Estatística

Probabilidade

Felipe Álvares
felipealvares@decom.cefetmg.br

Cefet - MG

2017

Sumário

Fenômenos aleatórios

- Situações cujos resultados não podem ser previstos com certeza são denominadas fenômenos aleatórios.
- Alguns fenômenos aleatórios: taxa de inflação no próximo mês, valor observado no lançamento de um dado, número de acessos de uma página na web em determinado dia, etc.
- Fenômenos desta natureza podem ser formalmente descritos a partir da teoria de conjuntos.

Espaços amostrais e eventos

- Chamamos de espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório.
- Usualmente tal conjunto é representado por Ω.
- Os subconjuntos de Ω são denominados eventos e são representados por meio de letras maiúsculas:

$$\text{A, B, C, etc.}$$

- O conjunto vazio sempre pertence a Ω e é representado por $\emptyset$.

Exemplo 1

- Considere o fenômeno aleatório caracterizado pelo lançamento de um dado.
- Neste caso,
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
- Ω é dito um espaço amostral finito.
- Alguns exemplos de eventos:
  1. $E_1 =$ "o número obtido é par"
  2. $E_2 =$ "o número obtido é ímpar"
  3. $E_3 =$ "o número obtido é menor que 5"
  4. $E_4 =$ "o número obtido é maior que 6"

Exemplo 1

- Considere o fenômeno aleatório caracterizado pelo lançamento de um dado.
- Neste caso,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Ω é dito um espaço amostral finito.
- Alguns exemplos de eventos:
  1. $E_1 =$ "o número obtido é par" $= \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
  2. $E_2 =$ "o número obtido é ímpar" $= \{1, 3, 5\} \subset \Omega$
  3. $E_3 =$ "o número obtido é menor que 5" $= \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$
  4. $E_4 =$ "o número obtido é maior que 6" $= \emptyset \subset \Omega$

Exemplo 2

- Uma moeda é lançada até obtermos cara pela primeira vez.
- Denotando cara por c e coroa por $\overline{c}$, temos que

$$\Omega = \{c, \overline{c}c, \overline{cc}c, \overline{ccc}c, \overline{cccc}c, \ldots\}.$$

- Ω é dito um espaço amostral enumerável.
- Alguns exemplos de eventos:
  1. $E_1 =$ "obter cara no segundo lançamento"
  2. $E_2 =$ "obter cara em um múltiplo de três jogadas"
  3. $E_3 =$ "não obter cara em nenhum lançamento"

Exemplo 2

- Uma moeda é lançada até obtermos cara pela primeira vez.
- Denotando cara por c e coroa por $\overline{c}$, temos que

$$\Omega = \{c, \overline{c}c, \overline{cc}c, \overline{ccc}c, \overline{cccc}c, ...\}.$$

- Ω é dito um espaço amostral enumerável.
- Alguns exemplos de eventos:
  1. $E_1 =$ "obter cara no segundo lançamento" $= \{\overline{c}c\} \in \Omega$
  2. $E_2 =$ "obter cara em um múltiplo de três jogadas" $=$

$$\{\overline{cc}c, \overline{ccccc}c, \overline{cccccccc}c, ...\} \in \Omega$$

  3. $E_3 =$ "não obter cara em nenhum lançamento" $= \emptyset \in \Omega$

Exemplo 3

- Suponha que em supermercado, desejamos avaliar o tempo de atendimento de um determinado caixa após a chegada de um novo cliente.
- Considerando o tempo em horas, poderíamos supor que

$$\Omega = (0, 1],$$

  por exemplo.
- Ω é dito um espaço amostral não-enumerável (ou contínuo).
- Alguns eventos possíveis:
  1. $E_1 =$ "O caixa leva entre 5 e 10 minutos para realizar o atendimento"
  2. $E_1 =$ "O serviço não se dá em menos de 15 minutos"
  3. $E_3 =$ "O atendimento é realizado em exatos 2 minutos"

Exemplo 3

- Suponha que em supermercado, desejamos avaliar o tempo de atendimento de um determinado caixa após a chegada de um novo cliente.
- Considerando o tempo em horas, poderíamos supor que

