52

DETERMİNANT UYGULAMALARI

A katsayılar matrisi n kare matris olacak şekilde bir $AX=B$ lineer denklem sistemini düşünelim. Yukarıdaki teorem bu denklemin herhangi bir X çözümü için;

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$adj(A)/ \quad AX=B \Rightarrow adj(A)(AX)=adj(A)B$$

$$\Rightarrow \underbrace{(adj(A).A)}_{n\times n}(X)_{n\times 1}=\underbrace{adj(A)_{n\times n}.B_{n\times 1}}_{sütun}$$

$$\Rightarrow det(A).\underbrace{I_n.X}_{X} = adj(A).B$$

$$\underbrace{det(A)}_{\Delta \text{ diyelim}}.X = adj(A).\begin{bmatrix} b_1 \\ b_n \end{bmatrix} \quad k. \text{ satırına bakarsak}$$

$\forall k=1,2,\ldots,n$

$$\Delta x_k = b_1 a_{1k} + b_2 a_{2k} + \cdots + b_n a_{nk} \text{ olur.}$$

Bu sonki A daki determinant açılımında A nın k.sütunu yerine $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ matrisinin yerleştirilmesiyle oluşan matrisin determinantını verir bunu

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A_{11} & b_1 & A_{1n} \\ A_{21} & b_2 & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ A_{n1} & b_n & A_{nn} \end{vmatrix} \text{ diyelim}$$

$\Delta x_k = \Delta_k$. olur.

Eğer A tersinirse $|A| = \Delta \neq 0$ olacağından;

her $k=1,\ldots,n$ için

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad \text{olur.}$$

Bu yönteme "Cramer Yöntemi" denir.

Burcunun Notları II. Dönem 19.02.2019

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z &= 0 \\ x+y-z &= 6 \\ 4x-5y+3z &= 28 \end{aligned}\right\}$$ uygulanabiliyorsa Cramer ile çöz.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$ tersinir ise CRAMER uygulanabilir.

$$|A|=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{K_2 \mapsto K_3+K_2}{\overset{\text{det n-lineer}}{=\!=}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -1.(-2).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \neq 0$$
$\Downarrow$
A tersinir
$\Downarrow$
Cr. uygulanabilir.

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 28 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\underset{K_2 \mapsto K_3+K_2}{=\!=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 28 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-12}{-6}=2$$

$$\boxed{x=2}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 28 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} \underset{K_1 \mapsto -2K_3+K_1}{=\!=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ -2 & 28 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{+1\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 28 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{96}{-6} = -16$$

$$\boxed{y=-16}$$

$$A_{11} L\left(\begin{bmatrix} E_1 \\ A_{21}E_1 + A_{22}E_2 \end{bmatrix}\right) + A_{12} L\left(\begin{bmatrix} E_2 \\ A_{21}E_1 + A_{22}E_2 \end{bmatrix}\right)$$

2. satıra göre lineer

$$A_{11} . A_{21} L\left(\begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \end{bmatrix}\right) + A_{11} A_{22} L\left(\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}\right) + A_{12} A_{21} L\left(\begin{bmatrix} E_2 \\ E_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$+ A_{12} A_{22} L\left(\begin{bmatrix} E_2 \\ E_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= A_{11} A_{21} L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + A_{11} A_{22} L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + A_{12} A_{21} L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + A_{12} A_{22} L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

olur. Bu ise $L(A)$ nın tamamen $L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ değerleriyle belirlendiğini gösterir.

Bu örnek aşağıdaki gibi genellenebilir.

Teorem! Eğer $L : F^{n\times n} \longrightarrow F$ ye bir n-lineer fonksiyon ise o zaman herhangi $A \in F^{n\times n}$ için $E_k = [0\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0]$ o.ü

k.bileşen

$$L(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_n = 1}^{n} A_{1i_1} . A_{2i_2} \dots A_{ni_n} . L\left(\begin{bmatrix} E_{i_1} \\ E_{i_2} \\ \vdots \\ E_{i_n} \end{bmatrix}\right)$$

Tanım Bir $L : F^{n\times n} \longrightarrow F$ n lineer fonksiyon eğer herhangi iki satırı identik aynı olan bir A matrisi için sıfır değeri alıyorsa yani $L(A) = 0$ ise L ye alterne (alternating) fonksiyon denir.

Örnek: 2x2 için $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$ için

$$L(A) = L\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \stackrel{t}{=} A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}$$ alternedir, göster.

$$L(I) = 0.0 - 1.1 = -1$$

$$L(A) = -\det(A) = \underbrace{\det(A)}_{\text{alterne}} . L(I)$$

alterne dir.

(54)

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 6\\ 4 & -5 & 28\end{vmatrix}}{\Delta}\xrightarrow[K_1 \to 2K_2+K_1]{}\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 6\\ -6 & -5 & 28\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\frac{(-1).(-1).\begin{vmatrix}3 & 6\\ -6 & 28\end{vmatrix}}{\Delta} = -20$$

$$\boxed{z=-20}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -16\\ -20\end{bmatrix}$$

ALTERNE MULTİLİNEER FONKSİYONLAR OLARAK DETERMİNANTLAR

(n-lineer)

Tanım: F bir cisim $L: F^{n\times n} \longrightarrow F$ ye olan bir fonksiyon eğer herbir satıra (veya sütuna) göre lineer ise yani;

$$L\left(\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_{i-1}\\ cR_i+dR_i'\\ R_{i+1}\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\right)=cL\left(\begin{bmatrix}R_1\\ R_{i-1}\\ R_i\\ R_{i+1}\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\right)+dL\left(\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_{i-1}\\ R_i'\\ R_{i+1}\\ \vdots\\ R_n\end{bmatrix}\right)$$

koşulunu sağlıyorsa L ye bir n-lineer fonksiyon denir.

Örnek: $L\left(\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\right)=A_{11}A_{22}$ 2-lineerdir (göst)

Üstelik $R_1[A_{11}\ A_{12}]$ ve $R_2=[A_{21}\ A_{22}]$ denilirse $E_1=[1\ 0]$ ve $E_2=[0\ 1] \in F^{1\times 2}$ standart bazlar o.ü

$$\left.\begin{aligned}R_1&=[A_{11}\ A_{12}]=A_{11}E_1+A_{12}E_2\\ R_2&=[A_{21}\ A_{22}]=A_{21}E_1+A_{22}E_2\end{aligned}\right\}$$ olur. L de yaz

$$L(A)=L\left(\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}A_{11}E_1+A_{12}E_2\\ A_{21}E_1+A_{22}E_2\end{bmatrix}\right)\underset{\text{lineer}}{=}$$

$$I^{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 2 \text{ işlemle } I\text{'yı elde ederiz}$$

(56)

Yardımcı Teorem: Eğer bir n-lineer $L: F^{n\times n} \to F$ alterne n-lineer fonksiyon ise o zaman bir $A \in F^{n\times n}$ matrisinden herhangi iki satırı yerdeğişmesiyle elde edilen bir B matrisinin görüntüsü;

$L(B) = -L(A)$

dır. Özel olarak I^{n} birim matrisin satırlarına bir δ permütasyonunun uygulamasıyla elde edilen bir matris ise o zaman m_δ I dan I^{δ} yı elde etmek için yapılan yerdiğiştirmelerin sayısı olmak üzere

$$L(I^{\delta}) = (-1)^{m_\delta} \cdot L(I)$$

dır.

