Elektrik Devre Temelleri

2024-2025 Bahar Dönemi

Hafta 13

16 Mayıs 2025

Sibel ÇİMEN

Umut Engin AYTEN

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

İçinde yalnızca bir adet enerji biriktiren eleman bulunduran devrelere ***Birinci Mertebeden Dinamik Devreler*** denir.

Lineer durumda bu tür devrelerde herhangi bir $y(t)$ bilinmeyeni;

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = be(t)$$

Burada y(t) devredeki bir akım veya gerilim çıkış değişkenine karşılık gelir. e(t) ise giriş değişkenidir ve bu değişken devredeki bağımsız kaynakların tümünün katkısını içinde bulunduran bir fonksiyondur. Devre lineer elemanlardan oluşuyorsa a ve b katsayıları devredeki gerilim ve akımlardan bağımsızdır. Yani a ve b, y(t) ve e(t)'ye bağlı değildir. Buna ek olarak devre elemanları zamana göre de değişmiyorsa a ve b katsayıları zamana da bağlı değildir yani zamandan bağımsızdır, başka bir deyişle de zamana göre sabittir. Bu durumda yukarıdaki denkleme lineer, sabit katsayılı diferansiyel denklem denir.

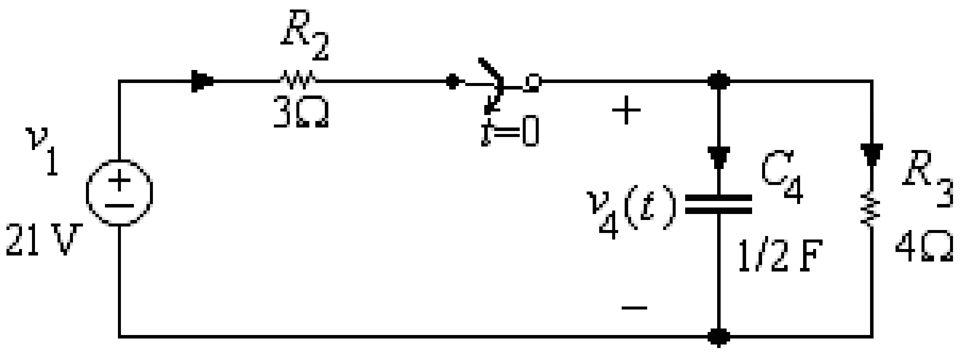
Söz konusu diferansiyel denklemin çözümü sonucunda y(t)'nin tek olarak belirlenebilmesi için y(t)'nin ilk değerinin bilinmesi gereklidir.

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

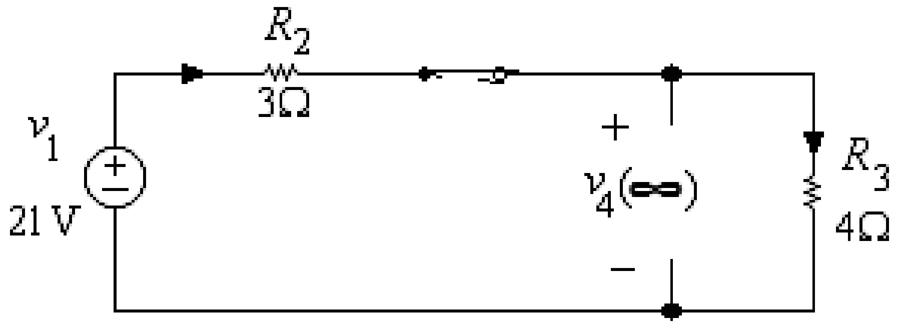
1. Yanda verilen dinamik devrede anahtar uzun süre kapalı kalmış ve t=0 anında açılmıştır.

a) $t=0^-$ anı için kapasite elemanının ilk koşulunu bulunuz.

b) Anahtar açıldıktan (t=0 s) sonra $v_4(t)$ geriliminin tam çözümünü bulunuz.



-∞<t≤0^- saniye aralığı için (DC şartlarda uzun süre geçmiş) eşdeğer devre;



$$v_4(\infty) = \frac{21}{3+4}4 = 12\ V$$

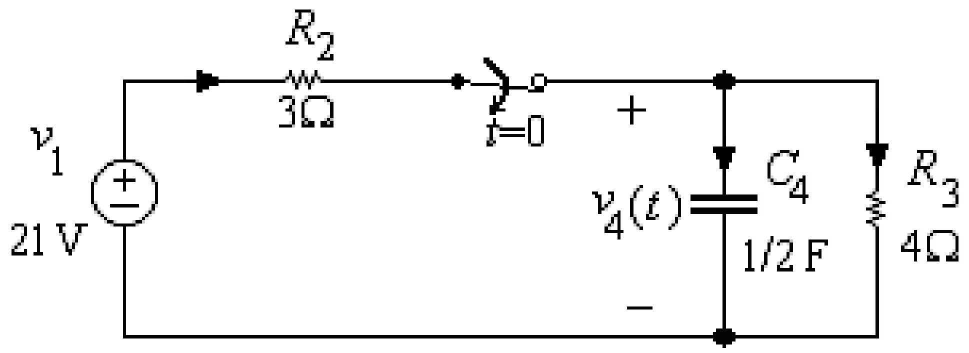
$$v_4(0^-) = v_4(\infty) = 12\ V$$

Bulunur.

