GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

ELM 368 SAYISAL İŞARET İŞLEME LABORATUVARI

ÖN HAZIRLIK ÇALIŞMASI

Laboratuvar 6

1 AMAÇ

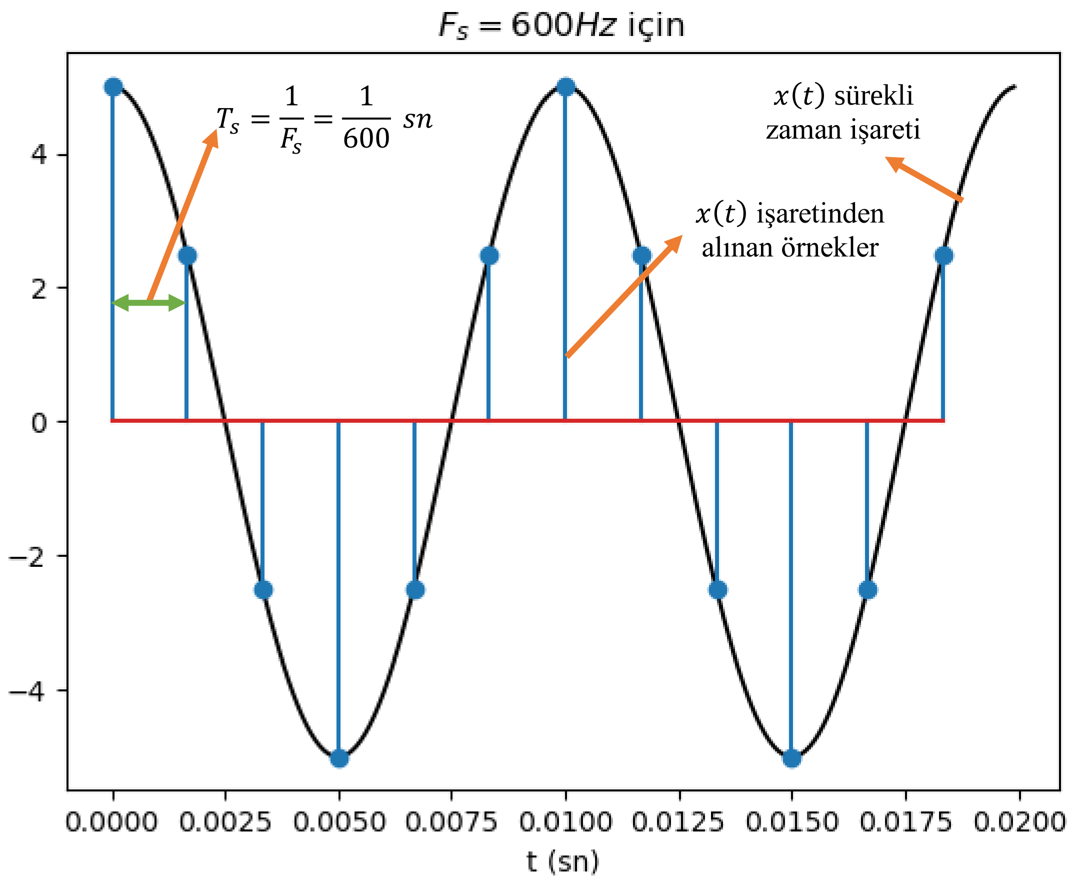
- Örnekleme frekansının değiştirilmesi
- Seyrek örnekleme (down sample)
  - Seyrek örneklemenin zaman domaininde incelenmesi
  - Seyrek örneklemenin frekans domaininde incelenmesi
  - Örtüşme önleyici filtre
- Sık örnekleme (up sample)
  - Sık örneklemenin zaman domaininde incelenmesi
  - Sık örneklemenin frekans domaininde incelenmesi
  - İnterpolasyon işlemi
- Örnekleme oranının tamsayı olmaması durumu

2 GİRİŞ

2.1 Örnekleme frekansının değiştirilmesi

Ayrık zamanlı bir işaretin örnekleme frekansının değiştirilmesi, sayısal işaret işlemenin birçok uygulamasında karşılaşılmaktadır. Örneğin, müzik çalar için örnekleme frekansı 44.1 kHz iken, sayısal ses teybi (DAT) sistemlerinde örnekleme frekansı 48 kHz, sayısal yayınlarda ise 32 kHz'dir. Görüldüğü üzere farklı sistemler farklı örnekleme frekanslarına sahip olabilmektedir. Birçok uygulamada işaretlerin örnekleme frekanslarının birbirleri arasında dönüştürülmesi veya farklı örnekleme frekanslarına sahip ayrık zamanlı işaretlerin birbirlerine uydurulması gerekebilir. Örneğin, 44.1 kHz'lik bir CD sisteminden 48 kHz DAT sistemine müzik kaydedilmesi durumu buna bir örnektir. Dolayısıyla öncelikle bu bölümde örnekleme frekansının ne anlama geldiğine değinilecek ardından ise bu frekansın değiştirilmesi aşamaları açıklanacaktır.

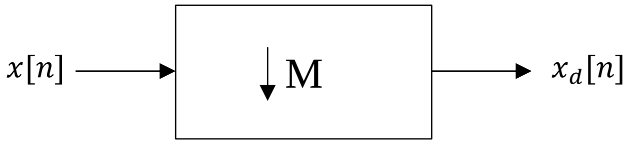
Şekil 1'de görüldüğü üzere sinüzoidal bir $x(t)$ sürekli zamanlı işareti 600 Hz ile örneklenerek, alınan örnekler ile $x[n]$ ayrık zamanlı işareti oluşturulacaktır. Şekilde görüldüğü üzere sürekli zamanlı işaretten alınan her örneğin arasında T_s zaman farkı vardır. Dolayısıyla örnekleme frekansının değiştirilmesi aslında bu zaman farkının değiştirilmesi anlamına gelmektedir. Bu işlem ise sürekli zamanlı işaretten alınan örnekler artırılarak (sık örnekleme) veya azaltılarak (seyrek örnekleme) yapılmaktadır.



Şekil 1. T_s ve F_s kavramlarının anlaşılabilmesi için verilen örnek grafik

3 SEYREK ÖRNEKLEME

Ayrık zamanlı bir $x[n]$ işaretinin M ile seyrek örneklenmesini gösteren blok diyagram Şekil 2'de, seyrek örneklemede giriş işareti ile çıkış işareti arasındaki ilişkiyi ifade eden eşitlik ise Eş. (1)'de verilmektedir.



Şekil 2. Seyrek örnekleme blok diyagramı

$$x_d[n] = x[nM] \tag{1}$$

Blok diyagramda görülen M tamsayı değeri, seyrek örnekleme oranını belirtmektedir. Ayrık zamanlı $x_d[n]$ çıkış işareti, $x[n]$ giriş işaretinin her M katı örneğinin alınıp diğerlerinin atılmasıyla elde edilir. Dolayısıyla giriş ve çıkış işaretinin örnekleme frekansları arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

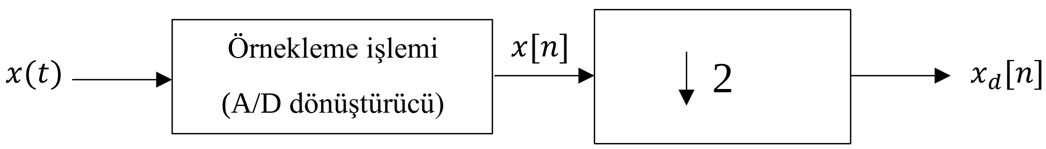
$$F_{s_d} = \frac{F_s}{M} \tag{2}$$

Eşitlikte yer alan F_{s_d} terimi çıkış işaretinin örnekleme frekansını, F_s ise giriş işaretinin örnekleme frekansını belirtmektedir.

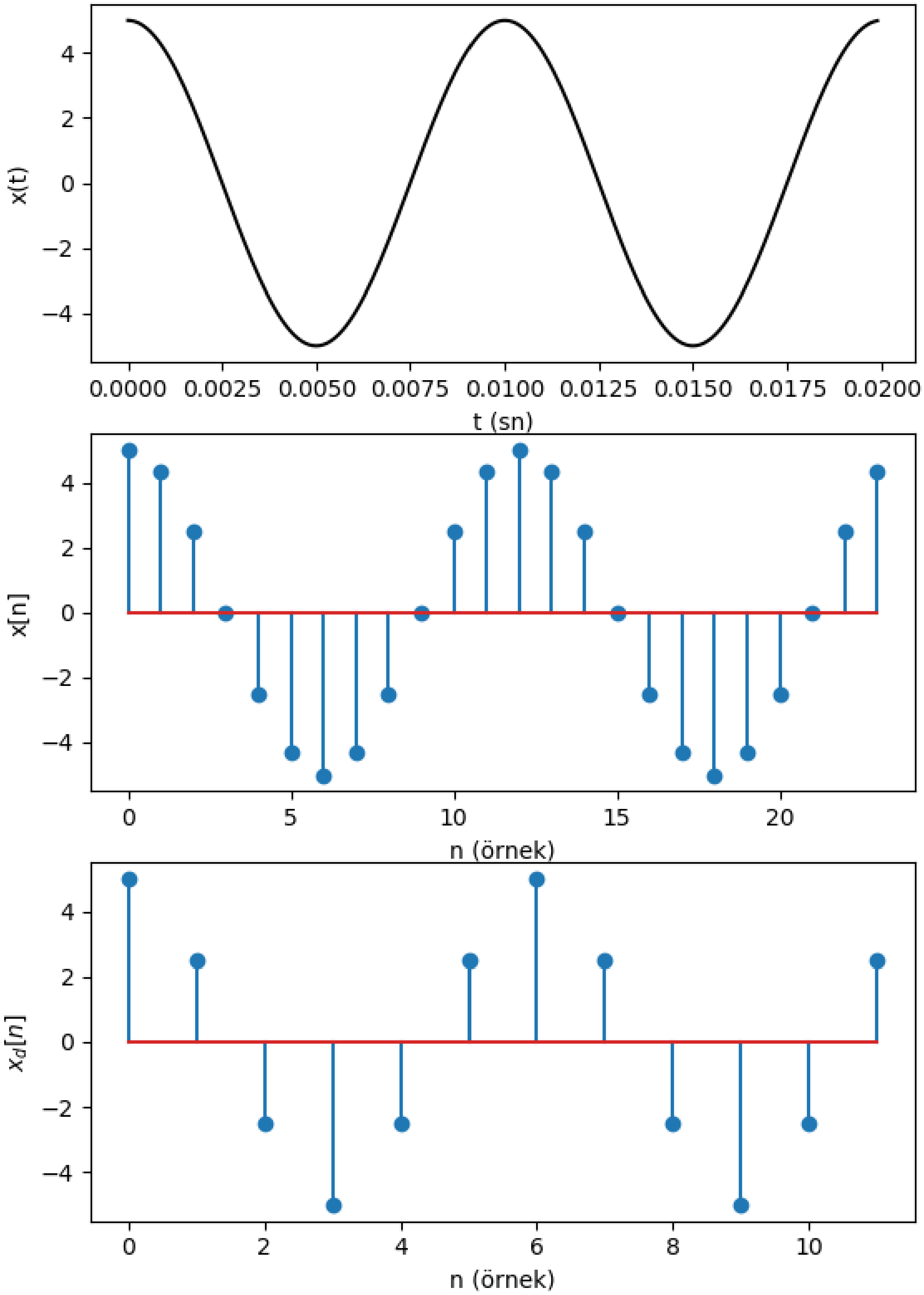
3.1 Seyrek örneklemenin zaman domaininde incelenmesi

Örnek 1: Seyrek örneklemenin zaman domaininde incelenmesi için Şekil 4'te verilen blok diyagramdaki işlemler sonucunda Şekil 4'te elde edilen grafikleri inceleyelim. Şekilde yer alan ilk grafikte görüldüğü üzere sinüzoidal bir sürekli zamanlı $x(t) = 5\cos(200\pi t)$ işaretimiz var. Daha sonra bu işaret $F_s = 1200\ Hz$ ile örneklenerek $x[n]$ işareti elde edilmektedir. Ardından elde edilen $x[n]$ işareti M=2 ile seyrek örneklemeye tabi tutulmuş ve şekilde verilen $x_d[n]$ işaretinin grafiği elde edilmiştir.

Örnek1 için verilen grafiklerin elde edilmesi için **Örnek1.ipynb** kodunu çalıştırınız.

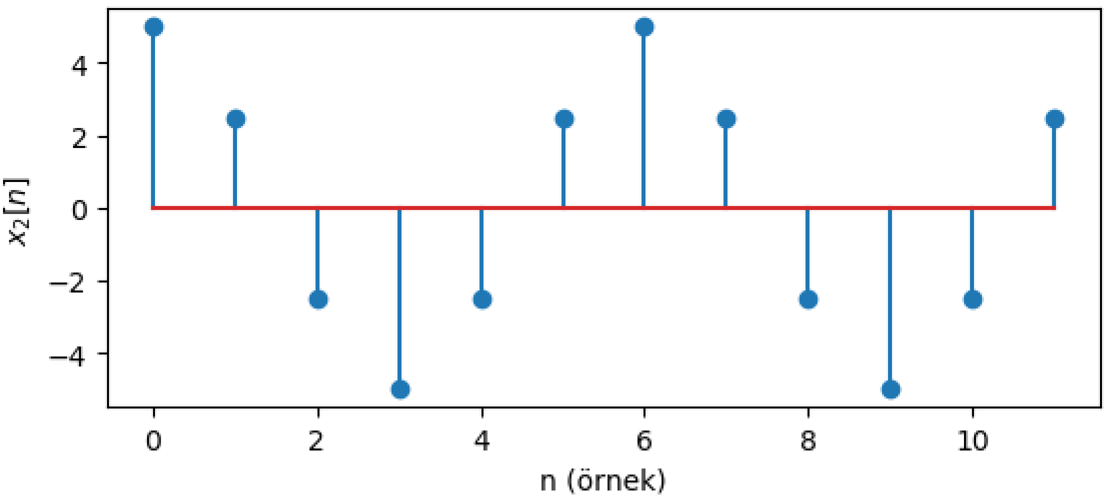


Şekil 3. Örnek 1 blok diyagramı



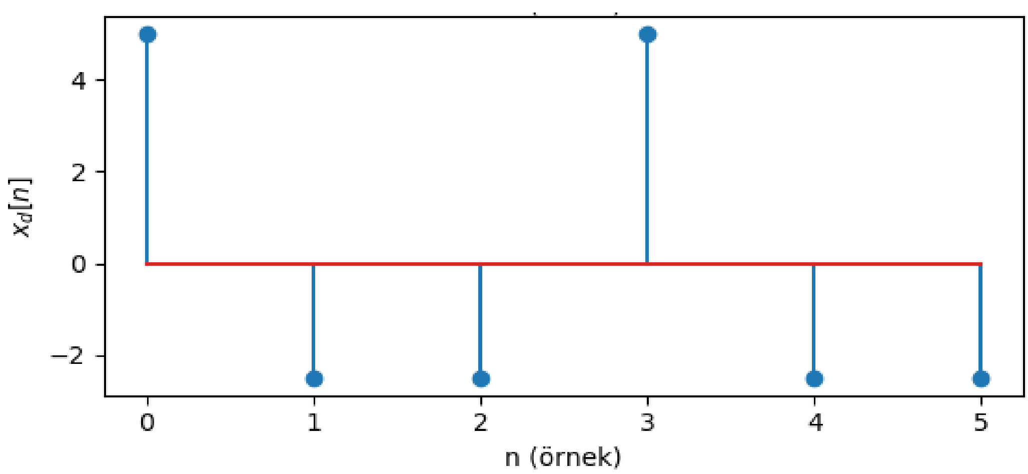
Şekil 4. $\boldsymbol{x(t)}$ işareti, $\boldsymbol{x(t)}$ işaretinin $\boldsymbol{F_s = 1200\ Hz}$ ile örneklenmesi sonucu elde edilen $\boldsymbol{x[n]}$ işareti ve $\boldsymbol{x[n]}$ işaretinin M=2 ile seyrek örneklenmesi sonucu elde edilen grafik

Şimdi ise aşağıdaki $x(t) = 5\cos(200\pi t)$ işaretimizi $F_s = 600\ Hz$ ile örnekleyelim. Örnekleme sonucunda elde edilen $x_2[n]$ ayrık zamanlı işaretinin grafiği Şekil 5'te verilmektedir. Şekil 4'te yer alan $x_d[n]$ ile Şekil 5' te yer alan $x_2[n]$ işaretlerinin grafiklerinin aynı olduğu açıkça görülmektedir. Seyrek örneklemenin F_s örnekleme frekansını nasıl değiştirdiğini Eş. (2) yardımıyla hatırlayacak olursak, $x(t)$ işaretinin $F_s = 1200\ Hz$ ile örneklenmesi sonucu elde edilen $x[n]$ işaretinin M=2 ile seyrek örneklenmesi sonucu elde edilen işaretin F_s değerinin 600 Hz olacağı aşikardır.



Şekil 5. $\boldsymbol{x(t)}$ işaretinin doğrudan $\boldsymbol{F_s = 600\ Hz}$ ile örneklenmesi

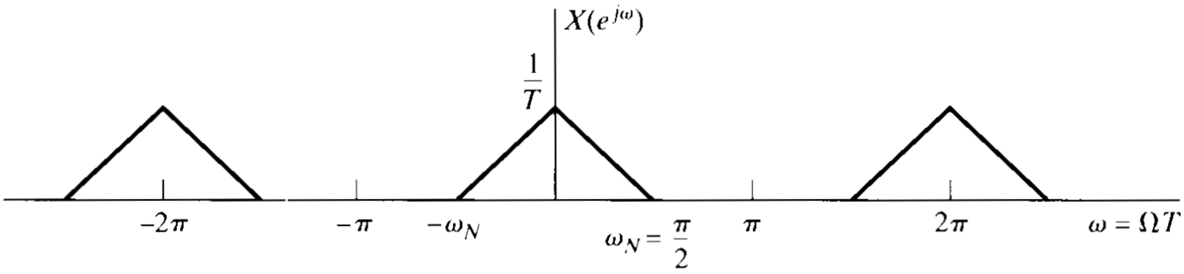
NOT: Seyrek örnekleme yapılırken seyrek örnekleme miktarına dikkat edilmelidir. Aksi halde elde edilen değerler asıl işaretimizi temsil etmeyecek ve örtüşme meydana gelecektir. Örneğin, $x[n]$ işaretinin M=2 yerine M=4 ile seyrek örnekleye tabi tutsaydık Şekil 6'da verilen grafiği elde edecektik ve bu grafiğin asıl işaretimiz olan $x(t)$ işaretini temsil etmediği açıkça görülmektedir. Ayrıca bilindiği üzere $x(t)$ işaretinin temel frekansı $F_N = 200\ Hz$ ve M=4 ile seyrek örneklenen işaretin örnekleme frekansı ise $F_s = 300\ Hz$'dir. Örnekleme frekansı, işaretin temel frekansının iki katından küçüktür, dolayısıyla Nyquist şartını sağlamamaktadır.



Şekil 6. $\boldsymbol{x[n]}$ işaretinin $\boldsymbol{M = 4}$ ile seyrek örneklenmesi sonucu elde edilen grafik

3.1 Seyrek örneklemenin frekans domaininde incelenmesi

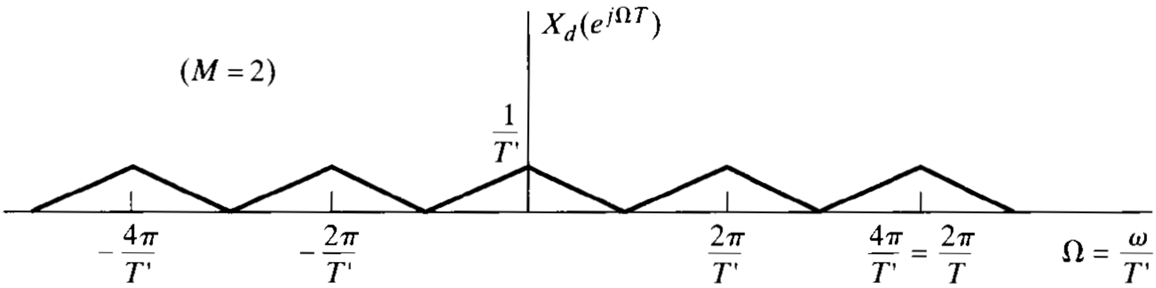
Örnek 2: Şekil 2'de yer alan seyrek örnekleme blok diyagramı için seyrek örneklemenin frekans domaininde incelenmesi amacıyla Şekil 7'de verilen frekans domaininde bant sınırlı bir $X(e^{j\omega})$ işaretini düşünelim. Bilindiği üzere $X(e^{j\omega})$, ayrık zamanlı $x[n]$ işaretinin frekans domainindeki temsili olan ayrık zamanlı Fourier dönüşümünü belirtmektedir. Bu soru kapsamında $x[n]$ işaretinin $M = 2$ ile seyrek örneklenmesi durumunda frekans domaininde neler olduğunu inceleyeceğiz.



Şekil 7. Örnek 2'de ele alınan bant sınırlı $\boldsymbol{X(e^{j\omega})}$ işareti

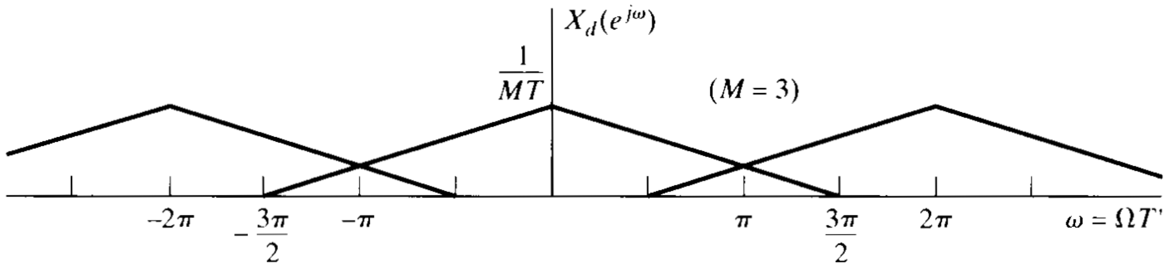
Eş.(3)'te seyrek örneklemenin frekans domainindeki genel teorik gösterimi verilmiştir ve bu eşitlik kullanılarak Şekil 7'de Fourier dönüşümü verilen $x[n]$ işareti $M = 2$ ile seyrek örneklendiğinde frekans domaininde elde edilen $X_d(e^{j\omega})$ işareti Şekil 8'de görüldüğü gibidir ve şekilde yer alan T' değeri 2T değerine eşittir.

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}) \tag{3}$$



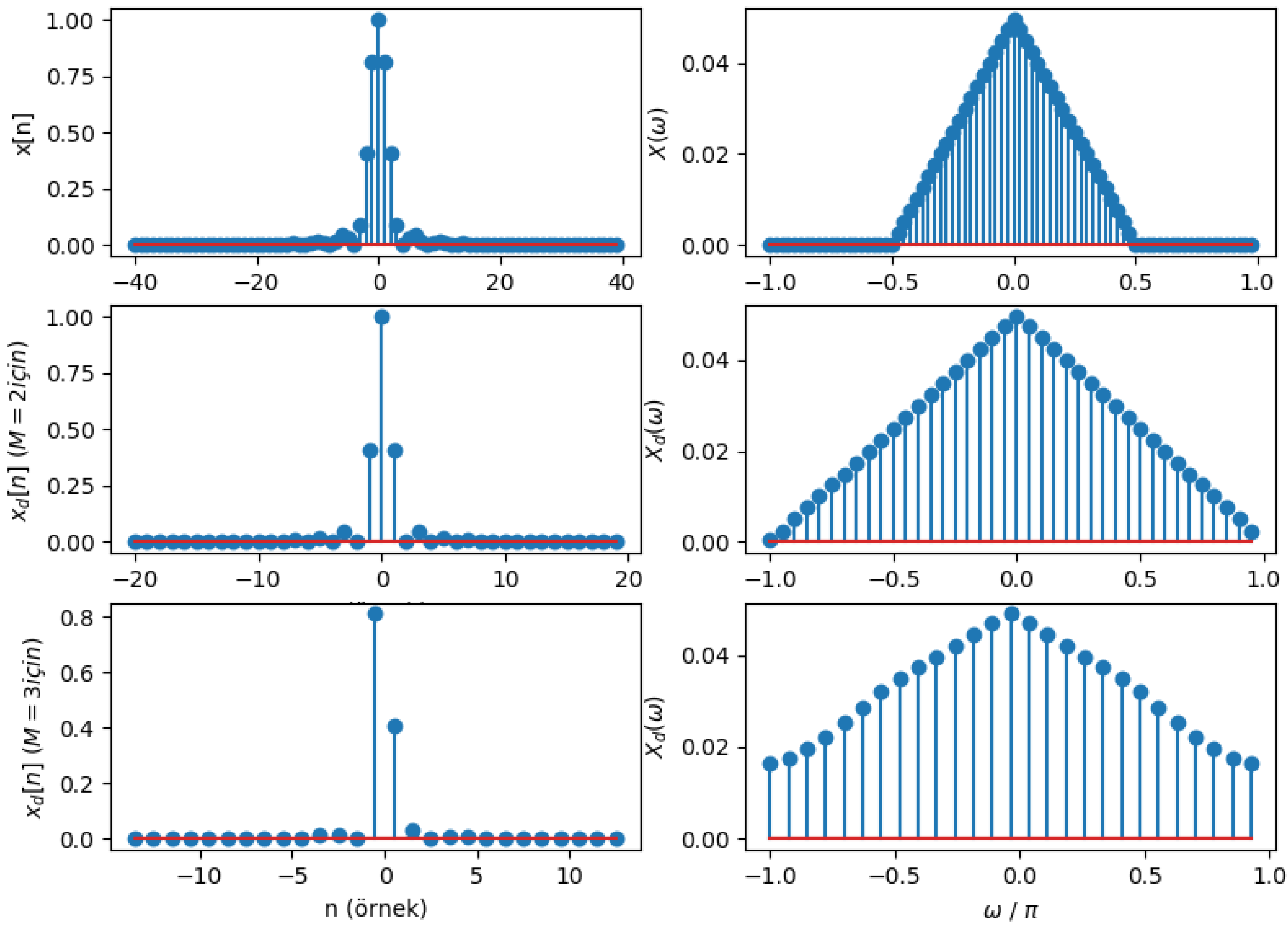
Şekil 8. $\boldsymbol{M = 2}$ ile seyrek örnekleme sonucu elde edilen $\boldsymbol{X_d(e^{j\omega})}$

Seyrek örnekleme işlemi yapılırken $X(e^{j\omega})$ işaretinin bant genişliği ile M seyrek örnekleme oranının ne olacağına dikkat edilmesi gerekmektedir. Bilindiği üzere ayrık zamanlı bir işaretin frekans domaininde taşıyabileceği maksimum açısal frekans π kadardır. Dolayısıyla seyrek örnekleme sonucunda maksimum açısal frekansın herhangi bir örtüşme olmadan yapılabilmesi için seyrek örneklemeye tabi tutulan $x[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü olan $X(e^{j\omega})$ işaretinin maksimum bant genişliği $\frac{\pi}{M}$ kadar olmalıdır. Aksi halde örtüşme meydana gelecektir. Bu durumu incelemek adına Örnek 2'de ele alınan seyrek örnekleme işleminin $M = 3$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda elde edilecek olan $X_d(e^{j\omega})$ işaretinin grafiği Şekil 9'da verilmektedir ve şekilde görüldüğü üzere alçak ve yüksek frekanslarda bir örtüşme söz konusudur.



Şekil 9. $\boldsymbol{M = 2}$ ile seyrek örnekleme sonucu elde edilen $\boldsymbol{X_d}(\boldsymbol{e^{j\omega}})$

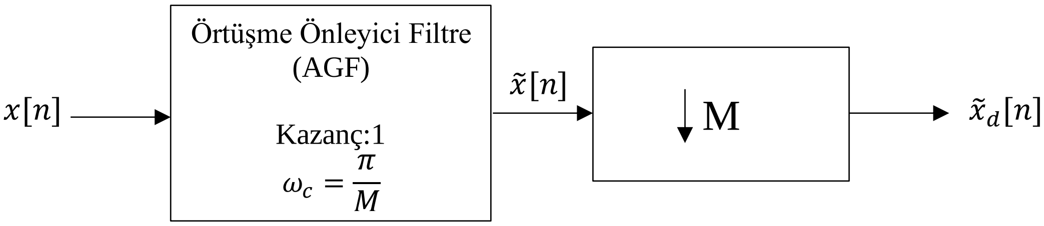
Bu örneğin Python aracılığı ile gerçeklenmesi sonucunda elde edilen grafikler aşağıda verilmektedir. Şekil 10'da verilen grafiklerin elde edilmesi için **Örnek2.ipynb** kodunu çalıştırınız.



Şekil 10. $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ işaretinin $\boldsymbol{M = 2}$ ve $\boldsymbol{M = 3}$ ile seyrek örneklenmesi sonucu elde edilen grafikler

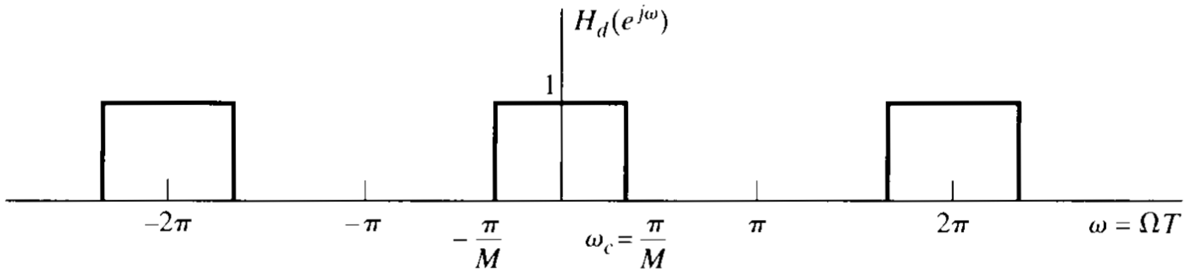
3.1 Örtüşme önleyici filtre

Seyrek örneklemenin frekans domaininde incelenmesi bölümünde yer alan Şekil 9'da açıkça görüldüğü üzere işaretin sahip olduğu bant genişlik, $\frac{\pi}{M}$'den büyük ise işaretin M ile seyrek örneklenmesi sonucu örtüşme meydana gelecek ve işaret bozulacaktır. Eğer işaretin M ile seyrek örneklenmesi ve işarette örtüşmenin meydana gelmemesi isteniyor ise Şekil 11'de ki blok diyagramda görüldüğü gibi işaret, seyrek örnekleme yapılmadan önce örtüşme önleyici filtre yardımıyla maksimum bant genişliği $\frac{\pi}{M}$ olacak şekilde bant sınırlı hale getirilir. Bu durumun daha iyi anlaşılabilmesi adına Örnek 2'de yer alan $x[n]$ işaretinin $M = 3$ ile seyrek örneklenmesi durumunu tekrar ele alalım.

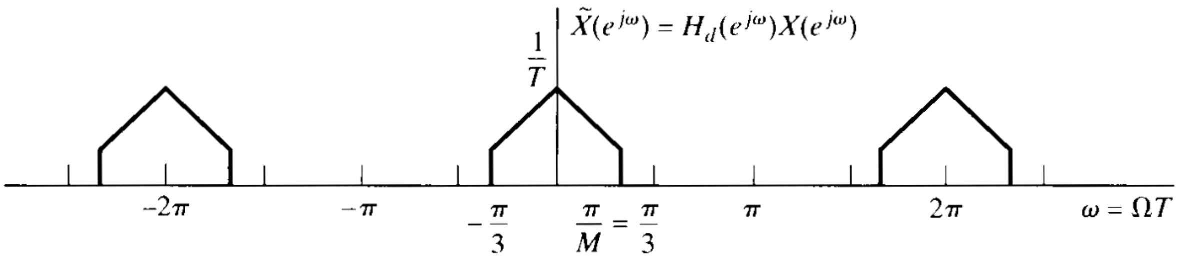


Şekil 11. Örtüşme önleyici filtre kullanılan seyrek örnekleme blok diyagramı

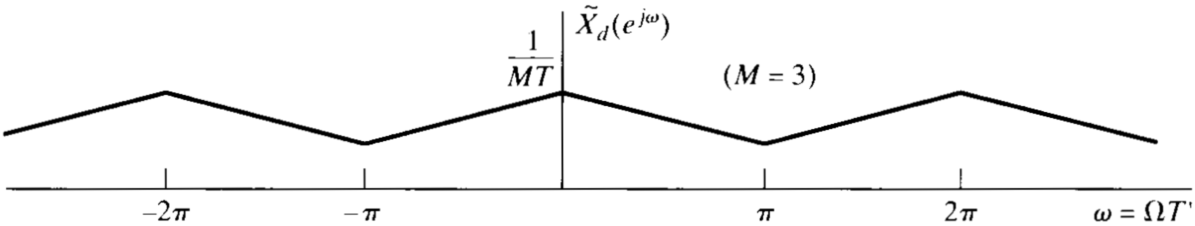
Şekil 12'de yer alan örtüşme önleyici filtrenin genel spektrumu verilmiştir ve şekilde açıkça görüldüğü üzere kazancı 1 değerine, kesim frekansı ise $\frac{\pi}{M}$ değerine eşit olan bir alçak geçiren (AGF) filtredir. Şekil 11'de belirtildiği gibi Şekil 7'de verilen $X(e^{j\omega})$ işaretinin Şekil 12'de spektrumu verilen örtüşme önleyici filtreden geçirilmesi sonucunda Şekil 13, Şekil 13'te verilen $\tilde{X}(e^{j\omega})$ işaretinin $M = 3$ ile seyrek örneklenmesi sonucunda Şekil 14'te verilen $\tilde{X}_d(e^{j\omega})$ spektrumu elde edilmektedir. Görüldüğü üzere örtüşme önleyici filtre kullanılması durumunda seyrek örnekleme sonucunda herhangi bir örtüşme meydana gelmemektedir. Fakat Şekil 13'te görüldüğü üzere $X(e^{j\omega})$ işaretinin AGF'nin kesim frekansından büyük olan frekans değerlerinde aldığı değerler atılmıştır. Bu durum orijinal $x[n]$ işaretinde önemli bilgilerin kaybolmasına neden olabilir. Dolayısıyla örtüşme önleyici filtrenin kullanılıp kullanılmaması durumu yapılacak olan uygulamaya ve işaretin karakteristiğine bağlı bir durumdur. Pratikteki uygulamalarda gerekli analizler yapıldıktan sonra kullanılıp kullanılmamasına karar vermek daha doğru bir yaklaşım olacaktır.



Şekil 12. Örtüşme önleyici filtre



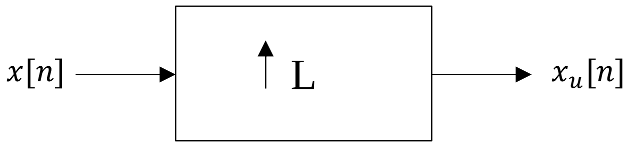
Şekil 13. Örtüşme önleyici filtre sonrası elde edilen işaretin Fourier dönüşümü olan $\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{e^{j\omega}})$



Şekil 14. $\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{e^{j\omega}})$'nın $\boldsymbol{M = 2}$ ile seyrek örnekleme sonucu elde edilen $\tilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{e^{j\omega}})$

4 SIK ÖRNEKLEME

Ayrık zamanlı bir $x[n]$ işaretinin L ile sık örneklenmesini gösteren blok diyagram Şekil 15’te, sık örneklemede giriş işareti ile çıkış işareti arasındaki ilişkiyi ifade eden eşitlik ise Eş. (4)’te verilmektedir.



Şekil 15. Sık örnekleme blok diyagramı

$$x_u[n] = x[n/L] \tag{4}$$

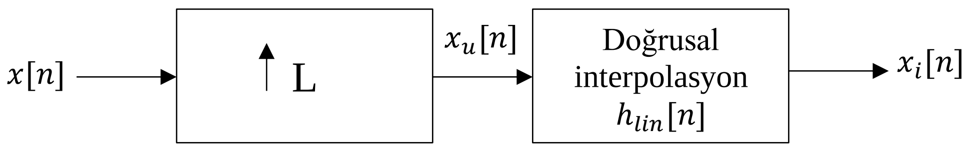
Blok diyagramda görülen L tamsayı değeri, sık örnekleme oranını belirtmektedir. Ayrık zamanlı $x_u[n]$ çıkış işareti giriş işaretinin her örneğinin arasına L-1 kadar örnek eklenmesi ile elde edilir. Dolayısıyla $x[n]$ giriş işareti ile $x_u[n]$ çıkış işaretinin örnekleme frekansları arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$F_{s_u} = F_s L \tag{5}$$

Eşitlikte yer alan F_{s_u} terimi çıkış işaretinin örnekleme frekansını, F_s ise giriş işaretinin örnekleme frekansını belirtmektedir.

4.1 Sık örneklemenin zaman domaininde incelenmesi

Örnek 3: Sık örneklemenin zaman domaininde incelenmesi için Örnek 1’de verilen $x[n]$ sinyalini ele alalım ve bu işareti Şekil 16’da görüldüğü gibi $L = 2$ için doğrusal interpolasyonlu sık örnekleme işlemine tabi tutalım.



Şekil 16. Doğrusal interpolasyonlu sık örnekleme blok diyagramı

Şekil 17’de blok diyagramda yer alan $x[n]$, $x_u[n]$ ve $x_i[n]$ işaretlerinin zaman domainindeki grafikleri verilmektedir. Görüldüğü üzere $x_u[n]$ işareti, $x[n]$ işaretinin her örnek arasına bir (L-1 adet sıfır eklenmekte idi, dolayısıyla L=2 için eklenen örnek miktarı 1 adet olmaktadır) adet sıfır eklenmesiyle elde edilmiştir. Grafikte de açıkça görüldüğü üzere örnekler arasına sıfır değerine sahip yeni örneklerin eklenmesi işaretimizi düzgün bir biçimde temsil etmeyecektir ve interpolasyon (ara değerleme) işlemi yapılması gerekmektedir. İnterpolasyon işlemi Bölüm 4.3’te detaylı olarak ele alacağı için bu bölümde sadece doğrusal interpolasyon işlemine kısaca değinilecektir.

Şekil 17'de verilen $x_i[n]$ işareti, $x_u[n]$ işaretinin doğrusal interpolasyon işlemi uygulanmış halidir. Doğrusal interpolasyon için sistem girişi $x_u[n]$ işareti, doğrusal interpolasyonun dürtü cevabı olan $h_{lin}[n]$ işareti ile zamanda konvolüsyon işlemi uygulanmaktadır.

Şekil 17'de görüldüğü üzere $x[n]$ işaretinin bir periyodunda 12 örnek mevcut iken, $x_u[n]$ işaretinin bir peritodunda toplam 24 örnek mevcuttur. $x_i[n]$ işaretinin örnek miktarı ise 28 örnektir ve $x_u[n]$ işaretinin örnek miktarı (24 örnek) ile $h_{lin}[n]$ işareti örnek miktarının (5 örnek) toplamından 1 örnek eksiktir.