İspat: determinant fonksiyonlarında Teorem 1 (A-B) den sonraki kısım ile aynı $D = L$ olarak yap

$$0 \underset{\text{alterne}}{=} L\left(\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i+R_j \\ R_i+R_j \\ R_n \end{bmatrix}\right) \underset{\substack{i\text{-satır} \\ j\text{-satır} \\ \text{göre} \\ \text{lineer} \\ \text{aç}}}{=}$$

Teorem 2 $L: F^{n\times n} \to F$ cismine bir alterne-n-lineer fonksiyonsa o zaman δ $J_n = \{1, \dots, n\}$ nin tüm permütasyonları üzerinde değişmek üzere $(\forall \delta \in S_n)$

$$L(A) = \left(\sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) A_{1\delta(1)} A_{2\delta(2)} A_{n\delta(n)}\right) \cdot L(I)$$

* dır. Özel olarak birim matris üzerindeki değeri 1 olan bir tek alterne n-lineer fonksiyon vardır. O da determinant fonksiyonudur.

Bu durumda

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) A_{1\delta(1)} \cdots A_{n\delta(n)} \cdot \underbrace{D(I)}_{1}$$

Burcu'nun Notları I. Dönem 19.02.2019 Lineer 2

0 ın derecesi →
$\partial(0(x)) = -\infty$

57

Örnek

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{\text{det. özel. kullanarak}}{=\!=} (a+b+c)^3$$ olduğunu ispatlayın

$$|A| \underset{R_1 \mapsto (R_2+R_3)+R_1}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{göre lineer}}{\overset{\text{1. satıra}}{=\!=}} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{K_2 \mapsto -K_1+K_2 \\ K_3 \mapsto -K_1+K_3}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{göre aç}}{\overset{\text{1. satıra}}{=\!=}} (a+b+c) \cdot 1 \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{matris}}{\overset{\text{Köşegen}}{=\!=}} (a+b+c)\left[-(a+b+c)\right] \cdot \left[-(a+b+c)\right]$$

$$= (a+b+c)^3$$

Ödev Örnek:

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$ old. gös.

POLİNOM MATRİSLERİ

Bu bölümde içerikleri polinom matrislerden söz edeceğiz.

sol kalanlar Uygunluk için bu polinomları katsayıları matrisler olan polinomlar şeklinde yazacağız.

Tanım: Bir $m \times p$ tipindeki (ölçü) içerikleri A_{ij} polinomları olan bir A matrisine "polinom matris" denir ve A nın derecesi $\deg(A) = \partial(A) = \max\{\partial(A_{ij})\}$ (en büyük dereceli içerik hangisi ise onun derecesi) olur

57

58

Hatırlatma

$f(x) = a \neq 0$ sabit $\Rightarrow \partial(f) = 0$

$f(x) = 0(x) = 0 \Rightarrow \partial(0(x)) \stackrel{\text{t}}{=} -\infty$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \; ; \; 0 \neq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{başkatsayı}}}{a_n} \in F$

ise $\partial(f(x)) = n$ idi.

Örnek:

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2+x^2 & -1 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2x \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\partial(A_1) = 2$

$\partial(A_2) = 1$

$\partial(A_3) = 0$

$\partial(A_4) = -\infty$

Teorem: $F[x]$ F cismi üzerinde Polinomlar halkası o.ü, $F[x]$ üzerinde $\deg(A) = \partial(A) = n$ olan $m \times p$ tipinde bir A polinom matris, her bir A_i F cismi üzerinde $m \times p$ tipinde matris o.ü

$$A = A_0 + xA_1 + x^2 A_2 + \dots + \underset{\hookrightarrow \text{sol}}{\underline{x^n}} A_n$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} 2x^2-3x+5 & -5 & x^3 \\ 3x^2-5 & 1-x^2 & 7x \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$\boxed{\partial(A) = 3}$

$A = A_0 + xA_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_0} + x\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}}_{A_1} + x^2\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} + x^3\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3}$$

60

Örnek: $B=\begin{bmatrix}2x^2-x & x+2 & 5\\ x^2+4 & 2x^3 & x^3-x^2\end{bmatrix} \in (\mathbb{R}[x])^{2\times 3}$

polinom matrisinin $\theta=\begin{bmatrix} x & 0\\ -1 & x-1\end{bmatrix}$ polinom matrisine bölümüyle elde edilen Q bölüm ve R kalanını bulunuz.

$B=(xI-A)\underset{?}{Q}+\underset{?}{R}$

$g=\begin{bmatrix}x&0\\-1&x-1\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} = xI-A$

$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \ A^3=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$

$\partial(B)=3$

$C_3=B_3$

$B=\underbrace{\begin{bmatrix}0&2&5\\4&0&0\end{bmatrix}}_{B_0}+x\underbrace{\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{B_1}+x^2\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}}_{B_2}+x^3\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}}_{B_3}$

$C_k=B_k+AC_{k+1}$

$C_3=B_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}$

$C_2=B_2+AC_3=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}$

$C_1=B_1+AC_2=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\3&2&0\end{bmatrix}$

$Q=C_1+xC_2+x^2C_3$ $\qquad \partial(Q)=2$ olmalı.
$(C_4=0$ alın..)

59

Teorem 2: F cisim, $A \in F^{n\times n}$ ve bir $B \in (F[x])^{n\times m}$ polinom matrisi

$$B = B_0 + xB_1 + \dots + x^{d-1}B_{d-1} + x^d B_d$$

için $B = (xI - A).Q + R$

olacak şekilde $F[x]$ üzerinde tek türlü belirlenen bir Q bölüm ve F üzerinde bir R kalan matrisi vardır.

