TD2 : Modélisation de F.T Continues et Echantillonnage

> Semestre P2020
>
> CHOQUEUSE Vincent

In [62]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import lti
```

Exercice 1

Question. Soit les signaux continus

$$s_1(t) = 10.\cos(4\pi t).u(t) \quad (1)$$
$$s_2(t) = 10.\cos(4\pi(t-1)).u(t-1) \quad (2)$$

où $u(t)$ désigne l'échelon unité.

- Écrivez l'expression des signaux échantillonnés pour la période d'échantillonnage $T_e = 0.125$ s sous les formes $s(nTe)$ (abscisse en seconde) et $s[n]$ (abscisse en entier naturel).
- Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale permettant de respecter le Théorème de Shannon ?

Réponse

Le passage du signal continu au signal échantillonné s'obtient en posant $t = nT_e$ où n est un entier.

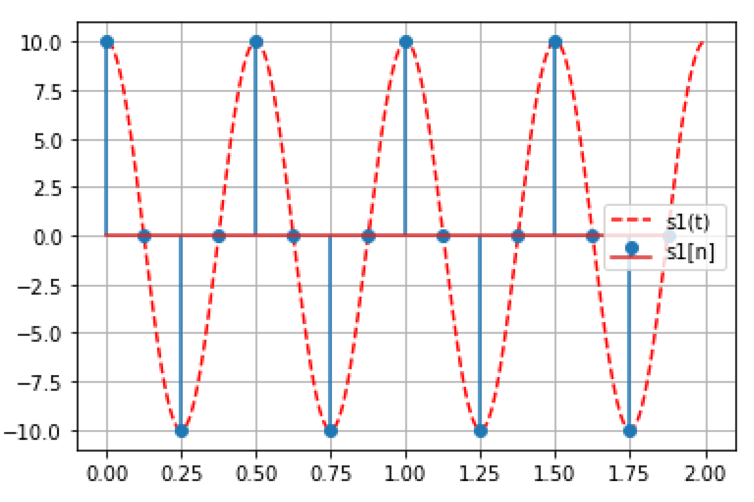
Signal $s_1(t)$

- $s_1(nT_e) = 10\cos(4\pi nT_e)u(nT_e) = 10\cos(\pi n/2)u(nT_e)$
- $s_1[n] = 10\cos(\pi n/2)u[n]$

In [63]:
```
t = np.arange(0,2,0.0001) # time base for the continuous signal
s1 = 10*np.cos(4*np.pi*t)*(t>=0)

Te = 0.125
n = np.arange(2*8)
s1n = 10*np.cos(np.pi*n/2)*(n>=0)

plt.plot(t,s1,"r--",label="s1(t)")
plt.stem(n*Te,s1n,label="s1[n]") # use stem plot for digital signals
plt.grid()
plt.legend();
```



Signal $s_2(t)$

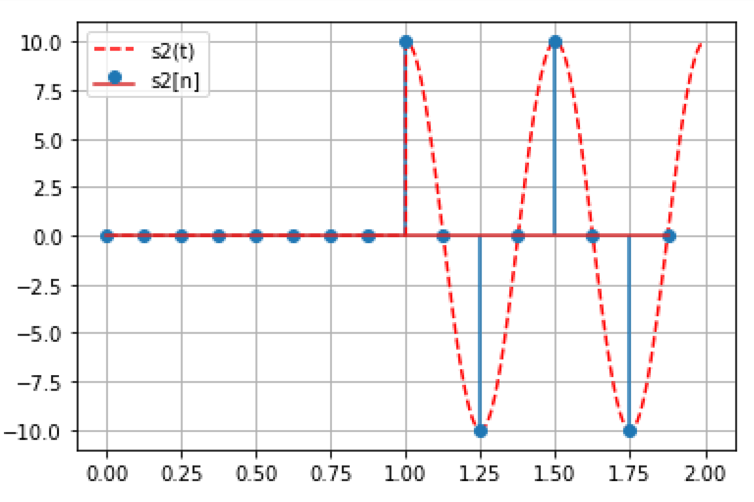
En utilisant le fait que $\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos(\varphi)$, nous obtenons :

- $s_2(nT_e) = 10\cos(4\pi(nT_e - 1))u(nT_e - 1) = 10\cos(\pi n/2)u(nT_e - 1)$
- $s_1[n] = 10\cos(\pi n/2)u[n-8]$

In [64]:
```
t = np.arange(0,2,0.0001) # time base for the continuous signal
s1 = 10*np.cos(4*np.pi*(t-1))*((t-1)>=0)

