BERNARD Tom
QUELLEC Pierre
POULIZAC Florian

S60 PROJET DYNAMIQUE MÉCANIQUE

A) Déterminer le site et l'azimut du canon pour atteindre la cible

1) Détermination de l'azimute par rapport au nord

Considérations :

- Coordonnée GPS du canon : Lampaul-Plouarzel, Finistère, France : 48.44727, -4.76045, 31
- Coordonnée GPS de la cible : île de balanec : 48.4173141, -4.9831359

On trouve facilement l'azimut par rapport au nord grâce au site « dcode » qui le calcule à notre place. On le note $\alpha = -101°$

2) Détermination du site du canon sans frottement

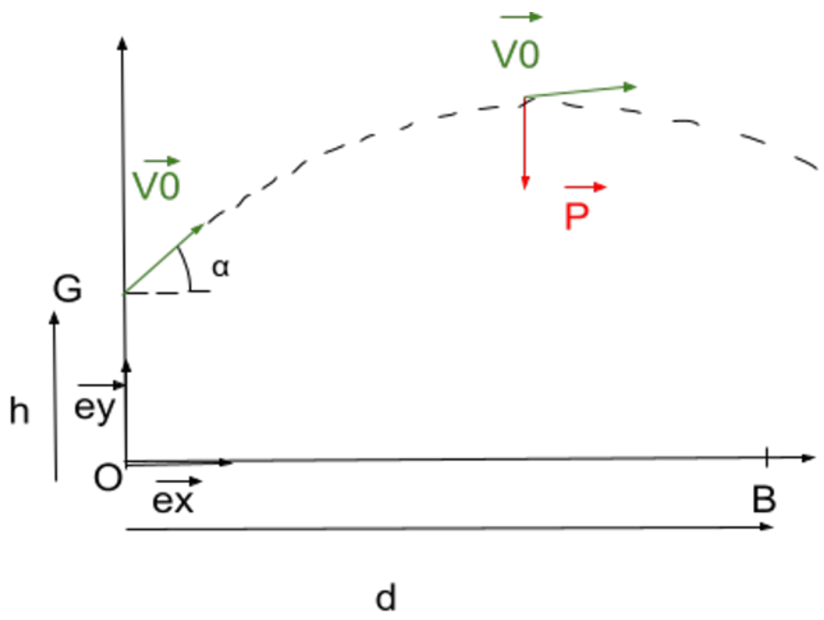
Considérations :

- Référentiel d'étude : terrestre considéré galiléen
- Système : projectile de masse m et de centre d'inertie G considéré comme un point
- Repère : $R_0(O, \vec{ex}, \vec{ey})$
- Les frottements sont négligés

Données :

- Masse du projectile : $m = 40\,kg$
- Vitesse initiale : $v_0 = 1200\,m/s$
- Distance à parcourir : $d = OB = 17\,km$
- Altitude église : $h = 31\,m$
- $g = 9{,}81\,m.s^{-2}$

Paramétrage :



Conditions initiales :

$$(\vec{OG})\begin{pmatrix} x_0=0 \\ y_0=h \end{pmatrix} \qquad (\vec{v_0})\begin{pmatrix} v_{0x}=v_0.\cos(\alpha) \\ v_{0y}=v_0.\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bilan des actions mécaniques extérieures :

Le projectile est soumis à son poids

$$(\vec{P_G})\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Bilan des quantités d'accélération :

$$m.\vec{a}$$

Application du PFD

$$\sum(\vec{F_{ext/s}})=m.(\vec{a})$$

$$(\vec{P_G})=m.(\vec{a})$$

Projections sur $(\vec{e_x},\vec{e_y})$

$$\begin{pmatrix} 0=m.a_x \\ -m.g=m.a_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=-g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}=v_{0x}=v_0.\cos(\alpha) \\ \dot{y}=-g.t+v_{0y}=-g.t+v_{0.}\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x=v_0.\cos(\alpha).t+x_0 \\ y=-g.t^2+v_{0.}\sin(\alpha).t+y_0 \end{pmatrix}$$

or $(x_0=0,y_0=h)$

donc on obtient l'équation horaire suivante

$$(\vec{OG})\begin{pmatrix} x=v_0.t.\cos(\alpha)(1) \\ y=\frac{-1}{2}.g.t^2+v_{0.}\sin(\alpha).t+h(2) \end{pmatrix}$$

