Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 5: Integração numérica

Capítulo 5: Integração numérica

Integração numérica

- Seja uma função $f(x)$ integrável no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x).$$

- Uso de métodos numéricos para avaliar a integral de $f(x)$:
  - forma analítica de $F(x)$ de difícil obtenção ou
  - conhecidos somente valores discretos de $f(x)$.
- Aproximar a função $f(x)$ por um polinômio interpolador.
- Determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo $[a, b]$.
- Integração numérica:
  - fórmulas de Newton-Cotes e
  - quadratura de Gauss-Legendre.
- Integrais simples e duplas.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Função $f(x)$ aproximada por polinômio interpolador.
- Por exemplo, um polinômio de Gregory-Newton

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j), \text{ onde } u_x = \frac{x - x_0}{h}. \tag{1}$$

Regra do trapézio

- Para (1) com $n = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)\,dx.$$

- Mudança de variável de $x \to u_x$ e simplificando a notação de $u_x \to u$

$$u = \frac{x - x_0}{h} \longrightarrow x = hu + x_0 \rightsquigarrow dx = hdu,$$

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_1 \longrightarrow u = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{h}{h} \rightsquigarrow u = 1.$$

Regra do trapézio cont.

- Usando a notação $y_i = f(x_i)$

$$I_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)\, dx = \int_0^1 (y_0 + u\Delta y_0) h\, du.$$

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 1 em relação a u

$$I_1 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0 \right]\Bigg|_0^1 = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) = \frac{h}{2}(2y_0 + y_1 - y_0),$$

$$\boxed{I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)}. \qquad (2)$$

Exemplo da regra do trapézio

Exemplo 1 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra do trapézio.

- Polinômio de grau 1 passa pelos pontos com abscissas

$$a = x_0 = 1 \ \text{ e } \ b = x_1 = 7,$$

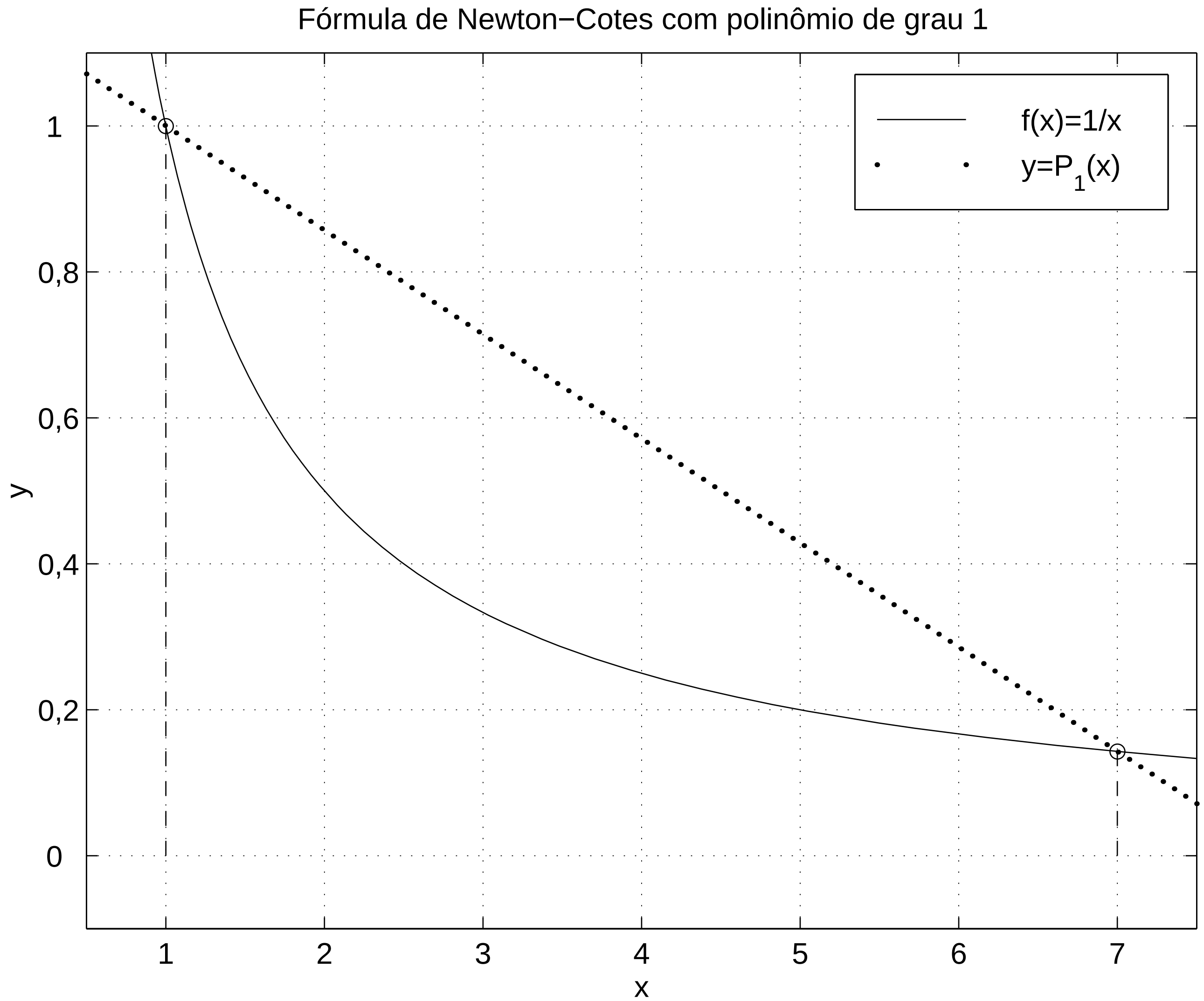
$$h = 7 - 1 = 6,$$

$$I_1 = \frac{6}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{7}\right) \rightsquigarrow I_1 = 3{,}4286.$$

Integração numérica pela regra do trapézio

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_1(x)$ de grau 1.

$\Vert\Lleftarrow$



Regra do 1/3 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_2(x)$ de grau 2

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)\,dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \leadsto u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_2 \longrightarrow u = \frac{x_2 - x_0}{h} = \frac{2h}{h} \leadsto u = 2.$$

- Equação de integração

$$I_2 = \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)\,dx = \int_0^2 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2}\Delta^2 y_0 \right) h\,du.$$

Regra do 1/3 de Simpson cont.

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 2 em relação a u

$$I_2 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right]\Bigg|_0^2,$$

$$I_2 = h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right],$$

$$\boxed{I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}. \qquad (3)$$

Exemplo da regra do 1/3 de Simpson

Exemplo 2 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x}\, dx$, usando a regra do 1/3 de Simpson (3).

- Para construir um polinômio de grau 2 são necessários 3 pontos.
- Polinômio de grau 2 passa pelos pontos com abscissas

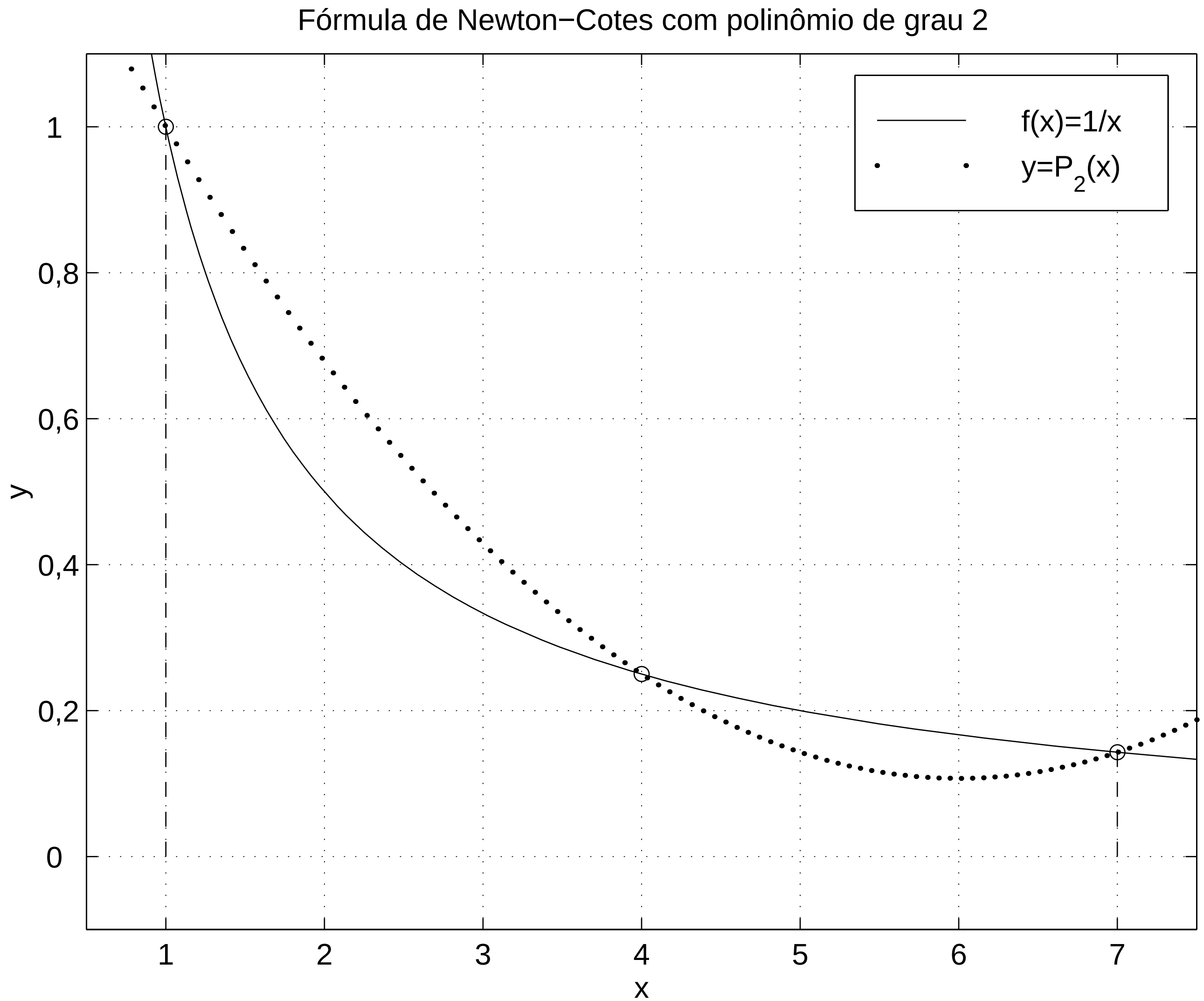
$$a = x_0 = 1,\ x_1 = 4 \ \text{ e } b = x_2 = 7,$$

$$h = \frac{7-1}{2} = 3,$$

$$I_2 = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{1} + 4\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) \leadsto I_2 = 2{,}1429.$$

Integração numérica pela regra do 1/3 de Simpson

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_2(x)$ de grau 2.



Regra dos 3/8 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_3(x)$ de grau 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x)\,dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \leadsto u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_3 \longrightarrow u = \frac{x_3 - x_0}{h} = \frac{3h}{h} \leadsto u = 3.$$

- Equação de integração

$$I_3 = \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x)\,dx,$$

$$I_3 = \int_0^3 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{u^3 - 3u^2 + 2u}{6}\Delta^3 y_0 \right) h\,du.$$

Regra dos 3/8 de Simpson cont.

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 3 em relação a u

$$I_3 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{u^4}{24} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{6}\right)\Delta^3 y_0\right]\Bigg|_0^3,$$

$$I_3 = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right],$$

$$\boxed{I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}. \tag{4}$$

Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 3 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson (4).

- São necessários 4 pontos para construir um polinômio de grau 3.
- Abscissas

$$a = x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5 \text{ e } b = x_3 = 7,$$

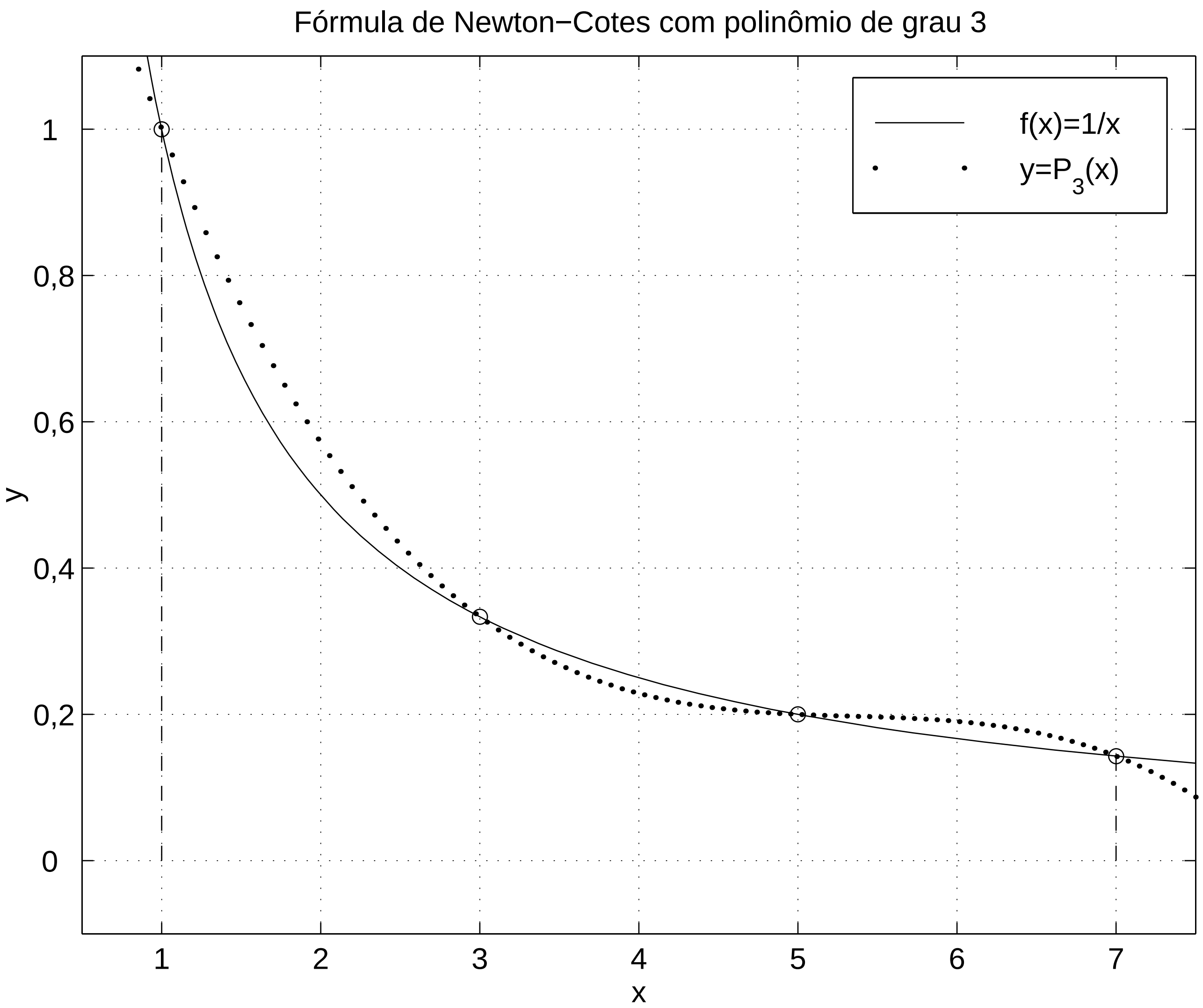
$$h = \frac{7-1}{3} = 2,$$

$$I_3 = \frac{3 \times 2}{8}\left(\frac{1}{1} + 3\frac{1}{3} + 3\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \rightsquigarrow I_3 = 2{,}0571.$$

Integração numérica pela regra dos 3/8 de Simpson

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_3(x)$ de grau 3.

|⇚



Comparação das fórmulas de Newton-Cotes

- Considerando

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx = \log_e(x)\Big|_1^7 = \log_e(7) \approx 1{,}9459.$$

- Resultado da integração melhora à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta

n	I_n	$\lvert I_n - \log_e(7)\rvert$
1	3,4286	1,4827
2	2,1429	0,1970
3	2,0571	0,1112

Fórmula geral de Newton-Cotes

- Comparando (2), (3) e (4)

$$\boxed{I_n = \frac{nh}{d_n}\sum_{i=0}^{n} c_i y_i}, \qquad (5)$$

- c_i: coeficientes de Cotes.

n	d_n	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
1	2	1	1							
2	6	1	4	1						
3	8	1	3	3	1					
4	90	7	32	12	32	7				
5	288	19	75	50	50	75	19			
6	840	41	216	27	272	27	216	41		
7	17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	
8	28350	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989

$\Vert\!\Lleftarrow$

- Dificilmente é usado polinômio de grau superior a 3.
- Resultado melhorado pela subdivisão do intervalo de integração e aplicação de uma fórmula de Newton-Cotes em cada subintervalo.

