

Elektrik Devre Temelleri

2024-2025 Bahar Dönemi

Hafta 5

21 Mart 2025

Sibel ÇİMEN

Umut Engin AYTEN

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

4. Adım: Direnç elemanı gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden eşitliklerde yerine yazılır.

$$d_1 \text{ için: } i_1 + \frac{(v_{d1})}{R_4} + \frac{(v_{d1} - v_{d2})}{R_5} = 0$$

$$d_2 \text{ için: } -\frac{(v_{d1} - v_{d2})}{R_5} + i_3 + \frac{(v_{d2} - v_{d3})}{R_6} = 0$$

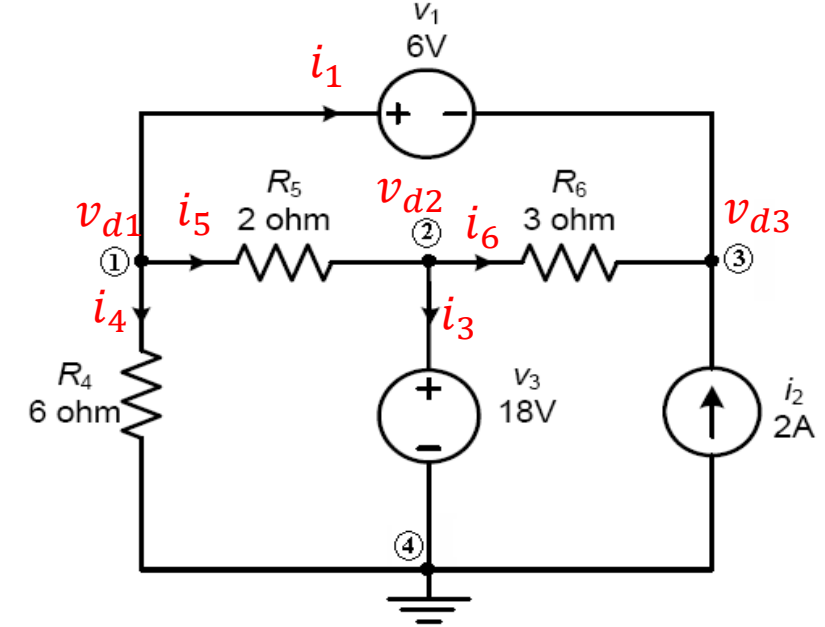
$$d_3 \text{ için: } -\frac{(v_{d2} - v_{d3})}{R_6} - i_1 - i_2 = 0$$

5. Adım: Düğüm gerilimi ifadeleri eşitliğin sağında kalacak şekilde denklemler düzenlenir.

$$d_1 \text{ için: } v_{d1} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) + v_{d2} \left(-\frac{1}{R_5} \right) = -i_1$$

$$d_2 \text{ için: } v_{d1} \left(-\frac{1}{R_5} \right) + v_{d2} \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) + v_{d3} \left(-\frac{1}{R_6} \right) = -i_3$$

$$d_3 \text{ için: } v_{d2} \left(-\frac{1}{R_6} \right) + v_{d3} \left(\frac{1}{R_6} \right) = i_1 + i_2$$



Denklemler matrisel halde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 \\ 0 & -G_6 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 \\ -i_3 \\ i_1 + i_2 \end{bmatrix}$$

i_2 akımının değeri bilinmektedir. Fakat i_1 ve i_3 akım değerleri bilinmemektedir. Aynı şekilde düğüm gerilimlerinin değerleri de bilinmemektedir. Yani 3 adet denklem ve 5 adet bilinmeyen vardır. Devrenin çözümünü yapabilmek için ek denklemlerin yazılması gereklidir.