On peut isoler t dans (1) et le substituer dans (2) pour obtenir une seul équation

$$\begin{pmatrix} t=\frac{x}{v_0.\cos(\alpha)} (1) \\ y=\frac{-1}{2}.g.(\frac{x}{v_0.\cos(\alpha)})^2+v_{0.}\sin(\alpha).(\frac{x}{v_0.\cos(\alpha)})+h (2) \end{pmatrix}$$

On obtient l’équation de la trajectoire y en fonction de x et α

$$y=\frac{-1}{2}.g.(\frac{x}{v_0.\cos(\alpha)})^2+v_{0.}\sin(\alpha).(\frac{x}{v_0.\cos(\alpha)}+h)$$

Résolution par méthode numérique : Maxima

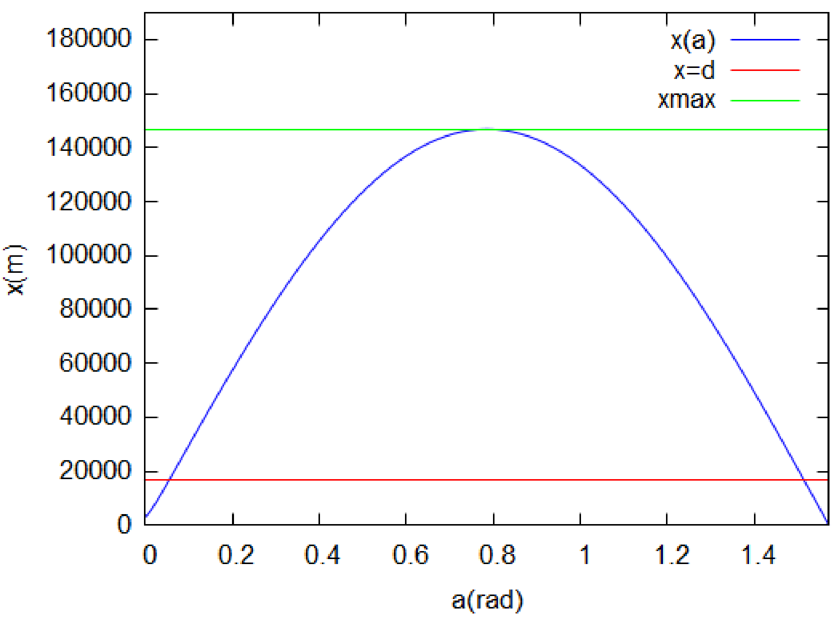
- On cherche les solutions de α pour $y=0$ et $x=d$ et $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$

On trouve la relation suivante

$$x(\alpha)=\frac{\cos(\alpha).v_{0.}\sqrt{(\sin(\alpha)^{2.}v_0^2+2.g.h)}+\cos(\alpha).\sin(\alpha).v_0^2}{g}$$

On obtient le graphe suivant où $a=\alpha$

Graphe de $x(a)$



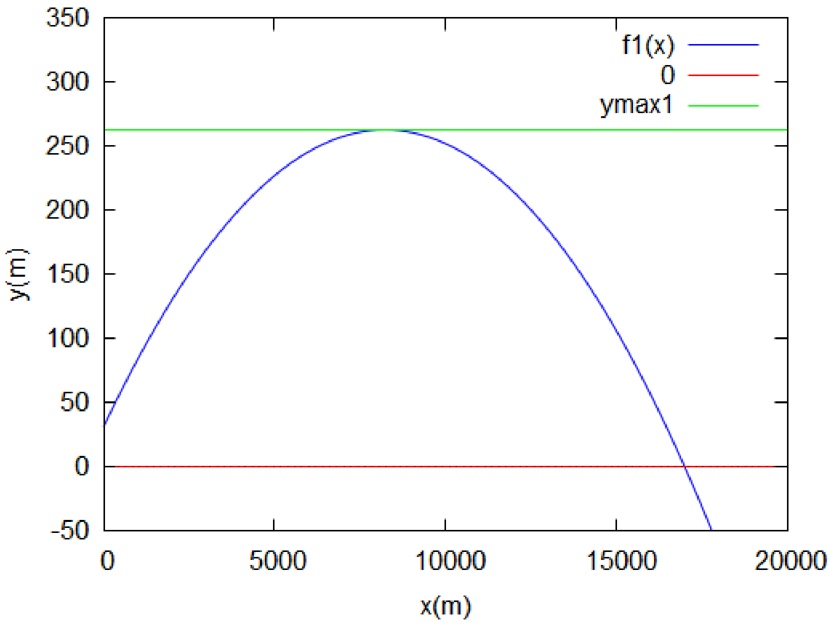
On trouve la portée maximale $x_{max} = 146800\,m = 146.8\,km$. On remarque également que $x(\alpha) = d$ à deux solutions, on les note α_1 et α_2 .

