Estatística

Variáveis Aleatórias

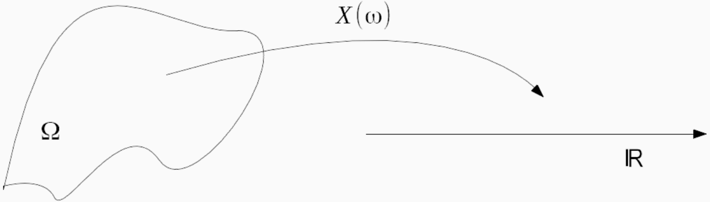
Felipe Álvares

CEFET-MG

INTRODUÇÃO

- O espaço amostral de um experimento aleatório lista todas as saídas possíveis do fenômeno (numéricas ou não).
- Em alguns casos, tal descrição é suficiente, contudo em outros casos, é mais interessante associarmos um número a cada uma dessas saídas.
- Como o resultado do experimento é aleatório, temos que o valor a ele associado também é aleatório.
- Por este motivo, a função que associa valores às saídas de um experimento é denominada uma variável aleatória.

- Definição: Uma variável aleatória é uma função que associa valores reais aos elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.



- Notação: variáveis aleatórias (v.a.'s) são usualmente denotadas por letras maiúsculas, tais como X. Após uma realização do experimento aleatório, o valor observado é representado por uma letra minúscula, tal como x.

- Caso a imagem da variável aleatória seja um conjunto enumerável, temos uma variável discreta: número de arranhões em uma superfície, número equivocado de bits transmitidos em uma sequência, etc.
- Caso a v.a. assuma valores ao longo de algum subintervalo de $\mathbb{R}$, temos uma variável contínua: corrente elétrica, temperatura, voltagem, peso, etc.

VARIÁVEIS DISCRETAS

- Seja X uma variável aleatória discreta com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- A função de probabilidade de X, denotada por f, é uma função tal que
  1. $f(x_i) \geq 0, \quad \forall i$
  2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$
  3. $f(x_i) = P(X = x_i), \quad \forall i$
- A função de probabilidade de uma v.a. discreta pode ser representada informalmente por meio tabelas.

Exemplo 1

- Considere o lançamento duplo de uma moeda não viciada.
- Defina a v.a. X como sendo o número de caras obtidas.

Exemplo 1

- Considere o lançamento duplo de uma moeda não viciada.
- Defina a v.a. X como sendo o número de caras obtidas.
- Neste caso,

Pontos amostrais	X	f
$\overline{cc}$	0	1/4
$\overline{c}c$, $c\overline{c}$	1	1/2
cc	2	1/4

Exemplo 1

- Considere o lançamento duplo de uma moeda não viciada.
- Defina a v.a. X como sendo o número de caras obtidas.
- Neste caso,

Pontos amostrais	X	f
$\overline{c}\overline{c}$	0	1/4
$\overline{c}c$, $c\overline{c}$	1	1/2
cc	2	1/4

- Em resumo,

$$X(\overline{c}\overline{c}) = 0,\ X(\overline{c}c) = X(c\overline{c}) = 1,\ \text{e } X(cc) = 2$$

e

$$f(0) = 1/4,\ f(1) = 1/2 \text{ e } f(2) = 1/4.$$

Exemplo 2

- Lotes de três peças são retirados de uma linha de produção para controle de qualidade.
- Suponha que a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa é de 10% e defina a v.a. Y como sendo o número de peças defeituosas observadas.

Exemplo 2

- Lotes de três peças são retirados de uma linha de produção para controle de qualidade.
- Suponha que a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa é de 10% e defina a v.a. Y como sendo o número de peças defeituosas observadas.
- Neste caso,

Pontos amostrais	Y	f
$\overline{DDD}$	0	$(0,9)^3$
$D\overline{DD}$, $\overline{D}D\overline{D}$, $\overline{DD}D$	1	$3(0,9)^2(0,1)$
$\overline{D}DD$, $D\overline{D}D$, $DD\overline{D}$	2	$3(0,9)(0,1)^2$
DDD	3	$(0,1)^3$

- Lotes de três peças são retirados de uma linha de produção para controle de qualidade.
- Suponha que a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa é de 10% e defina a v.a. Y como sendo o número de peças defeituosas observadas.
- Neste caso,

Pontos amostrais	Y	f
$\overline{D}\,\overline{D}\,\overline{D}$	0	$(0,9)^3$
$D\overline{D}\,\overline{D}$, $\overline{D}D\overline{D}$, $\overline{D}\,\overline{D}D$	1	$3(0,9)^2(0,1)$
$\overline{D}DD$, $D\overline{D}D$, $DD\overline{D}$	2	$3(0,9)(0,1)^2$
DDD	3	$(0,1)^3$

- Em resumo,

$$Y(\overline{D}\,\overline{D}\,\overline{D}) = 0,\ Y(D\overline{D}\,\overline{D}) = Y(\overline{D}D\overline{D}) = Y(\overline{D}\,\overline{D}D) = 1,$$

$$Y(\overline{D}DD) = Y(D\overline{D}D) = Y(DD\overline{D}) = 2,\ Y(DDD) = 3$$

e

$$f(0) = (0,9)^3,\ f(1) = 3(0,9)^2(0,1),\ f(2) = 3(0,9)(0,1)^2 \text{ e } f(3) = (0,1)^3.$$