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

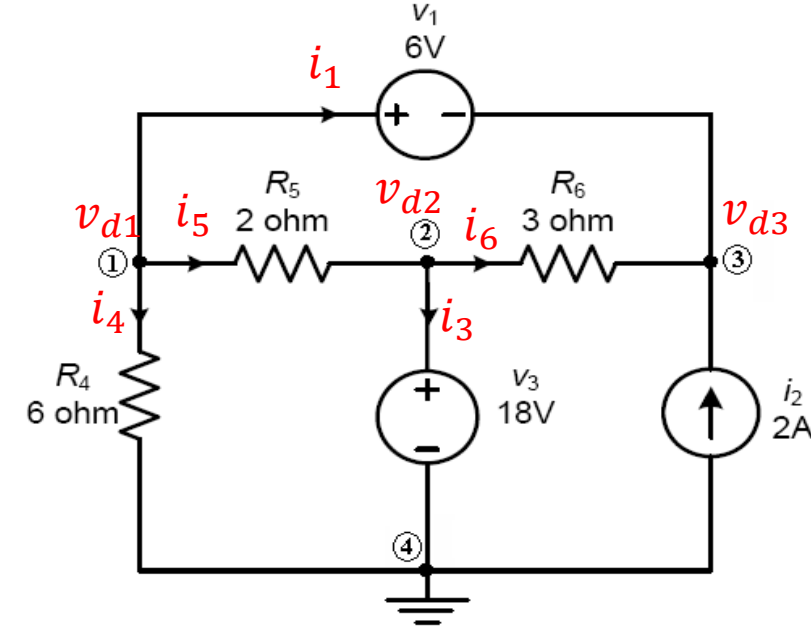
$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 \\ 0 & -G_6 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 \\ -i_3 \\ i_1 + i_2 \end{bmatrix}$$

6. Adım: Ek denklemler yazılır. Direnç elemanları ve bağımsız akım kaynakları dışındaki tüm elemanlar için tanım bağıntıları yazılır.

1. Ek denklem: $v_1 = 6V \Rightarrow v_{d1} - v_{d3} = 6$

2. Ek denklem: $v_3 = 18V \Rightarrow v_{d2} = 18$

7. Adım: Bilinmeyen sayısı kadar denklem elde edildi. Artık denklemler çözülebilir. Yok etme yöntemi ile denklemler çözülebileceği gibi lineer cebir yöntemleri kullanılarak da denklemler çözülebilir. Bunun için tüm denklemlerin matrisel bir şekilde yazılması gereklidir.

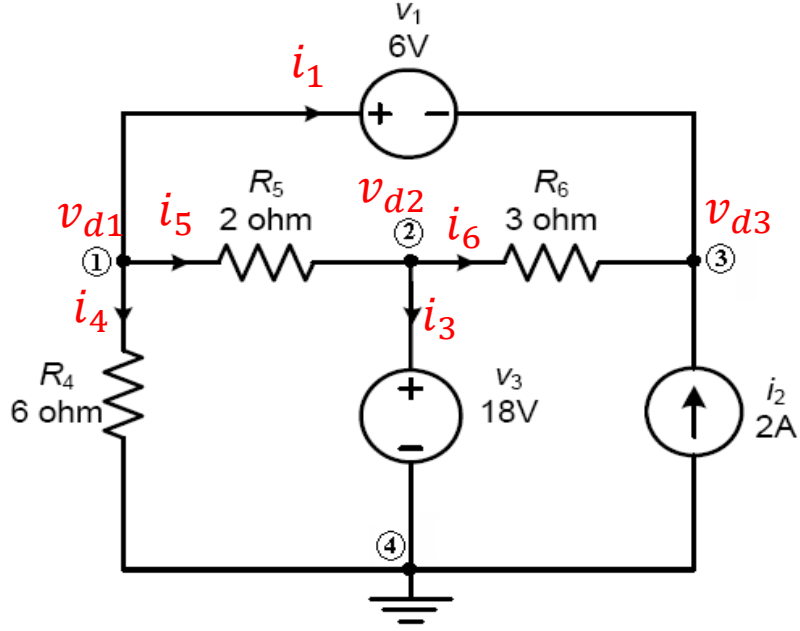


Genelleştirilmiş Düğüm Gerilimleri Denklemlerinin Matrisel Biçimde Yazılması

$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_5 & 0 & 1 & 0 \\ -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 & 0 & 1 \\ 0 & -G_6 & G_6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \\ i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_2 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

MATLAB Programı ile bilinmeyen ifadelerin değerlerini bulalım.



