

第十一章习题

为了求解以下习题, 可以充分利用事实: 若已知 f 在 $[a, b]$ 上连续, $\int_{[a, b]} f = F(b) - F(a)$, 其中 F 是 f 的一个原函数. 我们视记号 $\int_a^b f(x) dx$ 或 $\int_a^b f(t) dx$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的积分.

11.1 设 $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, 满足 $f([0, 1]) \subset [a, b]$, 且 $\int_{[0, 1]} f = 0$.

证明: $\int_{[0, 1]} f^2 \leq -ab$.

提示: 考虑 $(f-a)(b-f)$.

11.2 中值公式. 设 f, g 是 $[a, b]$ 上两函数, 其中 f 是连续的, g 是正的且逐段连续.

1) 证明, 存在 $[a, b]$ 中存在 c , 使得

$$\int_{[a, b]} fg = f(c) \int_{[a, b]} g$$

2) (进一步假设 g 是连续的正严格正, 证明存在 $]a, b[$ 中存在 c , 使得

$$\int_{[a, b]} fg = f(c) \int_{[a, b]} g.$$

11.3 1) 设 $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. 证明

$$\left| \int_{[a, b]} f \right| = \int_{[a, b]} |f| \quad \text{当且仅当 } f \text{ 不变号}$$

2) 设 $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$

给出 $\left| \int_{[a, b]} f \right| = \int_{[a, b]} |f|$ 的一个充分必要条件.

提示: 可以①到情形 $\int_{[a, b]} f = \left| \int_{[a, b]} f \right|$ 着手考虑.

11.4 设 $f \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{[a, b]} f^n \right)^{1/n} = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

11.5 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 对于所有整数 $n \geq 1$, 令 $I_n = \int_{[0, 1]} |f|^n$.

证明: 对于任意的 $n \geq 1$, $I_n^2 \leq I_{n-1} I_{n+1}$.

11.6 设 f 是 $[0, 1]$ 上定义的实的连续函数. 且 $f(1) = 0$.

1) 证明: 对于 $\alpha \in [0, 1[$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t) dt = 0$

2) 验证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n f(t) dt$.

11.7 设 \mathcal{E} 是由 $[a, b]$ 上(连续)严格正函数构成的集合.

对 $f \in \mathcal{E}$, 记
$$\varphi(f) = \left(\int_{[a, b]} f \right) \left(\int_{[a, b]} \frac{1}{f} \right).$$

问 $\varphi(f)$ 有定义吗? 若有, 求其值.

11.8 设序列 (u_n) 如下定义

$$u_n = ((n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{\frac{1}{n}}$$

给出 u_n 的 等价式

11.9. 设 $[a, b]$ 是一个区间段. 证明 f 在 $[a, b]$ 上所有函数 f 是阶梯函数当且仅当, 存在 n 个数字 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和 n 个子-区间 I_1, \dots, I_n , 使得

$$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{1}_{I_k}.$$

11.10 设 $f \in \mathcal{EM}([a, b]; \mathbb{C})$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i n x} dx = 0$

1). 当 $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ 时, 证明该结果.

2). 当 f 是阶梯函数时, 证明该结果.

3) 结论?

11.11 设 f 是 $[a, b]$ 上的逐段光滑函数. 研究:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx.$$