Üstelik R bu B polinom matrisinde x yerine A matrisini yazarak elde edilir yani

$$R = B(A) = B_0 + AB_1 + \dots + A^{d-1}B_{d-1} + A^d B_d$$

özel olarak;

$$B_0 + xB_1 + \dots + x^{d-1}B_{d-1} + x^d B_d = (xI - A)Q \text{ dir.} \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{B_0 + AB_1 + \dots + A^{d-1}B_{d-1} + A^d B_d}_{R \text{ idi}} = 0$$

NOT $\partial(B) = d$ ise Q nun derecesi d-1 olacaktır

Burada

$$Q = C_1 + xC_2 + \dots + x^{r-1}C_r \text{ alalım} \quad \underline{r \le d-1}$$

$$B_0 + xB_1 + \dots + x^d B_d = (xI - A)(C_1 + xC_2 + \dots + x^{r-1}C_r) + R$$

$$= (R - AC_1) + x(C_1 - AC_2) + x^2(C_2 - AC_3) + \dots$$

$$\vdots$$

$$C_d = B_d \text{ bulunur}$$

$$R - AC_1 = B_0$$
$$C_1 - AC_2 = B_1$$
$$C_2 - AC_3 = B_2$$
$$\vdots$$
$$C_k - AC_{k+1} = B_k$$

$$R = B_0 + AC_1$$
$$= B_0 + A(B_1 + AC_2)$$
$$= B_0 + AB_1 + A^2C_2$$
$$= B_0 + AB_1 + A^2(B_2 + AC_3)$$
$$\vdots$$

$$R = B_0 + AB_1 + \dots + A^d B_d \text{ bulunur.}$$

$$\boxed{C_k = B_k + AC_{k+1}}$$

$$Q = C_1 + xC_2 + x^2C_3 + \dots$$

Burcunun Notları I. Dönem
13.02.2019
Lineer 2

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ x & 2x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1+2x & 1 & 0 \\ 3+x & 2+2x+2x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$R = B(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

sağlama

$$g.Q + R = \begin{bmatrix} x & 0 \\ -1 & x-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x-1 & 1 & 0 \\ x+3 & 2x^2+2x+2 & x^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2-x & x & 0 \\ -2x+1+x^2+2x-3 & -1+2x^3+2x^2+2x-2x^2-2x-2 & x^3-x^2 \end{bmatrix} + R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2-x & x+2 & 5 \\ x^2+4 & 2x^3 & x^3-x^2 \end{bmatrix}$$

Ödev

$B = \begin{bmatrix} x^2 & x^2+x & 1 \\ -2 & x & x^2 \end{bmatrix}$ polinom matrisinin

$xI - A = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ile bölümünden elde edilen Q

bölüm ve R kalanı bul.

KARAKTERİSTİK VE MİNİMAL POLİNOMLAR

(ÖZ-EIGEN)

<u>Tanım:</u> $A \in F^{n\times n}$ olsun, $xI_n - A$ matrisine A nın karakteristik (öz-eigen) matris denir ve bunun determinantına da A nın karakteristik polinomu denir, ve $\Delta_A(x)$ ile gösterilir,

$$\Delta_A(x) = |xI - A| = \det(xI - A)$$

dır.

<u>Örnek:</u>

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulun.

$$\Delta_A(x) = |xI_3 - A| = \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 4 \\ 2 & +4 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{K_2 \to K_3 + K_2}{=} \begin{vmatrix} \overset{+}{x-1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{2} \\ -2 & x & 4 \\ 2 & x & x-4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)[x^2 - 4x - 4x] + 2(-2x - 2x)$$

$$= x[(x-1)(x-8) - 8]$$

$$= x(x^2 - 9x + 8 - 8)$$

$$= x(x^2 - 9x)$$

$$\Delta_A = x^3 - 9x^2$$

Burada karakteristik polinom üçüncü dereceden monik polinom (baş kat sayı 1) olduğu görülür.

(*) $A \in F^{n\times n} \Rightarrow \partial(\Delta_A(x)) = n \longrightarrow$ monik ∇

Teorem 1 $A \in F^{n\times n}$ olsun. O zaman

i) $\Delta_A(x) = x^n - tr(A)\,x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ dır.

ii) A ve A^T nın karakteristik polinomları aynıdır.

iii) Herhangi bir tersinir $P \in F^{n\times n}$ için A ile $P^{-1}AP$ nin karakteristik polinomları aynıdır.

iv) $V(F)$ sonlu boyutlu ve $T \in Hom(V,V)$ olsun. V nin herhangi iki β ve β' sıralı bazları için matrisleri $[T]_\beta$ ve $[T]_{\beta'}$ ise $\Delta_{[T]_\beta} = \Delta_{[T]_{\beta'}}$ dır.

Teoremin son kısmı T lineer operatörü için $\Delta_{[T]_\beta}$ polinomunun V nin özel olarak seçilmiş β bazından bağımsız olduğunu gösterir.

İspat:

(i) $$\Delta_A(x) = |xI - A| = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta)\,(xI-A)_{1\delta(1)}(xI-A)_{2\delta(2)}\cdots(xI-A)_{n\delta(n)}$$

$\delta = e$

$$= (x-A_{11})(x-A_{22})\cdots(x-A_{nn}) + \sum_{\substack{\delta\in S_n \\ \delta \neq e}} sgn(\delta)\,(xI-A)_{1\delta(1)}\cdots(xI-A)_{n\delta(n)}$$

$$= x^n - (A_{11} + \dots + A_{nn})\,x^{n-1} + (\text{derecesi} \le n-2 \text{ olan polinom}) + \sum_{\substack{\delta\in S_n \\ \delta \neq e}} sgn(\delta) \cdot (xI-A)_{1\delta(1)}\cdots(xI-A)_{n\delta(n)}$$

Burada $\delta \neq e$ demek $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ var ki $\delta(i) \neq i$ dır demektir.

δ permütasyon (1-1 ve örten) δ^{-1} var ve bu da bir permütasyondur.

δ^{-1} 1-1 $\rightarrow \underbrace{\delta^{-1}(\delta(i))}_{e(i)=i} \neq \delta^{-1}(i)$ dır $\delta^{-1}(i) = j$ diyelim

$\Rightarrow j = \delta^{-1}(i) \neq i = \delta(\underbrace{\delta^{-1}(i)}_{j}) = \delta(j)$

$j \neq \delta(j)$ $\therefore$ $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ de var oldu.

(64)

$\delta \neq 0 \Rightarrow$ en az iki indis kendisine gitmez

Böylece

$$(xI-A)_{k\,\delta(k)} = \begin{cases} -A_{k\,\delta(k)}, & \delta(k) \neq k \\ x - A_{kk}, & \delta(k) = k \end{cases}$$ en az iki derece azaldı

dur.

$$\Delta_A(x) = x^n - \overset{\text{köşegendeki el. toplamı}}{tr(A)} + \underbrace{(\text{derecesi } n \leq 2 \text{ bir pol}) + (\text{der. } n \leq 2 \text{ br pol})}_{\text{derecesi } \leq n-2 \text{ olur pol.}}$$

$$= x^n - tr(A) + a_{n-2}x^{n-2} + \_\_ \_\_\_ + a_1x + a_0 \text{ olur.}$$

$x \mapsto 0$ alırsak sabit terim bulunur.

$$\Delta_A(0) = |0I - A| = a_0$$

$$a_0 = |-A| = |(-1).A|$$

$$\overset{*_1}{=} (-1)^n . |A|$$

$$= (-1)^n \det(A)$$

$$\Rightarrow \Delta_A(x) = x^n - tr(A)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \_\_\_$$
$$+ a_1x (-1)^n \det(A)$$