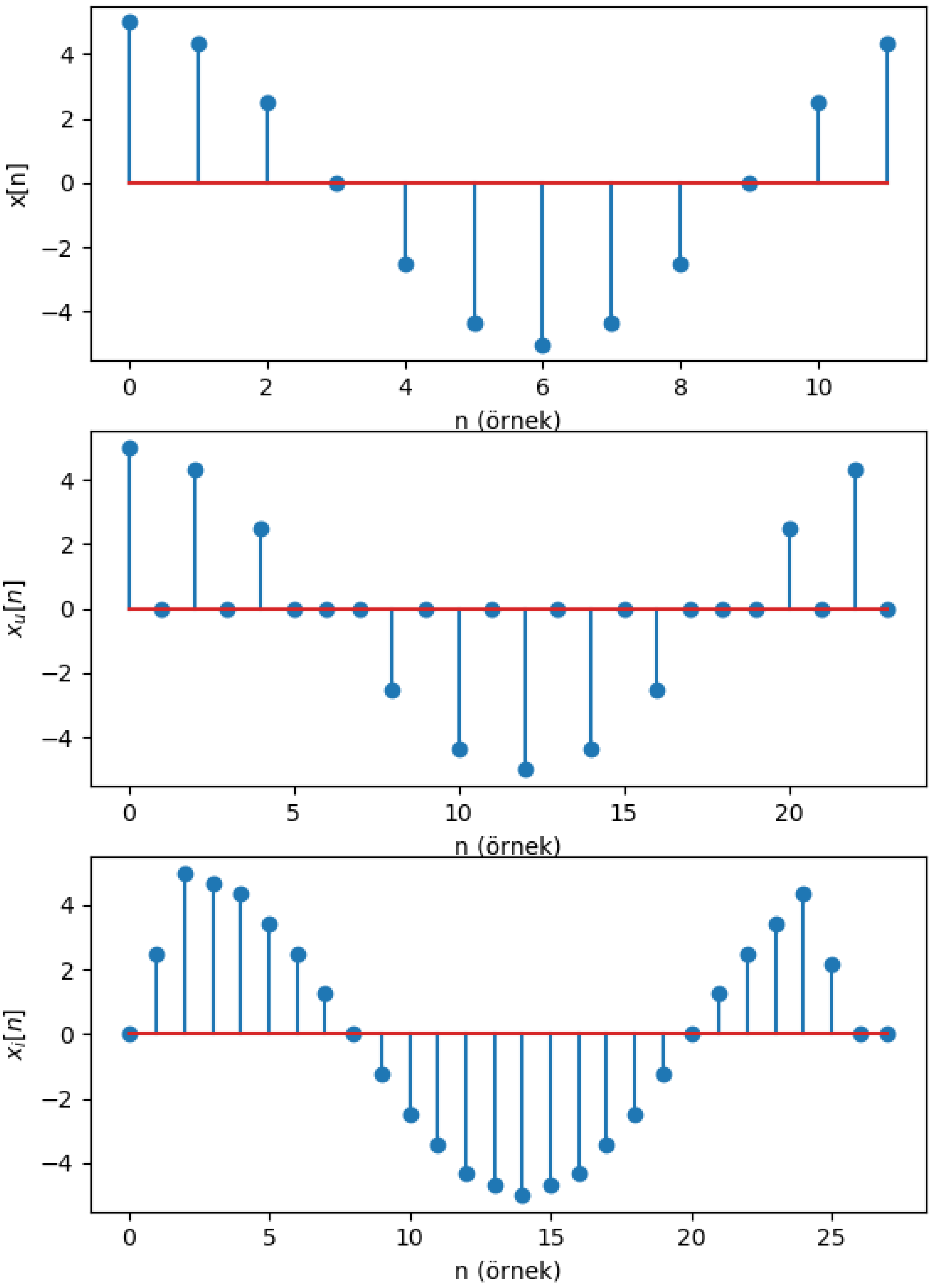
HATIRLATMA: Konvolüsyon işlemi sonucunda elde edilen işaretin örnek miktarı, giriş işaretinin örnek miktarı ile dürtü cevabının örnek miktarının 1 örnek eksiği kadar olmaktadır.

Doğrusal interpolasyon için kullanılan $h_{lin}[n]$ işaretine ait eşitlik Eş. (6)'da verilmektedir ve $L = 2$ için kullanılan $h_{lin}[n]$ dizisi Eş.(7)'de verildiği gibidir.

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L\,, & |n| \leq L \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{6}$$

$$h_{lin}[n] = [0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 0] \qquad , \; L = 2 \text{ için} \tag{7}$$

Şekil 17'deki sık örnekleme sisteminin girişi olan $x[n]$ işaretinin F_s değeri ile sistemin çıkışı olan $x_i[n]$ işaretinin F_{s_i} değeri karşılaştırıldığında Eş. (5)'teki bağıntının geçerli olduğu ve F_{s_i}'nin F_s'in 2 katı olduğu görülmektedir.

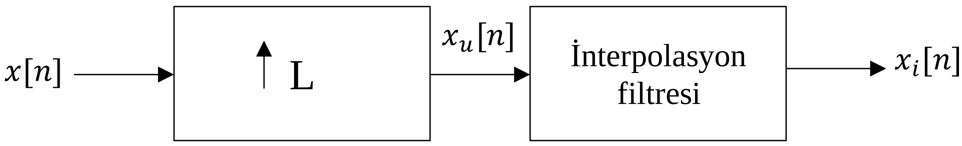


Şekil 17. Şekil 16'da yer alan blok diyagramdaki işaretlerin zaman domainindeki grafikleri

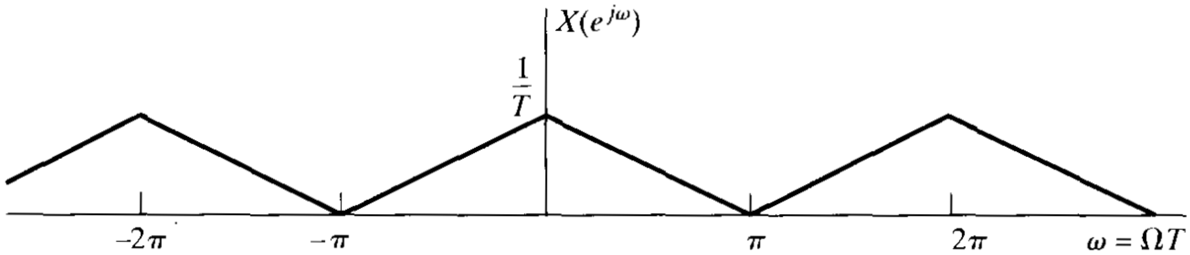
Örnek3 için verilen grafiklerin elde edilmesi için **Örnek3.ipynb** kodunu çalıştırınız.

4.2 Sık örneklemenin frekans domaininde incelenmesi

Örnek 4: Şekil 18'de yer alan sık örnekleme blok diyagramı için sık örneklemenin frekans domaininde incelenmesi amacıyla Şekil 19'da verilen frekans domaininde bant sınırlı bir $X(e^{j\omega})$ işaretini düşünelim. Bilindiği üzere $X(e^{j\omega})$, ayrık zamanlı $x[n]$ işaretinin frekans domainindeki temsili olan ayrık zamanlı Fourier dönüşümünü belirtmektedir. Bu soru kapsamında $x[n]$ işaretinin $L = 2$ ile sık örneklenmesi durumunda frekans domaininde neler olduğunu inceleyeceğiz.



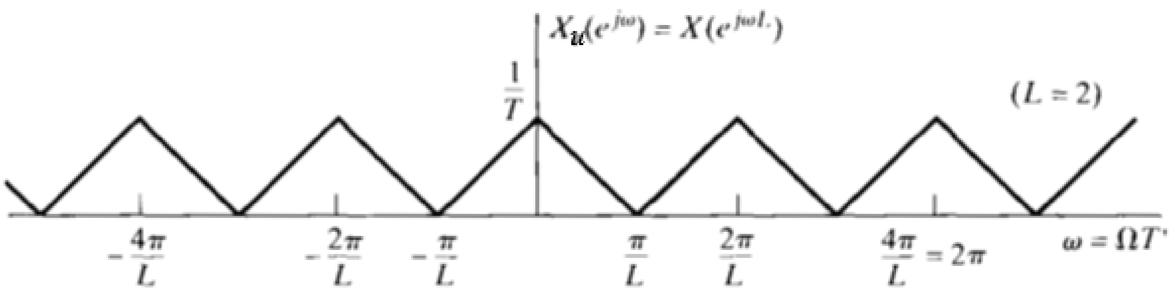
Şekil 18. İnterpolasyonlu sık örnekleme blok diyagramı



Şekil 19. Örnek 4'te ele alınan bant sınırlı $\boldsymbol{X(e^{j\omega})}$ işareti

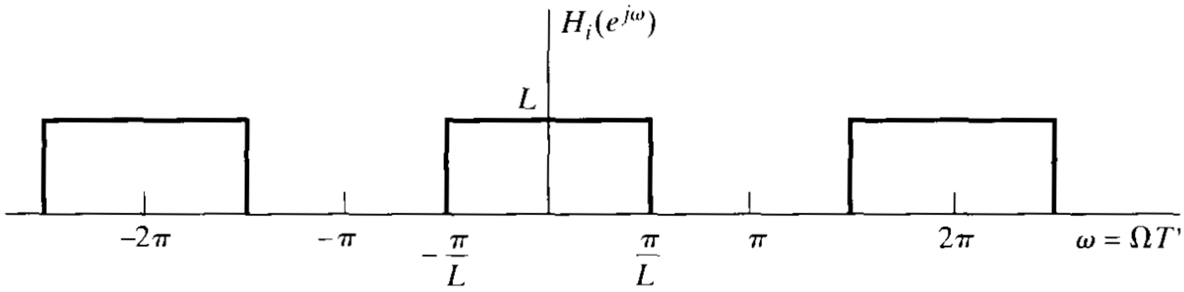
Eş.(8)'de sık örneklemenin frekans domainindeki genel teorik gösterimi verilmiştir ve bu eşitlik kullanılarak Şekil 19'da Fourier dönüşümü verilen $x[n]$ işareti $L = 2$ ile sık örneklendiğinde frekans domaininde elde edilen $X_u(e^{j\omega})$ işareti Şekil 20'de görüldüğü gibidir.

$$X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \tag{8}$$



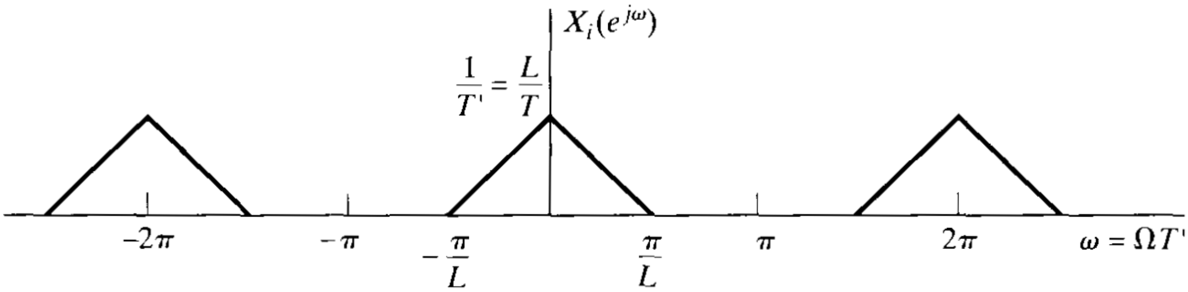
Şekil 20. $\boldsymbol{L = 2}$ ile sık örnekleme sonucu elde edilen $\boldsymbol{X_u(e^{j\omega})}$

