

EHM2141 LOJİK DEVRELER

2024-2025 BAHAR DÖNEMİ

HAFTA 4 – DERS 1

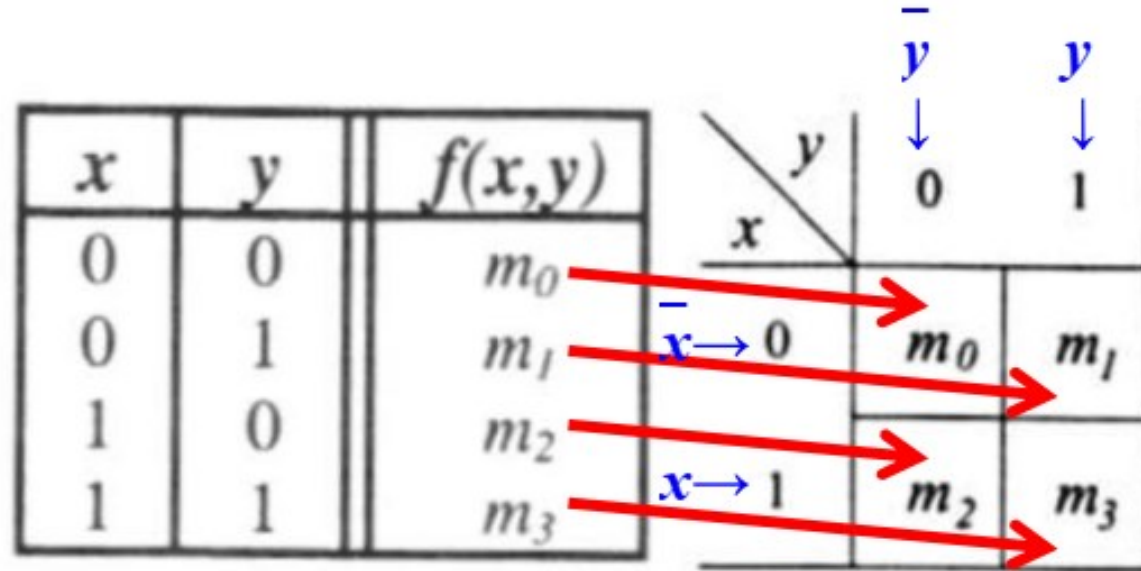
11 Mart 2025

Dr. Sibel ÇİMEN

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Karnaugh Diyagramları İle Boole Fonksiyonlarının Minimalleştirilmesi

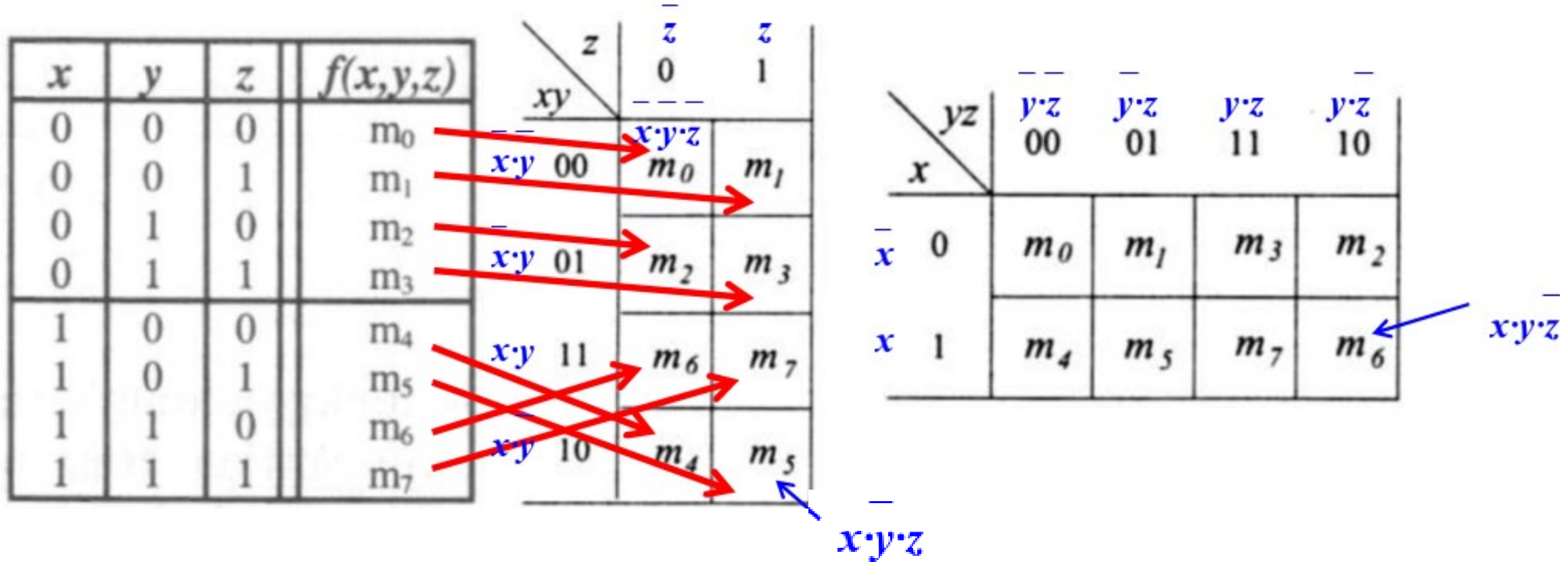
İki değişken için doğruluk tablosundan diyagrama geçiş



BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Karnaugh Diyagramları İle Boole Fonksiyonlarının Minimalleştirilmesi

Üç değişken için doğruluk tablosundan diyagrama geçiş



BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Dört değişken için doğruluk tablosundan diyagrama geçiş

<i>m</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>	<i>f(x,y,z,w)</i>
0	0	0	0	0	m_0
1	0	0	0	1	m_1
2	0	0	1	0	m_2
3	0	0	1	1	m_3
4	0	1	0	0	m_4
5	0	1	0	1	m_5
6	0	1	1	0	m_6
7	0	1	1	1	m_7
8	1	0	0	0	m_8
9	1	0	0	1	m_9
10	1	0	1	0	m_{10}
11	1	0	1	1	m_{11}
12	1	1	0	0	m_{12}
13	1	1	0	1	m_{13}
14	1	1	1	0	m_{14}
15	1	1	1	1	m_{15}

		$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot w$			
		$\bar{z} \cdot \bar{w}$	$\bar{z} \cdot w$	$z \cdot \bar{w}$	$z \cdot w$
xy	zw	00	01	11	10
	$\bar{x} \cdot \bar{y}$ 00	m_0	m_1	m_3	m_2
$\bar{x} \cdot y$ 01		m_4	m_5	m_7	m_6
$x \cdot y$ 11		m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$x \cdot \bar{y}$ 10		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