$*_1$ $|kA| = k^n |A|$

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} kR_1 \\ \vdots \\ kR_n \end{bmatrix}$$

$$|kA| = k . \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

ii) $\Delta_A(x) = |xI - A|$

$$\Delta_{A^T}(x) \overset{t}{=} |xI - A|$$

$$\overset{*_2}{=} |xI^T - A^T|$$

$$\overset{*_3}{=} |(xI)^T - A^T|$$

$$\overset{*_4}{=} |(xI - A)^T|$$

$$\overset{*_5}{=} |xI - A| = \Delta_A(x)$$

$*_2$ $I^T = I$

$*_3$ $(kA)^T = kA^T$

$*_4$ $(A \mp B)^T = A^T \mp B^T$

$*_5$ $|A| = |A^T|$

$*_6$ $\exists k \in F$, $k(AB)$
$$= (kA)B$$
$$= A(kB)$$

$*_7$ $= |AB| = |A| . |B|$

$*_8$ $= |I| = 1$

iii) $$\Delta_{P^{-1}AP}(x) = |xI - P^{-1}AP|$$

$$= |x(P^{-1}IP) - P^{-1}AP|$$

$$\overset{*_6}{=} |P^{-1}(xI)P - P^{-1}AP|$$

$$\overset{\text{mat. çarp. dağılma öz.}}{=} |P^{-1}(xI - A)P|$$

66

<u>Sonuç 1</u>: Eğer $V(F)$ sonlu boyutlu bir vek. uzayı ve $T: V \to V$ lineer op. olsun. $\Delta_T(T) = 0$ dır.

<u>Sonuç 2</u>: $V(F) < \infty$ ve $T: V \to V$ lin. op.nün sağladığı (veya bir $A \in F^{n\times n}$ matrisinin) tüm polinomların kümesi $F[x]$ da sıfırdan farklı bir idealdir.

$$f(T) \overset{t}{\Longleftrightarrow} f(\underbrace{[T]_\beta}_{A \text{ gibi}}) \text{ old. dan düşünürsek}$$

$$J_A = \{ f(x) \in F[x] \ ; \ f(A) = 0 \} \underset{\text{ideal}}{\lhd} F[x]$$

$0(x)$ polinomu $0(A) = 0$ old. dan $0(x) \in J_A$, $J_A \neq \emptyset$

$$\Delta_A(A) \overset{CHT}{=} 0 \Rightarrow \Delta_A(x) \in J \Rightarrow J \neq (0)$$

$$\partial(\Delta_A) = n \text{ (monik pol.)}$$

ideal? (ödev)

Yukarıda söylendiği gibi Δ_A J_A da sıfırdan farklı bir polinomdur. Benzer düşünce T lin. op. için uygular. Bu sonuç bize J_A idealinin bir monik üreteç (doğuran) olduğunu gösterir. Monik üreteç, J_A daki A yı kök kabul eden en küçük dereceli monik polinom dır. J_A da monik üreteç vardır. Çünkü tamsayılar kümesi iyi sıralı oldu. dan ve J_A da polinomlar derecelerine göre sıralanabildiğinden bir en küçük dereceli polinom mutlaka vardır.

<u>Tanım</u>: $A \in F^{n\times n}$ olsun J_A idealinin monik üretecine yani A yı kök kabul eden en küçük dereceli polinoma A nın minimal polinomu denir ve $\delta_A(x)$ ile gösterilir.

$\delta_A(A) = 0$, $\delta_A(x)$ Ayı kök kabul eden en küçük dereceli pol $\overset{t}{\Longleftrightarrow}$ $\delta_A(x)$ (minimal)

$\overset{**}{=} |\underset{\in F}{P^{-1}}| \, \underset{\in F}{|xI-A|} \, . \underset{\in F}{|P|}$

$\overset{\text{des}}{\underset{\text{ol}}{=}} |P^{-1}| \, |P| \, . \, |xI-A|$

$\overset{**}{=} |P^{-1}P| \, |xI-A| = |I| \, . \, |xI-A|$

$\overset{**}{=} 1 \, . \, |xI-A| = \Delta_n(x)$

iv) β ve β' V'nin iki sıralı bazı ve $[T]_\beta$ ve $[T]_{\beta'}$ sırasıyla T'nin bir bazlara göre gösterelimi olsun. Biz biliyoruz ki $\beta' \xrightarrow{P} \beta$ geçiş matrisi o.ü

$[T]_{\beta'} = \underbrace{P^{-1}[T]_\beta}_{A \text{ gibi düşünürsek}}$ olur.

Aile $P^{-1}AP$ nın kar. pol. $\Delta(x)$ den eşittir. ispat biter.

Teorem 2 (Cayley-Hamilton Teoremi) (CHT) Her $A \in F^{n \times n}$ matrisi karakteristik polinomunun bir köküdür. Yani $\Delta_A(A) = 0$ dır.

maib / $\Delta_n(x) = \underbrace{|xI-A|}_{\text{bu matrisin adj. formulünü yaz}} = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ alalım

$(xI-A) \cdot adj(xI-A) = det(xI-A) . I$ olur.

$(xI-A) \, . \, \Theta$ gibi $= \underbrace{(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n)I}_{B \text{ polinom}}$

UYARI $\Delta_n(A) = |xI - A|$

$\begin{vmatrix} x - A_{11} & \\ & x - A_{22} \end{vmatrix}$

x e A matrisini yerleştiremeyiz

Polinom matrisleri üzerindeki teo 2 den

$B = (xI-A) . \Theta \Leftrightarrow B(A) = R = 0$ ise

$B \, adj(B) = |B| \, I = adj(B) . B$

$(xI-A)\Theta = a_0I + a_1xI + \dots + a_{n-1}x^{n-1}I + x^nI = B$

$\xLeftrightarrow[(*)]{\text{Teo}} R = B(A) = a_0I + a_1AI + \dots + a_{n-1}A^{n-1}I + A^nI = 0$ olur

$\Rightarrow \underbrace{a_0I + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n}_{} = 0$

$\Delta_A(A) = 0$ oldu $\boxtimes$

Tanım: V(F) sonlu boyutlu ve $T: V \to V$ bir lin. operatör o.ü. T'nin karakteristik polinomu $[T]_\beta$ V'nin h.h. β bazına göre T'nin matris gösterilimi o.ü $[T]_\beta$ nın karakteristik polinomudur. Yani $\Delta_T \doteq \Delta_{[T]_\beta}$ dır.

Benzer şekilde

$0 \neq J_T = \{ f(x) \in F[x] : f(T) = 0 \text{ sıfır dönüşüm} \} \triangleleft F[x]$

dir J_T nin monik üretecine T lin. op. nin minimal polinomu denir. $\delta_T(x)$ ile gösterilir.