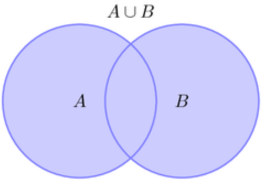
$$\Omega = (0, 1],$$

  por exemplo.
- Ω é dito um espaço amostral não-enumerável (ou contínuo).
- Alguns eventos possíveis:
  1. $E_1 =$ "Tempo entre 5 e 10 minutos de atendimento" $= [1/12, 1/6] \in \Omega$
  2. $E_2 =$ "O serviço não se dá em menos de 15 minutos" $= [1/4, 1] \in \Omega$
  3. $E_3 =$ "O atendimento é realizado em exatos 2 minutos" $= \{1/30\} \in \Omega$

Operações entre eventos – União

A reunião de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, é o evento que ocorre se ao menos um deles ocorre:

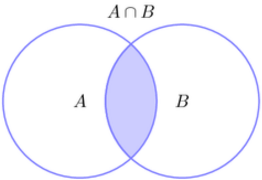
$$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B.$$



Operaçõess entre eventos – Interseção

A interseção de dois eventos A e B, denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre quando ambos os eventos ocorrem:

$$\omega \in A \cap B \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ e } \omega \in B.$$



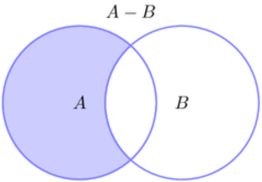
Operações entre eventos – Complementação

O complementar de A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre:

$$\omega \in A^c \iff \omega \notin A.$$

A partir da complementação, definimos ainda a subtração de conjuntos

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$



Operações entre eventos – Regras gerais

Sejam A B e C eventos de um mesmo espaço amostral Ω. Então,

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Probabilidade

- Probailidades são quantidades associadas a eventos aleatórios as quais buscam quantificar as chances de ocorrência de tais eventos.
- Valor expresso entre 0 e 100% ou entre 0 e 1 entre escala decimal.
- Nem toda função com imagem no intervalo $[0, 1]$ pode ser considerada uma probabilidade.
- É preciso garantir que tal função possua certas propriedades que garantam a construção de uma teoria consistente.

Probabilidade – Definição axiomática

- Uma função $P : \Omega \to [0, 1]$ é denominada uma probabilidade se satisfaz as condições (axiomas):
  1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \Omega$;
  2. $P(\Omega) = 1$;
  3. para quaisquer $A_1, A_2, ..., A_n$ dois a dois disjuntos,
     $P\left(U_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$.

Probabilidade – Definição axiomática

- Uma função $P : \Omega \to [0,1]$ é denominada uma probabilidade se satisfaz as condições (axiomas):
  1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \Omega;$
  2. $P(\Omega) = 1;$
  3. para quaisquer $A_1, A_2, ..., A_n$ dois a dois disjuntos, $P\left(U_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$
- Dada a definição geral, como atribuímos probabilidades aos eventos de um experimento aleatório?

Definição clássica

- Aplica-se a espaços amostrais finitos.
- Se Ω é um espaço amostral com N eventos simples, e não temos nenhum conhecimento prévio a respeito das chances de ocorrência de cada um deles, supomos que cada um deles possui probabilidade $1/N$.
- Neste caso, se um evento A é composto por m eventos simples, então

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

Definição clássica

- Aplica-se a espaços amostrais finitos.
- Se Ω é um espaço amostral com N eventos simples, e não temos nenhum conhecimento prévio a respeito das chances de ocorrência de cada um deles, supomos que cada um deles possui probabilidade $1/N$.
- Neste caso, se um evento A é composto por m eventos simples, então

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

- Em resumo, temos que a probabilidade de um evento pode ser interpretada como a razão entre o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis.

Definição clássica

- Aplica-se a espaços amostrais finitos.
- Se Ω é um espaço amostral com N eventos simples, e não temos nenhum conhecimento prévio a respeito das chances de ocorrência de cada um deles, supomos que cada um deles possui probabilidade $1/N$.
- Neste caso, se um evento A é composto por m eventos simples, então

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

- Em resumo, temos que a probabilidade de um evento pode ser interpretada como a razão entre o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis.
- Obs.: nem sempre a hipótese de elementos equiprováveis é razoável! Exemplo: lançamento de uma moeda viciada.

