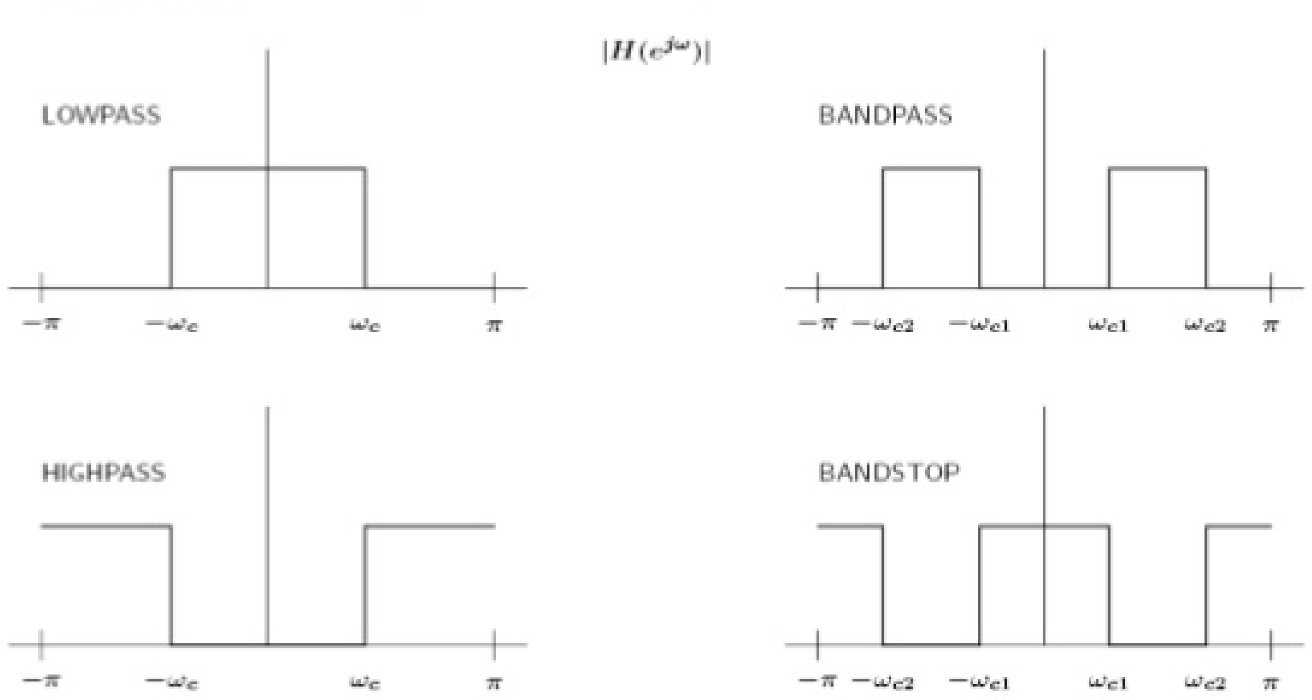
Sayısal Filtre Tasarımı

Sayısal Filtreler

- Filtreler ayrık zamanlı sistemlerdir.
- Filtreler işaretin belirli frekanslarını güçlendirmek veya zayıflatmak, belirli frekanslarını tamamen bastırmak veya belirli frekanslarını yalıtmak gibi değişik amaçla kullanılabilir.
- Sayısal filtreler sayısal sistemlerin genel üstünlüklerini taşımakta ve özellikle süzgeç karakteristiğinin çok basit bir şekilde değiştirilmesi mümkün olduğundan yaygın olarak kullanılmaktadır.
- Filtrelerin kullanım alanları geniştir. Örneğin işaretlerin gürültülerden arındırılması, haberleşme kanalı gibi iletim ortamlarının bozucu etkilerinin giderilmesi, aynı ortamdaki birden fazla işaretin birbirinden ayrılmasında ……. kullanılmaktadır.

İdeal filtreler

- Filtrelerin istenmeyen frekansları kesin olarak ayrıştırması istenir.
  - Alçak geçiren filtreler, yüksek geçiren filtreler, bant geçiren filtreler, bant durduran filtreler
- Ayrık zamanlı spektrumun 2π ile periyodik olması ve düşük frekansların Ω=0, yüksek frekansların Ω=π civarında olduğu dikkate alınarak ideal filtreler şekilde gösterilmektedir.



- Kesim frekansı Ω_c ile gösterilen, ideal alçak geçiren filtrenin frekans yanıtı 2π ile periyodik olacak şekilde

$$H_{ag}(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

olarak ifade edilmektedir. İdeal alçak geçiren süzgecin dürtü yanıtı

$$h_{ag}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{sin\Omega_c n}{\pi n}, \qquad \infty - < n < \infty$$

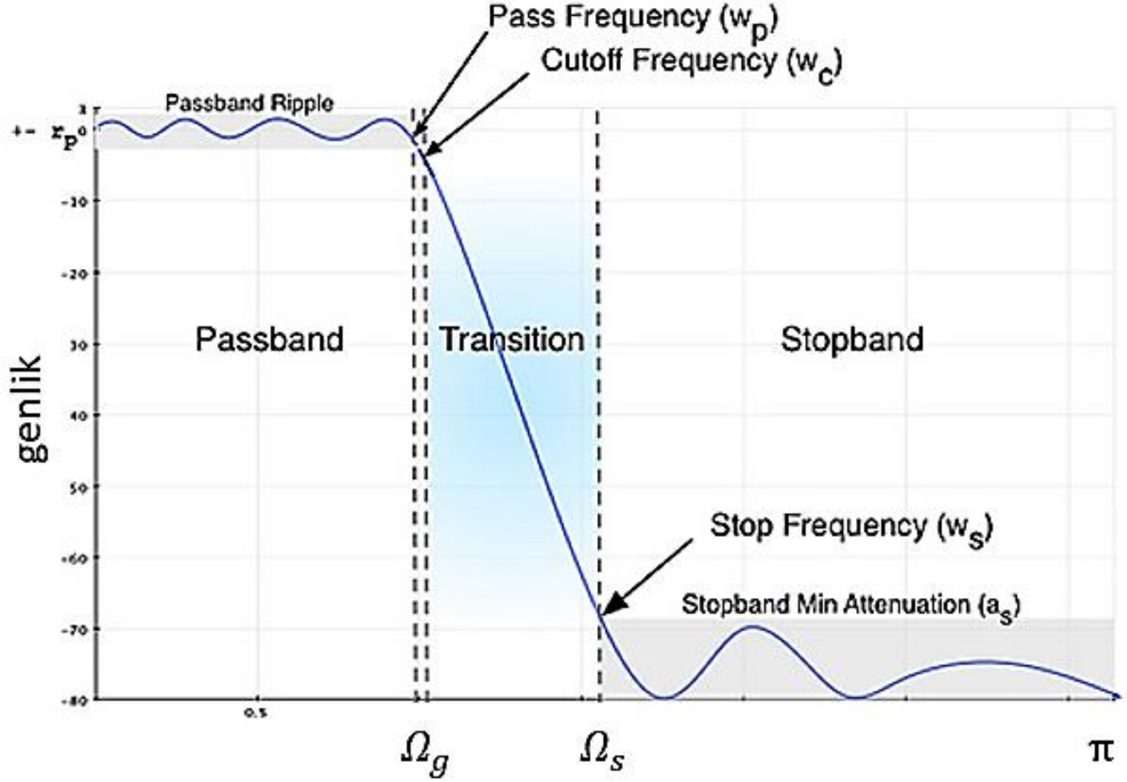
olarak bulunmaktadır.

