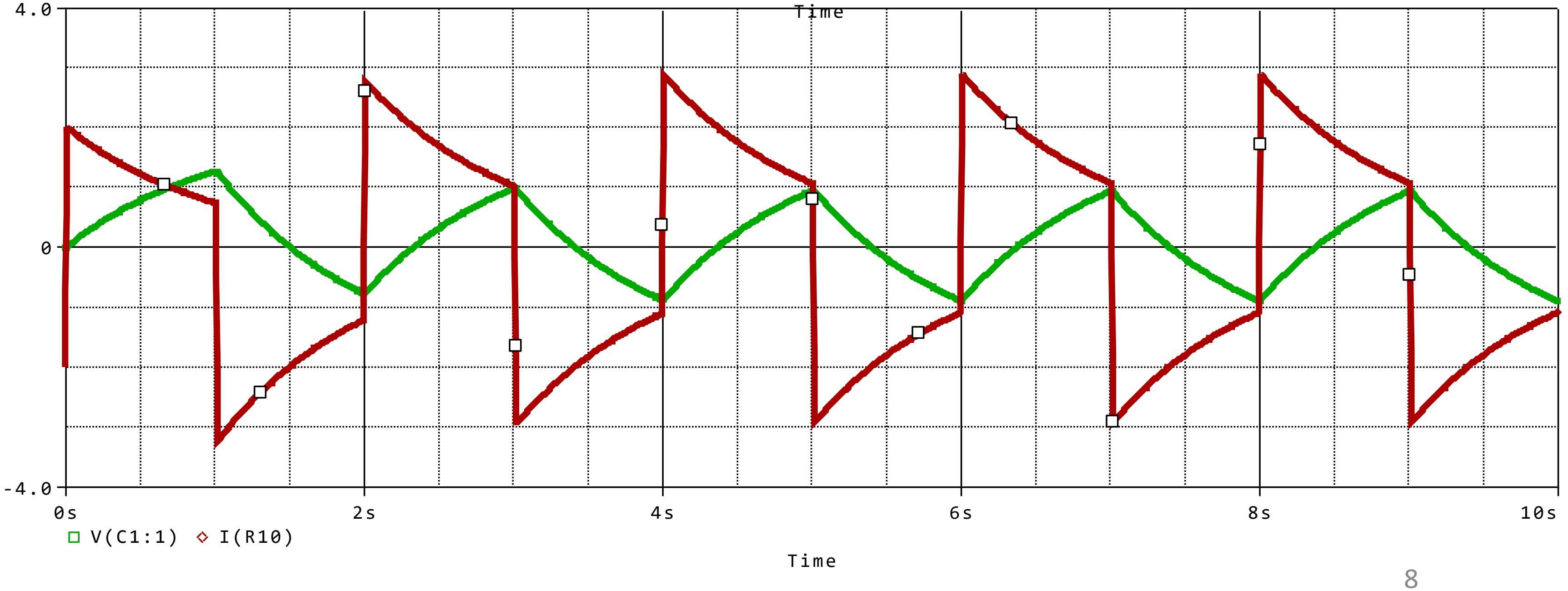
$$v_2(t) = 4e^{-1(t-10)} - 2 \qquad 10 \le t < 20\ s\ için$$

$$i_2(t) = i_1(t) = -4e^{-1(t-10)} \qquad 10 \le t < 20\ s\ için$$

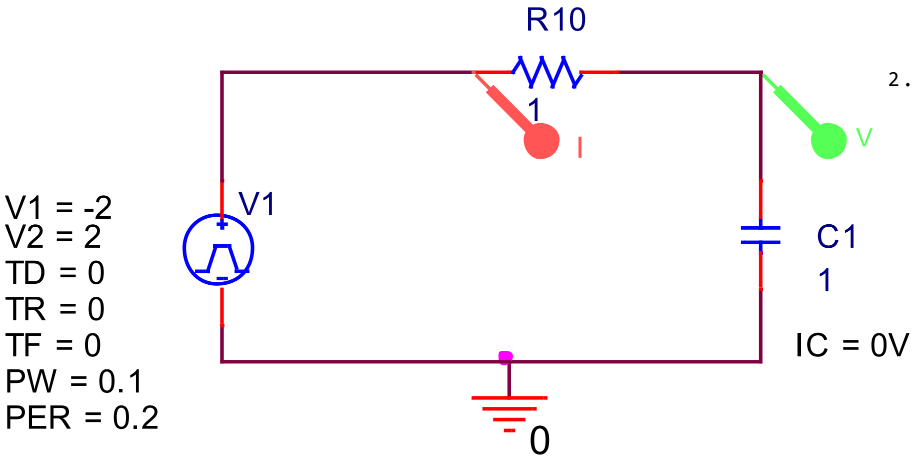
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