On résout $x(\alpha_1) = d$ avec $\alpha_1 \in [0\,;0{,}2]$ et $x(\alpha_2) = d$ avec $\alpha_1 \in [1{,}4\,;1{,}6]$

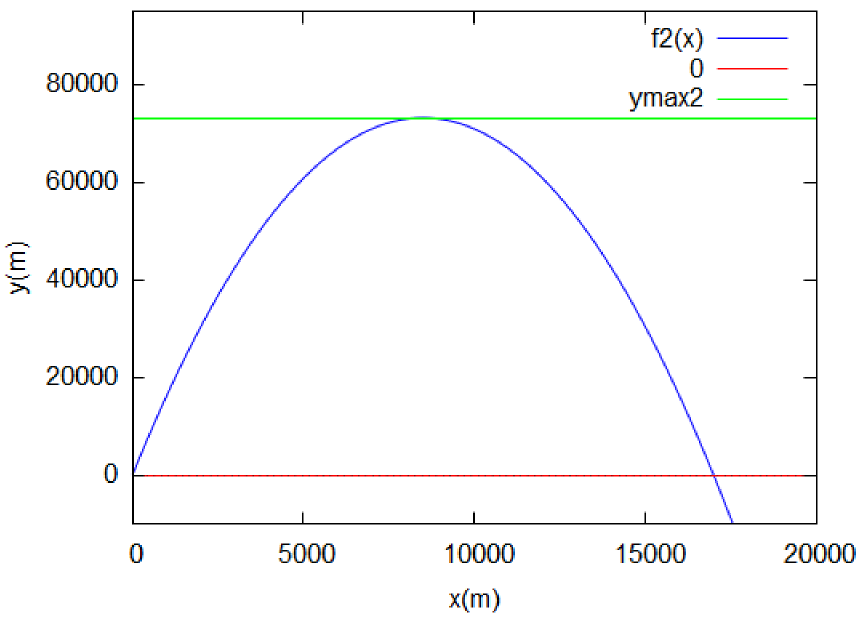
On trouve $\alpha_1 = 5{,}621.10^{-2}\,rad$ et $\alpha_2 = 1{,}513\,rad$

- On peut désormais tracer les trajectoires

Graphe de $y(x)$ *pour* $\alpha = \alpha_1 = 5{,}621.10^{-2}\,rad$



Graphe de $y(x)$ *pour* $\alpha = \alpha_2 = 1{,}513\,rad$



2) Détermination du site du canon avec frottement

Considérations :

