TD1 : Entrainement d'un moteur à courant continu

> Semestre P2020
>
> CHOQUEUSE Vincent

On se propose d'étudier le schéma synoptique de mise en œuvre d'un correcteur pour la régulation d'un processus analogique (un moteur à courant continu) caractérisé par sa fonction de transfert $F(p)$. Il s'agit de contrôler la vitesse de rotation du moteur.

In [15]:
```
import numpy as np
from scipy.signal import lti
import matplotlib.pyplot as plt
```

Description du système.

Le système est constitué par un moteur à courant continu, entraînant une charge. La grandeur d'entrée est la tension $U_m(t)$ aux bornes de l'induit. Le paramètre à commander est la vitesse de rotation de rotation $\Omega(t)$ (rad/s).

Fig1. Description du système

Pour faciliter la modélisation, on formule les hypothèses suivantes :

- On néglige les frottements f du moteur. On considère uniquement son inertie.
- L'effet de réaction de l'induit est supposé nul, on considère seulement sa résistance R.

On rappelle ci-dessous les équations du moteur :

$$
\begin{aligned}
E(t) &= k.\Omega(t) && \text{(fém)}\\
U_m(t) &= E(t) + Ri(t) && \text{(circuit électrique)}\\
J\frac{d\Omega(t)}{dt} &= C_m(t) = ki(t) && \text{(moment d'inertie)}
\end{aligned}
$$

1. Détermination de la fonction de transfert du moteur

Question 1:

- Etablissez la fonction de transfert qui régit l'évolution de la vitesse $\Omega(t)$ en fonction de la tension d'entrée $u(t)$, c-a-d:

$$F(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)}$$

Réponse:

Passage du domaine temporel au domaine de Laplace

- Linearité: Si $y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ dans le domaine temporel, nous obtenons $Y(p) = \alpha_1 X_1(p) + \alpha_2 X_2(p)$ dans le domaine de Laplace.?
- Dérivation: Si $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ dans le domaine temporel, nous obtenons $Y(p) = pX(p)$ dans le domaine de Laplace.

$$
\begin{aligned}
E(p) &= k.\Omega(p) && \text{(fém)}\\
U_m(p) &= E(p) + RI(p) && \text{(circuit électrique)}\\
Jp\Omega(p) &= kI(p) && \text{(moment d'inertie)}
\end{aligned}
$$

- Objectif intermédiaire:

On utilise les deux premières équations

$$
\begin{aligned}
U_m(p) &= k.\Omega(p) + RI(p) && \text{(circuit électrique)}\\
Jp\Omega(p) &= kI(p) && \text{(moment d'inertie)}
\end{aligned}
$$

Ensuite, on multiplie la premiere equation par k et on remplace le dernier terme:

$$kU_m(p) = k^2.\Omega(p) + RJp\Omega(p) \tag{1}$$

On factorise

$$kU_m(p) = \Omega(p)(k^2 + RJp) \tag{2}$$

Fonction de transfert:

$$F(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{k}{k^2 + RJp} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{RJ}{k^2}p}$$

Question 2:

- Déterminez le gain statique, la constante de temps et le temps de réponse à 5% de la valeur finale.
- Déterminer ensuite les valeurs numériques lorsque $R = 10\Omega$, $k = 10mNm/A$, $J = 2.10^{-5}$ kg.m^2.

Réponse:

En identifiant les paramètres de notre fonction de transfert, nous obtenons :

