TD3 : Transformée en Z

> Semestre P2020
>
> CHOQUEUSE Vincent

Partie 1 : Analyse de Signaux Numériques

Exercice 1 : Calcul de transformée en Z

Question. Identifiez les fonctions de transfert continues des signaux suivants échantillonnés à la période de $T_e = 0.1$s. Calculez leur transformées en Z :

- Impulsion unité décalée de k échantillons :

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Echelon unité :

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Rampe unité : $r[n]$:

$$r[n] = \begin{cases} nT_e & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Réponse

$$TZ[s[n]] = \sum_{n=0}^{n=\infty} s[n] z^{-n}$$

- Impulsion : $TZ[\delta[n-k]] = \delta[n-k]z^{-k} = z^{-k}$
- Echelon unité :

$$TZ[u[n]] = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{1}$$

- Rampe unité : $r[n]$:

$$TZ[r[n]] = \sum_{n=0}^{n=\infty} nT_e z^{-n} = T_e \sum_{n=0}^{n=\infty} nz^{-n} \tag{2}$$

En dérivant $TZ[u[n]]$ par rapport à z, nous obtenons

$$\frac{dTZ[u[n]]}{dz} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} nz^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n=0}^{n=\infty} nz^{-n} = -\frac{1}{T_e} z^{-1} TZ[r[n]] \tag{3}$$

$$\frac{dTZ[u[n]]}{dz} = \frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2} \tag{4}$$

Par identification, nous trouvons $\frac{1}{T_e} z^{-1} TZ[r[n]] = \frac{1}{(z-1)^2}$ et donc

$$TZ[r[n]] = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$$

Exercice 2 : Transformée en Z inverse

Question. En utilisant les tables des transformées, déterminez-les transformées en $\mathcal{Z}$ inverses des fonctions suivantes

- Système 1 :

$$F_1(z) = \frac{1}{z-0.8}$$

- Système 2 :

$$F_2(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.8)}$$

Réponse

- Système 1 :

$$F_1(z) = z^{-1}\frac{z}{z-0.8}$$

En utilisant la table des transformée en Z, nous trouvons $f_1[n] = 0.8^{n-1}u[n-1]$

- Système 2 :

$$F_2(z) = \frac{1}{1-0.8}\frac{z(1-0.8)}{(z-1)(z-0.8)} = 5\frac{z(1-0.8)}{(z-1)(z-0.8)}$$

Soit $e^{-aT_e} = 0.8$, c-a-d $aT_e = 0.223$. En utilisant la table des transformée en Z, nous trouvons $f_2[n] = 5(1-e^{-0.223n})u[n]$

Partie 2 : Analyse de système numérique

Exercice 3 : Système de premier ordre

On considère le système d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$ décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$y[n] = x[n] + 0.9y[n-1]$$

Fonction de transfert

Question. Déterminer la fonction de transfert en Z du système (en utilisant des puissances de z positives)

Réponse

En passant de la domaine en Z, nous trouvons

$$Y(z) = X(z) + 0.9z^{-1}Y(z) \tag{5}$$

$$Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) = X(z) \tag{6}$$

Nous trouvons :

$$Y(z)(1-0.9z^{-1}) = X(z) \tag{7}$$

La fonction de transfert est alors donnée par

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-0.9z^{-1}} = \frac{z}{z-0.9} \tag{8}$$

Question. Le système est-il stable ?

Réponse Le système possède un pole en $z = 0.9$. Comme $|z| < 1$, le système est donc stable

Réponse indicielle

On injecte en entrée du système un échelon unitaire $x[n] = u[n]$.

Question. En exploitant l'équation de récurrence, déterminer les $n = 5$ premiers échantillons en sortie du filtre $y[n]$.

In [69]:
```
y_old = 0
for n in range(30):
    y = 1+0.9*y_old
    y_old = y
    print("y[{}]={}".format(n,y))
```

```
y[0]=1.0
y[1]=1.9
y[2]=2.71
y[3]=3.439
y[4]=4.0951
y[5]=4.68559
y[6]=5.217031
y[7]=5.6953279000000006
y[8]=6.12579511
y[9]=6.5132155990000005
y[10]=6.861894039100001
y[11]=7.175704635190001
y[12]=7.458134171671
y[13]=7.7123207545039
y[14]=7.94108867905351
y[15]=8.14697981114816
y[16]=8.332281830033345
y[17]=8.49905364703001
y[18]=8.649148282327008
y[19]=8.784233454094307
y[20]=8.905810108684877
y[21]=9.01522909781639
y[22]=9.113706188034751
y[23]=9.202335569231277
y[24]=9.28210201230815
y[25]=9.353891811077334
y[26]=9.4185026299696
y[27]=9.47665236697264
y[28]=9.528987130275377
y[29]=9.57608841724784
```

Question. Déterminer la transformée en Z de la sortie, c-a-d $Y(z)$. Déduisez-en la valeur finale $y[\infty]$.