<i>m</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>	<i>f(x,y,z,w)</i>
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

<i>zw</i> \ <i>xy</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

$$f(x,y,z,w) = x \cdot y + z \cdot w$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

$ab \backslash cd$		d			
		00	01	11	10
00					
$\bar{a} \cdot b$ 01			1	1	
11					
10					

$$f(a, b, c, d) = \bar{a} \cdot b \cdot d$$

$ab \backslash cd$		d			
		00	01	11	10
$\bar{a} \cdot \bar{b}$ 00		1			1
$\bar{a} \cdot b$ 01			1	1	
b 11				1	
10					

$$f(a, b, c, d) = \bar{a} \cdot b \cdot d + b \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

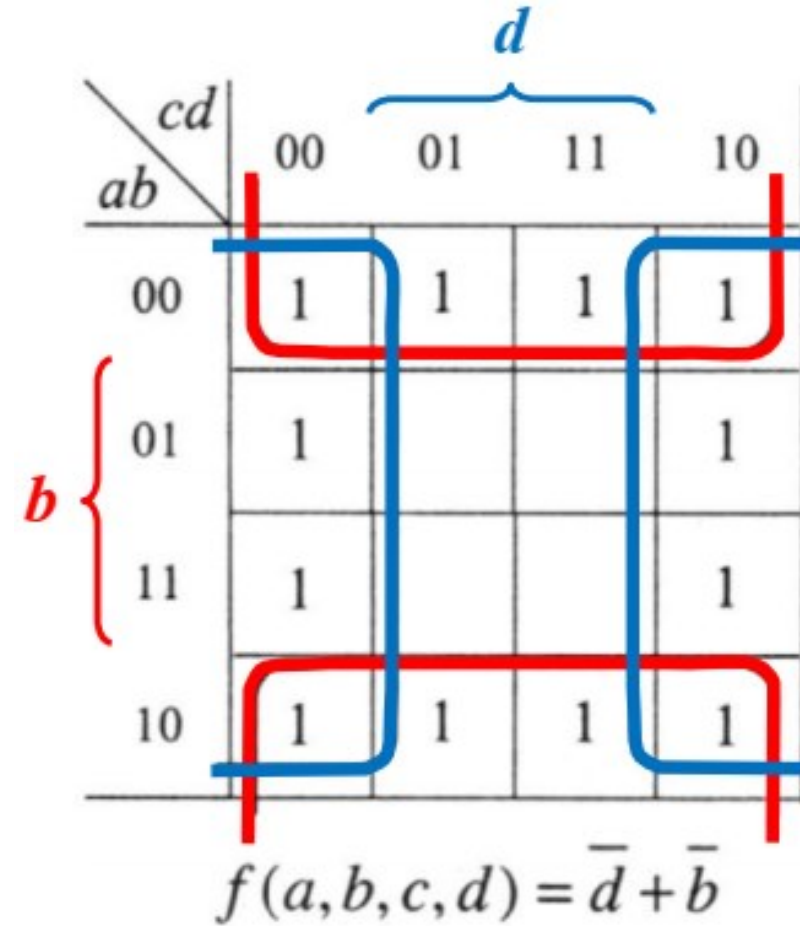
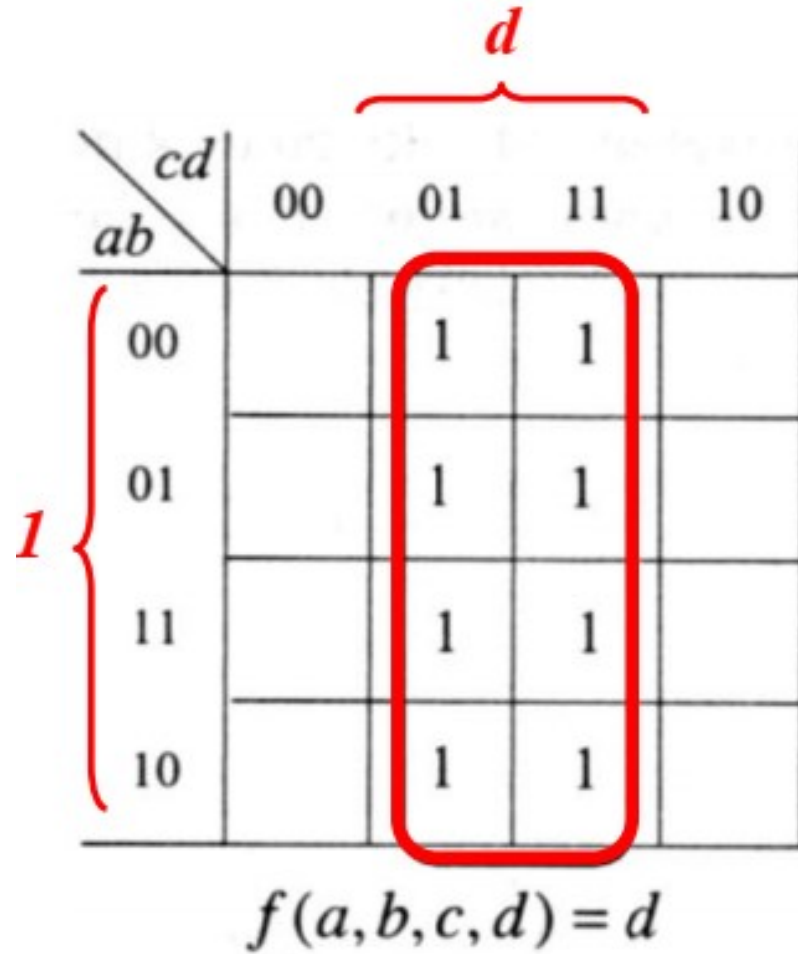
		\bar{c}		c	
		00	01 d	11	10
a	\bar{a}				
	01 b		1	1	
	11		1	1	
	10				

$$f(a, b, c, d) = b \cdot d$$

		d			
		00	01	11	10
b	\bar{a}	1			1
	01				
	11 a	1			1
	10	1			1

$$f(a, b, c, d) = \bar{b} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{d}$$