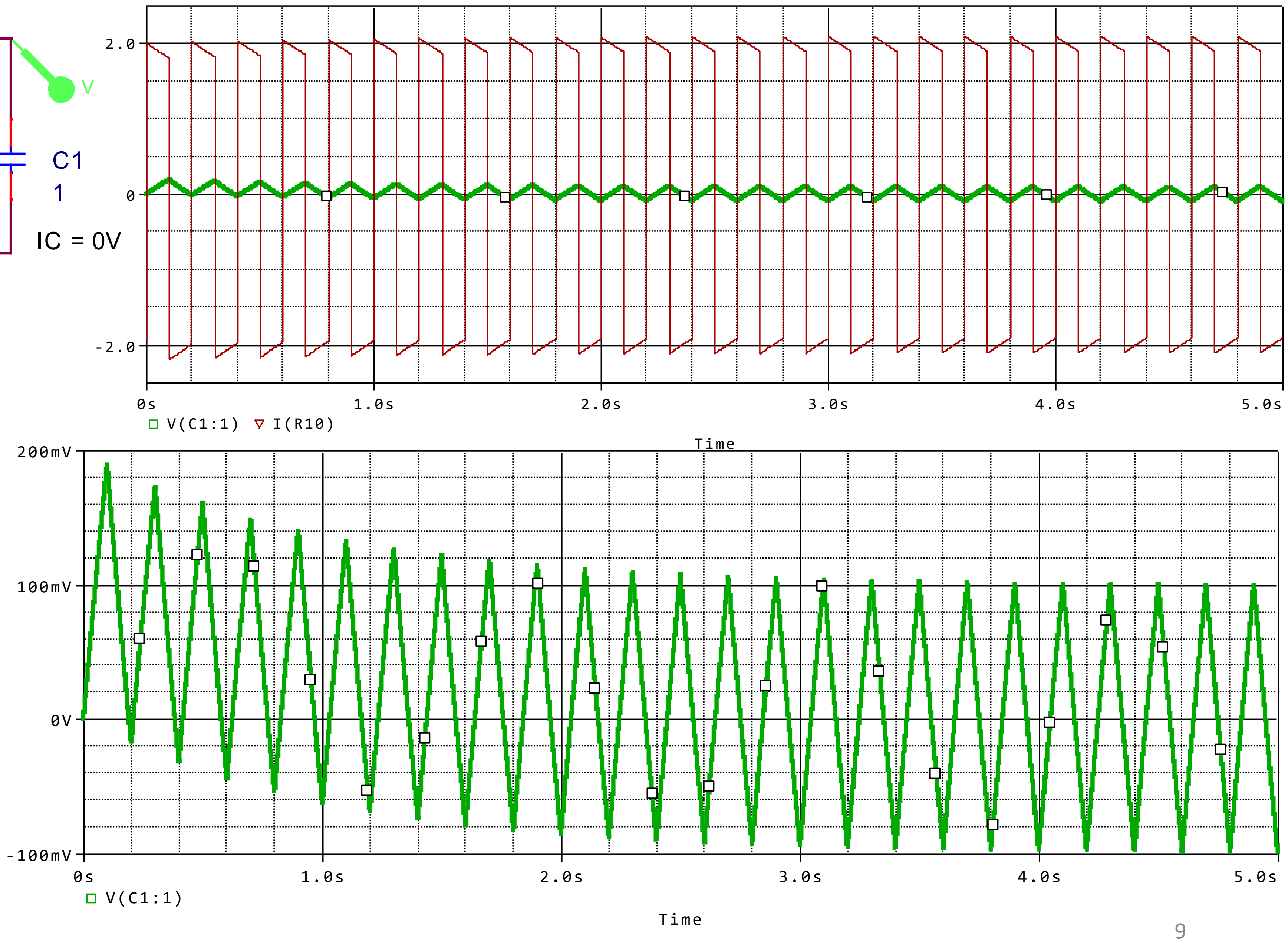






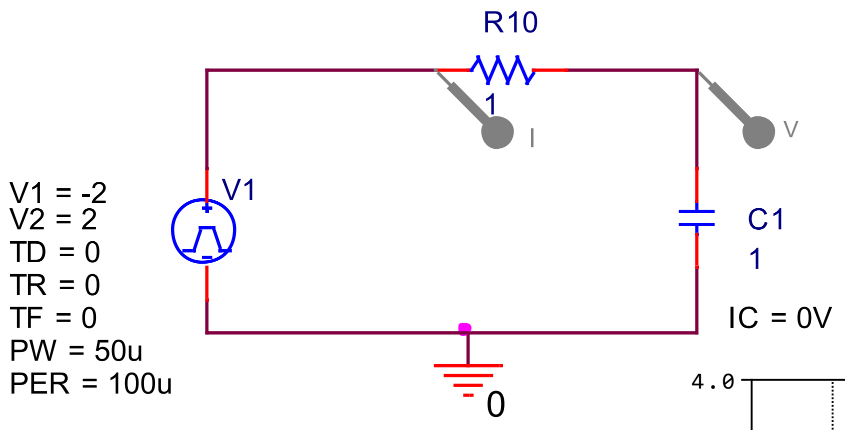
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

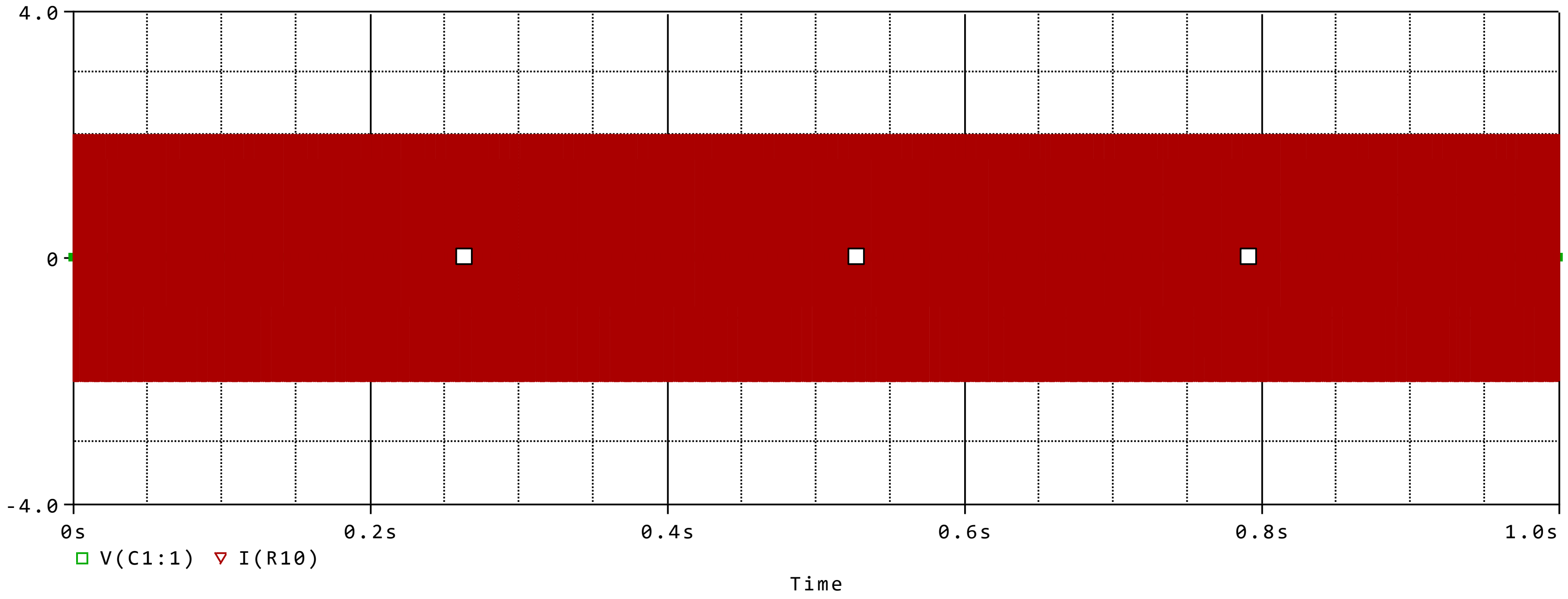




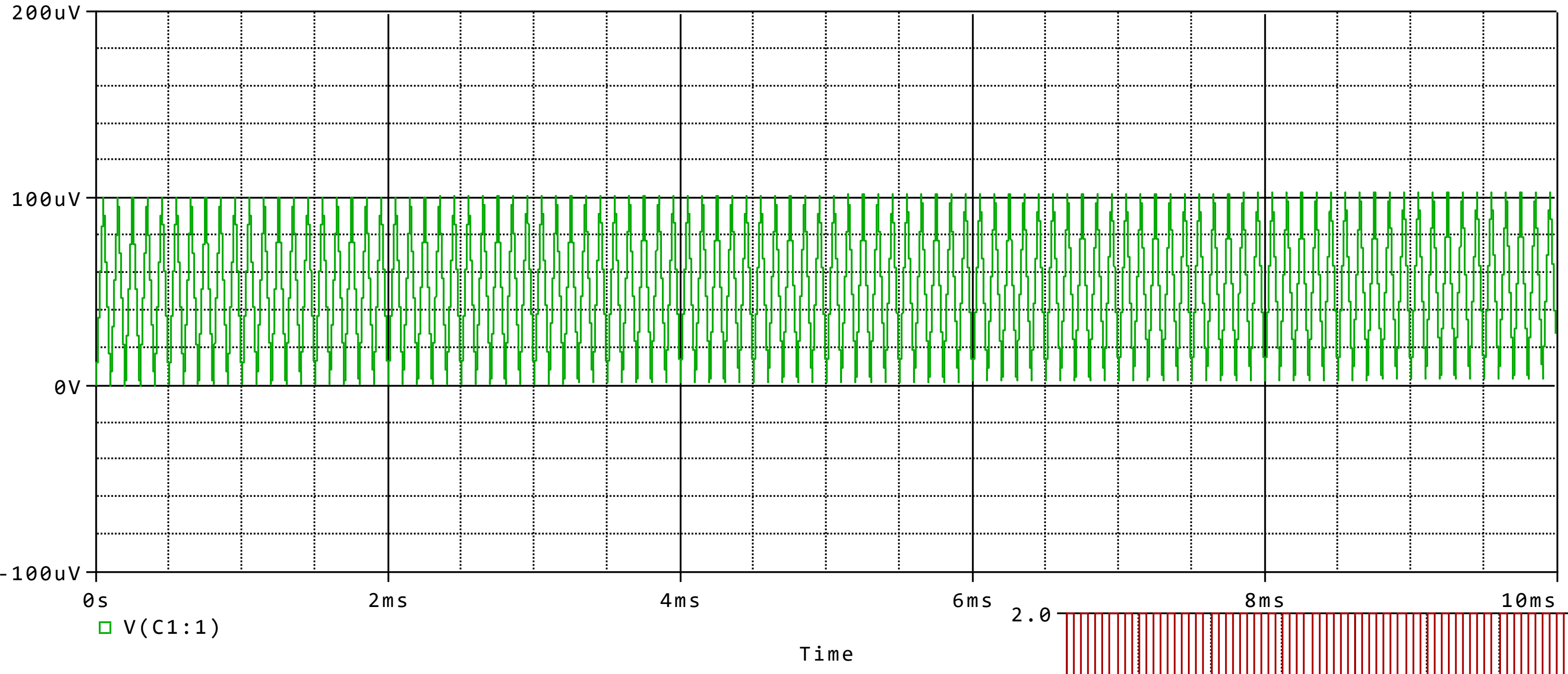
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