- İdeal alçak geçiren filtrenin dürtü yanıtı nedensel olmadığı gibi sonsuza kadar devam etmektedir. Bu nedenle sistemin dürtü yanıtının gerçekleştirilmesi mümkün değildir.
- İdeal filtreler keskin kenarları nedeniyle hayata geçirilememektedir. Bu nedenle pratikte frekans yanıtları, ideal filtrelerin frekans yanıtına benzeyen fakat frekanslar arasında keskin olmayan bir geçiş gösteren filtreler kullanılmaktadır.

Pratik Filtreler

- Pratik filtreler şekilde gösterildiği gibi geçirme bandı (pass band) geçiş bandı (transition band) ve söndürme bandından (stop band) oluşur. Pratik filtrelerin frekans yanıtında geçirme bandı ile söndürme bandı arasında bir geçiş bandı bulunmaktadır. Pratikte geçirme ve söndürme bandında düz bir frekans yanıtının elde edilmesi zor olduğundan hafif salınımlara müsaade edilmektedir.

Geçirme bandı Ω_g ile gösterilen kesim frekansı ile tanımlanmaktadır. Filtrenin bu frekanstan düşük frekansları geçirdiği kabul edilmektedir. Söndürme bandı Ω_s ile gösterilen söndürme frekansı ile tanımlanmaktadır. Bu frekanstan büyük frekanslar bastırılmaktadır. Geçirme ile söndürme bandı arasındaki bölge geçişi bandıdır.



- Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin frekans yanıtı $H(e^{j\Omega})$ ile gösterilirse çıkışın frekans spektrumu $Y(e^{j\Omega})$, girişin frekans spektrumu $X(e^{j\Omega})$ ile sistemin frekans yanıtının çarpımıdır. Genlik ve faz spektrumları ele alındığında

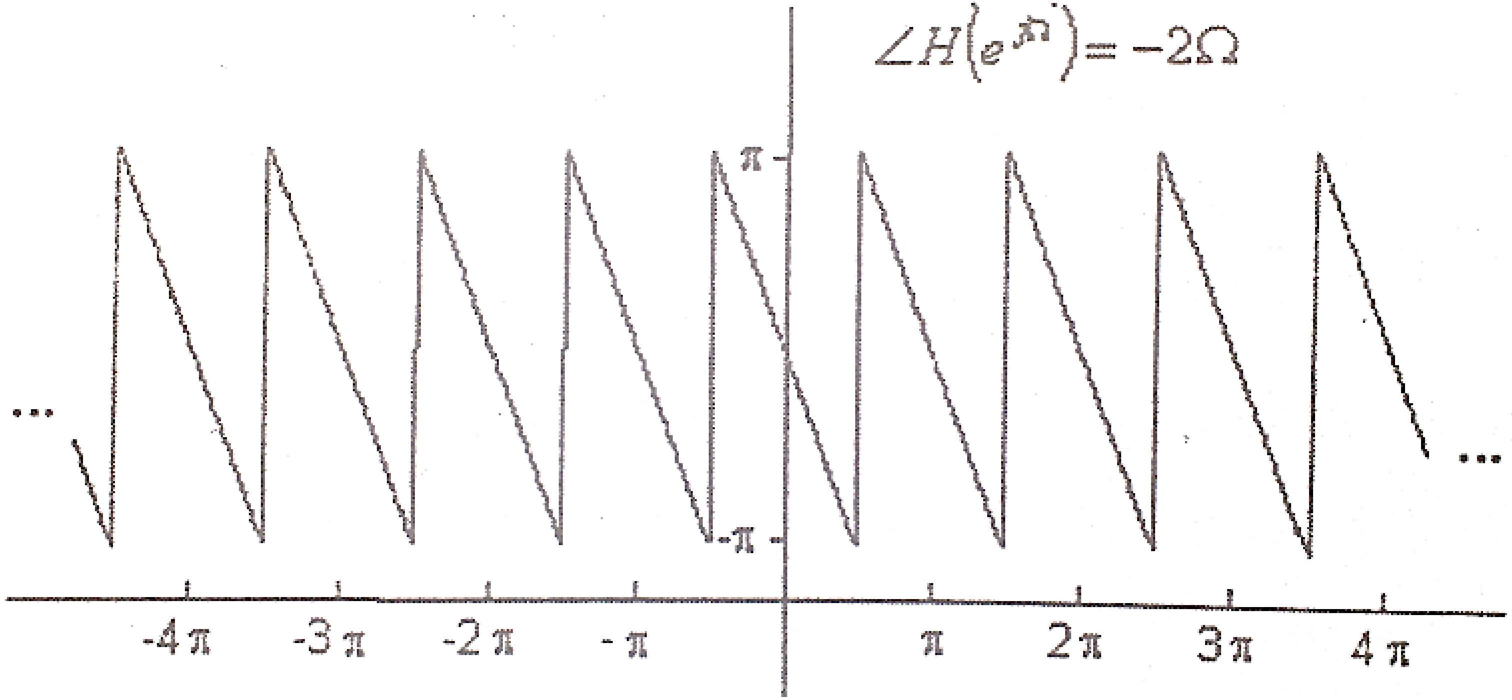
$$\left|Y\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|$$

$$\angle Y\left(e^{j\Omega}\right) = \angle X\left(e^{j\Omega}\right) + \angle H\left(e^{j\Omega}\right)$$

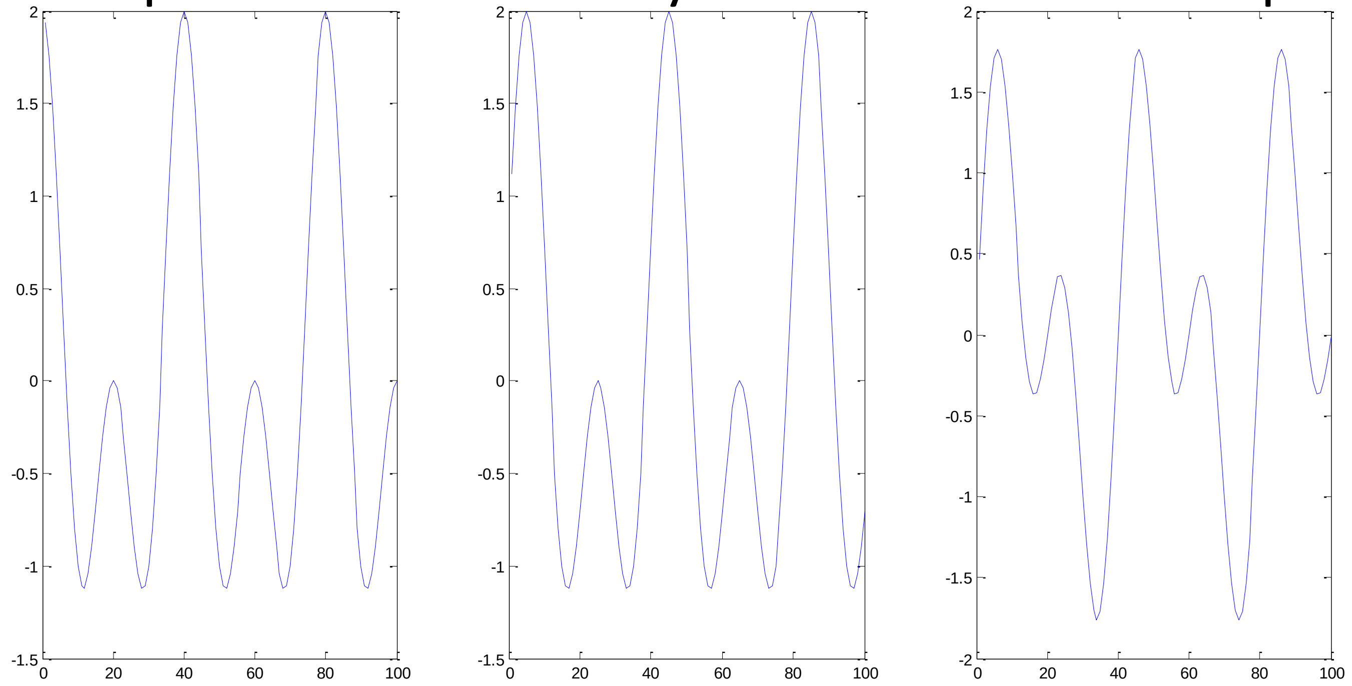
olarak elde edilmektedir.

