

电热法测量热功当量实验的新探究

蔡 晨 李朝荣 李英姿 王 选

(北京航空航天大学 物理科学与核能工程学院 北京 100191)

摘要 提出一种新的实验方案来处理电热法测量热功当量实验中装置的散热问题.采用积分法计算热功当量,求得的热功当量数值更加接近理论值,并且一元线性拟合实验数据时得到的线性关系非常强烈.

关键词 热功当量;散热系数;线性回归;相关系数

中图分类号:O 43 文献标识码:A 文章编号:1000-0712(2016)05-0053-04

DOI:10.16854/j.cnki.1000-0712.2016.0080

电热法测量热功当量实验的散热速率与系统和环境的温差有关,是一个变化量.目前不同版本的《大学物理实验》中对此的处理方法基本都用到了短时间内“差分代替微分近似求得散热量”的方法^[1-5],这一方法引起的误差没有量化估计,无法得知其对实验结果的准确性影响程度.另一方面,按照我校的做法得到的线性相关系数比较低,与大家惯常的认识不相符合,我们的研究正是从改善线性相关系数起步的.新方案从实验原理出发,采用积分法代替微分法,并且运用数学分析中泰勒展开的方法对公式进行近似,由此带来的误差可以计算并控制其在允许范围内,最终获得的实验结果不仅准确度高,而且具有理想的线性相关度.

1 实验原理与方案

1.1 基本原理

实验装置如图 1 所示.给电阻 R 两端加上电压 V 在通电 t 秒时间内电场力做功 $W = V^2 t / R$. 系统吸收的热量为

$$Q = (c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2) (\theta - \theta_0) = C_m (\theta - \theta_0) \quad (1)$$

式(1)中 c_0, c_1, c_2 分别是水、量热装置及加热器的比热容; m_0, m_1, m_2 分别是其相应的质量; $C_m = c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2$ 是系统的总热容; θ_0 为系统初温.于是可得热功当量:

$$J = \frac{W}{Q} = \frac{V^2 t / R}{C_m (\theta - \theta_0)} \quad (2)$$

若把系统看成是理想绝热的,即只考虑系统由于通电而升温,则由式(2)对时间求导可以得到温度变化率所满足的关系式为

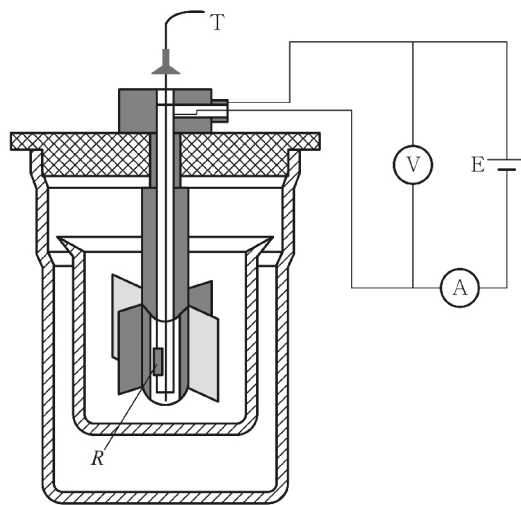


图 1 热功当量实验装置

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\text{吸}} = \frac{V^2}{JRCm} \quad (3)$$

考虑到通电时系统吸热的同时也向环境中放热,根据牛顿冷却定律,由于放热引起的温度变化率为

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\text{放}} = -K (\theta - \theta_{\text{环}}) \quad (4)$$

式(4)中 K 为系统的散热系数.综合式(3)和式(4),系统温度的实际变化率为^[5]

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V^2}{JRCm} - K (\theta - \theta_{\text{环}}) \quad (5)$$

求解此一阶线性常微分方程,得

$$\ln (A - K\theta) = -Kt + C_0 \quad (6)$$

其中 $A = \frac{V^2}{JRCm} + K\theta_{\text{环}}$; C_0 为常数,由初始条件 $\theta|_{t=0} = \theta_0$ 可得 $C_0 = \ln (A - K\theta_0)$,再代入式(6)得

收稿日期 2015-10-07;修回日期 2015-11-18

作者简介:蔡晨(1994—),男,河北涿州人,北京航空航天大学物理科学与核能工程学院 2013 级本科生.