Definição frequentista

- Parte da replicação do experimento aleatório de interesse.
- Se um experimento foi repetido n vezes e o número de observações do evento A foi f_A, então
$$P(A) = \frac{f_A}{N}.$$
- Diferentemente da definição anterior, pode ser aplicada a qualquer espaço amostral.
- Probabilidades dadas sempre de forma aproximada.

Exemplo 4

- Suponha que no lançamento de um dado equilibrado, desejamos avaliar a probabilidade de obtermos um número par.
- Os valores 2, 4 e 6 são todos favoráveis ao evento desejado.
- Assim: No lançamento de um dado equilibrado de 6 faces, temos que:

$$P(\text{obter um número par}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Exemplo 4 (continuação)

- Um resultado análogo pode ser obtido segundo a abordagem frequentista.
- Suponha que o dado foi lançado 5000 vezes gerando as seguintes frequências de observação:

X_i	f_i
1	850
2	823
3	871
4	833
5	814
6	809

Exemplo 4 (continuação)

- Um resultado análogo pode ser obtido segundo a abordagem frequentista.
- Suponha que o dado foi lançado 5000 vezes gerando as seguintes frequências de observação:

X_i	f_i
1	850
2	823
3	871
4	833
5	814
6	809

- O evento equivalente a obter um número par tem frequência acumulada de:

$$f_{par} = f_2 + f + 4 + f_6 = 823 + 833 + 809 = 2465.$$

- Logo,

$$P(\text{obter um número par}) = \frac{f_{par}}{n} = \frac{2465}{5000} = 0,493.$$

Eventos complementares

P1: $P(A) = 1 - P\left(A^c\right), \quad \forall A \in \Omega$

Eventos complementares

P1: $P(A) = 1 - P\left(A^c\right), \quad \forall A \in \Omega$

Prova:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P\left(A \cup A^c\right) \\ &= P(A) + P\left(A^c\right); \end{aligned}$$

Eventos complementares

P1: $P(A) = 1 - P(A^c), \quad \forall A \in \Omega$

Prova:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P(A \cup A^c) \\ &= P(A) + P(A^c); \end{aligned}$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A).$$

Probabilidade do evento vazio

P2: $P(\emptyset) = 0$

Probabilidade do evento vazio

P2: $P(\emptyset) = 0$

Prova:

$$\emptyset = \Omega^c \Longrightarrow P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$$

Probabilidade do evento vazio

P2: $P(\emptyset) = 0$

Prova:

$$\emptyset = \Omega^c \Longrightarrow P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$$

$$\therefore P(\emptyset) = 0.$$

Probabilidade inclusão

P3: $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Probabilidade inclusão

P3: $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Prova:

$$A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)\,;$$

Probabilidade inclusão

P3: $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Prova:

$$A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)\,;$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(A \cup (B \setminus A)\right) \\ &= P(A) + P\left(B \setminus A\right) \geq P(A) + 0; \end{aligned}$$

Probabilidade inclusão

P3: $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Prova:

$$A \subset B \implies B = A \cup (B \setminus A)\,;$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(A \cup (B \setminus A)\right) \\ &= P(A) + P\left(B \setminus A\right) \geq P(A) + 0; \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) \leq P(B).$$

União de eventos (adição de probabilidades)

P4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \Omega$

União de eventos (adição de probabilidades)

P4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \Omega$
Intuição: Ao subrair a interseção, evitamos que tal evento contribua duas vezes com a probabilidade total.

União de eventos (adição de probabilidades)

P4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \Omega$

Intuição: Ao subrair a interseção, evitamos que tal evento contribua duas vezes com a probabilidade total.

Prova:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A);$$

União de eventos (adição de probabilidades)

P4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \Omega$
Intuição: Ao subrair a interseção, evitamos que tal evento contribua duas vezes com a probabilidade total.
Prova:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A);$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \setminus A);$$

União de eventos (adição de probabilidades)

P4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \Omega$
Intuição: Ao subrair a interseção, evitamos que tal evento contribua duas vezes com a probabilidade total.
Prova:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A);$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \setminus A);$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Exemplo 5

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são atletas. Temos ainda que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 200 são esortistas e da biologia notruno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

a) ser atleta.
b) ser atleta e aluno da biologia noturno.
c) não ser atleta.
d) ser atleta ou aluno da biologia.
e) não ser atleta, nem aluno da biologia.