** Sonuç 3: Bir $A \in F^{n \times n}$ (veya bir $T: V \to V$ opt. nin) minimal polinomu karakteristik polinomu böler

Yani $\delta_A \mid \Delta_A$ (veya $\delta_T \mid \Delta_T$). dır.
↳ böler

İspat: Aslında minimal polinomun A yı kök kabul eden hhl polinomu böldüğünü gösterirsek CHT den dolayısıyla Δ_A yı da bölecektir.

$f(x) \in F[x]$ ve $\underline{f(A) = 0}$ olsun $(f(x) \in J_A)$

$\delta_A(x)$ de A nın minimal pol. $\overset{*_1}{\Leftrightarrow} \underline{\delta_A(A) = 0}_{*_2}$: $\exists\, \delta_A(x)$ en küçük dereceli monik pol.

$f(x)$ ile $\delta_A(x)$ e Bölme Algoritması Uygulayalım

(1) $\underline{f(x) = \delta_A(x) \cdot q(x) + r(x)}$: $\exists\, q(x), r(x) \in F[x]$ var ve
ya $\partial(r(x)) < \partial(\delta_A(x))$ dir ya da $r(x) = 0$ dır.

Kabul edelim ki $r(x) \neq 0$ olsun.

O zaman

$$f(A) = \delta_A(A) \cdot q(A) + r(A) \text{ olur.}$$

$$\underset{*_1}{\|} \qquad \underset{*_2}{\|} \qquad \|$$

$$0 = \underbrace{0 \cdot q(A)}_{0} + r(A)$$

$\Rightarrow r(A) = 0$ olur $\mathcal{M}$ $\partial(r(x)) < \partial(\delta_A(x))$ idi fakat A yı en küçük kabul eden en küçük dereceli polinomun $\delta_A(x)$ oluşuna çelişir. Kabul YANLIŞ. $r(x) = 0$ olmalı

İspatı:
$A \in F^{n\times n}$ ve $S_A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m \in F[x]$ min. pol. olsun
O zaman $S_A(A) = 0$ dır.

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{m-1}A^{m-1} + A^m \text{ olur.}$$

Polinom mat. üzerindeki teo. den

$$S_A(x) I = a_0 I + a_1 x I + \dots + a_{m-1}x^{m-1} I + x^m I$$
$$= (xI - A).Q + \underbrace{0}_{\text{kalan yok}}$$

olur. Buradan her iki tarafın determinantı alınırsa

$*_1\ |AB| = |A||B|$
$*_2\ |kA| = k^n|A|$

$$\det(S_A(x).I) = (\det(xI-A).Q) \text{ olur.}$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} S_A(x) & & 0 \\ & S_A(x) & \\ 0 & & \ddots\ S_A(x) \end{pmatrix}\right] \overset{*_1}{=} \underbrace{\det(xI-A)}_{\Delta_A(x)} \det Q \text{ dır}.$$

$$\overset{*_2}{\Rightarrow} (S(x))^n . |I| = \Delta_A(x) \det(Q) \text{ olur.}$$

$$(S(x))^n = \Delta_A(x) . \underbrace{\det(Q)}_{p(x) \text{ gibi polinomdur}} \xLeftrightarrow[\text{bölüm}]{} \Delta_A(x) \,|\, (S_A(x))^n \text{ dır}$$

Şimdi P $\Delta_A(x)$ nin h.h.1 asal çarpanı o.ü.
$P \,|\, \Delta_A(x)$ dir ve $\Delta_A(x) \,|\, (S_A(x))^n$ olduğundan

$$\overset{\text{geçişmeden}}{\Longrightarrow} P \,|\, (S_A(x))^n \text{ dır.} \xRightarrow[\text{olduğundan}]{\text{asal}} P \,|\, S_A(x) \text{ olur.}$$

Bu şu demek: $\Delta_A(x) = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_r} \Rightarrow S_A(x) = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$

$S_A | \Delta_A$ için $1 \le l_i \le k_i$ dir. $\boxtimes$

(70)

Sonuç 1 Karakteristik polinom ile minimal polinom aynı köklere sahiptir.

İspat: a $\Delta_A(x)$ in kökü $\Rightarrow \Delta_A(a)=0 \overset{\text{çarpan}}{\underset{\text{teo}}{\Longleftrightarrow}} x-a \mid \Delta_A(x)$

$\perp$ asal polinomdur

$\Downarrow$ Teo 3

$x-a \mid \delta_A(x)$ idi

$x-a$, $\delta_A(x)$ in çarpanı

$\delta_A(x)=(x-a).q(x)$ olur $\Leftrightarrow$ a δ_A nın kökü

Sonuç 2 Eğer Δ_A, farklı asal polinomların çarpımı ise $\Delta_A = \delta_A$ dır.

İspat: $\Delta_A(x) = \underbrace{p_1^1 \, p_2^2 \cdots}_{\text{farklı}} p_r^1 \overset{\text{Teo 3}}{\Longrightarrow} \delta_A = p_1^{l_1} \cdots p_r^{l_r}$

$1 \leq l_i \leq 1$

$\Rightarrow l_i = 1$ olmalı

$\delta_A(x) = p_1^1 \cdots p_r^1 = \Delta_A(x)$ olur.

Örnek:

$A=\begin{bmatrix}-5 & -2 & -2\\ 6 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$ mat. karak ve min. pol. bul

$$\Delta_A(x) = \begin{bmatrix} x+5 & 2 & 2\\ -6 & x-3 & -2\\ -6 & -2 & x-3\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & 0 & 2\\ -6 & x-1 & -2\\ -6 & -(x-1) & x-3\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$$

$\delta_A(x) = (x-1).(x+1)$ ya da $\delta_A(x) = \Delta_A(x) = (x-1)^2(x+1)$

asal çarpan aynı kuvvetler değişebilir

$$\delta_A(A) = (A-I).(A+I)$$

$$= \begin{pmatrix}-6 & -2 & -2\\ 6 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ 6 & 4 & 2\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \delta_A(x) = (x-1).(x+1)$

minimal polinom

$$\Delta_A(x) = (x^2+1)\,(x-3)^3\,(x+1)^2$$
$$\delta_A = (x^2+1)\cdot(x-3)\cdot(x+1) \quad \text{veya}$$
$$= (x^2+1)\cdot(x-3)^2\cdot(x+1)^2$$

Bu yöntem eğer çarpanlara ayıramıyorsak minimal polinom bulmada etkili bir yöntem vermez.

Etkili Yöntem **Teorem 4:** Bir $A \in F^{n\times n}$ matrisinin minimal polinomu δ_A nın katsayıları

$(*)\; x_0 I + x_1 A + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = 0$

homojen denklem sisteminin bir temel çözümü dür.

$(*)$ sisteminin çözüm uzayına W dersek ve $\partial(\delta_A(x)) = m$ dersek $\dim(W) = n+1-m$ dir.
minimal p.

Buradan n bulunup $x_m = 1$, $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$ atamaları yapılarak temel çözüm bulunur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisinin min. pol. A, A^2, A^3 hesaplayarak bul.

$\delta_A(x) = x_0 + x_1 x + \ldots + x_m x^m \qquad \partial(\delta_A) = m$

$x_0 I + x_1 A + x_2 A^2 + x_3 A^3 = 0$ homojen sist. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_1 \\ x_1 & -x_1 & -2x_1 \\ 0 & x_1 & 2x_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -x_2 & -2x_2 \\ -x_2 & -x_2 & -3x_2 \\ x_2 & x_2 & 2x_2 \end{bmatrix}}_{A^2} + \begin{bmatrix} -x_3 & -x_3 & -2x_3 \\ -x_3 & -2x_3 & -3x_3 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 - x_3 & -x_2 - x_3 & -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 & x_0 - x_1 - x_2 - 2x_3 & -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_0 + 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

69

$\overset{(1)\text{den}}{\Longrightarrow} f(x) = \delta_A(x) \cdot q(x)$, $\exists q(x) \in F(x)$ var.

$\overset{1}{\underset{\text{böler}}{\Longleftrightarrow}} \delta_A(x) \mid f(x)$ dolayısıyla $\Delta_A(A) \overset{CHT}{=} 0$ olduğundan

$\delta_A(x) \mid \Delta_A(x)$ olur.

Uyarı 1) $A \in F^{n \times n}$ ise her $P \in F^{n \times n}$ tersinir matrisi için

$S_{P^{-1}AP}(x) = \delta_A(x)$

2) $T \in Hom(V, V)$ ve $V(F) < \infty$ ise V nin hhl

β bazı için $\delta_T(x) \doteq \delta_{[T]_\beta}(x)$ dır.

** Teorem 3 $A \in F^{n \times n}$ olsun. Δ_A ve δ_A nın asal çarpanları aynıdır. Daha kesin olarak $P_i \in F[x]$ ler farklı asal polinomlar ve $k_1, \dots, k_r, \ell_1, \dots, \ell_r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$\Delta_A = P_1^{k_1} \dots P_r^{k_r} \Rightarrow \delta_A = P_1^{\ell_1} \dots P_r^{\ell_r}$ ve

$1 \leq \ell_i \leq k_i$
$1 \leq i \leq r$

!: Asal polinom o cisim üzerinde indirgenmez yani çarpanlarına ayrılamaz polinomdur.

Örnek:

$P(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ de asal polinom

$\underset{\notin \mathbb{Q}}{(x - \sqrt{2})} \underset{\notin \mathbb{Q}}{(x + \sqrt{2})} \notin \mathbb{Q}[x]$

$\in \mathbb{R}(x)$ fakat $\mathbb{R}$ asal değil

$P(x) = x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ asaldır.

$(x - i)(x + i) \notin \mathbb{R}[x]$

$\in \mathbb{C}[x]$ de indirgenir ama asal değil

Burcu'nun Notları I. Dönem 19.02.2019 Lineer 2

COMPANIAN MATRİSLER (EŞ-MATRİSLER)

Tanım

$f = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$

monik polinom olsun

$$C = C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisine f'nin companian matrisi denir ve bazen transpoze alınarak da yazılır.

Teorem 5: C matrisi monik bir $f \in F[x]$ polinomunun companian matrisi ise o zaman

$$\Delta_C = \delta_C = f$$

dir.

İspat:

$f = f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in F[x]$ alalım

f'nin companian matris C olsun.

$\delta_C(x) = x_0 + x_1x + x_2x^2 + \cdots + x_mx^m$ olsun. $1 \leq m \leq n$

minimal polinomun katsayıları

$x_0I + x_1C + x_2C^2 + \cdots + x_nC^n = (0)$ hom. sisteminin bir temel çözümü idi (Teo 1)

Sırasıyla $I, C, C^2, \cdots, C^{n-1}$ ve C^n matrislerinin ilk sütunları

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$ olur (*) homoj. sis. de

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_0x_n &= 0 \\ x_1 - a_1x_n &= 0 \\ x_2 - a_2x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} - a_{n-1}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklemlerini içerir. Bu sistemin çözüm uzayına W dersek

$\dim(W) = \underbrace{n+1}_{\text{bilinmeyen}} - \underbrace{n}_{\text{denklem}} = 1$

$\partial(\delta_C(x)) = m$ o.ü.,

72

$x_0 - x_3 = 0$

$-x_2 - x_3 = 0$

$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

$x_0 - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

indirge

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_0 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \dim(W) = 4-3 = \underline{1} \text{ serbest değ.}$$

$$\dim(W) = n+1-m$$
$$1 = 3+1-m \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$m=3 \Rightarrow x_3 = 1$ (monik) ortemesi yaptık

$$\left.\begin{aligned} x_0 - x_3 &= 0 &\Rightarrow x_0 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 &\Rightarrow x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \delta_A(x) = x_0 + x_1x + x_2x^2 + x_3x^3$$
$$= \underbrace{1 - x^2 + 1x^3}_{\Delta_A(x)}$$

7 Nisan 2016

Sonuç:

F bir cisim ve $K \subset F$ alt cismi olsun. $A \in K^{n \times n}$ ise A'nın minimal polinomu K üzerindeki ve F üzerindeki bir matris olarak eşittir.

Burcu'nun Notları I. Dönem 19.02.2019 Lineer 2

Teorem 6

Bir $A \in F^{n\times n}$ matris verilsin.

A, karakteristik polinomu (Δ_A nın) companion matrisine benzerdir $\iff$ A nın minimal polinomu δ_A ve karakteristik polinomu Δ_A identik olarak eşittir.

$$\Delta_A = |xI - A| = x^n - tr(A)x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1x + (-1)^n \det(A)$$

$$C_{\Delta_A} \Rightarrow A \sim C_{\Delta_A} \iff \Delta_A = \delta_A \text{ dır.}$$

$$\Downarrow$$

$C = P^{-1}AP$:. $\exists P$ tersinir mat. var.

KARAKTERİSTİK DEĞERLER (Eigen-Öz) & KARAKTERİSTİK (Eigen-Öz) VEKTÖRLER VE UZAYLAR

Tanım: $V(F)$ bir vektör uzayı, $T \in Hom(V,V)$ olsun.