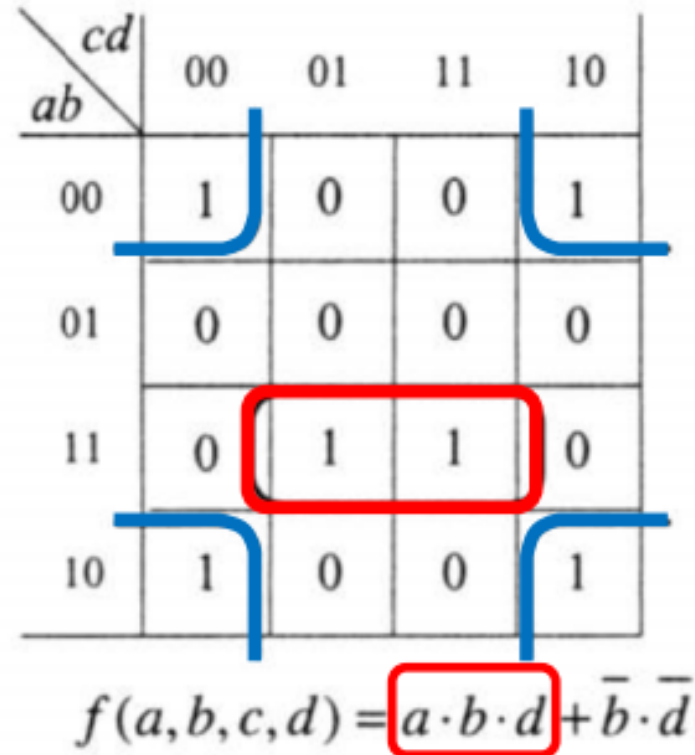
BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME



BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

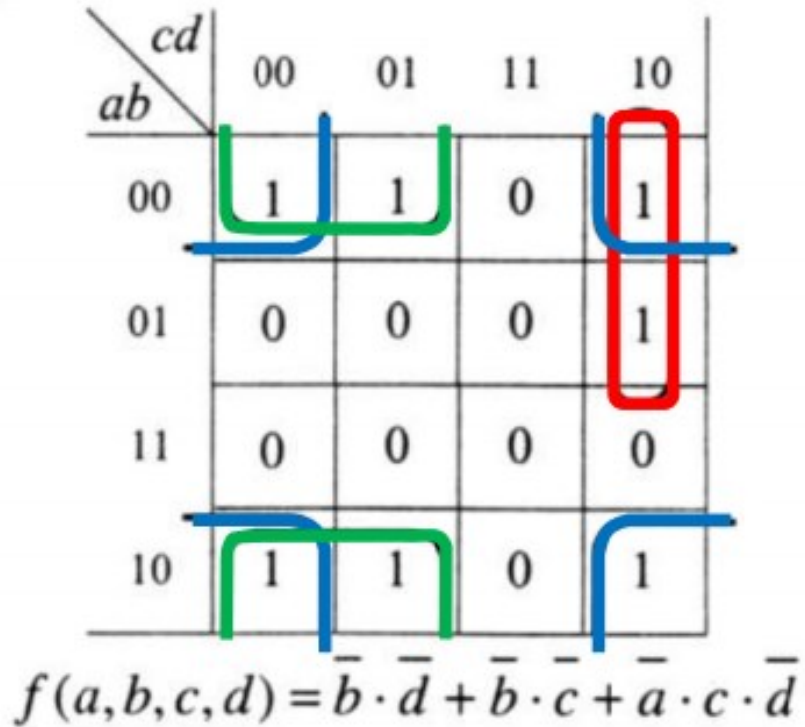
$$f(a,b,c,d) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot d$$

<i>m</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f(a,b,c,d)</i>
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

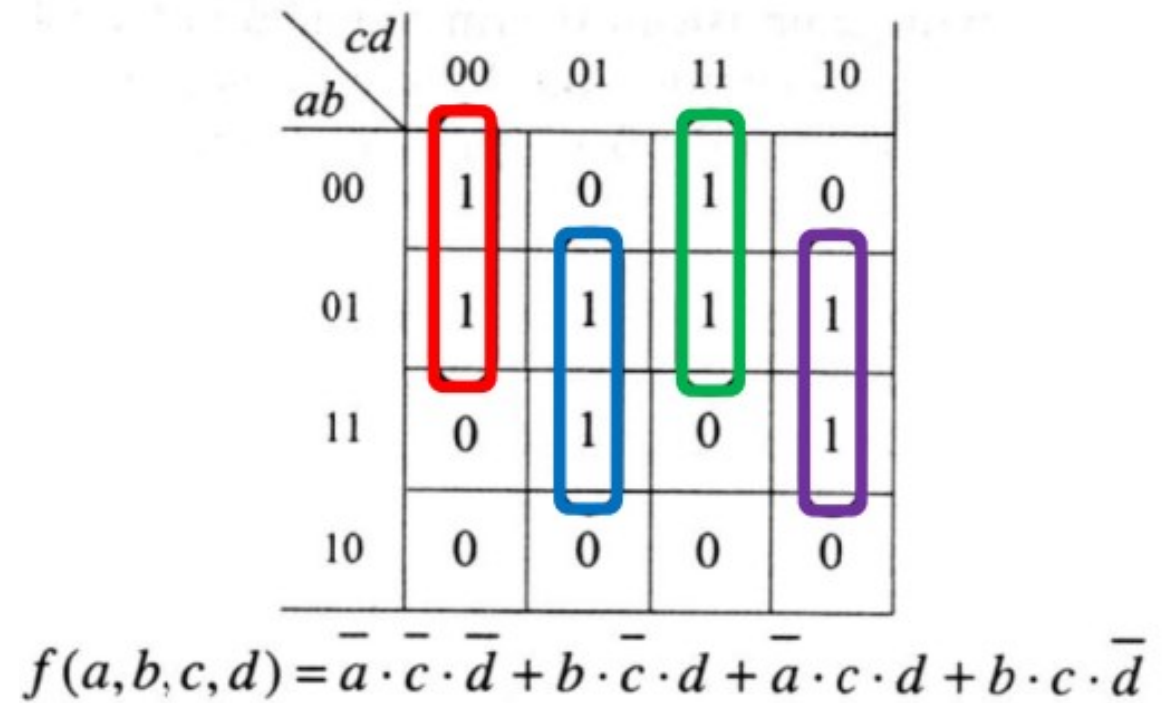


BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

$$f(a,b,c,d) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$



$$f(a,b,c,d) = \sum (0,3,4,5,6,7,13,14)$$



BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

$f(a,b,c) = \sum (0,1,4,5)$

\bar{b}

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0

$f(a,b,c) = \bar{b}$

$ab \backslash c$	0	1
00	1	1
01	0	0
11	0	0
10	1	1

b

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Maksterm biçiminde indirgeme

c

$c+d \quad c+d \quad c+d \quad c+d$

$ab \backslash cd$		c			
		00	01	11	10
$a+b$	00	1	1	0	1
$a+b$	01	0	0	0	1
\bar{b}	11	0	0	0	0
$\bar{a}+\bar{b}$	10	1	1	0	1

$f(a,b,c,d) = [\bar{c} + \bar{d}] \cdot [\bar{a} + \bar{b}] \cdot [c + \bar{b}]$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

w	x	y	z	F(w,x,y,z)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Örnek: Yandaki doğruluk tablosuna ait Boole fonksiyonunu a) Çarpımlar toplamı biçiminde, b) Topamlar çarpımı biçiminde olacak şekilde minimal fonksiyonu bulunuz.