- Sistem işaretin genliğinde veya fazında istenmeyen değişimlere genlik bozunumu ve faz bozunumu denir.
- Süzgecin genel amacı bazı frekansların bastırılması olduğu için tasarımda genlik cevabı dikkate alınır. Süzgecin genlik yanıtının birim genlik civarında olduğu frekans bileşenleri aynen geçirilirken genlik cevabının küçük olduğu frekans bileşenleri bastırılmaktadır.
- Sistemin sıfır faz cevabına sahip olması istenmektedir. Bu durum pratikte mümkün olmadığı için doğrusal faz cevabı tercih edilmektedir.

- $y[n] = x[n - n_0]$ şeklindeki gecikme sisteminin dürtü yanıtı $\delta[n - n_0]$ ve frekans cevabı $H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega n_0}$ şeklindedir. Bu sistemin genlik cevabı $|H(e^{j\Omega})| = 1$ faz cevabı $\angle H(e^{j\Omega}) = -\Omega n_0$
- Şekilde $n_0 = 2$ için doğrusal faz cevabına örnek görünmektedir. (faz değerleri 2π'lik temel aralıkta gösterilmekte, esasında şekilde – π'den π'ye atlama olduğunda bu geçiş 2π'ye karşılık gelmekte ve doğrusallık bozulmamaktadır.)



- Doğrusal faz yanıtı işarette yalnızca gecikmeye neden olur. Bozulmaya sebep olmaz. Örneğin $\mathrm{x[n]} = \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{20}\right)$ işareti -5Ω doğrusal faz cevabına sahip sistemden geçirilirse, π/10 frekansına sahip bileşende -5π/10, π/20 frekansına sahip bileşende −5π/20 radyanlık faz farkına sebep olmaktadır. Sistem çıkışı $\mathrm{x[n-5]} = \cos\left(\frac{\pi n}{10} - 5\pi/10\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{20} - 5\pi/20\right)$ olmakta ve yalnızca gecikmeye neden olmaktadır.
- Aynı işaret $-5\pi/10$ şeklinde sabit faz cevabı olan sistemden geçirilirse her iki bileşende de aynı gecikmeye sebep olur. Bu durum sinyalin bozulmasına sebep olur.



- İşaretin şeklinde bozulma meydana gelmemesi için ayrık zamanlı filtreler dahil tüm ayrık zamanlı sistemlerin doğrusal faz cevabının olması istenir. Yalnızca işaretin fazında belirli değişikliğe sebep olması istenen sistemler hariç.
- Filtrelerde faz cevabının süzgecin geçirme bandı boyunca doğrusal olması yeterlidir. Süzgecin söndürme bandındaki frekansları bastırdığı düşünülürse bu banttaki faz yanıtının biçimi ihmal edilebilir.
- Faz cevabını doğrusallığı **grup gecikmesi** ile belirlenebilir.

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\angle H(e^{j\Omega})$$

Grup gecikmesi toplam işaretin her frekansta maruz kaldığı ortalama gecikme miktarını göstermektedir. Doğrusal faz cevabı olan sistem içi grup gecikmesi sabittir.

- **Faz gecikmesi** işaretin her frekans bileşeninin maruz kaldığı gecikme miktarını gösterir.

$$\tau_f(\Omega) = -\frac{\angle H(e^{j\Omega})}{\Omega}$$

a ve b sabit olmak üzere $\angle H(e^{j\Omega})$=−aΩ olan sistem sabit grup ve faz gecikmesine sahiptir. Grup gecikmesi sabit olduğu için sistem işarette yalnızca gecikmeye sebep olur. Faz cevabı $\angle H(e^{j\Omega})$=b−aΩ olan sistem yalnızca sabit grup gecikmesine sabittir.

Sistemin sıfır/kutup konumlarından frekans yanıtının bulunması

- Sabit katsayılı fark denklemi şeklinde tanımlanmış sistemlerin frekasn yanıtı sistemin sıfır ve kutup konumları tarafından belirlenmektedir. Z düzlemine, sistemin sıfır ve kutupları yerleştirilerek, belirli frekans cevabı gösteren sistem tasarlanabilir. İstenen frekans cevabı verecek şekilde yerleştirilen sıfır ve kutuplardan oluşan sistem sabit katsayılı fark denklemi şeklinde hayata geçirilebilir.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad \overset{z}{\Leftrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{l=1}^{M} z - s_l}{\prod_{l=1}^{N} z - k_l}$$

Kararlı ayrık zamanlı bir sistemin frekans yanıtı, transfer fonksiyonunun birim çember üzerinde $H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$ şeklinde hesaplanmasıyla elde edilmektedir.

- Frekans cevabının sıfır/kutup konumları yardımı ile hesaplanırken sistemin sıfırları ve kutupları $z = e^{j\Omega}$ noktasına birer doğru ile bağlanır.

$$H(e^{j\Omega}) = K\,\frac{(r_1 e^{j\alpha 1})(r_2 e^{j\alpha 2})\ldots}{(d_1 e^{j\beta 1})(d_2 e^{j\beta 2})\ldots}$$

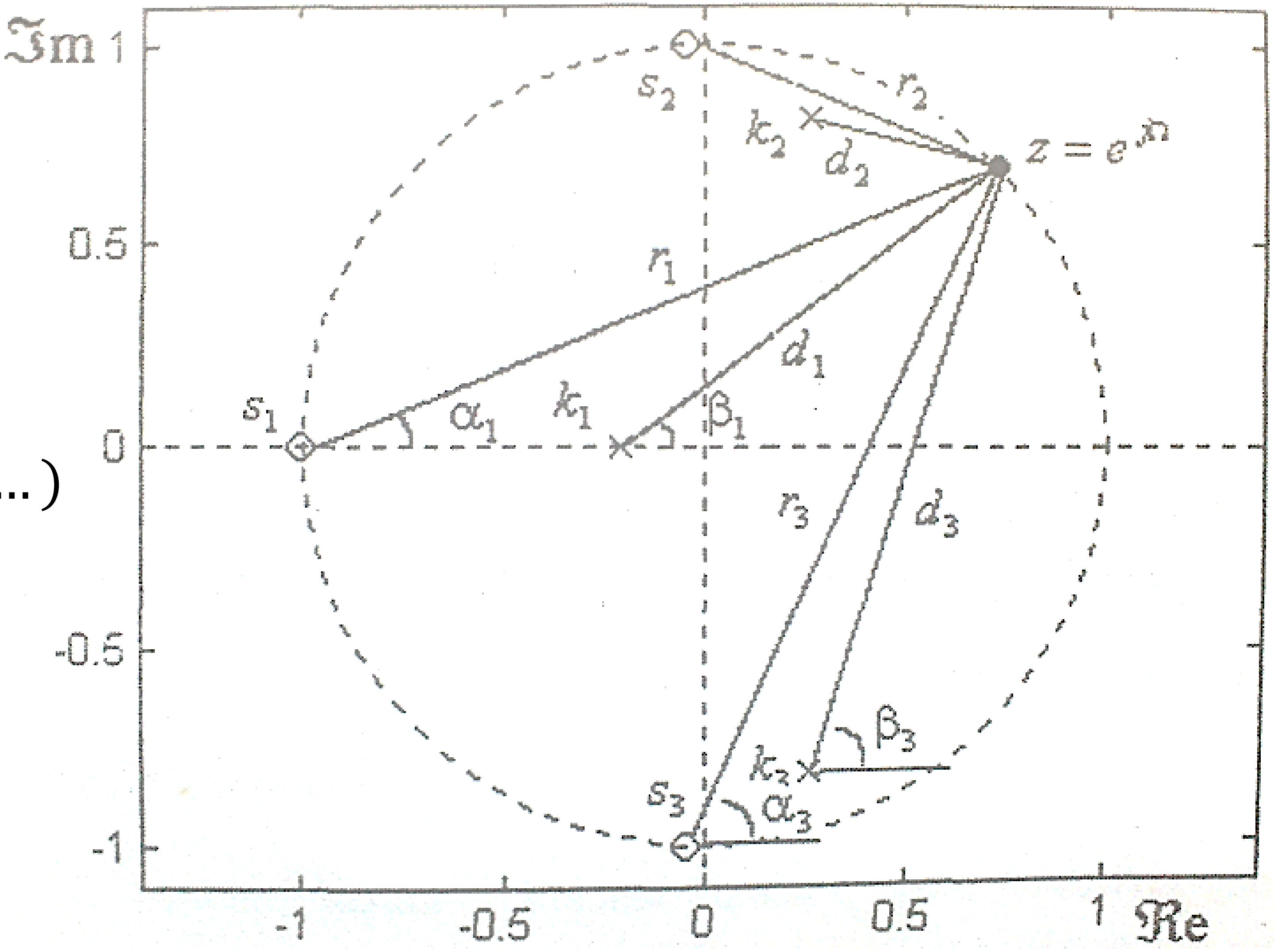
$$= K\,\frac{r_1 r_2 \ldots}{d_1 d_2 \ldots}\, e^{j[(\alpha 1+\alpha 2\ldots)-(\beta 1+\beta 2\ldots)]}$$