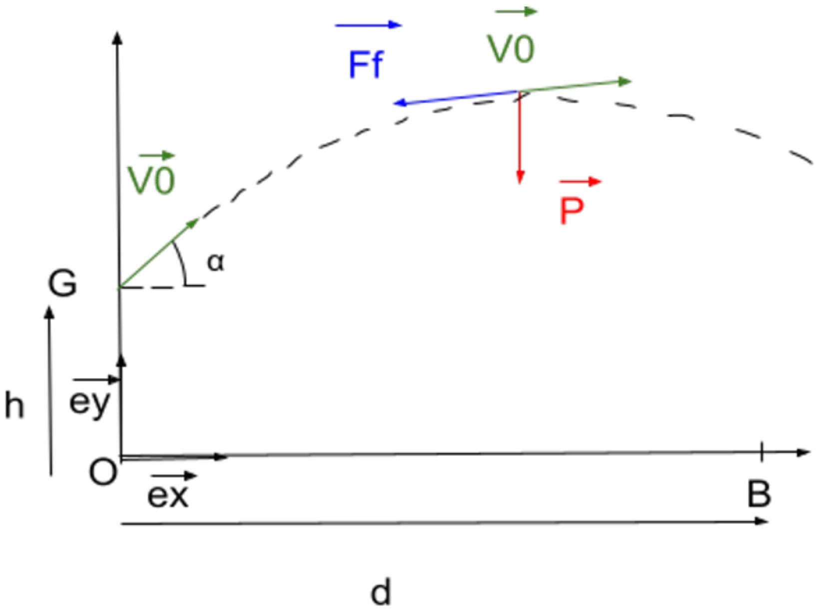
- Référentiel d'étude : terrestre considéré galiléen
- Système : projectile de masse m et de centre d'inertie G considéré comme un solide sans moments dynamiques
- Repère : $R_0(O,\vec{ex},\vec{ey})$
- On considère la traînée comme une force de frottement tel que : $(\vec{F_f})=-k.v^2.\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ avec

  $k=\frac{1}{2}.\rho_{air}.S_f.C_x$

Données :

- Masse volumique de l'air : $\rho_{air}=1{,}225\,kg/m^3$
- Coefficient de traînée du projectile : $C_x=0{,}04$
- Diamètre obus : $D_{obus}=155\,mm$
- $S_f=\frac{S_s}{2}=2.\pi.r^2=2.\pi\left(\frac{D_s}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}.D_s^2=37.10^{-3}m^2$
- $k=9.10^{-4}$

Paramétrage :



Bilan des actions mécaniques extérieures :

Le projectile est soumis à son poids et à la traînée

$$(\vec{P_G})\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} \qquad (\vec{F_{f/G}})\begin{pmatrix}-k.\sqrt{(v_x^2+v_y^2)}.v_x\\-k.\sqrt{(v_x^2.v_y^2)}.v_y\end{pmatrix}$$

Bilan des quantités d'accélération :

$$m.\vec{a}$$

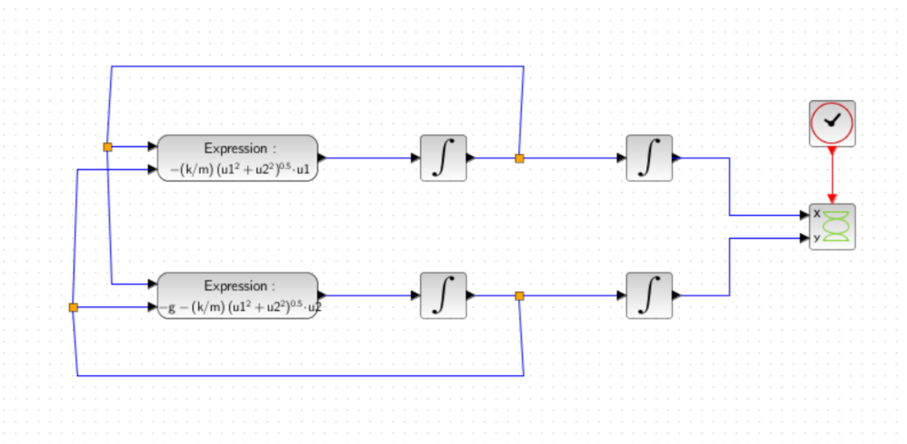
Application du PFD

$$\sum(\vec{F_{ext/s}})=m.(\vec{a})$$
$$(\vec{P_G})+(\vec{F_{f/G}})=m.(\vec{a})$$

Projections sur $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$

$$\begin{pmatrix} 0-k.\sqrt{(v_x^2+v_y^2)}.v_x=m.a_x \\ -m.g-k.\sqrt{(v_x^2.v_y^2)}.v_y=m.a_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}=\frac{-k}{m}.\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}.\dot{x} \\ \ddot{y}=-g-\frac{k}{m}.\sqrt{(\dot{x}^2.\dot{y}^2)}.\dot{y} \end{pmatrix}$$




```
k=0.0009
m=40
g=9.81
a=0.0755
vo=1200
h=31
```

$$Graphe\ y(x)\ \alpha=0{,}0755\,rad$$