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{z} + y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f(x, y, z) = (\bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + \bar{z}) \cdot (x + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Örnek: $f(a, b, c, d, e) = \sum m(0,1,4,5,6,11,12,14,16,20,22,28,30,31)$ Boole fonksiyonunun çarpımlar toplamı biçiminde minimal fonksiyonunu bulunuz.

a=0 için

bc \ de	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	0

a=1 için

bc \ de	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

$$f(x, y, z) = c \cdot \bar{e} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot \bar{d} \cdot \bar{e} + a \cdot b \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d \cdot e$$

6 değişkenli fonksiyon için ? Peki daha fazla değişken olursa Karnaugh diyagramları nasıl kullanılabilir?

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Keyfi Çıkışlar- Eksik Boole İşlevi (Don't Care)

Çıkış değerinin 0 veya 1 değeri almasının önemli olmadığı çıkışlara keyfi çıkışlar denir. Burada ilgili girişler hiçbir şekilde gelmediği için çıkışların değerinin ne olduğu önemli olmamaktadır.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

<i>a</i> \ <i>bc</i>	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	ϕ	1

$$f(a, b, c) = a + \bar{b} \cdot c$$

$$f(x, y, z) = \sum m(1, 4, 5, 6) + \sum \phi_m(7)$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Keyfi Çıkışlar- Eksik Boole İşlevi (Don't Care)

$$f(a,b,c,d) = \sum (3,7,11,12,15) + \sum_{\phi} (0,10,13,14)$$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	$\phi=0$	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	$\phi=1$	1	$\phi=1$
10	0	0	1	$\phi=0$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	$\phi=0$	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	$\phi=1$	1	$\phi=1$
10	0	0	1	$\phi=0$

$$f(a,b,c,d) = c \cdot d + a \cdot b$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Örnek:

1. $f(x,y,z,w) = \prod M(0, 1, 2, 5, 8, 10, 13, 15) \cdot \prod \phi(6, 7, 9)$ fonksiyonunun **(30p) 2019-2020 Güz Dönemi Vize;**
 - a) Doğruluk tablosunu yazınız.
 - b) Karnaugh diyagramını çiziniz.
 - c) Çarpımlar toplamı şeklinde minimal fonksiyonunu bulunuz ve elde ettiğiniz minimal fonksiyonu ilişkin lojik devreyi lojik kapıları kullanarak çiziniz.
 - d) Devreyi sadece VEDEĞİL (NAND) kapıları kullanarak gerçekleyiniz.
 - e) Toplamlar çarpımı şeklinde minimal fonksiyonunu bulunuz ve devresini çiziniz.
 - f) Devreyi sadece VEYADEĞİL (NOR) kapıları kullanarak gerçekleyiniz.

a)

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>F(a,b,c,d)</i>
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	φ
0	1	1	1	φ
1	0	0	0	0
1	0	0	1	φ
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$$f(a,b,c,d) = \prod M(0, 1, 2, 5, 8, 10, 13, 15). \prod \phi(6, 7, 9)$$

b)

<i>ab</i> \ <i>cd</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	φ	φ
11	1	0	0	1
10	0	φ	1	0

c)

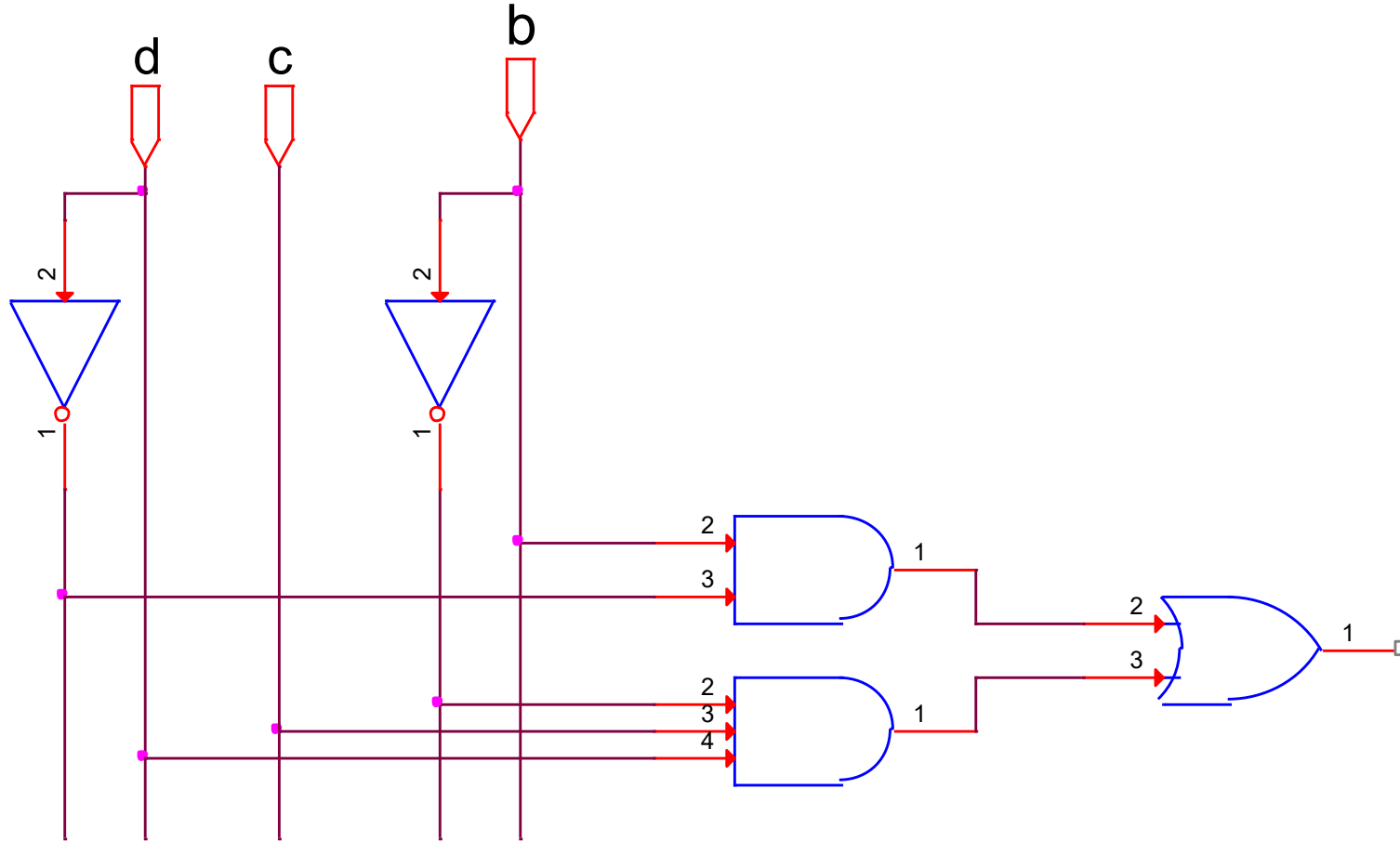
<i>ab</i> \ <i>cd</i>	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	φ	φ
11	1	0	0	1
10	0	φ	1	0

$$f(a, b, c) = b \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c \cdot d$$