Regra do trapézio composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 1

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 2 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\,dx \approx I_1, \text{ com}$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{m-1} + y_m),$$

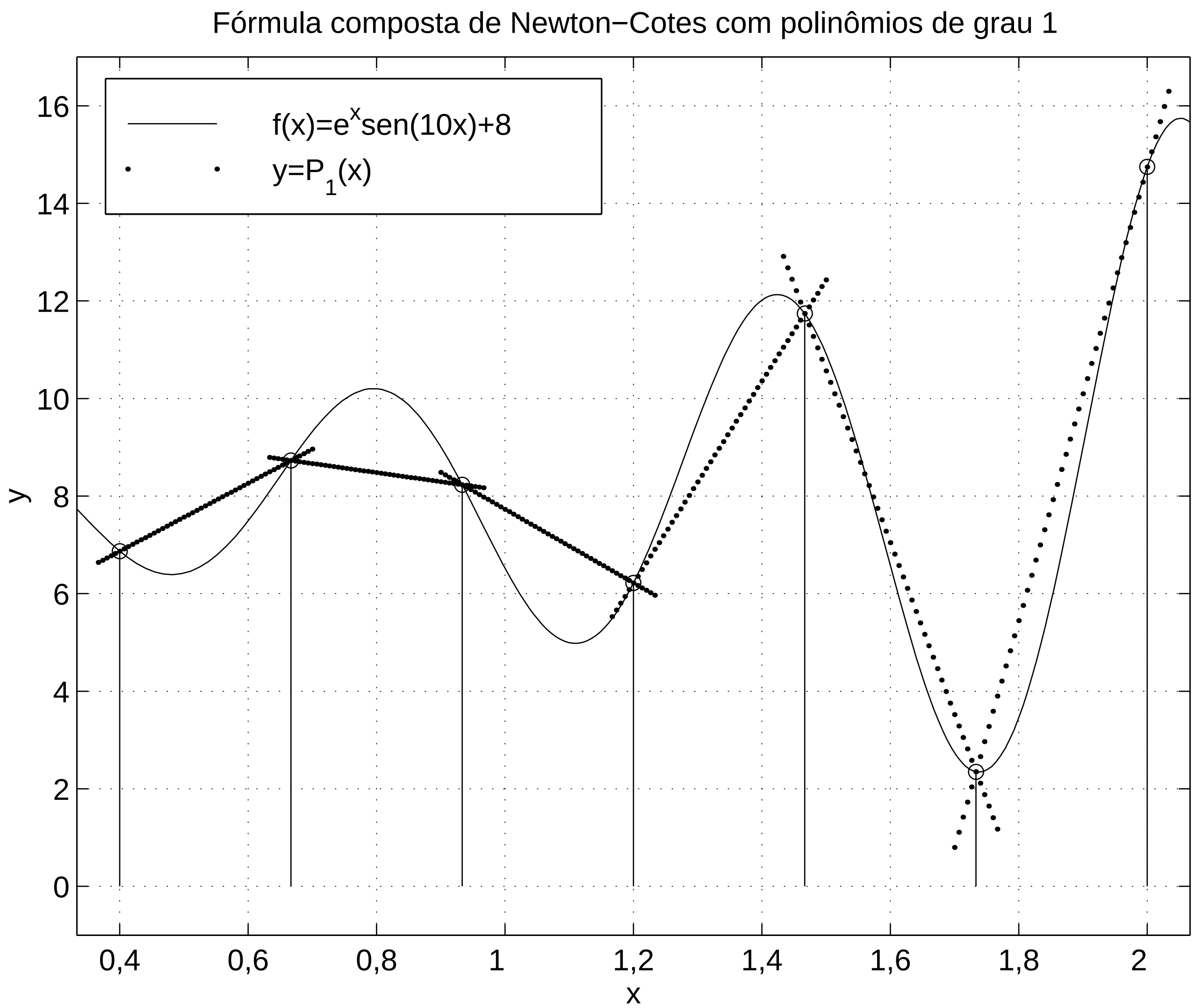
$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{m-1} + y_m),$$

$$\boxed{I_1 = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i}. \qquad (6)$$

- Qualquer valor de número de subintervalos m.

Representação geométrica da integração numérica pela regra do trapézio composta

- $f(x) = e^x \operatorname{sen}(10x) + 8$ com 6 polinômios interpoladores $P_1(x)$ de grau 1.



Exemplo da regra do trapézio composta

Exemplo 4 Calcular $\int_1^3 x^3 \log_e(x)\, dx$ pela regra do trapézio composta (6) com $m = 4$ subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-1}{4} \to h = 0{,}5.$$

- Dispositivo prático com quatro colunas: $i = 0, 1, \ldots, m$, $x_i = a, a+h, a+2h, \ldots, b$, $y_i = f(x_i)$ e c_i sendo os coeficientes de Cotes

i	x_i	y_i	c_i
0	1,0	0,0000	1
1	1,5	1,3684	2
2	2,0	5,5452	2
3	2,5	14,3170	2
4	3,0	29,6625	1

,

$$I_1 = \frac{0{,}5}{2}(0{,}0000 + 2(1{,}3684 + 5{,}5452 + 14{,}3170) + 29{,}6625) \rightsquigarrow I_1 = 18{,}0309.$$

Exemplo da regra do trapézio composta

Exemplo 5 Calcular $\int_0^2 \frac{e^{-\cos(x)}}{\sqrt{2x+4}}\,dx$ pela regra do trapézio composta (6) com $m = 5$ subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{5} \to h = 0{,}4$$

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,1839	1
1	0,4	0,1817	2
2	0,8	0,2105	2
3	1,2	0,2751	2
4	1,6	0,3837	2
5	2,0	0,5360	1

,

$$I_1 = \frac{0{,}4}{2}(0{,}1839 + 2(0{,}1817+0{,}2105+0{,}2751+0{,}3837) + 0{,}5360) \leadsto I_1 = 0{,}5644.$$

Regra do 1/3 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 2

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 3 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\, dx \approx I_2, \text{ com}$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

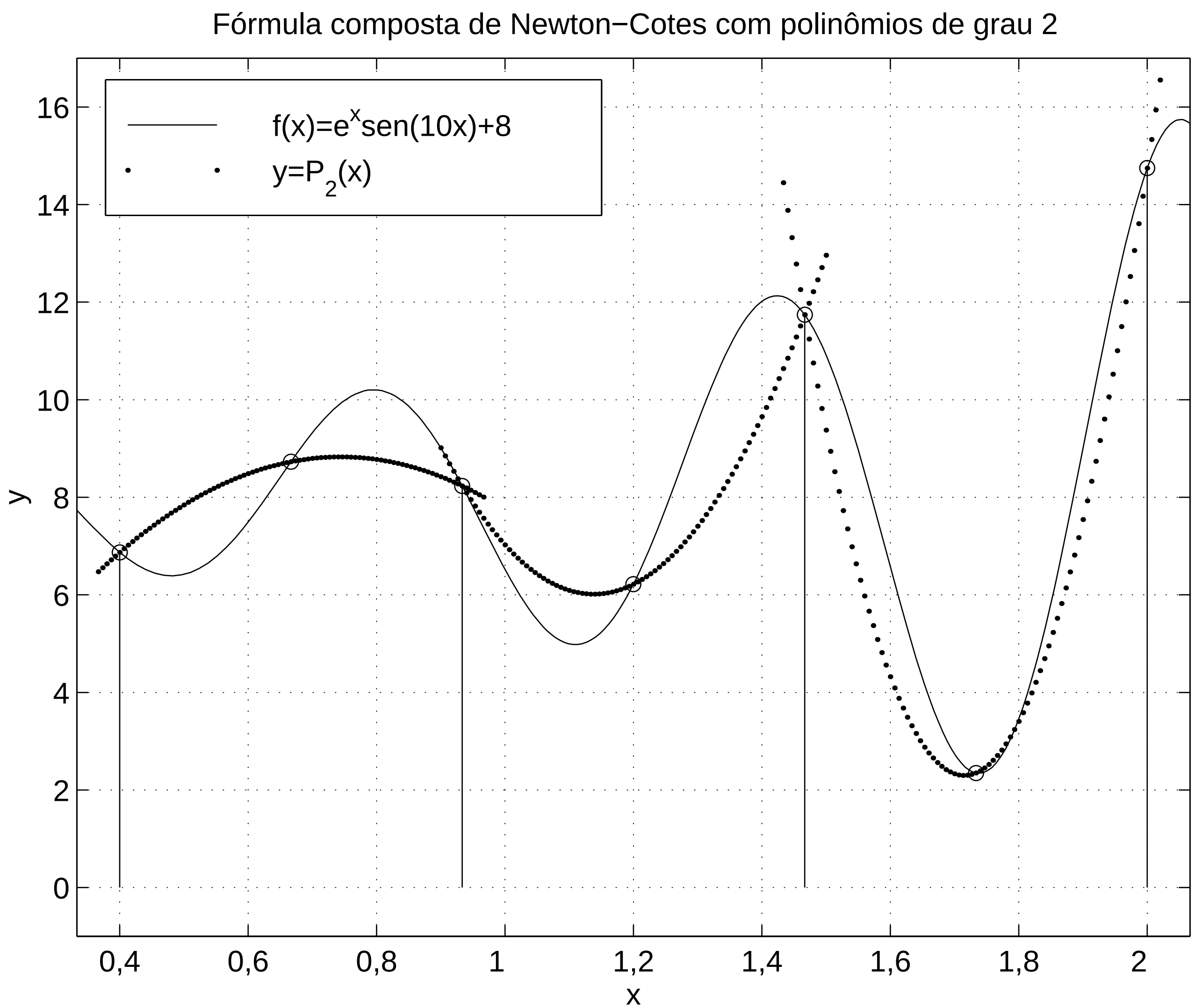
$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

$$\boxed{I_2 = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i}. \tag{7}$$

- Número de subintervalos m múltiplo de 2, grau do polinômio interpolador.

Representação geométrica da integração numérica pela regra do 1/3 de Simpson composta

- $f(x) = e^x \operatorname{sen}(10x) + 8$ com 3 polinômios interpoladores $P_2(x)$ de grau 2.



Exemplo da regra do 1/3 de Simpson composta

Exemplo 6 Verificar que $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ usando a regra do 1/3 de Simpson composta (7) com passo de integração $h = 0{,}25$.

$$m = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0{,}25} \to m = 4 \quad \text{(múltiplo de 2)}.$$

i	x_i	y_i	c_i
0	0,00	1,0000	1
1	0,25	0,9412	4
2	0,50	0,8000	2
3	0,75	0,6400	4
4	1,00	0,5000	1

$$I_2 = \frac{0{,}25}{3}(1{,}0000 + 4(0{,}9412 + 0{,}6400) + 2(0{,}8000) + 0{,}5000) \rightsquigarrow I_2 = 0{,}7854 \text{ e}$$

$$4 \times I_2 = 3{,}1416 \approx \pi.$$

Exemplo da regra do 1/3 de Simpson composta

Exemplo 7 Calcular $\displaystyle\int_0^3 \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$ usando a regra do 1/3 de Simpson composta (7) com $m = 6$ (múltiplo de 2) subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-0}{6} \to h = 0{,}5.$$

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,0000	1
1	0,5	0,3398	4
2	1,0	0,8210	2
3	1,5	1,8830	4
4	2,0	4,3679	2
5	2,5	10,3065	4
6	3,0	24,6997	1

$$I_2 = \frac{0{,}5}{3}(0{,}0000+4(0{,}3398+1{,}8830+10{,}3065)+2(0{,}8210+4{,}3679)+24{,}6997) \leadsto$$

$$I_2 = 14{,}1991.$$

Regra dos 3/8 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 3

$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m (múltiplo de 3) subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 4 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\,dx \approx I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) +$$
$$\frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \cdots + \frac{3h}{8}(y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m),$$

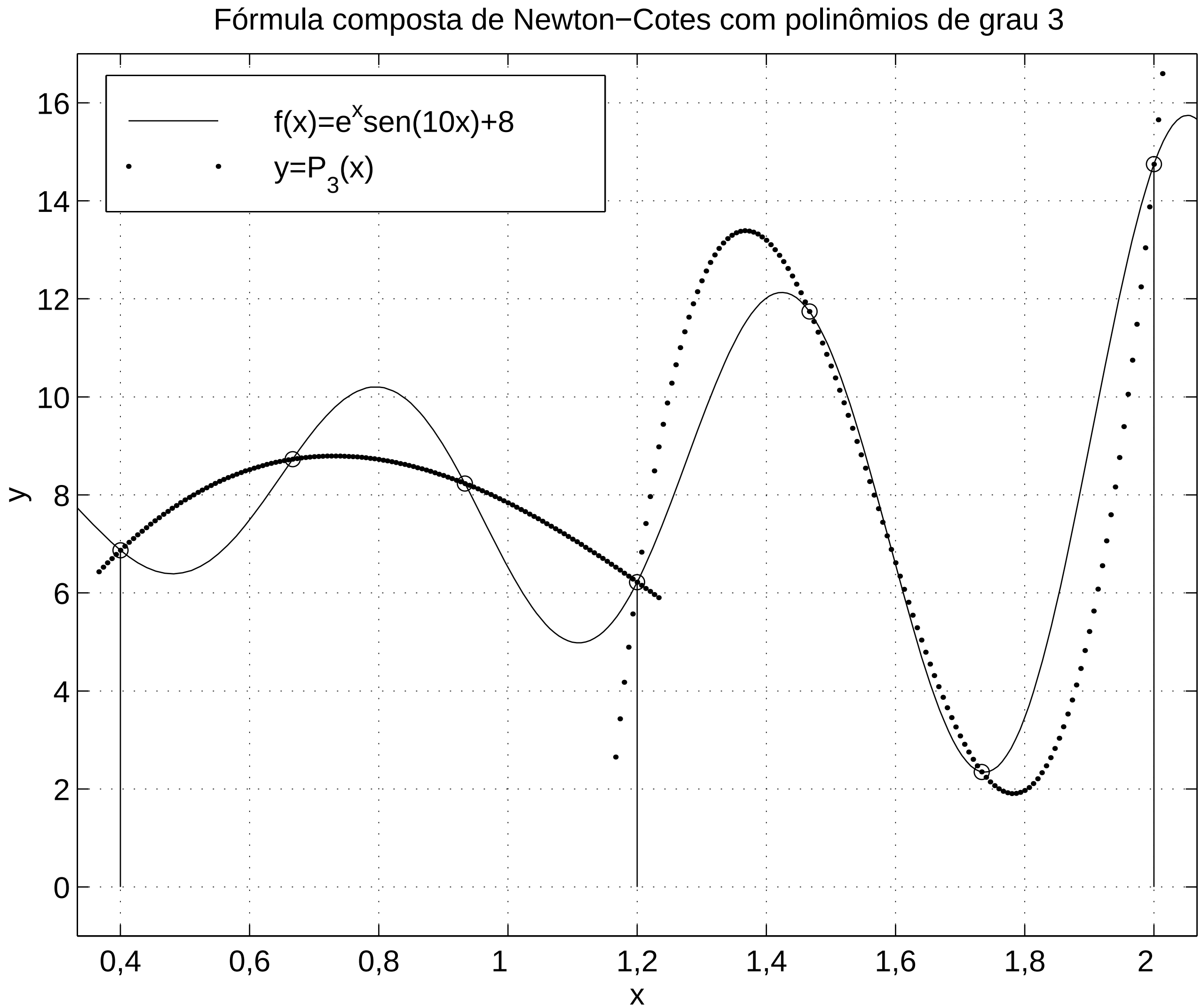
$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+2y_6 + \cdots + 2y_{m-3}+3y_{m-2}+3y_{m-1}+y_m),$$

$$\boxed{I_3 = \frac{3h}{8}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i}. \qquad (8)$$

- Número de subintervalos m múltiplo de 3, grau do polinômio interpolador.

Representação geométrica da integração numérica pela regra dos 3/8 de Simpson composta

- $f(x) = e^x \operatorname{sen}(10x) + 8$ com 2 polinômios interpoladores $P_3(x)$ de grau 3.



Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 8 Calcular $\int_1^4 \log_e\left(x^3+\sqrt{e^x+1}\right)dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson composta (8) com $m=6$ (múltiplo de 3) subintervalos.

$$h=\frac{b-a}{m}=\frac{4-1}{6}\rightarrow h=0{,}5.$$

i	x_i	y_i	c_i
0	1,0	1,0744	1
1	1,5	1,7433	3
2	2,0	2,3884	3
3	2,5	2,9578	2
4	3,0	3,4529	3
5	3,5	3,8860	3
6	4,0	4,2691	1

,

$$I_3=\frac{3\times 0{,}5}{8}(1{,}0744+3(1{,}7433+2{,}3884+3{,}4529+3{,}8860)+2\times 2{,}9578+4{,}2691)\leadsto$$

$$I_3=8{,}5633.$$

Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 9 Calcular $\displaystyle\int_0^{2,7} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,dx$, usando a regra dos 3/8 de Simpson composta (8) com passo de integração $h = 0{,}3$.

$$m = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}7-0}{0{,}3} \to m = 9 \quad (\text{múltiplo de } 3),$$

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,0000	1
1	0,3	0,3046	3
2	0,6	0,6380	3
3	0,9	1,0381	2
4	1,2	1,5650	3
5	1,5	2,3325	3
6	1,8	3,5894	2
7	2,1	5,9844	3
8	2,4	11,7113	3
9	2,7	32,6014	1

,

$$I_3 = \frac{3\times 0{,}3}{8}(0{,}0000 + 3(0{,}3046 + 0{,}6380 + 1{,}5650 + 2{,}3325 + 5{,}9844 + 11{,}7113) +$$
$$2(1{,}0381 + 3{,}5894) + 32{,}6014) \leadsto I_3 = 12{,}3147.$$

Erro de integração dos métodos de Newton-Cotes

- Erro de truncamento do polinômio de Gregory-Newton de grau n

$$T_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!},\ x_0 < \theta < x_n.$$

- Regra do trapézio baseada em polinômio de grau $n = 1$

$$T_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\theta_1)}{2!},\ x_0 < \theta_1 < x_1.$$

- Erro de integração $E_{1,1}$ cometido ao utilizar a regra do trapézio

$$E_{1,1} = \int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\theta_1)}{2}\,dx.$$

- Mudança de variável de x para $u = u_x = \dfrac{x - x_0}{h}$

$$E_{1,1} = \int_0^1 (hu)(h(u-1))\frac{f''(\theta_1)}{2}h\,du = \frac{h^3 f''(\theta_1)}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{h^3 f''(\theta_1)}{12}.$$

Erro de integração dos métodos de Newton-Cotes cont.

- Erro de integração global considerando os m subintervalos

$$E_1 = \sum_{i=1}^{m} E_{1,i} = -\frac{h^3}{12}(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots + f''(\theta_m)),$$

- θ_i determinado em cada um dos m subintervalos.
- Se $f''(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então existe algum valor de $x = \theta \in [a, b]$ para o qual o somatório acima é igual a $mf''(\theta)$.
- Passo de integração: $h = (b - a)/m$.
- Erro global de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{h^3 m f''(\theta)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{m^3}\frac{m f''(\theta)}{12},\ a < \theta < b,$$

$$\boxed{E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta),\ a < \theta < b}. \tag{9}$$

Erro de integração das regras de Simpson

- Regra do 1/3 de Simpson

$$\boxed{E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta),\ a < \theta < b}. \tag{10}$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta),\ a < \theta < b}. \tag{11}$$

- Valor de θ é o ponto no intervalo $[a, b]$, no qual a derivada de $f(x)$ apresenta o maior valor em módulo.
- Equações fornecem a cota máxima do erro de integração.

Exemplo da erro de integração

Exemplo 10 Calcular $\int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 + x + 1\right) dx$ utilizando a regra do 1/3 de Simpson (7) com $m = 2$ subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-1}{2} \rightarrow h = 1,$$

i	x_i	y_i	c_i
0	1	9	1
1	2	47	4
2	3	139	1

.

$$I_2 = \frac{1}{3}(9 + 4 \times 47 + 139) \rightsquigarrow I_2 = 112.$$

Exemplo do erro de integração cont.