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = K\,\frac{r_1 r_2 \ldots}{d_1 d_2 \ldots}$$

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = (\alpha 1+\alpha 2\ldots) - (\beta 1+\beta 2\ldots)$$

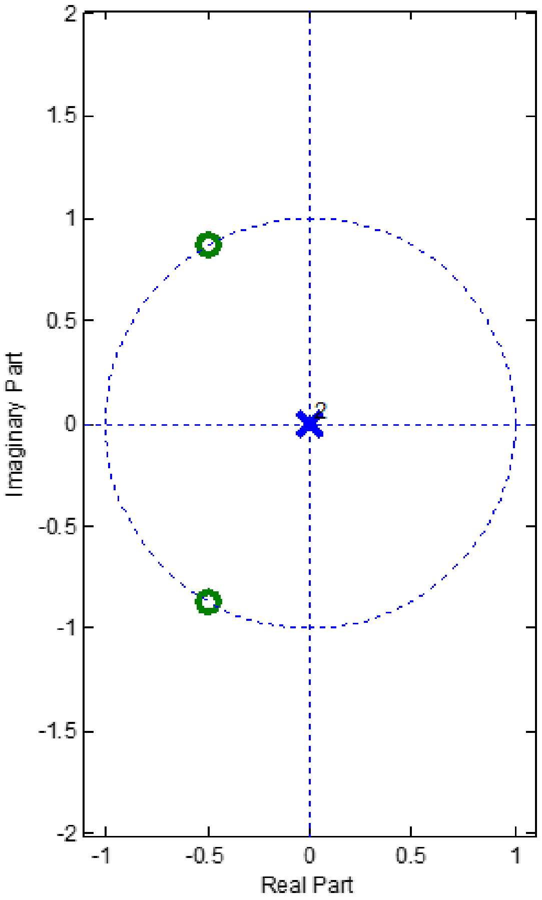
$$r_1 = |z - s_1|$$

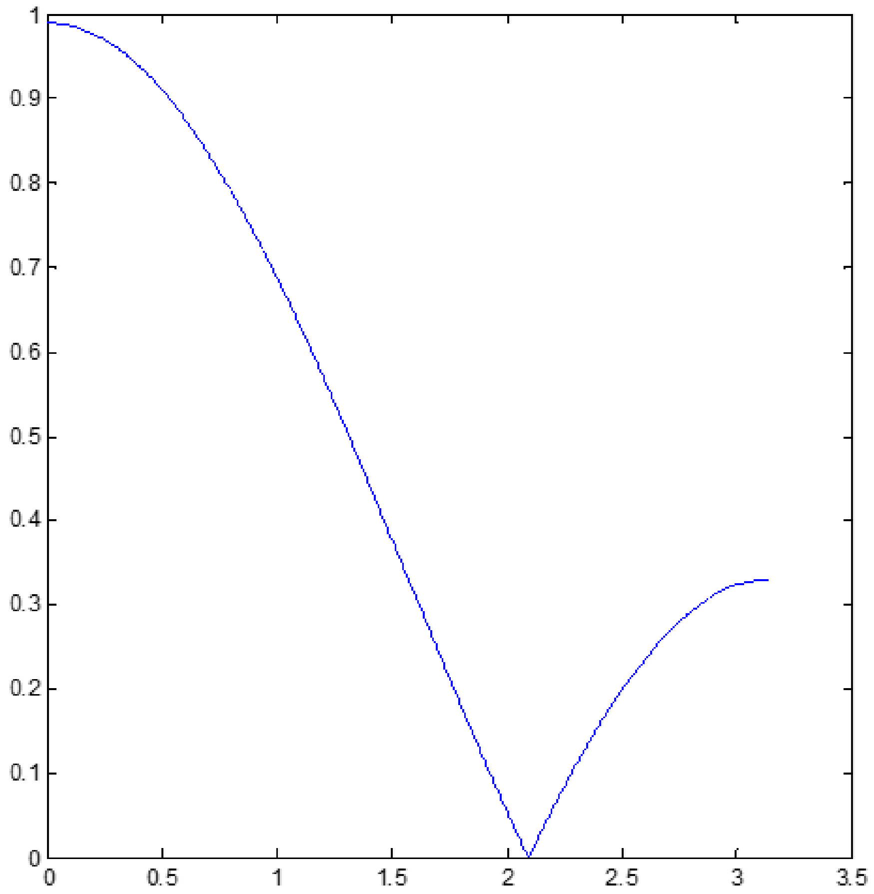
$$\alpha 1 = \angle |z - s_1|$$



- Sistemin frekans cevabının sıfır/kutup grafiğinden bulunabilmektedir. Sistemin sıfırları ve kutupları $z = e^{j\Omega}$ noktasına birleştirilerek genlik ve faz yanıtı bulunabilmektedir. Frekans cevabının periyodiklik ve simetrisi göz önünde bulundurularak sistemin [0,π] aralığında incelenmesi yeterlidir. sistemin [0,π] aralığında incelenmesi için $z = e^{j\Omega}$ noktası, Ω=0 dan Ω= π'ye kadar kaydırılır. Sürekli sıfır ve kutup noktaları ile $z = e^{j\Omega}$ noktası arası uzunluklar ve açılar hesaplanarak frekans cevabı elde edilir.

- $y[n]=0.33x[n]+0.33x[n-1]+0.33x[n-2]$ fark denkleminin frekans cevabı?
- $Y(z)=0.33X(z)+0.33z^{-1}X(z)+0.33z^{-2}X(z)$
- $H(z)=Y(z)/X(z)=(0.33+0.33z^{-1+}0.33z^{-2})/1$
- Sistemin 0’da 2 adet kutbu -0.5 + 0.866i ve -0.5 - 0.866i de 2 adet sıfırı vardır.