$\ln [(A-K\theta)/(A-K\theta_0)] = -Kt$, 经进一步转化得到温度 θ 随时间 t 变化规律为

$$\theta = \frac{A}{K} + \left(\theta_0 - \frac{A}{K} \right) e^{-Kt} \quad (7)$$

另一方面, 根据牛顿冷却定律 $d\theta/dt = -K(\theta - \theta_{\text{环}})$ 测定散热系数 K . 对牛顿冷却定律积分得到

$$\ln(\theta - \theta_{\text{环}}) = -Kt + C_0 \quad (8)$$

令 $y = \ln(\theta - \theta_{\text{环}})$, $x = t$, 并设 $y = a_1 + b_1 x$, 即可通过一元线性拟合计算出斜率 b_1 , 进一步得到散热系数 $K = b_1$.

经实验测定, 散热系数 K 的数值约为 10^{-5} 数量级 (参见 2.1 计算结果). 由于 K 的数值很小, 在一定时间范围内可以对式 (7) 中指数函数项 e^{-Kt} 进行泰勒展开并保留前两项, 得

$$e^{-Kt} = 1 - Kt \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (7) 并化简可得

$$\theta = \left(\frac{V^2}{JRCm} + K\theta_{\text{环}} - K\theta_0 \right) t + \theta_0 \quad (10)$$

向实验装置中加入一定量的水, 并通电加热, 测量一段时间内温度 θ 与时间 t 的关系 (注意实验系统与环境的温差始终保持在牛顿冷却定律适用范围内). 对 θ 与 t 进行一元线性回归, 得到斜率 $b_2 =$

$\frac{V^2}{JRCm} + K\theta_{\text{环}} - K\theta_0$, 截距 $a_2 = \theta_0$. 则有

$$J = \frac{V^2}{RCm [b_2 + K(a_2 - \theta_{\text{环}})]} \quad (11)$$

1.2 误差分析

下面讨论实验中两个主要的误差, 并控制其在合理范围内.

1) 泰勒展开带来的误差. 显然, 总时间越长, 展开带来的误差越大, 如图 2, 令 l_1 为实际的 $\theta-t$ 关系, 则近似之后得到的直线为 l_2 , 其中 $\Delta\theta$ 是时间为 t 时近似带来的误差, θ 为 t 时间内温度的变化. 则

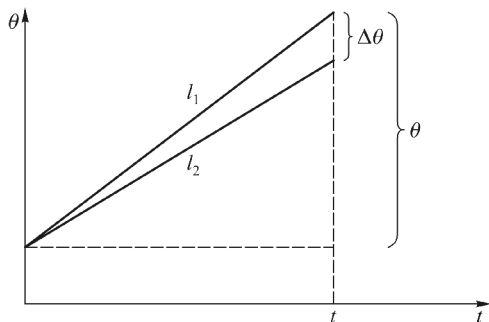


图2 $\theta-t$ 关系

$$\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{e^{-Kt} - (1-Kt)}{e^{-Kt}} \quad (12)$$

假设 l_1 为一条直线 (实际是弧度极小的曲线), 斜率为 k , 则 b_2 的相对误差为

$$\frac{\Delta b_2}{b_2} = \frac{\frac{\theta - \theta - \Delta\theta}{t}}{\frac{\theta}{t}} = -\frac{\Delta\theta}{\theta} \quad (13)$$

对式 (11) 两边取对数并求得

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{db_2}{b_2 + K(\theta_0 - \theta_{\text{环}})} = -\frac{db_2}{b_2} \quad (14)$$

上式中, 可由实验数据证明 $K(\theta_0 - \theta_{\text{环}})$ 约为 b_2 的 1%, 这里仅为近似计算误差, 所以可以忽略. 于是得到

$$\frac{\Delta J}{J} = -\frac{\Delta b_2}{b_2} = \frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{e^{-Kt} - (1-Kt)}{e^{-Kt}} \quad (15)$$

令 $\frac{\Delta J}{J} < 0.1\%$, 计算得到总时间 $t < 530$ s. 当总时间 t 小于 530 s 时, 可以控制泰勒展开近似对 J 的误差小于 0.1%.

2) 温度计示值误差. 本实验使用金属铂电阻温度计, 示值误差约为 0.2°C . t 时刻读取温度的相对误差为

$$\sigma = \frac{\Delta\theta}{b_2 t + \theta_0} \quad (16)$$

显然 σ 是一个关于 t 的减函数, 只需令 $t=0$ 时 $\sigma < 1\%$, 即可保证任何时刻温度读数的相对误差小于 1%. 计算得 $\theta_0 > 20^\circ\text{C}$, 所以实验的起始温度需要在 20°C 以上.

1.3 误差分析的验证

用上述实验中得到的数据分别选取不同总时长进行一元线性拟合, 并由式 (11) 求得不同总时长下的热功当量值 J , 由此做出热功当量相对误差与总测量时间的关系如图 3 所示.

由图 3 可见, 当总时长小于 300 s 时, 热功当量的测量值与标准值 1 的相对误差较大, 这是因为实验装置本身的误差 (温度计的示值误差等) 在总时间过小时对实验的影响不可忽略. 当总时长大于 500 s 时, 热功当量的测量值与标准值的误差随总时长的增加而增加. 这与“泰勒展开带来的实验误差随总时间的增加而变大”的结论相一致. 当总时间在 500 s 时, 热功当量的实验测量值与准确值的相对误差最小, 是最适合在实验中应用的总时长. 由此, 实验验证的结果与理论分析完全一致, 从而验证了实验原理与误差分析的正确性.

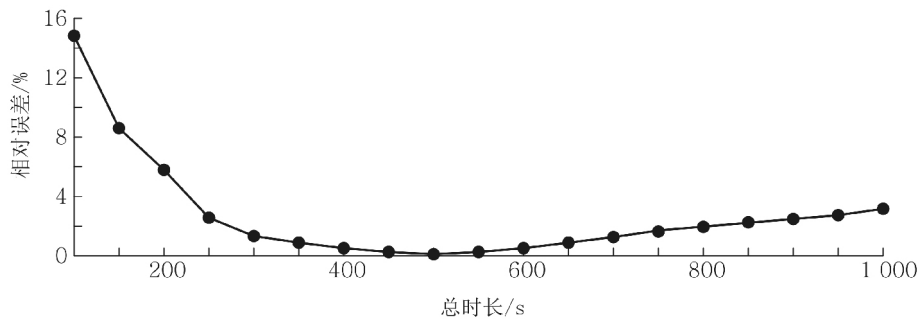


图 3 热功当量测量值的相对误差与总测量时间的关系

2 实验结果

2.1 K 值的测量

向实验装置中加入高于环境温度 (不超过牛顿冷却定律适用范围) 的一定量的水,在不加热情况下测定 50 min 内温度随时间变化的规律,每 5 min 记录一次温度,并且记录实验前后环境温度,取平均值作为真正的环境温度 $\theta_{\text{环}}$,测量数据及部分计算结果如表 1 所示.

表 1 K 值的测量数据

时间 t/s	环境温度 $\theta_1/^\circ\text{C}$	$\ln(\theta_1 - \theta_{\text{环}})$
0	35.163	2.1943
300	34.853	2.1592
600	34.620	2.1319
900	34.387	2.1039
1200	34.155	2.0752
1500	33.974	2.0522
1800	33.793	2.0287
2100	33.638	2.0081
2400	33.457	1.9835
2700	33.302	1.9619
3000	33.147	1.9399

令 $y_i \equiv \ln(\theta_{i1} - \theta_{\text{环}})$ 、 $x_i \equiv t$, 进行一元线性拟合, 得到斜率 $b_1 = -8.32 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 、 $\mu(b_1) = -0.19 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. 即有 $K = -b_1 = 8.32 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 、 $\mu(K) = 0.19 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

2.2 热功当量 J 的测定

给定值电阻两端加一定电压使实验装置加热,每隔 30 s 记录一次系统温度,测量数据如表 2 所示.

始末环境温度求得平均值 $\theta_{\text{环}} = 26.898^\circ\text{C}$ 、负载电压 $V = 39.875 \text{ V}$ 、电阻阻值 $R = 201.9 \Omega$ 、内桶质量

$m_1 = 131.33 \text{ g}$ 、水质量 $m_0 = 218.13 \text{ g}$ 、内桶比热容 $c_1 = 0.389 \text{ J}/(^\circ\text{C} \cdot \text{g})$ 、水比热容 $c_0 = 4.18 \text{ J}/(^\circ\text{C} \cdot \text{g})$ 、加热器热容 $c_2 m_2 = 64.38 \text{ J}/^\circ\text{C}$, 前已测得散热系数 $K = 8.32 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

表 2 热功当量测量数据

时间 t/s	温度 $\theta_2/^\circ\text{C}$	时间 t/s	温度 $\theta_2/^\circ\text{C}$
0	29.685	270	31.777
30	29.969	300	32.010
60	30.253	330	32.242
90	30.460	360	32.449
120	30.692	390	32.681
150	30.925	420	32.888
180	31.157	450	33.121
210	31.312	480	33.327
240	31.571	510	33.508

对实验数据进行一元线性回归,拟合得到斜率 $b_2 = 0.00742$ 、 $u(b_2) = 0.00005$;截距 $a_2 = 29.777$ 、 $u(a_2) = 0.015$;相关系数 $r = 0.9996$. 将 b_2 、 a_2 值代入式 (11), 可得热功当量值 $J = 1.0011$, 相对误差 $\eta = 0.11\%$.

对实验结果进行不确定度的分析和计算. 由式 (11) 可得

$$\frac{u(J)}{J} = \sqrt{\left[\frac{2u(V)}{V}\right]^2 + \left[\frac{u(R)}{R}\right]^2 + \left[\frac{u(Cm)}{Cm}\right]^2 + \left\{\frac{u(b_2 + K(a_2 - \theta_{\text{环}}))}{b_2 + K(a_2 - \theta_{\text{环}})}\right\}^2} \quad (17)$$

其中 V 、 R 、 Cm 、 $\theta_{\text{环}}$ 的误差均可略, 则

$$u(J) = \frac{J}{b_2 + K(a_2 - \theta_{\text{环}})} \sqrt{u^2(b_2) + (a_2 - \theta_{\text{环}})^2 u^2(K) + K^2 u^2(a_2)} = 0.0068$$

所以, 热功当量的最终表述为 $J \pm u(J) = 1.001 \pm 0.007$.

3 结论

本文采用“积分法泰勒展开取近似”取代“差分代替微分近似”来修正系统散热,解决了“差分代替微分是否合理”的争议.上述方案中,近似带来的实验误差是可以计算的,并且通过控制总时间可以把误差限制在合理范围内.

通过泰勒展开可以得到温度 θ 与时间 t 的线性关系.利用一元线性回归拟合线性关系时用到多组数据,这样计算热功当量的实验方案实验准确度更高,实验结果更加可靠.

参考文献:

- [1] 《大学物理实验》编写组.大学物理实验[M].北京:清华大学出版社,2008:126-128.
- [2] 张捷民,刘汉臣.大学物理实验[M].北京:科学出版社,2007:140-141.
- [3] 代伟,李骏,陈太红,等.电热法测热功当量实验的改进[J].西华师范大学学报,2011,32(1):95-97.
- [4] 洪履燊,等.热功当量测量实验的改进方法[J].福州大学学报(自然科学版),2007,35(2):106-108.
- [5] 李朝荣,徐平,等.基础物理实验(修订版)[M].北京:北京航空航天大学出版社,2010:117-118.

A new exploration in determination of mechanical equivalent of heat by electrothermal method

CAI Chen, LI Chao-rong, LI Ying-zi, WANG Xuan

(School of Physics and Nuclear Energy Engineering, Beihang University, Beijing 100191 China)

Abstract A new experimental method is proposed to resolve the heat dissipation problem of the device in determination of mechanical equivalent of heat by electrothermal method. Based on integral method, the result of mechanical equivalent of heat is more close to the theoretical value, and the data exhibits strong linear relationship through simple linear regression.

Key words mechanical equivalent of heat; coefficient of heat transfer; linear regression; correlation coefficient

(上接40页)

Application of Feedback in simulation system of experimental physics teaching

WANG Ya-fang, JIANG Yun, ZHOU Wei-gong, DONG Ai-guo, ZHANG Zi-li, ZHENG Zhi-yuan

(The Teaching Center of Experimental Physics, School of Science, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract Simulation technique has been widely used in the teaching center of experimental physics, China University of Geosciences, Beijing for almost 20 years. In order to figure out how the students think about this technique and how much it has positive effect on their learning, we have handed out the questionnaires to the students who have gone through the whole line of the simulation system. The result shows that the students are not really used to the system although they are aware and agree that the simulation system is good for them. In the last part of the paper, the useful suggestions are proposed.

Key words information technology; experimental physics; questionnaire; teaching chains