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

$$f(a, b, c) = b \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c \cdot d$$

c)

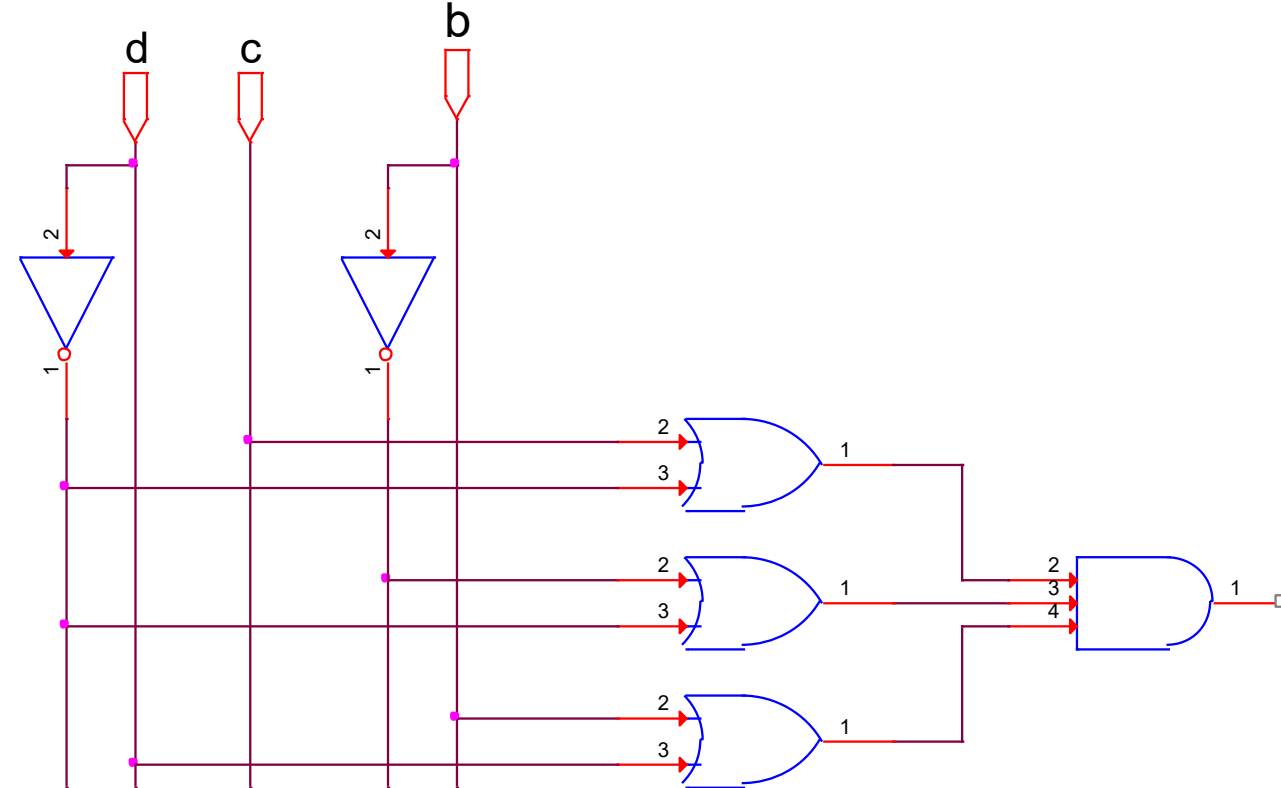


e)

BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	ϕ	ϕ
11	1	0	0	1
10	0	ϕ	1	0

$$f(a, b, c) = (c + \bar{d}). (\bar{b} + \bar{d}). (b + d)$$



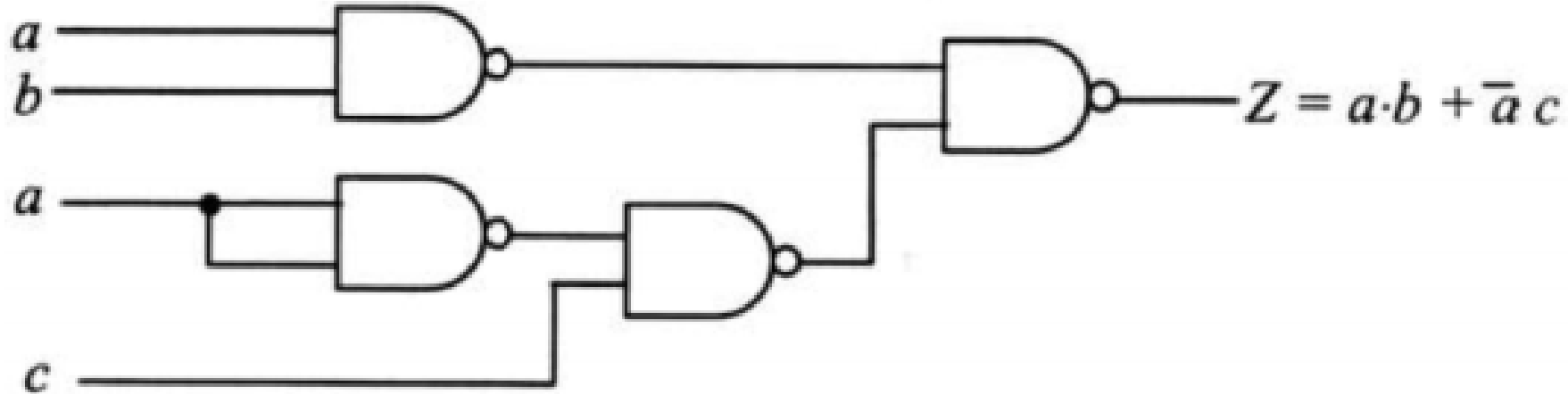
BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

İndirgenmiş ifadelerin aynı tür kapılar ile gerçekleştirilmesi

Aynı tip kapılar ile bir Boole fonksiyonu gerçekleştirilebilir mi? Bu sağlanırsa daha az tümdevre kullanmak mümkün müdür?