- Erro de integração por (10)

$$f(x) = 4x^3+3x^2+x+1,\ f'(x) = 12x^2+6x+1,\ f''(x) = 24x+6,\ f'''(x) = 24,$$

$$f^{iv}(x) = 0 \longrightarrow E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(3-1)^5}{180 \times 2^4} \times 0 \leadsto E_2 = 0.$$

- Resultado exato

$$\int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 + x + 1\right) dx = \left(x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_1^3 = 115{,}5 - 3{,}5 = 112.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração

Exemplo 11 Calcular a integral $\int_0^{\pi} (e^x + \text{ sen}(x) + 2)\, dx$ usando as três primeiras fórmulas de Newton-Cotes com $m = 6$ subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi - 0}{6} \to h = \frac{\pi}{6},$$

i	x_i	y_i	$c_i(t)$	$c_i(1S)$	$c_i(2S)$
0	0	3,0000	1	1	1
1	$\pi/6$	4,1881	2	4	3
2	$\pi/3$	5,7157	2	2	3
3	$\pi/2$	7,8105	2	4	2
4	$2\pi/3$	10,9866	2	2	3
5	$5\pi/6$	16,2082	2	4	3
6	π	25,1407	1	1	1

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

- Regra do trapézio

$$I_1 = \frac{\pi}{6 \times 2}(3{,}0000+2(4{,}1881+5{,}7157+7{,}8105+10{,}9866+16{,}2082)+25{,}1407),$$

$$I_1 = 30{,}8816. \quad (\ |\!\Leftarrow)$$

- Regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6 \times 3}(3{,}0000+4(4{,}1881+7{,}8105+16{,}2082)+2(5{,}7157+10{,}9866)+25{,}1407),$$

$$I_2 = 30{,}4337. \quad (\ |\!\Leftarrow)$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$I_3 = \frac{3\pi}{6 \times 8}(3{,}0000+3(4{,}1881+5{,}7157+10{,}9866+16{,}2082)+2\times 7{,}8105+25{,}1407),$$

$$I_3 = 30{,}4455.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

- Determinação de θ

$$f(x) = e^x + \text{ sen}(x) + 2,\ f'(x) = e^x + \cos(x),\ f''(x) = e^x - \text{ sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \pi,$$

$$f'''(x) = e^x - \cos(x) \text{ e } f^{iv}(x) = e^x + \text{ sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \pi,$$

- θ: abscissa do ponto onde a derivada apresenta o maior valor em módulo.
- Erro de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta) = -\frac{(\pi - 0)^3}{12 \times 6^2} (e^\pi - \text{ sen}(\pi)) \rightsquigarrow E_1 = -1{,}6609.$$

- Erro de integração da regra do 1/3 de Simpson

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi - 0)^5}{180 \times 6^4} (e^\pi + \text{ sen}(\pi)) \rightsquigarrow E_2 = -0{,}0304.$$

- Erro de integração da regra dos 3/8 de Simpson

$$E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi - 0)^5}{80 \times 6^4} (e^\pi + \text{ sen}(\pi)) \rightsquigarrow E_3 = -0{,}0683.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

$$\int_0^{\pi} (e^x + \operatorname{sen}(x) + 2)\, dx = (e^x - \cos(x) + 2x) \,|_0^{\pi} \approx 30{,}4239.$$

- Erro de integração máximo e real

n	I_n	E_n	$30{,}4239 - I_n$
1	30,8816	−1,6609	−0,4577
2	30,4337	−0,0304	−0,0098
3	30,4455	−0,0683	−0,0216

- Regra do 1/3 de Simpson produziu os menores erro máximo e erro real.
- Sinal negativo de E_n indica que a integração numérica foi por excesso: $I_n > I_{\text{exata}}$.

Exemplo de escolha da regra

Exemplo 12 Calcular $\int_0^{\pi} \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x) \right) dx$ com $E < 10^{-2}$ usando uma das três primeiras fórmulas de Newton-Cotes.

- Valor de θ para regra do trapézio

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x),\ f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x),\ f''(x) = 3x^2 + 2 - \text{sen}(x) \rightsquigarrow$$

$$\theta = \pi.$$

- Valor de θ para regras de Simpson

$$f'''(x) = 6x - \cos(x) \text{ e } f^{iv}(x) = 6 + \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo de escolha da regra cont.

- Valor de m para regra do trapézio

$$\left|\frac{(b-a)^3}{12m_1^2}f''(\theta)\right| < 10^{-2} \to m_1 > \left(\frac{(\pi-0)^3}{12\times 10^{-2}}(3\pi^2+2-\operatorname{sen}(\pi))\right)^{\frac{1}{2}} \approx 90{,}37 \leadsto$$

$$m_1 = 91.$$

- Valor de m para regra do $1/3$ de Simpson

$$\left|\frac{(b-a)^5}{180m_2^4}f^{iv}(\theta)\right| < 10^{-2} \to m_2 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{180\times 10^{-2}}(6+\operatorname{sen}(\pi/2))\right)^{\frac{1}{4}} \approx 5{,}87 \leadsto$$

$$m_2 = 6.$$

- Valor de m para regra dos $3/8$ de Simpson

$$\left|\frac{(b-a)^5}{80m_3^4}f^{iv}(\theta)\right| < 10^{-2} \to m_3 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{80\times 10^{-2}}(6+\operatorname{sen}(\pi/2))\right)^{\frac{1}{4}} \approx 7{,}19 \leadsto$$

$$m_3 = 9.$$

- Fórmula escolhida: regra do $1/3$ de Simpson.

Exemplo de escolha da regra cont.

- Passo de integração: $h = \dfrac{b-a}{m} = \dfrac{\pi - 0}{6} \to h = \dfrac{\pi}{6}$,

i	x_i	y_i	c_i
0	0	0,0000	1
1	$\pi/6$	0,7929	4
2	$\pi/3$	2,2633	2
3	$\pi/2$	4,9894	4
4	$2\pi/3$	10,0628	2
5	$5\pi/6$	19,0979	4
6	π	34,2219	1

.

- Regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6\times 3}(0{,}0000+4(0{,}7929+4{,}9894+19{,}0979)+2(2{,}2633+10{,}0628)+34{,}2219) \rightsquigarrow I_2 = 27{,}6451.$$

- Verificação da exatidão

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \operatorname{sen}(x)\right) dx = \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - \cos(x)\right)\Bigg|_0^\pi \approx 27{,}6364,$$

$$|27{,}6364 - 27{,}6451| = 0{,}0087 < 10^{-2}.$$

Algoritmo: integração numérica pelo método de Newton-Cotes

Algoritmo Newton-Cotes
{ **Objetivo:** Integrar uma função pelo método de Newton-Cotes }
parâmetros de entrada a, b, n, m
  { limite inferior, limite superior, grau do polinômio, número de subintervalos }
parâmetros de saída $Integral$, $CondErro$
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { $CondErro = 0$ se não houve erro de consistência dos parâmetros dados, }
  { $CondErro = 1$ se ($n < 1$ **ou** $n > 8$), }
  { $CondErro = 2$ se resto$(m, n) \neq 0$ e }
  { $CondErro = 3$ se ambas as condições ocorrerem }
  $d(1) \leftarrow 2$; $d(2) \leftarrow 6$; $d(3) \leftarrow 8$; $d(4) \leftarrow 90$; $d(5) \leftarrow 288$; $d(6) \leftarrow 840$
  $d(7) \leftarrow 17280$; $d(8) \leftarrow 28350$
  $c(1) \leftarrow 1$; $c(2) \leftarrow 1$; $c(3) \leftarrow 4$; $c(4) \leftarrow 1$; $c(5) \leftarrow 3$; $c(6) \leftarrow 7$; $c(7) \leftarrow 32$
  $c(8) \leftarrow 12$; $c(9) \leftarrow 19$; $c(10) \leftarrow 75$; $c(11) \leftarrow 50$; $c(12) \leftarrow 41$; $c(13) \leftarrow 216$
  $c(14) \leftarrow 27$; $c(15) \leftarrow 272$; $c(16) \leftarrow 751$; $c(17) \leftarrow 3577$; $c(18) \leftarrow 1323$
  $c(19) \leftarrow 2989$; $c(20) \leftarrow 989$; $c(21) \leftarrow 5888$; $c(22) \leftarrow -928$; $c(23) \leftarrow 10496$
  $c(24) \leftarrow -4540$
  $CondErro \leftarrow 0$; $Integral \leftarrow 0$
  { consistência dos parâmetros }
  se $n < 1$ **ou** $n > 8$ **então** $CondErro \leftarrow CondErro + 1$, **fim se**
  se resto$(m, n) \neq 0$ **então** $CondErro \leftarrow CondErro + 2$, **fim se**
  se $CondErro \neq 0$ **então abandone**, **fim se**
  { cálculo da integral }
  $p \leftarrow \text{trunca}(0{,}25 * (n * (n + 2) + \text{resto}(n, 2)))$; $h \leftarrow (b - a)/m$
  para $i \leftarrow 0$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow a + i * h$
    $y \leftarrow f(x)$ { avaliar a função integrando em x }
    $j \leftarrow p + \text{trunca}(0{,}5 * n - \text{abs}(\text{resto}(i, n) - 0{,}5 * n))$
    $k \leftarrow 1 + \text{trunca}((n - \text{resto}(i, n))/n) - \text{trunca}((m - \text{resto}(i, m))/m)$
    $Integral \leftarrow Integral + y * c(j) * k$
    escreva $i, x, y, c(j) * k$
  fim para
  $Integral \leftarrow n * h/d(n) * Integral$
fim algoritmo

Complexidade da integração pelo método de Newton-Cotes

Operações	Complexidade
adições	$9m + 12$
multiplicações	$5m + 9$
divisões	$2m + 4$

- Polinômios dados em termos do número de subintervalos m.
- Complexidade independe do grau n do polinômio interpolador utilizado.

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 13 Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx$ pelo algoritmo com polinômios de grau $n = 2$ e $n = 3$, utilizando $m = 6$ subintervalos.

- Para $n = 2$

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 3.14159
n = 2
m = 6
% fornecem os resultados
Integracao por Newton-Cotes com polinomio de grau 2
       i        x(i)         y(i)      c(i)
       0      0.00000      0.00000       1
       1      0.52360      0.50000       4
       2      1.04720      0.86602       2
       3      1.57080      1.00000       4
       4      2.09439      0.86603       2
       5      2.61799      0.50000       4
       6      3.14159      0.00000       1

Integral =   2.00086
CondErro =   0
```

Exemplo de uso do algoritmo cont.

- Para $n = 3$

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 3.14159
n = 3
m = 6
% fornecem os resultados
Integracao por Newton-Cotes com polinomio de grau 3
       i         x(i)         y(i)      c(i)
       0      0.00000      0.00000        1
       1      0.52360      0.50000        3
       2      1.04720      0.86602        3
       3      1.57080      1.00000        2
       4      2.09439      0.86603        3
       5      2.61799      0.50000        3
       6      3.14159      0.00000        1

Integral =   2.00201
CondErro =   0
```

Exemplo de comparação das fórmulas de Newton-Cotes

Exemplo 14 Verificar o erro real cometido no cálculo de $\int_0^5 x \operatorname{sen}(3x)dx$, usando as sete primeiras fórmulas de Newton-Cotes, com $m = 420$

n	$\lvert I_{\text{exata}} - I_n \rvert$
1	$1{,}2690 \times 10^{-4}$
2	$9{,}4861 \times 10^{-9}$
3	$2{,}1346 \times 10^{-8}$
4	$3{,}9775 \times 10^{-12}$
5	$8{,}5454 \times 10^{-12}$
6	$6{,}6613 \times 10^{-16}$
7	$2{,}6645 \times 10^{-15}$

.

- À medida que o grau n do polinômio interpolador aumenta, o erro diminui.
- Fórmula utilizando grau par é melhor do que a de grau ímpar seguinte.

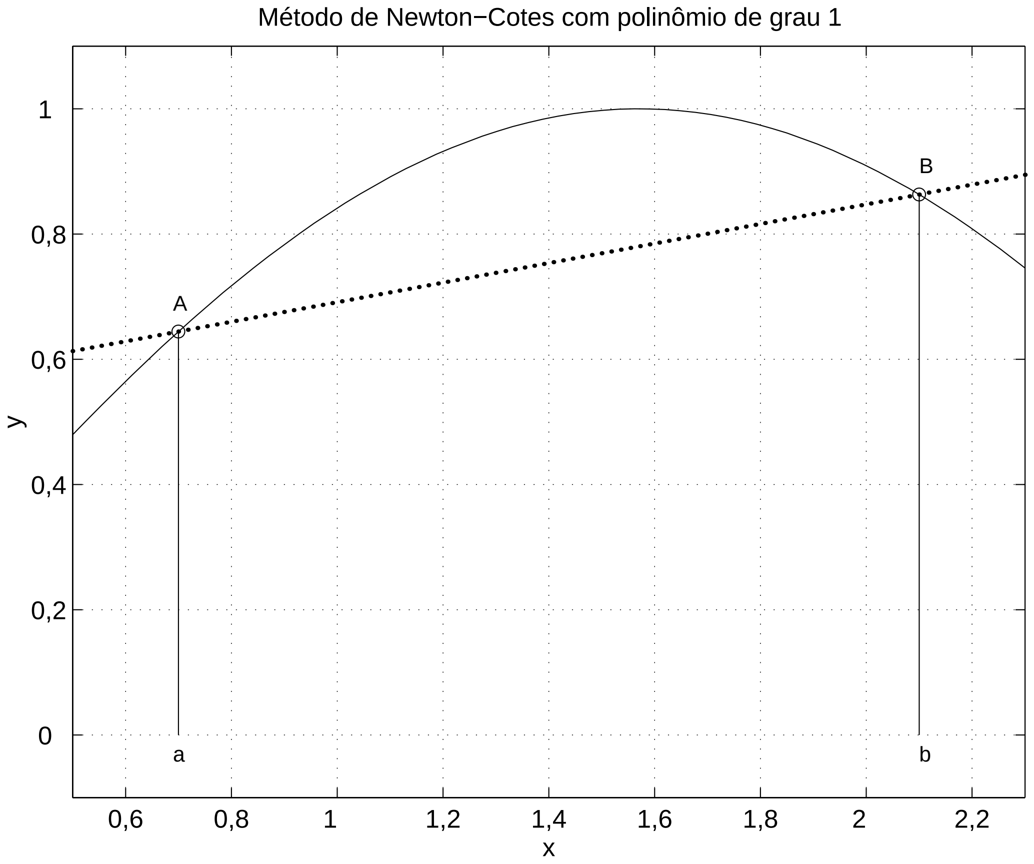
Quadratura de Gauss-Legendre

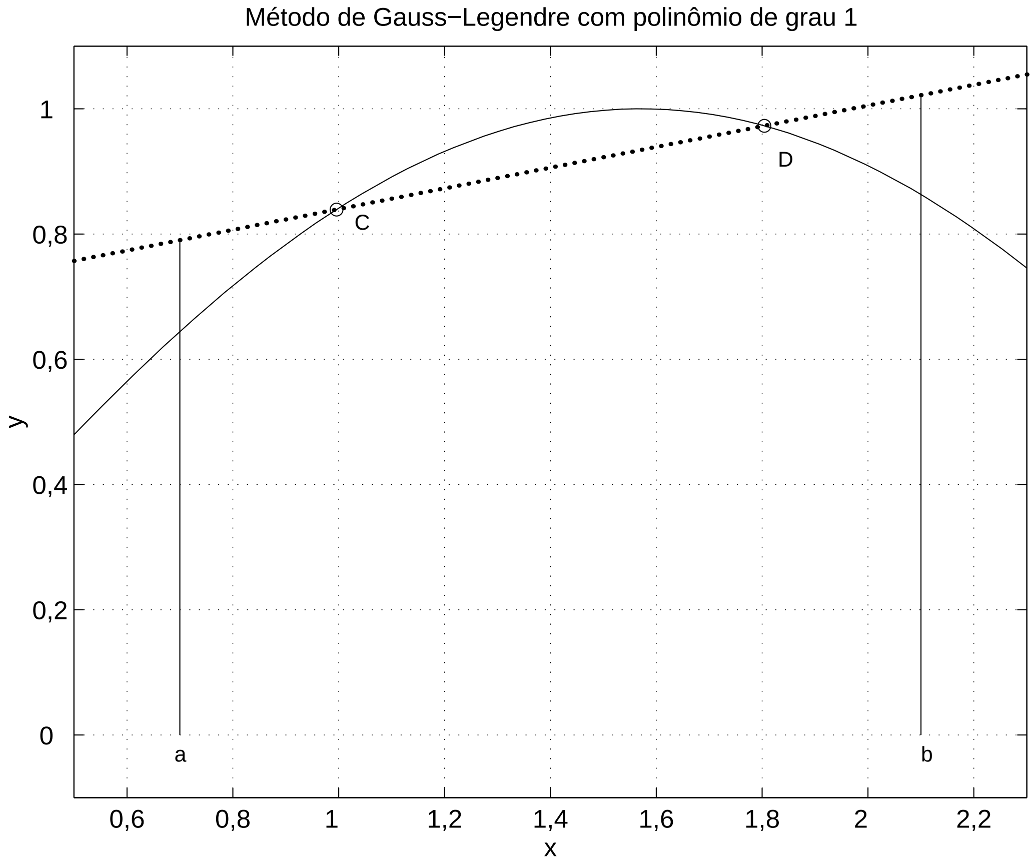
- Escolher pontos igualmente espaçados nas fórmulas de Newton-Cotes simplifica os cálculos.
- Sem imposição de espaçamento constante as fórmulas fornecem uma maior exatidão.
- Usando o mesmo número de pontos que Newton-Cotes.

Newton-Cotes X Gauss-Legendre

- Integração de $f(x)$ baseada em polinômio interpolador de grau 1.