- Um modo alternativo de associar probabilidades às saídas de uma v.a. é através de valores cumulativos tais como $P(X \leq q)$
- A função $F(x) = P(X \leq x)$ é denominada função de distribuição acumulada de X.
- No caso discreto, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(\bigcup_{x_i \leq x} [X = x_i]\right) \\ &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i). \end{aligned}$$

Distribuição acumulada

- De uma forma em geral, para uma v.a. discreta X, a função de distribuição acumulada satisfaz:
  1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;
  2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
  3. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.
- Além disso, mesmo que a v.a. X assuma apenas uma quantidade enumerável de valores, sua distribuição acumulada F é definida para todos os reais.

Determinar a função de distribuição acumulada da v.a. X dada por

X	$f(X)$
0	0,6561
1	0,2916
2	0,0486
3	0,0036

Exemplo 3

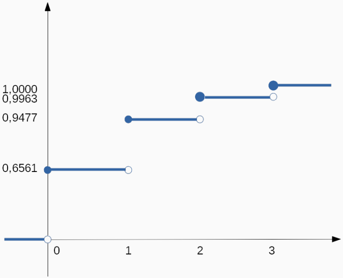
Determinar a função de distribuição acumulada da v.a. X dada por

X	$f(X)$
0	0,6561
1	0,2916
2	0,0486
3	0,0036

Solução:

$$\begin{aligned} x < 0: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,0000 \\ 0 \leq x < 1: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,6561 \\ 1 \leq x < 2: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,9499 \\ 2 \leq x < 3: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,9964 \\ x \geq 3: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 1,0000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0,0000; & x < 0 \\ 0,6561; & 0 \leq x < 1 \\ 0,9499; & 1 \leq x < 2 \\ 0,9964; & 2 \leq x < 3 \\ 1,0000; & x \geq 3 \end{cases}$$

Distribuição acumulada $F(x)$



- É importante notar que o tamanho do salto em um ponto x_i qualquer equivale à probabilidade de observarmos tal ponto, i.e.,

$$P(X = x_i) = F(x_i) - \lim_{x \to x^-} F(x).$$

Média

- A média ou valor esperado de uma v.a. X, denotada por μ ou $E(X)$, é um número dado por

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x).$$

- O valor esperado de uma v.a. tem a mesma interpretação de centro de massa a qual foi introduzida na estatística descritiva.

- Diferentemente das médias amostrais, o valor μ é constante (não-aleatório) intrínseca à v.a. X, podendo ser interpretado como uma característica populacional.

- A variância de uma v.a. X, denotada por σ^2 ou $V(X)$, é dada por

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x).$$

- Tal valor é uma constante populacional a qual indica a dispersão média dos valores de X em torno da média μ.
- Alternativamente, σ^2 pode ser obtida da seguinte forma:

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = E(X^2) - E^2(X).$$

- Se X e Y são duas v.a.'s quaisquer e $c \in \mathbb{R}$, então

$$E(X + cY) = E(X) + cE(Y) = \mu_X + c\mu_Y;$$

isto é, a esperança de uma v.a. é um operador linear.

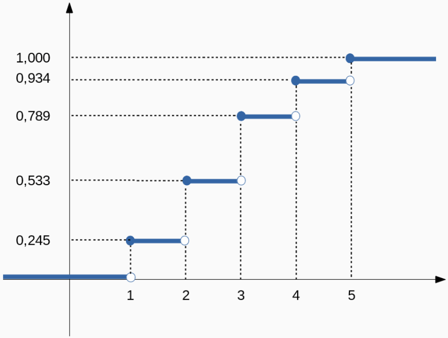
- Se X é uma v.a. qualquer e $c \in \mathbb{R}$, então

$$V(cX) = c^2 V(X).$$

- Se X e Y são v.a.'s ***independentes***, então

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2.$$

Determinar μ e σ^2 considerando a v.a. X cuja função de distribuição acumulada é dada pelo gráfico:



Da distribuição acumulada, obtemos:

X	$f(X)$
1	0,245
2	0,288
3	0,256
4	0,145
5	0,066

$$\begin{aligned}
\mu = & \quad 1(0,245) + 2(0,288) + 3(0,256) \\
& \quad + 4(0,145) + 5(0,066) = 2,499 \\
E(X^2) = & \quad 1^2(0,245) + 2^2(0,288) + 3^2(0,256) \\
& \quad + 4^2(0,145) + 5^2(0,066) = 7,671 \\
\sigma^2 = & \quad E(X^2) - \mu^2 = 1,425999 \approx 1,426.
\end{aligned}$$

- Alguns modelos de v.a. aparecem com bastante frequência em situações práticas.
- Em geral, nestes casos a função de probabilidade pode ser expressa por uma fórmula simples.
- A partir de tal função, podemos estudar de forma completa todo o comportamento da v.a.