$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

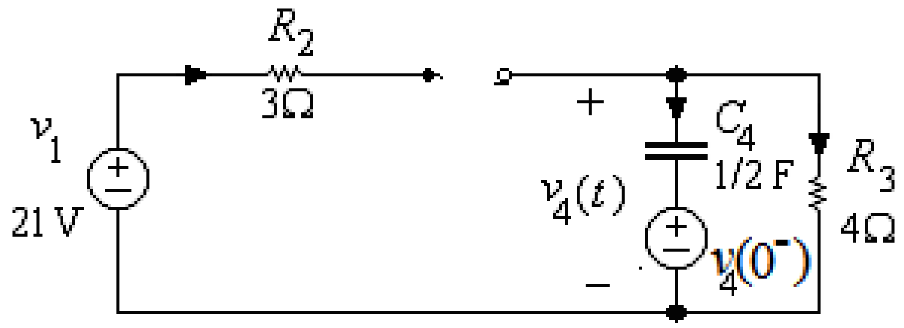
$$v_4(0^+) = v_4(0^-) = 12\ V$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER



Anahtar açıldığı an için eşdeğer devre

➔



Bu eşdeğer devre kullanılarak $v_4(t)$'ye ilişkin diferansiyel denklem elde edilir. Kirchoff'un akım yasasından;

$$i_4(t) + i_3(t) = 0$$

$$C_4 \frac{dv_4(t)}{dt} + \frac{v_4(t)}{R_3} = 0$$

$$\boxed{\frac{dv_4(t)}{dt} + \frac{1}{R_3 C_4} v_4(t) = 0}$$

$v_4(t)$ 'ye ilişkin diferansiyel denklem

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_4(t)}{dt} + \frac{1}{R_3C_4}v_4(t) = 0$$

$$\frac{dy\,(t)}{dt} + ay\,(t) = 0$$

$y(t) = ?$

Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem. Denklemin sağ tarafı 0. Bu tür denklemlere aynı zamanda homojen denklem denir.

$$\frac{dy\,(t)}{dt} + ay\,(t) = 0$$

$y(t) = Ke^{st}$ *olsun.*

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kse^{st}$$

Diferansiyel denklemde yerine yazalım.

$$Kse^{st} + aKe^{st} = 0$$

$$Ke^{st}(s+a) = 0$$

$Ke^{st} \neq 0$ olmak zorundadır.

$(s+a) = 0$ Karakteristik denklem denir.

$(s+a) = 0$ ➔ $s = -a$

Karakteristik denklemin kökü. Bu değer aynı zamanda sistemin (devrenin) özdeğeridir (eigen values).

$$y(t) = Ke^{st}$$

Homojen genel çözüm:

$$y_{hg}(t) = Ke^{-at}$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$y(0^+) = Ke^{-a0^+}$ ➔ $y(0^+) = K.1$ ➔ $K = y(0^+)$

Tam çözüm:

$y(t) = y(0^+)e^{-at}$ $\quad t \geq 0$ *s için*

veya

$$y(t) = y(0^+)e^{-at}u(t)$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_4(t)}{dt} + \frac{1}{R_3C_4}v_4(t) = 0$$

$$\frac{dv_4(t)}{dt} + \frac{1}{2}v_4(t) = 0$$

Karakteristik denklem:

$$(s + \frac{1}{2}) \ = 0$$

$$s = -\frac{1}{2}$$

Homojen genel çözüm:

$$v_{4hg}(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t}$$

K=?

K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$v_4(0^+) = v_4(0^-) = 12\ V$$

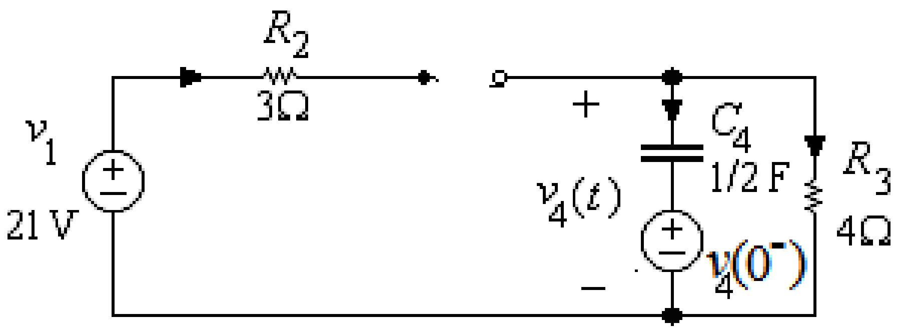
$$v_4(0^+) = Ke^{-\frac{1}{2}0^+} \quad \Rightarrow \quad K = 12$$

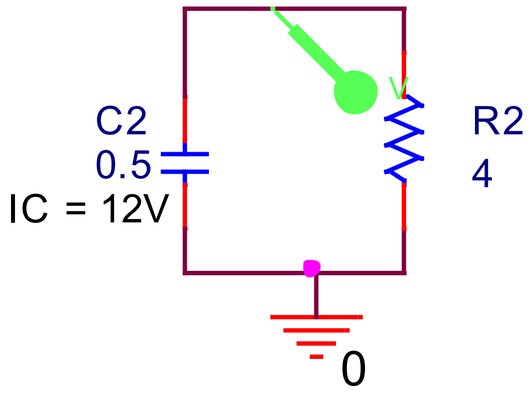
Tam çözüm:

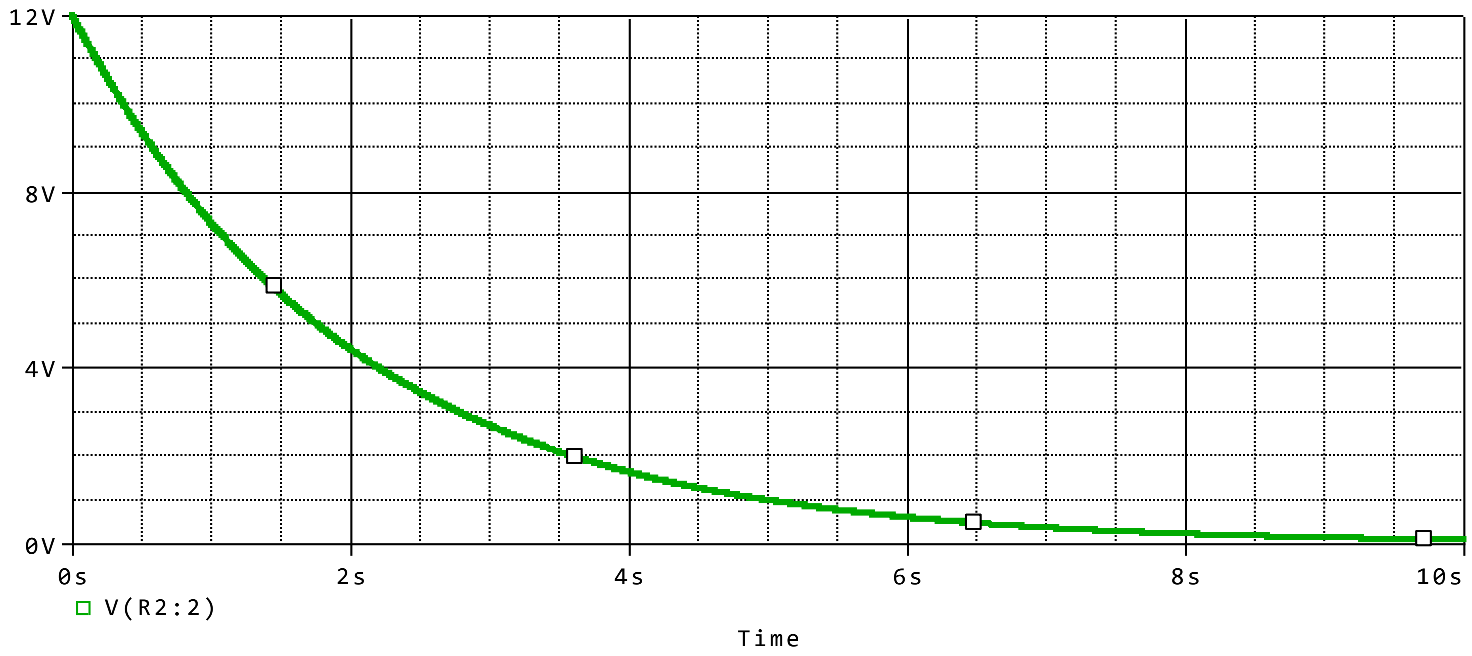
$$v_4(t) = 12e^{-\frac{1}{2}t} \qquad t \geq 0\ s\ için$$

veya

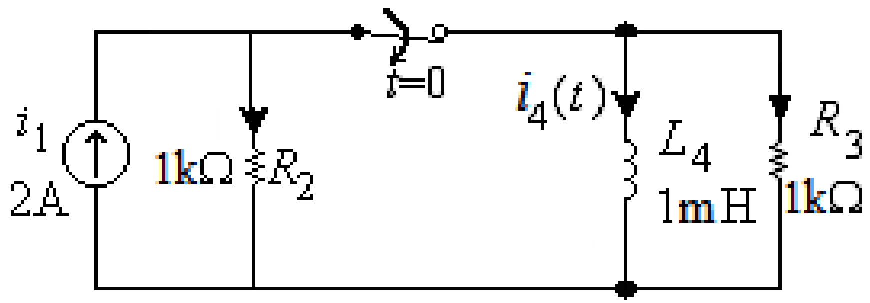
$$v_4(t) = 12e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$


R_2
3Ω
v_1
21 V
+
$v_4(t)$
–
C_4
1/2 F
$v_4(0^-)$
R_3
4Ω


C2
0.5
IC = 12V
R2
4
0


12V
8V
4V
0V
0s
2s
4s
6s
8s
10s
V(R2:2)
Time

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

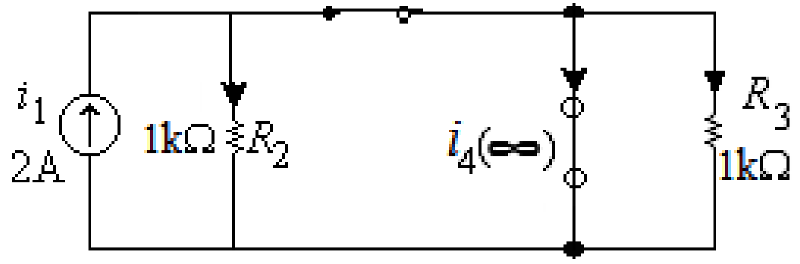


2. Yanda verilen dinamik devrede anahtar uzun süre kapalı kalmış ve t=0 anında açılmıştır.

a) $t=0^-$ anı için endüktans elemanının ilk koşulunu bulunuz.

b) Anahtar açıldıktan (t=0 s) sonra $i_4(t)$ akımının tam çözümünü bulunuz.

$-\infty<t\leq 0^-$ saniye aralığı için (DC şartlarda uzun süre geçmiş) eşdeğer devre;



$i_4(\infty) = 2$ A

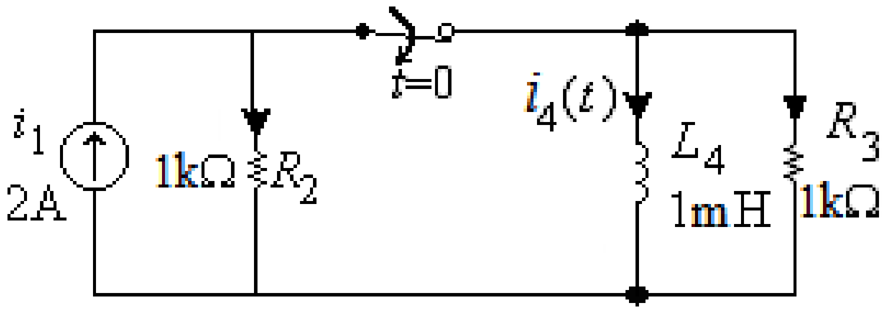
$i_4(0^-) = i_4(\infty) = 2\ A$

Bulunur.