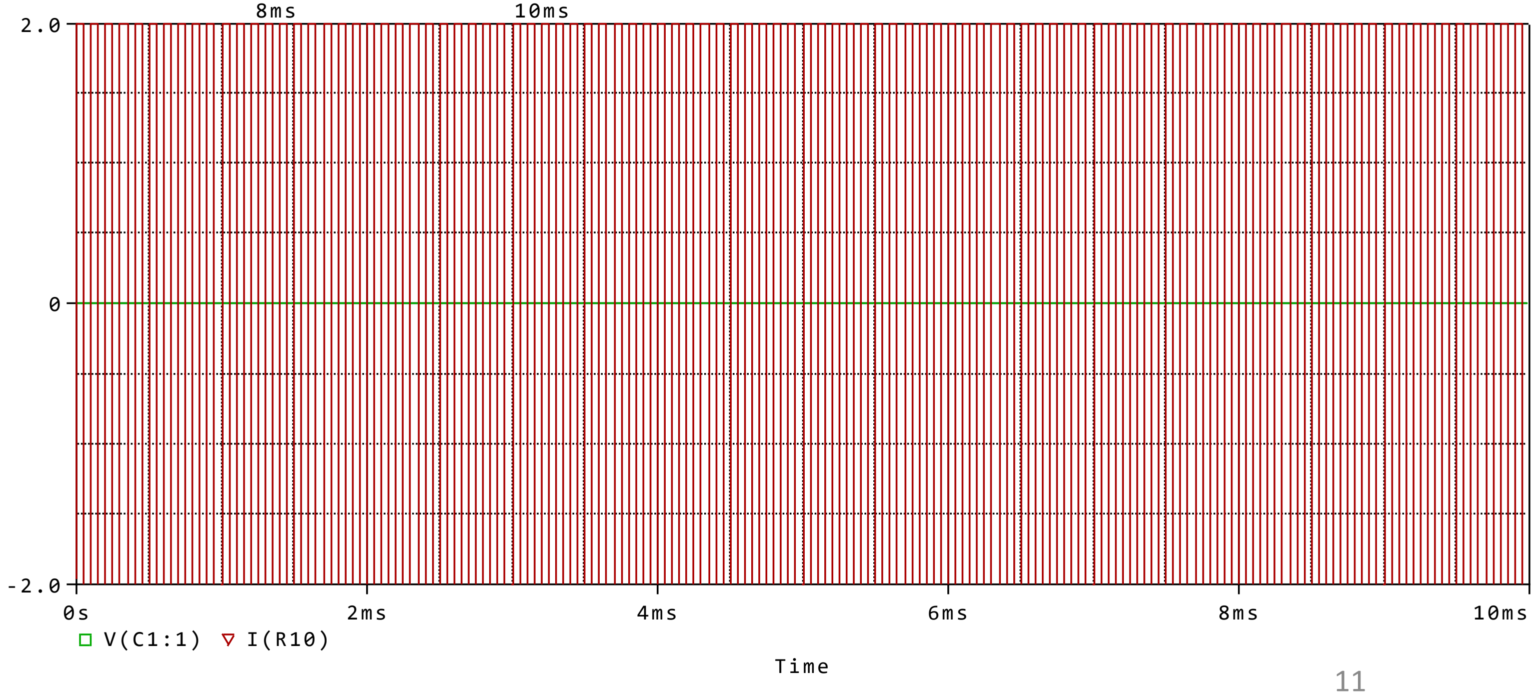
c) $v_g(t)$ gerilim kaynağının frekansı 10 kHz olacak şekilde işaret ayarlanırsa, $v_2(t)$ geriliminin ve $i_1(t)$ akımının değişimleri nasıl olacaktır. Açıklayınız.



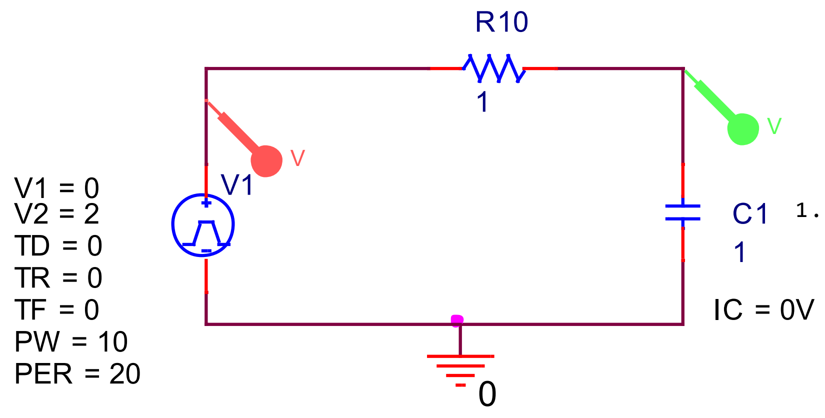


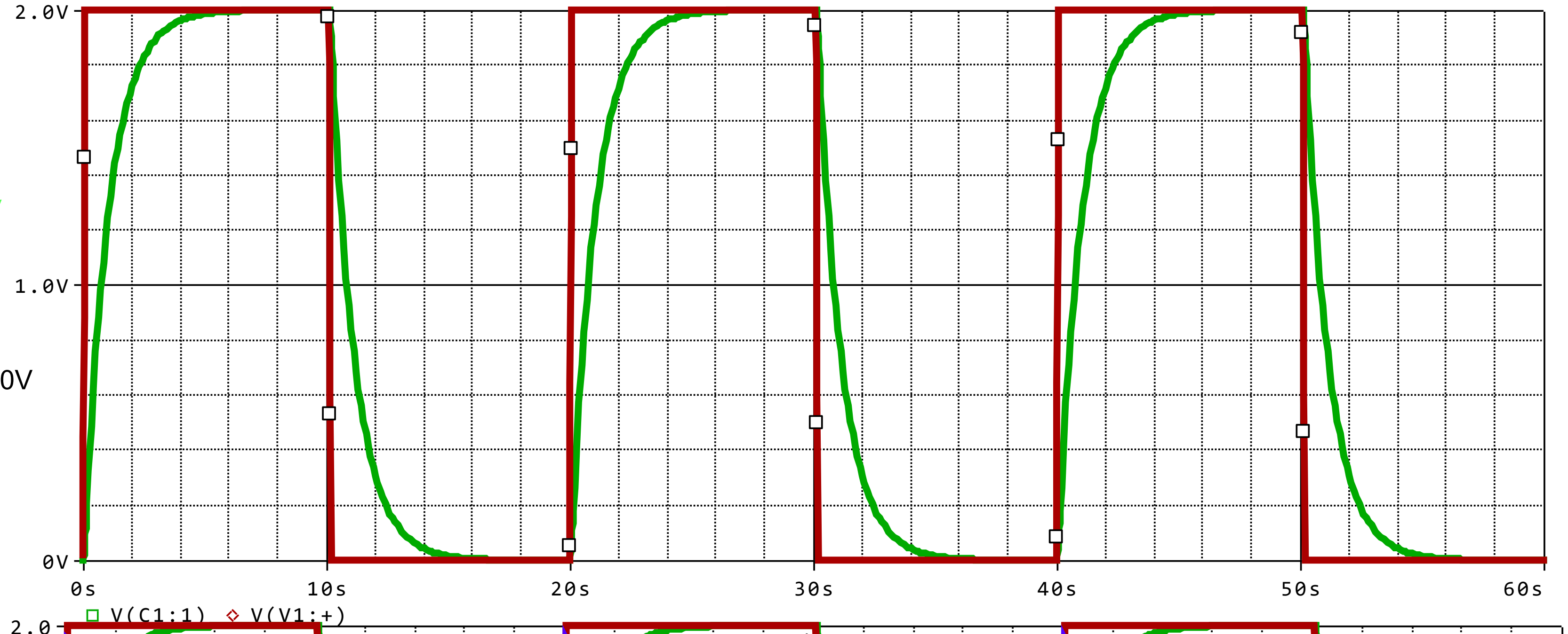
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