$\Vert\!\Leftarrow$





pontos A e B extremos

pontos C e D para aproximar as áreas

Fórmula para dois pontos

- Mudança de variável de x para t, definida no intervalo $[-1, 1]$

$$\boxed{x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}}. \qquad (12)$$

- Derivando

$$dx = \frac{b-a}{2}dt,$$

- e definindo

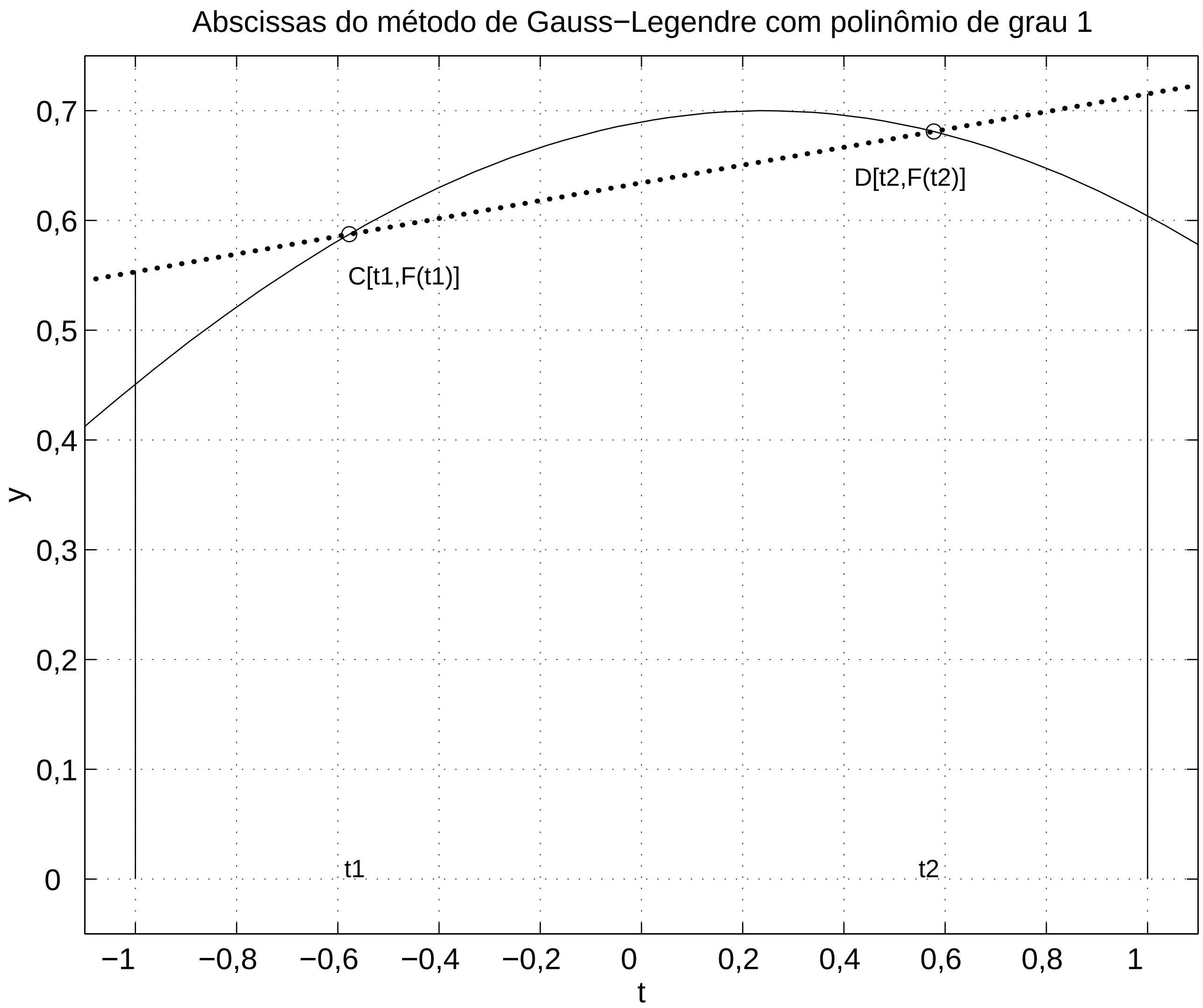
$$\boxed{F(t) = \frac{b-a}{2}f(x(t))}. \qquad (13)$$

- Integral

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{b-a}F(t)\frac{b-a}{2}\ dt \rightsquigarrow \int_a^b f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} F(t)\ dt.$$

Fórmula para dois pontos: escolha das abscissas

- Pontos $C[t_1, F(t_1)]$ e $D[t_2, F(t_2)]$.



Fórmula para dois pontos

- Integral

$$\int_{-1}^{1} F(t)\, dt \approx I_2 = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2). \tag{14}$$

- Em vista de (13) e com $x_i = x(t_i)$

$$\boxed{I_2 = \frac{b-a}{2}(A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2))}. \tag{15}$$

- Expressão análoga à regra do trapézio

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b).$$

Construção da fórmula de dois pontos

- Encontrar valores de $t_1,\ t_2,\ A_1$ e A_2 que tornem a exatidão a maior possível.
- Método construído de modo a ser exato para polinômios de grau até 3.
- Ter-se-á quatro incógnitas ($t_1,\ t_2,\ A_1$ e A_2) e quatro equações

$$F(t) = t^k,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

- Impondo $I_2 = A_1F(t_1) + A_2F(t_2)$ ser igual à integral analítica de $F(t)$:

Construção da fórmula de dois pontos cont.

- para $k = 0$

$$F(t) = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} 1\, dt = 1 - (-1) = 2 = A_1 1 + A_2 1,$$

- para $k = 1$

$$F(t) = t \rightarrow \int_{-1}^{1} t\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = A_1 t_1 + A_2 t_2,$$

- para $k = 2$

$$F(t) = t^2 \rightarrow \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 \text{ e}$$

- para $k = 3$

$$F(t) = t^3 \rightarrow \int_{-1}^{1} t^3\, dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3.$$

Sistema de equações não lineares

- Sistema de equações não lineares de ordem 4

$$A_1 + A_2 = 2,$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0,$$

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \text{ e}$$

$$A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0.$$

- Solução

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}5774,\ t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774,$$

$$A_1 = 1 \text{ e } A_2 = 1.$$

Exemplo

Exemplo 15 Calcular $\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx$, usando (15).

- Por (12): $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2}t_i + \frac{1+5}{2} \rightsquigarrow x_i = 2t_i + 3.$
- Dispositivo prático

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1,8453	34,8542	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	4,1547	221,1458	1

,

$$I_2 = \frac{b-a}{2}(A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) = \frac{5-1}{2}(1 \times 34{,}8542 + 1 \times 221{,}1458) \rightsquigarrow I_2 = 512{,}0000.$$

- Resultado exato

$$\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^3 + 3x^2 + x\right)\Bigg|_1^5 = 517{,}5 - 5{,}5 = 512.$$

Exemplo

Exemplo 16 Calcular $\int_0^{\pi} (e^x + \operatorname{sen}(x) + 2)\, dx$, usando (15).

- Por (12): $x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi - 0}{2} t_i + \frac{0+\pi}{2} \leadsto x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1)$.

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,6639	4,5585	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2,4777	14,5300	1

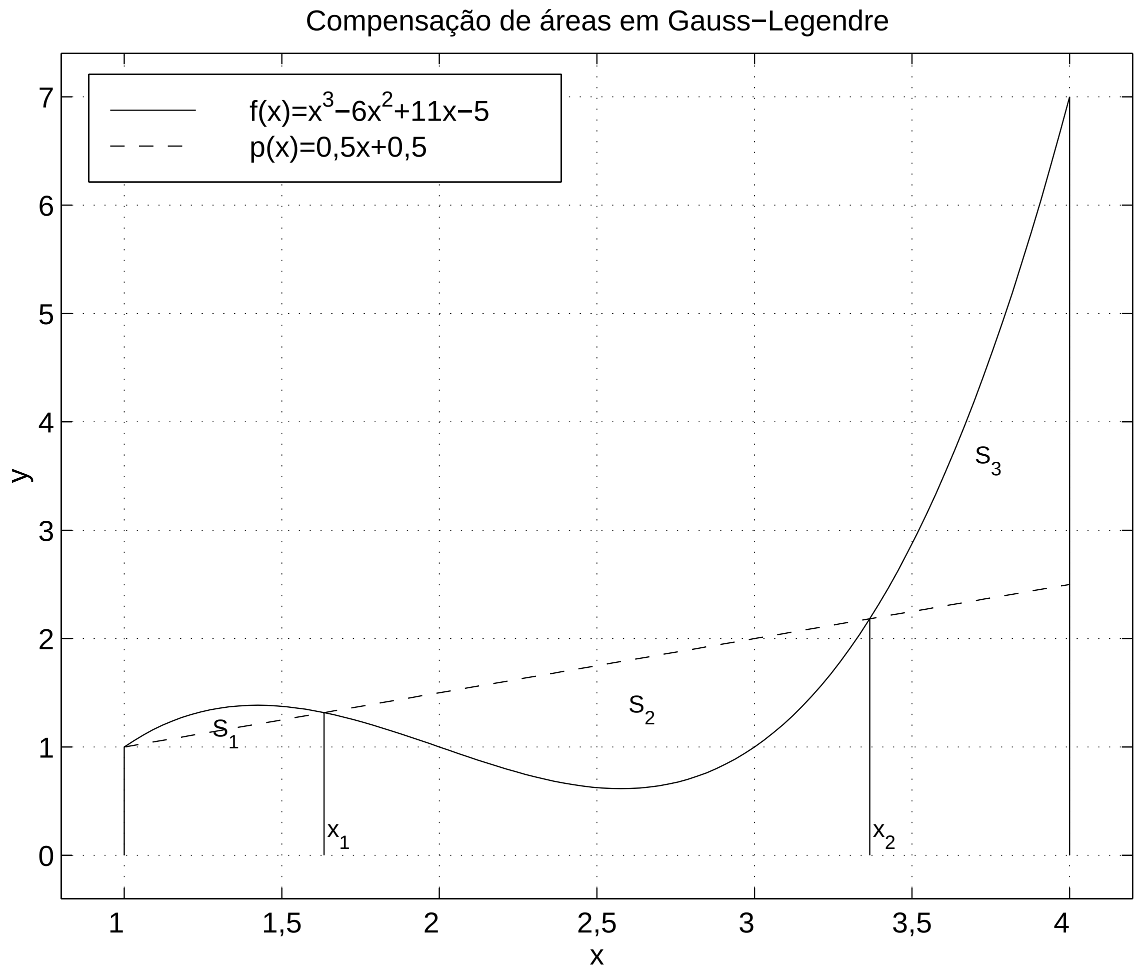
.

$$I_2 = \frac{b-a}{2}(A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) = \frac{\pi - 0}{2}(1 \times 4{,}5585 + 1 \times 14,5300) \leadsto I_2 = 29{,}9841.$$

- Valor exato aproximadamente 30,4239.
- Erro cometido com 2 pontos: $|30{,}4239 - 29{,}9841| = 0{,}4398$.
- Regra do trapézio com 7 pontos: $(|30{,}4239 - 30{,}8816| = 0{,}4577)$. (exemplo)

Exemplo de áreas entre a função e o polinômio no método de Gauss-Legendre

Exemplo 17 Calcular a soma das áreas S_1, S_2 e S_3 entre o polinômio de grau 1 construído a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau $n = 2$ e a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ obtidas no intervalo $[1, 4]$.



Exemplo de cálculo das áreas

- Abscissas x_1 e x_2 a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau 2:

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Por (12)

$$x_1 = \frac{4-1}{2}t_1 + \frac{1+4}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}63397,$$

$$x_2 = \frac{4-1}{2}t_2 + \frac{1+4}{2} = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}36603.$$

- Polinômio de grau 1 que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

$$p(x) = 0{,}5x + 0{,}5.$$

Exemplo de cálculo das áreas cont.

- Sendo $g(x) = f(x) - p(x) = x^3 - 6x^2 + 10{,}5x - 5{,}5$:

$$S_1 = \int_1^{x_1} g(x)dx \approx 0{,}08702,$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \approx -1{,}29904,$$

$$S_3 = \int_{x_2}^{4} g(x)dx \approx 1{,}21202.$$

- Soma das três áreas é igual a 0.
- Compensação exata das áreas entre o polinômio de grau 1 obtido a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau $n = 2$ e a função polinomial de grau 3.

Fórmula geral

- Determinar os valores dos pesos A_i e das abscissas t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(t)dt \approx I_n,$$

$$I_n = A_1F(t_1) + A_2F(t_2) + \cdots + A_nF(t_n). \tag{16}$$

- Fórmula exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$.
- Faz-se

$$F(t) = t^k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n - 1,$$

- sabendo que

$$\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for ímpar,} \\ \frac{2}{k+1}, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Sistema de equações não lineares

- Impondo que (16) seja exata para a integração de $F(t)$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i F(t_i) = \int_{-1}^{1} F(t)dt.$$

- Sistema de equações não lineares de ordem $2n$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = 2,$$
$$A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 + \cdots + A_n t_n = 0,$$
$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 + \cdots + A_n t_n^2 = \frac{2}{3},$$
$$\cdots$$
$$A_1 t_1^{2n-1} + A_2 t_2^{2n-1} + A_3 t_3^{2n-1} + \cdots + A_n t_n^{2n-1} = 0,$$

- Solução fornece os n pesos A_i e as n abscissas t_i.

Fórmula geral da quadratura de Gauss-Legendre

- Em vista de (13) e com $x_i = x(t_i)$, (16) é equivalente a

$$\boxed{I_n = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)}. \tag{17}$$

Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Polinômios de Legendre definidos pela fórmula de recorrência

$$L_n(x) = \frac{(2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)}{n}, \tag{18}$$

- com $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x$.
- Por exemplo,

$$L_2(x) = \frac{3x^2-1}{2},$$

$$L_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2},$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8} \quad \text{e}$$

$$L_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}.$$

Propriedades dos polinômios de Legendre

- Propriedades básicas

$$L_n(1) = 1 \;\text{ e }\; L_n(-1) = (-1)^n,\; n = 0, 1, 2, \ldots \;\text{ e}$$

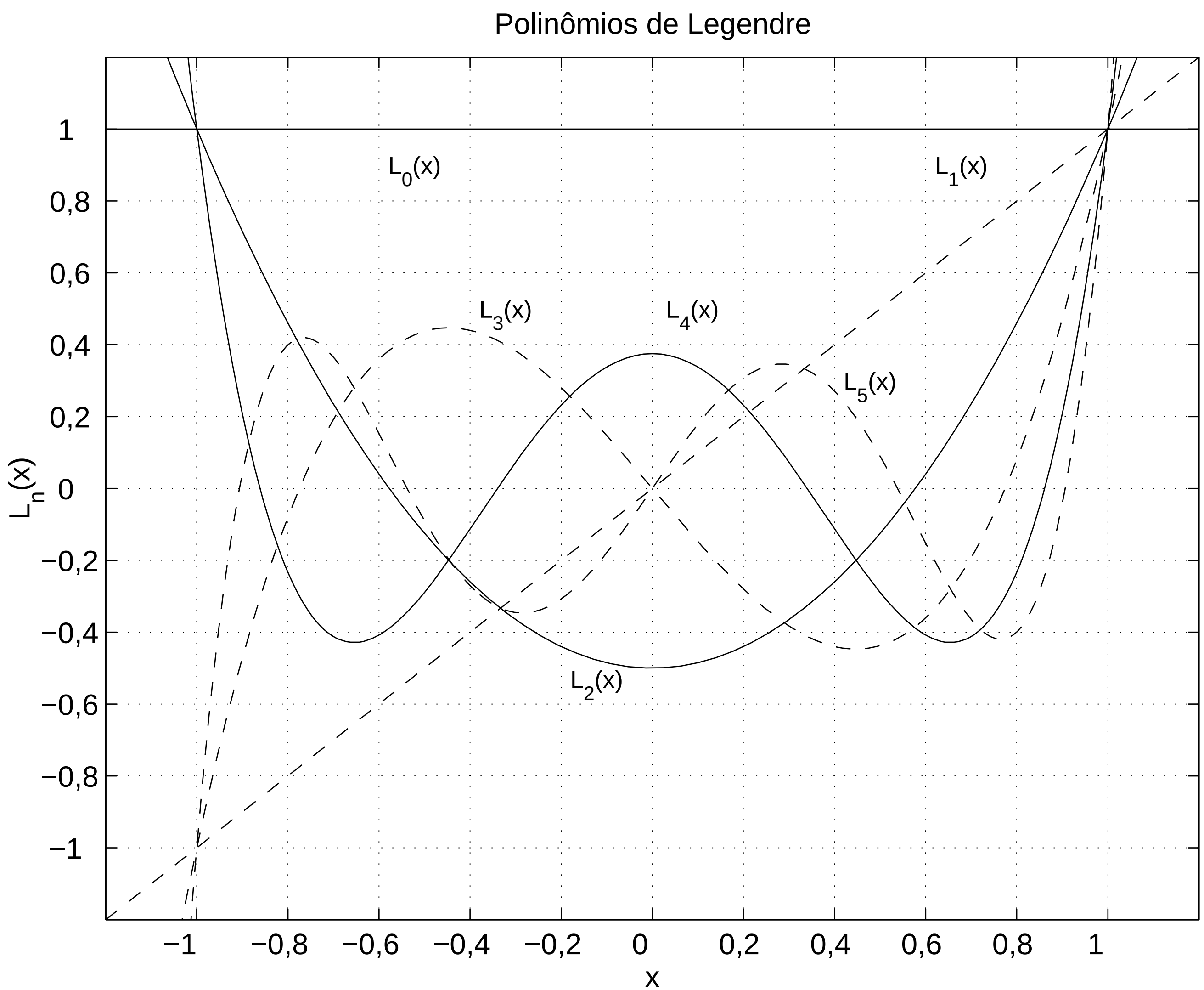
$$\int_{-1}^{1} L_n(x) Q_k(x)\, dx = 0,\; n > k, \tag{19}$$

- sendo $Q_k(x)$ um polinômio qualquer de grau $k < n$.
- Integral chamada de produto escalar das funções $L_n(x)$ e $Q_k(x)$.
- Duas funções são ditas ortogonais se seu produto escalar for nulo.
- Os polinômios $L_n(x)$ e $Q_k(x)$ são ortogonais.

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_k(x)\, dx \begin{cases} = 0, & \text{se } n \neq k, \\ > 0, & \text{se } n = k. \end{cases}$$

Polinômios de Legendre de grau até 5

- Equações algébricas $L_n(x) = 0$ possuem n raízes reais distintas pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$ e simétricas em relação à origem.



Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Sejam os polinômios $F_k(t) = t^k L_n(t),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$
- $L_n(t)$: polinômio de Legendre de grau n.
- Sendo $F_k(t)$ de grau menor ou igual a $2n-1$, então (16) é exata

$$\int_{-1}^{1} F_k(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i F_k(t_i),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\int_{-1}^{1} t^k L_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k L_n(t_i),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

- Polinômios de Legendre são ortogonais com qualquer polinômio de grau menor

$$\int_{-1}^{1} t^k L_n(t)\,dt = 0,\ n > k.$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k L_n(t_i) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

- Expressão verdadeira para qualquer valor de A_i se $L_n(t_i) = 0$ para todo i.

Valores de t_i e A_i

- Para maior exatidão na fórmula de quadratura (16) é suficiente que $t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ sejam os zeros do polinômio de Legendre de grau n.
- Conhecidas as abscissas t_i, sistema não linear se reduz a um sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ . \end{bmatrix}.$$

- Em vez de resolver este sistema via decomposição LU, pesos A_i obtidos por

$$\boxed{A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2)(L'_n(t_i))^2},\ i = 1, 2, \ldots, n}, \quad (20)$$

- $L'_n(t_i)$: derivada de $L_n(x)$ na abscissa t_i.