Réponse

Lorsque l'entrée est un échelon, nous trouvons

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z}{z-0.9} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.9)} \tag{9}$$

La valeur finale est donnée par

$$y[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \frac{1}{(1-0.9)} = 10$$

Question. Déterminer l'expression de $y[n]$ à partir de $Y(z)$

Réponse

$$Y(z) = 10\frac{z}{z-1} - 9\frac{z}{z-0.9}$$

En utilisant la table des transformée en Z, nous trouvons

$$y[n] = 10u[n] - 9 \times (0.9^n)u[n] = (10 - 9\,(0.9^n))u[n]$$

In [87]:
```
for n in range(10):
    y = (10-9*(0.9**n))*(n>=0)
    print("y[{}]={}".format(n,y))
```

```
y[0]=1.0
y[1]=1.9000000000000004
y[2]=2.709999999999999
y[3]=3.438999999999999
y[4]=4.0950999999999995
y[5]=4.6855899999999995
y[6]=5.2170309999999995
y[7]=5.6953279
y[8]=6.1257951099999985
y[9]=6.513215598999999
```

In [71]:
```
np.log(0.9)
```

Out[71]:
```
-0.10536051565782628
```

Réponse fréquentielle

On considère une sinusoïde d'amplitude crête 3, de pulsation $\omega_0 = 1$ rad/s, c-a-d

$$x(t) = 3\cos(\omega_0 t)$$

Cette sinusoîde est échantillonnée à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 2$Hz, puis envoyée à l'entrée du système.

Question. Déterminer l'expression de la sortie $y[n]$ en régime permanent.

Réponse

En entrée, nous avons $x[n] = 3\cos(\omega_0 nT_e)$. En régime permanent, la sortie est alors égale à

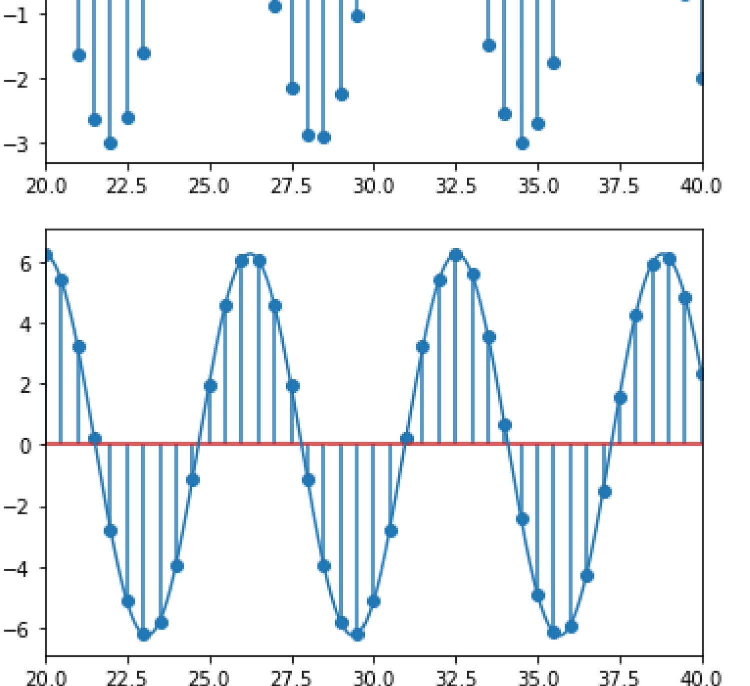
$$y[n] = 3|H(e^{j\omega_0 T_e})|\cos(\omega_0 nT_e + \arg[H(e^{j\omega_0 T_e})])$$

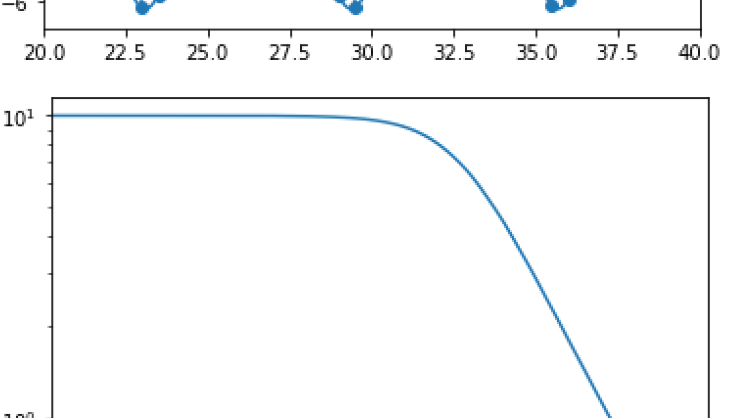
Nous trouvons alors

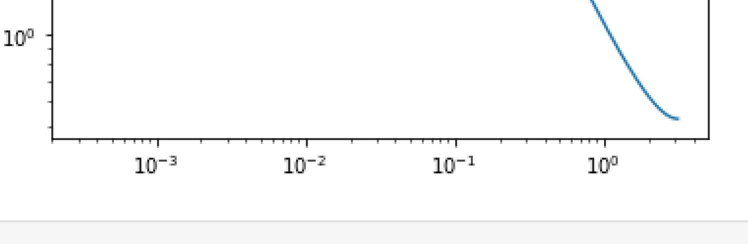
$$y[n] = 6.25\cos(0.5n - 1.117)$$

In [84]:
```
import numpy as np
from scipy.signal import dlti
import matplotlib.pyplot as plt

w0 = 1
f0 = w0/(2*np.pi)
Fe = 2
Te = 1/Fe

n = np.arange(200)
t = n*Te
x = 3*np.cos(w0*t)
plt.stem(t,x)
plt.xlim([20,40])

H = dlti([1,0],[1,-0.9],dt=Te)
plt.figure()

t,y = H.output(x,t)
t2 = np.arange(0,40,0.001)
plt.stem(t,y)
plt.plot(t2,6.25*np.cos(1*t2-1.117))
plt.xlim([20,40])


Omega,Hjw = H.freqresp()
plt.figure()
plt.loglog(Omega,np.abs(Hjw))
```

Out[84]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7feabb124390>]
```







In [ ]: