

# 第+三章 习题

13.1 1) 证明: 函数  $f: x \mapsto \ln(1+x)$  在 0 点附近是函数  $g: x \mapsto x \ln x$  的无穷小量.

2) 证明: 函数  $f: x \mapsto \sqrt{x^2+3x} \ln(x^2)$  在  $+\infty$  处被函数  $g: x \mapsto x \ln x$  控制着.

13.2 在  $+\infty$  的邻域内比较 函数  $f: x \mapsto x^2$  与  $g: x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$

13.3 用等价关系式, 确定以下极限

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{8x^3 + 2x^4}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+8x)^{1/x}$

13.4 当  $n$  趋于  $+\infty$  时, 给出以下等价关系式

1)  $(\ln(1+e^{-n^2}))^{1/n}$

2)  $\left( \frac{e^n}{1+e^{-n}} \right)^n$

13.5 1) 给出当  $x$  趋于 0 时,  $\left( \frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{2x}{x-\sin x}}$  的极限

2) 给出当  $x$  趋于 0 时,  $(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$  的极限.

13.6 对于  $n \in \mathbb{N}^*$ , 考虑在  $[0, \pi/2]$  上定义的函数  $f_n: x \mapsto n \cos^n x \sin x$ .

1) 证明, 对于所有  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  有唯一极大值点, 记  $x_n$  为取得此极大值点,  $y_n = f_n(x_n)$

2) 找出  $(x_n)$  和  $(y_n)$  的等价关系式.

13.7 给出  $u_n = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}$  的等价关系式.

13.8 1) 给出函数  $f: x \mapsto \sqrt{x}$  在点  $x=2$  处的3阶展开.

2) 函数  $f$  在  $x=0$  点有  $n \geq 1$  阶展开吗?

13.9 计算以下极限展开式

1)  $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ , 在  $x=0$  处, 4阶

2)  $x \mapsto (\ln(1+x))^2$  在  $x=0$  处, 4阶

3)  $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$  在  $x=0$  处 4阶

4)  ~~$x \mapsto$~~   $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$  在  $x=0$  处 3阶

5)  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$  在  $x=0$  处 3阶.

13.10 给出函数  $\text{Arctan}$  在  $x=1$  处的4阶极限展开.

13.11 设函数  $f$  如下定义  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$

1) 证明存在实数  $a, b, c$ , 使得.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2) 给出相应的几何解释.

13.12 给出以下极限.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - bx}{x}$ ,  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax+bx}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ,  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

13.3 设函数  $f$  如下定义  $f(x) = \int_x^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt$

1) 给出  $f$  在  $x=0$  处的4阶展开.

2) 画出  $f$  在  $x=0$  附近的函数图像.