Abscissas e pesos para quadratura de Gauss-Legendre

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	2; 1	±0,57735 02691 89626	1
3	2	0	0,88888 88888 88889
	3; 1	±0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
4	3; 2	±0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	4; 1	±0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
5	3	0	0,56888 88888 88889
	4; 2	±0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366
	5, 1	±0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189
6	4; 3	±0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
	5; 2	±0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
	6; 1	±0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
7	4	0	0,41795 91836 73469
	5; 3	±0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119
	6; 2	±0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277
	7; 1	±0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870
8	5; 4	±0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
	6; 3	±0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
	7; 2	±0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
	8; 1	±0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376

Exemplo de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

Exemplo 18 Verificar a ortogonalidade dos polinômios $L_2(x)$ e $L_3(x)$ de Legendre.

- Os polinômios serão ortogonais se

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)L_3(x)dx = 0.$$

- Assim,

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)L_3(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right) dx,$$

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)L_3(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(15x^5 - 14x^3 + 3x\right) dx,$$

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)L_3(x)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{6}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1},$$

$$\int_{-1}^{1} L_2(x)L_3(x)dx = 0.$$

Exemplo de cálculo de π

Exemplo 19 Verificar que $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ por intermédio de (17) com $n = 3$ e $n = 4$.

- Mudança de variável: $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{1-0}{2}t_i + \frac{0+1}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{1}{2}(t_i + 1)$.
- t_i: zeros do polinômio de Legendre de grau n e A_i: n pesos obtidos da tabela.
- Para $n = 3$

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	−0,77460	0,11270	0,98746	0,55556
2	0	0,50000	0,80000	0,88889
3	0,77460	0,88730	0,55950	0,55556

.

- Usando (17) com $n = 3$,

$$I_3 = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i f(x_i) \to I_3 = 0{,}78527 \rightsquigarrow 4 \times I_3 = 3{,}14108 \approx \pi.$$

Exemplo de cálculo de π cont.

- Mudança de variável: $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{1-0}{2}t_i + \frac{0+1}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{1}{2}(t_i+1)$.
- t_i: zeros do polinômio de Legendre de grau n e A_i: n pesos obtidos da tabela.
- Para $n = 4$

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	−0,86114	0,06943	0,99520	0,34785
2	−0,33998	0,33001	0,90179	0,65215
3	0,33998	0,66999	0,69019	0,65215
4	0,86114	0,93057	0,53592	0,34785

.

- Utilizando (17) com $n = 4$,

$$I_4 = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i f(x_i) \to I_4 = 0{,}78540 \rightsquigarrow 4 \times I_4 = 3{,}14160 \approx \pi.$$

Exemplo de comparação com regra de 1/3 de Simpson

Exemplo 20 Calcular $\int_0^{\pi}(e^x + \text{sen}(x) + 2)dx$ do Exemplo 11, pela quadratura de Gauss-Legendre com $n = 5$.

- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi - 0}{2}t_i + \frac{0+\pi}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1).$$

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	$-0{,}90618$	$0{,}14737$	$3{,}30562$	$0{,}23693$
2	$-0{,}53847$	$0{,}72497$	$4{,}72778$	$0{,}47863$
3	0	$1{,}57080$	$7{,}81050$	$0{,}56889$
4	$0{,}53847$	$2{,}41662$	$13{,}87103$	$0{,}47863$
5	$0{,}90618$	$2{,}99422$	$22{,}11662$	$0{,}23693$

Exemplo de comparação com regra de 1/3 de Simpson cont.

- Usando (17) com $n = 5$,

$$I_5 = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{5} A_i f(x_i) \to I_5 = 30{,}42406.$$

- Resultado exato $\approx 30{,}42388$.

- Erro da quadratura de Gauss-Legendre com $n = 5$

$$|30{,}42388 - 30{,}42406| = 0{,}00018.$$

- Erro da regra do 1/3 de Simpson com $m = 6$

$$|30{,}42388 - 30{,}43369| = 0{,}00981. \quad \text{(exemplo)}$$

Erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre

- Erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre

$$\boxed{E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta),\ a < \theta < b}, \tag{21}$$

- θ: abscissa na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo $[a, b]$.
- Cota máxima do erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre.

Exemplo de erro de integração

Exemplo 21 Calcular $\int_0^{\pi}\left(\frac{x^4}{4}+x^2+\ \mathrm{sen}(x)\right)dx$ usando o método de Gauss-Legendre com $n=2$ e o respectivo erro de integração.

- Mudança de variável

$$x_i=\frac{b-a}{2}t_i+\frac{a+b}{2}=\frac{\pi-0}{2}t_i+\frac{0+\pi}{2}\leadsto x_i=\frac{\pi}{2}(t_i+1).$$

- Para $n=2$

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	A_i
1	$-0{,}57735$	0,66390	1,10552	1
2	0,57735	2,47770	16,17701	1

.

$$I_2=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{2}A_i f(x_i)\leadsto I_2=27{,}14733.$$

Exemplo de erro de integração cont.

- Cálculo do erro máximo

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \operatorname{sen}(x),\ f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x),$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2 - \operatorname{sen}(x), f'''(x) = 6x - \cos(x) \text{ e}$$

$$f^{iv}(x) = 6 + \operatorname{sen}(x) \leadsto \theta = \frac{\pi}{2}.$$

- Por (21),

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta) \rightarrow E_2 = \frac{(\pi - 0)^5(2!)^4}{(4!)^3(5)} \left(6 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \leadsto$$

$$E_2 = 0{,}49587.$$

- Valor exato da integral: $\approx 27{,}63641$.
- Erro real: $|27{,}63641 - 27{,}14733| = 0{,}48908 < E_2$.

Algoritmo para cálculo das abscissas e pesos para as fórmulas de Gauss-Legendre

Algoritmo PesAbsGL
{ **Objetivo:** Calcular pesos e abscissas para a fórmula de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada n { número de pontos }
parâmetros de saída A, T, $CondErro$
  { Pesos, abscissas e condição de erro, sendo }
  { $CondErro = 0$ se não houve erro ($n \geq 1$) e $CondErro = 1$ se $n < 1$ }
  se $n < 1$ **então** $CondErro \leftarrow 1$, **abandone**, **fimse**
  $CondErro \leftarrow 0$; $pi \leftarrow 3{,}14159265358979323846$; $m \leftarrow$ trunca$(0{,}5 * (n + 1))$
  para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $z \leftarrow \cos(pi * (i - 0{,}25)/(n + 0{,}5))$
    repita
      $p1 \leftarrow 1$; $p2 \leftarrow 0$
      para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        $p3 \leftarrow p2$; $p2 \leftarrow p1$
        { polinômio de Legendre no ponto z }
        $p1 \leftarrow ((2 * j - 1) * z * p2 - (j - 1) * p3)/j$
      fimpara
      { derivada do polinômio de Legendre no ponto z }
      $pp \leftarrow n * (z * p1 - p2)/(z^2 - 1)$; $z1 \leftarrow z$
      { método de Newton para calcular os zeros do polinômio }
      $z \leftarrow z1 - p1/pp$
      se abs$(z - z1) < 10^{-15}$ **então interrompa**, **fimse**
    fimrepita
    $T(m + 1 - i) \leftarrow z$ { abscissa }
    $A(m + 1 - i) \leftarrow 2/((1 - z^2) * pp^2)$ { peso }
    { somente as raízes não negativas são calculadas devido à simetria }
  fimpara
fimalgoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 22 Calcular os pesos e as abscissas para a fórmula de Gauss-Legendre com $n = 5$, utilizando o algoritmo.

```
% O parametro de entrada
n = 5
% produz os resultados
A = 0.56888888888889   0.47862867049937   0.23692688505619
T =                0   0.53846931010568   0.90617984593866
CondErro = 0
```

Algoritmo para integração numérica pelo método de Gauss-Legendre

Algoritmo Gauss-Legendre
{ **Objetivo:** Integrar uma função pelo método de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada a, b, n
  { limite inferior, limite superior, número de pontos }
parâmetros de saída $Integral$, $CondErro$
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { $CondErro = 0$ se não houve erro ($n \geq 1$) e $CondErro = 1$ se $n < 1$ }
  $Integral \leftarrow 0$
  { cálculo dos pesos e abscissas }
  $[Avet, Tvet, CondErro] \leftarrow$ **PesAbsGL**(n)   (ver algoritmo)
  se $CondErro \neq 0$ **então abandone**, **fim se**
  { cálculo da integral }
  $e1 \leftarrow (b - a)/2$
  $e2 \leftarrow (a + b)/2$
  se resto$(n, 2) = 0$ **então** $c1 \leftarrow 1$; $c2 \leftarrow 0{,}5$ **senão** $c1 \leftarrow 0$; $c2 \leftarrow 1$, **fim se**
  para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $k \leftarrow \text{trunca}(i - 0{,}5 * (n + 1) + \text{sinal}(i - 0{,}5 * (n + c1)) * c2)$
    $t \leftarrow \text{sinal}(k) * Tvet(\text{abs}(k))$
    $x \leftarrow e1 * t + e2$
    $y \leftarrow f(x)$ { avaliar a função integrando em x }
    $c \leftarrow Avet(\text{abs}(k))$
    $Integral \leftarrow Integral + y * c$
    escreva i, t, x, y, c
  fim para
  $Integral \leftarrow e1 * Integral$
fim algoritmo

Complexidade: integração pela quadratura de Gauss-Legendre

Operações	Complexidade
adições	$7n + 2$
multiplicações	$6n + 1$
divisões	2

- n: número de pontos.

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 23 Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx$ pelo algoritmo com $n = 5$ e $n = 6$.

- Para $n = 5$

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 3.14159
n = 5
% produzem os resultados
   Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
   i       t(i)          x(i)        f(x(i))       A(i)
   1    -0.90618      0.14737      0.14684     0.23693
   2    -0.53847      0.72497      0.66311     0.47863
   3     0.00000      1.57080      1.00000     0.56889
   4     0.53847      2.41662      0.66312     0.47863
   5     0.90618      2.99422      0.14684     0.23693

Integral =    2.0000001103
CondErro =    0
```

Exemplo de uso do algoritmo com $n = 6$

- Para $n = 6$

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 3.14159
n = 6
% produzem os resultados
   Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
   i      t(i)          x(i)        f(x(i))      A(i)
   1    -0.93247      0.10608      0.10588    0.17132
   2    -0.66121      0.53217      0.50740    0.36076
   3    -0.23862      1.19597      0.93057    0.46791
   4     0.23862      1.94562      0.93057    0.46791
   5     0.66121      2.60942      0.50741    0.36076
   6     0.93247      3.03551      0.10588    0.17132

Integral =   1.9999999995
CondErro =   0
```

Exemplo de uso do algoritmo com $n = 10$

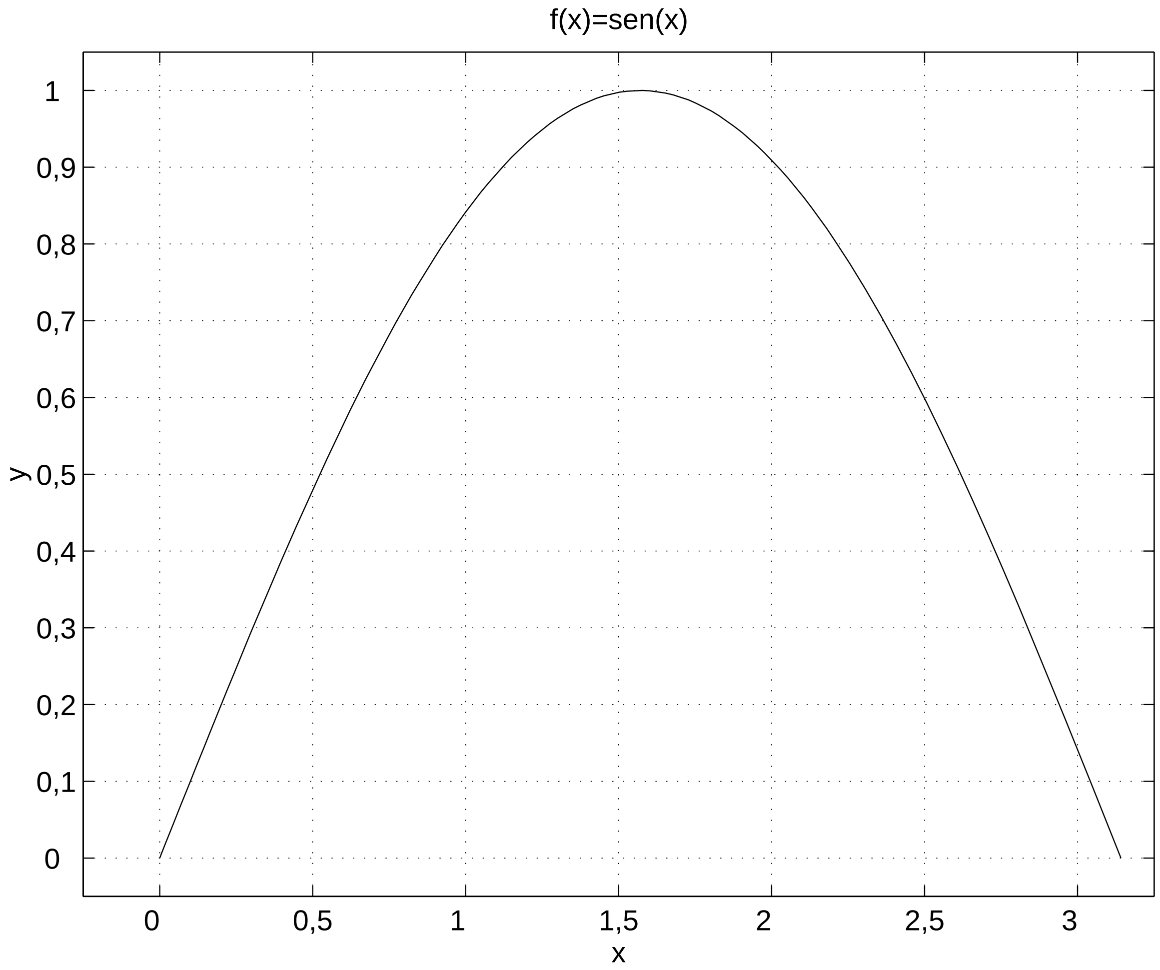
Exemplo 24 Verificar que $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ com $n = 10$ utilizando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
n = 10
% produzem os resultados
   Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
   i      t(i)          x(i)        f(x(i))      A(i)
   1    -0.97391      0.01305      3.99932     0.06667
   2    -0.86506      0.06747      3.98187     0.14945
   3    -0.67941      0.16030      3.89980     0.21909
   4    -0.43340      0.28330      3.70281     0.26927
   5    -0.14887      0.42556      3.38666     0.29552
   6     0.14887      0.57444      3.00757     0.29552
   7     0.43340      0.71670      2.64261     0.26927
   8     0.67941      0.83970      2.34590     0.21909
   9     0.86506      0.93253      2.13948     0.14945
  10     0.97391      0.98695      2.02626     0.06667