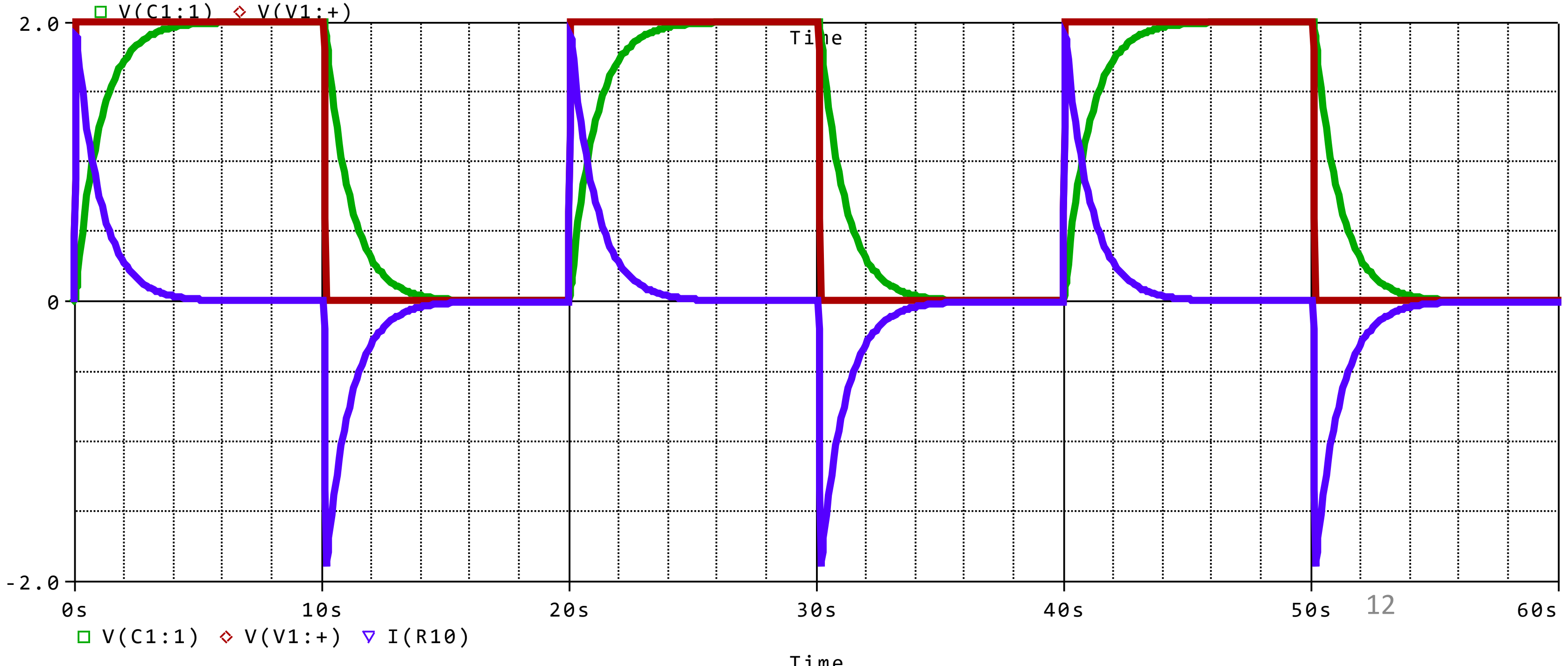




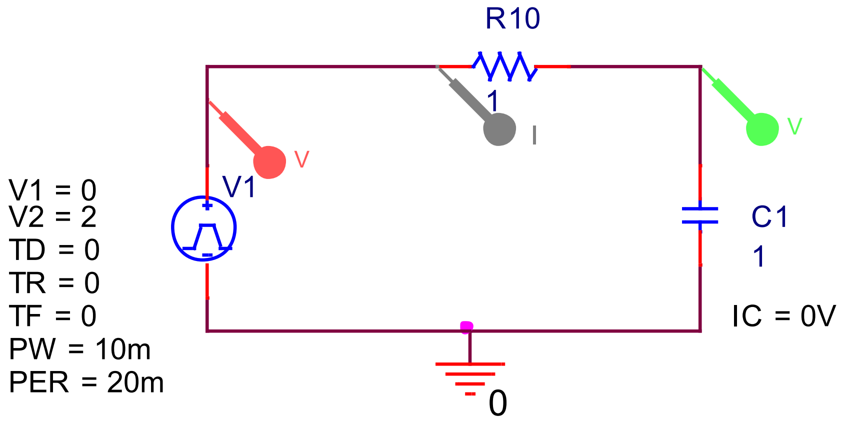
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