Te = 0.125
n = np.arange(2*8)
s1n = 10*np.cos(np.pi*n/2)*((n-8)>=0)

plt.plot(t,s1,"r--",label="s2(t)")
plt.stem(n*Te,s1n,label="s2[n]") # use stem plot for digital signals
plt.grid()
plt.legend();
```



Fréquence d'échantillonnage

Ces deux signaux correspondent à des sinusoides tronquées dans le temps. Une sinusoide s'exprime sous la forme $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$. Par identification, nous trouvons $f_0 = 2Hz$. En utilisant le théroème de Shannon, il en vient que la fréquence d'échantillonnage doit être fixée de sorte que

$$F_e \geq 2f_{max} = 2f_0 = 4\ Hz$$

Question. Soit le signal continu $s_3(t) = 10.(1 - e^{-2t}).u(t)$, réponse indicielle d'un système du 1er ordre. Ce signal est transmis à une chaîne de traitement numérique via un convertisseur analogique numérique fonctionnant à la période d'échantillonnage T_e.

- Tracer le signal $s_3(t)$.
- Proposez une valeur "argumenté" pour la période d'échantillonnage.
- Écrivez l'expression du signal échantillonné $s[n]$ pour la période d'échantillonnage $T_e = 0.3$s.

Réponse

Le signal continu correspond à la réponse indicielle (sous-entendu à un échelon unitaire) d'un premier ordre. La réponse indicielle d'un premier ordre s'exprime sous la forme

$$s(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})u(t)$$

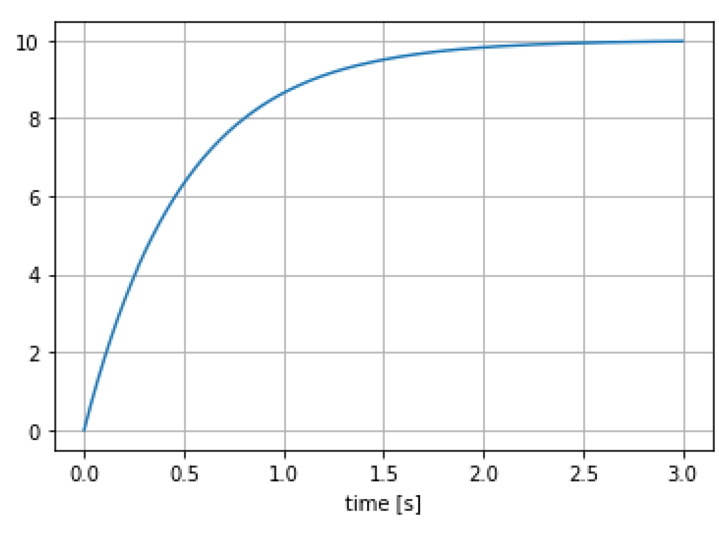
Par identification, nous trouvons

- Gain statique: $K = 10$,
- Constante de temps : $\tau = 0.5$s.

In [65]:
```
t = np.arange(0,3,0.001) # time base for the continuous signal
s3 = 10*(1-np.exp(-2*t))*(t>= 0)

plt.plot(t,s3,label="s3t")
plt.grid()
plt.xlabel("time [s]")
```

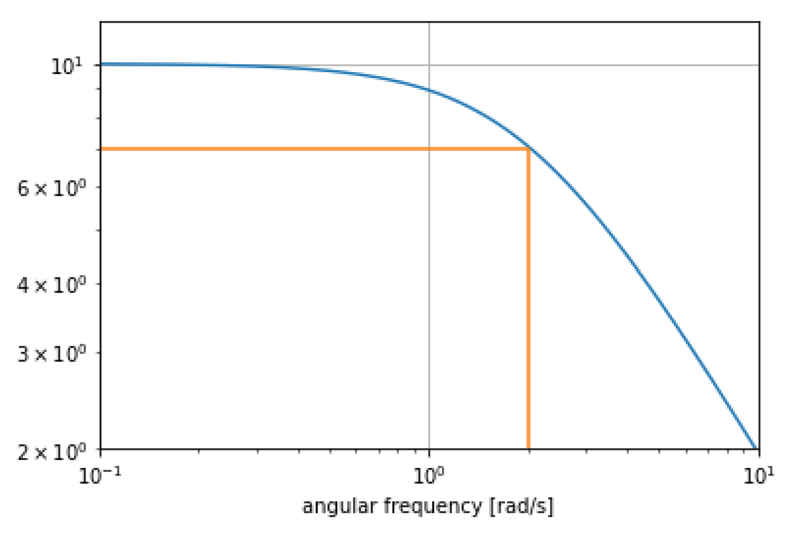
Out[65]:
```
Text(0.5, 0, 'time [s]')
```



Pour déterminer la fréquence d'échantillonnage, il est interessant d'analyser le comportement fréquentiel.

In [66]:
```
wc = 2
fc= wc/(2*np.pi)
sys = lti([10],[0.5,1])
w,Hjw = sys.freqresp()