Integral =   3.1415926536
CondErro =   0
```

Comparação dos métodos de integração simples

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\ dx = -\cos(x)|_0^{\pi} = 2.$$



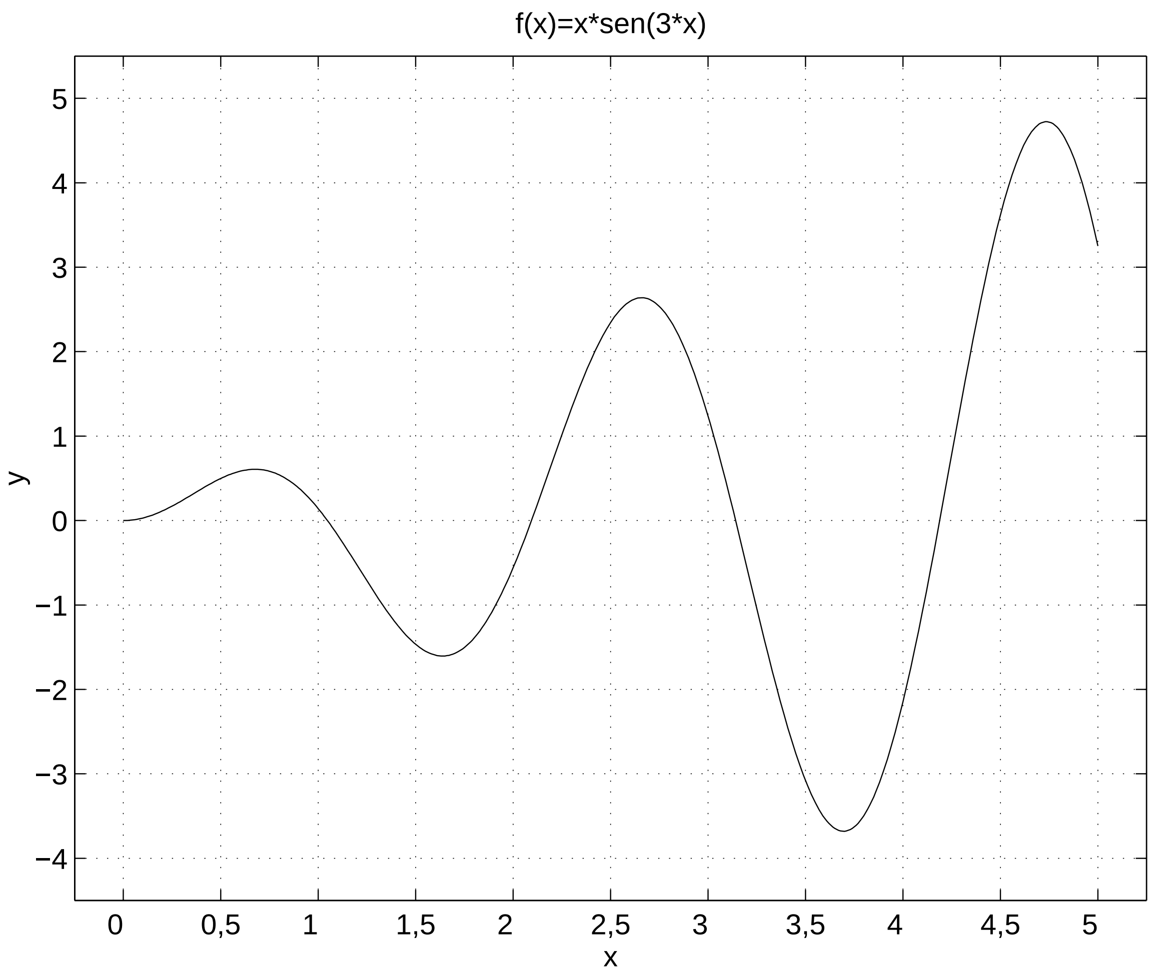
Comparação entre Newton-Cotes e Gauss-Legendre

Grau do polinômio	Número de subintervalos	Newton-Cotes	Número de pontos	Gauss-Legendre
1	1	$2{,}000_{\times}10^{0}$	2	$6{,}418_{\times}10^{-2}$
2	2	$9{,}440_{\times}10^{-2}$	3	$1{,}389_{\times}10^{-3}$
3	3	$4{,}052_{\times}10^{-2}$	4	$1{,}577_{\times}10^{-5}$
4	4	$1{,}429_{\times}10^{-3}$	5	$1{,}103_{\times}10^{-7}$
5	5	$7{,}969_{\times}10^{-4}$	6	$5{,}227_{\times}10^{-10}$
6	6	$1{,}781_{\times}10^{-5}$	7	$1{,}791_{\times}10^{-12}$
7	7	$1{,}087_{\times}10^{-5}$	8	$4{,}441_{\times}10^{-15}$
8	8	$1{,}647_{\times}10^{-7}$	9	$4{,}441_{\times}10^{-16}$

- Utilizadas regras simples de Newton-Cotes.
- Número de pontos de Gauss-Legendre igual a $m+1$, sendo m o número de subintervalos de Newton-Cotes.

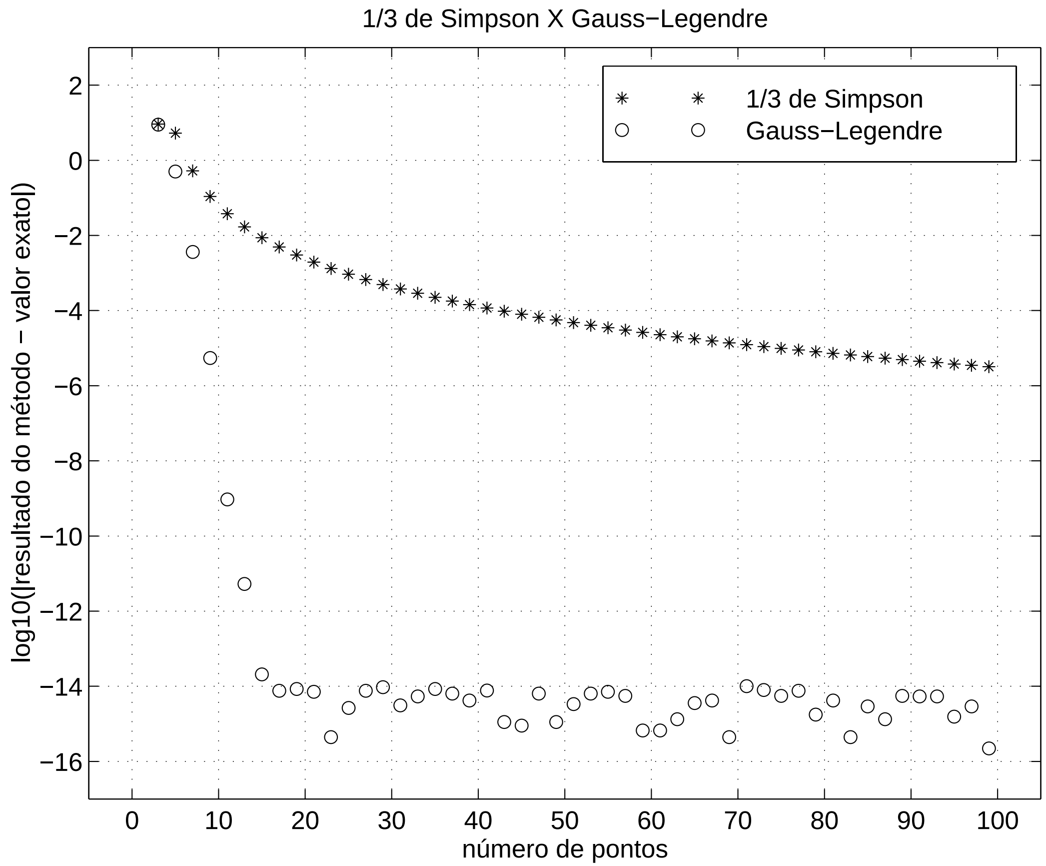
Comparação dos métodos de integração simples

$$\int_0^5 x\,\text{sen}(3x)\;dx = \left.\frac{\text{sen}(3x)}{9} - \frac{x\cos(3x)}{3}\right|_0^5 \approx 1{,}3384.$$



Comparação entre a regra do 1/3 de Simpson e Gauss-Legendre

m	1/3 de Simpson	Gauss-Legendre
2	$9{,}188_\times 10^{0}$	$8{,}819_\times 10^{0}$
4	$5{,}269_\times 10^{0}$	$4{,}990_\times 10^{-1}$
6	$5{,}221_\times 10^{-1}$	$3{,}629_\times 10^{-3}$
8	$1{,}093_\times 10^{-1}$	$5{,}452_\times 10^{-6}$
10	$3{,}799_\times 10^{-2}$	$9{,}417_\times 10^{-10}$
12	$1{,}688_\times 10^{-2}$	$5{,}250_\times 10^{-12}$
14	$8{,}689_\times 10^{-3}$	$8{,}660_\times 10^{-15}$
16	$4{,}944_\times 10^{-3}$	$1{,}110_\times 10^{-15}$



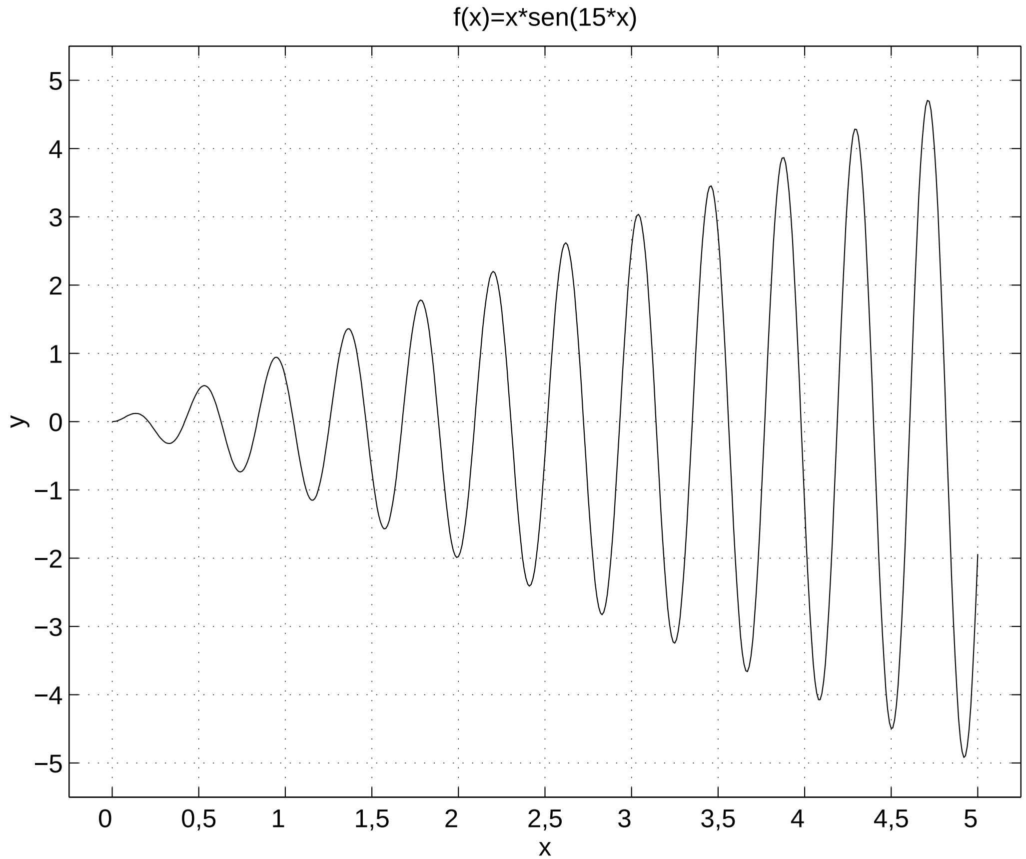
$$|\text{ método} - \text{exato }|$$

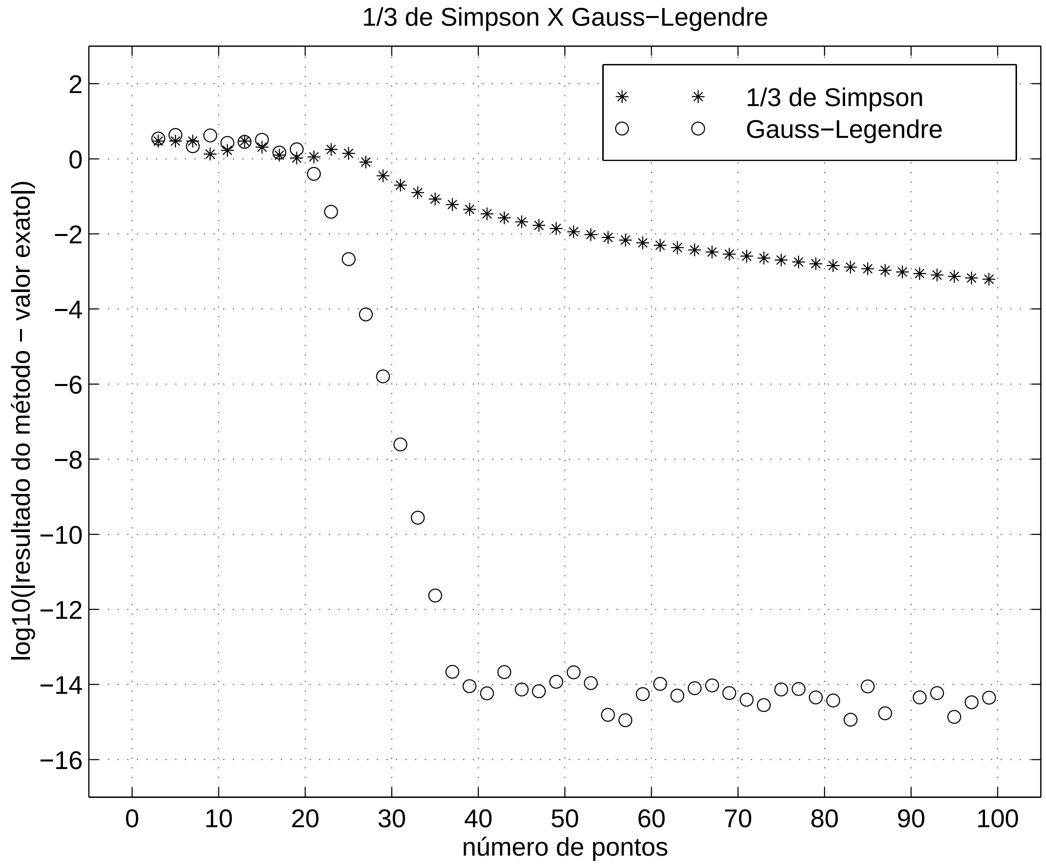
$$\log_{10}(|\text{ método} - \text{exato }|) \times m$$

Integração de uma função não suave

$$\int_0^5 x\,\mathrm{sen}(15x)\,dx = \left.\frac{\mathrm{sen}(15x)}{225} - \frac{x\cos(15x)}{15}\right|_0^5 \approx -0{,}3090.$$

$\Vert\Leftarrow$





$f(x) = x\,\mathrm{sen}(15x).$ 1/3 de Simpson e Gauss-Legendre.

Integração numérica iterativa

- Fórmulas de integração calculam com grau crescente de exatidão à medida que aumenta o número de pontos.
- Principalmente a quadratura de Gauss-Legendre.
- Integração numérica iterativa:
  - inicialmente, a integral é calculada com $n = 8$ pontos;
  - depois calculada com $n = 13$ pontos;
  - se a diferença relativa entre os dois valores for menor ou igual a uma dada tolerância então o processo termina;
  - senão valor de n é incrementado, seguindo uma seqüência de Fibonacci;
  - a integral é calculada novamente;
  - processo repete até que a diferença relativa entre os dois últimos valores da integral seja menor ou igual à tolerância predefinida.

Integração iterativa pelo método de Gauss-Legendre

Algoritmo Gauss-Legendre_iterativo
{ **Objetivo:** Integrar uma função iterativamente pelo método de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada a, b, $Toler$, $IterMax$
  { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída $Integral$, $Delta$, $CondErro$
  { valor da integral, menor diferença relativa obtida e condição de erro, sendo }
  { $CondErro = 0$ se $Delta \leq Toler$ e $CondErro = 1$ se $Delta > Toler$ }
  $Iter \leftarrow 1$; $n1 \leftarrow 5$; $n2 \leftarrow 8$
  $[Int, CondErro] \leftarrow$ **Gauss–Legendre**$(a, b, n2)$ (ver algoritmo)
  escreva $Iter, n2, Int$
  { sucessivos cálculos das integrais }
  repita
    $Iter \leftarrow Iter + 1$; $n \leftarrow n1 + n2$
    $[Integral, CondErro] \leftarrow$ **Gauss–Legendre**(a, b, n)
    se $Integral \neq 0$ **então**
      $Delta \leftarrow \text{abs}((Integral - Int)/Integral)$
    senão
      $Delta \leftarrow \text{abs}(Integral - Int)$
    fimse
    escreva $Iter, n, Integral, Delta$
    se $Delta \leq Toler$ **ou** $Iter = IterMax$ **então interrompa**, **fimse**
    $Int \leftarrow Integral$; $n1 \leftarrow n2$; $n2 \leftarrow n$
  fimrepita
  { teste de convergência }
  se $Delta \leq Toler$ **então** $CondErro \leftarrow 0$ **senão** $CondErro \leftarrow 1$, **fimse**
fimalgoritmo

$\Vert\Leftarrow$

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 25 Calcular $\int_0^{20} x\,\mathrm{sen}(15x)dx$ utilizando o algoritmo, com uma tolerância de 10^{-10} e com, no máximo, 10 iterações (ver figura).

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 20
Toler = 1e-10
IterMax = 10
% produzem os resultados
   Integracao iterativa pelo metodo de Gauss-Legendre
     Iter     n         Integral      Dif. relativa
       1      8     32.7305341124
       2     13     24.9187432521      3.135e-01
       3     21    -16.8767733573      2.477e+00
       4     34     49.5529883366      1.341e+00
       5     55    -31.2365609799      2.586e+00
       6     89      0.0247820806      1.261e+03
       7    144      0.0250187998      9.462e-03
       8    233      0.0250187997      1.006e-11

Integral =  2.5018799750e-02
Delta    =  1.00649e-11
CondErro =  0
```

Integração dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes

- Cálculo de integral dupla definida

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx. \tag{22}$$

- Função integrando $f(x, y)$ aproximada por polinômio interpolador.
- Integral deste polinômio é obtida analiticamente.
- Fazendo

$$G(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

$$I = \int_a^b G(x)\, dx. \tag{23}$$

- Cálculo de uma integral dupla consiste na solução de duas integrais simples.

Fórmulas simples

- Para resolver uma integral simples aplica-se qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.
- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson em (23),

$$I = \int_a^b G(x)\,dx = \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)), \tag{24}$$

$$I = \frac{1}{3}h_x \sum_{i=0}^{2} c_{x_i} G(x_i),$$

- onde $h_x = (b-a)/2$, $c_{x_0} = c_{x_2} = 1$, $c_{x_1} = 4$ e

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy,\ \ i = 0, 1, 2.$$

Fórmulas simples cont.

- Para o cálculo de $G(x_i)$ utiliza-se qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes, por exemplo, a regra dos 3/8 de Simpson

$$\begin{aligned} G(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y)\, dy \\ &= \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)), \end{aligned}$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8}h_y \sum_{j=0}^{3} c_{y_j} f(x_i, y_j), \tag{25}$$

- onde $h_y = (d - c)/3$, $c_{y_0} = c_{y_3} = 1$, $c_{y_1} = c_{y_2} = 3$ e
- $f(x_i, y_j)$: função integrando no ponto (x_i, y_j).
- Levando os valores de $G(x_i)$ dados por (25), em (24)

$$I = \frac{1}{3}h_x \frac{3}{8}h_y \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j). \tag{26}$$

Exemplo de integração dupla

Exemplo 26 Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy\, dx$.

- Fazendo $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy \rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)\, dx$.
- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson em x,

$$I = \frac{1}{3} h_x (G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)),\ \text{com } h_x = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

- Cálculo de $G(x_i) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x_i + y)\, dy,\ i = 0, 1, 2$ e $x_i = a + ih_x = i\frac{\pi}{4}$, utilizando a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \frac{3}{8} h_y (\operatorname{sen}(x_i + y_0) + 3\operatorname{sen}(x_i + y_1) + 3\operatorname{sen}(x_i + y_2) + \operatorname{sen}(x_i + y_3)),$$

- com

$$h_y = \frac{d-c}{3} = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = j\frac{\pi}{12}.$$

Cálculo de $G(x_i)$

- Para $x_0 = 0 \times \frac{\pi}{4} = 0$

$$G(x_0) = \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}(\,\text{sen}(0 + y_0) + 3\,\text{sen}(0 + y_1) + 3\,\text{sen}(0 + y_2) + \,\text{sen}(0 + y_3)),$$

$$G(x_0) = \frac{\pi}{32}\left(\,\text{sen}(0) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \leadsto$$

$$G(x_0) = 0{,}2929.$$

- Para $x_1 = 1 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$$G(x_1) = \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_0\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_1\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_2\right) + \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_3\right)\right),$$

$$G(x_1) = \frac{\pi}{32}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + \,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \leadsto$$

$$G(x_1) = 0{,}7071.$$

Cálculo de $G(x_i)$ cont.