$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_5 & 0 & 1 & 0 \\ -G_5 & G_5 + G_6 & -G_6 & 0 & 1 \\ 0 & -G_6 & G_6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \\ i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$v_{d1} = 19 \text{ V} \quad i_1 = -3.667 \text{ A}$$

$$v_{d2} = 18 \text{ V} \quad i_3 = -1.167 \text{ A}$$

$$v_{d3} = 13 \text{ V}$$

```
>> A=[(1/6)+(1/2) (-1/2) 0 1 0;(-1/2) (1/2)+(1/3) (-1/3) 0 1;0 (-1/3) (1/3) -1 0;1 0 -1 0 0;0 1 0 0 0]
```

A =

```
0.6667    -0.5000         0         1.0000         0
-0.5000     0.8333    -0.3333         0         1.0000
0         -0.3333     0.3333    -1.0000         0
1.0000         0    -1.0000         0         0
0         1.0000         0         0         0
```

```
>> B=[0;0;2;6;18]
```

B =

```
0
0
2
6
18
```

```
>> inv(A)*B
```

ans =

```
19.0000
18.0000
13.0000
-3.6667
-1.1667
```

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

Yanda verilen devrede,

- Parametrik olarak düğüm ve ek denklemlerinin elde edilmesini adım adım gösteriniz (20p)
- Genelleştirilmiş düğüm denklemlerini elde ediniz ve matris şeklinde yazınız (10p).
- Bağımlı akım kaynağının gücünü, $p_5 = f(v_{d1}, v_{d2}, v_{d3}, R_1, g_5)$ biçiminde bulunuz (5p).

2. Adım: Referans düğümü dışındaki düğümler için Kirchoff'un Akım Yasası uygulanır. $n_d - 1$ tane düğüm için bağımsız akım denklemi elde edilmiş olur.

$$d_1 \text{ için: } i_1 + i_6 = 0$$

$$d_2 \text{ için: } -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

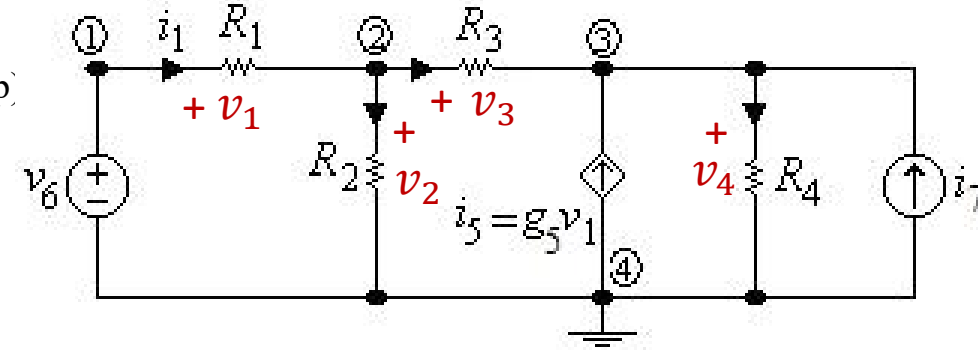
$$d_3 \text{ için: } -i_3 - i_5 + i_4 - i_7 = 0$$

3. Adım: Direnç elemanlarının tanım bağıntıları eleman akımları yerine yazılır.

$$d_1 \text{ için: } \frac{v_1}{R_1} + i_6 = 0$$

$$d_2 \text{ için: } -\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} = 0$$

$$d_3 \text{ için: } -\frac{v_3}{R_3} - i_5 + \frac{v_4}{R_4} - i_7 = 0$$



4. Adım: Direnç elemanı gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden eşitliklerde yerine yazılır.

$$d_1 \text{ için: } \frac{(v_{d1} - v_{d2})}{R_1} + i_6 = 0$$

$$d_2 \text{ için: } -\frac{(v_{d1} - v_{d2})}{R_1} + \frac{(v_{d2})}{R_2} + \frac{(v_{d2} - v_{d3})}{R_3} = 0$$

$$d_3 \text{ için: } -\frac{(v_{d2} - v_{d3})}{R_3} - i_5 + \frac{v_{d3}}{R_4} - i_7 = 0$$