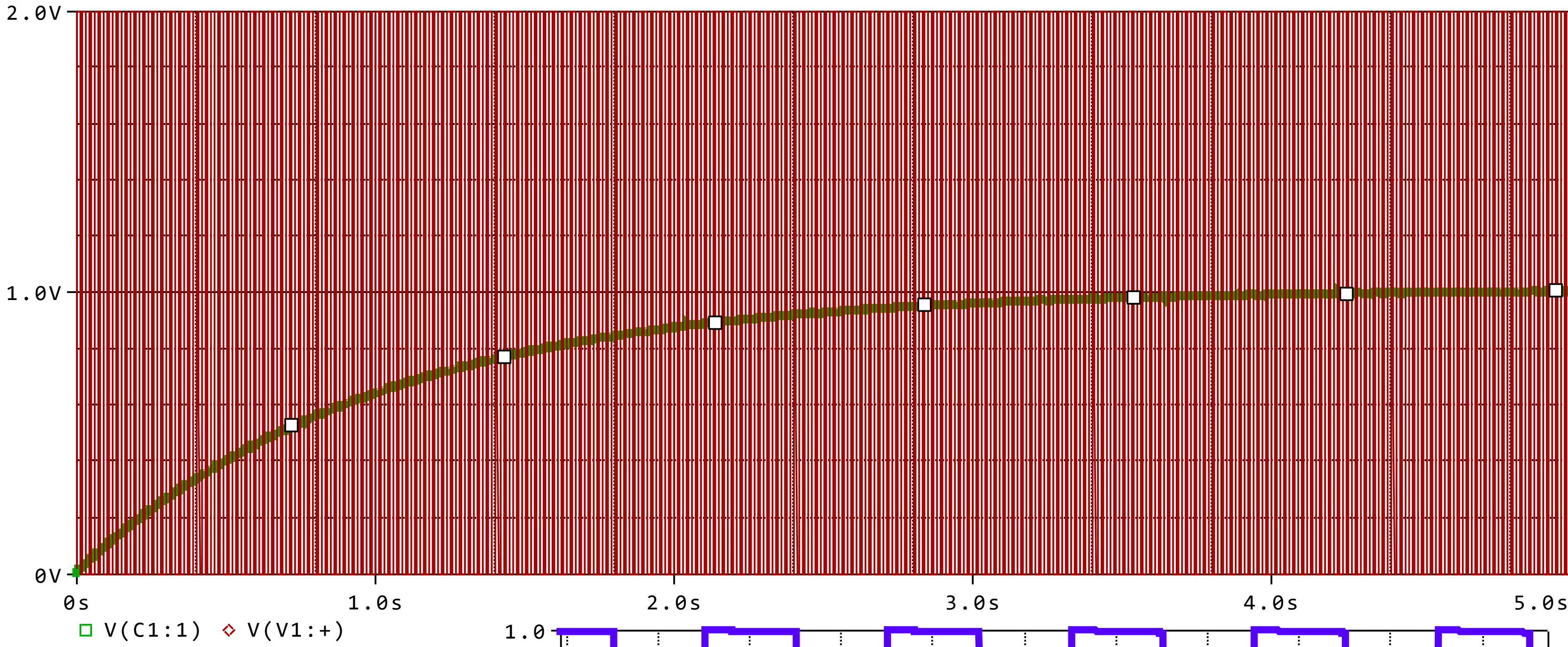


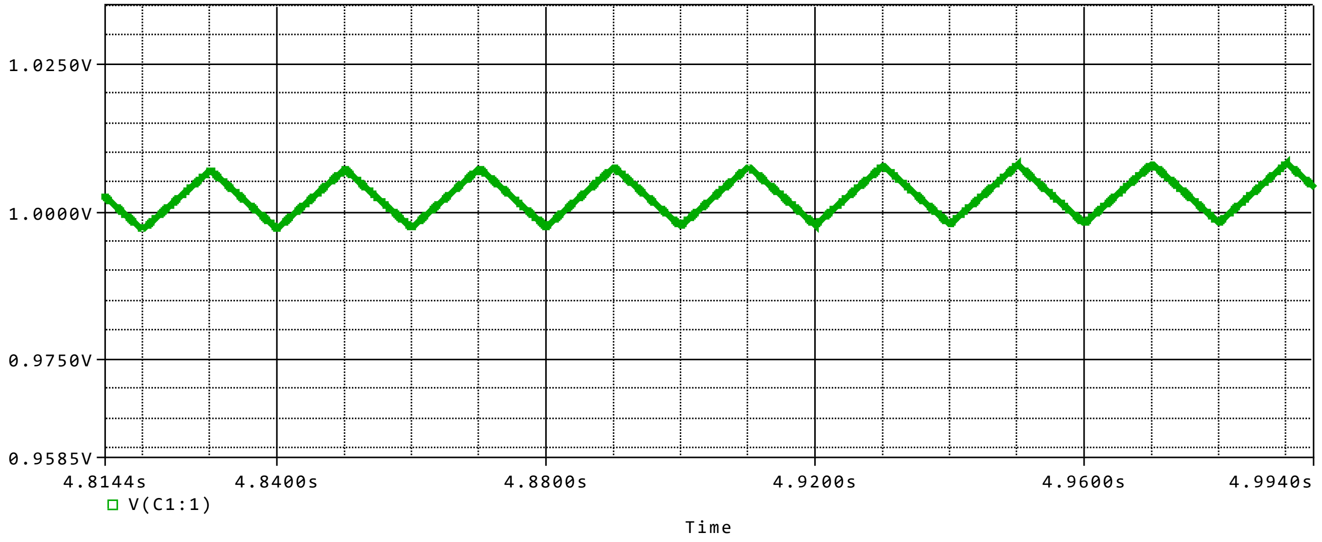


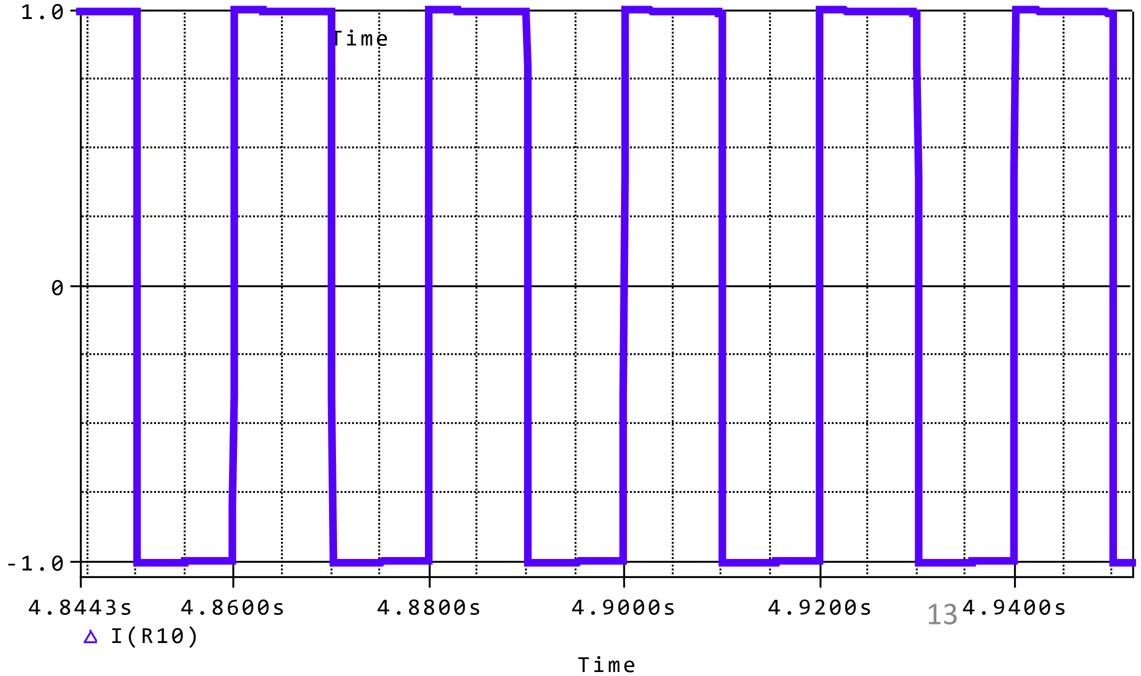


BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

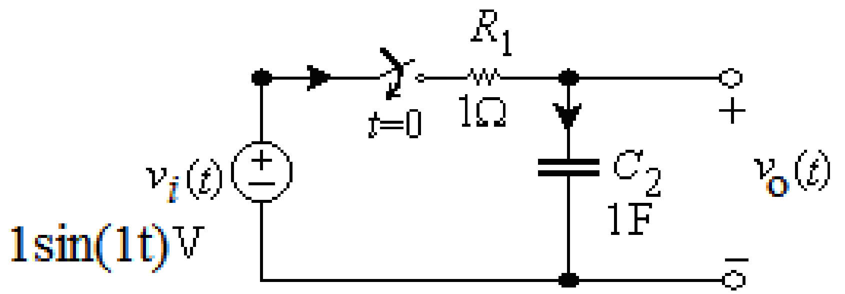








3. Yandaki devrede anahtar uzun süre açık kalmıştır ve t=0s'de kapatılmıştır. Kapasite elemanının ilk koşulu 0 V alınız. t≥0 s için $v_o(t)$ ifadesini bulunuz ve zamana bağlı olarak grafiğini çizdiriniz.



$$v_o(0^-) = v_o(\infty) = 0\ V$$

$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

$$v_o(0^+) = v_o(0^-) = 0\ V$$

Kirchoff'un akım yasasından;

$$-i_1(t) + i_2(t) = 0$$

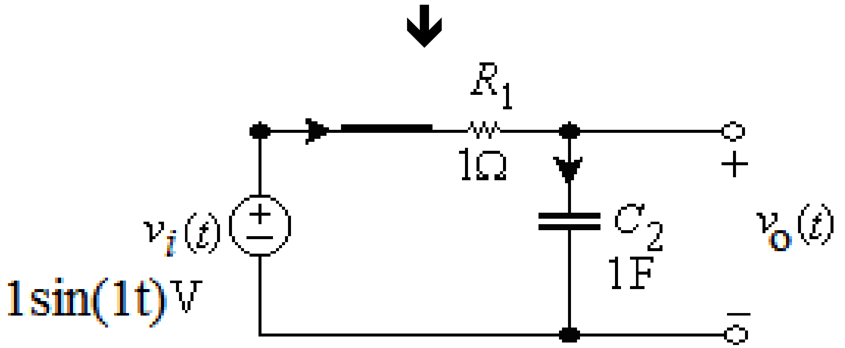
$$-\frac{v_i(t) - v_2(t)}{R_1} + C_2\frac{dv_2(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_2(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)$$

$$\boxed{\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)}$$

$v_o(t)$ 'ye ilişkin diferansiyel denklem

Anahtar açıldığı an için eşdeğer devre



BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 1\sin(1t)$$

İlk olarak homojen genel çözüm bulunur.

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 0$$

$$(s+1) = 0 \Rightarrow \boxed{s = -1}$$

$$v_{ohg}(t) = Ke^{-1.t}$$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır.

Özel çözüm bulunmalıdır.

Diferansiyel denklemin sağ tarafı **sinüsoidal bir fonksiyondur**.
<u>Bu durumda özel çözüm:</u>

$$e(t) = E_m\sin(\omega t) \Rightarrow y_ö(t) = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

veya

$$y_ö(t) = Ccos(\omega t + \theta)$$

veya

$$y_ö(t) = Dsin(\omega t + \varphi)$$

$e(t) = 1\sin(1t)$ için özel çözüm:

$$v_{oö} = Asin(1t) + Bcos(1t)$$

$$\frac{dv_{oö}}{dt} = Acos(1t) - Bsin(1t)$$

Dif. Denklemde yerine yazılır.

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 1\sin(1t)$$

$$Acos(1t) - Bsin(1t) + Asin(1t) + Bcos(1t) = 1\sin(1t)$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$Acos(1t) - Bsin(1t) + Asin(1t) + Bcos(1t) = 1\sin(1t)$$

$$cos(1t)[A + B] + sin(1t)[-B + A] = 1\sin(1t)$$

$$-B + A = 1 \qquad A + B = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{oö}(t) = \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t)$$

Genel çözüm:

$$v_{og}(t) = v_{ohg}(t) + v_{oö}(t)$$

$$v_{og}(t) = Ke^{-1.t} + \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t)$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$v_{og}(t) = Ke^{-1.t} + \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t)$$

$$v_o(0^+) = Ke^{-1.0^+} + 0 - \frac{1}{2}\cos(0) \Rightarrow 0 = K - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

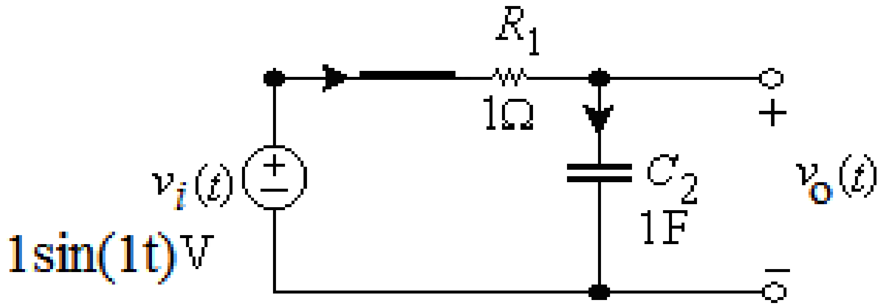
Tam çözüm:

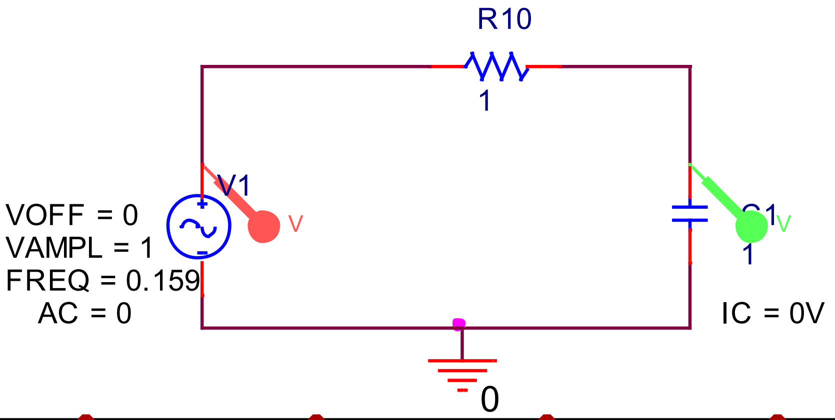
$$v_o(t) = \frac{1}{2}.e^{-1.t} + \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t) \qquad t \geq 0\ s\ için$$

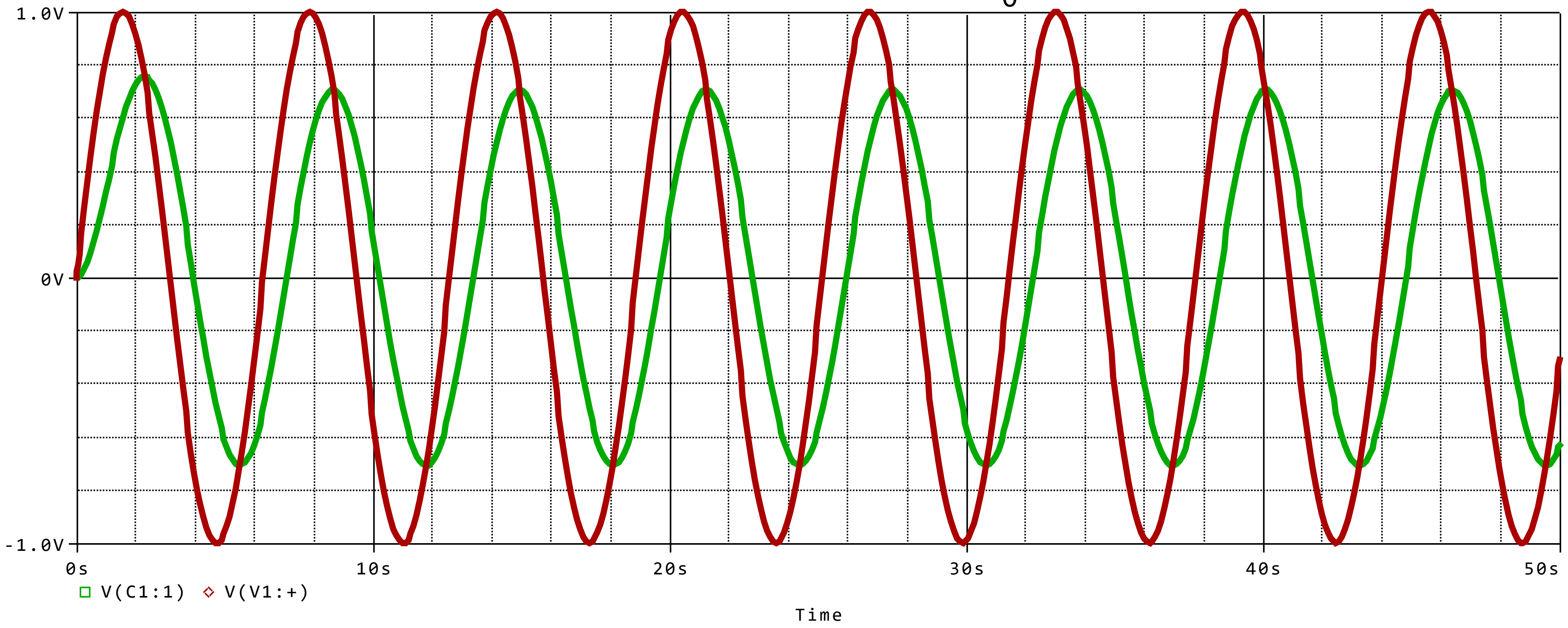
veya

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2}.e^{-1.t} + \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t)\right]u(t)$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER







BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$v_o(t) = \frac{1}{2}.e^{-1.t} + \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}cos(1t) \qquad t \geq 0\ s\ için$$

$$v_o(t) = \frac{1}{2}.e^{-1.t} + 0.707\sin(1t - 45^o)$$

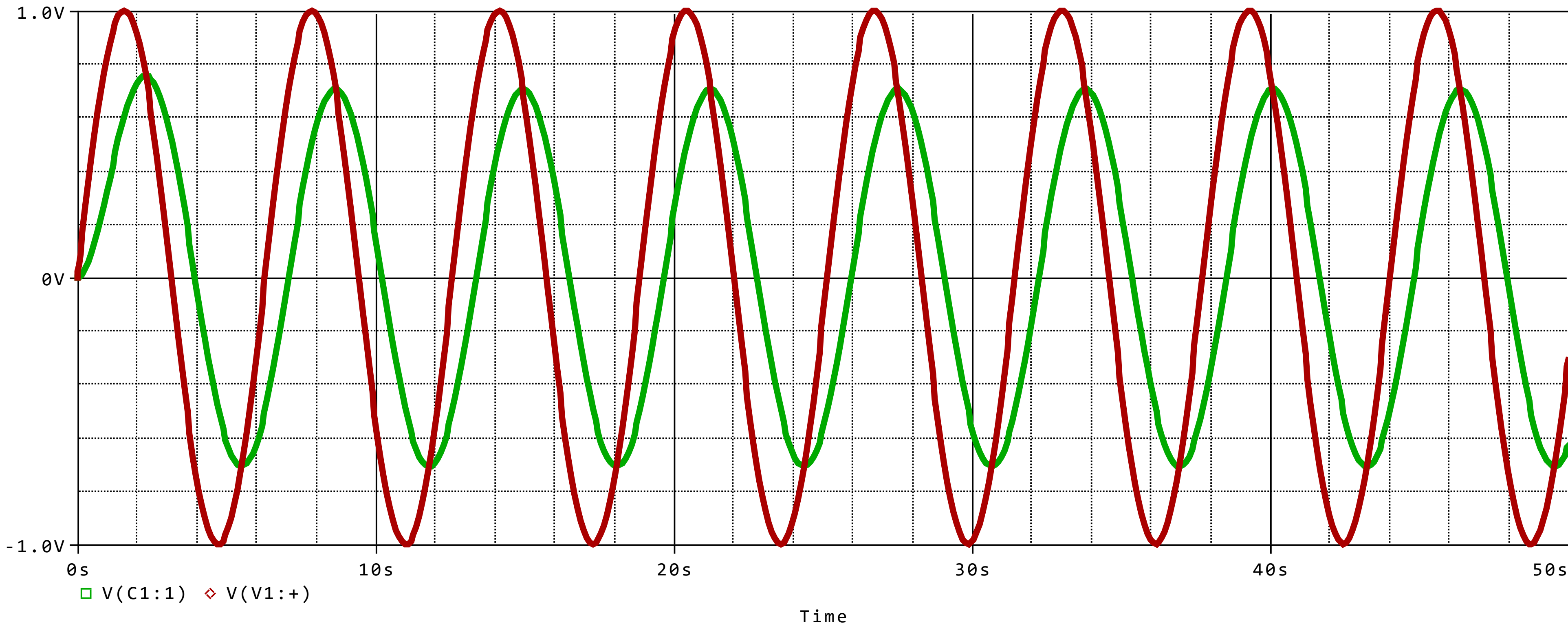
Not:

$$\sin(a+b) = sina.cosb + cosa.sinb$$

$$\sin(1t - 45^o) = \sin(1t).\cos(-45^o) + \cos(1t).sin(45^o)$$

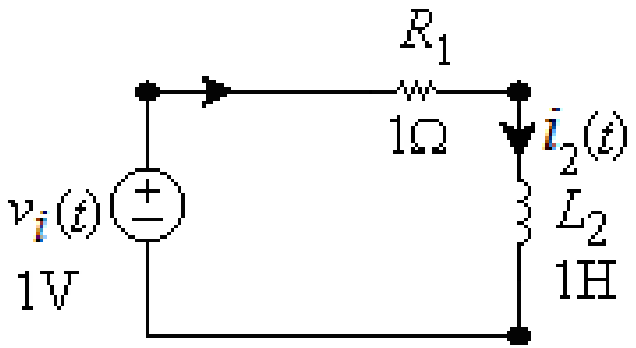
$$\sin(1t - 45^o) = \sin(1t).\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(1t).(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$0.707.\sin(1t - 45^o) = \frac{1}{2}\sin(1t) - \frac{1}{2}\cos(1t)$$



BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

Yandaki devrede t=0s'de devre çalıştırılmıştır. Endüktans elemanının ilk koşulu $i_2(0^-) = 0\ A$ alınız. t≥0 s için $i_2(t)$ ifadesini bulunuz ve zamana bağlı olarak grafiğini çizdiriniz.