- Para $x_2 = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$$G(x_2) = \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_0\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_1\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_2\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_3\right)\right),$$

$$G(x_2) = \frac{\pi}{32}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \leadsto$$

$$G(x_2) = 0{,}7071.$$

- Considerando que

$$I = \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)),$$

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}(0{,}2929 + 4 \times 0{,}7071 + 0{,}7071) \leadsto$$

$$I = 1{,}0023.$$

Comparação com valor analítico

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx,$$

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(x+0)\right) dx = -\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I = -\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\operatorname{sen}\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}(0)\right) \rightsquigarrow I = 1.$$

Dispositivo prático para integração dupla por Newton-Cotes

- Regra do 1/3 de Simpson utilizada para integração em x.
- Regra dos 3/8 em y.

		j	0	1	2	3
		y_j	c	$c+h_y$	$c+2h_y$	$c+3h_y$
i	x_i	$c_{x_i} \backslash c_{y_j}$	1	3	3	1
0	a	1	$\boxed{c_{x_0} \times c_{y_0}}$ $f(x_0, y_0)$	$\boxed{c_{x_0} \times c_{y_1}}$ $f(x_0, y_1)$	$\boxed{c_{x_0} \times c_{y_2}}$ $f(x_0, y_2)$	$\boxed{c_{x_0} \times c_{y_3}}$ $f(x_0, y_3)$
1	$a+h_x$	4	$\boxed{c_{x_1} \times c_{y_0}}$ $f(x_1, y_0)$	$\boxed{c_{x_1} \times c_{y_1}}$ $f(x_1, y_1)$	$\boxed{c_{x_1} \times c_{y_2}}$ $f(x_1, y_2)$	$\boxed{c_{x_1} \times c_{y_3}}$ $f(x_1, y_3)$
2	$a+2h_x$	1	$\boxed{c_{x_2} \times c_{y_0}}$ $f(x_2, y_0)$	$\boxed{c_{x_2} \times c_{y_1}}$ $f(x_2, y_1)$	$\boxed{c_{x_2} \times c_{y_2}}$ $f(x_2, y_2)$	$\boxed{c_{x_2} \times c_{y_3}}$ $f(x_2, y_3)$

$$S = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j), \text{ então por (26), tem-se } I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y S,$$

- S: soma obtida, tomando-se todas as células da tabela, do produto $c_{x_i} \times c_{y_j}$ dos coeficientes de Cotes pelo valor da função $f(x_i, y_j)$.

Exemplo do dispositivo prático

Exemplo 27 Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{sen}(x+y)\, dy\, dx$ usando o dispositivo prático.

$$h_x = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi/2 - 0}{2} \to h_x = \frac{\pi}{4} \text{ e } x_i = a + ih_x = 0 + i\frac{\pi}{4} \to x_i = i\frac{\pi}{4},$$

$$h_y = \frac{d-c}{3} = \frac{\pi/4 - 0}{3} \to h_y = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = 0 + j\frac{\pi}{12} \to y_j = j\frac{\pi}{12}.$$

		j	0	1	2	3
		y_j	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
i	x_i	$c_{x_i} \backslash c_{y_j}$	1	3	3	1
0	0	1	$\boxed{1}$ 0,0000	$\boxed{3}$ 0,2588	$\boxed{3}$ 0,5000	$\boxed{1}$ 0,7071
1	$\pi/4$	4	$\boxed{4}$ 0,7071	$\boxed{12}$ 0,8660	$\boxed{12}$ 0,9659	$\boxed{4}$ 1,0000
2	$\pi/2$	1	$\boxed{1}$ 1,0000	$\boxed{3}$ 0,9659	$\boxed{3}$ 0,8660	$\boxed{1}$ 0,7071

$$I = \frac{1}{3}h_x\frac{3}{8}h_y S = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\frac{3}{8}\frac{\pi}{12}38{,}9975 \leadsto I = 1{,}0023.$$

Fórmulas compostas

- Melhorar a exatidão da integral: subdividir o intervalo $[a, b]$ em m_x subintervalos iguais.
- m_x: múltiplo do grau n_x do polinômio interpolador utilizado para obter a regra de integração em x.
- Regra do 1/3 de Simpson: m_x deve ser múltiplo de 2 $(= n_x)$.
- Aplicando (24) a cada 3 $(= n_x + 1)$ pontos,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b G(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)) + \frac{1}{3}h_x(G(x_2) + 4G(x_3) + G(x_4)) + \\
&\quad \ldots + \ \frac{1}{3}h_x(G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{3}h_x(&G(x_0) + 4G(x_1) + 2G(x_2) + 4G(x_3) + 2G(x_4) + \ldots \\
&+ 2G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})) \rightsquigarrow
\end{aligned}
$$

Fórmulas compostas cont.

$$I = \frac{1}{3} h_x \sum_{i=0}^{m_x} c_{x_i} G(x_i), \tag{27}$$

- onde $c_{x_0} = c_{x_{m_x}} = 1, c_{x_i} = 4$ para todo i ímpar, $c_{x_i} = 2$ para todo i par e $h_x = (b-a)/m_x$.
- Cálculo de $G(x_i), i = 0, 1, \ldots, m_x$: pode ser utilizada qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.
- Para a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy = \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)). \tag{28}$$

- Para uma melhor exatidão: subdivide-se o intervalo $[c, d]$ em m_y subintervalos iguais.

Fórmulas compostas cont.

- m_y: múltiplo do grau n_y do polinômio interpolador usado para construir a regra de integração em y.
- No caso em questão múltiplo de 3 $(= n_y)$.
- Aplicando-se (28) a cada 4 $(= n_y + 1)$ pontos,

$$
\begin{aligned}
G(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y)\, dy \\
&= \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)) \\
&\quad + \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_3) + 3f(x_i, y_4) + 3f(x_i, y_5) + f(x_i, y_6)) + \ldots \\
&\quad + \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_{m_y-3}) + 3f(x_i, y_{m_y-2}) + 3f(x_i, y_{m_y-1}) + f(x_i, y_{m_y})),
\end{aligned}
$$

Fórmulas compostas cont.

$$G(x_i)=\frac{3}{8}h_y(f(x_i,y_0)+3f(x_i,y_1)+3f(x_i,y_2)+2f(x_i,y_3)$$
$$+3f(x_i,y_4)+3f(x_i,y_5)+2f(x_i,y_6)+\ldots$$
$$+2f(x_i,y_{m_y-3})+3f(x_i,y_{m_y-2})+3f(x_i,y_{m_y-1})+f(x_i,y_{m_y})),$$

$$G(x_i)=\frac{3}{8}h_y\sum_{j=0}^{m_y}c_{y_j}f(x_i,y_j),\ i=0,1,2,\ldots,m_x,$$

- onde $c_{y_0}=c_{y_{m_y}}=1$, e para os j's restantes, $c_{y_j}=2$ se j for múltiplo de 3 e $c_{y_j}=3$ se j não for múltiplo de 3 e $h_y=(d-c)/m_y$.
- Levando os valores de $G(x_i)$ em (27),

$$I=\frac{1}{3}h_x\sum_{i=0}^{m_x}c_{x_i}\left(\frac{3}{8}h_y\sum_{j=0}^{m_y}c_{y_j}f(x_i,y_j)\right)\rightsquigarrow I=\frac{1}{3}h_x\frac{3}{8}h_y\sum_{i=0}^{m_x}\sum_{j=0}^{m_y}c_{x_i}c_{y_j}f(x_i,y_j).$$

Equação geral da integração dupla por Newton-Cotes

- Generalizando para qualquer grau do polinômio interpolador

$$\boxed{I = \frac{n_x}{d_{n_x}} h_x \frac{n_y}{d_{n_y}} h_y \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j)}, \tag{29}$$

- sendo

$$h_x = \frac{b-a}{m_x} \text{ e } h_y = \frac{d-c}{m_y}.$$

- Valores de d_{n_x}, d_{n_y}, c_{x_i} e c_{y_j}, para $n = 1, 2, \ldots, 8$, são dados na tabela.

Algoritmo para integração dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes

```
Algoritmo Newton-Cotes-Dupla
{ Objetivo: Cálculo de integral dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes }
parâmetros de entrada ax, bx, nx, mx, ay, by, ny, my
    { limite inferior em x, limite superior em x, }
    { grau do polinômio em x, número de subintervalos em x, }
    { limite inferior em y, limite superior em y, }
    { grau do polinômio em y, número de subintervalos em y }
parâmetros de saída Integral, CondErro
    { valor da integral e condição de erro, sendo }
    { CondErro = 0 se não houve erro de consistência dos parâmetros dados, }
    { CondErro = 1 se (n < 1 ou n > 8), }
    { CondErro = 2 se resto(m, n) ≠ 0 e }
    { CondErro = 3 se ambas as condições ocorreram. }
    d(1) ← 2; d(2) ← 6; d(3) ← 8; d(4) ← 90; d(5) ← 288; d(6) ← 840
    d(7) ← 17280; d(8) ← 28350
    c(1) ← 1; c(2) ← 1; c(3) ← 4; c(4) ← 1; c(5) ← 3; c(6) ← 7; c(7) ← 32
    c(8) ← 12; c(9) ← 19; c(10) ← 75; c(11) ← 50; c(12) ← 41; c(13) ← 216
    c(14) ← 27; c(15) ← 272; c(16) ← 751; c(17) ← 3577; c(18) ← 1323
    c(19) ← 2989; c(20) ← 989; c(21) ← 5888; c(22) ← −928; c(23) ← 10496
    c(24) ← −4540
    { consistência dos parâmetros }
    CondErro ← 0; Integral ← 0
    se nx < 1 ou nx > 8 ou ny < 1 ou ny > 8 então CondErro ← CondErro + 1, fim se
    se resto(mx, nx) ≠ 0 ou resto(my, ny) ≠ 0 então CondErro ← CondErro + 2, fim se
    se CondErro ≠ 0 então abandone, fim se
    { cálculo da integral }
    px ← trunca(0,25 ∗ (nx ∗ (nx + 2) + resto(nx, 2)))
    py ← trunca(0,25 ∗ (ny ∗ (ny + 2) + resto(ny, 2)))
    hx ← (bx − ax)/mx; hy ← (by − ay)/my
    para i ← 0 até mx faça
        x ← ax + i ∗ hx; jx ← px + trunca(0,5 ∗ nx − abs(resto(i, nx) − 0,5 ∗ nx))
        kx ← 1 + trunca((nx − resto(i, nx))/nx) − trunca((mx − resto(i, mx))/mx)
        para j ← 0 até my faça
            y ← ay + j ∗ hy; jy ← py + trunca(0,5 ∗ ny − abs(resto(j, ny) − 0,5 ∗ ny))
            ky ← 1 + trunca((ny − resto(j, ny))/ny) − trunca((my − resto(j, my))/my)
            fxy ← f(x, y)    { avaliar a função integrando em (x, y) }
            Integral ← Integral + fxy ∗ c(jx) ∗ kx ∗ c(jy) ∗ ky
            se j = 0 então escreva i, x, c(jx) ∗ kx, j, y, c(jy) ∗ ky, fxy
            senão escreva j, y, c(jy) ∗ ky, fxy
            fim se
        fim para
    fim para
    Integral ← nx ∗ ny ∗ hx ∗ hy/(d(nx) ∗ d(ny)) ∗ Integral
fim algoritmo
```

|⇚

Exemplo de integração dupla

Exemplo 28 Calcular $\int_2^5 \int_0^1 \text{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$, utilizando o algoritmo, com $n_x = 3$ (regra dos 3/8), $m_x = 3$ subintervalos em x, $n_y = 2$ (regra do 1/3) e $m_y = 4$ subintervalos em y.

```
% Os parametros de entrada
ax = 2
bx = 5
nx = 3
mx = 3
ay = 0
by = 1
ny = 2
my = 4
% fornecem os resultados
                Integracao dupla por Newton-Cotes
  i       x(i)       c(i)    j       y(j)       c(j)  f(x(i),y(j))
  0    2.00000e+00     1     0    0.00000e+00     1   -7.56802e-01
                             1    2.50000e-01     4   -7.96151e-01
                             2    5.00000e-01     2   -8.94989e-01
                             3    7.50000e-01     4   -9.88788e-01
                             4    1.00000e+00     1   -9.58924e-01
  1    3.00000e+00     3     0    0.00000e+00     1    4.12118e-01
                             1    2.50000e-01     4    3.54405e-01
                             2    5.00000e-01     2    1.73889e-01
                             3    7.50000e-01     4   -1.37287e-01
                             4    1.00000e+00     1   -5.44021e-01
  2    4.00000e+00     3     0    0.00000e+00     1   -2.87903e-01
                             1    2.50000e-01     4   -3.47156e-01
                             2    5.00000e-01     2   -5.15882e-01
                             3    7.50000e-01     4   -7.54267e-01
                             4    1.00000e+00     1   -9.61397e-01
  3    5.00000e+00     1     0    0.00000e+00     1   -1.32352e-01
                             1    2.50000e-01     4   -7.01835e-02
                             2    5.00000e-01     2    1.16990e-01
                             3    7.50000e-01     4    4.16652e-01
                             4    1.00000e+00     1    7.62558e-01
Integral =  -0.78758
CondErro =   0
```

Integração dupla via fórmulas de Gauss-Legendre

- Similar à integração simples: fórmulas de Gauss-Legendre podem ser utilizadas para o cálculo aproximado da integral dupla definida (22)

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

- Fazendo

$$G(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

- tem-se que

$$I = \int_a^b G(x)\, dx.$$

- Cálculo de integral dupla por Gauss-Legendre consiste na determinação de duas integrais simples.

Fórmula para dois pontos

- Fazendo mudança de variável de x para t, sendo $-1 \leq t \leq 1$,

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \longrightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

- Tomando

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}.$$

- Definindo

$$H(t) = \frac{b-a}{2}G(x(t)),$$

- tem-se

$$I = \int_a^b G(x)\, dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{b-a}H(t)\frac{b-a}{2}\, dt = \int_{-1}^1 H(t)\, dt.$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Resolvendo a integral simples por Gauss-Legendre, com $n_x = 2$ pontos,

$$I = \int_{-1}^{1} H(t)\, dt = A_1 H(t_1) + A_2 H(t_2), \tag{30}$$

- onde $A_i,\ i = 1, 2$ são os pesos e t_i são as abscissas ou os zeros do polinômio de Legendre de grau $n_x = 2$.
- Os valores de A_i e t_i podem ser obtidos na tabela ou gerados pelo algoritmo.
- Particularmente, para $n_x = 2$: $A_1 = A_2 = 1$ e $t_1 = -1/\sqrt{3}$ e $t_2 = 1/\sqrt{3}$.

Fórmula para dois pontos cont.

- Para o cálculo de $G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy$ é feita uma mudança de variável de y para u tal que $-1 \le u \le 1$,

$$y = y(u) = \frac{d-c}{2}u + \frac{c+d}{2} \longrightarrow dy = \frac{d-c}{2}\, du$$

- e, então, toma-se

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2}.$$

- Definindo

$$F_i(u) = \frac{d-c}{2} f(x_i, y(u)),$$

- tem-se

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy = \int_{-1}^{1} \frac{2}{d-c} F_i(u) \frac{d-c}{2}\, du = \int_{-1}^{1} F_i(u)\, du.$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Usando a fórmula para $n_y = 2$ pontos,

$$G(x_i) = \int_{-1}^{1} F_i(u)\,du = B_1F_i(u_1) + B_2F_i(u_2),\ i = 1, 2,$$

- onde $B_j,\ j = 1, 2$, são os pesos e $F_i(u_j) = \dfrac{d-c}{2} f(x_i, y_j)$, para $j = 1, 2$.
- Logo,

$$H(t_i) = \frac{b-a}{2} G(x_i) = \frac{b-a}{2}(B_1F_i(u_1) + B_2F_i(u_2)),\ i = 1, 2.$$

- Levando-se esses valores de $H(t_i)$ em (30),

$$I = A_1\left(\frac{b-a}{2}(B_1F_1(u_1) + B_2F_1(u_2))\right) + A_2\left(\frac{b-a}{2}(B_1F_2(u_1) + B_2F_2(u_2))\right).$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Substituindo $F_i(u_j)$, $j = 1, 2$,

$$I = A_1 \left(\frac{b-a}{2} \left(B_1 \frac{d-c}{2} f(x_1, y_1) + B_2 \frac{d-c}{2} f(x_1, y_2) \right) \right) + A_2 \left(\frac{b-a}{2} \left(B_1 \frac{d-c}{2} f(x_2, y_1) + B_2 \frac{d-c}{2} f(x_2, y_2) \right) \right).$$

- Rearranjando,

$$I = \frac{(b-a)}{2} \frac{(d-c)}{2} (A_1 B_1 f(x_1, y_1) + A_1 B_2 f(x_1, y_2) + A_2 B_1 f(x_2, y_1) + A_2 B_2 f(x_2, y_2)),$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c) \sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=1}^{2} B_j f(x_i, y_j)}. \quad (31)$$

Dispositivo prático para integração dupla por Gauss-Legendre

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S, \quad \text{sendo} \quad S = \sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=1}^{2} B_j f(x_i, y_j),$$

			j	1	2
			u_j	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
			y_j	y_1	y_2
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	1	1
1	$-1/\sqrt{3}$	x_1	1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$
2	$1/\sqrt{3}$	x_2	1	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$

.

Exemplo de uso do dispositivo prático

Exemplo 29 Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx$ usando a fórmula de Gauss-Legendre para $n_x = n_y = 2$ pontos.

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi/2-0}{2}t_i + \frac{0+\pi/2}{2} \to x_i = \frac{\pi}{4}(t_i+1),$$

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{\pi/4-0}{2}u_j + \frac{0+\pi/4}{2} \to y_j = \frac{\pi}{8}(u_j+1),$$

			j	1	2
			u_j	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
			y_j	0,1660	0,6194
i	t_i	x_i	$A_i\backslash B_j$	1	1
1	$-1/\sqrt{3}$	0,3319	1	0,4776	0,8142
2	$1/\sqrt{3}$	1,2388	1	0,9863	0,9590

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(\pi/2-0)(\pi/4-0) \times 3{,}2371 \rightsquigarrow I = 0{,}9984.$$

Fórmula geral para integração dupla por Gauss-Legendre

- Fórmula (31) para $n_x = n_y = 2$ pontos pode ser modificada para um número qualquer de pontos em x e em y.

$$\boxed{I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)\sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j)}, \qquad (32)$$

- onde $x_i = \dfrac{b-a}{2}t_i + \dfrac{a+b}{2}$ e $y_j = \dfrac{d-c}{2}u_j + \dfrac{c+d}{2}$.
- Pesos: $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n_x$ e $B_j,\ j = 1, 2, \ldots, n_y$.
- Abscissas: t_i e u_j podem ser obtidos na tabela ou gerados pelo algoritmo.

Dispositivo prático para integração dupla por Gauss-Legendre

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S, \text{ sendo } S = \sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j),$$

			j	1	2	$\ldots$	n_y
			u_j	u_1	u_2	$\ldots$	u_{n_y}
			y_j	y_1	y_2	$\ldots$	u_{n_y}
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	$\ldots$	B_{n_y}
1	t_1	x_1	A_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\ldots$	$f(x_1, y_{n_y})$
2	t_2	x_2	A_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\ldots$	$f(x_2, y_{n_y})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
n_x	t_{n_x}	x_{n_x}	A_{n_x}	$f(x_{n_x}, y_1)$	$f(x_{n_x}, y_2)$	$\ldots$	$f(x_{n_x}, y_{n_y})$

.

