ДЗ 2. Расстояние Хэмминга

Условие. Показать, что расстояние Хэмминга удовлетворяет аксиомам расстояния и может использоваться как метрика.

Определение

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — двоичные векторы длины n.

Расстояние Хэмминга определяется как

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|.$$

То есть это число позиций, в которых векторы различаются.

Доказательство аксиом метрики

Покажем, что $d(x, y)$ удовлетворяет аксиомам метрики.

1. Неотрицательность

По определению $d(x, y)$ — это количество несовпадающих координат, следовательно

$$d(x, y) \geq 0.$$

2. Тождество неразличимости

Если $d(x, y) = 0$, то нет ни одной позиции, где $x_i \neq y_i$, значит

$$x_i = y_i \quad \forall i,$$

то есть $x = y$.

Обратно, если $x = y$, то различающихся координат нет, поэтому

$$d(x, y) = 0.$$

3. Симметричность

Из определения:

$$x_i \neq y_i \iff y_i \neq x_i.$$

Следовательно,

$$d(x, y) = d(y, x).$$

4. Неравенство треугольника

Рассмотрим три вектора x, y, z.

Если $x_i \neq z_i$, то либо

$$x_i \neq y_i,$$

либо

$$y_i \neq z_i.$$

Иначе получилось бы $x_i = y_i = z_i$, что противоречит $x_i \neq z_i$.

Значит для каждой позиции, где x и z различаются, различие возникает хотя бы в одной из пар (x, y) или (y, z).

Следовательно,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Вывод

Расстояние Хэмминга удовлетворяет:

$$\begin{aligned}
&1. \quad d(x, y) \geq 0,\\
&2. \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,\\
&3. \quad d(x, y) = d(y, x),\\
&4. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

Следовательно, расстояние Хэмминга является метрикой.