$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

$$i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0\ \text{A}$$

Kirchoff'un gerilim yasasından;

$$-v_i(t) + v_1(t) + v_2(t) = 0$$

$$-v_i(t) + R_1 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1}{L_2} i_2(t) = \frac{R_1}{L_2} v_i(t)$$

$i_2(t)$ 'ye ilişkin diferansiyel denklem

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1}{L_2} i_2(t) = \frac{R_1}{L_2} v_i(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = 1$$

İlk olarak homojen genel çözüm bulunur.

$$\frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = 0$$

$$(s+1) \ = 0 \ \rightarrow \ \boxed{s = -1}$$

$$i_{2hg}(t) = Ke^{-1.t}$$

Özel çözüm bulunmalıdır.

$$i_{2ö} = A \qquad \frac{di_{2ö}}{dt} = 0$$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır.

$$0 + A = 1 \ \rightarrow \ i_{2ö} = 1$$

Genel çözüm:

$$i_{2g}(t) = i_{2hg}(t) + i_{2ö}(t)$$

$$i_{2g}(t) = Ke^{-1.t} + 1$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$i_2(0^+) = Ke^{-1.0^+} + 1 \ \rightarrow \ 0 = K + 1 \ \rightarrow \ K = -1$$

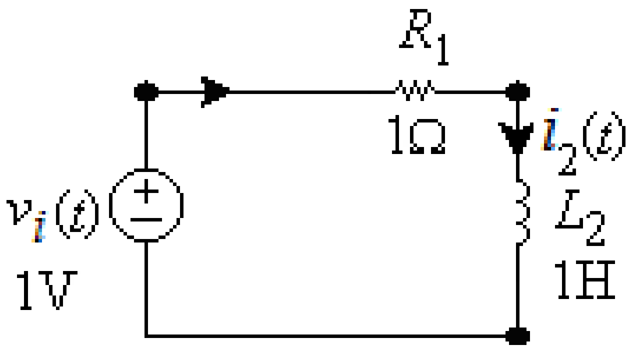
Tam çözüm:

$$i_2(t) = -1.e^{-1.t} + 1 \qquad t \geq 0 \ s \ için$$

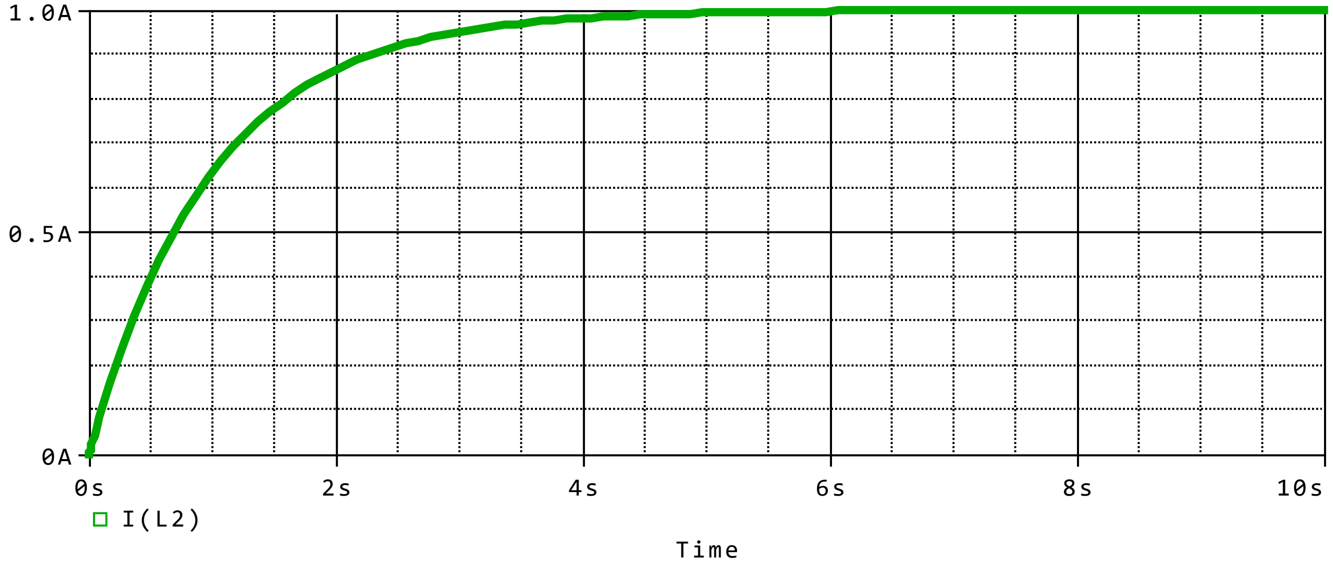
veya

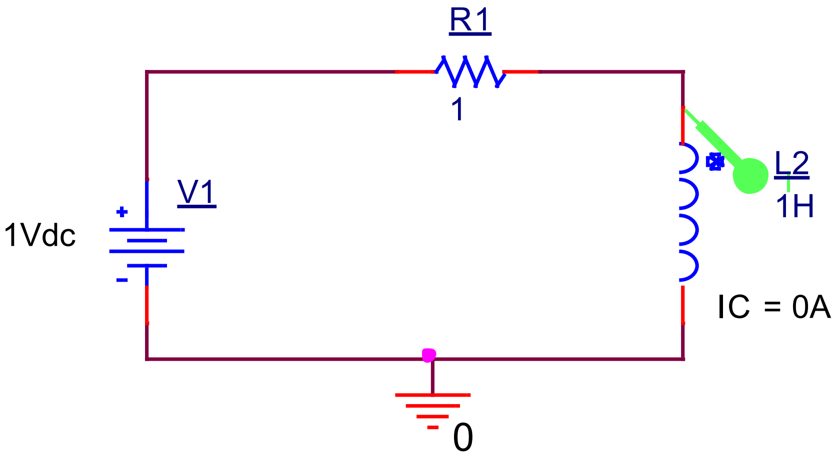
$$v_o(t) = [-1.e^{-1.t} + 1\,]u(t)$$

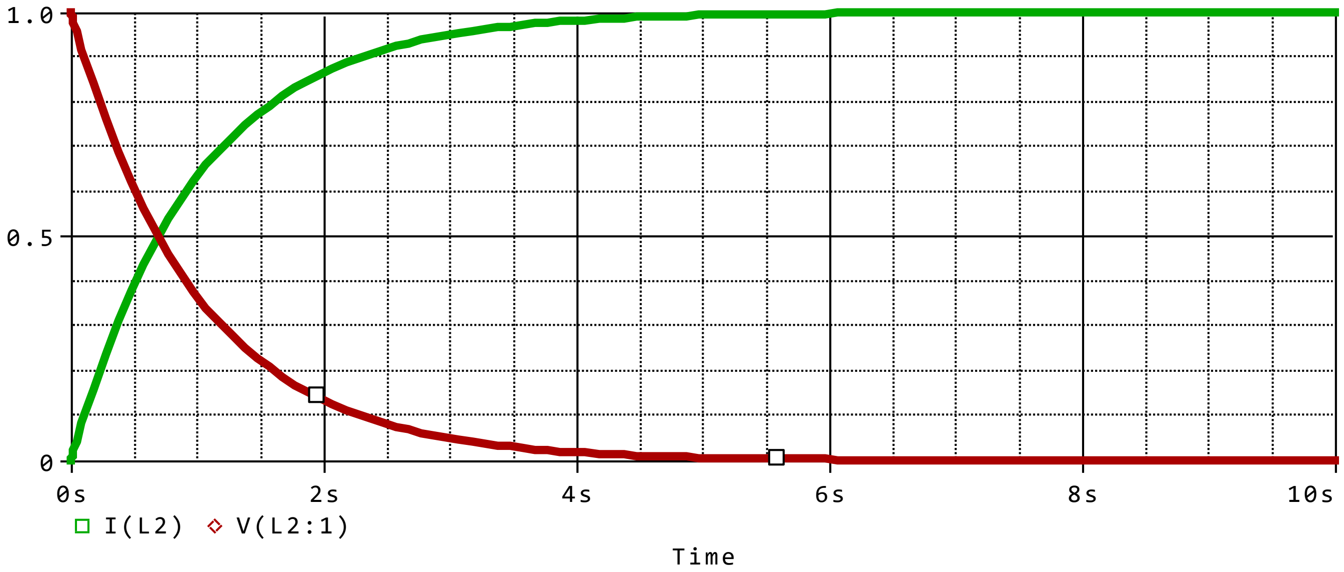
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER



$$i_2(t) = -1.e^{-1.t} + 1 \qquad t \geq 0\ s\ için$$







BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

ZAMAN SABİTİ: Devredeki geçici olayların ne kadar süreceğini ifade eder.

