

EHM2141 LOJİK DEVRELER

2024-2025 BAHAR DÖNEMİ

HAFTA 4 – DERS 2

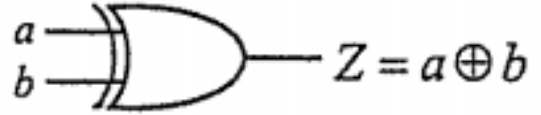
13 Mart 2025

Dr. Sibel ÇİMEN

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

XOR ve XNOR Kapıları ile işlemler

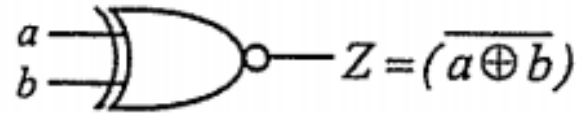
a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$f(a, b) = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$$

	b	0	1
a	0	0	1
1	1	1	0

a	b	$\overline{a \oplus b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

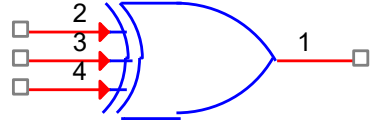


$$f(a, b) = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b \text{ işlemine}$$

		0	1
a	0	1	0
1	1	0	1

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

XOR ve XNOR Kapıları ile işlemler



$$f(a, b, c) = a \oplus b \oplus c = ?$$

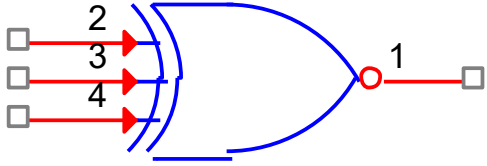
$$\begin{aligned} a \oplus b \oplus c &= a \oplus (b \oplus c) \\ &= a \oplus (\bar{b}.c + b.\bar{c}) \\ &= \bar{a}.(\bar{b}.c + b.\bar{c}) + a.(\overline{\bar{b}.c + b.\bar{c}}) \\ &= \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.((b + \bar{c}).(\bar{b} + c)) \\ &= \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} \end{aligned}$$

a	b	c	$a \oplus b \oplus c$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

a	bc			
	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

XOR ve XNOR Kapıları ile işlemler



$$f(a, b) = \overline{a \oplus b \oplus c} = ?$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Bazı Özdeşlikler:

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \bar{x}$$

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus \bar{x} = 1$$

$$x \oplus \bar{y} = \overline{x \oplus y}$$

$$\bar{x} \oplus y = \overline{x \oplus y}$$

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

XOR ve XNOR Kapıları ile işlemler

<i>ab</i> \ <i>cd</i>	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

$$f(a, b, c, d) = ?$$

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \oplus c)} \cdot \overline{(b \oplus d)}$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Boole fonksiyonlarını minimalleştirme işlemini algoritmik olarak gerçekleştiren yöntemlerden en bilineni Quine-McCluskey yöntemidir. 1952 Yılında Willard V. Quine bulmuştur ve 1956 yılında Edward J. McCluskey yöntemi iyileştirmiştir. Quine-McCluskey algoritması aynı zamanda **asal çarpanlar yöntemi (prime implicants method)** olarak da isimlendirilir. Algoritma iki kısımdan oluşur:

1. Asal çarpanların belirlenmesi.
2. Asal çarpan (prime implicant) tablosu ile temel asal çarpanların (essential prime implicant) belirlenmesi ve minimal fonksiyonun bulunması.

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Asal Çarpanların Belirlenmesi:

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(3,7,11,12,13,14,15)$$

<i>minterm</i>	<i>ikili tabanda</i>	<i>Lojik "1" sayısı</i>
3	0011	2 tane
7	0111	3 tane
11	1011	3 tane
12	1100	2 tane
13	1101	3 tane
14	1110	3 tane
15	1111	4 tane

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Asal Çarpanların Belirlenmesi:

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

1.Adım	2.Adım	3.Adım
<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>
3 0011 ✓	3,7 0-11 ✓	3,7,11,15 --11 ✓
12 1100 ✓	3,11 -011 ✓	3,11,7,15 --11 ✓
7 0111 ✓	12,13 110- ✓	12,13,14,15 11-- ✓
11 1011 ✓	12,14 11-0 ✓	12,14,13,15 11-- ✓
13 1101 ✓	7,15 -111 ✓	
14 1110 ✓	11,15 1-11 ✓	
15 1111 ✓	13,15 11-1 ✓	
	14,15 111- ✓	

Asal çarpanlar:

a.b

c.d

$$f(a,b,c,d) = a \cdot b + c \cdot d$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Temel Asal Çarpanların Belirlenmesi:

minterimler	3	7	11	12	13	14	15	a	b	c	d	Asal Çarpanlar
3, 7, 11, 15	✓	✓	✓				✓	-	-	1	1	c.d
12,13,14,15				✓	✓	✓	✓	1	1	-	-	a.b

$$f(a, b, c, d) = a.b + c.d$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Örnek 2.

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

1.Adım	2.Adım	3.Adım
<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>
0 0000 ✓	0,2 00-0 ✓	0,2,8,10 -0-0 ✓
2 0010 ✓	0,8 -000 ✓	0,8,2,10 -0-0 ✓
8 1000 ✓	2,10 -010 ✓	
10 1010 ✓	8,10 10-0 ✓	
13 1101 ✓	13,15 11-1	
15 1111 ✓		

$$f(a,b,c,d) = a \cdot b \cdot d + \bar{b} \cdot \bar{d}$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Örnek 3.

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

1.Adım 2.Adım 3.Adım

<i>m abc</i>	<i>m abc</i>	<i>m abc</i>
0 000 ✓	0,1 00- ✓	0,1,4,5 -0- ✓
1 001 ✓	0,4 -00 ✓	0,4,1,5 -0- ✓
4 100 ✓	1,5 -01 ✓	
5 101 ✓	4,5 10- ✓	


$$f(a,b,c,d) = \bar{b}$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

Örnek 4.

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	x
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	1

1.Adım	2.Adım	3.Adım
<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>	<i>m</i> <i>abcd</i>
4 0100 ✓	4,12 - 100 *	8,9,10,11 10 - - *
8 1000 ✓	8,9 100 - ✓	8,10,9,11 10 - -
9 1001 ✓	8,10 10 - 0 ✓	8,10,12,14 1 - - 0 *
10 1010 ✓	8,12 1 - 00 ✓	8,12,10,14 1 - - 0
12 1100 ✓	9,11 10 - 1 ✓	10,11,14,15 1 - 1 - *
11 1011 ✓	10,11 101 - ✓	10,14,11,15 1 - 1 -
14 1110 ✓	10,14 1 - 10 ✓	
15 1111 ✓	12,14 11 - 0 ✓	
	11,15 1 - 11 ✓	
	14,15 111 - ✓	

$$f(a,b,c,d) = b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot c + a \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b}$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Tablo Yöntemi (Quine-McCluskey Yöntemi)

<i>m</i>	4	8	10	11	12	15	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		
4,12	x				x		-	1	0	0	<i>bc'd'</i>	✓
8,9,10,11		x	x	x			1	0	-	-	<i>ab'</i>	
8,10,12,14		x	x		x		1	-	-	0	<i>ad'</i>	
10,11,14,15			x	x		x	1	-	1	-	<i>ac</i>	✓

$$f(a,b,c,d) = b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot c + a \cdot \bar{b}$$

veya

$$f(a,b,c,d) = b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot c + a \cdot \bar{d}$$

bc'd'

ad'

ac

ab'

<i>cd</i> <i>ab</i>	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	1	x
10	1	x	1	1

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Diğer algoritmik yöntemler

- Espresso
- BOOM (BOOlean Minimization)
- BOOM-II
- Tosmana

REFERANSLAR:

1. 'Lojik Devreler', Tuncay UZUN Ders Notları, http://tuncayuzun.com/Dersnot_LDT.htm, 2020.
2. 'Lojik Devre Tasarımı', Taner ASLAN ve Rifat ÇÖLKESEN, Papatya Yayıncılık, 2013.
3. M. Morris Mano, Sayısal Tasarım (Çeviri), Literatür Yayıncılık: İstanbul, 2003.