Herhangi bir $c \in F$ skaler için

$$W_c = \{\alpha \in V ; T(\alpha) = c\alpha\}$$
$$= \{\alpha \in V : (T - cI)(\alpha) = 0_V\}$$
$$= Ker(T - cI)$$

$T(\alpha) = c\alpha$

$cI(\alpha)$

$T(\alpha) - cI(\alpha) = 0$

$\xLeftrightarrow{\text{lineer}}$ $(T - cI)(\alpha) = 0$

operatörlerin cebrinden

kümesi V nin bir alt vektör uzayıdır

$T : V \to V$

$I : V \to V$

$cI : V \to V$

$T - cI : V \to V$

$\uparrow$

$Ker(T - cI) \leq V$

Görelim;

$W_c \leq V \iff$ i) $W_c \neq \emptyset$

$$T(0_V) \xlongequal[\text{öz}]{\text{elemanter}} 0_V = c.0_V$$

$$\Rightarrow T(0_V) = c0_V \xLeftrightarrow{\text{tnm}} 0_V \in W_c \neq \emptyset$$

ii) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in W_c$ ve $k_1, k_2 \in F$ $\quad k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in W$?

$\alpha_1, \alpha_2 \in W \Rightarrow \underbrace{T(\alpha_1) = c\alpha_1}_{(1)}$ ve $\underbrace{T(\alpha_2) = c\alpha_2}_{(2)}$

$$T(k\alpha_1 + k\alpha_2) \underset{\text{liner. op.}}{\overset{T}{=}} k_1 T(\alpha_1) + k_2 T(\alpha_2)$$

$$\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} k_1(c\alpha_1) + k_2(c\alpha_2)$$

$$\underset{\cdot F}{\overset{*1}{=}} c(\underbrace{k_1\alpha_1}_{\in V}) + c(k_2\alpha_2)$$

$$\underbrace{T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)}_{\overset{\shortparallel}{\alpha \text{ gibi}}} \underset{\cdot F}{\overset{*2}{=}} c(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$$

$$\Downarrow$$

$*1)$ $\forall c_1 c_2 \in F$, $\forall v \in V$

$c_1(c_2 v) = (c_1 c_2) v = c_2(c_1 v)$

$\boxed{*2\ \ c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2}$

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in W_c$ dır $\Rightarrow$ i ∧ ii den $W_c \leq V$ dr.

Tanım:

T, V(F) vektör uzayının bir lineer operatorü olsun

(yani $T \in Hom(V, V)$ olsun)

i) Eğer $W_c = Ker(T - cI) \neq 0$ ise o zaman c ye

T linear operatörünün özdeğeri veya karakteristik değeri denir. eigen

$T(\alpha) = c\alpha$ :: $\exists\, 0 \neq \alpha \in V$ varsa
↳ özdeğer

ii) Her bir c karakteristik değeri için $T(\alpha) = c\alpha$

koşulunu sağlayan $0_V \neq \alpha \in V$ vektörüne T nın

c ye karşılık gelen (c ye ait) karakteristik (öz) vektörü

denir.

iii) Bir c öz (karakteristik) değeri için

$W_c = Ker(T - cI) = \{\alpha \in V : T(\alpha) = c\alpha\}$

alt uzayına c ye ait karakteristik (öz) alt uzayı

denir.

$1 = \dim(W) = n+1-m$

matrisin tipi — δ_c'nin derecesi

$n+1-m=1$

$\boxed{n=m}$ olur.

Serbest değişken $x_n = 1$ (moniklikten) yazılır,

$x_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, x_2 = a_2, x_1 = a_1, x_0 = a_0$ temel çözümleri δ_c'nin katsayıları olur.

$\delta_c(x) = x_0 + x_1 x + \ldots + x_{n-1}x^{n-1} + x_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ olur.

$\underline{\delta_c(x) = f(x)}$ oldu $^{(1)}$

Üstelik $\partial(\Delta_c) = n = \partial(\delta_c)$ ve $\delta_c | \Delta_c$

olduğunda $\underline{\Delta_c(x) = \delta_c(x)}$ olur $^{(2)}$

$\Delta_c(x) \overset{(2)}{=} \delta_c(x) \overset{(1)}{=} f(x)$ olur $\boxtimes$

Biz biliyoruz ki $\delta_c(C) = 0$ dır. O halde $f(C) = 0$ dır.

Örnek:

a) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 5 \in \mathbb{R}[x]$ companion matrisi bulun

b) $f(x) = x - 5 \in \mathbb{R}[x]$ " "

c) Ödev: $f(x) = x^{10} \Rightarrow C_f = ?$

a) $C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{5\times5}$

b) $C_f = (5)_{1\times1}$

Tanım: $A \in F^{n \times n}$ olsun.

i) Bir c skaleri A'nın karakteristik polinomunun bir kökü ve c'ye A'nın bir karakteristik değeri (kökü) denir.

ii) Bir c karakteristik kök) değeri için $AX = cX$ koşulunu sağlayan $0 \neq X \in F^{n \times 1}$ vektörüne A'nın c'ye ait karakteristik vektörü denir.

iii) Bir c karakteristik değeri için $(A - cI)X = 0$ (veya $(cI - A)X = 0$) homojen sisteminin çözüm uzayına A'nın c'ye ait karakteristik uzayı denir.

Uyarı: V(F) sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $T \in Hom(V,V)$ olsun. V'nin herhangi bir β bazı için

$$T(\alpha) = c\alpha \Rightarrow [T(\alpha)]_\beta = [c\alpha]_\beta \text{ olur.}$$

$$\xleftrightarrow[\text{vektörü}]{\text{koordinat}} [T]_\beta \underbrace{[\alpha]_\beta}_{X} = c \underbrace{[\alpha]_\beta}_{X}$$

$$X = [\alpha]_\beta$$

olur. Böylece T'nin karakteristik vektörleri aynı zamanda $[T]_\beta$'nın karakteristik vektörleridir. W_c alt uzayı ise $([T]_\beta - cI)X = 0$ çözüm uzayında olan β bazına göre koordinat matrislerinden oluşur.

Aynı zamanda T'nin karakteristik değerleri Δ_T'nin kökleridir. Böylece

- $\dim_F(V(F)) < \infty$ (sonlu) ise sonlu sayıda (ÇTT) karakteristik değerleri (kökleri) vardır.
- Eğer $\dim_F(V(F)) = \infty$ ise lineer operatörlerin bir çok sayıda farklı karakteristik değerleri olabilir.

Burcu'nun Notları I. Dönem
19.02.2019
Lineer 2

Örnek 1

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_1, 3x_1+3x_2+x_3-x_4, 2x_2+2x_3-x_4, 2x_2+2x_3)$

ile tanımlansın. 2 T'nin bir özdeğeridir. 3 değildir.

$T(\underbrace{0,1,1,2}_{\alpha}) = (0,2,2,4) = 2(\underbrace{0,1,1,2}_{\alpha \neq 0})$

3

$T(\alpha) = c\alpha$ koşulunu sağlayan $\exists\, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^4$ var mı?

$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$= (-x_1, 3x_1+3x_2+x_3-x_4, 2x_2+2x_3-x_4, 2x_2+2x_3) = (3x_1, 3x_2, 3x_3, 3x_4)$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 &= 3x_1 \\ 3x_1+3x_2+x_3-x_4 &= 3x_2 \\ 2x_2+2x_3-x_4 &= 3x_3 \\ 2x_2+2x_3 &= 3x_4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 3x_1+x_3-x_4 &= 0 \\ 2x_2-x_3-x_4 &= 0 \\ 2x_2+2x_3-3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{\text{tersinir.}}$$

$\Rightarrow$ hom sistemin sadece sıfır çözümü var.