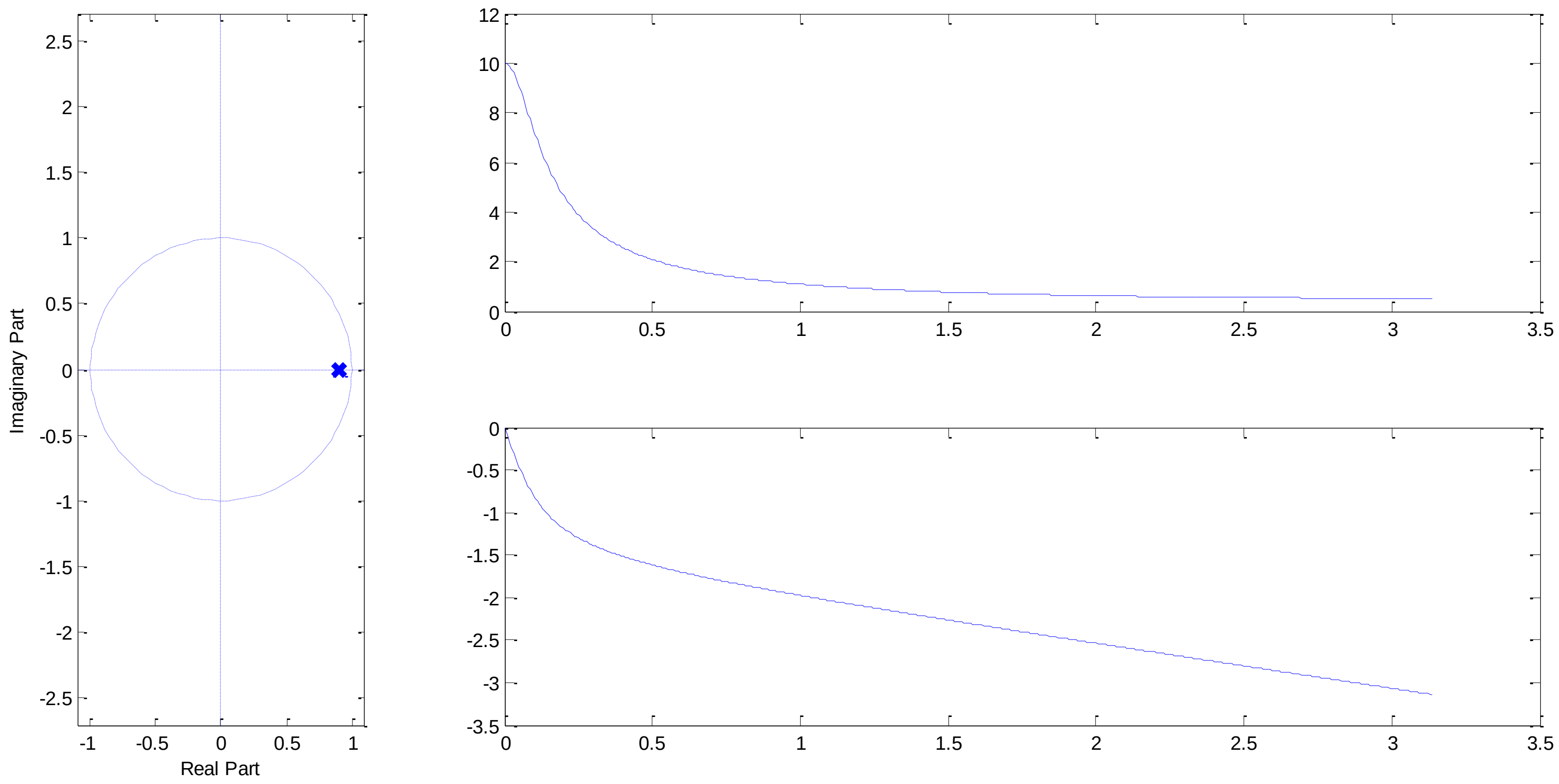


Sıfır/kutup konumlarının frekans cevabına etkisi

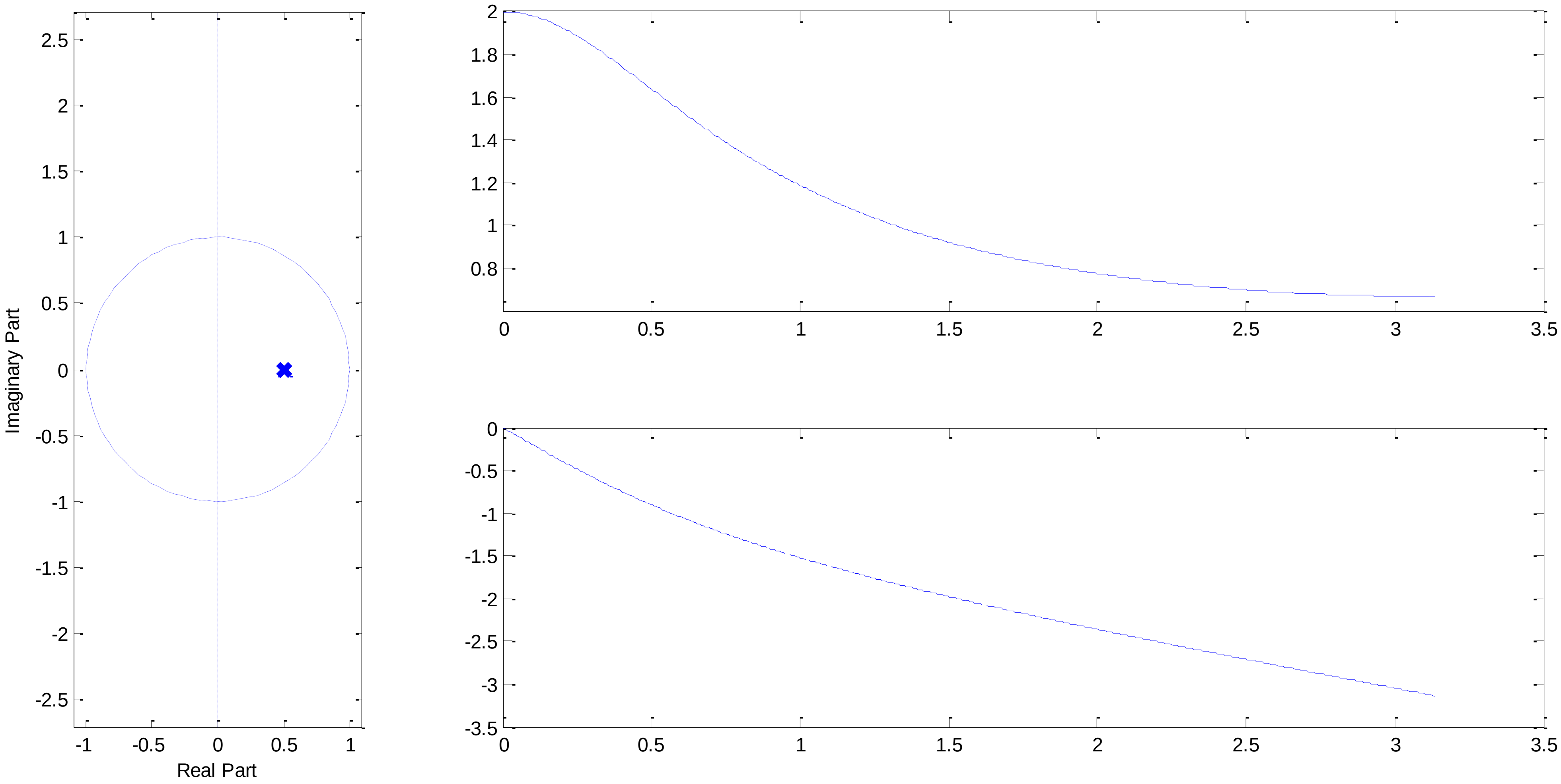
- Sistemin bir kutbu birim çember üzerinde Ω_1 frekansına karşılık gelen $e^{j\Omega_1}$ noktasına ne kadar yakınsa, aradaki doğrunun boyu kısa olduğu için, Ω_1 frekansındaki genlik cevabına etkisi o kadar fazla olmakta Ω_1 frekansında yüksek bir genlik olmasını sağlamaktadır.
- Sistemin bir sıfırı birim çember üzerinde Ω_1 frekansına karşılık gelen $e^{j\Omega_1}$ noktasına ne kadar yakınsa, aradaki doğrunun boyu kısa olduğu için, Ω_1 frekansındaki genlik cevabına etkisi o kadar fazla olmakta Ω_1 frekansında düşük bir genlik olmasını sağlamaktadır.
- Faz yanıtına sıfır ve kutupların uzaklığının etkisi yoktur. Doğruların açıları önemlidir.
- Tasarım aşamasında sistemin frekans cevabının genliğinin Ω_1 frekansında artırılması için $e^{j\Omega_1}$ noktasına yakın kutup yerleştirilmelidir. Birim çembere yerleştirilen kutup kararsızlığa sebep olur. genliğin Ω_1 frekansında azaltılması için $e^{j\Omega_1}$ noktasına yakın sıfır yerleştirilmelidir. Birim çembere yerleştirilen sıfır bu frekansın tamamen bastırılmasına sebep olur.
- Aynı noktaya yerleştirilen birden fazla sıfır ve kutup etkilerinin artmasına sebep olur.
- Merkeze yerleştirilen sıfır ve kutubun birim çember üzerindeki her nokta ile uzaklığı eşit olduğu için genlik cevabına etkisi yoktur. Açısı ise Ω olduğu için faz cevabına ise doğrusal katkı yapmaktadır.
- Bir noktada bulunan kutup ve sıfır birbirinin etkisini dengeler.

- Sıfır/kutup yerleştirmesi ile alçak geçiren filtre tasarlayalım.
- Alçak geçiren filtre için azami frekans yanıtı genliği Ω=0 frekansında istenmektedir. Bu durumda $z = e^{j0}$ noktasına yakın kutup yerleştirelim. Örneğin bir adet kutup 0.9 noktasına yerleştirelim.

$$H(z) = \frac{1}{z-0.9}$$

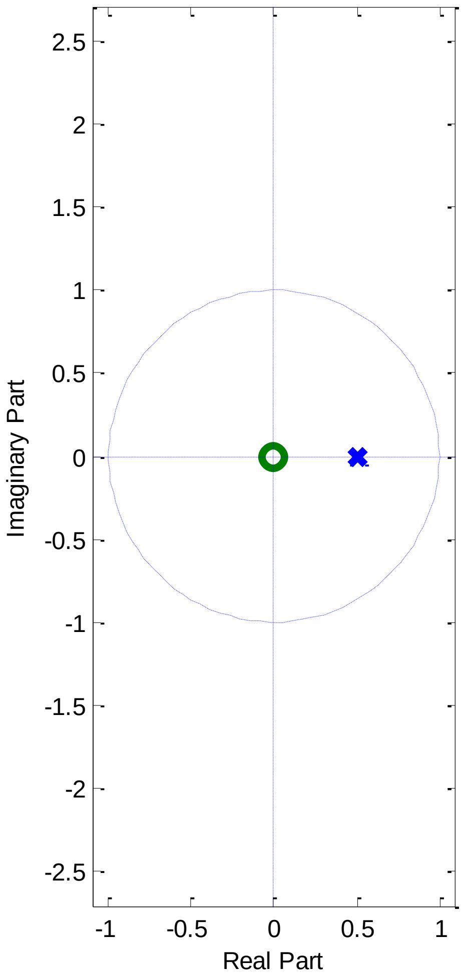


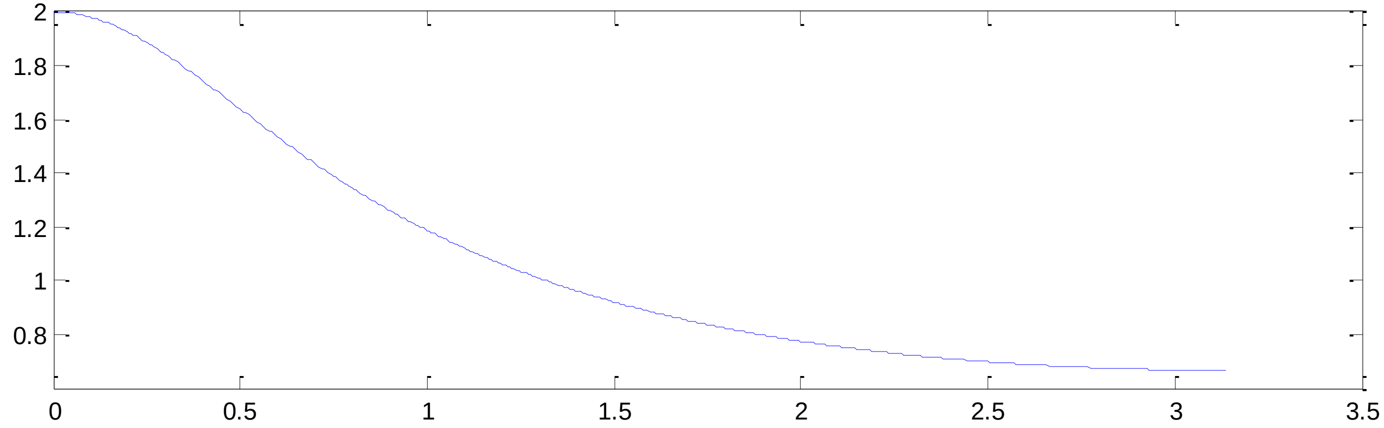
• Geçirme bandını genişletmek için kutup 0.5 konumuna alınırsa transfer fonksiyonu $H(z) = \frac{1}{z-0.5}$ şeklini alır. Kutup merkeze yaklaştığı için faz cevabının doğrusallığına katkıda bulunur.

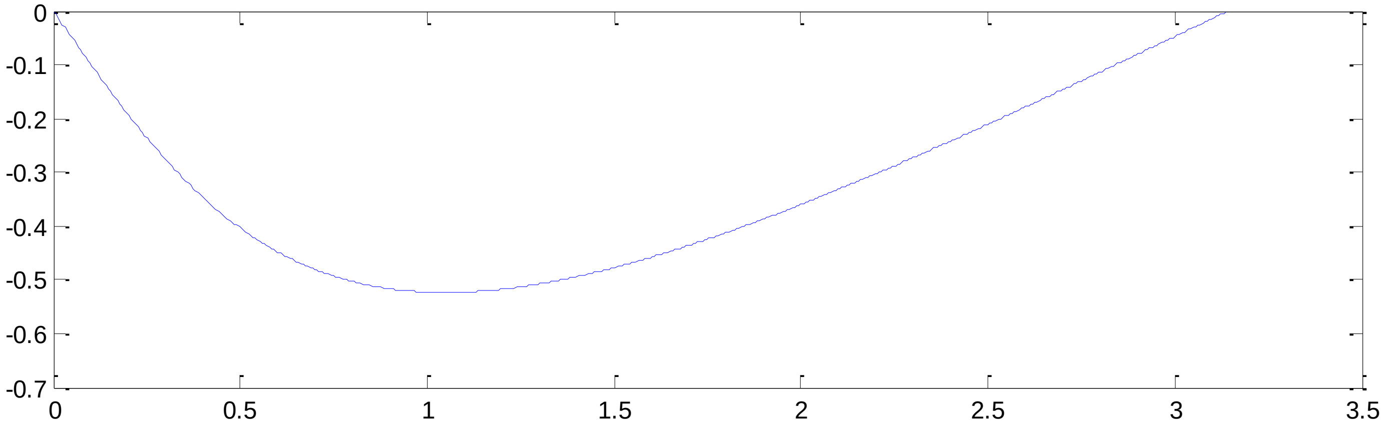


- Transfer fonksiyonu, ilerleme operatörü (z) yerine gecikme operatörü (z^{-1}) ile elde edilirse $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ şeklini alır. Bu durumda z=0 konumunda sıfır ortaya çıkar. çünkü

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z}{z-0.5}$$

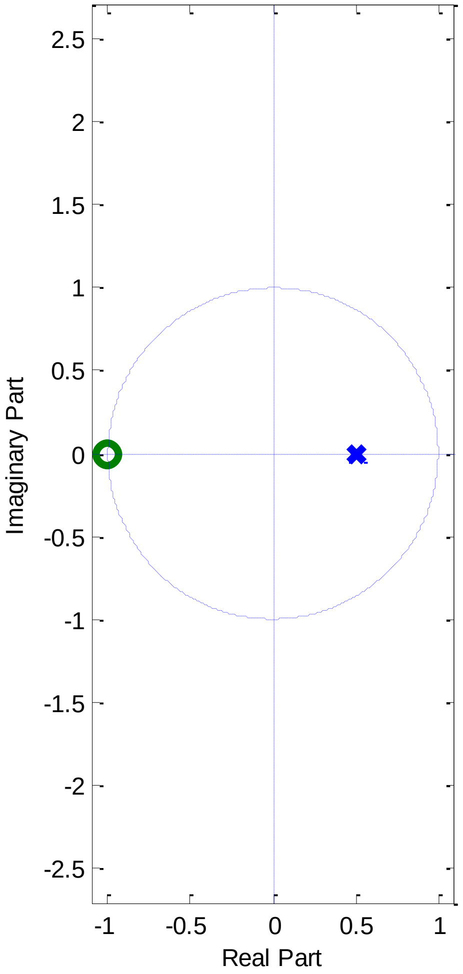


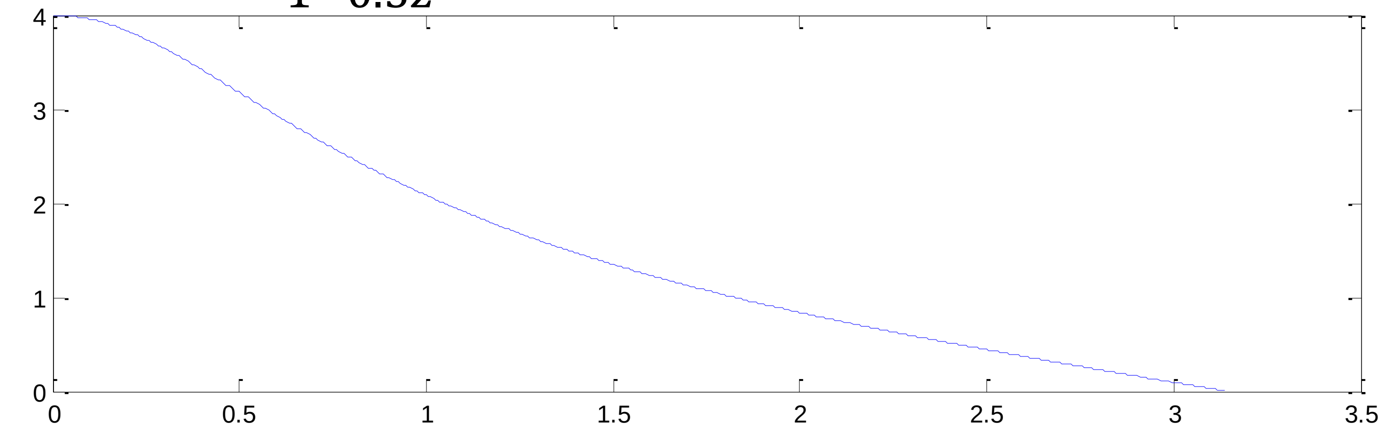


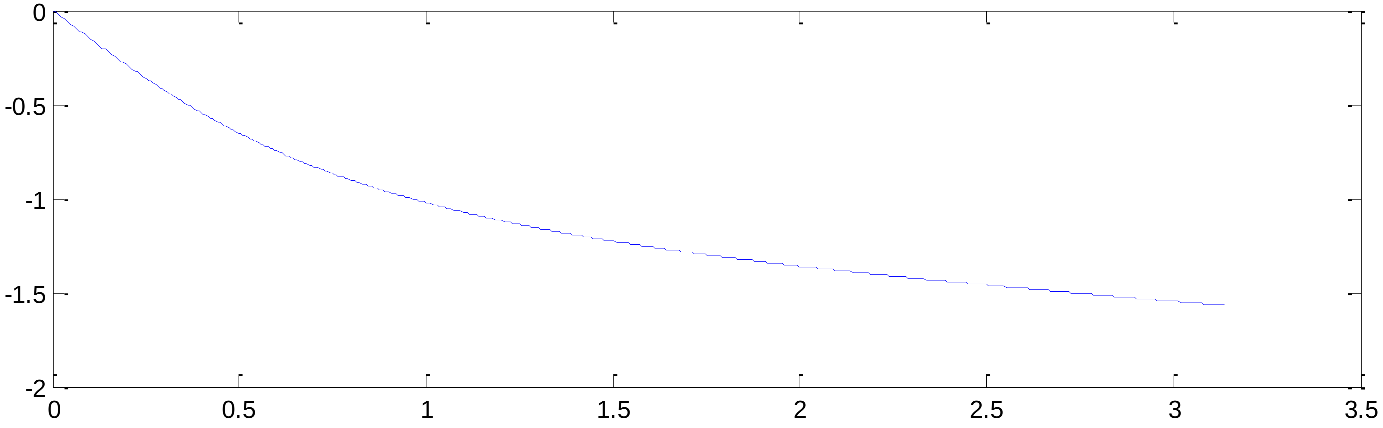


- Birim çembere konan sıfırlar, o frekansı bastırmaktadır. Filtrenin yüksek frekansları bastırması istendiği için Ω=π frekansına sıfır konur. $z = e^{j\pi} = -1$
- Sistemin z=0.5 de kutbu z=-1 de sıfırı var. $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

Sistemin tek kutbu olduğu için birinci dereceden alçak geçiren filtredir. Filtrenin derecesi artırılarak genlik cevabında daha keskin geçiş sağlanır.