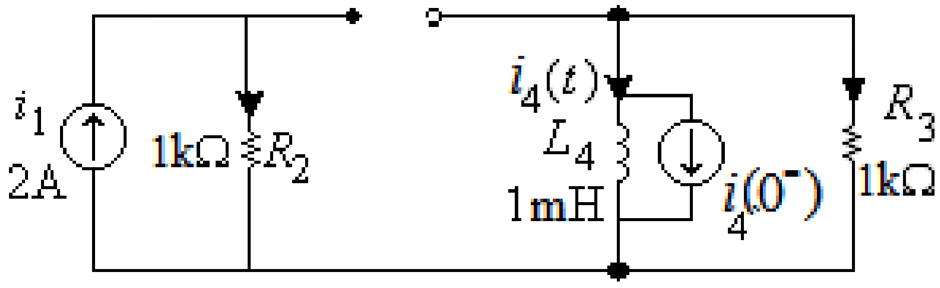
$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

$i_4(0^+) = i_4(0^-) = 2\ A$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER



Anahtar açıldığı an için eşdeğer devre ➔



Bu eşdeğer devre kullanılarak $i_4(t)$'ye ilişkin diferansiyel denklem elde edilir. Kirchoff'un gerilim yasasından;

$$-v_4(t) + v_3(t) = 0$$

$$-L_4 \frac{di_4(t)}{dt} + R_3 i_3(t) = 0$$

$$-L_4 \frac{di_4(t)}{dt} + R_3(-i_4(t)) = 0$$

$i_4(t)$ 'ye ilişkin diferansiyel denklem

$$\boxed{\frac{di_4(t)}{dt} + \frac{R_3}{L_4} i_4(t) = 0}$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{di_4(t)}{dt} + \frac{R_3}{L_4} i_4(t) = 0$$

$$\frac{di_4(t)}{dt} + 1000000 i_4(t) = 0$$

Karakteristik denklem:

$$(s + 10^6) \ = 0$$

$$s = -10^6$$

Homojen genel çözüm:

$$i_{4hg}(t) = K e^{-10^6 t}$$

K=?

K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$i_4(0^+) = i_4(0^-) = 2\ A$$

$$i_4(0^+) = K e^{-10^6 . 0^+} \quad \rightarrow \quad K = 2$$

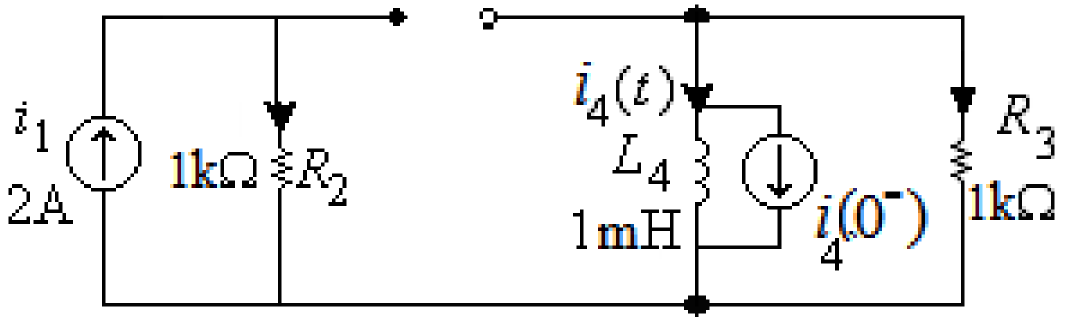
Tam çözüm:

$$i_4(t) = 2e^{-10^6 t} \qquad t \geq 0\ s\ için$$

veya

$$i_4(t) = 2e^{-10^6 t} u(t) \text{ A}$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

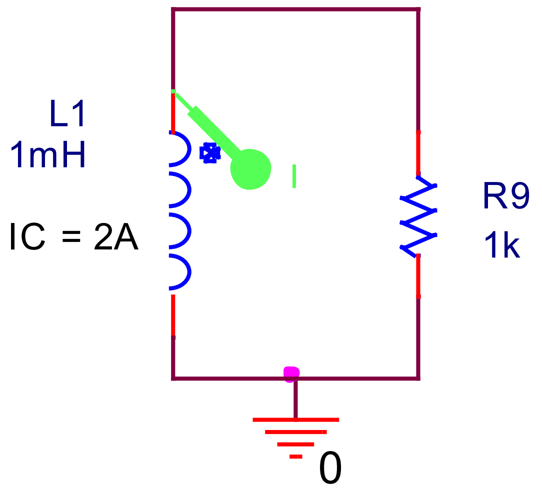


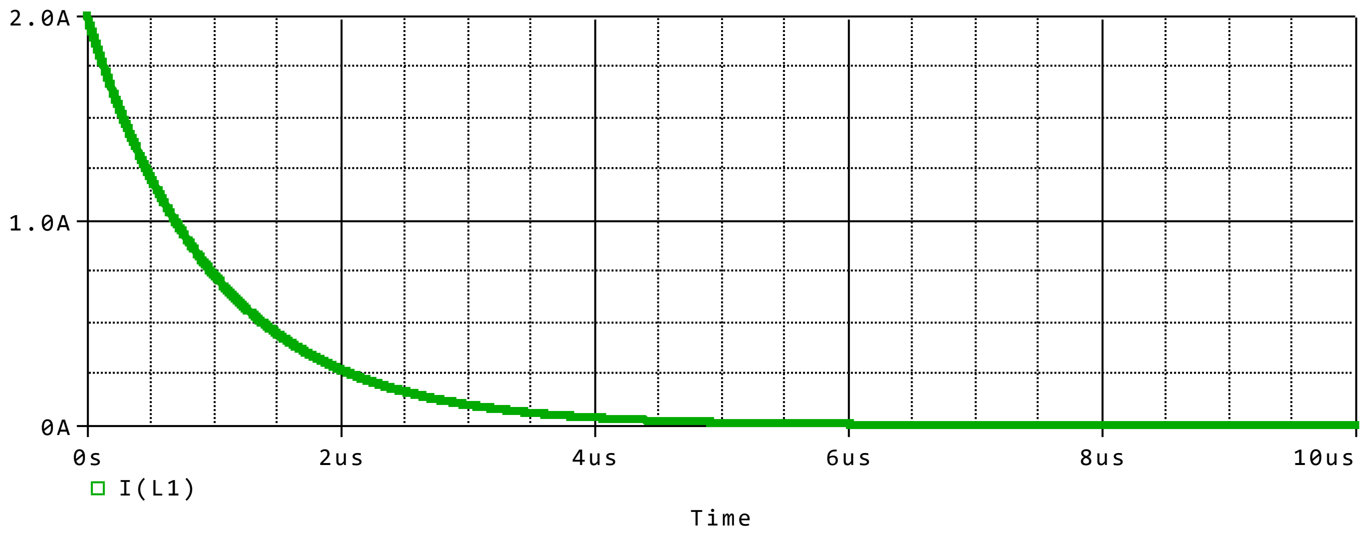
Tam çözüm:

$$i_4(t) = 2e^{-10^6 t} \qquad t \geq 0\ s\ için$$

veya

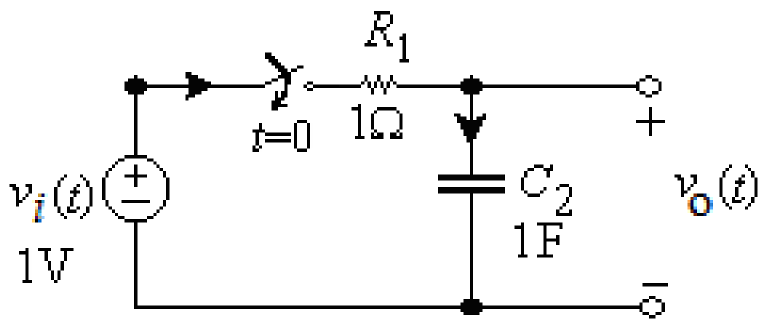
$$i_4(t) = 2e^{-10^6 t}u(t)\ \text{A}$$





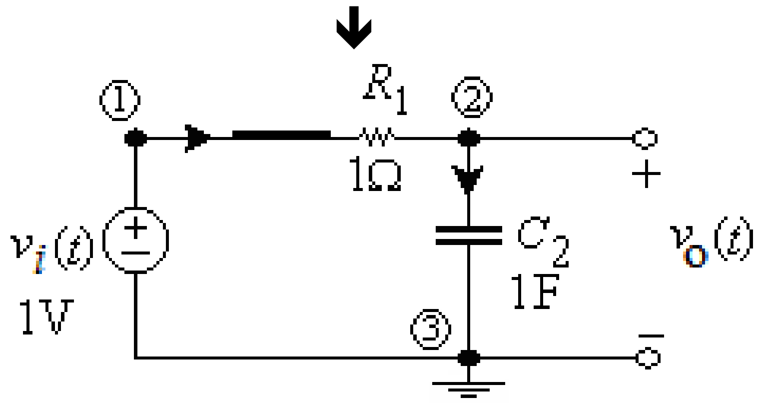
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

3. Yandaki devrede anahtar uzun süre açık kalmıştır ve t=0s’de kapatılmıştır. Kapasite elemanının ilk koşulu 0 V alınız. t≥0 s için $v_o(t)$ ifadesini bulunuz ve zamana bağlı olarak grafiğini çizdiriniz.



$$v_o(0^-) = v_o(\infty) = 0\ V$$

Anahtar açıldığı an için eşdeğer devre



$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

$$v_o(0^+) = v_o(0^-) = 0\ V$$

Kirchoff’un akım yasasından;

$$-i_1(t) + i_2(t) = 0$$

$$-\frac{v_i(t) - v_2(t)}{R_1} + C_2\frac{dv_2(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C_2}v_2(t) = \frac{1}{R_1 C_2}v_i(t)$$

$$\boxed{\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C_2}v_o(t) = \frac{1}{R_1 C_2}v_i(t)}$$

$v_o(t)$ ‘ye ilişkin diferansiyel denklem

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)$$

$$\frac{dy\,(t)}{dt} + ay(t) = be(t)$$

Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem. Denklemin sağ tarafı 0 değil. Bu tür denklemlere aynı zamanda homojen olmayan diferansiyel denklemler denir.

$$\boxed{y(t) = ?}$$

İlk olarak homojen genel çözüm bulunur.

$$\frac{dy\,(t)}{dt} + ay(t) = 0$$

$$(s+a) = 0 \rightarrow \boxed{s = -a}$$

Homojen genel çözüm:

$$y_{hg}(t) = Ke^{-at}$$

Homojen olmayan diferansiyel denklem olduğu için özel çözüm vardır. Özel çözüm:

Diferansiyel denklemin sağ tarafı sabit bir sayı (E) ise;

$$y_ö = A \qquad \frac{dy_ö}{dt} = 0$$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır.

$$0 + ay_ö = bE$$

$$y_ö = \frac{b}{a}E$$

Özel çözüm bulunur.

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

Genel çözüm:

$$y_g(t) = y_{hg}(t) + y_ö(t)$$

$$y_g(t) = Ke^{-at} + \frac{b}{a}E$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$$y(0^+) = Ke^{-a0^+} + \frac{b}{a}E \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = K + \frac{b}{a}E$$

$$\Rightarrow \quad K = y(0^+) - \frac{b}{a}E$$

Tam çözüm:

$$y(t) = (y(0^+) - \frac{b}{a}E)e^{-at} + \frac{b}{a}E \qquad t \geq 0\ s\ için$$

veya

$$y(t) = [(y(0^+) - \frac{b}{a}E)e^{-at} + \frac{b}{a}E]u(t)$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 1$$

İlk olarak homojen genel çözüm bulunur.