Bilindiği üzere ayrık zamanlı Fourier dönüşümü 2π ile periyodiktir. Şekil 20'ye bakıldığında $X(e^{j\omega})$ işaretinin temel periyodunda aslında tek bir üçgen darbe formu mevcutken, $X_u(e^{j\omega})$ işaretinin bir periyodunda ($-\pi$ ile $+\pi$ arasına veya 0 ile 2π arasına bakılabilir) toplam iki adet üçgen darbe işareti mevcuttur. Halbuki $X_u(e^{j\omega})$ işaretinin sadece 0 ve $\pm 2\pi$ kısmındaki üçgen darbe işaretlerinin olması istenilmektedir. Bu nedenle sık örnekleme sonrasında mutlaka Şekil 18'de verilen interpolasyon filtresi uygulanmalıdır ve teorikte kullanılan (ideal Alçak geçiren filtre) interpolasyon filtresi Şekil 21'de verilmiştir. İşaretin bir periyottaki enerjisinin aynı kalması için şekilde görüldüğü üzere filtre kazancı L, kesim frekansı ise $\frac{\pi}{L}$ olarak alınmaktadır.



Şekil 21. İdeal AGF interpolasyon filtresi

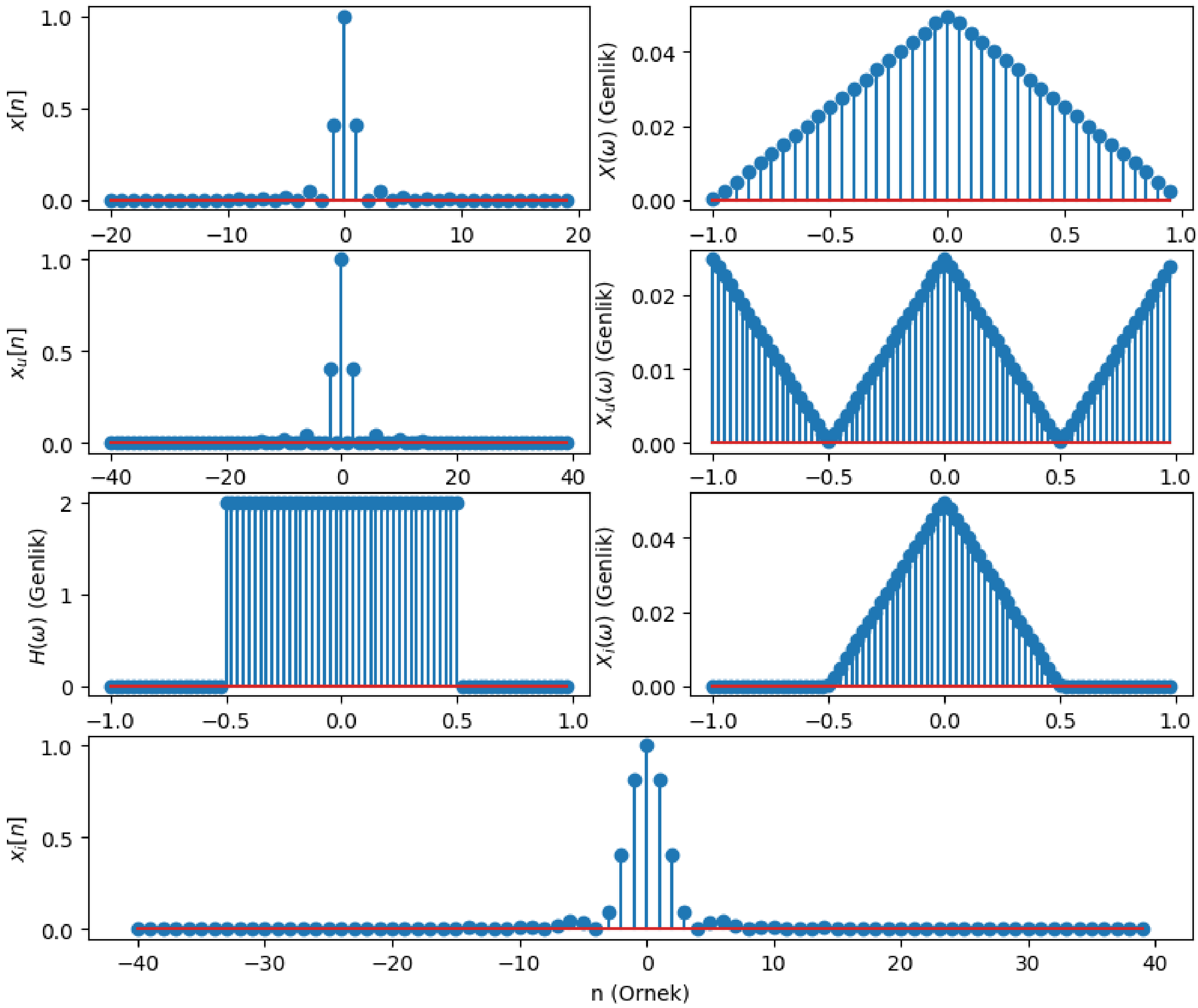
$x_u[n]$ işaretinin filtreden geçirilmesi sonucunda elde edilen $x_i[n]$ işaretinin ayrık zamanlı Fourier dönüşümü $X_i(e^{j\omega})$'nın grafiği Şekil 22'de verilmektedir.



Şekil 22. $L = 2$ ile sık örnekleme sonucunda elde edilen $x_i[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü

$x[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü olan ve Şekil 19'da grafiği verilen $\boldsymbol{X(e^{j\omega})}$ ile Şekil 22'de verilen ve $L = 2$ ile sık örnekleme sonucunda elde edilen $x_i[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü olan $X_i(e^{j\omega})$ karşılaştırıldığında işaretinin temel periyodunun L oranında daraldığı, kazancın ise L oranında arttığı görülmektedir.

Bu örneğin Python aracılığı ile gerçeklenmesi sonucunda elde edilen grafikler aşağıda verilmektedir. Şekil 23'te verilen grafiklerin elde edilmesi için **Örnek4.ipynb** kodunu çalıştırınız.



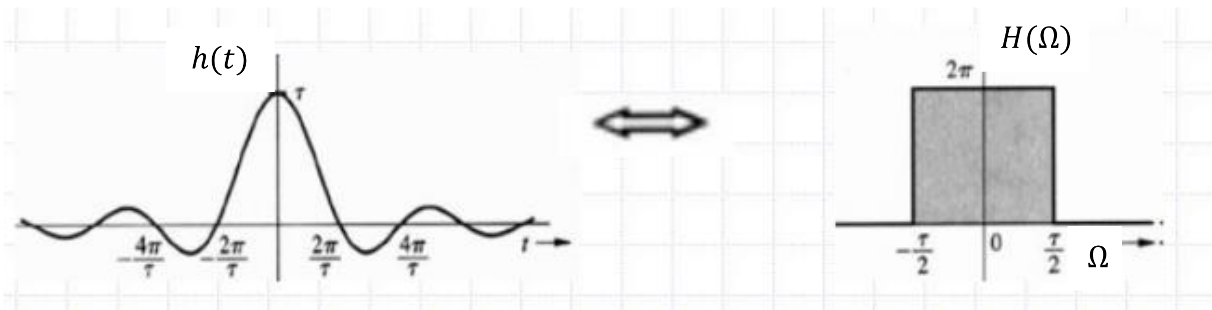
Şekil 23. $\boldsymbol{x[n]}$ işaretinin $\boldsymbol{L = 2}$ ile sık örneklenmesi durumunda elde edilen grafikler

4.3 İnterpolasyon işlemi

Sık örnekleme sonrasında ara değerleme işleminin mutlaka yapılması gerektiğini, Bölüm 4.1 Örnek-3'te incelemiştik. Fakat Örnek-3'te interpolasyon işlemi için doğrusal interpolasyon işlemi yapılmıştı. Bölüm 4.2'de ise interpolasyon filtresi için ideal alçak geçiren filtre (AGF) kullanılmıştı. Bu iki interpolasyon işlemi birbirinden farklıdır bu nedenle şimdi bu kavramlar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

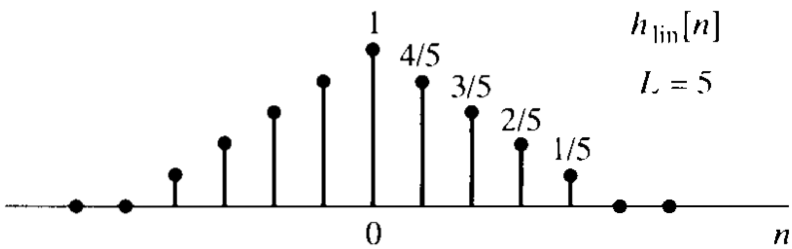
Bölüm 4.2'de Şekil 21'de verilen ideal AGF kullanılmasındaki amacın Şekil 20'deki grafikte görüldüğü üzere temel periyot ve $\pm 2\pi$ kısımları haricindeki işaret tekrarlarının atılmak istenmesi olduğuna değinilmişti. Dolayısıyla interpolasyon (ara değerleme) yapmak için ya frekans domaininde AGF kullanılabilir ya da zaman domaininde filtre dürtü cevabı $h[n]$ ile konvolüsyon işlemi yapılabilir. AGF'nin ideal (Şekil 21'de görüldüğü gibi kare darbe formunda) olması durumunda zaman domainindeki filtre dürtü cevabı olan h[n], $sinc(.)$ işareti formunda olmaktadır. Dolayısıyla frekans domaininde ideal AGF uygulanması yerine, zaman domaininde $x[n]$ işareti, $sinc(.)$ işareti ile konvolüsyon yapılabilir. Fakat $sinc(.)$ işareti ile konvolüsyon işleminin bazı sorunları (zaman domaininde örnek indisinin $\pm\infty$ arasında değer alması gibi) olması nedeniyle, pratikte lineer interpolasyon işlemi uygulanmaktadır.

