Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 7: Equações diferenciais ordinárias

Capítulo 7: Equações diferenciais ordinárias

Equações diferenciais ordinárias

- Ferramentas fundamentais para modelagem matemática de vários fenômenos físicos, químicos, biológicos etc.
- Fenômenos descritos em termos de taxa de variação.
- Taxa de variação da corrente i em função do tempo t em circuito RL

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V - i(t)R}{L}, \tag{1}$$

onde V: tensão entre dois pontos do circuito, R: resistência e L: indutância.

- Equação diferencial ordinária de primeira ordem.
- Equação diferencial é ordinária porque corrente i é função apenas de uma variável independente, o tempo t.

Ordem de uma EDO

- Se função fosse definida em termos de duas ou mais variáveis, ter-se-ia uma equação diferencial parcial.
- Equação de Laplace
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$
- A EDO (1) é de primeira ordem, pois a derivada de maior ordem, $di(t)/dt$, é de ordem 1.
- Quando a equação contiver uma derivada de ordem n, ela é dita EDO de ordem n
$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

  é EDO de segunda ordem, sendo C a capacitância do circuito.

Solução de EDO

- Solução de EDO é uma função que satisfaz à equação diferencial.
- Também satisfaz certas condições iniciais na função.
- Resolver uma EDO, analiticamente, é encontrar uma solução geral contendo constantes arbitrárias.
- Determinar essas constantes de modo que a expressão combine com as condições iniciais.

Solução numérica de EDO

- Métodos analíticos são restritos apenas à algumas formas especiais de função.
- Nem toda EDO tem solução analítica.
- Métodos numéricos não possuem tal limitação.
- Solução numérica obtida como tabela de valores da função em vários valores da variável independente.
- Solução analítica é uma relação funcional.
- Praticamente, qualquer EDO pode ser resolvida numericamente.
- Se as condições iniciais forem alteradas então toda tabela deve ser recalculada.
- Métodos numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias sujeitas às condições iniciais.

Problema de valor inicial

- Problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(a) = \eta, \\ a \leq x \leq b \ \text{ e} - \infty \leq y \leq \infty. \end{cases} . \qquad (2)$$

- Solução do PVI é uma função $y = y(x)$ contínua e diferenciável que satisfaz a (2).
- Teorema 1 estabelece condições suficientes para existência de solução única do PVI.

Teorema de Lipschitz

Teorema 1 (Lipschitz) *Seja $f(x, y)$ uma função definida e contínua para todo (x, y) na região D definida por $a \leq x \leq b$ e $-\infty \leq y \leq \infty$, sendo a e b números finitos, e seja uma constante L tal que*

$$\|f(x, y) - f(x, y^*)\| \leq L\|y - y^*\| \tag{3}$$

seja válida para todo (x, y), $(x, y^*) \in D$. Então, para algum η, existe uma única solução $y(x)$ do PVI (2), onde $y(x)$ é contínua e diferenciável para todo $(x, y) \in D$.

- Inequação (3) conhecida como condição de Lipschitz.
- L: constante de Lipschitz.

Métodos numéricos para EDO

- Calcular uma aproximação y_i da solução exata $y(x_i)$ do PVI nos pontos

$$x_i = a + ih,\ h = \frac{b-a}{m},\ i = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

onde m: número de subintervalos de $[a, b]$ e h: incremento ou passo.

- Solução numérica do PVI é uma tabela contendo os pares (x_i, y_i), sendo

$$y_i \approx y(x_i).$$

Método de Euler

- Expansão da solução exata $y(x)$, em série de Taylor, em torno do valor inicial x_0

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \frac{h^3}{6}y'''(x_0) + \ldots$$

- Truncando a série após derivada primeira, sendo $x_1 = x_0 + h$, y_1: uma aproximação de $y(x_1)$ e $y' = f(x, y)$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

- Sucessivas aproximações y_i de $y(x_i)$ obtidas pela fórmula de recorrência

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}. \tag{4}$$

- Fórmula conhecida como método de Euler.
- Leonhard Euler propôs este método em 1768.

Algoritmo de Euler para solução de problema de valor inicial

Algoritmo Euler
{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Euler }
parâmetros de entrada *a*, *b*, *m*, *y0*
  { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }
parâmetros de saída *VetX*, *VetY* { abscissas e solução do PVI }
  $h \leftarrow (b - a)/m$; $x \leftarrow a$; $y \leftarrow y0$
  $Fxy \leftarrow f(x, y)$ { avaliar $f(x, y)$ em $x = x_0$ e $y = y_0$ }
  $VetX(1) \leftarrow x$; $VetY(1) \leftarrow y$
  para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow a + i * h$
    $y \leftarrow y + h * Fxy$
    $Fxy \leftarrow f(x, y)$ { avaliar $f(x, y)$ em $x = x_i$ e $y = y_i$ }
    escreva *i*, *x*, *y*, *Fxy*
    $VetX(i + 1) \leftarrow x$; $VetY(i + 1) \leftarrow y$
  fimpara
fimalgoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 1 Calcular a solução do PVI

$$y' = x - 2y + 1, \text{ com } y(0) = 1, \tag{5}$$

no intervalo $[0, 1]$, com $m = 10$ subintervalos, utilizando o algoritmo de Euler.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y0 = 1
% produzem os resultados
            Metodo de Euler
    i     x          y         f(x,y)
    0   0.00000   1.00000  -1.00000
    1   0.10000   0.90000  -0.70000
    2   0.20000   0.83000  -0.46000
    3   0.30000   0.78400  -0.26800
    4   0.40000   0.75720  -0.11440
    5   0.50000   0.74576   0.00848
    6   0.60000   0.74661   0.10678
    7   0.70000   0.75729   0.18543
    8   0.80000   0.77583   0.24834
    9   0.90000   0.80066   0.29867
   10   1.00000   0.83053   0.33894
```

Comparação da solução pelo método de Euler

- Solução exata do PVI (5)

$$y(x) = \frac{1}{4}(3e^{-2x} + 2x + 1). \quad (6)$$

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0,0000
1	0,1	0,9000	0,0140
2	0,2	0,8300	0,0227
3	0,3	0,7840	0,0276
4	0,4	0,7572	0,0298
5	0,5	0,7458	0,0301
6	0,6	0,7466	0,0293
7	0,7	0,7573	0,0277
8	0,8	0,7758	0,0256
9	0,9	0,8007	0,0233
10	1,0	0,8305	0,0210

(a) $m = 10 \rightarrow h = 0{,}1$.

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0,0000
10	0,1	0,9128	0,0012
20	0,2	0,8507	0,0020
30	0,3	0,8091	0,0025
40	0,4	0,7843	0,0027
50	0,5	0,7731	0,0028
60	0,6	0,7732	0,0027
70	0,7	0,7823	0,0026
80	0,8	0,7990	0,0024
90	0,9	0,8217	0,0022
100	1,0	0,8495	0,0020

(b) $m = 100 \rightarrow h = 0{,}01$.

- Método de Euler com $h = 0{,}1$ fornece só uma decimal exata para o PVI (5).
- Redução do passo h para 0,01 melhora solução numérica do PVI.
- Exatidão da solução melhorada quando o valor do passo for reduzido.

Definições

Definição 1 (Passo simples) *Um método será de passo simples quando a aproximação y_{i+1} for calculada a partir somente do valor y_i do passo anterior. Sendo ϕ a função incremento, um método de passo simples é definido na forma*

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h).$$

Definição 2 (Passo múltiplo) *Sejam os p valores y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, ..., y_{i-p+1} previamente calculados por algum método. Um método é de passo múltiplo se estes p valores y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, ..., y_{i-p+1} forem utilizados para calcular y_{i+1}, para $i = p-1,\ p,\ p+1,\ \ldots, m-1$.*

Definições

Definição 3 (Erro local) *Supondo que o valor calculado por um método de passo k seja exato, isto é, $y_{i+j} = y(x_{i+j})$ para $j = 0, 1, \ldots, k-1$, então o erro local em x_{i+k} é definido por*

$$e_{i+k} = y(x_{i+k}) - y_{i+k}.$$

Definição 4 (Ordem) *Um método de passo simples terá ordem q se a função incremento ϕ for tal que*

$$y(x+h) = y(x) + h\phi(x, y; h) + O(h^{q+1}).$$

Definição 5 (Consistência) *Um método numérico é dito consistente com o PVI (2) se a sua ordem $q \geq 1$.*

Definições

Definição 6 (Convergência) *Um método de passo k é convergente se, para o PVI (2),*

$$\lim_{h \to 0} y_i = y(x_i), \ ih = x - a$$

é válido para todo $x \in [a, b]$, e os valores iniciais são tais que

$$\lim_{h \to 0} y_j(h) = \eta, \ j = 0, 1, \ldots, k - 1.$$

- Consistência significa que a solução numérica corresponde à solução do PVI.
- Consistência de um método limita a magnitude do erro local cometido em cada passo.
- Estabilidade controla a propagação do erro durante os cálculos.
- Um método é convergente se ele for consistente e estável.
- Por (4) e pelas Definições 1 e 4, o método de Euler é de passo simples e tem ordem 1.

Métodos de Runge-Kutta

- Exatidão dos resultados melhorada se passo h for reduzido.
- Se exatidão requerida for elevada redução do passo pode acarretar grande esforço computacional.
- Melhor exatidão obtida mais eficientemente pela formulação denominada métodos de Runge-Kutta.
- C. D. T. Runge desenvolveu o primeiro método em 1895.
- M. W. Kutta elaborou a formulação geral em 1901.
- Runge-Kutta são métodos de passo simples de acordo com Definição 1.

Métodos de Runge-Kutta explícitos

- Forma geral dos métodos explícitos de s estágios

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h), \text{ onde } \phi(x, y; h) = b_1k_1 + b_2k_2 + \ldots + b_sk_s, \text{ com} \quad (7)$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f(x + c_2h, y + a_{21}hk_1),$$

$$k_3 = f(x + c_3h, y + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),$$

$$\ldots$$

$$k_s = f(x + c_sh, y + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \ldots + a_{s,s-1}k_{s-1})),$$

sendo a, b e c constantes definidas para cada método particular.

Constantes na notação de Butcher

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem

- Expansão em série de Taylor, com derivadas em y escritas em termos de f, a partir de $dy/dx = f(x,y)$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + \ldots$$

- Como

$$f'(x,y) \equiv \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \rightarrow f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}.$$

- Simplificando a notação: $f_i = f(x_i, y_i)$.
- Sendo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + h^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{1}{2} f_i \frac{\partial f_i}{\partial y}\right). \qquad (8)$$

Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem cont.

- Escrevendo (7) em termos de k_1 e k_2

$$y_{i+1} = y_i + b_1 h f(x_i, y_i) + b_2 h f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i)).$$

- Expandindo $f(x, y)$, em série de Taylor, em termos de (x_i, y_i).
- Retendo somente os termos de derivada primeira

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i)) \approx f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y}.$$

- Substituindo na equação anterior

$$y_{i+1} = y_i + b_1 h f_i + b_2 h \left(f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right).$$

- Rearranjando

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 + b_2) f_i + h^2 \left(b_2 c_2 \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_2 a_{21} f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem cont.

- Comparando (8) e (9).
- Sistema não linear com 3 equações e 4 incógnitas

$$b_1 + b_2 = 1,$$

$$b_2 c_2 = 1/2,$$

$$b_2 a_{21} = 1/2.$$

- Variedade de métodos de segunda ordem.

Método de Euler modificado

- Método de Runge-Kutta de segunda ordem é chamado método de Euler modificado.
- Constantes do método de Euler modificado

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

- Método de Euler modificado

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right)}. \quad (10)$$

Método de Euler melhorado

- Método de Runge-Kutta de segunda ordem.
- Constantes do método de Euler melhorado

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

- Método de Euler melhorado

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))}. \tag{11}$$

Comparação dos métodos de Euler

Exemplo 2 Comparar a solução do PVI $y' = -2xy^2$, com $y(0) = 0{,}5$, no intervalo $[0,\ 1]$, com $m = 10$ subintervalos, utilizando os métodos de Euler, Euler modificado e Euler melhorado, sabendo que a solução exata é

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

i	x_i	$\lvert y_i^{\mathrm{E}} - y(x_i)\rvert$	$\lvert y_i^{\mathrm{Emod}} - y(x_i)\rvert$	$\lvert y_i^{\mathrm{Emel}} - y(x_i)\rvert$
0	0,0	0	0	0
1	0,1	$2{,}49{\times}10^{-3}$	$1{,}24{\times}10^{-5}$	$1{,}24{\times}10^{-5}$
2	0,2	$4{,}80{\times}10^{-3}$	$4{,}76{\times}10^{-5}$	$2{,}32{\times}10^{-5}$
3	0,3	$6{,}73{\times}10^{-3}$	$9{,}83{\times}10^{-5}$	$2{,}97{\times}10^{-5}$
4	0,4	$8{,}11{\times}10^{-3}$	$1{,}55{\times}10^{-4}$	$2{,}89{\times}10^{-5}$
5	0,5	$8{,}88{\times}10^{-3}$	$2{,}06{\times}10^{-4}$	$1{,}91{\times}10^{-5}$
6	0,6	$9{,}04{\times}10^{-3}$	$2{,}45{\times}10^{-4}$	$2{,}60{\times}10^{-8}$
7	0,7	$8{,}69{\times}10^{-3}$	$2{,}67{\times}10^{-4}$	$2{,}70{\times}10^{-5}$
8	0,8	$7{,}94{\times}10^{-3}$	$2{,}71{\times}10^{-4}$	$5{,}96{\times}10^{-5}$
9	0,9	$6{,}93{\times}10^{-3}$	$2{,}59{\times}10^{-4}$	$9{,}48{\times}10^{-5}$
10	1,0	$5{,}77{\times}10^{-3}$	$2{,}35{\times}10^{-4}$	$1{,}30{\times}10^{-4}$

Métodos de quarta ordem

- Mesmo desenvolvimento utilizado para obter métodos de Runge-Kutta de ordem mais elevada.
- No caso de quarta ordem: sistema não linear com 11 equações e 13 incógnitas.
- Um dos métodos mais comuns desta ordem é o método clássico de Runge-Kutta.
- Constantes do método de Runge-Kutta de quarta ordem

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} .$$

Algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4 para a solução de PVI

Algoritmo RK4
{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 }
parâmetros de entrada $a,\ b,\ m,\ y0$
  { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }
parâmetros de saída $VetX,\ VetY$
  { abscissas e solução do PVI }
  $h \leftarrow (b-a)/m$; $xt \leftarrow a$; $yt \leftarrow y0$; $VetX(1) \leftarrow xt$; $VetY(1) \leftarrow yt$
  escreva $0, xt, yt$
  para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow xt$; $y \leftarrow yt$; $k1 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + h/2$; $y \leftarrow yt + h/2 * k1$; $k2 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $y \leftarrow yt + h/2 * k2$; $k3 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + h$; $y \leftarrow yt + h * k3$; $k4 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $xt \leftarrow a + i * h$; $yt \leftarrow yt + h/6 * (k1 + 2 * (k2 + k3) + k4)$
    escreva i, xt, yt
    $VetX(i+1) \leftarrow xt$; $VetY(i+1) \leftarrow yt$
  fimpara
fimalgoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 3 Calcular a solução do PVI do Exemplo 1, $y' = x - 2y + 1$, com $y(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$, com $m = 10$ subintervalos, pelo algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y0 = 1
% fornecem os resultados
Metodo de Runge-Kutta - ordem 4
    i     x          y
    0   0.00000    1.00000
    1   0.10000    0.91405
    2   0.20000    0.85274
    3   0.30000    0.81161
    4   0.40000    0.78700
    5   0.50000    0.77591
    6   0.60000    0.77590
    7   0.70000    0.78495
    8   0.80000    0.80143
    9   0.90000    0.82398
   10   1.00000    0.85150
```

Comparação da solução pelo método de Runge-Kutta

- Diferença entre o valor aproximado y_i dado pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 e a solução exata $y(x_i)$ dada por (6).

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	0,9141	$1{,}94 \times 10^{-6}$
2	0,2	0,8527	$3{,}17 \times 10^{-6}$
3	0,3	0,8116	$3{,}89 \times 10^{-6}$
4	0,4	0,7870	$4{,}25 \times 10^{-6}$
5	0,5	0,7759	$4{,}35 \times 10^{-6}$
6	0,6	0,7759	$4{,}27 \times 10^{-6}$
7	0,7	0,7850	$4{,}08 \times 10^{-6}$
8	0,8	0,8014	$3{,}82 \times 10^{-6}$
9	0,9	0,8240	$3{,}52 \times 10^{-6}$
10	1,0	0,8515	$3{,}20 \times 10^{-6}$

(a) $m = 10 \rightarrow h = 0{,}1.$

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0
10	0,1	0,9140	$1{,}66 \times 10^{-10}$
20	0,2	0,8527	$2{,}73 \times 10^{-10}$
30	0,3	0,8116	$3{,}35 \times 10^{-10}$
40	0,4	0,7870	$3{,}66 \times 10^{-10}$
50	0,5	0,7759	$3{,}74 \times 10^{-10}$
60	0,6	0,7759	$3{,}68 \times 10^{-10}$
70	0,7	0,7849	$3{,}51 \times 10^{-10}$
80	0,8	0,8014	$3{,}28 \times 10^{-10}$
90	0,9	0,8240	$3{,}03 \times 10^{-10}$
100	1,0	0,8515	$2{,}75 \times 10^{-10}$

(b) $m = 100 \rightarrow h = 0{,}01.$

Método de Runge-Kutta-Fehlberg

- Verificar se um método de Runge-Kutta produz valores dentro da exatidão desejada.
- Recalcular o valor de y_{i+1} no final de cada intervalo, utilizando o passo h dividido ao meio.
- Valor aceito se houver apenas uma pequena diferença entre os dois resultados.
- Passo h dividido ao meio até que a exatidão desejada seja alcançada.
- Esta estratégia pode requerer grande esforço computacional.
- Processo proposto por E. Fehlberg, no final da década de 1960, utiliza dois métodos de ordens diferentes, um de ordem 4 e outro de ordem 5.
- Compara os valores de y_{i+1} obtidos nos dois casos.
- Método de Runge-Kutta-Fehlberg é considerado um método de ordem 4.

Método de Dormand-Prince

- No início da década de 1980, J. R. Dormand e P. J. Prince propuseram um método similar ao de Runge-Kutta-Fehlberg, porém de ordem 5.
- Constantes do método de Dormand-Prince

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
1/5 & 1/5 & & & & & & \\
3/10 & 3/40 & 9/40 & & & & & \\
4/5 & 44/45 & -56/15 & 32/9 & & & & \\
8/9 & 19372/6561 & -25360/2187 & 64448/6561 & -212/729 & & & \\
1 & 9017/3168 & -355/33 & 46732/5247 & 49/176 & -5103/18656 & & \\
1 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & \\
\hline
 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & 0 \\
e_i & 71/57600 & 0 & -71/16695 & 71/1920 & -17253/339200 & 22/525 & -1/40
\end{array}.
$$

- Constantes $a_{7i} = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6$.
- Linha e_i contém coeficientes para calcular erros globais: diferenças entre y_{i+1} obtido pelo processo de ordem 5 e o de ordem 4.

Algoritmo de Dormand-Prince para a solução de PVI

Algoritmo DOPRI(5,4)
{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Dormand-Prince }
parâmetros de entrada a, b, m, $y0$ { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }
parâmetros de saída $VetX$, $VetY$, EG { abscissas, solução do PVI e erro global }
  { parâmetros do método }
  $a21 \leftarrow 1/5$; $a31 \leftarrow 3/40$; $a32 \leftarrow 9/40$; $a41 \leftarrow 44/45$; $a42 \leftarrow -56/15$; $a43 \leftarrow 32/9$
  $a51 \leftarrow 19372/6561$; $a52 \leftarrow -25360/2187$; $a53 \leftarrow 64448/6561$; $a54 \leftarrow -212/729$
  $a61 \leftarrow 9017/3168$; $a62 \leftarrow -355/33$; $a63 \leftarrow 46732/5247$; $a64 \leftarrow 49/176$
  $a65 \leftarrow -5103/18656$; $a71 \leftarrow 35/384$; $a73 \leftarrow 500/1113$; $a74 \leftarrow 125/192$
  $a75 \leftarrow -2187/6784$; $a76 \leftarrow 11/84$
  $c2 \leftarrow 1/5$; $c3 \leftarrow 3/10$; $c4 \leftarrow 4/5$; $c5 \leftarrow 8/9$; $c6 \leftarrow 1$; $c7 \leftarrow 1$
  $e1 \leftarrow 71/57600$; $e3 \leftarrow -71/16695$; $e4 \leftarrow 71/1920$; $e5 \leftarrow -17253/339200$; $e6 \leftarrow 22/525$; $e7 \leftarrow -1/40$
  $h \leftarrow (b-a)/m$; $xt \leftarrow a$; $yt \leftarrow y0$; $VetX(1) \leftarrow xt$; $VetY(1) \leftarrow yt$; $EG(1) \leftarrow 0$; **escreva** $0, xt, yt$
  para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow xt$; $y \leftarrow yt$; $k1 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c2 * h$; $y \leftarrow yt + a21 * k1$; $k2 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c3 * h$; $y \leftarrow yt + a31 * k1 + a32 * k2$; $k3 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c4 * h$; $y \leftarrow yt + a41 * k1 + a42 * k2 + a43 * k3$; $k4 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c5 * h$; $y \leftarrow yt + a51 * k1 + a52 * k2 + a53 * k3 + a54 * k4$; $k5 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c6 * h$; $y \leftarrow yt + a61 * k1 + a62 * k2 + a63 * k3 + a64 * k4 + a65 * k5$; $k6 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow xt + c7 * h$; $y \leftarrow yt + a71 * k1 + a73 * k3 + a74 * k4 + a75 * k5 + a76 * k6$; $k7 \leftarrow h * f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $xt \leftarrow a + i * h$; $yt \leftarrow yt + a71 * k1 + a73 * k3 + a74 * k4 + a75 * k5 + a76 * k6$
    $ErroGlobal \leftarrow e1 * k1 + e3 * k3 + e4 * k4 + e5 * k5 + e6 * k6 + e7 * k7$
    $VetX(i+1) \leftarrow xt$; $VetY(i+1) \leftarrow yt$; $EG(i+1) \leftarrow ErroGlobal$; **escreva** $i, xt, yt, ErroGlobal$
  fim para
fim algoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 4 Calcular a solução do PVI do Exemplo 1, $y' = x - 2y + 1$, com $y(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$, com $m = 10$ subintervalos, pelo algoritmo de Dormand-Prince.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y0 = 1
% produzem os resultados
          Metodo de Dormand-Prince
    i      x          y          Erro
    0   0.00000    1.00000
    1   0.10000    0.91405   2.100e-07
    2   0.20000    0.85274   1.719e-07
    3   0.30000    0.81161   1.408e-07
    4   0.40000    0.78700   1.153e-07
    5   0.50000    0.77591   9.436e-08
    6   0.60000    0.77590   7.725e-08
    7   0.70000    0.78495   6.325e-08
    8   0.80000    0.80142   5.179e-08
    9   0.90000    0.82397   4.240e-08
   10   1.00000    0.85150   3.471e-08
```

Comparação da solução pelo método de Dormand-Prince

- Diferença entre valor aproximado y_i dado pelo método de Dormand-Prince e solução exata $y(x_i)$ dada por (6).

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	0,9140	$1{,}52 \times 10^{-8}$
2	0,2	0,8527	$2{,}49 \times 10^{-8}$
3	0,3	0,8116	$3{,}05 \times 10^{-8}$
4	0,4	0,7870	$3{,}33 \times 10^{-8}$
5	0,5	0,7759	$3{,}41 \times 10^{-8}$
6	0,6	0,7759	$3{,}35 \times 10^{-8}$
7	0,7	0,7849	$3{,}20 \times 10^{-8}$
8	0,8	0,8014	$3{,}00 \times 10^{-8}$
9	0,9	0,8240	$2{,}76 \times 10^{-8}$
10	1,0	0,8515	$2{,}51 \times 10^{-8}$

(a) $m = 10$ subintervalos.

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,0	1,0000	0
10	0,1	0,9140	$1{,}13 \times 10^{-13}$
20	0,2	0,8527	$1{,}86 \times 10^{-13}$
30	0,3	0,8116	$2{,}27 \times 10^{-13}$
40	0,4	0,7870	$2{,}48 \times 10^{-13}$
50	0,5	0,7759	$2{,}54 \times 10^{-13}$
60	0,6	0,7759	$2{,}49 \times 10^{-13}$
70	0,7	0,7849	$2{,}38 \times 10^{-13}$
80	0,8	0,8014	$2{,}23 \times 10^{-13}$
90	0,9	0,8240	$2{,}05 \times 10^{-13}$
100	1,0	0,8515	$1{,}87 \times 10^{-13}$

(b) $m = 100$ subintervalos.

Métodos lineares de passo múltiplo

- Classe de métodos para resolver o problema de valor inicial (Definição 2).
- Método de passo k na forma

$$\alpha_k y_{i+k} + \alpha_{k-1} y_{i+k-1} + \ldots + \alpha_0 y_i = h(\beta_k f_{i+k} + \beta_{k-1} f_{i+k-1} + \ldots + \beta_0 f_i), \quad (12)$$

onde α e β são constantes específicas de um método particular, sujeitas às condições

$$\alpha_k = 1 \text{ e } |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0.$$

- Quando $\beta_k = 0$, método é dito explícito e para $\beta_k \neq 0$ ele é implícito.
- Explícitos são chamados métodos de Adams-Bashforth.
- J. C. Adams e F. Bashforth propuseram, em 1883, um método para resolver um problema de ação capilar.
- Implícitos são conhecidos como métodos de Adams-Moulton.
- F. R. Moulton melhorou o método de Adams para calcular trajetórias balísticas na Primeira Guerra Mundial.

Métodos de Adams

- Obtidos por integração do PVI (2)

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt.$$

- Função integrando $f(x, y(x))$ aproximada por polinômio interpolador.
- Polinômio $P(x)$ passa pelos pontos de coordenadas $(x_j, f(x_j, y_j))$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx. \tag{13}$$

Métodos explícitos de passo dois

- Polinômio de Lagrange de grau 1 que passa por (x_0, f_0) e (x_1, f_1)
$$P_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{14}$$
- Valor de $f_0 = f(x_0, y_0)$ obtido a partir de y_0 (condição inicial).
- Valor de y_1 para $f_1 = f(x_1, y_1)$ calculado por método de passo simples.
- Fazendo
$$u = \frac{x - x_0}{h} \to x - x_0 = hu \text{ e } x - x_1 = x - x_0 - h = h(u - 1).$$
- Substituindo as expressões em (14)
$$P_1(x) = f_1 \frac{hu}{h} + f_0 \frac{h(u-1)}{-h} \longrightarrow P_1(x) = f_1 u + f_0(1 - u).$$
- Integrando
$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1(x)dx.$$

Método explícito de Adams-Bashforth de passo dois

- Mudança de variável: $x \to u$ e sendo $dx = hdu$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \int_1^2 [f_1 u + f_0(1-u)]hdu, \\
&= y_1 + h\left[f_1\left(\frac{u^2}{2}\right) + f_0\left(u - \frac{u^2}{2}\right)\right]\Bigg|_1^2, \\
&= y_1 + h\left(\frac{3}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_0\right), \\
y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0).
\end{aligned}
$$

- Fórmula explícita de Adams-Bashforth de passo $k = 2$

$$
\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})}. \qquad (15)
$$

Métodos implícitos de passo dois

- Método explícito obtido pela integração do polinômio no intervalo $[x_1, x_2]$.