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 0$$

$(s+1) = 0$ ➔ $\boxed{s = -1}$

$$v_{ohg}(t) = Ke^{-1.t}$$

Özel çözüm bulunmalıdır.

$v_{oö} = A$ $\quad \frac{dv_{oö}}{dt} = 0$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır.

$0 + A = 1$ ➔ $v_{oö} = 1$

Genel çözüm:

$$v_{og}(t) = v_{ohg}(t) + v_{oö}(t)$$

$$v_{og}(t) = Ke^{-1.t} + 1$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$v_o(0^+) = Ke^{-1.0^+} + 1$ ➔ $0 = K + 1$ ➔ $K = -1$

Tam çözüm:

$$v_o(t) = -1.e^{-1.t} + 1 \qquad t \geq 0\, s\, için$$

veya

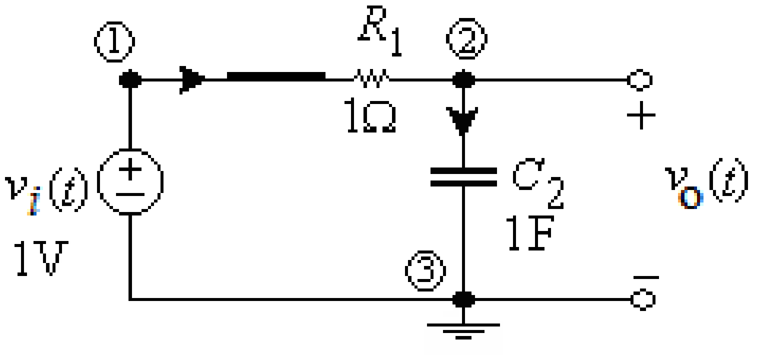
$$v_o(t) = 1.(1 - 1.e^{-1.t}) \qquad t \geq 0\, s\, için$$