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

5. Adım: Düğüm gerilimi ifadeleri eşitliğin sağında kalacak şekilde denklemler düzenlenir.

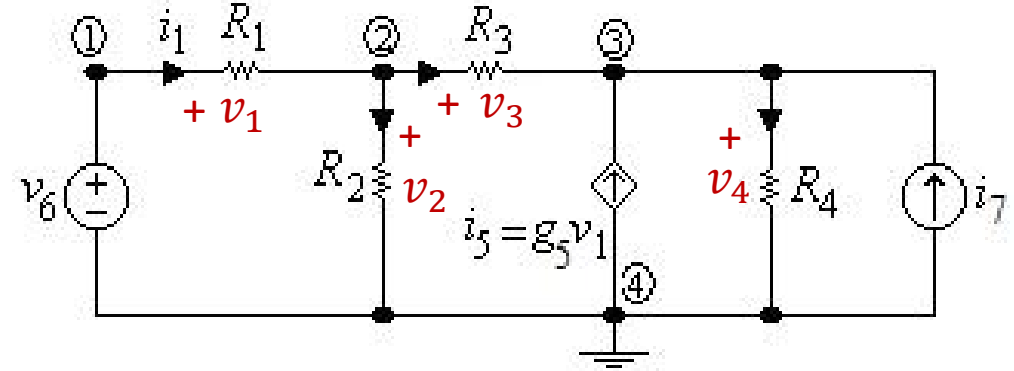
$$d_1 \text{ için: } v_{d1} \left(\frac{1}{R_1} \right) + v_{d2} \left(-\frac{1}{R_1} \right) = -i_6$$

$$d_2 \text{ için: } v_{d1} \left(-\frac{1}{R_1} \right) + v_{d2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + v_{d3} \left(-\frac{1}{R_3} \right) = 0$$

$$d_3 \text{ için: } v_{d2} \left(-\frac{1}{R_3} \right) + v_{d3} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = i_5 + i_7$$

Denklemler matrisel halde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_6 \\ 0 \\ i_5 + i_7 \end{bmatrix}$$



6. Adım: Ek denklemler yazılır. Direnç elemanları ve bağımsız akım kaynakları dışındaki tüm elemanlar için tanım bağıntıları yazılır.

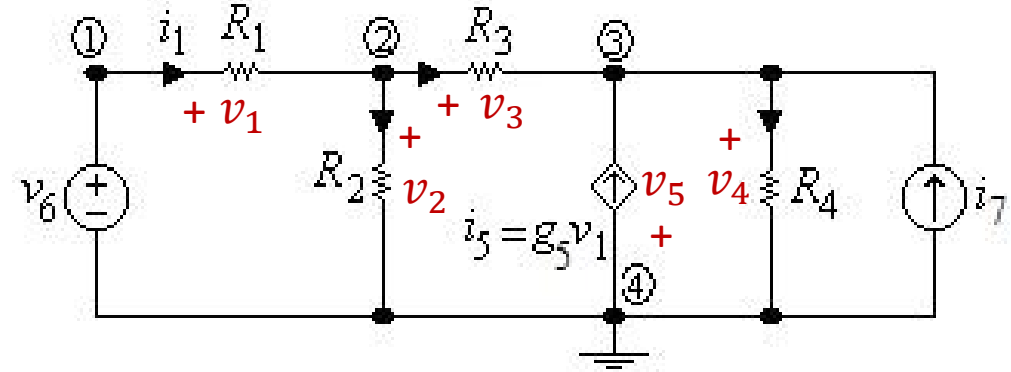
1. Ek denklem: $v_{d1} = v_6$

2. Ek denklem: $i_5 = g_5 v_1 \Rightarrow i_5 = g_5 (v_{d1} - v_{d2})$

Düğüm Gerilimleri Yöntemi İle Devre Çözümleri

b) Genelleştirilmiş Düğüm Gerilimleri Denklemlerinin Matrisel Biçimde Yazılması

$$\begin{bmatrix} G_4 & -G_1 & 0 & 0 & 1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_5 & -g_5 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d1} \\ v_{d2} \\ v_{d3} \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_7 \\ v_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



c) Bağımlı akım kaynağının gücü p5=?