Exemplo 5 (continuação)

	Bio. Not (N)	Bio. Diurno (D)	Outros (O)	Total
Atleta (A)	200	100	3700	4000
Não atleta (A^c)	500	400	5100	6000
Total	700	500	8800	10000

Exemplo 5 (continuação)

	Bio. Not (N)	Bio. Diurno (D)	Outros (O)	Total
Atleta (A)	200	100	3700	4000
Não atleta (A^c)	500	400	5100	6000
Total	700	500	8800	10000

a) ser atleta: A.

$$P(A) = \frac{\#\{\text{atletas}\}}{\#\{\text{estudantes}\}} = \frac{4000}{10000} = 0,4;$$

Exemplo 5 (continuação)

	Bio. Not (N)	Bio. Diurno (D)	Outros (O)	Total
Atleta (A)	200	100	3700	4000
Não atleta (A^c)	500	400	5100	6000
Total	700	500	8800	10000

a) ser atleta: A.

$$P(A) = \frac{\#\{\text{atletas}\}}{\#\{\text{estudantes}\}} = \frac{4000}{10000} = 0,4;$$

b) atleta e aluno da biologia noturno: $A \cap N$.

$$P(A \cap N) = \frac{\#\{A \cap N\}}{\#\{\text{estudantes}\}} = \frac{200}{10000} = 0,02;$$

Exemplo 5 (continuação)

c) não ser aluno da biologia: $(D \cup N)^c$.

$$\begin{aligned} P\left((D \cup N)^c\right) &= 1 - P(D \cup N) \\ &= 1 - [P(D) + P(N)] = 1 - \left[\frac{\#D + \#N}{\#\{\text{estudantes}\}}\right] \\ &= 1 - \frac{1200}{10000} = 0,88; \end{aligned}$$

Exemplo 5 (continuação)

c) não ser aluno da biologia: $(D \cup N)^c$.

$$
\begin{aligned}
P\left((D \cup N)^c\right) &= 1 - P(D \cup N) \\
&= 1 - [P(D) + P(N)] = 1 - \left[\frac{\#D + \#N}{\#\{\text{estudantes}\}}\right] \\
&= 1 - \frac{1200}{10000} = 0,88;
\end{aligned}
$$

d) ser atleta ou aluno da biologia: $A \cup (N \cup D))$.

$$
\begin{aligned}
P\left(A \cup (N \cup D)\right)) &= P(A) + P(N \cup D) - P\left(A \cap (N \cup D)\right) \\
&= \frac{\#A}{\#\{\text{estudantes}\}} + P(N) + P(D) - P\left((A \cap N) \cup (A \cap D)\right) \\
&= \frac{4000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{0}{10000} - \frac{200}{10000} - \frac{100}{10000} = 0,49;
\end{aligned}
$$

Exemplo 5 (continuação)

c) não ser aluno da biologia: $(D \cup N)^c$.

$$\begin{aligned} P\left((D \cup N)^c\right) &= 1 - P(D \cup N) \\ &= 1 - [P(D) + P(N)] = 1 - \left[\frac{\#D + \#N}{\#\{\text{estudantes}\}}\right] \\ &= 1 - \frac{1200}{10000} = 0,88; \end{aligned}$$

d) ser atleta ou aluno da biologia: $A \cup (N \cup D))$.

$$\begin{aligned} P\left(A \cup (N \cup D)\right)) &= P(A) + P(N \cup D) - P\left(A \cap (N \cup D)\right) \\ &= \frac{\#A}{\#\{\text{estudantes}\}} + P(N) + P(D) - P\left((A \cap N) \cup (A \cap D)\right) \\ &= \frac{4000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{0}{10000} - \frac{200}{10000} - \frac{100}{10000} = 0,49; \end{aligned}$$

e) não ser esportista e nem aluno da biologia: $A^c \cap O$.

$$P(A^c \cap O) = \frac{5100}{10000} = 0,51.$$

Exemplo 6

Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador tipo A é de $1/30$, em um do tipo B, $1/80$ e, em ambos, $1/1000$. Qual a probabilidade de que:

a) ao menos um tenha apresentado erro?

b) nenhum tenha apresentado erro?

c) apenas A tenha apresentado erro?

Exemplo 7

- A fim de simplificar a notação, considere:

  A: "erro no processador A";

  B: "erro no processador B".

Exemplo 7

- A fim de simplificar a notação, considere:

  A: "erro no processador A";

  B: "erro no processador B".

a) ao menos um tenha apresentado erro: $A \cup B$.

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} = 0,0448;
\end{aligned}
$$

Exemplo 7

- A fim de simplificar a notação, considere:

  A: "erro no processador A";

  B: "erro no processador B".

a) ao menos um tenha apresentado erro: $A \cup B$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} = 0,0448; \end{aligned}$$

b) nenhum tenha apresentado erro: $A^c \cap B^c$.

$$P\left(A^c \cap B^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 0,9552;$$

Exemplo 7

- A fim de simplificar a notação, considere:
  A: "erro no processador A";
  B: "erro no processador B".

a) ao menos um tenha apresentado erro: $A \cup B$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} = 0,0448; \end{aligned}$$

b) nenhum tenha apresentado erro: $A^c \cap B^c$.

$$P\left(A^c \cap B^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 0,9552;$$

c) apenas A tenha apresentado erro: $A \cap B^c$.

$$\begin{aligned} P\left(A \cap B^c\right) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{1000} = \frac{97}{3000} \approx 0,0323. \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

- É possível que o fenômeno aleatório em estudo possa ser separado em etapas.
- A informação ocorrida em dada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrência das etapas seguintes.
- Nestes casos, ganhamos informação e podemos "recalcular" as probabilidades de interesse.
- As probabilidades "recalculadas" são ditas probabilidades condicionais.

Probabiliadde condicional – definição

Dados dois eventos A e B, em um mesmo espaço amostral Ω, a probabilidade de ocorrência de A dado que B ocorre, denotada por $P(A|B)$, é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Probabiliadde condicional – definição

Dados dois eventos A e B, em um mesmo espaço amostral Ω, a probabilidade de ocorrência de A dado que B ocorre, denotada por $P(A|B)$, é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

- A igualdade acima é denominada regra de Bayes.
- Caso $P(B) = 0$, por convenção, assumimos que $P(A|B) = P(A)$.

Exemplo 7

- Experimento: Lançar um dado duas vezes e anotar os valores obtidos.

$$\Omega = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2; 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\right\}.$$

- Qual a probabilidade de observarmos o evento

$$B = \{\text{"a soma dos lançamentos é 4"}\}?.$$

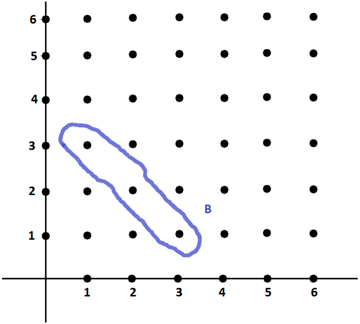
Exemplo 7

- Experimento: Lançar um dado duas vezes e anotar os valores obtidos.

$$\Omega = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2;\ 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6 \right\}.$$

- Qual a probabilidade de observarmos o evento

$$B = \{\text{"a soma dos lançamentos é 4"}\}?.$$



$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Exemplo 7 (continuação)

- Qual a probabilidade de obtermos soma 4 dado que o valor obtido em cada lançamento é menor ou igual a 2?
- Definindo o evento

$$A = \{\text{"Em cada lançamento, o valor obtido é menor ou igual a 2"}\},$$

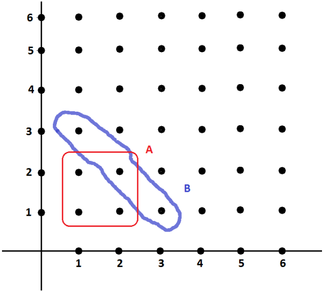
precisamos calcular $P(B|A)$.

Exemplo 7 (continuação)

- Qual a probabilidade de obtermos soma 4 dado que o valor obtido em cada lançamento é menor ou igual a 2?
- Definindo o evento

$$A = \{\text{"Em cada lançamento, o valor obtido é menor ou igual a 2"}\},$$

precisamos calcular $P(B|A)$.
- Intuitivamente, é como se o espaço amostral fosse redefinido e qualquer elemento fora de A fosse desconsiderado.