- Seja X uma v.a. a qual toma valores no conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.
- X segue o modelo uniforme se

$$f(x_j) = P(X = x_j) = \frac{1}{k}, \quad \forall j = 1, 2, ..., k.$$

- V.a.'s uniformes são bastante comuns na modelagem de sorteios honestos:
  - probabilidade de obtermos cara no lançamento de uma moeda honesta: 1/2.
  - probabilidade de obtermos o número 4 no lançamento de um dado equilibrado: 1/6.
  - probabilidade de obtermos $\{01, 02, 03, 04, 05, 06\}$ no sorteio da mega sena: 1/50063860.

- Média:

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot \frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j;$$

- Variância:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \right)^2$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 .$$

- Seja X uma v.a. que assume apenas dois valores $\{0, 1\}$.
- O valor 1 normalmente é atribuído à ocorrência de sucesso de um fenômeno qualquer e 0 a um fracasso.
- Denotando por p a probabilidade de sucesso, obtemos a seguinte função de probabilidade:

X	$f(X)$
0	$1-p$
1	p

- Seja X uma v.a. que assume apenas dois valores $\{0, 1\}$.
- O valor 1 normalmente é atribuído à ocorrência de sucesso de um fenômeno qualquer e 0 a um fracasso.
- Denotando por p a probabilidade de sucesso, obtemos a seguinte função de probabilidade:

X	$f(X)$
0	$1-p$
1	p

- Equivalentemente,

$$f(x_j) = P(X = x_j) = p^{x_j}(1-p)^{1-x_j}.$$

- Média:

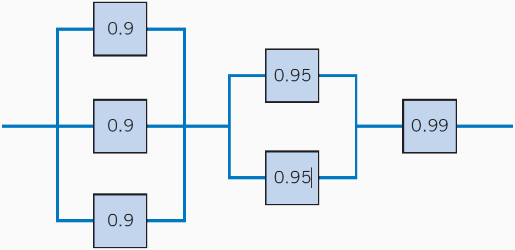
$$\begin{aligned}\mu &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= p;\end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p).\end{aligned}$$

Exemplo 5

- O seguinte circuito opera corretamente se houver um caminho funcional de dispositivos da esquerda para a direita.
- As probabilidades de cada dispositivo funcionar corretamente são dadas na figura abaixo



- Assumindo que os dispositivos funcionam de forma independente, descreva o funcionamento do circuito através de uma variável aleatória.

- O problema pode ser modelado como uma v.a. de Bernoulli:
  - o sistema opera normalmente (sucesso): $X = 1$;
  - o sistema apresenta falhas (fracasso): $X = 0$.

Exemplo 5 (continuação)

- O problema pode ser modelado como uma v.a. de Bernoulli:
  - o sistema opera normalmente (sucesso): $X = 1$;
  - o sistema apresenta falhas (fracasso): $X = 0$.
- Neste caso,

$$P(X = 1) = (1 - 0,1^3)(1 - 0,05^2)(0,99) = 0,9870$$

e

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 0,0130.$$

- Portanto, temos uma v.a. de Bernoulli com função de probabilidade

$$f(x_i) = 0,9870^{x_i} \cdot 0,0130^{1-x_i}, \quad x_i = 0,1.$$

- Seja X uma v.a. que conta o número de sucessos em n ensaios **independentes** de Bernoulli.
- Desta forma, X é uma v.a. discreta a qual pode assumir os valores

$$\{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

- A variável é especificada por dois parâmetros: n o número de ensaios e p a probabilidade de sucesso em cada ensaio.

- Seja X uma v.a. que conta o número de sucessos em n ensaios **independentes** de Bernoulli.
- Desta forma, X é uma v.a. discreta a qual pode assumir os valores

$$\{0, 1, 2, ..., n\}.$$

- A variável é especificada por dois parâmetros: n o número de ensaios e p a probabilidade de sucesso em cada ensaio.
- Função de probabilidade:

$$\begin{aligned} f(k) &= P(X = k) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

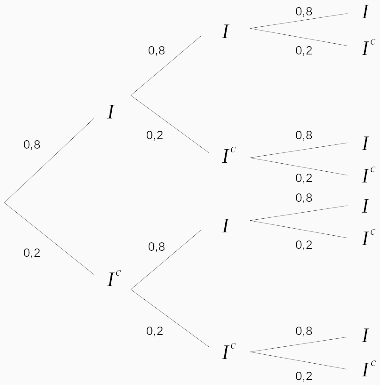
- Observe que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são n variáveis de Bernoulli independentes com parâmetro p, então $X = \sum_{j=1}^{n} X_i$ segue um modelo binomial com parâmetros n e p.
- Média:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) \\ &= E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p = np;\end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= Var(X) \\ &= Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} Var(X_j) = \sum_{j=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).\end{aligned}$$

Sabe-se que a eficácia de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é selecionado para vacinação e a imunização de cada um deles pode ser modelada como um ensaio de Bernoulli independente. Em geral, para os três indivíduos:



Denotando por X o número de indivíduos imunizados, obtemos:

Evento	prob.	X
III	$0,8^3$	3
III^c	$0,8^2 \times 0,2$	2
II^cI	$0,8^2 \times 0,2$	2
II^cI^c	$0,8 \times 0,2^2$	1
I^cII	$0,8^2 \times 0,2$	2
I^cII^c	$0,8 \times 0,2^2$	1
I^cI^cI	$0,8 \times 0,2^2$	1
$I^cI^cI^c$	$0,2^3$	0

- Agrupando os valores:

X	0	1	2	3
$f(X)$	$0,2^3$	$3 \times 0,8 \times 0,2^2$	$3 \times 0,8^2 \times 0,2$	$0,8^3$

- Agrupando os valores:

X	0	1	2	3
$f(X)$	$0,2^3$	$3 \times 0,8 \times 0,2^2$	$3 \times 0,8^2 \times 0,2$	$0,8^3$

- Ou ainda,

$$f(k) = P(X = k) = \binom{3}{k} \times 0,8^k \times 0,2^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

conforme esperávamos.

- Uma v.a. geométrica é definida de acordo com qualquer uma das situações abaixo:

- Uma v.a. geométrica é definida de acordo com qualquer uma das situações abaixo:
  i. o número X de ensaios de Bernoulli necessários para a obtenção de um sucesso. Neste caso, X pode assumir os valores $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e

$$f_X(k) = P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p.$$

- Uma v.a. geométrica é definida de acordo com qualquer uma das situações abaixo:
  i. o número X de ensaios de Bernoulli necessários para a obtenção de um sucesso. Neste caso, X pode assumir os valores $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ e

$$f_X(k) = P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p.$$

  ii. o número $Y = X - 1$ de falhas verificadas antes do primeiro sucesso. A variável Y pode então assumir os valores $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ e

$$f_Y(k) = P(Y = k) = (1 - p)^{k} \cdot p.$$

- Em ambos os casos, a variável geométrica é completamente especificada por um único parâmetro: p – a probabilidade de sucesso em cada ensaio independente de Bernoulli.

- Em ambos os casos o modelo está bem definido:

  i.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_X(k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

  ii.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_Y(k) = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k} = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_X(k) = 1.$$

Média e variância (caso 1)

- Média:

$$\mu_X = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}$$

- Média:

$$\begin{aligned}\mu_X &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

Média e variância (caso 1)

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right]
\end{aligned}
$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k}\right] \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\frac{1-p}{1-(1-p)}\right]
\end{aligned}
$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k}\right] \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\frac{1-p}{1-(1-p)}\right] \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[1-\frac{1}{p}\right]
\end{aligned}
$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right] \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[-\frac{1-p}{1-(1-p)}\right] \\
&= p \cdot \frac{d}{dp}\left[1-\frac{1}{p}\right] \\
&= p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1}$$

- Variância:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right] - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right] - \frac{1}{p} \\ &= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1-p}{1-(1-p)}\right] - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1-p}{1-(1-p)}\right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1}{p} - 1\right] - \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k \right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{1-p}{1-(1-p)} \right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{1}{p} - 1 \right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1-p}{1-(1-p)}\right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1}{p} - 1\right] - \frac{1}{p} \\
&= p \cdot \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
$$

Para o segundo caso, podemos explorar o fato de que Y é obtida como uma função direta de X.

- Média:
$$\mu_Y = E(X-1) = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p};$$
- Variância:
$$\sigma_Y^2 = Var(X-1) = Var(X) + 0 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Seja X uma v.a. geométrica com parâmetro $p = 1/2$. Determine:

a. $P(X \leq 2)$;
b. $P(3 < X \leq 5)$;
c. $P(X > 1)$;
d. $P(X > s + t | X > t)$.

a. $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 = p + p(1-p) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

Exemplo 7 (continuação)

a. $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 = p + p(1-p) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

b. $P(3 < X \leq 5)$

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= p(1-p)^4 + p(1-p)^5 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{32}; \end{aligned}$$

a. $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 = p + p(1-p) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

b. $P(3 < X \leq 5)$

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= p(1-p)^4 + p(1-p)^5 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{32}; \end{aligned}$$

c. $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - p = \frac{1}{2};$$

d. $P(X > s + t | X > t)$

$$P(X > s + t | X > t) = \frac{P([X > s + t] \cap [X > t])}{P(X > t)}$$
$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}.$$

d. $P(X > s + t | X > t)$

$$P(X > s + t | X > t) = \frac{P([X > s + t] \cap [X > t])}{P(X > t)}$$
$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}.$$

Observe que, para qualqure k, vale:

$$P(X > k) = p \sum_{j=k+1}^{+\infty} (1 - p)^{j-1} = p \cdot \frac{(1 - p)^k}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^k.$$

d. $P(X > s + t | X > t)$

$$P(X > s + t | X > t) = \frac{P([X > s + t] \cap [X > t])}{P(X > t)}$$
$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}.$$

Observe que, para qualqure k, vale:

$$P(X > k) = p \sum_{j=k+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1} = p \cdot \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

Logo:

$$P(X > s + t | X > t) = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^t} = (1-p)^s = P(X > s) = \frac{1}{2^s}.$$

d. $P(X > s + t|X > t)$

$$P(X > s + t|X > t) = \frac{P([X > s + t] \cap [X > t])}{P(X > t)}$$
$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}.$$

Observe que, para qualqure k, vale:

$$P(X > k) = p\sum_{j=k+1}^{+\infty}(1-p)^{j-1} = p \cdot \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

Logo:

$$P(X > s + t|X > t) = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^t} = (1-p)^s = P(X > s) = \frac{1}{2^s}.$$

- Esta propriedade é popularmente conhecida como ”falta de memória”.

Modelo de Poisson

- O modelo de Poisson é amplamente utilizado para a contagem de elementos ao longo de um domínio contínuo: número de ligações por minuto, número de casos de dengue por unidade de área, etc.
- Surge quando o número de ensaios em um modelo binomial tende ao infinito (sendo a probabilidade de sucesso mantida constante).
- X é uma v.a. aleatória que pode assumir os valores $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
- Função de probabilidade:

$$\begin{aligned} f(k) &= P(X = k) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

- A função de probabilidade pode ser simplificado se trocarmos o conceito de probabilidade de sucesso pela ideia de taxa média de sucesso.
- Seja $\lambda = np$ o número médio de sucessos ao longo de n ensaios de Bernoulli. Neste caso, $p = \lambda/n$ e:

$$f(k) = \lim_{n \to +\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

- A função de probabilidade pode ser simplificado se trocarmos o conceito de probabilidade de sucesso pela ideia de taxa média de sucesso.
- Seja $\lambda = np$ o número médio de sucessos ao longo de n ensaios de Bernoulli. Neste caso, $p = \lambda/n$ e:

$$\begin{aligned} f(k) &= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n \cdot k!} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

- A função de probabilidade pode ser simplificado se trocarmos o conceito de probabilidade de sucesso pela ideia de taxa média de sucesso.
- Seja $\lambda = np$ o número médio de sucessos ao longo de n ensaios de Bernoulli. Neste caso, $p = \lambda/n$ e:

$$\begin{aligned} f(k) &= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n\cdot k!}\cdot\lambda^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= 1\cdot\frac{1}{k!}\cdot\lambda^k\cdot e^{-\lambda}\cdot 1 = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

- Desta forma, o modelo de Poisson é completamente especificado pelo parâmetro λ (a taxa média de sucessos esperados).

- O modelo está bem definido pois

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{expansão de Taylor}} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \left. e^x \right|_{x=\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.
\end{aligned}
$$

- Média:

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- Média:

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

- Média:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

- Variância:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \cdot \lambda + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

- Variância:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1+1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \cdot \lambda + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda \\
\sigma^2 &= E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}
$$

Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radiotivo. Se o laboratório estima que 300 partículas são emitidas por hora, determine a probabilidade de observarmos a emissão de uma ou mais partículas por minuto.

Exemplo 8

Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radiotivo. Se o laboratório estima que 300 partículas são emitidas por hora, determine a probabilidade de observarmos a emissão de uma ou mais partículas por minuto.

Solução: seja N o número de partículas emitidas por minuto. Neste caso, N segue o modelo de Poisson com taxa

$$\lambda = \frac{300}{60} = 5.$$

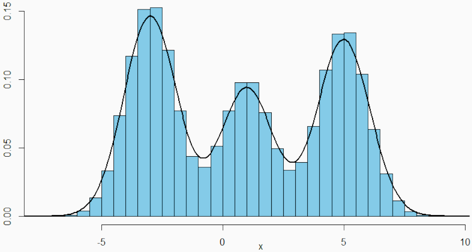
Logo:

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N < 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} = 1 - e^{-5}.$$

VARIÁVEIS CONTÍNUAS

- V.a.'s contínuas assumem valores em conjuntos não-enumeráveis, isto é, ao longo de subintervalos da reta.
- As funções de probabilidade (caso discreto) dão lugar a funções denominadas densidades de probabilidade, as quais satisfazem
  1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x$;
  2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$;
  3. $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

- Funções densidade de probabilidade podem ser interpretadas como a concentração infinitesimal de massa probabilística associada a cada valor de X.
- Tal função pode ser aproximada por histogramas de frequência caso uma amostra de X seja conhecida:



- A freq. relativa (área de cada retângulo) estima a probabilidade da v.a. assumir valores no intervalo especificado.

- Para qualquer v.a. contínua X, vale a relação

$$P(X = x) = 0, \quad \forall x,$$

uma vez que a área sobre um único ponto é zero.

- Neste caso, valem as seguintes relações:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

- Probabilidades pontuais podem ser aproximadas com o auxílio de intervalos:

$$P(X = x) \approx P(x - \epsilon \leq X \leq x + \epsilon),$$

para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

- As funções de distribuição acumulada no caso contínuo apresentam as mesmas propriedades básicas do caso discreto:
  1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;
  2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
  3. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.
- Contudo, sua definição extrapola a ideia de somatório através do conceito de integrais:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

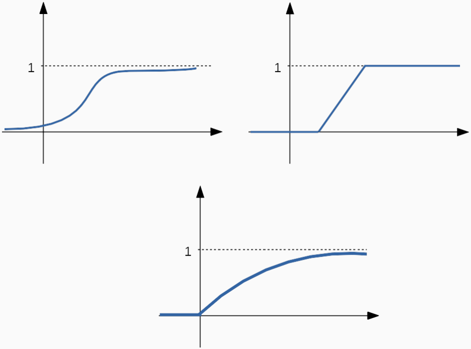
- As funções de distribuição acumulada no caso contínuo apresentam as mesmas propriedades básicas do caso discreto:
  1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;
  2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
  3. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.
- Contudo, sua definição extrapola a ideia de somatório através do conceito de integrais:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

- Relação entre distribuição acumulada e densidade:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \iff \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(u)du = f(x).$$

- Diferentemente do caso discreto, a distribuição acumulada de uma v.a. contínua é uma função contínua.



Determinar a densidade da v.a. cuja distribuição acumuloada é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,01x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 9

Determinar a densidade da v.a. cuja distribuição acumuloada é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,01x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Solução: Notemos inicialmente que F é contínua:

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 - e^{-0,01 \times 0} = 0; \\ \lim_{x \to 0^+} F(x) &= 1 - \lim_{x \to 0^+} e^{-0,01x} = 0; \\ \lim_{x \to 0^-} F(x) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, podemos derivar F de modo a obter:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,01e^{-0,01x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Média e variância

Média e variância são definidas de forma análoga ao caso discreto:

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
\sigma^2 &= Var(X) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - E^2(X).
\end{aligned}
$$

- Assim como no caso discreto, alguns modelos de v.a.'s contínuas aparecem frequentemente em aplicações práticas.
- A especificação de cada um destes modelos passa basicamente pela especificação de sua função densidade de probabilidade.
- Principais modelos: uniforme, exponencial, normal, t e χ^2.

- Uma v.a. aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b,$$

  é denominada uma v.a. uniformemente distribuída em (a, b).
- Notação:

$$X \sim U(a, b).$$

- Trata-se de uma extensão natural do modelo uniforme para o caso contínuo.

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(x) \\
&= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{b-a}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};
\end{aligned}
$$

- Média:

$$\begin{aligned}\mu &= E(x)\\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{b-a}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};\end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}\\ \sigma^2 &= Var(X)\\ &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{4(b^3-a^3) - 3(b-a)(b+a)^2}{12(b-a)}\\ &= \frac{4(b-a)(b^2+ba+a^2) - 3(b-a)(b^2+2ab+a^2}{12(b-a)}\\ &= \frac{b^2-ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

- Uma v.a. X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

é denominada uma v.a. exponencialmente distribuída de parâmetro α.

- Notação:

$$X \sim Exp(\alpha).$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
\mu &= E(X) \\
&= \int_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = -xe^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-e^{-\alpha x}\right) dx \\
&= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha};
\end{aligned}
$$

- Média:

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) \\
&= \int_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = -xe^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-e^{-\alpha x}\right) dx \\
&= -\left.\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha};
\end{aligned}$$

- Variância:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = -x^2 e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} \left(-xe^{-\alpha x}\right) dx \\
&= \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2}; \\
\sigma^2 &= Var(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

- Uma v.a. exponencial pode ser entendida como um modelo para o ”espaço” entre a ocorrência de dois sucessos ao longo de um esperimento de Poisson.
- Exemplo: seja X o número de falhas apontado por um processador ao longo de 1h. Dado que uma falha acabou de ocorrer, determine o tempo médio de ocorrência de uma nova falha.

- Sabemos que X segue o modelo Poisson com alguma taxa λ.

- Sabemos que X segue o modelo Poisson com alguma taxa λ.
- Denotando por Y o tempo decorrido até a próxima falha, temos que

$$
\begin{aligned}
P(Y > t) &= P(X = 0 \text{ nas próximas } t \text{ horas.}) \\
&= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{\lambda t}.
\end{aligned}
$$

- Sabemos que X segue o modelo Poisson com alguma taxa λ.
- Denotando por Y o tempo decorrido até a próxima falha, temos que

$$\begin{aligned} P(Y > t) &= P(X = 0 \text{ nas próximas } t \text{ horas.}) \\ &= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

- Logo,

$$P(Y \leq t) = 1 - P(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t} \Longrightarrow Y \sim Exp(\lambda)$$

e,

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}.$$

- Ou seja, em média, um nova falha ocorrerá em $1/\lambda$ horas, em que λ é a taxa média de ocorrência de falhas ao longo de 1h.

- V.a.'s exponenciais possuem uma propriedade de perda de memória análoga à verificada para as v.a.'s geométricas no contexto discreto.

- V.a.'s exponenciais possuem uma propriedade de perda de memória análoga à verificada para as v.a.'s geométricas no contexto discreto.

$$
\begin{aligned}
P(X > t_1 + t_2 | X > t_2) &= \frac{P([X > t_1 + t_2] \cap [X > t_2])}{P(X > t_2)} \\
&= \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_2)} = \frac{e^{\lambda(t_1+t_2)}}{e^{\lambda t_2}} \\
&= e^{\lambda t_1} = P(X > t_1).
\end{aligned}
$$

- V.a.'s exponenciais possuem uma propriedade de perda de memória análoga à verificada para as v.a.'s geométricas no contexto discreto.

$$\begin{aligned} P(X > t_1 + t_2 | X > t_2) &= \frac{P([X > t_1 + t_2] \cap [X > t_2])}{P(X > t_2)} \\ &= \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_2)} = \frac{e^{\lambda(t_1+t_2)}}{e^{\lambda t_2}} \\ &= e^{\lambda t_1} = P(X > t_1). \end{aligned}$$

- O modelo exponencial é o único modelo contínuo associado a tal propriedade.

- Uma v.a. X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

  é dita normal ou Gaussiana.
- Dois parâmetros são necessários para a especificação completa de uma variável normal: μ e σ^2.
- Notação:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \mu \cdot 1 = \mu;
\end{aligned}
$$

- Média:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \mu \cdot 1 = \mu;
\end{aligned}
$$

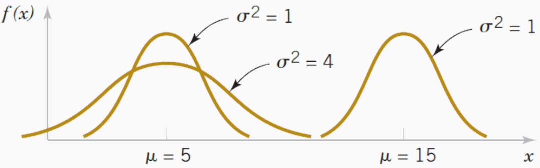
- Variância:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -\sigma^2 (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

- A função densidade de probabilidade Gaussiana é parametrizada pela média e pela variância da v.a.
- Além disso, tal densidade satisfaz:
  1. $f(x)$ é simétrica com respeito a μ;
  2. $f(x) \to 0$ à medida que $x \to \pm\infty$;
  3. o valor máximo de f se dá para $x = \mu$.

Propriedades

- A função densidade de probabilidade Gaussiana é parametrizada pela média e pela variância da v.a.
- Além disso, tal densidade satisfaz:
  1. $f(x)$ é simétrica com respeito a μ;
  2. $f(x) \to 0$ à medida que $x \to \pm\infty$;
  3. o valor máximo de f se dá para $x = \mu$.



- Uma v.a. Gaussiana com
$$\mu = 0 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = 1$$
é denominada Normal padrão.
- Função densidade de probabilidade:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$
- Variáveis normais padronizadas são usualmente denotadas por Z e suas respectivas distribuições acumuladas por Φ:
$$\Phi(z) = P(Z \leq z).$$
- Modelo geral pode ser obtido a partir do padronizado através da relação:
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

- Uma vez que
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$
não possui primitiva (anti-derivada) conhecida, temos que Φ não possui forma analítica fechada.
- Probabilidades podem ser calculadas numericamente.
- Para simplificar, os valores obtidos numericamente são armazenados em uma tabela, popularmente denominada tabela Z.

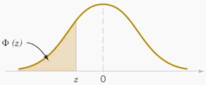
$$z \geq 0$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201

$$z \leq 0$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$



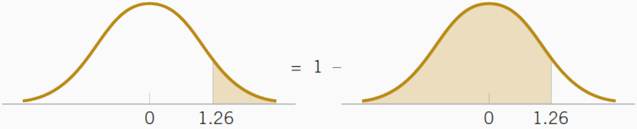
z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.03	−0.01	−0.00
−2.5	0.004799	0.004940	0.005085	0.005234	0.005386	0.005543	0.005703	0.005868	0.006037	0.006210
−2.4	0.006387	0.006569	0.006756	0.006947	0.007143	0.007344	0.007549	0.007760	0.007976	0.008198
−2.3	0.008424	0.008656	0.008894	0.009137	0.009387	0.009642	0.009903	0.010170	0.010444	0.010724
−2.2	0.011011	0.011304	0.011604	0.011911	0.012224	0.012545	0.012874	0.013209	0.013553	0.013903
−2.1	0.014262	0.014629	0.015003	0.015386	0.015778	0.016177	0.016586	0.017003	0.017429	0.017864
−2.0	0.018309	0.018763	0.019226	0.019699	0.020182	0.020675	0.021178	0.021692	0.022216	0.022750
−1.9	0.023295	0.023852	0.024419	0.024998	0.025588	0.026190	0.026803	0.027429	0.028067	0.028717
−1.8	0.029379	0.030054	0.030742	0.031443	0.032157	0.032884	0.033625	0.034379	0.035148	0.035930
−1.7	0.036727	0.037538	0.038364	0.039204	0.040059	0.040929	0.041815	0.042716	0.043633	0.044565
−1.6	0.045514	0.046479	0.047460	0.048457	0.049471	0.050503	0.051551	0.052616	0.053699	0.054799
−1.5	0.055917	0.057053	0.058208	0.059380	0.060571	0.061780	0.063008	0.064256	0.065522	0.066807
−1.4	0.068112	0.069437	0.070781	0.072145	0.073529	0.074934	0.076359	0.077804	0.079270	0.080757
−1.3	0.082264	0.083793	0.085343	0.086915	0.088508	0.090123	0.091759	0.093418	0.095098	0.096801
−1.2	0.098525	0.100273	0.102042	0.103835	0.105650	0.107488	0.109349	0.111233	0.113140	0.115070
−1.1	0.117023	0.119000	0.121001	0.123024	0.125072	0.127143	0.129238	0.131357	0.133500	0.135666
−1.0	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655
−0.9	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176185	0.178786	0.181411	0.184060
−0.8	0.186733	0.189430	0.192150	0.194894	0.197662	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855
−0.7	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964
−0.6	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253
−0.5	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538
−0.4	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578
−0.3	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378281	0.382089
−0.2	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740
−0.1	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172
0.0	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488033	0.492022	0.496011	0.500000

Seja $Z \sim N(0,1)$. A partir da tabela Z, determine:

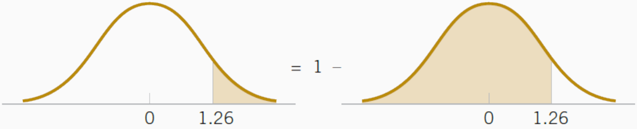
a. $P(Z > 1,26)$;
b. $P(Z > -1,37)$;
c. $P(-1,25 < Z < 0,37)$;
d. $z \in \mathbb{R}$ tal que $P(Z > z) = 0,05$.