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a \cdot b + \bar{a} \cdot c \\ &= \overline{\overline{a \cdot b + \bar{a} \cdot c}} = \overline{\overline{a \cdot b} \cdot \overline{\bar{a} \cdot c}} \end{aligned}$$

Fonksiyon minterm biçiminde verildiğinde **VEDEĞİL** kapılarıyla gerçekleştirilmesi



BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

İndirgenmiş ifadelerin aynı tür kapılar ile gerçekleştirilmesi

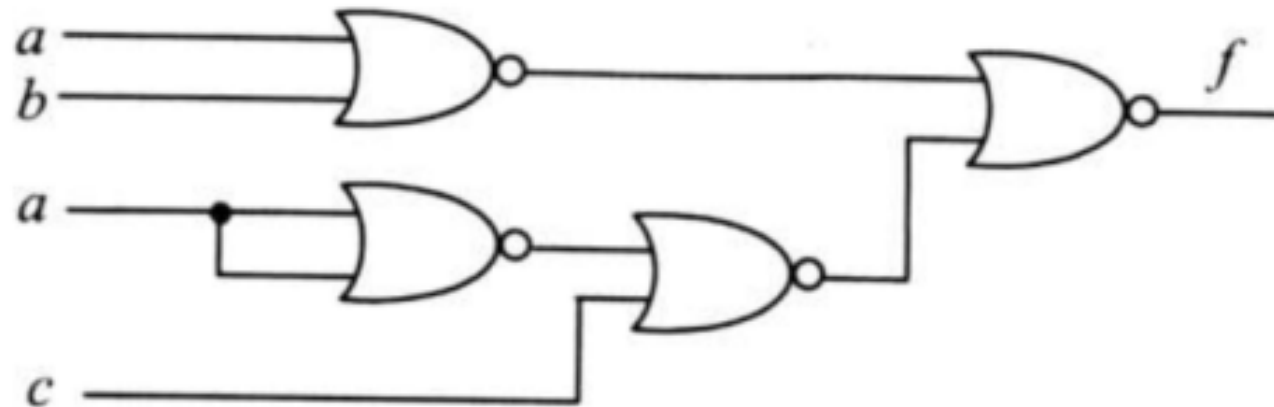
Aynı fonksiyonun **VEYADEĞİL** kapılarıyla gerçekleştirilmesi

$$f(a,b,c) = [a+b] \cdot [\bar{a}+c]$$

$$\overline{f(a,b,c)} = \overline{[a+b] \cdot [\bar{a}+c]}$$

$$= \overline{[a+b]} + \overline{[\bar{a}+c]}$$

$$\overline{\overline{f(a,b,c)}} = f(a,b,c) = \overline{\overline{[a+b]}} + \overline{\overline{[\bar{a}+c]}}$$



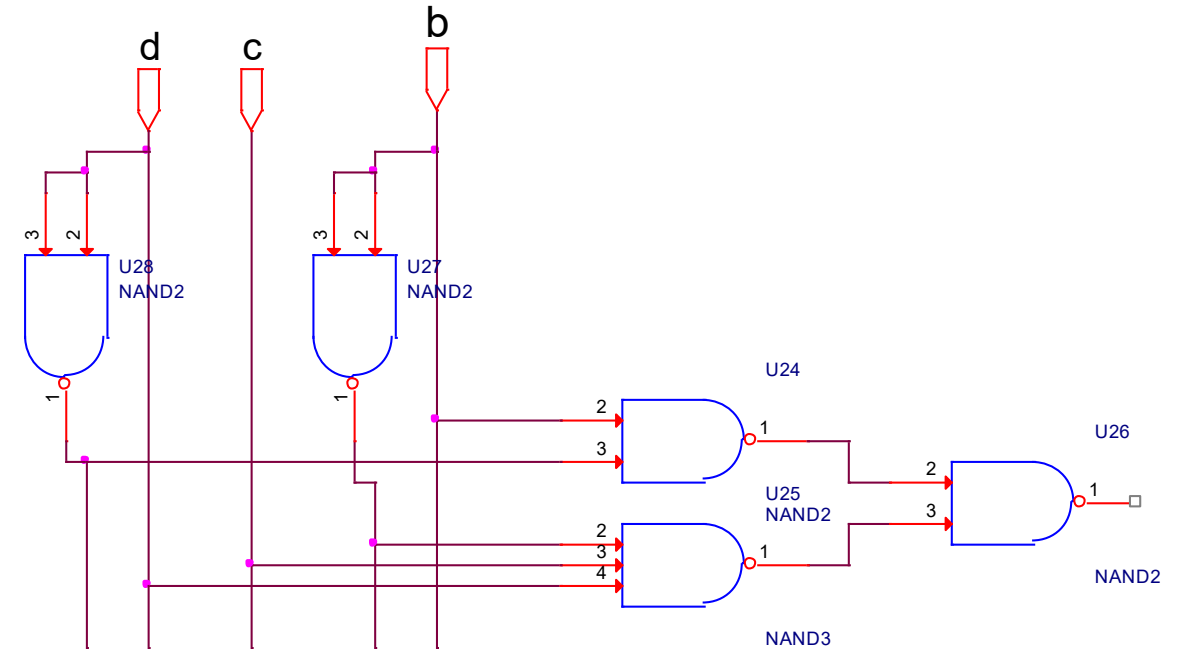
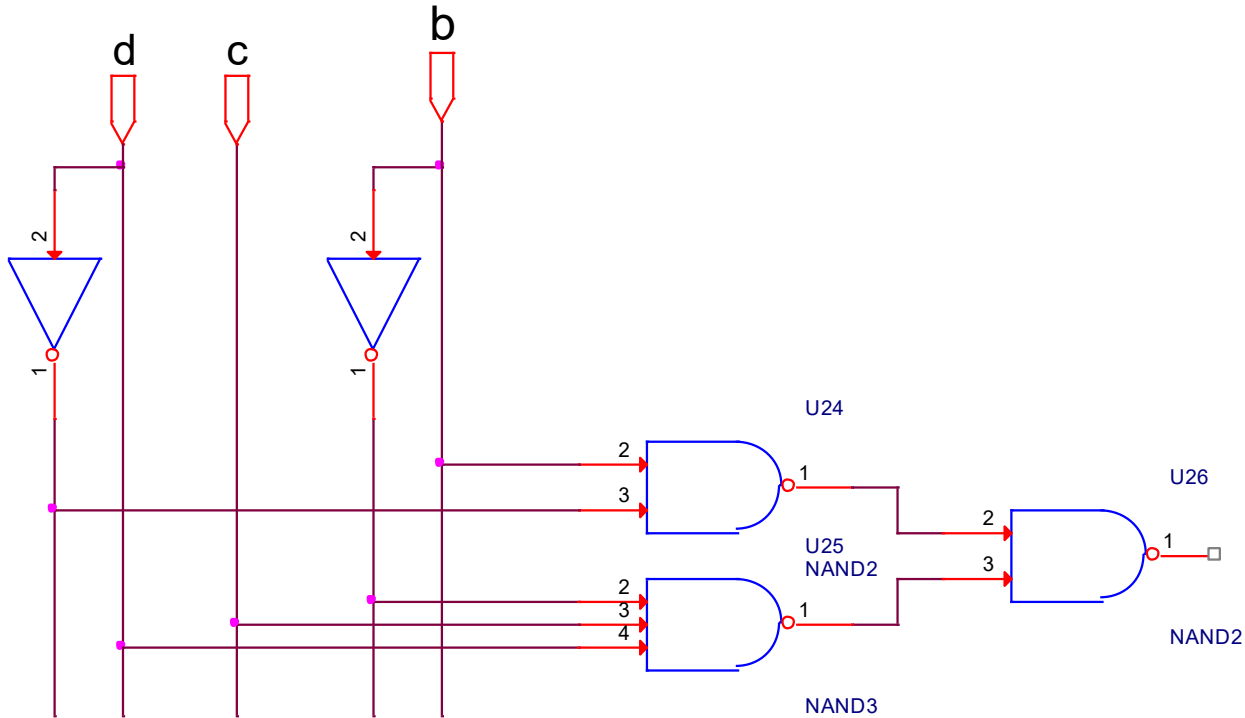
BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

d) $f(a, b, c) = b \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c \cdot d$ aynı tip kapı ile gerçekleyelim.