$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{36} \Big/ \frac{4}{36} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 8

- Uma urna contém 10 bolas das quais 3 são brancas e 7 vermelhas.
- Duas bolas são retiradas, sem reposição, uma após a outra.
- Determinar o espaço amostral e a probabilidade associada a cada evento simples.

Exemplo 8

- Uma urna contém 10 bolas das quais 3 são brancas e 7 vermelhas.
- Duas bolas são retiradas, sem reposição, uma após a outra.
- Determinar o espaço amostral e a probabilidade associada a cada evento simples.
- Solução:

$$\Omega = \{B_1B_2, B_1V_2, V_1B_2, V_1V_2\}.$$

Exemplo 8

- Uma urna contém 10 bolas das quais 3 são brancas e 7 vermelhas.
- Duas bolas são retiradas, sem reposição, uma após a outra.
- Determinar o espaço amostral e a probabilidade associada a cada evento simples.
- Solução:

$$\Omega = \{B_1B_2, B_1V_2, V_1B_2, V_1V_2\}.$$

$$\begin{aligned}
P(B_1B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{2}{9}\frac{3}{10} = \frac{2}{30}\\
P(B_1V_2) &= P(B_1|V_2)P(V_2) = \frac{7}{9}\frac{3}{10} = \frac{7}{30}\\
P(V_1B_2) &= P(V_1|B_2)P(B_2) = \frac{3}{9}\frac{7}{10} = \frac{7}{30}\\
P(V_1V_2) &= P(V_1|V_2)P(V_2) = \frac{6}{9}\frac{7}{10} = \frac{14}{30}
\end{aligned}$$

Observação

- Probabilidade condicional define uma função de probabilidade.
- Isto é, uma probabilidade condicional satisfaz os três axiomas discutidos anteriormente:
  1. $P(B|A) \in [0,1]$;
  2. se $B_1, B_2, ..., B_n$ são dois a dois disjuntos, então

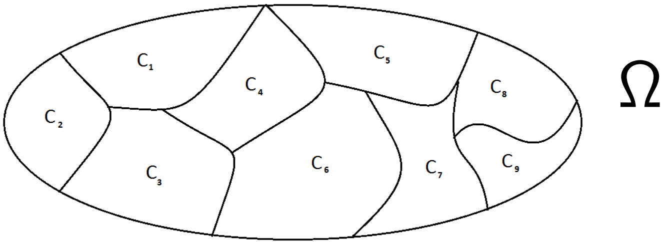
$$P\left(\cup_{i=1}^{n} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i|A);$$

  3. $P(\Omega|A) = 1$.

Lei da Probabilidade Total – Partições

- Os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma partição de Ω se

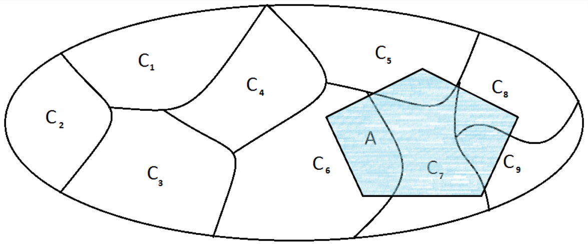
$$C_i \cap C_j = \emptyset,\ i \neq j \qquad \text{e} \qquad \cup_{i=1}^{k} C_k = \Omega.$$

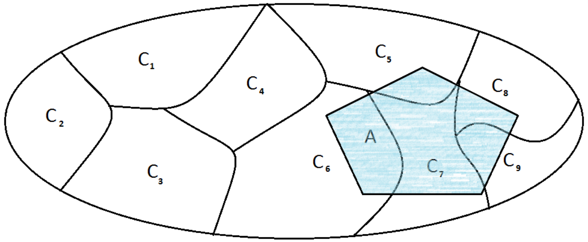


Lei da Probabilidade Total

- Suponha que os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas.
- Então, para qualquer $A \subset \Omega$, temos:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|C_k)P(C_k).$$


C1
C4
C5
C8
C2
A
C6
C7
C9
C3



Prova:

- $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [\cup_{i=1}^{k} C_k])$.
- Como $C_1, C_2, ..., C_k$ paraticionam Ω, segue que

$$[A \cap C_i] \cap [A \cap C_j] = \emptyset, \quad i \neq j.$$

- Assim,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i).$$

Exemplo 9

- Considere 3 urnas compostas por
  C_1: 3 bolas brancas e 5 vermelhas;
  C_2: 4 bolas brancas e 2 vermelhas;
  C_3: 1 bola branca e 3 vermelhas.
- Em um primeiro momento, escolhe-se uma urna de acordo com as probabilidades

$$P(C_1) = 2/6, \quad P(C_2) = 3/6 \quad \text{e} \quad P(C_3) = 1/6.$$

- Em seguida, uma bola é retirada da urna selecionada previamente.
- Determine a probabilidade de que a bola retirada seja branca.