$$p_5(t) = v_5(t)i_5(t)$$

$$v_5 = -v_{d3} \quad i_5 = g_5 v_1$$

$$p_5 = (-v_{d3})g_5(v_{d1} - v_{d2})$$

Düğüm Gerilimleri Yöntemine Sistematik Yaklaşım

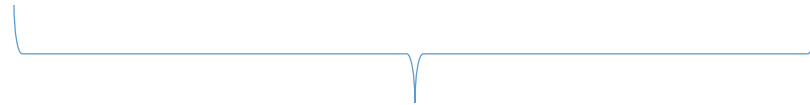
$$i_1 - i_2 + \frac{v_{d1} - v_{d2}}{R_2} - \frac{v_{d1} - v_{d3}}{R_3} = 0$$

1. Grup elemanlar:

Bağımsız akım kaynakları
Dirençler

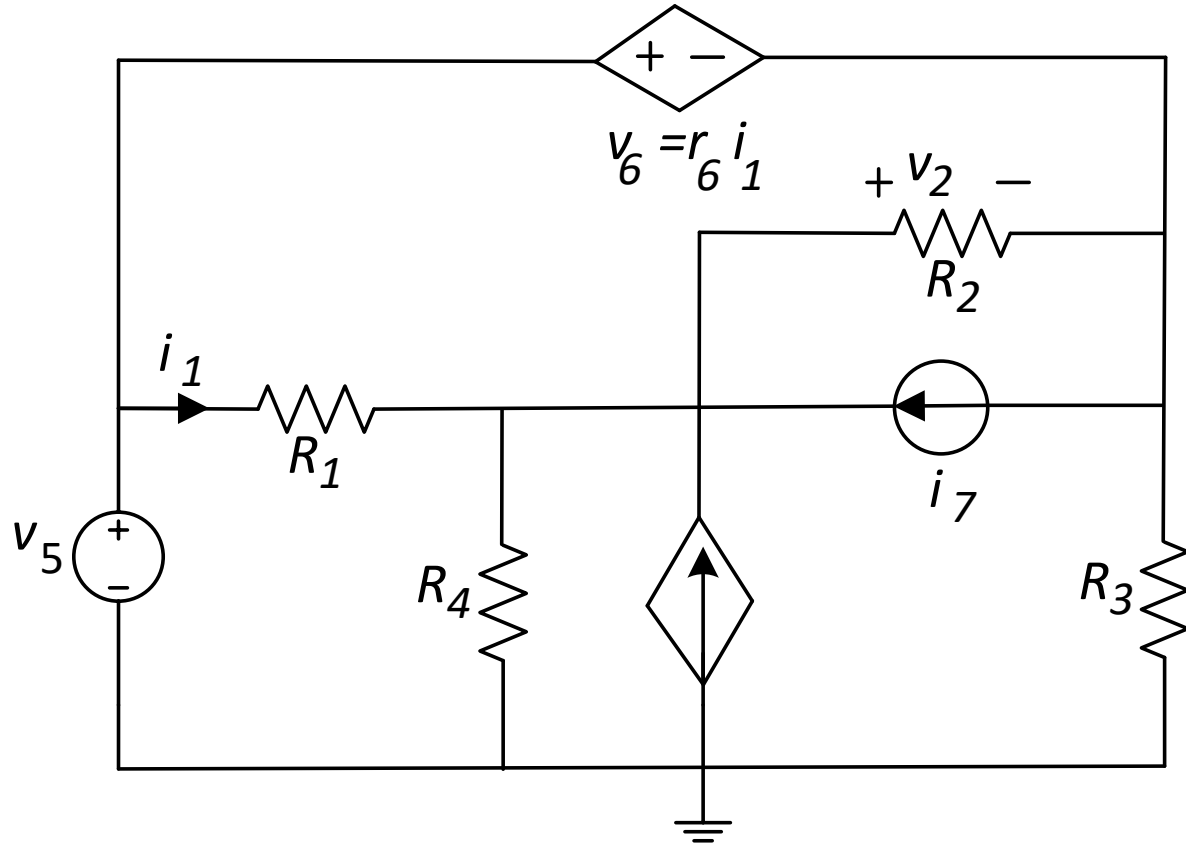
2. Grup elemanlar:

Bağımsız gerilim kaynakları
Bağımlı kaynaklar
Çok uçlular
Çok kapılılar



Topolojik eleman sayısı kadar ek denklem

Örnek: Verilen devrede bilinmeyenleri bulmak için gerekli düğüm denklemlerini elde ediniz.