Exemplo 10 (continuação)

a. $P(Z > 1,26) = 1 - P(Z \leq 1,26) = 1 - \Phi(1,26) = 1 - 0,996165 = 0,103835$



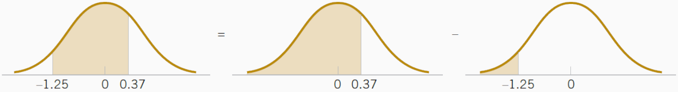
a. $P(Z > 1,26) = 1 - P(Z \leq 1,26) = 1 - \Phi(1,26) = 1 - 0,996165 = 0,103835$



b. $P(Z > -1,37) = 1 - P(Z \leq -1,37) = 1 - \Phi(-1,37)$.
Por simetria,

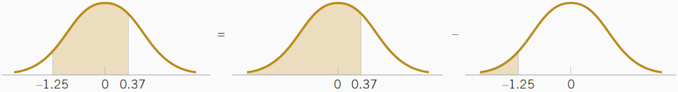
$$P(Z > -1,37) = 1 - \Phi(-1,37) = \Phi(1,37).$$

c. $P(-1,25 < Z < 0,37) = P(Z < 0,37) - P(Z < -1,25)$
$$= \Phi(0,37) - \Phi(-1,25) = 0,53866$$

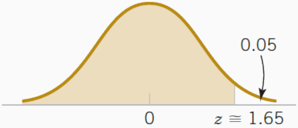


Exemplo 10 (continuação)

c. $P(-1,25 < Z < 0,37) = P(Z < 0,37) - P(Z < -1,25)$
$$= \Phi(0,37) - \Phi(-1,25) = 0,53866$$



d. Devemos buscar na tabela Z um número z tal que $P(Z < z) \approx 0,95$, já que neste caso $P(Z > z) = 0,05$. Consultando a tabela, obtemos $z = 1,65$.



- A tabela Z também pode ser utilizada para o cálculo de probabilidades associadas a uma v.a. Gaussiana mais geral.
- Da fórmula de conversão, temos:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

- Logo

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z),$$

onde $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$.

Exemplo 11

Suponha que $X \sim N(10, 4)$. Determine $P(9 < X < 11)$.

Suponha que $X \sim N(10, 4)$. Determine $P(9 < X < 11)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
P(9 < X < 11) &= P\left(\frac{9-10}{2} < \underbrace{\frac{X-10}{2}}_{Z} < \frac{11-10}{2}\right) \\
&= P(-0,5 < Z < 0,5) \\
&= \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) \\
&= 0,69146 - 0,30854 = 0,38292.
\end{aligned}
$$

TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

- Sejam
$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$
v.a.'s aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Para n suficientemente grande, a distribuição da variável
$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$
é aproximadamente normal padrão.
- Este resultado assintótico nos permite tratar diversos problemas a partir de aproximações normais.

- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n,$$

onde $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas segundo o modelo de Bernoulli.

- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n,$$

onde $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas segundo o modelo de Bernoulli.

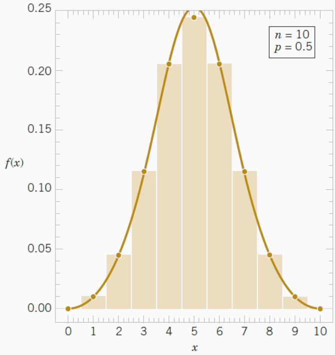
- Logo,

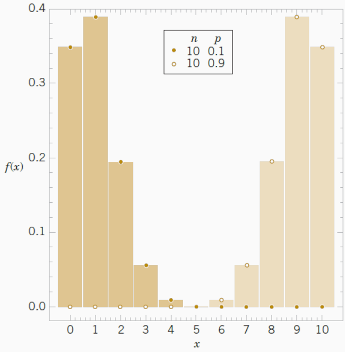
$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_1 - p}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \longrightarrow N(0,1)$$

- Isto é, X pode ser aproximada por uma v.a. Normal padrão para n grande!
- Em geral a aproximação é boa quando

$$np > 5 \quad \text{e} \quad n(1-p) >= 5.$$

Aproximação do modelo binomial para $np = .5$ (histograma à esquerda) e $np < .5$ (histograma à direita).





- **Obs.:** Uma correção é usualmente aplicada à aproximação anterior para corrigir o fato de que estamos substituindo uma v.a. discreta por uma contínua.
- Em geral, consideramos:

$$P(X \leq x) = P(X \leq x + 0,5) = P\left(Z \leq \frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

e

$$P(X \geq x) = P(X \geq x - 0,5) = P\left(Z \geq \frac{x - 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Um resultado similar pode ser obtido para v.a.'s de Poisson.
- Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então a variável

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

  é aproximadamente distribuída segundo o modelo Normal padrão para $\lambda > 5$.
- Para verificar este resultado basta verificarmos que uma v.a. de Poisson pode ser reescrita como a soma de outras variáveis de Poisson independentes (exercício).