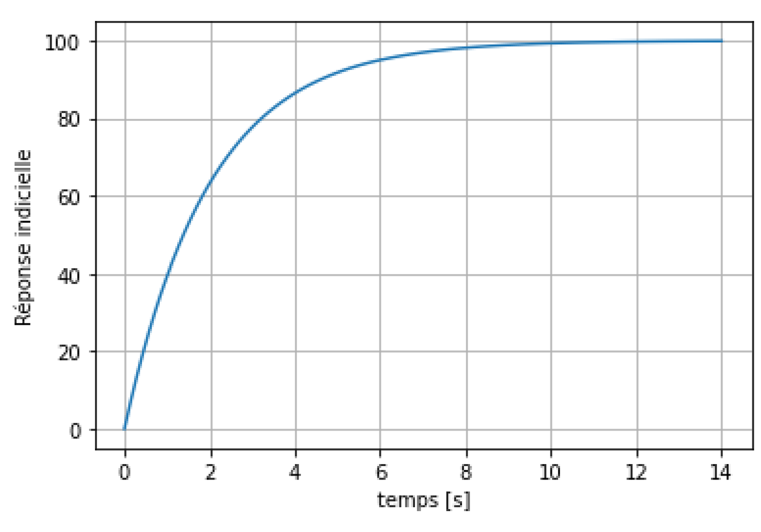
- Gain statique: $K = \frac{1}{k}$
- Constante de temps : $\tau = \frac{RJ}{k^2}$ (s)
- temps de réponse à $\pm 5\%$: $t_r = 3\tau$ (s)

In [16]:
```
R = 10
k = 10*(10**-3)
J = 2*(10**-5)

K = 1/k
tau = R*J/(k**2)
tr = 3*tau

print("K={}".format(K))
print("tau={} s".format(tau))
print("tr={} s".format(tr))
```

```
K=100.0
tau=2.0 s
tr=6.0 s
```

Il peut être interessant de regarder la réponse indicielle du système (réponse à un échelon unitaire). Cette réponse se détermine facilement en Python.

In [17]:
```
sys = lti([K],[tau,1]) # doc : https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.lti.html
t,s = sys.step()

plt.plot(t,s)
plt.grid()
plt.xlabel("temps [s]")
plt.ylabel("Réponse indicielle");
```



2. Schéma fonctionnel de la régulation

Le "système" (moteur avec sa charge) est inséré dans une boucle d'asservissement qui comprend les éléments suivants :

- une dynamo tachymétrique intégrée au moteur qui mesure la vitesse de rotation. La dynamo délivre une tension continue proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur. Le rapport de conversion est de 1V pour 1000 tr/mn.
- un amplificateur de puissance, pouvant débiter 1 A max, de gain en tension $A = 10$, attaque le circuit d'induit du moteur.
- un circuit de contrôle du moteur ou correcteur de fonction de transfert $C(p)$.

Question 3:

- Tracez le schéma fonctionnel de l'ensemble qui fait apparaître :
  - la consigne (grandeur d'entrée);
  - les différents blocs (moteur, dynamo,...) tel qu'ils doivent être assemblés ;
  - la grandeur à contrôler (grandeur de sortie) ;
  - la contre-réaction (chaîne de retour)
- Déduisez en le schéma synoptique (blocs avec fonction de transfert) de la boucle de régulation **en faisant apparaître le retour unitaire**.

Réponse:

Fig2. Schéma fonctionnel de la régulation

In [18]:
```
A = 10
T = 1/(1000*2*np.pi/60) # Omega*T = V -> (1000*2*pi/60)*T=1 -> T = 1/((1000*2*pi/60))
print(T)
```

```
0.009549296585513721
```

Question 4:

- Calculez numériquement la fonction de transfert de l'ensemble à asservir [moteur avec sa charge, dynamo et amplificateur] notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{U_c(p)}$$

- $S(p)$: sortie de la dynamo (en V)
- $U_c(p)$: entrée de l'ampli

Mise en série de 3 systèmes.

