

Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 3: Interpolação polinomial

Capítulo 3: Interpolação polinomial

- 3.1 Polinômios interpoladores
- 3.2 Polinômios de Lagrange
- 3.3 Polinômios de Newton
- 3.4 Polinômios de Gregory-Newton
- 3.5 Escolha dos pontos para interpolação
- 3.6 Erro de truncamento da interpolação polinomial
- 3.7 Comparação das complexidades
- 3.8 *Splines* cúbicos
- 3.9 *Splines* cúbicos naturais
- 3.10 *Splines* cúbicos extrapolados
- 3.11 Avaliação dos *splines* cúbicos
- 3.12 Comparação dos *splines* cúbicos
- 3.13 Exemplos de aplicação: curva de titulação e interpolação inversa
- 3.14 Exercícios

Polinômios interpoladores

- Seja a tabela

x	0,1	0,6	0,8
y	1,221	3,320	4,953

||⇐

- Calcular valor correspondente de y para um dado x não pertencente à tabela.
- Obter função que relaciona as variáveis x e y .
- Polinômios são as funções mais utilizadas para determinar esta relação.

Polinômios interpoladores

- Seja a tabela

x	0,1	0,6	0,8
y	1,221	3,320	4,953

⇐

- Calcular valor correspondente de y para um dado x não pertencente à tabela.
- Obter função que relaciona as variáveis x e y .
- Polinômios são as funções mais utilizadas para determinar esta relação.
- Polinômio interpolador: construído para aproximar uma função.
- Fundamentais: integração numérica, cálculo de raízes de equações e solução de equações diferenciais ordinárias.
- Esquema simples: solução de um sistema de equações lineares.

Interpolação linear

- Pontos-base (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 \neq x_1$, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_1)$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1x.$$

- $P_1(x)$: polinômio interpolador de grau 1.

Interpolação linear

- Pontos-base (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 \neq x_1$, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_1)$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1x.$$

- $P_1(x)$: polinômio interpolador de grau 1.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= y_0 \\ P_1(x_1) &= y_1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

- Sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}.$$

Interpolação linear

- Pontos-base (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 \neq x_1$, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_1)$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1x.$$

- $P_1(x)$: polinômio interpolador de grau 1.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= y_0 \\ P_1(x_1) &= y_1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

- Sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}.$$

- Solução do sistema linear

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{e} \quad a_0 = y_0 - a_1x_0.$$

Polinômio interpolador

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = a_0 + a_1x = (y_0 - a_1x_0) + a_1x = y_0 + a_1(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Polinômio interpolador

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = a_0 + a_1x = (y_0 - a_1x_0) + a_1x = y_0 + a_1(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

- $\det(X) = x_1 - x_0 \neq 0$: sistema com única solução.
- Por dois pontos passa um único polinômio de grau 1.

Polinômio interpolador

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = a_0 + a_1x = (y_0 - a_1x_0) + a_1x = y_0 + a_1(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (1)$$

- $\det(X) = x_1 - x_0 \neq 0$: sistema com única solução.
- Por dois pontos passa um único polinômio de grau 1.
- Verifica-se

$$P_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad P_1(x_1) = y_1.$$

Exemplo: interpolação linear

Exemplo 1 Calcular $P_1(0,2)$ e $P_1(0,3)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

.

Exemplo: interpolação linear

Exemplo 1 Calcular $P_1(0,2)$ e $P_1(0,3)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

- Polinômio interpolador de grau 1: $P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

$$P_1(0,2) = 1,221 + \frac{3,320 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,2 - 0,1) \leadsto P_1(0,2) = 1,641.$$

$$P_1(0,3) = 1,221 + \frac{3,320 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,3 - 0,1) \leadsto P_1(0,3) = 2,061.$$

Exemplo: interpolação linear

Exemplo 1 Calcular $P_1(0,2)$ e $P_1(0,3)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

- Polinômio interpolador de grau 1: $P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

$$P_1(0,2) = 1,221 + \frac{3,320 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,2 - 0,1) \leadsto P_1(0,2) = 1,641.$$

$$P_1(0,3) = 1,221 + \frac{3,320 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,3 - 0,1) \leadsto P_1(0,3) = 2,061.$$

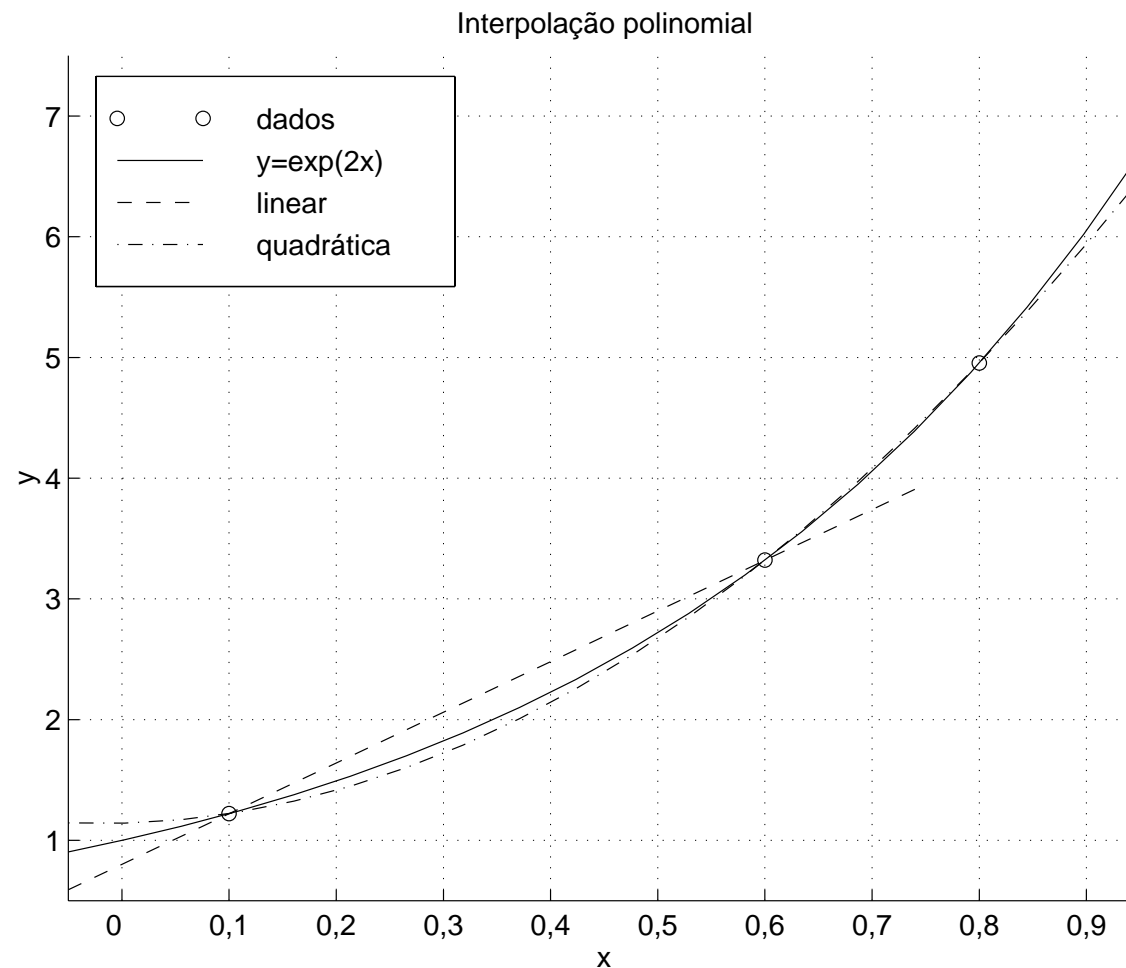
- Sendo $f(x) = e^{2x}$, os erros cometidos foram

$$\text{em } x = 0,2: 1,641 - e^{2 \times 0,2} = 0,149,$$

$$\text{em } x = 0,3: 2,061 - e^{2 \times 0,3} = 0,239.$$

Interpretação geométrica da interpolação polinomial

- Legenda ○: pontos-base; --: polinômio interpolador de grau 1; -.: polinômio interpolador de grau 2 e -: função $f(x) = e^{2x}$.



Interpolação quadrática

- Pontos-base (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com x_i distintos, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_2)$: $f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- $P_2(x)$: polinômio interpolador de grau 2.

Interpolação quadrática

- Pontos-base (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com x_i distintos, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_2)$: $f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- $P_2(x)$: polinômio interpolador de grau 2.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{array}{l} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Interpolação quadrática

- Pontos-base (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com x_i distintos, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_2)$: $f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- $P_2(x)$: polinômio interpolador de grau 2.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{aligned} P_2(x_0) &= y_0 \\ P_2(x_1) &= y_1 \\ P_2(x_2) &= y_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

- X : matriz de Vandermonde.
- $\det(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0$: sistema com única solução.
- Por três pontos passa um único polinômio de grau 2.
- Por $n + 1$ pontos passa um único polinômio de grau n .

Exemplo: interpolação quadrática

Exemplo 2 Calcular $P_2(0,2)$ usando os dados da tabela

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

Exemplo: interpolação quadrática

Exemplo 2 Calcular $P_2(0,2)$ usando os dados da tabela

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

- Cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 \\ 1 & 0,6 & 0,36 \\ 1 & 0,8 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,221 \\ 3,320 \\ 4,953 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: interpolação quadrática

Exemplo 2 Calcular $P_2(0,2)$ usando os dados da tabela

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

- Cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 \\ 1 & 0,6 & 0,36 \\ 1 & 0,8 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,221 \\ 3,320 \\ 4,953 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição LU com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0,714 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 \\ 0 & 0,7 & 0,63 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: interpolação quadrática**cont.**

- Sistema triangular inferior $Lt = Py$: $t = [1,221 \quad 3,732 \quad -0,567]^T$.
- Sistema triangular superior $Ua = t$: $a = [1,141 \quad 0,231 \quad 5,667]^T$.

Exemplo: interpolação quadrática**cont.**

- Sistema triangular inferior $Lt = Py$: $t = [1,221 \ 3,732 \ -0,567]^T$.
- Sistema triangular superior $Ua = t$: $a = [1,141 \ 0,231 \ 5,667]^T$.
- Polinômio interpolador de grau 2

$$P_2(x) = 1,141 + 0,231x + 5,667x^2 \rightsquigarrow P_2(0,2) = 1,414.$$

- Polinômio passa pelos pontos-base

$$P_2(0,1) = 1,221, \ P_2(0,6) = 3,320 \text{ e } P_2(0,8) = 4,953.$$

Metodologia alternativa para calcular polinômio $P_n(x)$

- Coeficientes do polinômio interpolador via sistema lineares.
- Conceitualmente simples.
- Requer esforço computacional da ordem de n^3 .
- Por $n + 1$ pontos passa um único polinômio de grau n .
- Metodologia alternativa: evitar a solução de um sistema de equações lineares.
- Interpolação com menor esforço computacional.

Polinômios de Lagrange

- Sejam $n + 1$ pontos-base $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.
- Abscissas x_i distintas.
- Valores $y_i = f(x_i)$ e $x \in (x_0, x_n)$.
- Construir um polinômio $L_n(x)$ de grau não superior a n

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Fórmula de Lagrange

- Construir $n + 1$ polinômios de grau n , $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$,
$$P_i(x_i) \neq 0 \text{ e } P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j.$$

Fórmula de Lagrange

- Construir $n + 1$ polinômios de grau n , $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$P_i(x_i) \neq 0 \text{ e } P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j.$$

- Forma dos polinômios

$$P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

Fórmula de Lagrange

- Construir $n + 1$ polinômios de grau n , $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$P_i(x_i) \neq 0 \text{ e } P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j.$$

- Forma dos polinômios

$$P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n),$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

- Forma geral

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Fórmula de Lagrange **cont.**

- $L_n(x)$ é de grau não superior a n .
- Escrevendo $L_n(x)$ como combinação linear dos polinômios $P_i(x)$,

$$L_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \cdots + c_nP_n(x),$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x).$$

Fórmula de Lagrange

cont.

- $L_n(x)$ é de grau não superior a n .
- Escrevendo $L_n(x)$ como combinação linear dos polinômios $P_i(x)$,

$$L_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \cdots + c_nP_n(x),$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x).$$

- Em cada x_i , considerando $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j$,

$$L_n(x_i) = y_i = c_i P_i(x_i) \longrightarrow c_i = \frac{y_i}{P_i(x_i)}, \text{ então, } L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{P_i(x_i)} P_i(x).$$

Fórmula de Lagrange

cont.

- $L_n(x)$ é de grau não superior a n .
- Escrevendo $L_n(x)$ como combinação linear dos polinômios $P_i(x)$,

$$L_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \cdots + c_nP_n(x),$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x). \quad (4)$$

- Em cada x_i , considerando $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0, \forall i \neq j$,

$$L_n(x_i) = y_i = c_i P_i(x_i) \longrightarrow c_i = \frac{y_i}{P_i(x_i)}, \text{ então, } L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{P_i(x_i)} P_i(x).$$

- Polinômio interpolador de Lagrange de grau n

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (5)$$

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 1

Exemplo 3 Calcular $L_1(0,2)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

.

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 1

Exemplo 3 Calcular $L_1(0,2)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

- Para $n = 1$,

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$L_1(0,2) = 1,221 \frac{0,2 - 0,6}{0,1 - 0,6} + 3,320 \frac{0,2 - 0,1}{0,6 - 0,1} \leadsto$$

$$L_1(0,2) = 1,641.$$

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Lagrange

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = \frac{y_0x_1 - y_0x_0 + y_1x - y_1x_0 - y_0x + y_0x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Lagrange

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = \frac{y_0x_1 - y_0x_0 + y_1x - y_1x_0 - y_0x + y_0x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- Polinômio de Lagrange de grau 1,

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- Comparando,

$$P_1(x) = L_1(x).$$

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2

Exemplo 4 Calcular $L_2(0,2)$ usando os dados da tabela do Exemplo 2

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2

Exemplo 4 Calcular $L_2(0,2)$ usando os dados da tabela do Exemplo 2

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

- Fórmula de Lagrange (5) com $n = 2$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$L_2(0,2) = 1,221 \frac{(0,2-0,6)(0,2-0,8)}{(0,1-0,6)(0,1-0,8)} + 3,320 \frac{(0,2-0,1)(0,2-0,8)}{(0,6-0,1)(0,6-0,8)} +$$

$$4,953 \frac{(0,2-0,1)(0,2-0,6)}{(0,8-0,1)(0,8-0,6)} \rightsquigarrow L_2(0,2) = 1,414.$$

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2**cont.**

- Erro com $L_2(x)$: $1,414 - e^{2 \times 0,2} = -0,078$.
- Erro com $L_1(x)$: $1,641 - e^{2 \times 0,2} = 0,149$.
- Erro com $L_2(0,2)$ menor que com $L_1(0,2)$.

Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2**cont.**

- Erro com $L_2(x)$: $1,414 - e^{2 \times 0,2} = -0,078$.
- Erro com $L_1(x)$: $1,641 - e^{2 \times 0,2} = 0,149$.
- Erro com $L_2(0,2)$ menor que com $L_1(0,2)$.
- Grau do polinômio interpolador aumenta: exatidão melhora.
- Interpolação de Lagrange: menor esforço computacional que sistema linear.

Dispositivo prático

- Seja a matriz

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}.$$

Dispositivo prático

- Seja a matriz

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}.$$

- Acrescentando o termo $(x - x_i)/(x - x_i)$ na fração de (5)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \times \frac{x - x_i}{x - x_i} \longrightarrow L_n(x) = G_d \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{G_i}. \quad (6)$$

- G_d : produto dos elementos da diagonal principal da matriz G .
- G_i : produto dos elementos da $(i + 1)$ -ésima linha de G .

Exemplo: uso do dispositivo prático

Exemplo 5 Determinar $L_2(0,2)$ por (6) usando os dados do Exemplo 4.

Exemplo: uso do dispositivo prático

Exemplo 5 Determinar $L_2(0,2)$ por (6) usando os dados do Exemplo 4.

- Matriz $G = \begin{bmatrix} 0,2 - 0,1 & 0,1 - 0,6 & 0,1 - 0,8 \\ 0,6 - 0,1 & 0,2 - 0,6 & 0,6 - 0,8 \\ 0,8 - 0,1 & 0,8 - 0,6 & 0,2 - 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,5 & -0,7 \\ 0,5 & -0,4 & -0,2 \\ 0,7 & 0,2 & -0,6 \end{bmatrix}$.

- Produtos de elementos de G ,

$$G_d = (0,1)(-0,4)(-0,6) = 0,024, \quad G_0 = (0,1)(-0,5)(-0,7) = 0,035,$$

$$G_1 = (0,5)(-0,4)(-0,2) = 0,040 \quad \text{e} \quad G_2 = (0,7)(0,2)(-0,6) = -0,084.$$

Exemplo: uso do dispositivo prático

Exemplo 5 Determinar $L_2(0,2)$ por (6) usando os dados do Exemplo 4.

- Matriz $G = \begin{bmatrix} 0,2 - 0,1 & 0,1 - 0,6 & 0,1 - 0,8 \\ 0,6 - 0,1 & 0,2 - 0,6 & 0,6 - 0,8 \\ 0,8 - 0,1 & 0,8 - 0,6 & 0,2 - 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,5 & -0,7 \\ 0,5 & -0,4 & -0,2 \\ 0,7 & 0,2 & -0,6 \end{bmatrix}$.

- Produtos de elementos de G ,

$$G_d = (0,1)(-0,4)(-0,6) = 0,024, \quad G_0 = (0,1)(-0,5)(-0,7) = 0,035,$$

$$G_1 = (0,5)(-0,4)(-0,2) = 0,040 \quad \text{e} \quad G_2 = (0,7)(0,2)(-0,6) = -0,084.$$

- Usando (6) com $n = 2$,

$$L_2(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} \right).$$

- Valor interpolado

$$L_2(0,2) = 0,024 \left(\frac{1,221}{0,035} + \frac{3,320}{0,040} + \frac{4,953}{-0,084} \right) \leadsto L_2(0,2) = 1,414.$$

Algoritmo: interpolação de Lagrange**Algoritmo Polinômio_Lagrange**

{ **Objetivo:** Interpolar valor em tabela usando polinômio de Lagrange }

parâmetros de entrada m, x, y, z

{ número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }

parâmetros de saída r { valor interpolado }

$r \leftarrow 0$

para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**

$c \leftarrow 1; d \leftarrow 1$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**

se $i \neq j$ **então**

$c \leftarrow c * (z - x(j)); d \leftarrow d * (x(i) - x(j))$

fimse

fimpara

$r \leftarrow r + y(i) * c/d$

fimpara

fimalgoritmo

||⇐

Complexidade: interpolação de Lagrange

Operações	Complexidade
adições	$2n^2 + 3n + 1$
multiplicações	$2n^2 + 3n + 1$
divisões	$n + 1$

- n : grau do polinômio interpolador.

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 6 Resolver o problema do Exemplo 4 utilizando uma implementação do algoritmo.

```
% Os parametros de entrada  
m = 3  
x = 0.1000    0.6000    0.8000  
y = 1.2210    3.3200    4.9530  
z = 0.2000  
% fornecem o resultado  
r = 1.4141
```

Polinômios de Newton

- Pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ da função $y = f(x)$.
- Operador de diferença dividida Δ^i de ordem i :
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i = [x_i]$.
- Ordem 1: $\Delta y_i = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}]$.

Polinômios de Newton

- Pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ da função $y = f(x)$.
- Operador de diferença dividida Δ^i de ordem i :
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i = [x_i]$.
- Ordem 1: $\Delta y_i = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}]$.
- Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Polinômios de Newton

- Pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ da função $y = f(x)$.
- Operador de diferença dividida Δ^i de ordem i :
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i = [x_i]$.
- Ordem 1: $\Delta y_i = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}]$.
- Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.
- Ordem n : $\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]$.

Propriedades dos operadores de diferenças divididas

- **Teorema 1 (Diferenças divididas)** *Se $y = f(x)$ for um polinômio de grau n , então suas diferenças divididas de ordem $n + 1$ são identicamente nulas, isto é, $[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0 \forall x$,*
- sendo $\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]$.

Exemplo

Exemplo 7 Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000				
1	0,2	2,760				
2	0,3	2,655				
3	0,4	2,600				
4	0,7	3,035				
5	0,9	4,125				

Exemplo

Exemplo 7 Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000	-1,20			
1	0,2	2,760	-1,05			
2	0,3	2,655	-0,55			
3	0,4	2,600	1,45			
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

Exemplo

Exemplo 7 Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000	-1,20	0,5		
1	0,2	2,760	-1,05	2,5		
2	0,3	2,655	-0,55	5,0		
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

Exemplo

Exemplo 7 Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000	-1,20	0,5	5	
1	0,2	2,760	-1,05	2,5	5	
2	0,3	2,655	-0,55	5,0	5	
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

Exemplo

Exemplo 7 Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000	-1,20	0,5	5	0
1	0,2	2,760	-1,05	2,5	5	0
2	0,3	2,655	-0,55	5,0	5	
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

Fórmula de Newton

- Sejam $n + 1$ pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, com x_i distintos, tais que $y_i = P(x_i)$, sendo $P(x)$ um polinômio de grau n .
- Diferença dividida de ordem 1

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \rightarrow P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0).$$

Fórmula de Newton

- Sejam $n + 1$ pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, com x_i distintos, tais que $y_i = P(x_i)$, sendo $P(x)$ um polinômio de grau n .
- Diferença dividida de ordem 1

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \rightarrow P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0).$$

- Diferença dividida de ordem 2

$$[x, x_0, x_1] = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} \rightsquigarrow [x, x_0] = [x_0, x_1] + [x, x_0, x_1](x - x_1).$$

Fórmula de Newton

- Sejam $n + 1$ pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, com x_i distintos, tais que $y_i = P(x_i)$, sendo $P(x)$ um polinômio de grau n .
- Diferença dividida de ordem 1

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \rightarrow P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0).$$

- Diferença dividida de ordem 2

$$[x, x_0, x_1] = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} \rightsquigarrow [x, x_0] = [x_0, x_1] + [x, x_0, x_1](x - x_1).$$

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1).$$

Fórmula de Newton cont.

- Diferença dividida de ordem 3

$$[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{[x, x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \leadsto$$

$$[x, x_0, x_1] = [x_0, x_1, x_2] + [x, x_0, x_1, x_2](x - x_2).$$

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Fórmula de Newton cont.

- Continuando o desenvolvimento de $[x, x_0, x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned} P(x) = & P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\ & + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ & + [x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

- Sendo $P(x)$ um polinômio de grau n , pelo Teorema 1

$$[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0.$$

Fórmula de Newton **cont.**

- Continuando o desenvolvimento de $[x, x_0, x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned}
 P(x) = & P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
 & + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\
 & + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\
 & + [x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).
 \end{aligned}$$

- Sendo $P(x)$ um polinômio de grau n , pelo Teorema 1

$$[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0.$$

- Polinômio de Newton de grau n

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

Fórmula de Newton **cont.**

- Continuando o desenvolvimento de $[x, x_0, x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned}
 P(x) = & P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
 & + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\
 & + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\
 & + [x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).
 \end{aligned}$$

- Sendo $P(x)$ um polinômio de grau n , pelo Teorema 1

$$[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = 0.$$

- Polinômio de Newton de grau n

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}),$$

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \tag{7}$$

Exemplo: polinômio de Newton de grau 1

Exemplo 8 Calcular $P_1(0,2)$ a partir dos dados

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

Exemplo: polinômio de Newton de grau 1

Exemplo 8 Calcular $P_1(0,2)$ a partir dos dados

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Para (7) com $n = 1$,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Tabela de diferenças divididas

Exemplo: polinômio de Newton de grau 1

Exemplo 8 Calcular $P_1(0,2)$ a partir dos dados

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Para (7) com $n = 1$,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	4,198
1	0,6	3,320	

Exemplo: polinômio de Newton de grau 1

Exemplo 8 Calcular $P_1(0,2)$ a partir dos dados

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Para (7) com $n = 1$,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	4,198
1	0,6	3,320	

- Valor interpolado

$$P_1(0,2) = 1,221 + 4,198(0,2 - 0,1) \leadsto P_1(0,2) = 1,641.$$

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Polinômio de grau 1 de Newton,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

Exemplo: polinômio de Newton de grau 2

Exemplo 9 Determinar $P_2(1,2)$ usando os dados

x	0,9	1,1	2,0
y	3,211	2,809	1,614

Exemplo: polinômio de Newton de grau 2

Exemplo 9 Determinar $P_2(1,2)$ usando os dados

x	0,9	1,1	2,0
y	3,211	2,809	1,614

- Para (7) com $n = 2$,

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1).$$

Exemplo: polinômio de Newton de grau 2

Exemplo 9 Determinar $P_2(1,2)$ usando os dados

x	0,9	1,1	2,0
y	3,211	2,809	1,614

- Para (7) com $n = 2$,

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1).$$

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,9	3,211	-2,010	0,620
1	1,1	2,809	-1,328	
2	2,0	1,614		

Exemplo: polinômio de Newton de grau 2

Exemplo 9 Determinar $P_2(1,2)$ usando os dados

x	0,9	1,1	2,0
y	3,211	2,809	1,614

- Para (7) com $n = 2$,

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1).$$

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,9	3,211	-2,010	0,620
1	1,1	2,809	-1,328	
2	2,0	1,614		

- Valor interpolado

$$P_2(1,2) = 3,211 + (-2,010)(1,2 - 0,9) + (0,620)(1,2 - 0,9)(1,2 - 1,1) \rightsquigarrow$$

$$P_2(1,2) = 2,627.$$

Exemplo: polinômio de Newton de grau 4

Exemplo 10 Calcular $P_4(0,2)$ a partir de

x	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7
y	0,3162	0,5477	0,6325	0,7746	0,8367

Exemplo: polinômio de Newton de grau 4

Exemplo 10 Calcular $P_4(0,2)$ a partir de

x	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7
y	0,3162	0,5477	0,6325	0,7746	0,8367

- Para (7) com $n = 4$,

$$P_4(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$\Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\Delta^4 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Exemplo: polinômio de Newton de grau 4 cont.

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1	0,3162	1,1575	-1,0317	1,1468	-1,2447
1	0,3	0,5477	0,8480	-0,4583	0,4000	
2	0,4	0,6325	0,7105	-0,2983		
3	0,6	0,7746	0,6210			
4	0,7	0,8367				

Exemplo: polinômio de Newton de grau 4

cont.

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1	0,3162	1,1575	-1,0317	1,1468	-1,2447
1	0,3	0,5477	0,8480	-0,4583	0,4000	
2	0,4	0,6325	0,7105	-0,2983		
3	0,6	0,7746	0,6210			
4	0,7	0,8367				

- Valor interpolado

$$P_4(0,2) = 0,3162 + 1,1575(0,1) + (-1,0317)(0,1)(-0,1) +$$

$$1,1468(0,1)(-0,1)(-0,2) + (-1,2447)(0,1)(-0,1)(-0,2)(-0,4) \leadsto$$

$$P_4(0,2) = 0,4456.$$

Avaliação do polinômio de Newton

- Seja o polinômio (7),

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner,

$$P_n(z) = (\dots(\Delta^n y_0(z - x_{n-1}) + \Delta^{n-1} y_0)(z - x_{n-2}) + \dots + \Delta^2 y_0)(z - x_1) + \Delta y_0)(z - x_0) + y_0.$$

Algoritmo: interpolação de Newton**Algoritmo Polinômio_Newton**

{ **Objetivo:** Interpolador valor em tabela usando polinômio de Newton }

parâmetros de entrada m, x, y, z

{ número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }

parâmetros de saída r { valor interpolado }

para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**

$Dely(i) \leftarrow y(i)$

fimpara

{ construção das diferenças divididas }

para $k \leftarrow 1$ **até** $m - 1$ **faça**

para $i \leftarrow m$ **até** $k + 1$ **passo** -1 **faça**

$Dely(i) \leftarrow (Dely(i) - Dely(i - 1)) / (x(i) - x(i - k))$

fimpara

fimpara

{ avaliação do polinômio pelo processo de Horner }

$r \leftarrow Dely(m)$

para $i \leftarrow m - 1$ **até** 1 **passo** -1 **faça**

$r \leftarrow r * (z - x(i)) + Dely(i)$

fimpara

fimalgoritmo

⇐

Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças divididas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n + 1$ posições de *Dely*.

Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças divididas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n + 1$ posições de *Dely*.
- Para cinco pontos

i	x_i	y_i	$Dely_i^{(1)}$	$Dely_i^{(2)}$	$Dely_i^{(3)}$	$Dely_i^{(4)}$
1	x_0	y_0	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$
2	x_1	y_1	Δy_0	Δy_0	Δy_0	Δy_0
3	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$
4	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^3 y_0$
5	x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

- onde $Dely_i^{(k)}$ significa i -ésima posição do vetor *Dely* na k -ésima repetição do comando **para** $k \leftarrow 1$ até $m - 1$ **faça**.

Complexidade: interpolação de Newton

Operações	Complexidade
adições	$2n^2 + 4n$
multiplicações	n
divisões	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$



- n : grau do polinômio interpolador.

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 11 Calcular $P_4(0,2)$ a partir dos dados da tabela do Exemplo 10 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 5
x = 0.1000    0.3000    0.4000    0.6000    0.7000
y = 0.3162    0.5477    0.6325    0.7746    0.8367
z = 0.2000
% produzem o resultado
r = 0.4456
```

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 11 Calcular $P_4(0,2)$ a partir dos dados da tabela do Exemplo 10 usando o algoritmo.

% Os parametros de entrada

m = 5

x = 0.1000 0.3000 0.4000 0.6000 0.7000

y = 0.3162 0.5477 0.6325 0.7746 0.8367

z = 0.2000

% produzem o resultado

r = 0.4456

- Sequência de vetores *Dely* produzida pelo algoritmo

i	x_i	y_i	$Dely_i^{(1)}$	$Dely_i^{(2)}$	$Dely_i^{(3)}$	$Dely_i^{(4)}$
1	0,1	0,3162	0,3162	0,3162	0,3162	0,3162
2	0,3	0,5477	1,1575	1,1575	1,1575	1,1575
3	0,4	0,6325	0,8480	-1,0317	-1,0317	-1,0317
4	0,6	0,7746	0,7105	-0,4583	1,1468	1,1468
5	0,7	0,8367	0,6210	-0,2983	0,4000	-1,2447

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 12 Calcular $P_1(0,2)$, $P_2(0,2)$ e $P_3(0,2)$ usando os dados da tabela do Exemplo 10 e o algoritmo.

% Calculo de P1(0,2)

m = 2

x = 0.1000 0.3000

y = 0.3162 0.5477

z = 0.2000

r = 0.4320

% Calculo de P2(0,2)

m = 3

x = 0.1000 0.3000 0.4000

y = 0.3162 0.5477 0.6325

z = 0.2000

r = 0.4423

% Calculo de P3(0,2)

m = 4

x = 0.1000 0.3000 0.4000 0.6000

y = 0.3162 0.5477 0.6325 0.7746

z = 0.2000

r = 0.4446

Exemplo: uso do algoritmo cont.

- Sendo $y = \sqrt{x}$: valor exato $\sqrt{0,2} \approx 0,4472$.
- Diferença entre valor interpolado e exato

n	$P_n(0,2)$	$ P_n(0,2) - \sqrt{0,2} $
1	0,4320	0,0152
2	0,4423	0,0049
3	0,4446	0,0026
4	0,4456	0,0016

- Diferença diminui à medida que grau do polinômio interpolador aumenta.

Polinômios de Gregory-Newton

- Valores das abscissas x_i igualmente espaçados.
- Função $y = f(x)$ passa pelos pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, sendo $x_{i+1} - x_i = h \forall i$.
- Operador de diferença finita ascendente Δ^i de ordem i :
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i$,
- Ordem 1: $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i = y_{i+1} - y_i$,
- Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$,
- Ordem n : $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

Exemplo 13 Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82				
1	4,0	10,91				
2	4,5	12,05				
3	5,0	13,14				
4	5,5	16,19				

Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

Exemplo 13 Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82	1,09			
1	4,0	10,91	1,14			
2	4,5	12,05	1,09			
3	5,0	13,14	3,05			
4	5,5	16,19				

Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

Exemplo 13 Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82	1,09	0,05		
1	4,0	10,91	1,14	−0,05		
2	4,5	12,05	1,09	1,96		
3	5,0	13,14	3,05			
4	5,5	16,19				

Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

Exemplo 13 Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82	1,09	0,05	-0,10	
1	4,0	10,91	1,14	-0,05	2,01	
2	4,5	12,05	1,09	1,96		
3	5,0	13,14	3,05			
4	5,5	16,19				

Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

Exemplo 13 Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82	1,09	0,05	-0,10	2,11
1	4,0	10,91	1,14	-0,05	2,01	
2	4,5	12,05	1,09	1,96		
3	5,0	13,14	3,05			
4	5,5	16,19				

Relação entre os operadores de diferença finita e dividida

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n}. \quad (8)$$

Exemplo 14 Para a tabela do Exemplo 13,

$$\Delta y_0 = \frac{\Delta y_0}{1!h} \rightsquigarrow \frac{10,91 - 9,82}{4,0 - 3,5} = \frac{1,09}{1! 0,5} = 2,18 \text{ e}$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2} \rightsquigarrow$$

$$\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{13,14 - 12,05}{5,0 - 4,5} - \frac{12,05 - 10,91}{4,5 - 4,0}}{5,0 - 4,0} = \frac{-0,05}{2! 0,5^2} = -0,10.$$

Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio interpolador de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x-x_0) + \Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x-x_0) \dots (x-x_{n-1}).$$

Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio interpolador de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x-x_0) + \Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x-x_0) \dots (x-x_{n-1}).$$

- Variável auxiliar

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h}.$$

Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio interpolador de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x-x_0) + \Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x-x_0) \dots (x-x_{n-1}).$$

- Variável auxiliar

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h}.$$

- Verifica-se que

$$x - x_0 = hu_x,$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hu_x - h \rightsquigarrow x - x_1 = h(u_x - 1),$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hu_x - 2h \rightsquigarrow x - x_2 = h(u_x - 2),$$

$$\vdots$$

$$x - x_{n-1} = x - (x_0 + (n-1)h) = x - x_0 - (n-1)h \rightsquigarrow x - x_{n-1} = h(u_x - n + 1).$$

Fórmula de Gregory-Newton cont.

- Substituindo na fórmula de Newton e aplicando a relação (8) entre operadores,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} h u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} h u_x h(u_x - 1) + \dots +$$
$$\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} h u_x h(u_x - 1) \dots h(u_x - n + 1).$$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u_x(u_x - 1) \dots (u_x - n + 1),$$

Fórmula de Gregory-Newton cont.

- Substituindo na fórmula de Newton e aplicando a relação (8) entre operadores,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} h u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} h u_x h(u_x - 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} h u_x h(u_x - 1) \dots h(u_x - n + 1).$$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u_x(u_x - 1) \dots (u_x - n + 1),$$

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j). \quad (9)$$

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

Exemplo 15 Calcular $P_1(0,2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

Exemplo 15 Calcular $P_1(0,2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Usando (9) com $n = 1$: $P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x$.
- Tabela de diferenças finitas

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

Exemplo 15 Calcular $P_1(0,2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Usando (9) com $n = 1$: $P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	2,099
1	0,6	3,320	

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

Exemplo 15 Calcular $P_1(0,2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Usando (9) com $n = 1$: $P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	2,099
1	0,6	3,320	

- Variável auxiliar $u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,2 - 0,1}{0,5} = 0,2$.

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

Exemplo 15 Calcular $P_1(0,2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

- Usando (9) com $n = 1$: $P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	2,099
1	0,6	3,320	

- Variável auxiliar $u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,2 - 0,1}{0,5} = 0,2$.
- Valor interpolado: $P_1(0,2) = 1,221 + 2,099(0,2) \leadsto P_1(0,2) = 1,641$.
- Mesmos resultados: (1) no Exemplo 1, por (5) no Exemplo 3 e por (7) no Exemplo 8.

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Gregory-Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear

$$P_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x.$$

Comparação dos polinômios via sistema linear e de Gregory-Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear

$$P_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x.$$

- Polinômio de grau 1 de Gregory-Newton

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x.$$

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

Exemplo 16 Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

x	110	120	130
y	2,041	2,079	2,114

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

Exemplo 16 Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

x	110	120	130
y	2,041	2,079	2,114

- Usando (9) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1)$.

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

Exemplo 16 Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

x	110	120	130
y	2,041	2,079	2,114

- Usando (9) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	-0,003
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114		

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

Exemplo 16 Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

x	110	120	130
y	2,041	2,079	2,114

- Usando (9) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	-0,003
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114		

- Variável auxiliar $u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{115 - 110}{10} = 0,5$.

Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

Exemplo 16 Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

x	110	120	130
y	2,041	2,079	2,114

- Usando (9) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	-0,003
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114		

- Variável auxiliar $u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{115 - 110}{10} = 0,5$.
- Valor interpolado

$$P_2(115) = 2,041 + (0,038)(0,5) + \frac{-0,003}{2}(0,5)(0,5 - 1) \leadsto P_2(115) = 2,060.$$

Algoritmo: interpolação de Gregory-Newton**Algoritmo Polinômio_Gregory-Newton**

{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando polinômio de Gregory-Newton }

parâmetros de entrada m, x, y, z

{ número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }

parâmetros de saída r { valor interpolado }

para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**

$Dely(i) \leftarrow y(i)$

fimpara

{ construção das diferenças finitas }

para $k \leftarrow 1$ **até** $m - 1$ **faça**

para $i \leftarrow m$ **até** $k + 1$ **passo** -1 **faça**

$Dely(i) \leftarrow Dely(i) - Dely(i - 1)$

fimpara

fimpara

{ avaliação do polinômio pelo processo de Horner }

$u \leftarrow (z - x(1)) / (x(2) - x(1))$

$r \leftarrow Dely(m)$

para $i \leftarrow m - 1$ **até** 1 **passo** -1 **faça**

$r \leftarrow r * (u - i + 1) / i + Dely(i)$

fimpara

fimalgoritmo

⇐

Avaliação do polinômio de Gregory-Newton

- Seja o polinômio (9)

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner,

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\left(\dots \left(\Delta^n y_0 \frac{u_x - n + 1}{n} \right) + \dots + \Delta^2 y_0 \right) \frac{u_x - 1}{2} + \Delta y_0 \right) \frac{u_x - 0}{1} \right) + y_0 \right).$$

Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças finitas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n + 1$ posições de *Dely*.

Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças finitas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n + 1$ posições de *Dely*.
- Para quatro pontos

i	x_i	y_i	$Dely_i^{(1)}$	$Dely_i^{(2)}$	$Dely_i^{(3)}$
1	x_0	y_0	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$
2	x_1	y_1	Δy_0	Δy_0	Δy_0
3	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$
4	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$

- onde $Dely_i^{(k)}$ significa i -ésima posição do vetor *Dely* na k -ésima repetição do comando **para $k \leftarrow 1$ até $m - 1$ faça**.

Complexidade: interpolação de Gregory-Newton

Operações	Complexidade
adições	$n^2 + 4n + 2$
multiplicações	n
divisões	$n + 1$

 \Leftarrow

- n : grau do polinômio interpolador.
- Comparação com a complexidade do algoritmo de Newton.
- Algoritmo de Gregory-Newton apresenta uma complexidade menor em relação à operação de divisão.

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 17 Calcular $P_2(115)$ com os dados da tabela do Exemplo 16 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 3
x = 110    120    130
y = 2.0410    2.0790    2.1140
z = 115
% produzem o resultado
r = 2.0604
```

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 17 Calcular $P_2(115)$ com os dados da tabela do Exemplo 16 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 3
x = 110    120    130
y = 2.0410    2.0790    2.1140
z = 115
% produzem o resultado
r = 2.0604
```

- Sequência de vetores $Dely$ produzida pelo algoritmo

i	x_i	y_i	$Dely_i^{(1)}$	$Dely_i^{(2)}$
1	110	2,041	2,041	2,041
2	120	2,079	0,038	0,038
3	130	2,114	0,035	−0,003

Escolha dos pontos para interpolação

- Exemplos usando todos os pontos da tabela.
- Escolher $n + 1$ pontos dentre os m valores de uma tabela, sendo $m > n + 1$.
- Construir um polinômio interpolador de grau n .
- Não se devem construir polinômios de grau elevado por causa do erro de arredondamento.
- Deve-se evitar uma extrapolação: $z \notin [x_0, x_n]$.

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos, sendo que $z = 1,4$ deve estar entre 1,3 e 1,5.

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos, sendo que $z = 1,4$ deve estar entre 1,3 e 1,5.
- Passo 2: terceiro ponto será 1,2 e não 2,0: $1,4 - 1,2 < 2,0 - 1,4$.

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos, sendo que $z = 1,4$ deve estar entre 1,3 e 1,5.
- Passo 2: terceiro ponto será 1,2 e não 2,0: $1,4 - 1,2 < 2,0 - 1,4$.
- Passo 3: quarto ponto será 2,0 e não 0,7: $2,0 - 1,4 < 1,4 - 0,7$.

Exemplo: escolha de pontos

Exemplo 18 Interpolar $z = 1,4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos, sendo que $z = 1,4$ deve estar entre 1,3 e 1,5.
- Passo 2: terceiro ponto será 1,2 e não 2,0: $1,4 - 1,2 < 2,0 - 1,4$.
- Passo 3: quarto ponto será 2,0 e não 0,7: $2,0 - 1,4 < 1,4 - 0,7$.
- A interpolação cúbica utilizará os quatro pontos

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

Cálculo de $L_3(1,4)$

- Pontos utilizados:

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

- Matriz G para o polinômio de Lagrange

Cálculo de $L_3(1,4)$

- Pontos utilizados:

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

- Matriz G para o polinômio de Lagrange

$$G = \begin{bmatrix} 1,4-1,2 & 1,2-1,3 & 1,2-1,5 & 1,2-2,0 \\ 1,3-1,2 & 1,4-1,3 & 1,3-1,5 & 1,3-2,0 \\ 1,5-1,2 & 1,5-1,3 & 1,4-1,5 & 1,5-2,0 \\ 2,0-1,2 & 2,0-1,3 & 2,0-1,5 & 1,4-2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 & -0,3 & -0,8 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 & -0,7 \\ 0,3 & 0,2 & -0,1 & -0,5 \\ 0,8 & 0,7 & 0,5 & -0,6 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $L_3(1,4)$

- Pontos utilizados:

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

- Matriz G para o polinômio de Lagrange

$$G = \begin{bmatrix} 1,4-1,2 & 1,2-1,3 & 1,2-1,5 & 1,2-2,0 \\ 1,3-1,2 & 1,4-1,3 & 1,3-1,5 & 1,3-2,0 \\ 1,5-1,2 & 1,5-1,3 & 1,4-1,5 & 1,5-2,0 \\ 2,0-1,2 & 2,0-1,3 & 2,0-1,5 & 1,4-2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 & -0,3 & -0,8 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 & -0,7 \\ 0,3 & 0,2 & -0,1 & -0,5 \\ 0,8 & 0,7 & 0,5 & -0,6 \end{bmatrix}.$$

- Produtos de G

$$\begin{aligned} G_d &= (0,2)(0,1)(-0,1)(-0,6) = 1,2 \times 10^{-3}, \\ G_0 &= (0,2)(-0,1)(-0,3)(-0,8) = -4,8 \times 10^{-3}, \\ G_1 &= (0,1)(0,1)(-0,2)(-0,7) = 1,4 \times 10^{-3}, \\ G_2 &= (0,3)(0,2)(-0,1)(-0,5) = 3,0 \times 10^{-3}, \\ G_3 &= (0,8)(0,7)(0,5)(-0,6) = -1,68 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Cálculo de $L_3(1,4)$ cont.

- Usando (6) com $n = 3$,

$$L_3(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} + \frac{y_3}{G_3} \right),$$

Cálculo de $L_3(1,4)$ cont.

- Usando (6) com $n = 3$,

$$L_3(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} + \frac{y_3}{G_3} \right),$$

$$L_3(1,4) = 1,2 \times 10^{-3} \left(\frac{1,928}{-4,8 \times 10^{-3}} + \frac{2,497}{1,4 \times 10^{-3}} + \frac{3,875}{3,0 \times 10^{-3}} + \frac{9,000}{-1,68 \times 10^{-1}} \right) \leadsto$$

$$L_3(1,4) = 3,144.$$

Erro de truncamento da interpolação polinomial

- Erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por polinômio interpolador.
- Sendo $P_n(x)$ um polinômio interpolador de grau n de Lagrange, Newton ou Gregory-Newton,

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n.$$

Erro de truncamento da interpolação polinomial

- Erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por polinômio interpolador.
- Sendo $P_n(x)$ um polinômio interpolador de grau n de Lagrange, Newton ou Gregory-Newton,

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n.$$

- Função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ que contém os pontos x_0, x_1, \dots, x_n .
- Supondo que a derivada $f^{n+1}(x)$ existe e é contínua no intervalo (a, b) .

Erro de truncamento da interpolação polinomial

- Erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por polinômio interpolador.
- Sendo $P_n(x)$ um polinômio interpolador de grau n de Lagrange, Newton ou Gregory-Newton,

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n. \quad (10)$$

- Função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ que contém os pontos x_0, x_1, \dots, x_n .
- Supondo que a derivada $f^{n+1}(x)$ existe e é contínua no intervalo (a, b) .
- Na prática, ξ é tomado como o ponto no intervalo $[x_0, x_n] \subset (a, b)$, onde $f^{n+1}(x)$ apresenta o maior valor em módulo.
- Expressão de $T_n(x)$ fornece a cota máxima do erro de truncamento.

Exemplo: erro de truncamento

Exemplo 19 Sendo $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, calcular $P_2(0,1)$ e $T_2(0,1)$ a partir de

x	0,0	0,2	0,4
y	1,0000	1,1232	1,5312

Exemplo: erro de truncamento

Exemplo 19 Sendo $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, calcular $P_2(0,1)$ e $T_2(0,1)$ a partir de

x	0,0	0,2	0,4
y	1,0000	1,1232	1,5312

- Cálculo de $P_2(0,1)$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,0	1,0000	0,1232	0,2848
1	0,2	1,1232	0,4080	
2	0,4	1,5312		

- Variável auxiliar: $u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,1 - 0,0}{0,2} \leadsto u_x = 0,5$.
- Valor interpolado

$$P_2(0,1) = 1,0000 + 0,1232(0,5) + \frac{0,2848}{2}(0,5)(0,5 - 1) \leadsto P_2(0,1) = 1,0260.$$

Cálculo do erro de truncamento• Cálculo de $T_2(0,1)$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1, \quad f'(x) = 8x^3 + 6x, \quad f''(x) = 24x^2 + 6, \quad f'''(x) = 48x \rightsquigarrow \\ \xi = 0,4.$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \text{ e}$$

$$T_2(0,1) = \frac{48(0,4)}{6}(0,1 - 0,0)(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,4) \rightsquigarrow T_2(0,1) = 0,0096.$$

Cálculo do erro de truncamento

- Cálculo de $T_2(0,1)$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1, \quad f'(x) = 8x^3 + 6x, \quad f''(x) = 24x^2 + 6, \quad f'''(x) = 48x \rightsquigarrow \\ \xi = 0,4.$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \text{ e}$$

$$T_2(0,1) = \frac{48(0,4)}{6}(0,1 - 0,0)(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,4) \rightsquigarrow T_2(0,1) = 0,0096.$$

- Cota máxima do erro de truncamento.
- Erro real cometido

$$|f(0,1) - P_2(0,1)| = |1,0302 - 1,0260| = 0,0042 < T_2(0,1).$$

Influência da escolha dos pontos no erro de truncamento

- Erro de truncamento: análise teórica da interpolação.
- Erro de truncamento é diretamente proporcional ao produto das distâncias entre o valor interpolado e os pontos-base

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad x_0 < \xi < x_n.$$

- Pontos escolhidos para construir o polinômio interpolador devem ser os mais próximos do ponto a ser interpolado.

Exemplo: influência da escolha dos pontos

Exemplo 20 Verificar a influência da escolha dos pontos, usando a função

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

Exemplo: influência da escolha dos pontos

Exemplo 20 Verificar a influência da escolha dos pontos, usando a função

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

- Tabela de $f(x)$

x	1,1	1,4	1,9	2,1	2,5	3,0	3,2
y	0,6942	0,6952	1,1759	1,6562	3,4325	8,0855	11,0925

- Calcular $P_2(2,2)$: necessários 3 pontos.
- Pontos de abscissas $x = 2,1$ e $x = 2,5$.

Exemplo: influência da escolha dos pontos

Exemplo 20 Verificar a influência da escolha dos pontos, usando a função

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

- Tabela de $f(x)$

x	1,1	1,4	1,9	2,1	2,5	3,0	3,2
y	0,6942	0,6952	1,1759	1,6562	3,4325	8,0855	11,0925

- Calcular $P_2(2,2)$: necessários 3 pontos.
- Pontos de abscissas $x = 2,1$ e $x = 2,5$.
- Terceiro ponto: escolhido entre $x_a = 1,9$ e $x_b = 3,0$.
- Pontos não igualmente espaçados: método de Lagrange ou de Newton.

Cálculo de $P_2(2,2)$ com $x_a = 1,9$

- Cálculo de $P_{2,a}(2,2)$ por Newton

x	1,9	2,1	2,5
y	1,1759	1,6562	3,4325

Cálculo de $P_2(2,2)$ com $x_a = 1,9$

- Cálculo de $P_{2,a}(2,2)$ por Newton

x	1,9	2,1	2,5
y	1,1759	1,6562	3,4325

- Por (7) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$.
- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1,9	1,1759	2,4015	3,3988
1	2,1	1,6562	4,4408	
2	2,5	3,4325		

- Valor interpolado

$$P_{2,a}(2,2) = 1,1759 + 2,4015(2,2 - 1,9) + 3,3988(2,2 - 1,9)(2,2 - 2,1) \leadsto$$

$$P_{2,a}(2,2) = 1,9983.$$

Cálculo de $T_2(2,2)$ com $x_a = 1,9$

- Erro de truncamento, por (10), para $n = 2$,

$$T_{2,a}(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \text{ para algum } \xi, x_0 < \xi < x_2.$$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x, \quad \xi \in (1,9; 2,5) \rightarrow \xi = 2,5,$$

$$T_{2,a}(2,2) = \frac{e^{2,5}}{6}(2,2 - 1,9)(2,2 - 2,1)(2,2 - 2,5) \leadsto T_{2,a}(2,2) = -0,0183.$$

- Valor negativo indica interpolação por excesso: $P_{2,a}(2,2) > f(2,2)$.
- Erro real cometido

$$|f(2,2) - P_{2,a}(2,2)| = |1,9850 - 1,9983| = 0,0133 < |T_{2,a}(2,2)|.$$

Cálculo de $P_2(2,2)$ com $x_b = 3,0$

- Cálculo de $P_{2,b}(2,2)$ por Newton

x	2,1	2,5	3,0
y	1,6562	3,4325	8,0855

Cálculo de $P_2(2,2)$ com $x_b = 3,0$

- Cálculo de $P_{2,b}(2,2)$ por Newton

x	2,1	2,5	3,0
y	1,6562	3,4325	8,0855

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	2,1	1,6562	4,4408	5,4058
1	2,5	3,4325	9,3060	
2	3,0	8,0855		

- Valor interpolado

$$P_{2,b}(2,2) = 1,6562 + 4,4408(2,2 - 2,1) + 5,4058(2,2 - 2,1)(2,2 - 2,5) \rightsquigarrow$$

$$P_{2,b}(2,2) = 1,9381.$$

Cálculo de $T_2(2,2)$ com $x_b = 3,0$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x, \quad \xi \in (2,1; 3,0) \rightarrow \xi = 3,0,$$

$$T_{2,b}(2,2) = \frac{e^{3,0}}{6}(2,2 - 2,1)(2,2 - 2,5)(2,2 - 3,0) \leadsto T_{2,b}(2,2) = 0,0803.$$

- Valor positivo indica interpolação por falta: $P_{2,b}(2,2) < f(2,2)$.
- Erro real

$$|f(2,2) - P_{2,b}(2,2)| = |1,9850 - 1,9381| = 0,0469 < |T_{2,b}(2,2)|.$$

Cálculo de $T_2(2,2)$ com $x_b = 3,0$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x, \quad \xi \in (2,1; 3,0) \rightarrow \xi = 3,0,$$

$$T_{2,b}(2,2) = \frac{e^{3,0}}{6}(2,2 - 2,1)(2,2 - 2,5)(2,2 - 3,0) \leadsto T_{2,b}(2,2) = 0,0803.$$

- Valor positivo indica interpolação por falta: $P_{2,b}(2,2) < f(2,2)$.
- Erro real

$$|f(2,2) - P_{2,b}(2,2)| = |1,9850 - 1,9381| = 0,0469 < |T_{2,b}(2,2)|.$$

- Comparação entre os dois pontos x_j

x_j	$ x_j - 2,2 $	$T_{2,j}(2,2)$	$f(2,2) - P_{2,j}(2,2)$
1,9	0,3	-0,0183	-0,0133
3,0	0,8	0,0803	0,0469

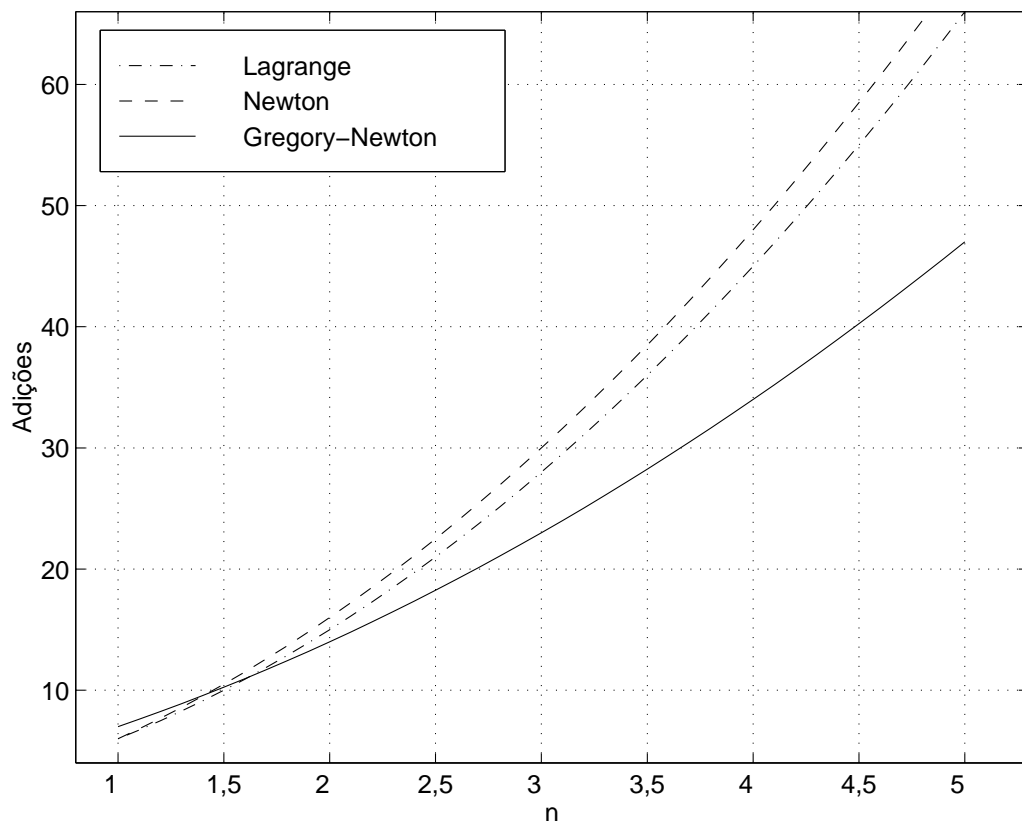
Comparação das complexidades: tabelas

Polinômio	Adições	Multiplicações	Divisões
Lagrange	$2n^2 + 3n + 1$	$2n^2 + 3n + 1$	$n + 1$
Newton	$2n^2 + 4n$	n	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
Gregory-Newton	$n^2 + 4n + 2$	n	$n + 1$

- n : grau do polinômio interpolador.
- Polinômios de Gregory-Newton: menor complexidade para adição.
- Divisão: complexidades lineares de Lagrange e Gregory-Newton, enquanto Newton é quadrático.
- Polinômios de Lagrange: menos eficientes em termos de multiplicação.

Comparação das complexidades: gráficos

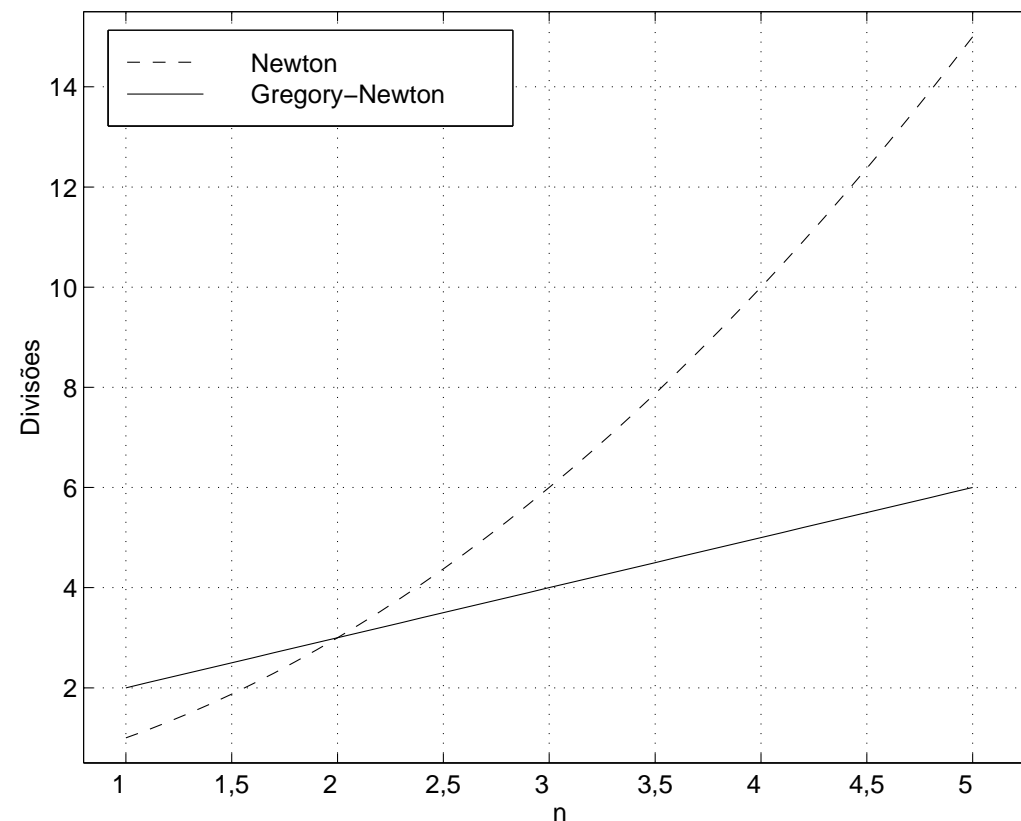
Polinômios de complexidade



Adição

- Polinômios de grau $n \geq 2$ e pontos igualmente espaçados: Gregory-Newton;
- Polinômio de grau $n = 1$ ou pontos não igualmente espaçados: Newton.

Polinômios de complexidade



Divisão

Splines cúbicos

- Sejam $n + 1$ pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, com

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

- Construir n polinômios interpoladores cúbicos $s_i(x)$: *splines* cúbicos.
- Passam por dois pontos sucessivos (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) , sendo cada polinômio utilizado no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.
- Total de n polinômios na forma

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (11)$$

Condições dos *splines* cúbicos

- Passam por (x_i, y_i) e são contínuos,

$$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } s_{n-1}(x_n) = y_n, \quad (12)$$

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2. \quad (13)$$

- Inclinações e concavidades são contínuas,

$$s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2, \quad (14)$$

$$s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-2. \quad (15)$$

- Obtêm-se por (11) n equações com $4n$ incógnitas: a_i , b_i , c_i e d_i .
- Condições (12) a (15) fornecem apenas $4n - 2$ equações.
- São necessárias mais 2 equações para calcular todas as $4n$ incógnitas.

Cálculo dos coeficientes

- Para $x = x_i$ em (11) e comparando com (12)

$$s_i(x_i) = d_i,$$

$$d_i = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (16)$$

- Para $x = x_{i+1}$ em (11) e comparando com (13) em vista de (12)

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1},$$

$$a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i = y_{i+1}.$$

- Definindo

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad (17)$$

- e substituindo (16),

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}. \quad (18)$$

Cálculo dos coeficientes**cont.**

- As derivadas de (11) são

$$s'_i(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i, \quad (19)$$

$$s''_i(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i. \quad (20)$$

- Para $x = x_i$ em (20)

$$s''_i(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i,$$

$$b_i = \frac{s''_i(x_i)}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (21)$$

- Para $x = x_{i+1}$ em (20)

$$s''_i(x_{i+1}) = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i.$$

- Em vista de (15) e substituindo (17) e (21)

$$s''_{i+1}(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2 \frac{s''_i(x_i)}{2}.$$

Cálculo dos coeficientes**cont.**

- Explicitando a_i

$$a_i = \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

- Substituindo (16), (21) e (22) em (18)

$$\frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i}h_i^3 + \frac{s''_i(x_i)}{2}h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}.$$

- Explicitando c_i

$$c_i = \Delta y_i - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6}h_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (23)$$

- sendo Δy_i o operador de diferença dividida

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}. \quad (24)$$

Coeficientes dos *splines* cúbicos

- Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

$$a_i = \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i},$$

$$b_i = \frac{s''_i(x_i)}{2},$$

$$c_i = \Delta y_i - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6}h_i,$$

$$d_i = y_i,$$

- sendo

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Sistema linear subdeterminado

- As inclinações de dois *splines* cúbicos adjacentes $s_{i-1}(x)$ e $s_i(x)$ são iguais no ponto comum (x_i, y_i)

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i).$$

- Em vista de (19),

$$3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i.$$

- Substituindo (17), (21), (22) e (23)

$$\begin{aligned} 3 \frac{s''_i(x_i) - s''_{i-1}(x_{i-1})}{6h_{i-1}} h_{i-1}^2 + 2 \frac{s''_{i-1}(x_{i-1})}{2} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{s''_i(x_i) + 2s''_{i-1}(x_{i-1})}{6} h_{i-1} \\ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6} h_i. \end{aligned}$$

- Simplificando, obtém-se a i -ésima equação para $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

$$h_{i-1}s''_{i-1}(x_{i-1}) + 2(h_{i-1} + h_i)s''_i(x_i) + h_is''_{i+1}(x_{i+1}) = 6(\Delta y_i - \Delta y_{i-1}). \quad (25)$$

Sistema linear subdeterminado

cont.

- Sistema linear subdeterminado com $n - 1$ equações e $n + 1$ incógnitas.
- Solução: $s_i''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Sistema linear (25) é da forma

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0''(x_0) \\ s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ \dots \\ s_{n-1}''(x_{n-1}) \\ s_n''(x_n) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \dots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}.$$

- Eliminar 2 incógnitas: sistema linear com matriz quadrada de ordem $n - 1$.
- Esta eliminação pode ocorrer de várias formas.

Splines cúbicos naturais

- Forma mais simples e freqüentemente usada de eliminar duas incógnitas do sistema (25)

$$\left. \begin{aligned} s''_0(x_0) &= 0, \\ s''_n(x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

- Substituir $s''_0(x_0)$ na primeira equação do sistema e $s''_n(x_n)$ na última.
- Sistema linear tridiagonal simétrico

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s''_1(x_1) \\ s''_2(x_2) \\ s''_3(x_3) \\ \vdots \\ s''_{n-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

- Solução fornece as $n - 1$ derivadas $s''_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Exemplo: construção do sistema tridiagonal simétrico

Exemplo 21 Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, calcular as segundas derivadas $s_i''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ dos *splines* cúbicos naturais.

- Cálculo de h_i por (17)

$$h_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 \leadsto h_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 2 \leadsto h_1 = 2,$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 6 - 4 \leadsto h_2 = 2, \quad h_3 = x_4 - x_3 = 7 - 6 \leadsto h_3 = 1.$$

- Cálculo de Δy_i , usando (24)

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{4 - 2}{1} \leadsto \Delta y_0 = 2, \quad \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{1 - 4}{2} \leadsto \Delta y_1 = -1,5;$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{3 - 1}{2} \leadsto \Delta y_2 = 1, \quad \Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} = \frac{3 - 3}{1} \leadsto \Delta y_3 = 0.$$

Exemplo: construção do sistema tridiagonal simétrico cont.

- Substituindo em (27),

$$\begin{bmatrix} 2(1+2) & 2 & 0 \\ 2 & 2(2+2) & 2 \\ 0 & 2 & 2(2+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ s_3''(x_3) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1,5-2 \\ 1-(-1,5) \\ 0-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s''(x) = \begin{bmatrix} -4,7 \\ 3,6 \\ -2,2 \end{bmatrix}.$$

- Segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = 0; \quad s_1''(x_1) = -4,7; \quad s_2''(x_2) = 3,6; \quad s_3''(x_3) = -2,2; \quad s_4''(x_4) = 0.$$

Exemplo: determinação dos *splines* cúbicos naturais

Exemplo 22 A partir dos pontos do Exemplo 21, determinar as equações dos quatro *splines* cúbicos naturais na forma

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

- sendo as segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = 0; \quad s_1''(x_1) = -4,7; \quad s_2''(x_2) = 3,6; \quad s_3''(x_3) = -2,2; \quad s_4''(x_4) = 0.$$

Spline natural $s_0(x)$

$$a_0 = \frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{6h_0} = \frac{-4,7 - 0}{6 \times 1} \leadsto a_0 = -\frac{47}{60},$$

$$b_0 = \frac{s_0''(x_0)}{2} = \frac{0}{2} \leadsto b_0 = 0,$$

$$c_0 = \Delta y_0 - \frac{s_1''(x_1) + 2s_0''(x_0)}{6}h_0 = 2 - \frac{-4,7 + 2 \times 0}{6} \times 1 \leadsto c_0 = \frac{167}{60},$$

$$d_0 = y_0 \leadsto d_0 = 2,$$

$$s_0(x) = -\frac{47}{60}(x-1)^3 + 0(x-1)^2 + \frac{167}{60}(x-1) + 2.$$

Spline natural $s_1(x)$

$$a_1 = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{6h_1} = \frac{3,6 - (-4,7)}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_1 = \frac{83}{120},$$

$$b_1 = \frac{s_1''(x_1)}{2} = \frac{-4,7}{2} \rightsquigarrow b_1 = -\frac{47}{20},$$

$$c_1 = \Delta y_1 - \frac{s_2''(x_2) + 2s_1''(x_1)}{6}h_1 = -1,5 - \frac{3,6 + 2 \times -4,7}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_1 = \frac{13}{30},$$

$$d_1 = y_1 \rightsquigarrow d_1 = 4,$$

$$s_1(x) = \frac{83}{120}(x - 2)^3 - \frac{47}{20}(x - 2)^2 + \frac{13}{30}(x - 2) + 4.$$

Spline natural $s_2(x)$

$$a_2 = \frac{s_3''(x_3) - s_2''(x_2)}{6h_2} = \frac{-2,2 - 3,6}{6 \times 2} \leadsto a_2 = -\frac{29}{60},$$

$$b_2 = \frac{s_2''(x_2)}{2} = \frac{3,6}{2} \leadsto b_2 = \frac{9}{5},$$

$$c_2 = \Delta y_2 - \frac{s_3''(x_3) + 2s_2''(x_2)}{6}h_2 = 1 - \frac{-2,2 + 2 \times 3,6}{6} \times 2 \leadsto c_2 = -\frac{2}{3},$$

$$d_2 = y_2 \leadsto d_2 = 1,$$

$$s_2(x) = -\frac{29}{60}(x - 4)^3 + \frac{9}{5}(x - 4)^2 - \frac{2}{3}(x - 4) + 1.$$

Spline natural $s_3(x)$

$$a_3 = \frac{s_4''(x_4) - s_3''(x_3)}{6h_3} = \frac{0 - (-2,2)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_3 = \frac{11}{30},$$

$$b_3 = \frac{s_3''(x_3)}{2} = \frac{-2,2}{2} \rightsquigarrow b_3 = -\frac{11}{10},$$

$$c_3 = \Delta y_3 - \frac{s_4''(x_4) + 2s_3''(x_3)}{6}h_3 = 0 - \frac{0 + 2 \times -2,2}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_3 = \frac{11}{15},$$

$$d_3 = y_3 \rightsquigarrow d_3 = 3,$$

$$s_3(x) = \frac{11}{30}(x - 6)^3 - \frac{11}{10}(x - 6)^2 + \frac{11}{15}(x - 6) + 3.$$

Derivadas dos *splines* naturais

$$s'_0(x) = -\frac{47}{20}(x-1)^2 + \frac{167}{60} \quad \text{e} \quad s''_0(x) = -\frac{47}{10}(x-1),$$

$$s'_1(x) = \frac{83}{40}(x-2)^2 - \frac{47}{10}(x-2) + \frac{13}{30} \quad \text{e} \quad s''_1(x) = \frac{83}{20}(x-2) - \frac{47}{10},$$

$$s'_2(x) = -\frac{29}{20}(x-4)^2 + \frac{18}{5}(x-4) - \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad s''_2(x) = -\frac{29}{10}(x-4) + \frac{18}{5},$$

$$s'_3(x) = \frac{11}{10}(x-6)^2 - \frac{11}{5}(x-6) + \frac{11}{15} \quad \text{e} \quad s''_3(x) = \frac{11}{5}(x-6) - \frac{11}{5}.$$

Continuidade dos *splines* naturais

- Os *splines* são contínuos: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$

$$s_0(2) = s_1(2) = 4, \quad s_1(4) = s_2(4) = 1 \quad \text{e} \quad s_2(6) = s_3(6) = 3.$$

- Primeiras derivadas contínuas: $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$

$$s'_0(2) = s'_1(2) = \frac{13}{30}, \quad s'_1(4) = s'_2(4) = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad s'_2(6) = s'_3(6) = \frac{11}{15}.$$

- Segundas derivadas contínuas: $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

$$s''_0(2) = s''_1(2) = -\frac{47}{10}, \quad s''_1(4) = s''_2(4) = \frac{18}{5} \quad \text{e} \quad s''_2(6) = s''_3(6) = -\frac{11}{5}.$$

Exemplo: interpolação com *splines* cúbicos naturais

Exemplo 23 Interpolar os valores $z = 1,2; 2,9; 5,2$ e $6,7$ usando os *splines* cúbicos naturais obtidos no Exemplo 22.

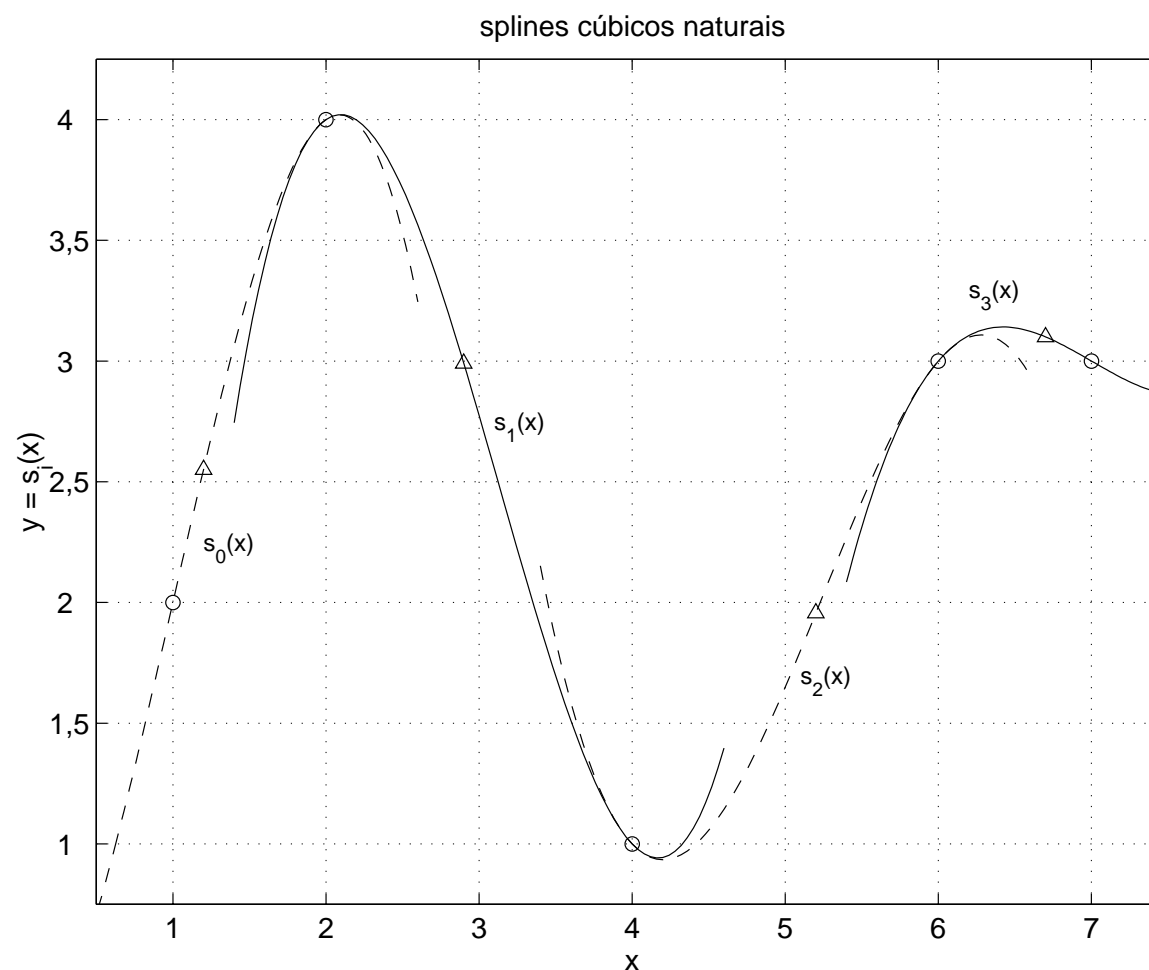
$$s_0(1,2) = -\frac{47}{60}(1,2 - 1)^3 + 0(1,2 - 1)^2 + \frac{167}{60}(1,2 - 1) + 2 = 2,5504;$$

$$s_1(2,9) = \frac{83}{120}(2,9 - 2)^3 - \frac{47}{20}(2,9 - 2)^2 + \frac{13}{30}(2,9 - 2) + 4 = 2,9907;$$

$$s_2(5,2) = -\frac{29}{60}(5,2 - 4)^3 + \frac{9}{5}(5,2 - 4)^2 - \frac{2}{3}(5,2 - 4) + 1 = 1,9568;$$

$$s_3(6,7) = \frac{11}{30}(6,7 - 6)^3 - \frac{11}{10}(6,7 - 6)^2 + \frac{11}{15}(6,7 - 6) + 3 = 3,1001.$$

Gráficos dos *splines* cúbicos naturais



- Legenda \circ : pares (x_i, y_i) ; $--$: *splines* $s_0(x)$ e $s_2(x)$; $-$: $s_1(x)$ e $s_3(x)$; e \triangle : valores interpolados.
- *Splines* $s_i(x)$ esboçados além de seus intervalos de utilização $[x_i, x_{i+1}]$.

Algoritmo: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos naturais

Algoritmo Splines naturais

{ **Objetivo:** Calcular as segundas derivadas para os *splines* cúbicos naturais }

parâmetros de entrada n, x, y

{ número de pontos dados, abscissas em ordem crescente e ordenadas }

parâmetros de saída $s2, CondErro$

{ segundas derivadas e condição de erro }

se $n < 3$ **então**, $CondErro \leftarrow 1$, **abandone**, **fimse**; $CondErro \leftarrow 0$

{ construção do sistema tridiagonal simétrico }

$m \leftarrow n - 2$; $Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Deltaa \leftarrow (y(2) - y(1))/Ha$

para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**

$Hb \leftarrow x(i+2) - x(i+1)$; $Deltab \leftarrow (y(i+2) - y(i+1))/Hb$

$e(i) \leftarrow Hb$; $d(i) \leftarrow 2 * (Ha + Hb)$

$s2(i+1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$; $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$

fimpara

{ eliminação de Gauss }

para $i \leftarrow 2$ **até** m **faça**

$t \leftarrow e(i-1)/d(i-1)$; $d(i) \leftarrow d(i) - t * e(i-1)$; $s2(i+1) \leftarrow s2(i+1) - t * s2(i)$

fimpara

{ solução por substituições retroativas }

$s2(m+1) \leftarrow s2(m+1)/d(m)$

para $i \leftarrow m$ **até** 2 **passo** -1 **faça**

$s2(i) \leftarrow (s2(i) - e(i-1) * s2(i+1))/d(i-1)$

fimpara

$s2(1) \leftarrow 0$; $s2(m+2) \leftarrow 0$

fimalgoritmo

⇐

Complexidade: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos naturais

Operações	Complexidade
adições	$20n - 47$
multiplicações	$5n - 13$
divisões	$3n - 7$

 \Leftarrow

- n : número de pontos, $n \geq 3$.

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 24 Resolver o Exemplo 21 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
```

```
n = 5
```

```
x = 1      2      4      6      7
```

```
y = 2      4      1      3      3
```

```
% produzem os resultados
```

```
s2 = 0    -4.7000    3.6000    -2.2000    0
```

```
CondErro = 0
```

Splines cúbicos extrapolados

- Outra forma de eliminar duas incógnitas do sistema linear (25).
- Impõe-se a condição

$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1) \quad \text{e} \quad s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1}), \quad (28)$$

- sendo $s_i'''(x)$ obtido da derivação de (20).
- Em vista de (22)

$$s_i'''(x) = \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) - s_i''(x_i)}{h_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (29)$$

Cálculo das derivadas

- Considere em (28): $s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1)$.
- Avaliando em (29)

$$\frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{h_0} = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{h_1},$$

$$s_0''(x_0) = \frac{(h_0 + h_1)s_1''(x_1) - h_0s_2''(x_2)}{h_1}.$$

- A partir da condição de (28): $s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1})$

$$\frac{s_{n-1}''(x_{n-1}) - s_{n-2}''(x_{n-2})}{h_{n-2}} = \frac{s_n''(x_n) - s_{n-1}''(x_{n-1})}{h_{n-1}},$$

$$s_n''(x_n) = \frac{(h_{n-1} + h_{n-2})s_{n-1}''(x_{n-1}) - h_{n-1}s_{n-2}''(x_{n-2})}{h_{n-2}}.$$

Sistema linear tridiagonal não simétrico

- Substituindo $s_0''(x_0)$ na primeira equação de (25) e $s_n''(x_n)$ na última, tem-se um sistema linear tridiagonal não simétrico

$$\begin{bmatrix} \frac{(h_0+h_1)(h_0+2h_1)}{h_1} & \frac{h_1^2 - h_0^2}{h_1} & & & \\ & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{h_{n-2}^2 - h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})(h_{n-1}+2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ \vdots \\ s_{n-2}''(x_{n-2}) \\ s_{n-1}''(x_{n-1}) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

- Solução: derivadas $s_i''(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Cálculo das derivadas

cont.

- As derivadas $s_0''(x_0)$ e $s_n''(x_n)$ são dadas por

$$\left. \begin{aligned} s_0''(x_0) &= \frac{(h_0 + h_1)s_1''(x_1) - h_0s_2''(x_2)}{h_1}, \\ s_n''(x_n) &= \frac{(h_{n-1} + h_{n-2})s_{n-1}''(x_{n-1}) - h_{n-1}s_{n-2}''(x_{n-2})}{h_{n-2}} \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

- A derivada $s_0''(x_0)$ é uma extrapolação linear de $s_1''(x_1)$ e $s_2''(x_2)$.
- E $s_n''(x_n)$ é uma extrapolação linear de $s_{n-2}''(x_{n-2})$ e $s_{n-1}''(x_{n-1})$.
- Esses *splines* cúbicos se ajustam perfeitamente a uma $y = f(x)$ cúbica.
- Estes *splines* são também conhecidos como *not-a-knot*.

Exemplo: construção do sistema tridiagonal não simétrico

Exemplo 25 Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, calcular as segundas derivadas $s_i''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ dos *splines* cúbicos extrapolados.

- Cálculo de h_i por (17)

$$h_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 \leadsto h_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 2 \leadsto h_1 = 2,$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 6 - 4 \leadsto h_2 = 2, \quad h_3 = x_4 - x_3 = 7 - 6 \leadsto h_3 = 1.$$

- Cálculo de Δy_i , usando (24)

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{4 - 2}{1} \leadsto \Delta y_0 = 2, \quad \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{1 - 4}{2} \leadsto \Delta y_1 = -1,5;$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{3 - 1}{2} \leadsto \Delta y_2 = 1, \quad \Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} = \frac{3 - 3}{1} \leadsto \Delta y_3 = 0.$$

Exemplo: construção do sistema tridiagonal não simétrico cont.

- Substituindo em (30),

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+2)(1+2 \times 2)}{2} & \frac{2^2-1^2}{2} & 0 \\ 2 & 2(2+2) & 2 \\ 0 & \frac{2^2-1^2}{2} & \frac{(1+2)(1+2 \times 2)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ s_3''(x_3) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1,5-2 \\ 1-(-1,5) \\ 0-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s''(x) = \begin{bmatrix} -41/12 \\ 37/12 \\ -17/12 \end{bmatrix}.$$

- Por (31)

$$s_0''(x_0) = \frac{(1+2) \times -41/12 - 1 \times 37/12}{2} = -20/3,$$

$$s_4''(x_4) = \frac{(1+2) \times -17/12 - 1 \times 37/12}{2} = -11/3.$$

- Segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = -\frac{20}{3}, \quad s_1''(x_1) = -\frac{41}{12}, \quad s_2''(x_2) = \frac{37}{12}, \quad s_3''(x_3) = -\frac{17}{12}, \quad s_4''(x_4) = -\frac{11}{3}.$$

Exemplo: determinação dos *splines* cúbicos extrapolados

Exemplo 26 A partir dos pontos do Exemplo 25, determinar as equações dos quatro *splines* cúbicos extrapolados na forma

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

- sendo as segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = -\frac{20}{3}, \quad s_1''(x_1) = -\frac{41}{12}, \quad s_2''(x_2) = \frac{37}{12}, \quad s_3''(x_3) = -\frac{17}{12}, \quad s_4''(x_4) = -\frac{11}{3}.$$

Spline extrapolado $s_0(x)$

$$a_0 = \frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{6h_0} = \frac{-41/12 - (-20/3)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_0 = \frac{13}{24},$$

$$b_0 = \frac{s_0''(x_0)}{2} = \frac{-20/3}{2} \rightsquigarrow b_0 = -\frac{10}{3},$$

$$c_0 = \Delta y_0 - \frac{s_1''(x_1) + 2s_0''(x_0)}{6}h_0 = 2 - \frac{-41/12 + 2 \times -20/3}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_0 = \frac{115}{24},$$

$$d_0 = y_0 \rightsquigarrow d_0 = 2,$$

$$s_0(x) = \frac{13}{24}(x-1)^3 - \frac{10}{3}(x-1)^2 + \frac{115}{24}(x-1) + 2.$$

Spline extrapolado $s_1(x)$

$$a_1 = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{6h_1} = \frac{37/12 - (-41/12)}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_1 = \frac{13}{24},$$

$$b_1 = \frac{s_1''(x_1)}{2} = \frac{-41/12}{2} \rightsquigarrow b_1 = -\frac{41}{24},$$

$$c_1 = \Delta y_1 - \frac{s_2''(x_2) + 2s_1''(x_1)}{6}h_1 = -1,5 - \frac{37/12 + 2 \times -41/12}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_1 = -\frac{1}{4},$$

$$d_1 = y_1 \rightsquigarrow d_1 = 4,$$

$$s_1(x) = \frac{13}{24}(x-2)^3 - \frac{41}{24}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2) + 4.$$

Spline extrapolado $s_2(x)$

$$a_2 = \frac{s_3''(x_3) - s_2''(x_2)}{6h_2} = \frac{-17/12 - 37/12}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_2 = -\frac{3}{8},$$

$$b_2 = \frac{s_2''(x_2)}{2} = \frac{37/12}{2} \rightsquigarrow b_2 = \frac{37}{24},$$

$$c_2 = \Delta y_2 - \frac{s_3''(x_3) + 2s_2''(x_2)}{6}h_2 = 1 - \frac{-17/12 + 2 \times 37/12}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_2 = -\frac{7}{12},$$

$$d_2 = y_2 \rightsquigarrow d_2 = 1,$$

$$s_2(x) = -\frac{3}{8}(x-4)^3 + \frac{37}{24}(x-4)^2 - \frac{7}{12}(x-4) + 1.$$

Spline extrapolado $s_3(x)$

$$a_3 = \frac{s_4''(x_4) - s_3''(x_3)}{6h_3} = \frac{-11/3 - (-17/12)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_3 = -\frac{3}{8},$$

$$b_3 = \frac{s_3''(x_3)}{2} = \frac{-17/12}{2} \rightsquigarrow b_3 = -\frac{17}{24},$$

$$c_3 = \Delta y_3 - \frac{s_4''(x_4) + 2s_3''(x_3)}{6}h_3 = 0 - \frac{-11/3 + 2 \times -17/12}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_3 = \frac{13}{12},$$

$$d_3 = y_3 \rightsquigarrow d_3 = 3,$$

$$s_3(x) = -\frac{3}{8}(x-6)^3 - \frac{17}{24}(x-6)^2 + \frac{13}{12}(x-6) + 3.$$

Derivadas dos *splines* extrapolados

$$s'_0(x) = \frac{13}{8}(x-1)^2 - \frac{20}{3}(x-1) + \frac{115}{24}, \quad s''_0(x) = \frac{13}{4}(x-1) - \frac{20}{3} \text{ e } s'''_0(x) = \frac{13}{4},$$

$$s'_1(x) = \frac{13}{8}(x-2)^2 - \frac{41}{12}(x-2) - \frac{1}{4}, \quad s''_1(x) = \frac{13}{4}(x-2) - \frac{41}{12} \text{ e } s'''_1(x) = \frac{13}{4},$$

$$s'_2(x) = -\frac{9}{8}(x-4)^2 + \frac{37}{12}(x-4) - \frac{7}{12}, \quad s''_2(x) = -\frac{9}{4}(x-4) + \frac{37}{12} \text{ e } s'''_2(x) = -\frac{9}{4},$$

$$s'_3(x) = -\frac{9}{8}(x-6)^2 - \frac{17}{12}(x-6) + \frac{13}{12}, \quad s''_3(x) = -\frac{9}{4}(x-6) - \frac{17}{12} \text{ e } s'''_3(x) = -\frac{9}{4}.$$

Continuidade dos *splines* extrapolados

- Os *splines* são contínuos: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
 $s_0(2) = s_1(2) = 4$, $s_1(4) = s_2(4) = 1$ e $s_2(6) = s_3(6) = 3$.
- Primeiras derivadas contínuas: $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$
 $s'_0(2) = s'_1(2) = -\frac{1}{4}$, $s'_1(4) = s'_2(4) = -\frac{7}{12}$ e $s'_2(6) = s'_3(6) = \frac{13}{12}$.
- Segundas derivadas contínuas: $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$
 $s''_0(2) = s''_1(2) = -\frac{41}{12}$, $s''_1(4) = s''_2(4) = \frac{37}{12}$ e $s''_2(6) = s''_3(6) = -\frac{17}{12}$.
- Terceiras derivadas contínuas: $s'''_0(x_1) = s'''_1(x_1)$ e $s'''_{n-2}(x_{n-1}) = s'''_{n-1}(x_{n-1})$
 $s'''_0(x_1) = s'''_1(x_1) : s'''_0(2) = s'''_1(2) = \frac{13}{4}$,
 $s'''_2(x_3) = s'''_3(x_3) : s'''_2(6) = s'''_3(6) = -\frac{9}{4}$.

Exemplo: interpolação com *splines* cúbicos extrapolados

Exemplo 27 Interpolar os valores $z = 1,2; 2,9; 5,2; 6,7$ usando os *splines* cúbicos extrapolados obtidos no Exemplo 26.

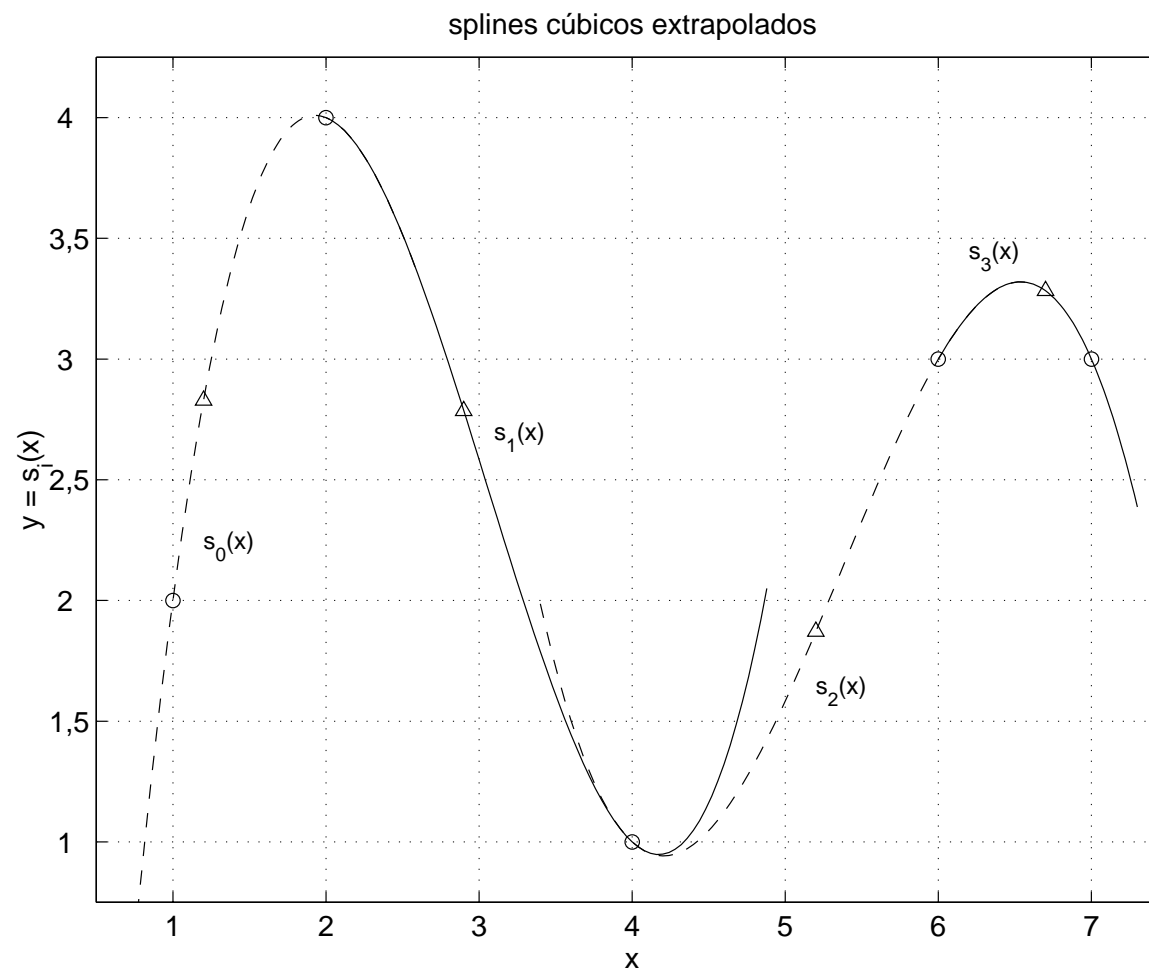
$$s_0(1,2) = \frac{13}{24}(1,2 - 1)^3 - \frac{10}{3}(1,2 - 1)^2 + \frac{115}{24}(1,2 - 1) + 2 = 2,8293;$$

$$s_1(2,9) = \frac{13}{24}(2,9 - 2)^3 - \frac{41}{24}(2,9 - 2)^2 - \frac{1}{4}(2,9 - 2) + 4 = 2,7861;$$

$$s_2(5,2) = -\frac{3}{8}(5,2 - 4)^3 + \frac{37}{24}(5,2 - 4)^2 - \frac{7}{12}(5,2 - 4) + 1 = 1,8720;$$

$$s_3(6,7) = -\frac{3}{8}(6,7 - 6)^3 - \frac{17}{24}(6,7 - 6)^2 + \frac{13}{12}(6,7 - 6) + 3 = 3,2826.$$

Gráficos dos *splines* cúbicos extrapolados



- Legenda o: pares (x_i, y_i) ; --: *splines* $s_0(x)$ e $s_2(x)$; -: $s_1(x)$ e $s_3(x)$ e Δ : valores interpolados.
- *Splines* $s_i(x)$ esboçados além de seus intervalos de utilização $[x_i, x_{i+1}]$.

Algoritmo: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos extrapolados

Algoritmo Splines_extrapolados

{ **Objetivo:** Calcular as segundas derivadas para os *splines* cúbicos extrapolados }

parâmetros de entrada n, x, y { número de pontos dados, abscissas em ordem crescente e ordenadas }

parâmetros de saída $s2, CondErro$ { segundas derivadas e condição de erro }

se $n < 4$ então, $CondErro \leftarrow 1$, abandone, fimse; $CondErro \leftarrow 0$

{ construção do sistema tridiagonal não simétrico }

$m \leftarrow n - 2$; $Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Deltaa \leftarrow (y(2) - y(1))/Ha$

$Hb \leftarrow x(3) - x(2)$; $Deltab \leftarrow (y(3) - y(2))/Hb$; $d(1) \leftarrow (Ha + Hb) * (Ha + 2 * Hb)/Hb$

$c(2) \leftarrow (Hb^2 - Ha^2)/Hb$; $s2(2) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$

para $i \leftarrow 2$ até $m - 1$ faça

$Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$; $Hb \leftarrow x(i + 2) - x(i + 1)$; $Deltab \leftarrow (y(i + 2) - y(i + 1))/Hb$

$d(i) \leftarrow 2 * (Ha + Hb)$; $e(i - 1) \leftarrow Ha$; $c(i + 1) \leftarrow Hb$

$s2(i + 1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$; $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$

fimpara

$Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$; $Hb \leftarrow x(n) - x(n - 1)$; $Deltab \leftarrow (y(n) - y(n - 1))/Hb$

$d(m) \leftarrow (Ha + Hb) * (Hb + 2 * Ha)/Ha$; $e(m - 1) \leftarrow (Ha^2 - Hb^2)/Ha$; $s2(m + 1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$

{ eliminação de Gauss }

para $i \leftarrow 2$ até m faça

$t \leftarrow e(i - 1)/d(i - 1)$; $d(i) \leftarrow d(i) - t * c(i)$; $s2(i + 1) \leftarrow s2(i + 1) - t * s2(i)$

fimpara

{ solução por substituições retroativas }

$s2(m + 1) \leftarrow s2(m + 1)/d(m)$

para $i \leftarrow m$ até 2 passo -1 faça

$s2(i) \leftarrow (s2(i) - c(i) * s2(i + 1))/d(i - 1)$

fimpara

$Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Hb \leftarrow x(3) - x(2)$; $s2(1) \leftarrow ((Ha + Hb) * s2(2) - Ha * s2(3))/Hb$

$Ha \leftarrow x(n - 1) - x(n - 2)$; $Hb \leftarrow x(n) - x(n - 1)$; $s2(m + 2) \leftarrow ((Ha + Hb) * s2(m + 1) - Hb * s2(m))/Ha$

finalgoritmo

Complexidade: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos extrapolados

Operações	Complexidade
adições	$20n - 37$
multiplicações	$5n - 3$
divisões	$3n$

 \ll

- n : número de pontos, $n \geq 4$.
- Operação de potenciação (h^2) contabilizada como uma multiplicação.

Exemplo: uso do algoritmo

Exemplo 28 Resolver o Exemplo 25 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1      2      4      6      7
y = 2      4      1      3      3
% produzem os resultados
s2 = -6.6667   -3.4167   3.0833   -1.4167   -3.6667
CondErro = 0
```

Avaliação dos *splines* cúbicos

- Calculadas as derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos da forma (11),

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

- seus coeficientes são

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) - s_i''(x_i)}{6h_i}, \\ b_i &= \frac{s_i''(x_i)}{2}, \\ c_i &= \Delta y_i - \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) + 2s_i''(x_i)}{6}h_i, \\ d_i &= y_i, \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

- sendo

$$\left. \begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i, \\ \Delta y_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Algoritmo: avaliar *splines* cúbicos

Algoritmo Splines_avalciar

{ **Objetivo:** Avaliar os *splines* cúbicos naturais e extrapolados }

parâmetros de entrada n, x, y, m, z, ts

{ número de pontos dados, abscissas em ordem crescente, ordenadas, }

{ número de pontos a interpolar, valores a interpolar e tipo de *splines* }

parâmetros de saída $sz, CondErro$

{ valores interpolados e condição de erro }

se $ts = 0$ **então**

$[s2, CondErro] \leftarrow \text{Splines_naturais}(n, x, y)$ (algoritmo)

senão

$[s2, CondErro] \leftarrow \text{Splines_extrapolados}(n, x, y)$ (algoritmo)

fimse

se $CondErro \neq 0$ **então** abandone, **fimse**; $CondErro \leftarrow 0$

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**

se $z(j) \geq x(1)$ e $z(j) \leq x(n)$ **então**

{ pesquisa binária para localizar o intervalo }

$inf \leftarrow 1; sup \leftarrow n$

repita

se $sup - inf \leq 1$ **então** interrompa, **fimse**

$ind \leftarrow \text{trunca}((inf + sup)/2)$

se $x(ind) > z(j)$ **então** $sup \leftarrow ind$, **senão** $inf \leftarrow ind$, **fimse**

fimrepita

{ avaliação do *spline* pelo processo de Horner }

$h \leftarrow x(sup) - x(inf); a \leftarrow (s2(sup) - s2(inf))/(6 * h); b \leftarrow s2(inf) * 0,5$

$c \leftarrow (y(sup) - y(inf))/h - (s2(sup) + 2 * s2(inf)) * h/6; d \leftarrow y(inf); h \leftarrow z(j) - x(inf)$

$sz(j) \leftarrow ((a * h + b) * h + c) * h + d$

escreva $inf - 1, a, b, c, d, z(j), sz(j)$

senão

$sz(j) \leftarrow 0; CondErro \leftarrow CondErro + 1$

fimse

fimpara

fimalgoritmo

|| \leftarrow

Complexidade: avaliar *splines* cúbicos

Operações	Complexidade
adições	$9m$
multiplicações	$7m$
divisões	$3m$



- m : número de pontos a serem avaliados.
- Desconsiderando as operações da pesquisa binária.

Exemplo: avaliação de *spline* cúbico natural

Exemplo 29 Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, interpolar os valores $z = 1,2; 0,1; 2,9; 5,2$ e $6,7$ usando os *splines* cúbicos naturais.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1      2      4      6      7
y = 2      4      1      3      3
m = 5
z = 1.2000    0.1000    2.9000    5.2000    6.7000
ts = 0
% produzem os resultados
spline      a_i      b_i      c_i      d_i      z_j      sz_j
s_0:   -0.7833    0.0000    2.7833    2.0000    1.2000    2.5504
s_1:    0.6917   -2.3500    0.4333    4.0000    2.9000    2.9907
s_2:   -0.4833    1.8000   -0.6667    1.0000    5.2000    1.9568
s_3:    0.3667   -1.1000    0.7333    3.0000    6.7000    3.1001
sz = 2.5504         0    2.9907    1.9568    3.1001
CondErro = 1
```

- $\text{CondErro} = 1$: um valor a interpolar ($z(2)$) fora do intervalo $[1, 7]$.
- Valor 0 é atribuído a $sz(2)$ (ver Exemplo 23).

Exemplo: avaliação de *spline* cúbico extrapolado

Exemplo 30 Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, interpolar os valores $z = 1,2; 2,9; 0,5; 5,2; 6,7$ e $8,3$ utilizando os *splines* cúbicos extrapolados.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1      2      4      6      7
y = 2      4      1      3      3
m = 6
z = 1.2000    2.9000    0.5000    5.2000    6.7000    8.3000
ts = 1
% produzem os resultados
spline      a_i      b_i      c_i      d_i      z_j      sz_j
s_0:      0.5417    -3.3333    4.7917    2.0000    1.2000    2.8293
s_1:      0.5417    -1.7083   -0.2500    4.0000    2.9000    2.7861
s_2:     -0.3750     1.5417   -0.5833    1.0000    5.2000    1.8720
s_3:     -0.3750    -0.7083    1.0833    3.0000    6.7000    3.2826
sz = 2.8293    2.7861         0    1.8720    3.2826         0
CondErro = 2
```

- $\text{CondErro} = 2$: dois valores a interpolar ($z(3)$ e $z(6)$) fora do intervalo $[1, 7]$;
- Variáveis $sz(3)$ e $sz(6)$ recebem valor 0 (ver Exemplo 27).

Comparação dos *splines* cúbicos

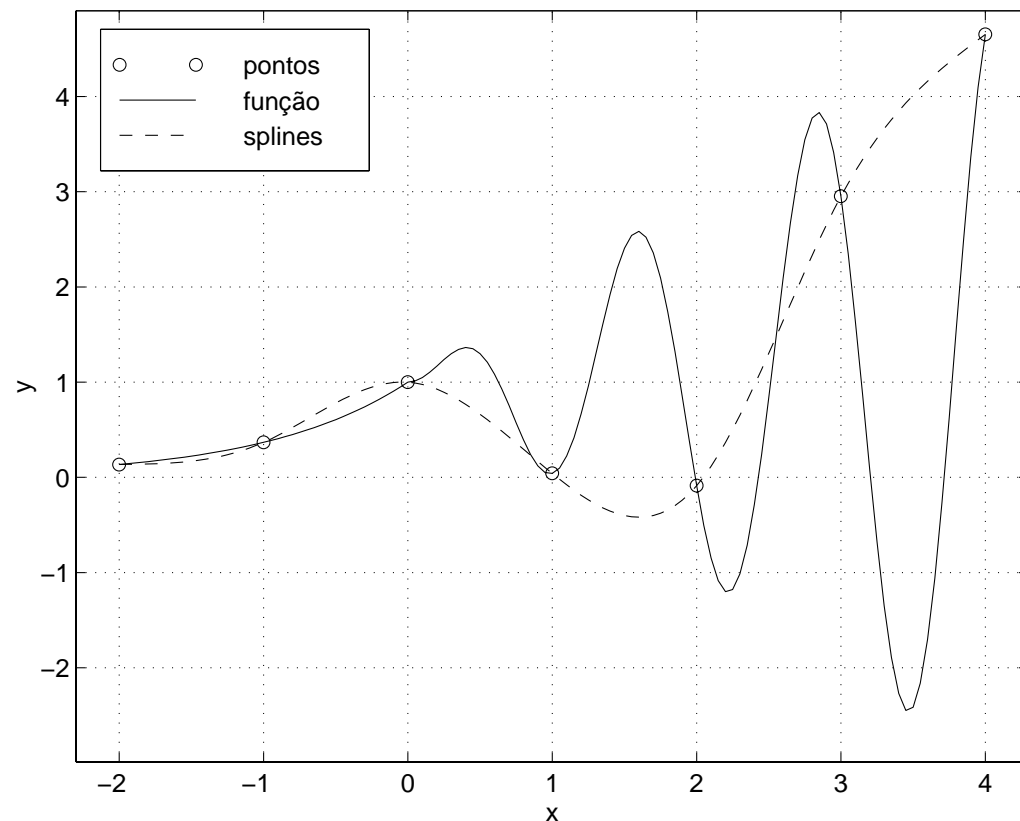
- Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \leq x \leq 0, \\ x \operatorname{sen}(5x) + 1, & 0 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

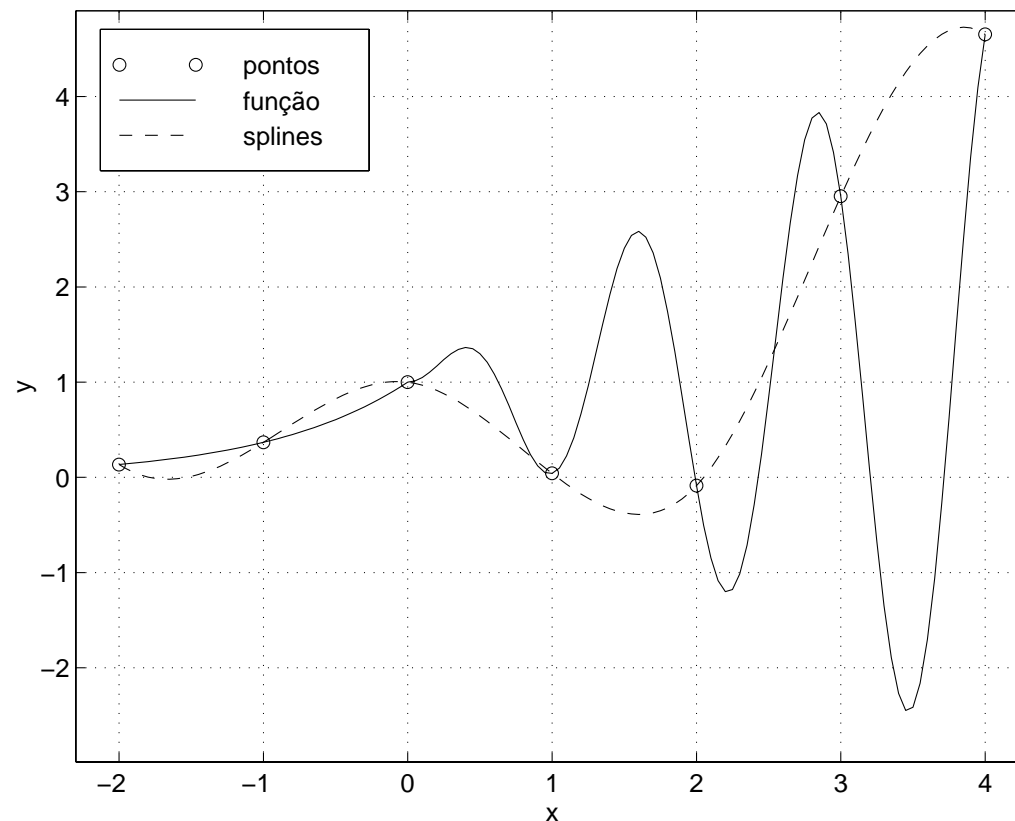
- definida por n pontos distintos $(-2, f(-2))$, $(-2 + h, f(-2 + h))$, $(-2 + 2h, f(-2 + 2h))$, \dots , $(4, f(4))$,
- sendo $h = (4 - (-2))/(n - 1)$.
- Reconstruir a curva de $y = f(x)$ por meio dos *splines* cúbicos.
- Usar $m = 121$ pontos.

Splines cúbicos com diferentes números de pontos

splines naturais dados 7 pontos

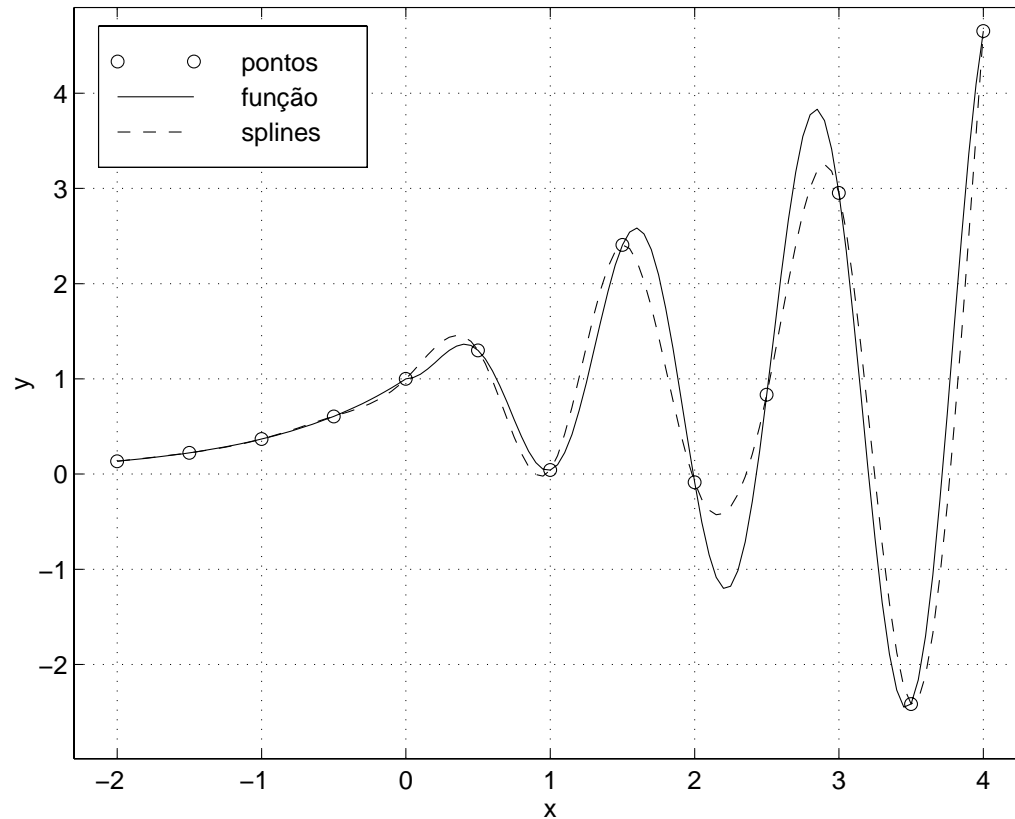
*Splines* naturais dados 7 pontos

splines extrapolados dados 7 pontos

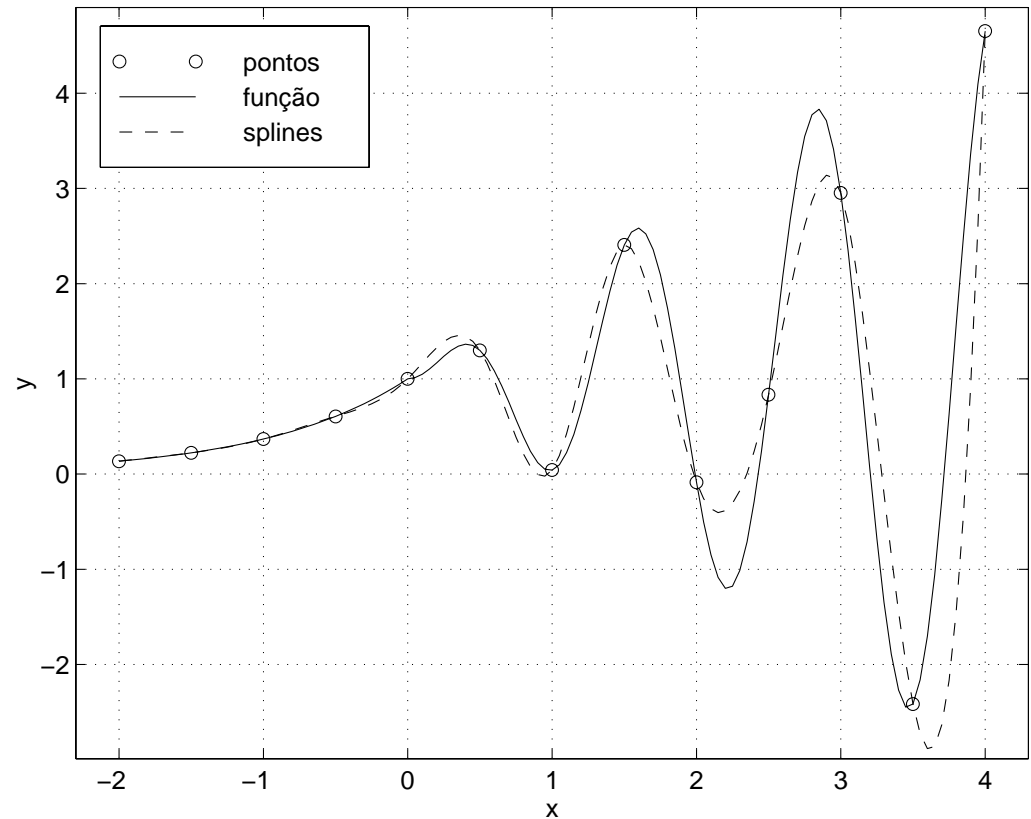
*Splines* extrapolados dados 7 pontos

Splines cúbicos com diferentes números de pontos

splines naturais dados 13 pontos

*Splines* naturais dados 13 pontos

splines extrapolados dados 13 pontos

*Splines* extrapolados dados 13 pontos

Comparação de *splines* cúbicos, com $m = 121$ pontos interpolados

z	$n = 7$ ($h = 1$)		$n = 13$ ($h = 0,5$)		$n = 25$ ($h = 0,25$)		$n = 61$ ($h = 0,1$)	
	Natural	Extrapol	Natural	Extrapol	Natural	Extrapol	Natural	Extrapol
-1,95	0,00625	0,05198	0,00105	0,00189	0,00033	0,00001	0,00006	0,00000
-0,95	0,01625	0,02866	0,00216	0,00222	0,00002	0,00003	0,00000	0,00000
0,05	0,02107	0,02496	0,06784	0,06788	0,03382	0,03382	0,01022	0,01022
1,05	0,11802	0,11486	0,09564	0,09614	0,00626	0,00626	0,00023	0,00023
2,05	0,51399	0,50526	0,23972	0,24657	0,00956	0,00956	0,00016	0,00016
3,05	0,73943	0,77121	0,20128	0,29666	0,00100	0,00062	0,00036	0,00036

Capítulo 3: Interpolação polinomial

Fim