Hatırlatma: Sürekli zamanlı $h(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü olan $H(\Omega)$ aşağıda verildiği gibidir. İşaretin ayrık zamanlı olması durumunda $h[n]$ işareti $sinc(.)$ formuna sahip $h(t)$ işaretinden T_s adım aralıklarıyla alınmış örneklerden oluşacaktır.



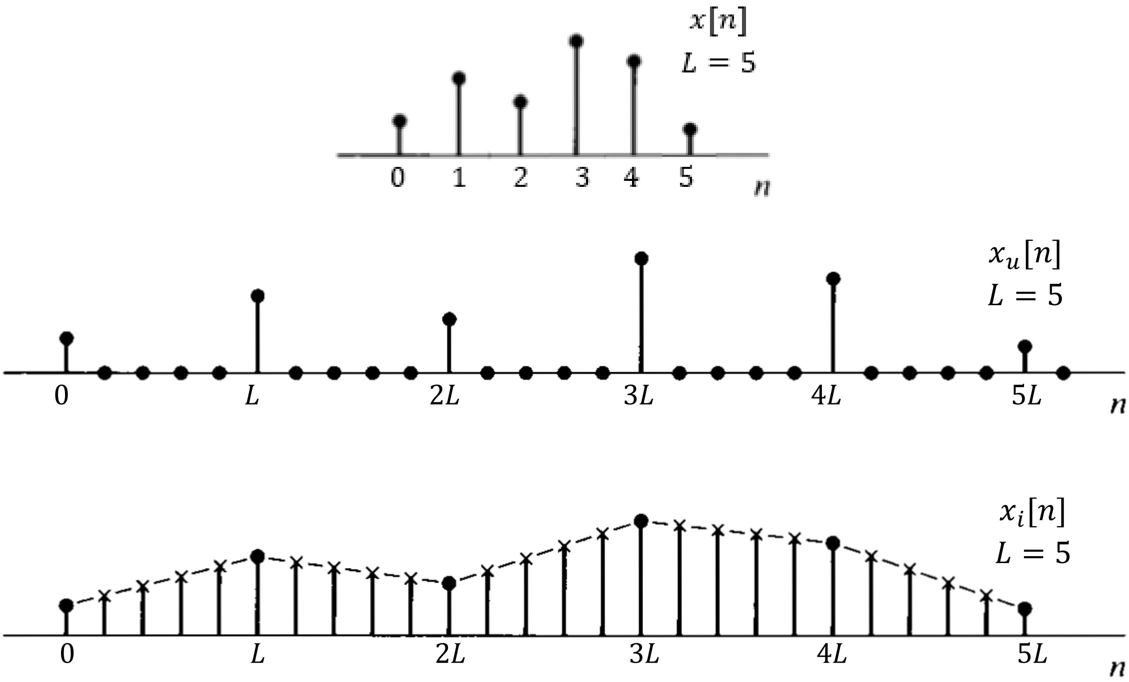
Şekil 24. Fourier transformu açısından $\boldsymbol{sinc}(.)$ işareti ile kare darbe arasındaki ilişki

Lineer interpolasyon işlemi için kullanılan $h_{lin}[n]$ eşitliği Eş. (6)'da verilmiştir. $L = 5$ için $h_{lin}[n]$ işaretinin grafiği ise Şekil 25'te verilmektedir ve grafikte de görüldüğü üzere $h_{lin}[n]$ işareti üçgen darbe formuna sahiptir.



Şekil 25. $\boldsymbol{L = 5}$ için $\boldsymbol{h_{lin}[n]}$ işaretinin grafiği

Şekil 26'da örnek bir $x[n]$ işareti için Şekil 16'da yer alan doğrusal interpolasyonlu sık örnekleme işlemi yapıldığında elde edilen $x_u[n]$ ve $x_i[n]$ işaretlerinin grafikleri verilmektedir. $x_u[n]$ işareti, $L = 5$ ile $x[n]$ işaretinin sık örneklenmiş halidir ve grafikte de görüldüğü üzere $x[n]$ işaretinin her iki örneğinin arasına $L-1$ adet sıfır değerine sahip örnek eklenmesi ile elde edilmiştir. Fakat tekrar hatırlanacağı üzere sık örnekleme için sıfır değerine sahip örneklerin eklenmesi yeterli değildir ve interpolasyon işlemi yapılması şarttır. $x_i[n]$ işareti, $x[n]$ işaretinin Şekil 25'te verilen $h_{lin}[n]$ ile konvolüsyon işleminin yapılması sonucu elde edilmektedir. Grafiklerde yer alan değerlere bakıldığında interpolasyon işleminin önemi ve gerekliliği açıkça görülmektedir.

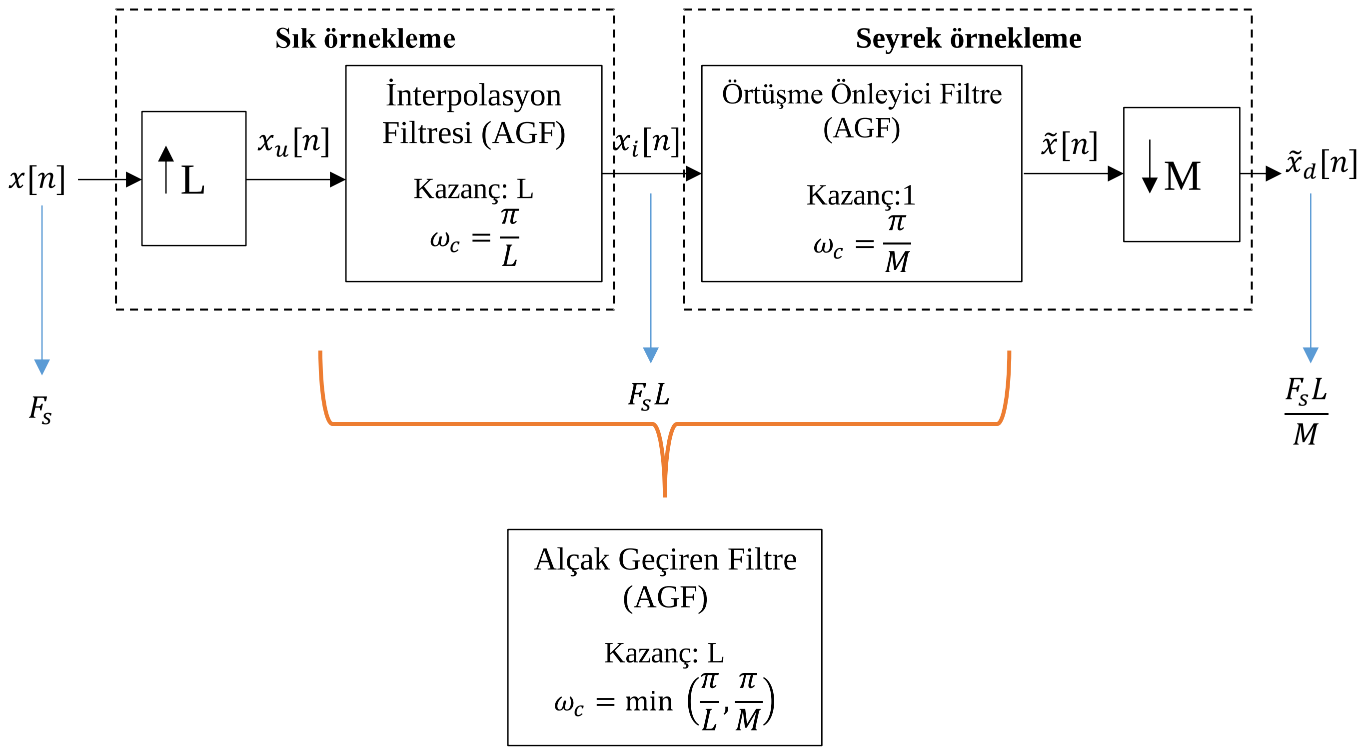


Şekil 26. Örnek $\boldsymbol{x[n]}$, $\boldsymbol{x_u[n]}$ ve bu işarete doğrusal interpolasyon uygulanması sonucu elde edilen $\boldsymbol{x_i[n]}$ işareti grafiği

5 Örnekleme oranının tamsayı olmaması durumu

Bu bölümde, örnekleme oranının tam sayı olmaması durumu ele alınacaktır ve bu amaçla Şekil 27'de verilen blok şemayı inceleyelim. Blok şema da görüldüğü üzere sık ve seyrek örneklemenin beraber kullanılması durumunda öncelikle sık örnekleme ardından seyrek örnekleme yapılmaktadır. Ayrıca sık ve seyrek örnekleme bölümlerinde interpolasyon filtresi ve örtüşme önleyici filtre konularına değinilmişti. Aşağıdaki blok şemada görüldüğü üzere art arda iki alçak geçiren filtre (AGF) kullanılmaktadır. Art arda iki AGF kullanılması yerine blok şemada verildiği gibi kazancı L, kesim frekansı min $\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right)$ olan bir tane AGF kullanılabilmektedir. Ayrıca blok şemada işaretlerin örnekleme frekansları gösterilmektedir. Görüldüğü üzere $x[n]$ işareti en genel halde F_s ile örneklemesi durumunda, sık örnekleme sisteminin çıkışı olan $x_i[n]$ işaretinin örnekleme frekansı $F_s L$ kadar olmaktadır. Seyrek örnekleme sistemine $F_s L$ örnekleme frekansına sahip $x_i[n]$ işareti girdi olarak verildiğinde çıkış işareti $\tilde{x}_d[n]$ işaretinin örnekleme frekansı $\frac{F_s L}{M}$ kadar olmaktadır. Şimdi bunu matematiksel bir örnek ile örneklendirelim.

Bu durumda sık örnekleme sonucunda elde edilen $x_i[n]$ işaretinin örnekleme frekansı



Şekil 27. Sık ve seyrek örneklemenin beraber kullanılması ve örnekleme frekansı ilişkisi

Örnek 5: $x[n]$ işaretinin $F_s = 40\ kHz$ ile örneklendiğini varsayalım ve bu işaretin örnekleme frekansının $60\ kHz$ olarak değiştirilmesi istenilmektedir. Bu durum için sık ve seyrek örnekleme oranlarını belirleyerek doğruluğunu test edelim.