$$f(a, b, c) = b \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c \cdot d$$

$$f(a, b, c) = \overline{\overline{b \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c \cdot d}}$$

$$f(a, b, c) = \overline{(b \cdot \bar{d}) \cdot (\bar{b} \cdot c \cdot d)}$$
 Devre VEDEĞİL (NAND) kapıları ile gerçekleştirilebilir.



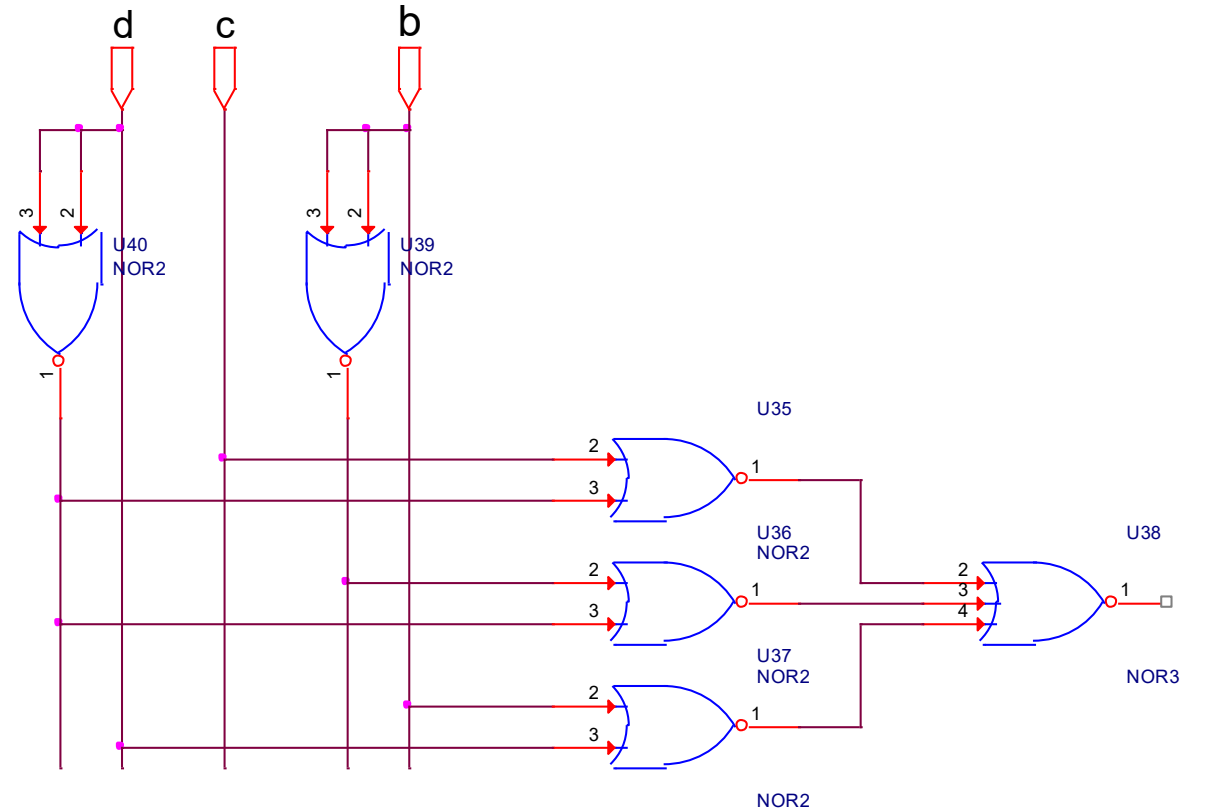
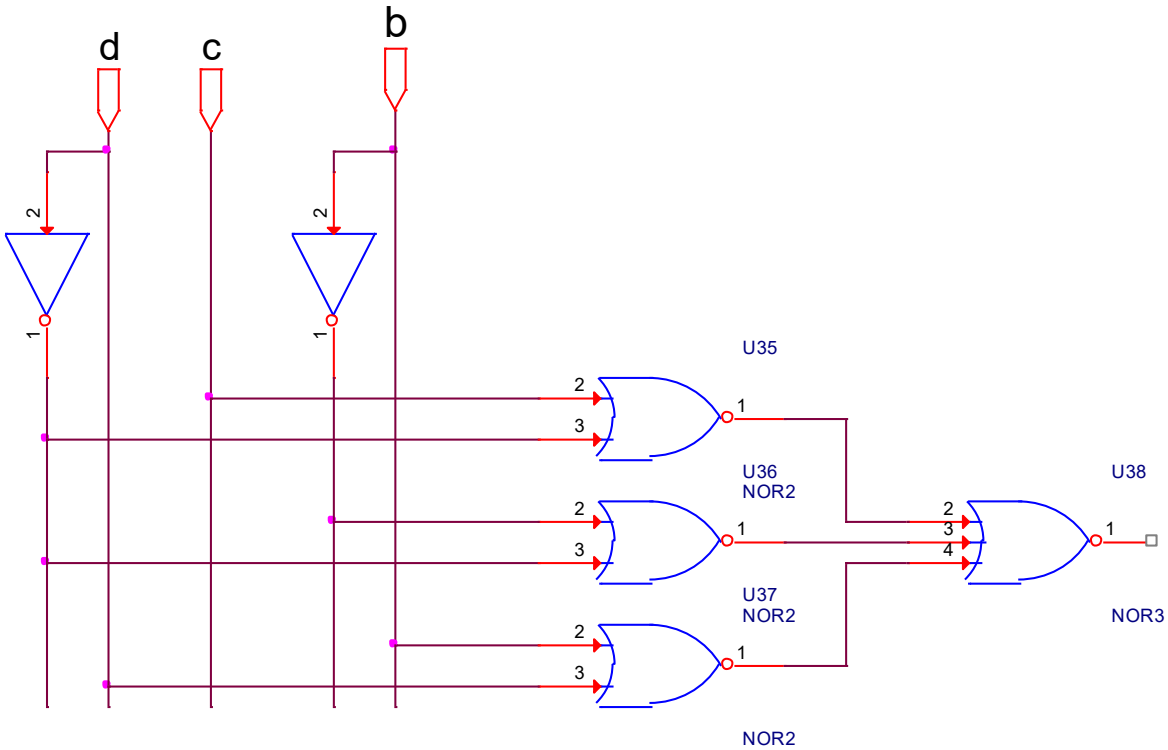
BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

f) $f(a, b, c) = (c + \bar{d}).(\bar{b} + \bar{d}).(b + d)$ aynı tip kapı ile gerçekleyelim.