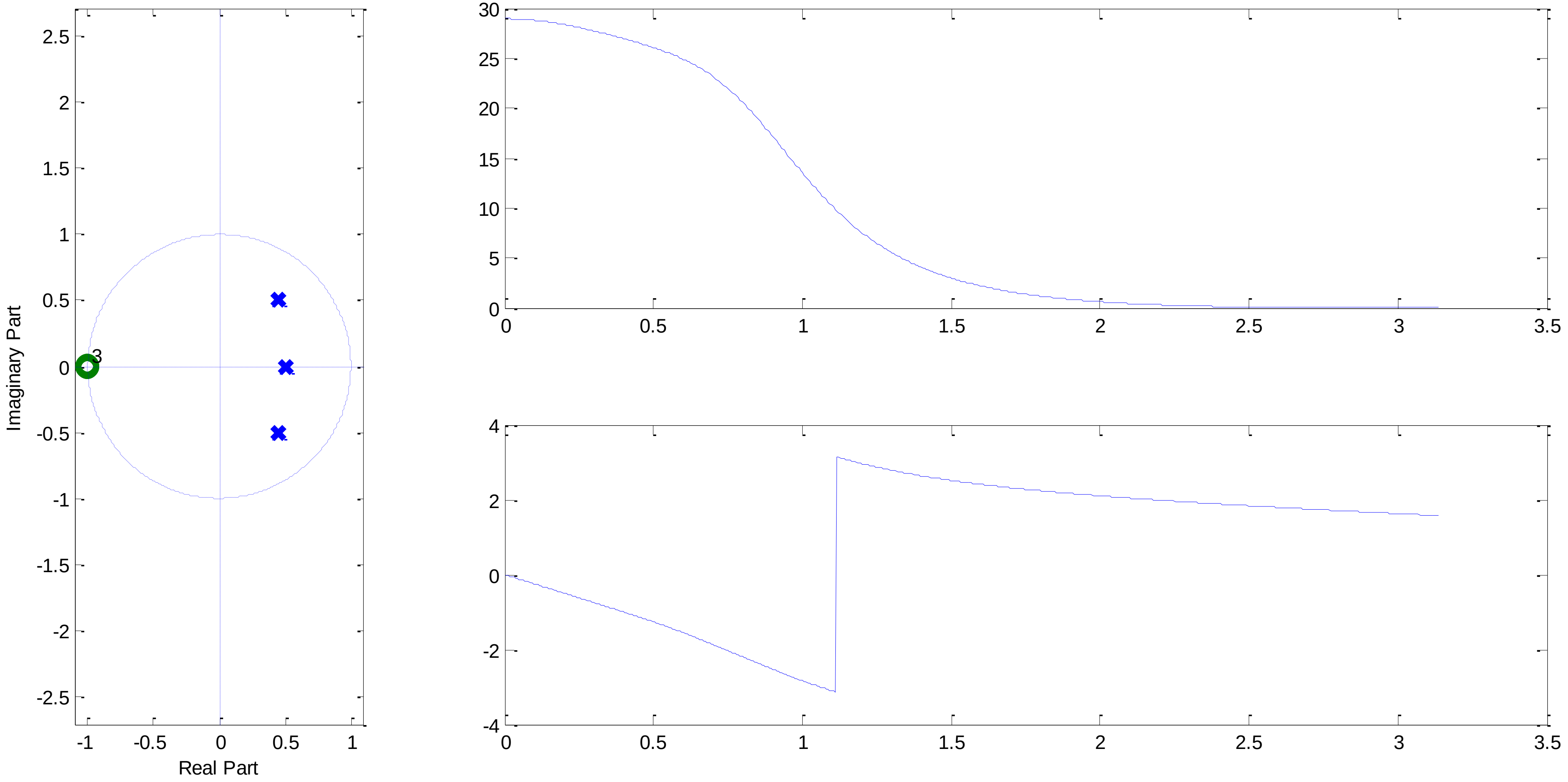






- Bu sisteme z=0.45+j0.5 ve z=0.45-j0.5 noktalarında iki kutup ve z=-1 noktasına iki sıfır eklenirse

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0.5z^{-1})(1-(0.45+j0.5)z^{-1})(1-(0.4-j0.5)z^{-1})}$$ şeklini alır.



- Frekans cevabının Ω=0’da birim genlikte olması için

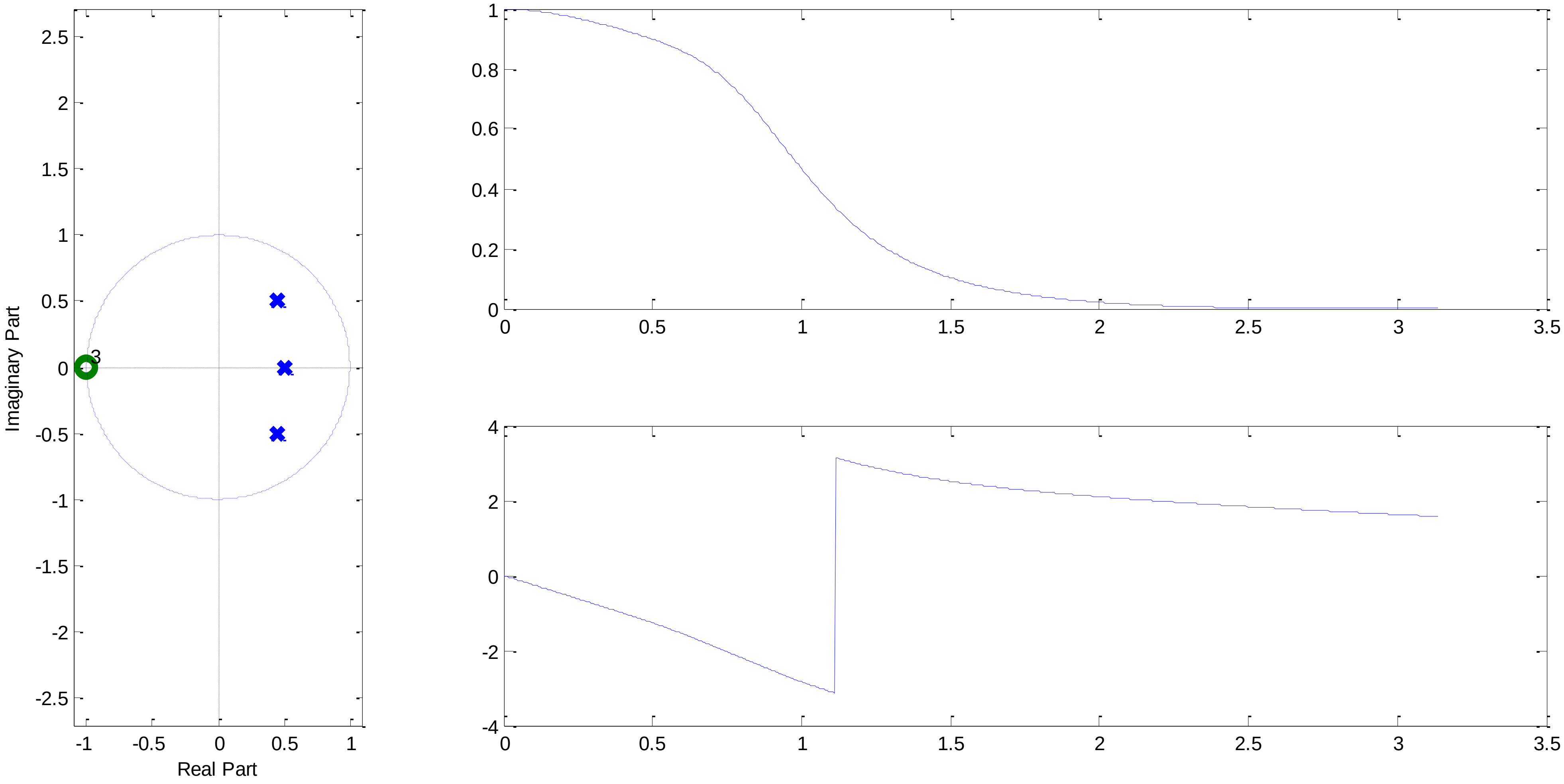
$$H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0} = H(z)\Big|_{z=1} = 1$$

Transfer fonksiyonuna sabit eklenir.

$$H(z) = K\frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0.5z^{-1})(1-(0.45+j0.5)z^{-1})(1-(0.4-j0.5)z^{-1})}$$

Bu ifadenin 1’e eşit olması için $K \cong 1/29$ olur.

$$H(z) = \frac{1}{29}\frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0.5z^{-1})(1-(0.45+j0.5)z^{-1})(1-(0.4-j0.5)z^{-1})}$$


Imaginary Part
Real Part
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-1
-0.5
0
0.5
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
-4
-2
0
2
4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5