$$\tau = \frac{1}{\min\{|Reel\{s_i\}|\}}$$

Bu devre için;

$$\tau = \frac{L_2}{R_1} = G_1 L_2 = 1\ saniye$$

Geçici hal süresi:

$$t_{gh} \approx 5\tau$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1}{L_2} i_2(t) = \frac{R_1}{L_2} v_i(t)$$

Tam çözüm:

$$i_2(t) = -1.e^{-\frac{1}{G_1 L_2}.t} + 1 \qquad t \geq 0\ s\ için$$

$$i_2(t) = -1.e^{-\frac{1}{\tau}.t} + 1$$

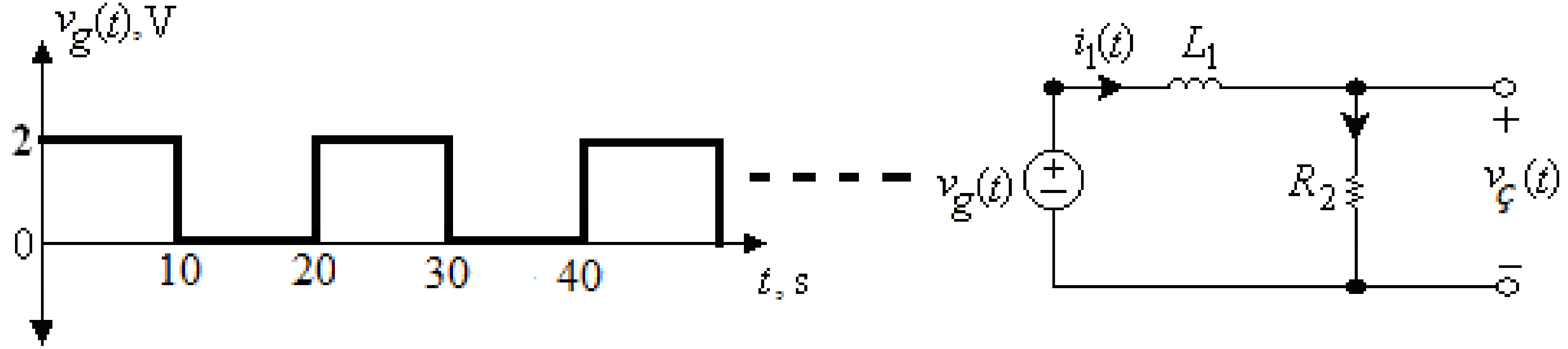
ÇALIŞMA SORULARI

1. Aşağıda verilen *RL* devresinin girişine $v_g(t)$ gerilim kaynağı uygulanmıştır. Devredeki eleman değerleri R_2=1 Ω, L_1=1 H'dir ve endüktans elemanının başlangıç koşulu $i_1(0^-)$=0 A'dir.

a) $v_ç(t)$ gerilimine ilişkin diferansiyel denklemi, $v_g(t)$'nin her değişimi için ayrı ayrı yazınız ve her adım için $v_ç(t)$ geriliminin tam çözümünü bulunuz (Bir periyot için çözüm yapınız) ve değişimini çiziniz (20p).

b) $v_1(t)$ geriliminin değişimini $v_g(t)$'nin bir periyodu için bulunuz ve değişimini çiziniz (10p).

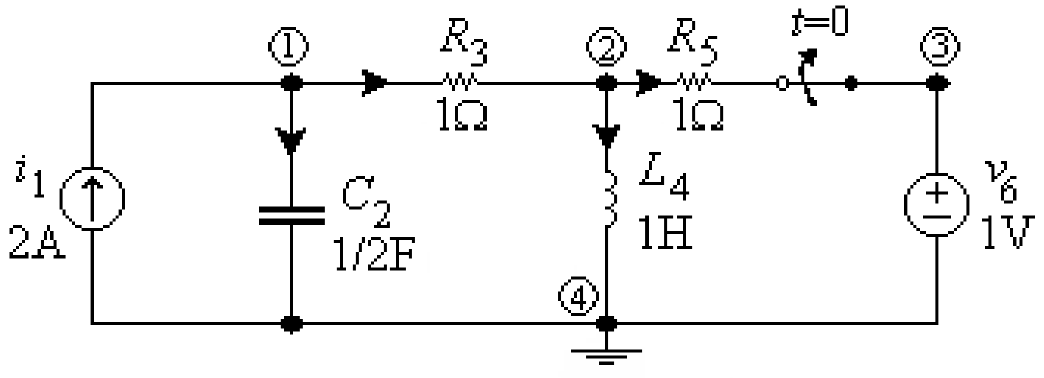
c) $v_g(t)$ gerilim kaynağının frekansı 1 kHz olacak şekilde işaret ayarlanırsa, $v_ç(t)$ ve $v_1(t)$ geriliminin değişimi nasıl olacaktır. Açıklayınız (10p).



ÇALIŞMA SORULARI

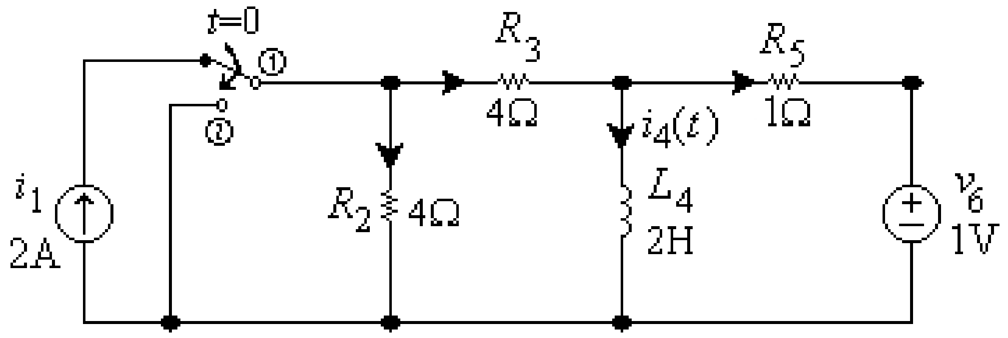
Yanda verilen devrede anahtar uzun süre kapalı konumda kalmış ve t=0 anında açık konuma getirilmiştir.

a) Dinamik elemanların $v_2(0^-)$ ve $i_4(0^-)$ başlangıç değerlerini bulunuz. Anahtarlar konum değiştirdikten sonra t=0$^+$ için devrenin eşdeğerini çiziniz. $v_2(0^+)$, $v_3(0^+)$ ve $i_4(0^+)$ değerlerini bulunuz.



Yanda verilen devrede anahtar uzun süre ① konumunda kalmış ve t=0 anında ② konumuna getirilmiştir.

a) $i_4(t)$ akımının tam çözümünü diferansiyel denklemlerden faydalanarak bulunuz.



ÇALIŞMA SORULARI

Aşağıda verilen *RC* devresinin girişine $v_i(t)$ gerilim kaynağı uygulanmıştır. Devredeki eleman değerleri R_1=1 kΩ, C_2=1 μF'dır.

a) $v_2(t)$ gerilimine ilişkin diferansiyel denklemi, $v_i(t)$'nin her değişimi için ayrı ayrı yazınız ve her adım için $v_2(t)$ geriliminin tam çözümünü bulunuz (Bir periyot için çözüm yapınız). $v_2(t)$ geriliminin değişimini çiziniz (20p).

b) $i_1(t)$ akımının tam çözümünü bulunuz ve değişimini çiziniz (10p).