plt.loglog(w,np.abs(Hjw))
plt.plot([0.1,wc,wc],[10*0.7,10*0.7,0.1])
plt.xlabel("angular frequency [rad/s]")
plt.xlim([0.1,10])
plt.grid()
plt.ylim([2,12]);
```



Dans le domaine fréquentiel, le système se comporte comme un filtre passe-bas. La pulsation de coupure à -3dB est égale à $\omega_c = \frac{1}{\tau} = 2$ rad/s, soit $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 0.318$ Hz. En pratique, il serait toutefois dangereux de fixer $f_{max} = f_c$ et donc $F_e = 2f_c$ car, avec une attenuation de -3dB, la présence de repliement peut être significatif.

En pratique, il est courant de fixer la fréquence d'échantillonnage de la manière suivante :

$$5f_c \leq F_e \leq 10f_c$$

Exercice 2 : Chaîne de traitement du son

Descriptif du système

Soit la chaîne suivante composée :

- d'un microphone pour la prise du son ;
- d'un préamplificateur permettant d'adapter le signal issu du micro à une carte de traitement numérique ;
- d'une carte de traitement numérique munie d'un processeur signal permettant de traiter en temps réel le son issu du microphone ;
- d'un amplificateur de puissance audio ;
- d'un haut-parleur pour restituer le son après traitement.

Fig1. Description du système

Les caractéristiques des différents blocs sont :

- **Microphone**: convertie une onde acoustique $e(t)$ (Pascal) en tension. Il agit comme un filtre passe-bas du 1er ordre de fréquence de coupure à -3dB $f_c = 30$ kHz. En basse fréquence son gain est de 0.5.
- **Pré-amplificateur**: amplifie en puissance le son issu du micro. Il peut être considéré comme un filtre du 1er ordre passe bas de constante de temps 1 µs et de gain statique en tension de 10.
- **Carte de traitement**: elle est munie d'un convertisseur analogique-numérique 12 bits sur une plage de 10V et d'un convertisseur numérique analogique 12 bits sur une plage de 10V. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 24 kHz. Le traitement numérique est modélisé par une fonction de transfert discrète notée $G(z)$.
- **Amplificateur**: Il s'agit d'un amplificateur de puissance de gain en tension unitaire.
- **Haut-parleur**: Il peut être modélisé par une fonction de transfert du second ordre de type passe-bas. Son gain en basse fréquence est de 0 dB. Son spectre en fréquence présente un gain maximum de 0.5 dB à la fréquence $f_r = 40$ kHz.

Question. Donnez la nature exacte des signaux $e(t)$, $s(t)$, $v_e(t)$, $v_s(t)$, $v_{ne}[n]$, $v_{ns}[n]$. Quelle hypothèse fait-on sur $v_{ne}[n]$ et $v_{ns}[n]$ par la suite ?

Réponse:

- $e(t)$ et $s(t)$: onde acoustique (Pascal)
- $v_e(t)$ et $v_s(t)$: signaux electriques (Volt)
- $v_{ne}[n]$ et $v_{ns}[n]$: signaux numériques

Par la suite, on fait les hypothèses suivantes :

- Le théorème de Shannon sur la fréquence d'échantillonnage est respecté.
- Les échantillons ont une durée nulle.

Question. Écrivez les fonctions de transfert des blocs : micro, pré-ampli, amplificateur et haut parleur

Réponse:

- Micro :
  - Premier ordre avec $f_c = 30$kHz, donc $\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c} = 5.3 \times 10^{-6}$
  - Gain en basse fréquence de 0.5, donc $K = 0.5$

$$H_{mic}(p) = \frac{0.5}{5.3 \times 10^{-6}p + 1}$$

- Pré-ampli :
  - Filtre du 1er ordre passe bas de constante de temps $1\mu s$ et de gain statique en tension de 10.

$$H_{pre}(p) = \frac{10}{10^{-6}p + 1}$$

- Amplificateur :
  - Amplificateur de puissance de gain en tension unitaire

$$H_{amp}(p) = 1$$

- Haut-parleur :
  - Second ordre avec un gain en basse-fréquences de 0dB $\rightarrow K = 1$
  - Facteur de résonance égal à $0.5 - 0 = 0.5$dB : $m = 0.58$ (voir abaque)
  - Pulsation de résonance $\omega_r = 2\pi f_r = 251327$ rad/s. Comme $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$, nous en déduisons que $\omega_0 = 440 \times 10^3$ rad/s

$$H_{HP}(p) = \frac{1}{5.18 \times 10^{-12}p^2 + 2.64 \times 10^{-6}p + 1}$$

Question. Déterminez les gains de conversion des convertisseurs CAN et CNA.

Réponse:

- CAN (sortie bits/ entrée tension):

$$G_{AN} = \frac{2^{12}}{\Delta E} = 409.6$$

- CNA (sortie tension/ entrée bits):

$$G_{NA} = \frac{\Delta E}{2^{12}} = 0.00244$$

On souhaite modéliser cette chaîne sous la forme de fonction de transfert, comme présenté sur la figure suivante :

Les gains de conversions sont inclus dans les fonctions de transfert continues.

Question. Déterminez les expressions des fonctions de transfert $F_A(p)$ et $F_B(p)$.

Réponse:

$$F_A(p) = G_{AN}H_{mic}(p)H_{pre}(p)$$
$$F_B(p) = G_{NA}H_{amp}(p)H_{HP}(p)$$