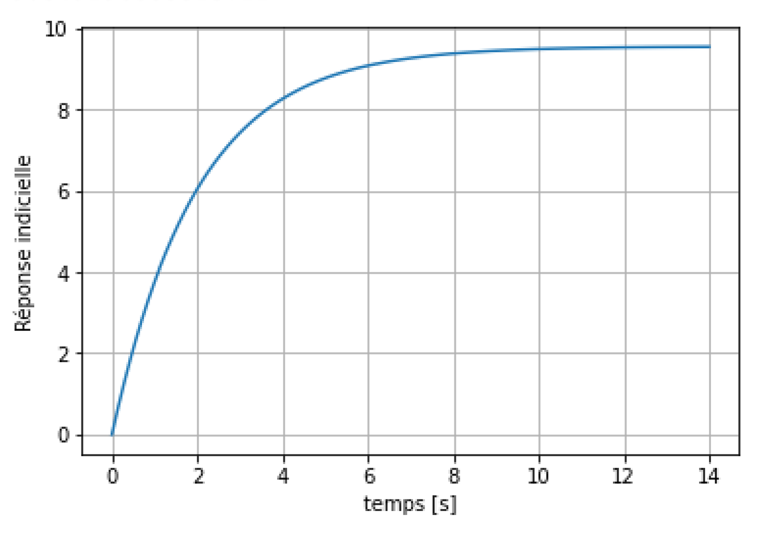
- Premier système: $U_m(p) = A \times U_c(p)$
- Second système: $\Omega(p) = F(p) \times U_m(p)$
- Troisième système: $S(p) = T \times \Omega(p)$

Donc nous obtenons : $S(p) = T \times F(p) \times A \times U_c(p)$ La fonction de transfert est égale à

$$G(p) = \frac{S(p)}{U_c(p)} = AT \times F(p) = \frac{ATK}{1 + \tau p}$$

In [19]:
```
G = lti([A*T*K],[tau,1])
t,s = G.step()

plt.plot(t,s)
plt.grid()
plt.xlabel("temps [s]")
plt.ylabel("Réponse indicielle")
print(A*T*K)
```

```
9.549296585513721
```



3. Correction Proportionnelle

On souhaite asservir le système avec un correcteur proportionnel de fonction de transfert

$$C(p) = K_c$$

Notre objectif est ici de réduire le temps de réponse du système à la valeur $t_r = 1$s.

Question 5:

- Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{U(p)}$$

- $S(p)$: sortie de la dynamo (en V)
- $U(p)$: tension de consigne.

$$FTBF(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_c\frac{K_G}{1+\tau p}}{1 + K_C\frac{K_G}{1+\tau p}}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_c K_G}{(1+\tau p)\left(1 + K_C\frac{K_G}{1+\tau p}\right)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_c K_G}{1 + \tau p + K_C K_G}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K_c K_G}{1+K_C K_G}}{1 + \frac{\tau}{1+K_c K_G}p}$$

Question 6:

- Déterminer la valeur de K_c permettant d'obtenir en boucle fermée un temps de réponse égal à $t_r = 1$s.

Par identification :

- Gain statique: $K_{FTBF} = \frac{K_c K_G}{1+K_C K_G}$,
- Constante de temps : $\tau_{FTBF} = \frac{\tau}{1+K_c K_G}$.

Pour obtenir un temps de réponse de $t_r = 1$s, nous devons avoir

$$t_r = 3\tau_{FTBF} = \frac{3\tau}{1 + K_c K_G} = 1$$

Avec $K_G = 9.549$, $\tau = 2$s, nous trouvons

$$K_c = 0.52$$

On considère en entrée du système un echelon d'amplitude U_0 c-a-d

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Question 7:

- Pour la valeur de K_c déterminée, calculer
  - l'erreur statique $\epsilon(\infty) = u(\infty) - s(\infty)$ en régime permanent,
  - l'erreur statique relative (en pourcent) $\epsilon_r(\infty) = \frac{\epsilon(\infty)}{u(\infty)} \times 100$

Réponse

- Valeur Finale : $s(\infty) = K_{FTBF} \times U_0 = 0.8323$
- Erreur statique : $\epsilon(\infty) = U_0 - K_{FTBF} \times U_0 = (1 - K_{FTBF})U_0$.
- Erreur statique relative: $\epsilon_r(\infty) = \frac{\epsilon(\infty)}{u(\infty)} \times 100 = 100\time(1 - K_{FTBF})$.

In [20]:
```
K_c = 0.52
K_G = 9.549
K_FTBF = K_c*K_G/(1+K_c*K_G)
erreur_statique_relative = (1-K_FTBF)*100
print("erreur statique relative: {} (100\%)".format(erreur_statique_relative))
```

```
erreur statique relative: 16.763110428666263 (100\%)
```