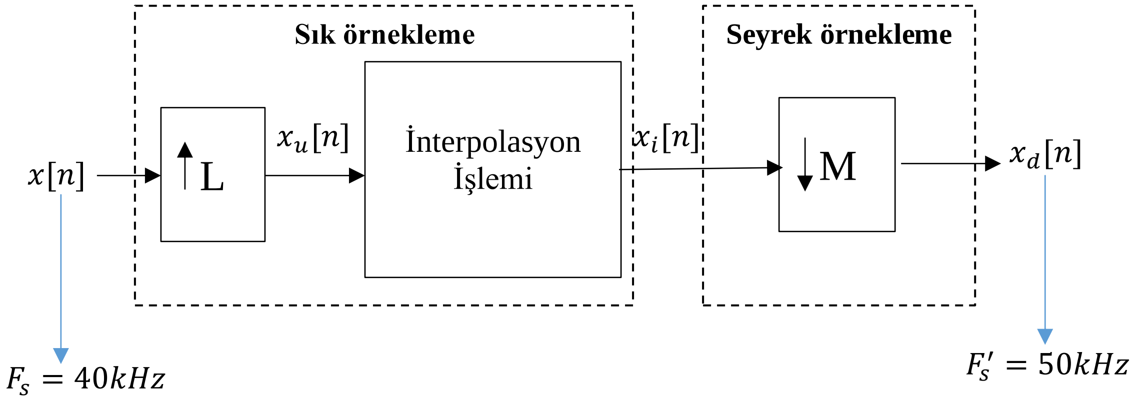
$x[n]$ işaretinin $F_s = 40\ kHz$ ile örneklenmesi durumunda çıkış işaretinin $60\ kHz$ olması için, *L=3* ve *M=2* olarak seçilmelidir.

Örnekleme oranı değişimi; $\frac{40\ kHz}{60\ kHz} = \frac{2}{3}$

Şekil 27'deki blok diyagram üzerinden bakacak olursak, giriş işareti $x[n]$'in örnekleme frekansı $F_s = 40\ kHz$ olarak verilmişti. Dolayısıyla bu işaretin $L = 3$ ile sık örneklenmesi sonucunda elde edilen $x_i[n]$ işaretinin örnekleme frekansı $120\ kHz$ olmaktadır. Ardından bu işaret $M = 2$ ile seyrek örneklendiğinde elde edilen çıkış işareti $\tilde{x}_d[n]$ işaretinin örnekleme frekansı istenildiği gibi $60\ kHz$ değerinde olacaktır.

6 Lab Öncesi Çözülecek Sorular

1- $x[n]$ işaretinin $F_s = 40\ kHz$ ile örneklendiği bilinmektedir. Ayrık zamanlı $x[n]$ işareti örnekleme frekansı 50 kHz olan bir müzik sisteminde dinlenmek istenmektedir. Bunun için yapılacak işlemlerin genel blok şeması aşağıda verilmektedir.



$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$ işaretini toplam örnek sayısı N = 20 olacak şekilde Notebook'ta oluşturunuz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.

NOT: Verilen blok diyagramda da görüldüğü üzere seyrek örnekleme için örtüşme önleyici filtre **kullanmayınız.**

a) Örnekleme frekansı 40 kHz olan $x[n]$ işaretinin örnekleme frekansının 50 kHz olması için yapılması gereken sık ve seyrek örnekleme oranlarını belirleyiniz ve aşağıdaki soruları belirlediğiniz değerleri kullanarak cevaplayınız.

b) Blok diyagramda yer alan interpolasyon işlemi için lineer interpolasyonu kullanınız. Bu amaçla lineer interpolasyon sisteminin $h_{lin}[n]$ dürtü cevabını belirleyiniz. Belirlediğiniz değerleri kullanarak $x_d[n]$ işaretini elde etmek için gereken kodu jupyter platformunda yazınız. $x_d[n]$ işaretini elde ederken bulmanız gereken $x_u[n]$, $x_i[n]$ ve $x_d[n]$ işaretleriningrafiklerini de çizdirerek her aşamada neler olduğunu inceleyiniz. Ardından elde ettiğiniz $x[n]$, $x_u[n]$, $x_i[n]$ ve $x_d[n]$ işaretlerinin Fourier dönüşümlerinin genlik grafiklerini çizdirerek adım adım işlemlerin frekans domaindeki işaretlere olan etkilerini yorumlayınız.

c) Seçenek b'deki interpolasyon işlemi için Şekil 21'de yer alan ideal AGF filtresinin ($H(\omega)$) kesim frekansı ve kazanç parametrelerini belirleyerek b seçeneğinde yapılan işlemleri tekrarlayınız.

NOT-1: a seçeneğinde L ve M değerlerini bulurken gerekli sadeleştirmeleri yaparak olabilecek en küçük değerleri bulunuz.

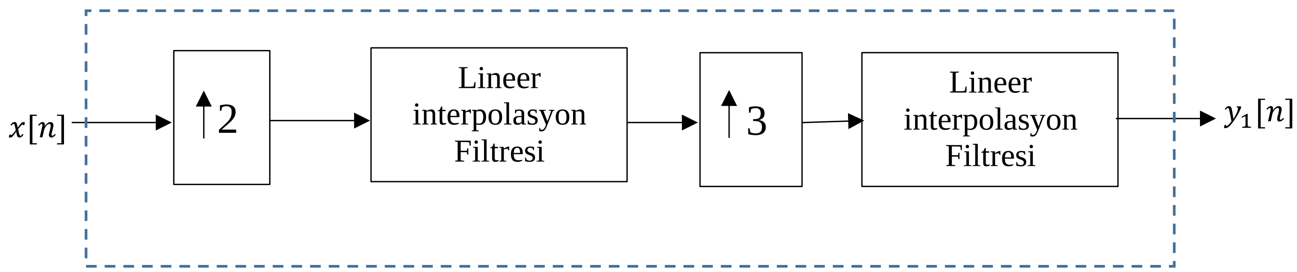
NOT-2: b seçeneğinde doğrusal interpolasyon için kullanılan *convolve()* komutu parametresinde ‘full’ yerine ‘same’ yazınız. Böylece çıkış işaretinin örnek sayısı giriş işaretinin örnek sayısı ile aynı miktarda olacaktır.

NOT-3: b ve c seçeneğinde elde ettiğiniz $X_i(\omega)$ grafiklerini karşılaştırarak farklı olduklarına dikkat ediniz. Çünkü b seçeneğinde elde edilen $X_i(\omega)$ grafiği aslında $X_u(\omega)$ ile $sinc()^2$ işaretinin noktasal çarpımına karşılık gelmektedir.

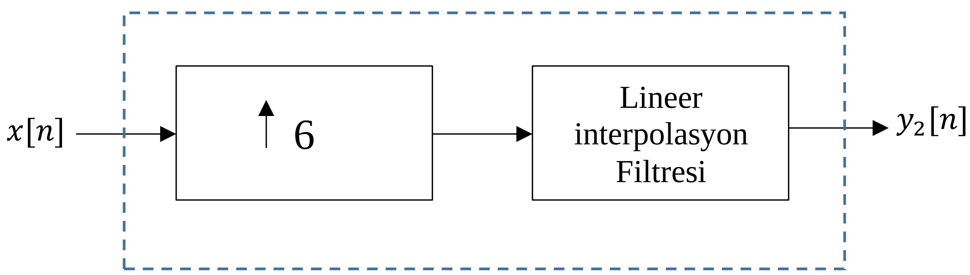
7 EK ÇALIŞMA (İsteğe bağlı)

Ayrık zamanlı $x[n] = [2\,, 3.2\,, 4\,, -5, -6.7\,, 7.8\,, 15]$ işareti aşağıda verilen ***Sistem1** ve **Sistem2*** sistemlerine ayrı ayrı girdi olarak verilmektedir. Bu durumda verilen $x[n]$ işareti için ***Sistem1*** çıkışı olan $y_1[n]$ işaretini ve ***Sistem2*** çıkışı olan $y_2[n]$ işaretini, gerekli Python kodunu yazarak elde ediniz ve elde ettiğiniz $y_1[n]$ ve $y_2[n]$ işaretlerinin grafiklerini çizdirerek karşılaştırınız ve sonuçları yorumlayınız.

Sistem1



Sistem2



NOT: Lineer interpolasyon filtrelerinin dürtü cevaplarının ($h_{lin}[n]$) her sık örnekleme için ayrı ayrı uygun şekilde tanımlanması gerektiğine dikkat ediniz.

8 KODLAR

- Seyrek örneklemenin zaman domaininde incelenmesi: **Örnek1.ipynb**
- Seyrek örneklemenin frekans domaininde incelenmesi: **Örnek2.ipynb**
- Sık örneklemenin zaman domaininde incelenmesi ve lineer interpolasyon işlemi: **Örnek3.ipynb**
- Sık örneklemenin frekans domaininde incelenmesi ve interpolasyon filtresi (AGF): **Örnek4.ipynb**

9 TESLİM ŞEKLİ ve ZAMANI

Bu dokümanda ve/veya ekinde verilen kodları kendiniz bir Jupyter Notebook'ta yazarak sonuçları gözlemleyiniz. Ön Hazırlık Soruları bölümünde verilen soruları çözmek için Python kodu yazınız. Jupyter Notebook'ta yaptığınız çalışmaların tamamını tek bir dosya olarak OgrenciNo_Ad_Soyad_LAB5.ipynb formatına uygun bir isimle kaydedip Google Classroom'a yükleyiniz. Laboratuvar ön çalışmaları (ev ödevi), 28 Mayıs 2020 sabah 05:00'a kadar sisteme yüklenmelidir. Sisteme geç yüklenen dosyalar kabul edilmeyecektir. Ön hazırlık çalışmasını yapmamış (sisteme ön çalışmasını yüklememiş) öğrenciler aynı yapılacak laboratuvar çalışmasına giremez. Ekte, örnek bir ödev çözümü şablonu verilmektedir (bknz: 101024099_AYSE_SEN_LAB1.ipynb). Jupyter Notebook'ta yapacağınız çözümler bu şablona göre hazırlanmalıdır.