Exemplo de uso do dispositivo prático

Exemplo 30 Calcular $\int_1^4 \int_0^2 (y^2 \log_{10}(3x))\, dy\, dx$ usando Gauss-Legendre com $n_x = 3$ e $n_y = 4$.

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{4-1}{2} t_i + \frac{1+4}{2} \rightsquigarrow x_i = 1{,}5 t_i + 2{,}5,$$

$$y_j = \frac{d-c}{2} u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{2-0}{2} u_j + \frac{0+2}{2} \rightsquigarrow y_j = u_j + 1,$$

			j	1	2	3	4
			u_j	−0,8611	−0,3400	0,3400	0,8611
			y_j	0,1389	0,6600	1,3400	1,8611
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	0,3479	0,6521	0,6521	0,3479
1	−0,7746	1,3381	0,5556	0,0116	0,2629	1,0838	2,0907
2	0,0000	2,5000	0,8889	0,0169	0,3812	1,5713	3,0309
3	0,7746	3,6619	0,5556	0,0201	0,4534	1,8689	3,6051

.

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(4-1)(2-0) \times 4{,}5107 \rightsquigarrow I = 6{,}7660.$$

Algoritmo para integração dupla pelas fórmulas de Gauss-Legendre

```
Algoritmo Gauss-Legendre-Dupla
{ Objetivo: Integração dupla de função pelas fórmulas de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada ax, bx, nx, ay, by, ny
   { limite inferior em x, limite superior em x, número de pontos em x, }
   { limite inferior em y, limite superior em y, número de pontos em y }
parâmetros de saída Integral, CondErro
   { valor da integral e condição de erro, sendo }
   { CondErro = 0 se não houve erro (nx ≥ 1 e ny ≥ 1) e }
   { CondErro = 1 se nx < 1 ou ny < 1 }
   { cálculo dos pesos e abscissas }
   [Avet, Tvet, CondErro] ← PesAbsGL(nx)   (ver Figura ??)
   Integral ← 0; se CondErro ≠ 0, abandone, fim se
   se ny = nx então
      para j ← 1 até trunca(0,5 ∗ (nx + 1)) faça
         Bvet(j) ← Avet(j); Uvet(j) ← Tvet(j)
      fim para
   senão
      [Bvet, Uvet, CondErro] ← PesAbsGL(ny)
      se CondErro ≠ 0, abandone, fim se
   fim se
   { cálculo da integral dupla }
   ex1 ← (bx − ax)/2; ex2 ← (ax + bx)/2; ey1 ← (by − ay)/2; ey2 ← (ay + by)/2
   se resto(nx, 2) = 0 então cx1 ← 1; cx2 ← 0,5, senão cx1 ← 0; cx2 ← 1, fim se
   se resto(ny, 2) = 0 então cy1 ← 1; cy2 ← 0,5, senão cy1 ← 0; cy2 ← 1, fim se
   para i ← 1 até nx faça
      kx ← trunca(i − 0,5 ∗ (nx + 1) + sinal(i − 0,5 ∗ (nx + cx1)) ∗ cx2)
      tx ← sinal(kx) ∗ Tvet(abs(kx)); Axx ← Avet(abs(kx))
      x ← ex1 ∗ tx + ex2; Soma ← 0
      para j ← 1 até ny faça
         ky ← trunca(j − 0,5 ∗ (ny + 1) + sinal(j − 0,5 ∗ (ny + cy1)) ∗ cy2)
         ty ← sinal(ky) ∗ Uvet(abs(ky)); Ayy ← Bvet(abs(ky))
         y ← ey1 ∗ ty + ey2
         fxy ← f(x, y)   { avaliar a função integrando em (x, y) }
         Soma ← Soma + Ayy ∗ fxy
         se j = 1 então escreva i, tx, x, Axx, j, ty, y, Ayy, fxy
         senão escreva j, ty, y, Ayy, fxy, fim se
      fim para
      Integral ← Integral + Axx ∗ Soma
   fim para
   Integral ← ex1 ∗ ey1 ∗ Integral
fim algoritmo
```

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 31 Calcular $\int_2^6 \int_1^3 \sqrt{x^2 + y}\ \cos(xy)\ dy\ dx$ utilizando o algoritmo, com $n_x = 5$ e $n_y = 4$.

```
% Os parametros de entrada
ax = 2
bx = 6
nx = 5
ay = 1
by = 3
ny = 4
% fornecem os resultados
                   Integracao dupla por Gauss-Legendre
  i   t(i)     x(i)     A(i)    j   u(j)     y(j)     B(j)   f(x(i),y(j))
  1 -0.9062  2.188e+00 0.2369   1 -0.8611  1.139e+00 0.3479 -1.93747e+00
                                2 -0.3400  1.660e+00 0.6521 -2.24020e+00
                                3  0.3400  2.340e+00 0.6521  1.05584e+00
                                4  0.8611  2.861e+00 0.3479  2.76450e+00
  2 -0.5385  2.923e+00 0.4786   1 -0.8611  1.139e+00 0.3479 -3.05731e+00
                                2 -0.3400  1.660e+00 0.6521  4.45596e-01
                                3  0.3400  2.340e+00 0.6521  2.80093e+00
                                4  0.8611  2.861e+00 0.3479 -1.64659e+00
  3  0.0000  4.000e+00 0.5689   1 -0.8611  1.139e+00 0.3479 -6.47030e-01
                                2 -0.3400  1.660e+00 0.6521  3.93758e+00
                                3  0.3400  2.340e+00 0.6521 -4.27352e+00
                                4  0.8611  2.861e+00 0.3479  1.88500e+00
  4  0.5385  5.077e+00 0.4786   1 -0.8611  1.139e+00 0.3479  4.54970e+00
                                2 -0.3400  1.660e+00 0.6521 -2.84341e+00
                                3  0.3400  2.340e+00 0.6521  4.10146e+00
                                4  0.8611  2.861e+00 0.3479 -2.02780e+00
  5  0.9062  5.812e+00 0.2369   1 -0.8611  1.139e+00 0.3479  5.57848e+00
                                2 -0.3400  1.660e+00 0.6521 -5.80491e+00
                                3  0.3400  2.340e+00 0.6521  3.07129e+00
                                4  0.8611  2.861e+00 0.3479 -3.65773e+00

Integral =   1.5683954289
CondErro =   0
```

Comparação dos métodos para integração dupla

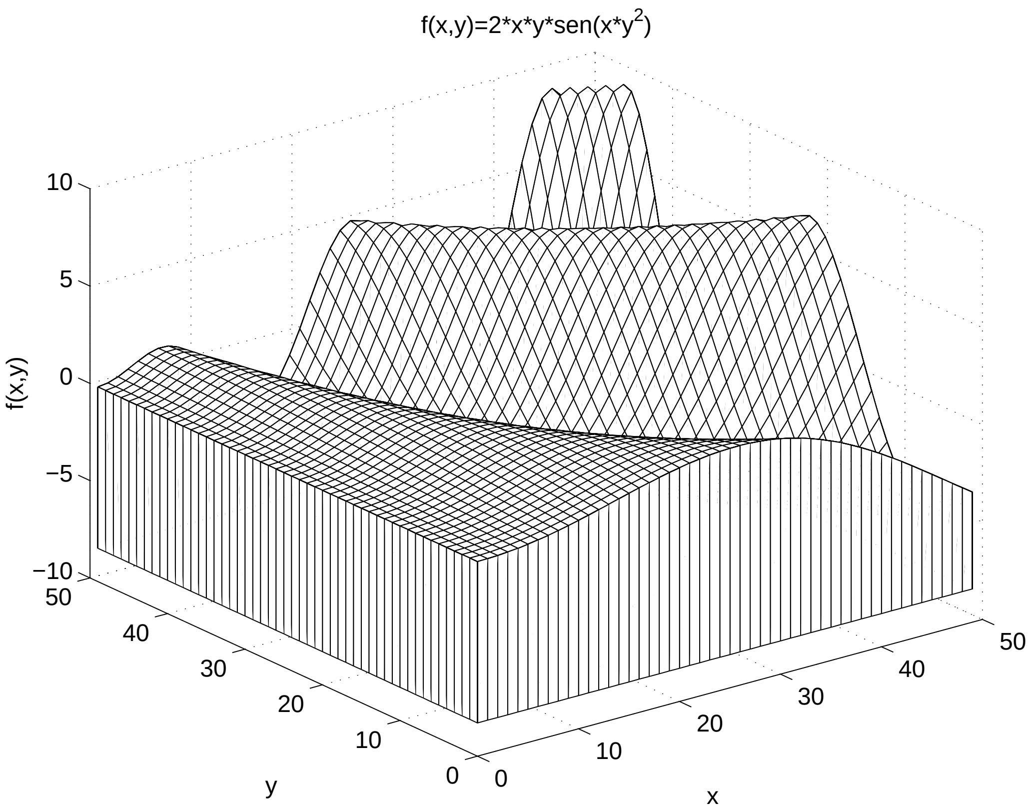
- Primeiro teste

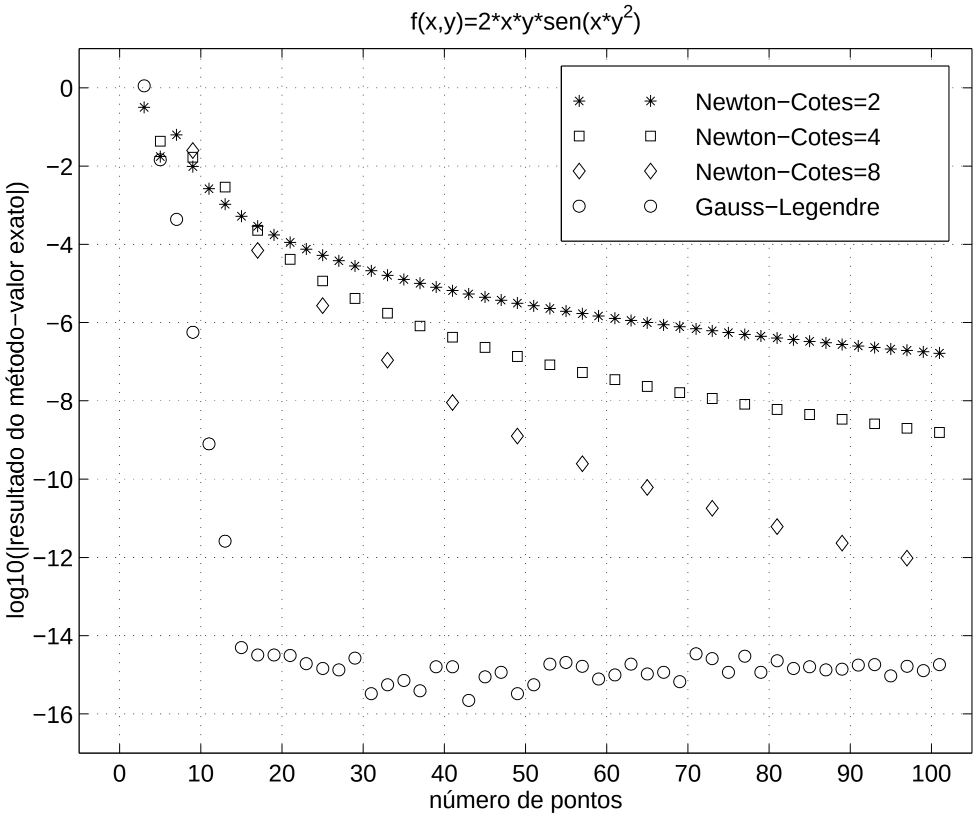
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2xy \operatorname{sen}(xy^2)\, dy\, dx.$$

- Solução analítica: $I = (4 \operatorname{sen}(\pi^3/8) - \operatorname{sen}(\pi^3/2))/\pi^2 \approx -0{,}2921.$

Grau do polinômio	Número de subintervalos	Newton-Cotes	Número de pontos	Gauss-Legendre
1	1	$5{,}090_\times 10^{-1}$	2	$2{,}733_\times 10^{0}$
2	2	$3{,}154_\times 10^{-1}$	3	$1{,}123_\times 10^{0}$
3	3	$6{,}787_\times 10^{-1}$	4	$7{,}703_\times 10^{-2}$
4	4	$4{,}335_\times 10^{-2}$	5	$1{,}448_\times 10^{-2}$
5	5	$1{,}644_\times 10^{-1}$	6	$4{,}001_\times 10^{-3}$
6	6	$1{,}480_\times 10^{-2}$	7	$4{,}331_\times 10^{-4}$
7	7	$2{,}935_\times 10^{-2}$	8	$2{,}440_\times 10^{-5}$
8	8	$2{,}500_\times 10^{-2}$	9	$5{,}705_\times 10^{-7}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2xy \,\mathrm{sen}(xy^2)\; dy\; dx$$





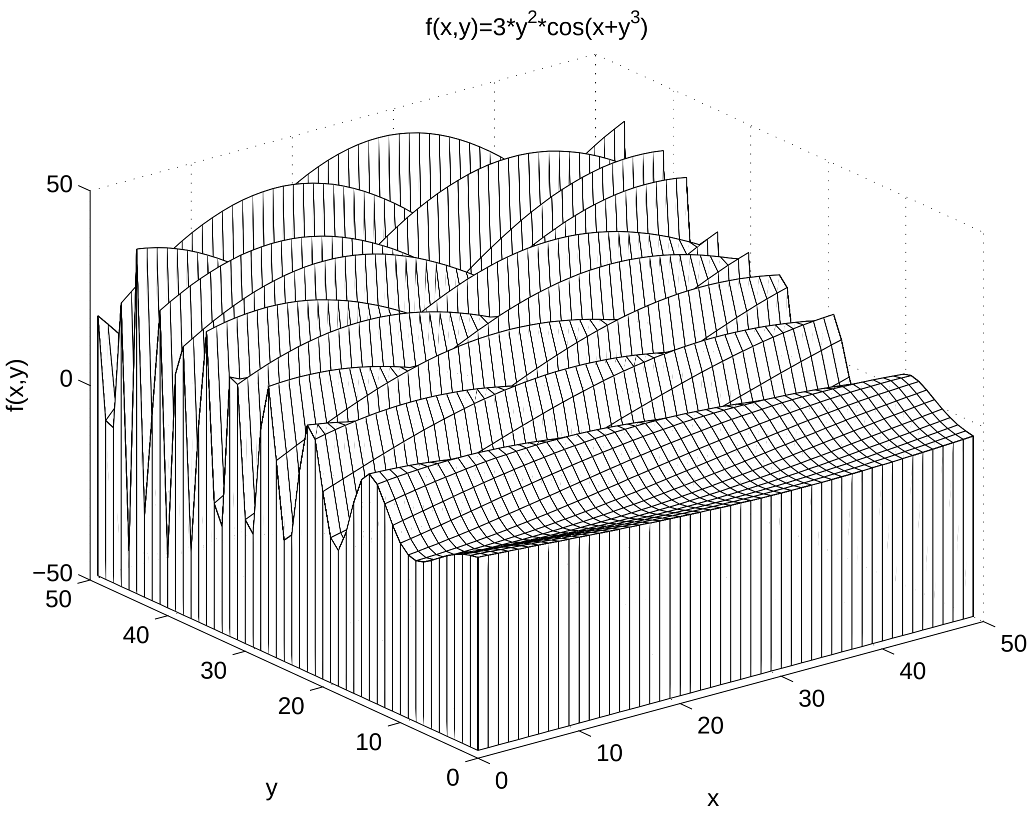
Comparação dos métodos para integração dupla

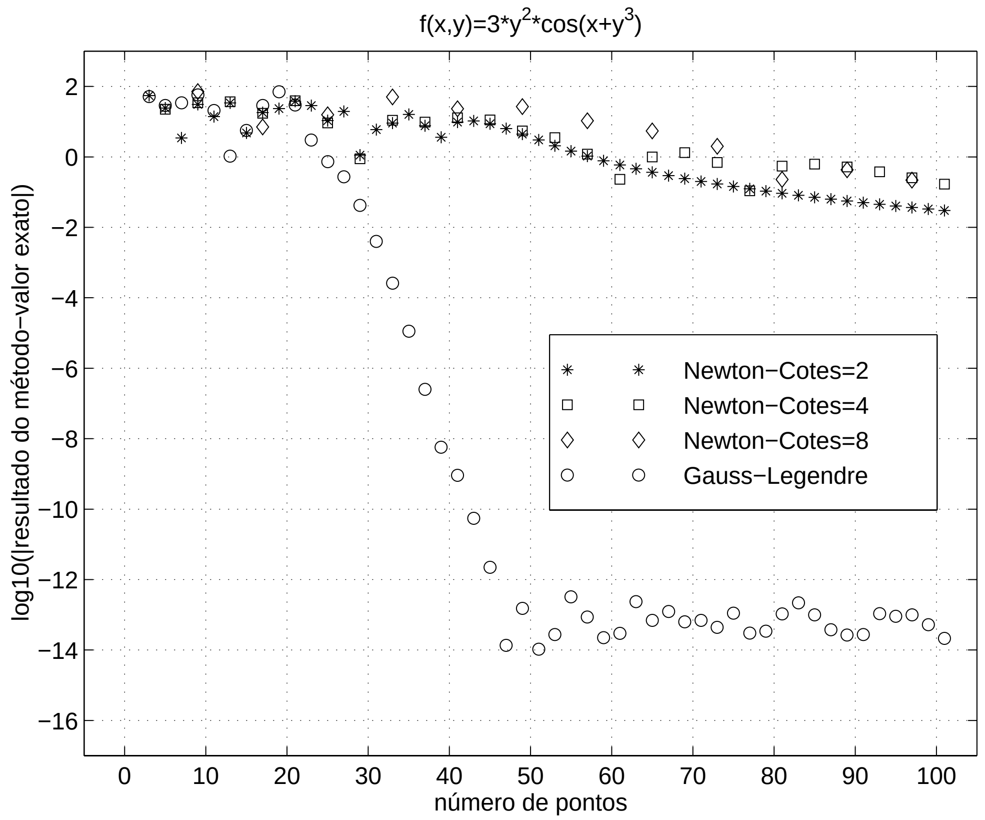
- Segundo teste

$$\int_0^{\pi} \int_1^4 3y^2 \cos(x + y^3)\, dy\, dx.$$

- Valor exato: $I = \cos(64) + \cos(\pi + 1) - \cos(1) - \cos(\pi + 64) \approx -0{,}2969.$

$$\int_0^{\pi}\int_1^4 3y^2\cos(x+y^3)\;dy\;dx.$$





Capítulo 5: Integração numérica

Fim