$$f(a, b, c) = (c + \bar{d}).(\bar{b} + \bar{d}).(b + d)$$

$$f(a, b, c) = \overline{\overline{(c + \bar{d}).(\bar{b} + \bar{d}).(b + d)}} = \overline{\overline{(c + \bar{d})} + \overline{\overline{(\bar{b} + \bar{d})}} + \overline{\overline{(b + d)}}}$$

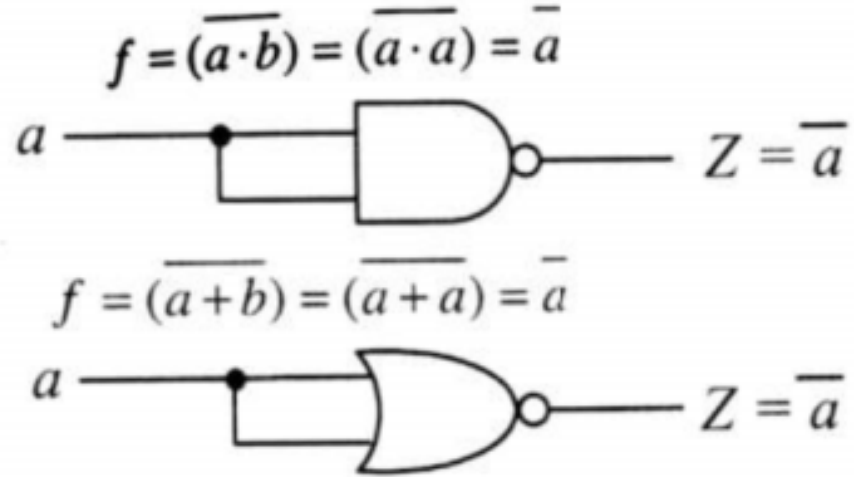
Devre VEYADEĞİL (NOR) kapıları ile gerçekleştirilebilir.



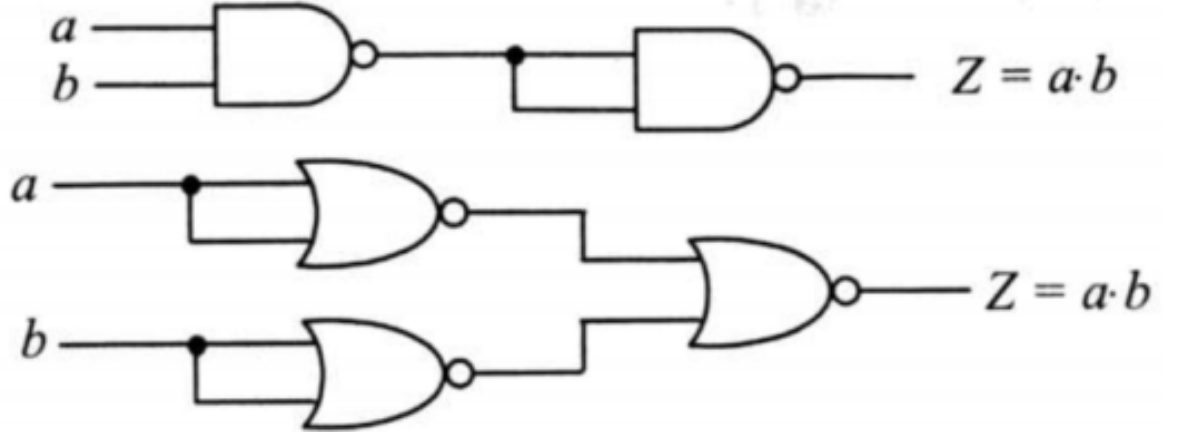
BOOLE FONKSİYONLARI ve MİNİMALLEŞTİRME

Türetilmiş kapılar ile temel lojik işlemlerin elde edilmesi

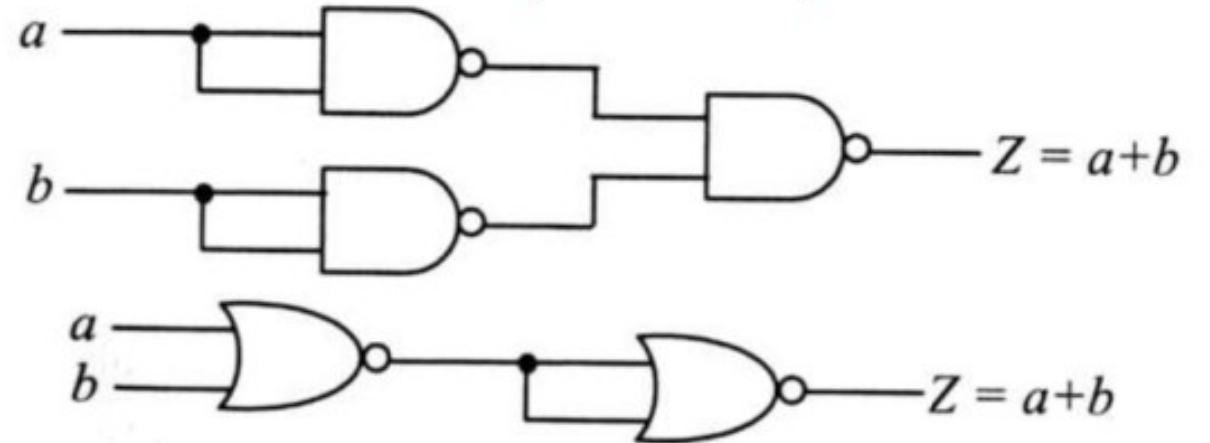
VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapılarından DEĞİL kapısının elde edilmesi



VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapılarından VE kapısının elde edilmesi



VEDEĞİL ve VEYADEĞİL kapılarından VEYA kapısının elde edilmesi



REFERANSLAR:

1. 'Lojik Devreler', Tuncay UZUN Ders Notları, http://tuncayuzun.com/Dersnot_LDT.htm, 2020.
2. 'Lojik Devre Tasarımı', Taner ASLAN ve Rifat ÇÖLKESEN, Papatya Yayıncılık, 2013.
3. M. Morris Mano, Sayısal Tasarım (Çeviri), Literatür Yayıncılık: İstanbul, 2003.