$\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,0,0)$

$T(\alpha) = 3\alpha \quad \exists\, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^4$ yok

3 öz değer değil.

Örnek 2 $V(\mathbb{R}) = \{ f : f, [a,b]$ de tanımlı reel değerli türevlenebilir $\}$ uzayı

$\dim_{\mathbb{R}}(V(\mathbb{R})) = \infty$ biliyoruz.

$D: V \to V$ türev operatörünü alalım,
$f \mapsto D(f) = f'$

ile tanımlı, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$W_c = \{ h(x) \in V : D(h) = ch \}$$

$\underbrace{D(h) = ch}_{h' = ch}$ ..... $h(x) = ke^{cx}$ olur. $0 \neq k \in \mathbb{R}$

Örnek:

$A \in F^{n\times n}$ matrisi için $T_A : F^{n\times 1} \longrightarrow F^{n\times 1}$, $X \longmapsto AX$

ile tanımlı lineer operatörünü gözönüne alalım. O zaman

$W_c = \{X \in F^{n\times 1} : T_A(X) = cX\}$
$= \{X \in F^{n\times 1} : AX = cX\}$ $\quad cX = cIX$
$= \{X \in F^{n\times 1} : (A - cI)X = 0\}$

dur. O halde $W(c)$, $(cI - A)X = 0$ hom. sisteminin bir çözüm uzayıdır. Böylece;

$\boxed{c \in F,\ T_A \text{ nın karakteristik kökü / değeridir}} \iff \boxed{(A-cI)X=0 \text{ hom. sis.in sıfırdan farklı bir çözümü vardır.}}$

Bir homdenklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü varsa katsayılar matrisi tersinir olamaz.

Katsayılar matrisi tersinir değilse determinantı $= 0$ dır.

$\boxed{(A-cI)X = 0 \text{ hom. sist sıfırdan farklı çöz. varsa}} \iff \boxed{|A - cI| = (-1)^n |cI - A| = (-1)^n \Delta_A(c) = 0 \text{ olmalıdır.}}$

O halde

$\Delta_A(c) = |cI - A| = 0 \Rightarrow c, T_A$ lin. op. nın karakteristik değeridir.

Burada $(cI - A)X = 0$ koşulunu sağlayan $0 \neq X \in F^{n\times 1}$ vektörüne de c ye ait karakteristik (öz) vektör denir.

Böylece;

$\boxed{T_A \text{ nın } c\text{ye ait karakteristik vektörü } X \text{ dir.}} \iff \boxed{(A-cI)X=0 \text{ yani } (cI-A)X=0 \text{ hom sisteminin sıfırdan farklı bir çöz. vardır}}$

Örnek: $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ uzayında $T \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ opt. için

$T(x,y) = (-y, x)$ ile tanımlansın.

$[T]_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_T \stackrel{\text{t}}{=} \Delta_{T[E]}$ idi

$\Delta_{[T]_E}(t) = |tI - [T]_{[E]}| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \to \mathbb{R}$ de kökleri yoktur. ($\mathbb{C}$ de vardır.)

$\Delta_T(c) = 0 = c^2 + 1$ olamaz. Özdeğeri yoktur.

Burcanın Notları I. Dönem
19.02.2019
Lineer 2

$\Delta_A(c) = 0 \Rightarrow |cI - A| = 0 \Rightarrow (c-1)^2(c+1) = 0$

$c_1 = c = 1$ (iki katlı) ve $c_2 = c = -1$ olur.
iki özdeğeri vardır.

$(cI - A)x = 0$ hom. sistemi $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in Q^{3\times 1}$

$$\begin{pmatrix} c+5 & 2 & 2 \\ -6 & c-3 & -2 \\ -6 & -2 & c-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$$

$$\left.\begin{aligned} (c+5)x + 2y + 2z &= 0 \\ -6x + (c-3)y - 2z &= 0 \\ -6x - 2y + (c-3)z &= 0 \end{aligned}\right\} (*) \text{ hom.}$$

$c = c_1 = 1$ için $(*)$ da yaz

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y + 2z &= 0 \\ -6x - 2y - 2z &= 0 \\ -6x - 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3x + y + z = 0$$

W hom sist c_1 için çözüm uzayı olsun
$\Vert$
W_{c_1}

$\dim(W_{c_1}) = \underset{\text{bilinmeyen}}{3} - 1 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{serbest değ.}}}{2}$ değişken

x ve y
$x = 1 \wedge y = 0 \xRightarrow{z=-3} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$
ve
$x = 0 \wedge y = 1 \xRightarrow{z=-1} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$c_1 = 1$'e ait öz vektörleri

$B_{W_{c_1}} = \{v_1, v_2\}$

$W_{c_1} = \{ x \in Q^{3\times 1} : Ax = c_1 x \}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Q^{3\times 1} : 3x + y + z = 0;\ x, y, z \in Q \right\}$

$z = -3x - y$ $= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -3x-y \end{bmatrix} : x, y \in Q \right\} \Rightarrow c_1 = 1$'e ait öz alt uzay

$$h(x) = k e^{cx}$$
$$h'(x) = (k e^{cx})'$$
$h' = ch \underset{\text{bu koşulu}}{\Rightarrow}$
$$= k.c\, e^{cx}$$
$$= c\,\boxed{k e^{cx}}$$
$$h'(x) = c\, h(x)$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ bunu sağlar $h(x) \neq 0$ dır.

$$h(x) = \underset{\text{sıfırdan}}{k}\, e^{cx}$$
$\neq \quad \neq$ daima
$0 \quad 0$
$\neq$

$D(h) = ch$ ı $\exists\, 0 \neq h = h(x) = k e^{cx} \in V$ var
$\Downarrow$
$\forall c \in \mathbb{R}$ sayısı bir öz değerdir.
$\hookrightarrow$ ∞ tanedir.

UYARI ! Benzer matrislerin karakteristik polinomların ve dolayısıyla kökleri de aynı olduğundan, benzer matrislerin karakteristik değerleri aynıdır.
FAKAT karakteristik vektörleri aynı değildir. Şöyle ki

Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } P = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

olsun. A ve $P^{-1}AP$ nin karakteristik değerlerini ve bu değerlere ait karakteristik uzayların bir bazını yaz.

$\Delta_A(t) = |tI - A| = \Delta_{P^{-1}AP}(t)$ old. dan $\Delta_A(c) = \Delta_{P^{-1}AP}(c) = 0$ aynıdır. O halde A için yapalım

$$\Delta_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t+5 & 2 & 2 \\ -6 & t-3 & -2 \\ -6 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1) \text{ idi}$$