Exemplo 9 (continuação)

Aplicando a Lei da Probabilidade Total:

$$\begin{aligned}
P(\text{Branca}) &= P(\text{Branca} \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3)) \\
&= P(\text{Branca}|C_1)P(C_1) + P(\text{Branca}|C_2)P(C_2) \\
&\quad + P(\text{Branca}|C_3)P(C_3) \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

- Considere novamente que $C_1, C_2, ..., C_k$ é uma partição de Ω.
- A Lei de Probabilidade Total pode ser aplicada para a dedução da célebre *Fórmula de Bayes*:

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

Fórmula de Bayes

- Considere novamente que $C_1, C_2, ..., C_k$ é uma partição de Ω.
- A Lei de Probabilidade Total pode ser aplicada para a dedução da célebre *Fórmula de Bayes*:

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}, \quad j = 1, 2, ..., k.$$

- Basta notar que:

$$\begin{aligned} P(C_j|A) &= \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(C_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}. \end{aligned}$$

Exemplo 10

- Um fabricante de sorvetes recebe leite de 3 fazendas segundo as proporções:

$$F_1 = 20\%, \quad F_2 = 30\% \quad \text{e} \quad F_3 = 50\%.$$

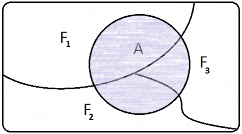
- As fazendas adulteram o leite a partir da adição de água ou soda cáustica.
- Sejam A_1, A_2 e A_3 a porção adulterada de leite em F_1, F_2 e F_3, respectivamente, e considere

$$A_1 = 20\%, \quad A_2 = 5\% \quad \text{e} \quad A_3 = 2\%.$$

- Determine
  a. a probabilidade de obtermos leite adulterado;
  b. a probabilidade do leite ser proveniente de F_1 dado que é adulterado;
  c. a probabilidade do leite ser proveniente de F_2 dado que não é adulterado.

Exemplo 10 (continuação)

a. $P(\text{adulterado}) \rightsquigarrow$



$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(A|F_i)P(F_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(F_i) \\
&= 0,2 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,02 \cdot 0,5 \\
&= 0,065 = 6,5\%
\end{aligned}
$$

Exemplo 10 (continuação)

b. a probabilidade do leite ser proveniente de F_1 dado que é adulterado;

$$
\begin{aligned}
P(F_1|A) &= \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)} \\
&= \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,065} \\
&\approx 0,615 = 61,5\%
\end{aligned}
$$

Exemplo 10 (continuação)

c. a probabilidade do leite ser proveniente de F_2 dado que não é adulterado.

$$\begin{aligned} P\left(F_2 | A^c\right) &= \frac{P\left(A^c | F_2\right) P(F_2)}{P\left(A^c\right)} \\ &= \frac{0,95 \cdot 0,3}{1 - 0,065} \\ &\approx 0,305 = 30,5\% \end{aligned}$$

Independência

- Dois eventos A e B são independentes, se a ocorrência ou não de um deles não altera a probailidade de ocorrência do outro.
- Mais formalmente, A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0$$

  e

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0.$$

- Ou ainda, A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo 11

- O seguinte circuito opera corretamente se houver um caminho funcional de dispositivos da esquerda para a direita.
- As probabilidades de cada dispositivo funcionar corretamente são dadas na figura abaixo

- Assumindo que os dispositivos funcionam de forma independente, qual a probabilidade do circuito operar?

Exemplo 11 (continuação)

- Sejam $E =$ "o dispositivo à esquerda funciona" e $D =$ "o dispositivo à direita funciona".
- Desta forma,

$$\begin{aligned} P(\text{"circuito operar"}) &= P(E \cap D) \\ &= P(E)P(D) \\ &= 0,8 \cdot 0,9 = 0,72 = 72\% \end{aligned}$$

Independência – eventos complementares

- Se A e B são independentes, então A^c e B^c também são independentes.