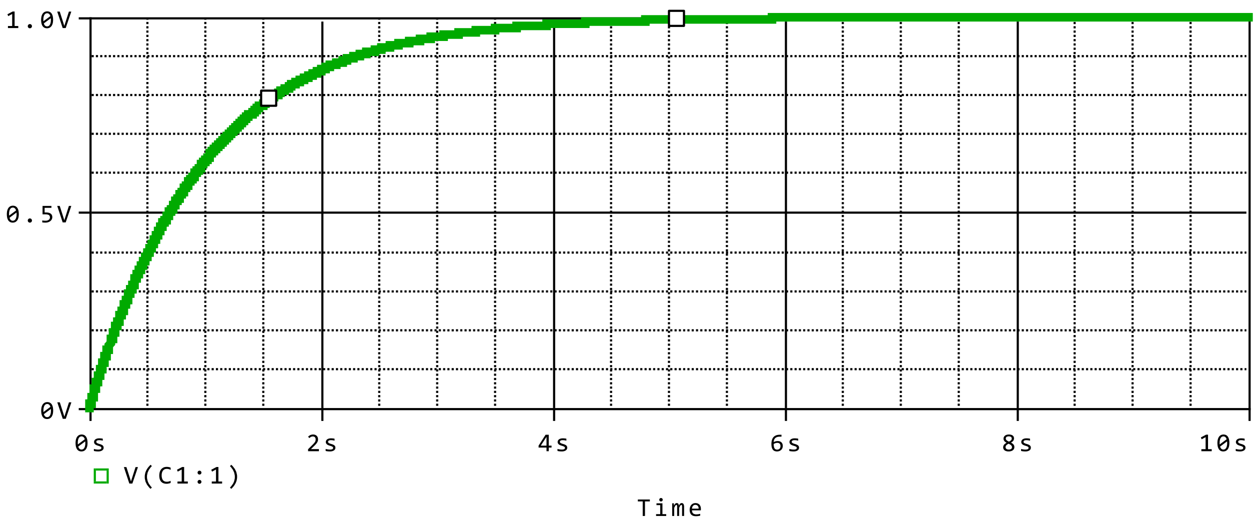
veya

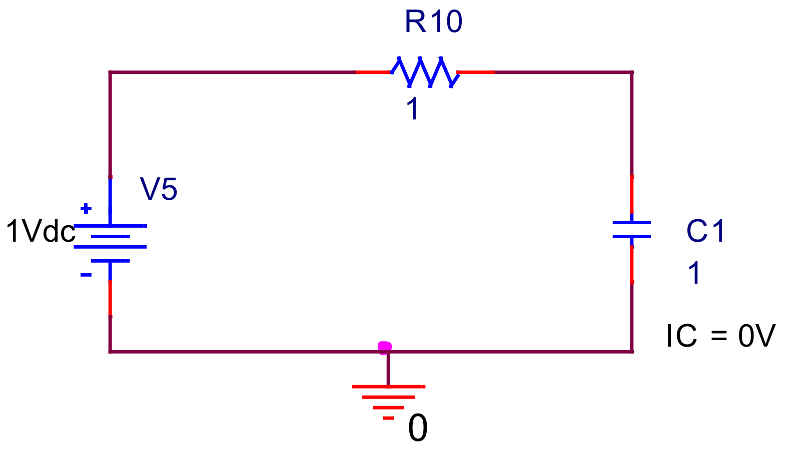
$$v_o(t) = [1.(1 - 1.e^{-1.t})]u(t)$$

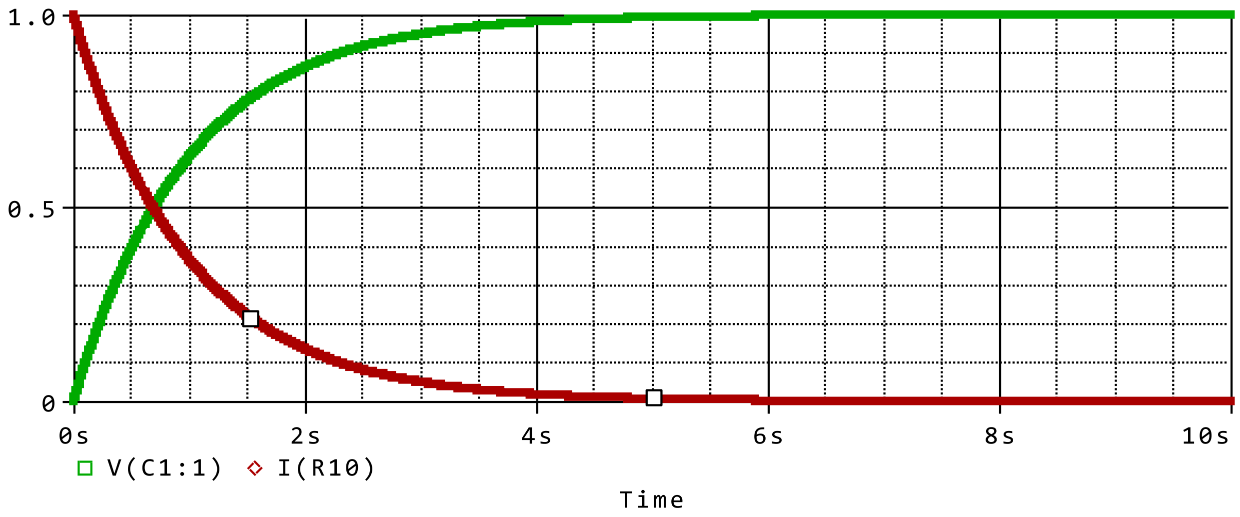
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$v_o(t) = 1.(1 - 1.e^{-1.t}) \qquad t \geq 0 \; s \; için$$

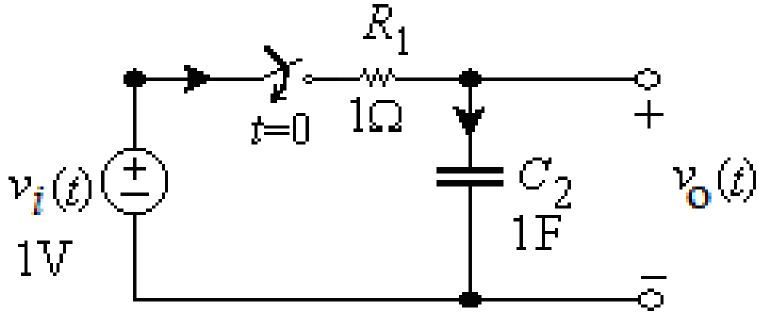




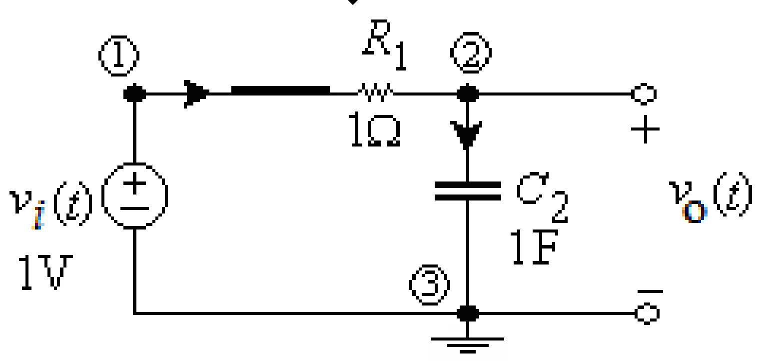




3. Yandaki devrede anahtar uzun süre açık kalmıştır ve t=0s'de kapatılmıştır. Kapasite elemanının ilk koşulu **0.5 V** alınız. t≥0 s için $v_o(t)$ ifadesini bulunuz ve zamana bağlı olarak grafiğini çizdiriniz.



Anahtar açıldığı an için eşdeğer devre



$$v_o(0^-) = v_o(\infty) = 0.5\ V$$

$t = 0^+$ saniye için (devrede impuls fonksiyonu olmadığına göre);

$$v_o(0^+) = v_o(0^-) = 0.5\ V$$

Kirchoff'un akım yasasından;

$$-i_1(t) + i_2(t) = 0$$

$$-\frac{v_i(t) - v_2(t)}{R_1} + C_2\frac{dv_2(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_2(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)$$

$$\boxed{\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)}$$

$v_o(t)$ 'ye ilişkin diferansiyel denklem

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 1$$

İlk olarak homojen genel çözüm bulunur.

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = 0$$

$(s+1) \ = 0$ ➔ $\boxed{s = -1}$

$$v_{ohg}(t) = Ke^{-1.t}$$

Özel çözüm bulunmalıdır.

$v_{oö} = A \qquad \frac{dv_{oö}}{dt} = 0$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır.

$0 + A = 1$ ➔ $v_{oö} = 1$

Genel çözüm:

$$v_{og}(t) = v_{ohg}(t) + v_{oö}(t)$$

$$v_{og}(t) = Ke^{-1.t} + 1$$

olur. K=? K değerini bulmak için ilk koşuldan faydalanılır.