Genelleştirilmiş Düğüm Denklemleri

$$[M] \begin{bmatrix} \text{tüm} \\ \text{bilinmeyen} \\ \text{değişkenler} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{bağımsız} \\ \text{kaynaklar} \end{bmatrix}$$

$$G_1 v_{d1} - G_2 v_{d2} + i_5 + i_6 = 0$$

$$v_{d1} = v_5$$

$$-G_1 v_{d1} + (G_1 + G_2 + G_4) v_{d2} - G_2 v_{d3} - i_8 = i_7$$

$$(r_6 G_1 - 1) v_{d1} - (r_6 G_1) v_{d2} + v_{d3} = 0$$

$$G_2 v_{d2} + (G_2 + G_3) v_{d3} - i_6 = -i_7$$

$$g_8 G_2 v_{d2} - g_8 G_2 v_{d3} - i_8 = 0$$

Genelleştirilmiş Akım Denklemleri

$$G_1 v_{d1} - G_2 v_{d2} + i_5 + i_6 = 0$$

$$-G_1 v_{d1} + (G_1 + G_2 + G_4) v_{d2} - G_2 v_{d3} - i_8 = i_7$$

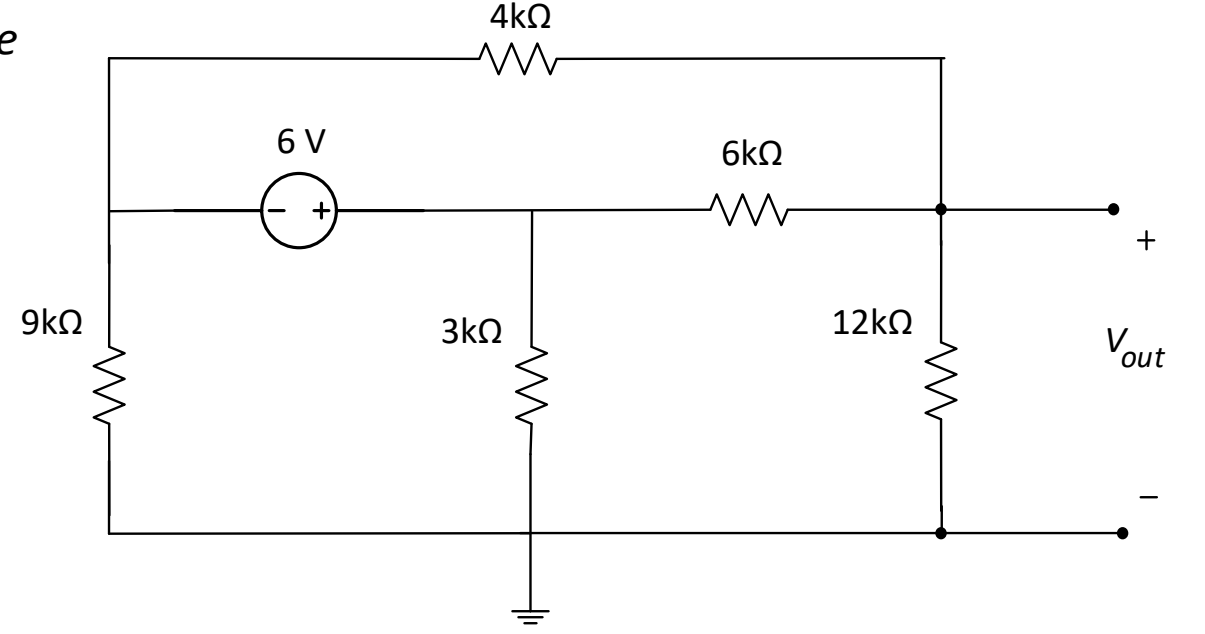
$$G_2 v_{d2} + (G_2 + G_3) v_{d3} - i_6 = -i_7$$