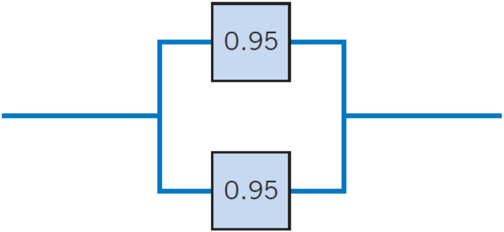
Independência – eventos complementares

- Se A e B são independentes, então A^c e B^c também são independentes.
- Basta observar que:

$$\begin{aligned}
P\left(A^c \cap B^c\right) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
&= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) \\
&= P\left(A^c\right) + P(B)P\left(A^c\right) \\
&= P\left(A^c\right)(1 - P(B)) \\
&= P\left(A^c\right)P\left(B^c\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 12

- O seguinte circuito opera corretamente se houver um caminho funcional de dispositivos da esquerda para a direita.
- As probabilidades de cada dispositivo funcionar corretamente são dadas na figura abaixo



- Assumindo que os dispositivos funcionam de forma independente, qual a probabilidade do circuito operar?

Exemplo 12 (continuação)

- Sejam $S =$ "o dispositivo superior funciona" e $I =$ "o dispositivo inferior funciona".
- Desta forma,

$$\begin{aligned} P(\text{"circuito operar"}) &= P(S \cup I) \\ &= 1 - P\left(S^c \cap I^c\right) \\ &= 1 - P\left(S^c\right) P\left(I^c\right) \\ &= 1 - 0,05 \cdot 0,05 \\ &= 0,9975 = 99,75\% \end{aligned}$$

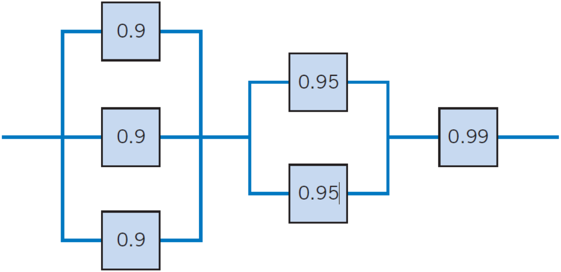
Independência – múltiplos eventos

- A definição de independência pode ser extendida para problemas envolvendo mais de dois eventos.
- Os eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ são independentes se, e somente se, para qualquer subconjunto de eventos $E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_k}$, vale

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdot P(E_{i_2}) \cdots P(E_{i_k}).$$

Exemplo 13

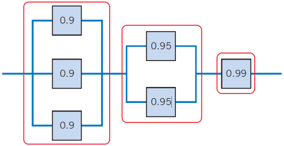
- O seguinte circuito opera corretamente se houver um caminho funcional de dispositivos da esquerda para a direita.
- As probabilidades de cada dispositivo funcionar corretamente são dadas na figura abaixo



- Assumindo que os dispositivos funcionam de forma independente, qual a probabilidade do circuito operar?

Exemplo 13 (continuação)

- O problema pode ser dividido em três subcircuitos C_1, C_2 e C_3



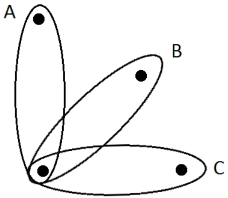
- O circuito irá operar normalmente se os três circuitos menores operarem normalmente.
- De maneira análoga aos problemas anteriores:

$$P(C_1) = 1 - 0,1^3$$
$$P(C_2) = 1 - 0,05^2$$
$$P(C_3) = 0,99$$

- Assim,
  $P(\text{"circuito operar"}) = (1 - 0,1^3)(1 - 0,05^2)(0,99) = 0,987 = 98,7\%$

Independência por pares $\times$ Independência coletiva

- Independência por pares não implica independência coletiva.
- Exemplo: Seja Ω um conjunto de quatro pontos, com os eventos A, B e C assim definidos:



Independência por pares $\times$ Independência coletiva

- Assumindo que os quatro pontos são equiprováveis, temos que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1/4 = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= 1/4 = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= 1/4 = P(B)P(C) \end{aligned}$$

- Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = 1/8 \neq P(A)P(B)P(C).$$