$v_o(0^+) = Ke^{-1.0^+} + 1$ ➔ $0.5 = K + 1$ ➔ $K = -0.5$

Tam çözüm:

$$v_o(t) = -0.5e^{-1.t} + 1 \qquad t \geq 0 \ s \ için$$

veya

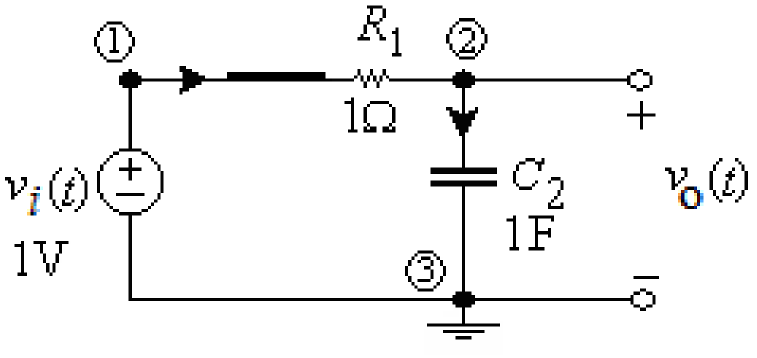
$$v_o(t) = 1.(1 - 0.5e^{-1.t}) \qquad t \geq 0 \ s \ için$$

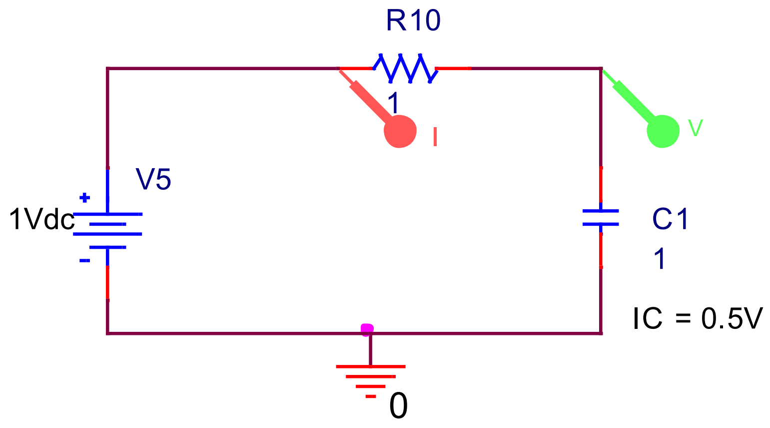
veya

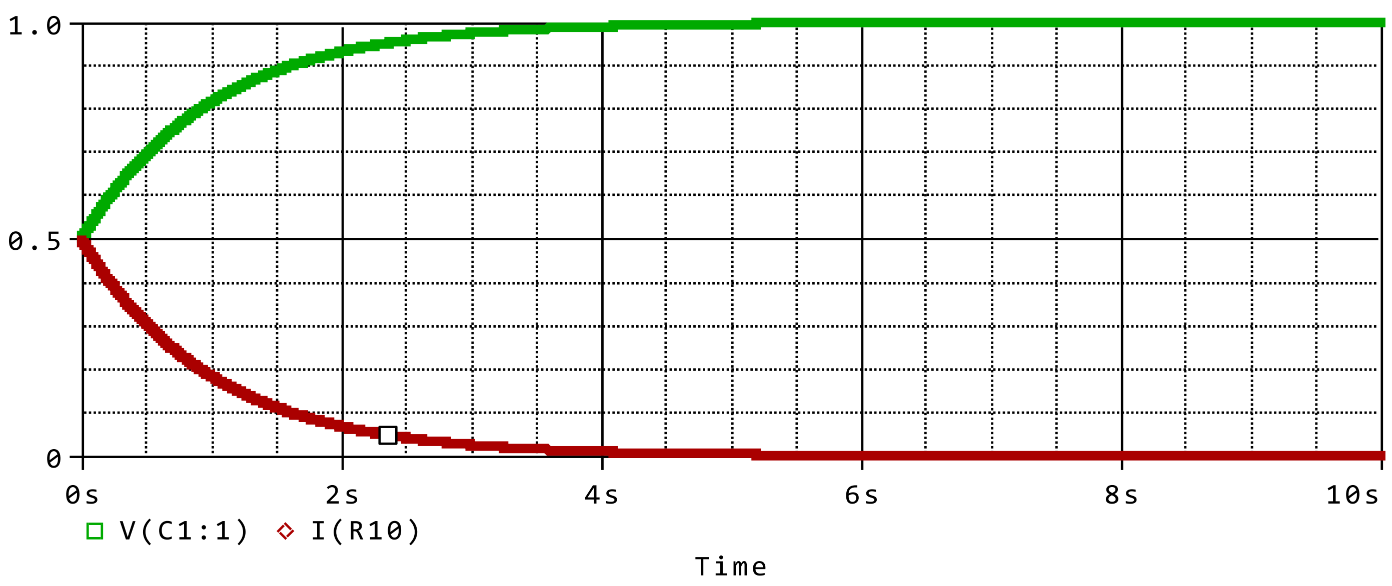
$$v_o(t) = [1.(1 - 0.5e^{-1.t})]u(t)$$

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$v_o(t) = 1.(1 - 0.5e^{-1.t}) \quad t \geq 0 \; s \; için$







BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DEVRELER

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R_1C_2}v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}v_i(t)$$

$v_i(t) = 1V$ için parametrik olarak tam çözüm;

$$v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}\left(1 - (v_o(0^+) - 1)e^{-\frac{1}{R_1C_2}.t}\right) \quad t \geq 0\ s\ için$$

veya

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{R_1C_2}\left(1 - (v_o(0^+) - 1)e^{-\frac{1}{R_1C_2}.t}\right)\right]u(t)$$

$$v_o(t) = \frac{1}{R_1C_2}\left(1 - (v_o(0^+) - 1)e^{-\frac{1}{\tau}.t}\right) \qquad t \geq 0\ s\ için$$

ZAMAN SABİTİ: Devredeki geçici olayların ne kadar süreceğini ifade eder.

$$\tau = \frac{1}{\min\{|Reel\{s_i\}|\}}$$

Bu devre için;

$$\tau = R_1C_2 = 1\ saniye$$

Geçici hal süresi:

$$t_{gh} \approx 5\tau$$

Ödev 3 Verilecek!
Teslim Tarihi: 26.05.2025, saat: 23:45