$$v_{d1} = v_5$$

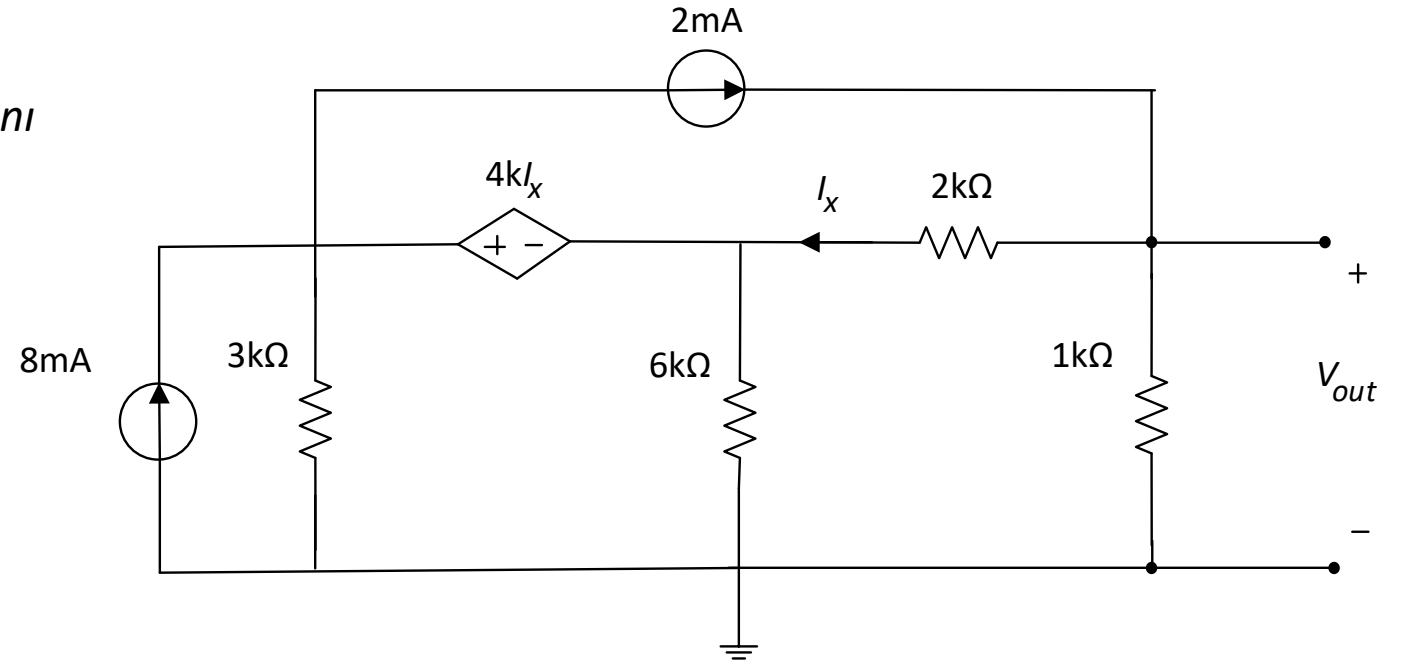
$$(r_6 G_1 - 1) v_{d1} - (r_6 G_1) v_{d2} + v_{d3} = 0$$

$$g_8 G_2 v_{d2} - g_8 G_2 v_{d3} - i_8 = 0$$

Örnek: Aşağıda verilen devrenin eleman akımlarını çevre akımlarından yararlanarak bulunuz. v_{out} gerilimini hesaplayınız.



Örnek: Aşağıda verilen devrede Kirchhoff yasalarını kullanarak v_{out} gerilimini hesaplayınız.



ÖDEV 1 Verilecek!

Ödev Teslim Tarihi: 04.04.2025, saat: 23:45