- Polinômio $P(x)$ determinado a partir dos pontos em $[x_0, x_1]$.
- Extrapolação não produz bons resultados.
- Se polinômio for construído usando pontos no intervalo $[x_0, x_2]$ consegue-se método mais exato.
- Polinômio de Lagrange de grau 2 que passa por (x_0, f_0), (x_1, f_1) e (x_2, f_2)

$$P_2(x) = f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

- Definindo variável auxiliar

$$u = \frac{x-x_0}{h} \rightarrow x - x_0 = hu,\ x - x_1 = h(u-1)\ \text{ e }\ x - x_2 = h(u-2),$$

$$P_2(x) = f_2\frac{u(u-1)}{2} - f_1 u(u-2) + f_0\frac{(u-1)(u-2)}{2}. \quad (16)$$

Métodos implícitos de passo dois cont.

- Substituindo (16) em (13)

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_2(x)dx.$$

- Mudança de variável: $x \to u$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \int_1^2 \left[f_2 \frac{u(u-1)}{2} - f_1 u(u-2) + f_0 \frac{(u-1)(u-2)}{2} \right] h du, \\ &= y_1 + h \left[f_2 \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) - f_1 \left(\frac{u^3}{3} - u^2 \right) + f_0 \left(\frac{u^3}{6} - \frac{3u^2}{4} + u \right) \right] \Bigg|_1^2, \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{12}(5f_2 + 8f_1 - f_0). \end{aligned}$$

Método implícito de Adams-Moulton de passo dois

- Fórmula implícita de Adams-Moulton de passo $k = 2$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})}. \tag{17}$$

- Valor de $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ necessário para obter o próprio y_{i+1}.
- Valor de y_{i+1} obtido por Adams-Bashforth usado em Adams-Moulton para avaliar f_{i+1} e calcular valor melhor de y_{i+1}.
- Método do tipo preditor-corretor
  - preditor: Adams-Bashforth
  - corretor: Adams-Moulton.

Comparação da solução pelo método preditor-corretor de passo dois

Exemplo 5 Calcular a solução do PVI do Exemplo 1, $y' = x - 2y + 1$, com $y(0) = 1$, no intervalo [0, 1] utilizando o método preditor-corretor de passo dois.

- Diferença entre valor aproximado y_i e solução exata $y(x_i)$ dada por (6).
- Valores de f_1 calculados pelo método de Dormand-Prince.

i	x_i	y_i	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	0,00	1,0000	0
1	0,10	0,9140	$1{,}52 \times 10^{-8}$
2	0,20	0,8526	$1{,}35 \times 10^{-4}$
3	0,30	0,8114	$2{,}19 \times 10^{-4}$
4	0,40	0,7867	$2{,}68 \times 10^{-4}$
5	0,50	0,7756	$2{,}92 \times 10^{-4}$
6	0,60	0,7756	$2{,}99 \times 10^{-4}$
7	0,70	0,7847	$2{,}94 \times 10^{-4}$
8	0,80	0,8011	$2{,}80 \times 10^{-4}$
9	0,90	0,8237	$2{,}62 \times 10^{-4}$
10	1,00	0,8513	$2{,}41 \times 10^{-4}$

(a) $m = 10$ subintervalos.

i	x_i	y_i	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	0,00	1,0000	0
10	0,10	0,9140	$1{,}19 \times 10^{-7}$
20	0,20	0,8527	$2{,}06 \times 10^{-7}$
30	0,30	0,8116	$2{,}58 \times 10^{-7}$
40	0,40	0,7870	$2{,}84 \times 10^{-7}$
50	0,50	0,7759	$2{,}92 \times 10^{-7}$
60	0,60	0,7759	$2{,}88 \times 10^{-7}$
70	0,70	0,7849	$2{,}75 \times 10^{-7}$
80	0,80	0,8014	$2{,}58 \times 10^{-7}$
90	0,90	0,8240	$2{,}38 \times 10^{-7}$
100	1,00	0,8515	$2{,}17 \times 10^{-7}$

(b) $m = 100$ subintervalos.

Método explícito de Adams-Bashforth de passo três

- Integração do polinômio de Lagrange de grau 2 no intervalo $[x_2, x_3]$.
- Substituindo na expressão de y_{i+1}

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + \int_{x_2}^{x_3} P_2(x)dx, \\
&= y_2 + \int_2^3 \left[f_2 \frac{u(u-1)}{2} - f_1 u(u-2) + f_0 \frac{(u-1)(u-2)}{2} \right] hdu, \\
&= y_2 + h \left[f_2 \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) - f_1 \left(\frac{u^3}{3} - u^2 \right) + f_0 \left(\frac{u^3}{6} - \frac{3u^2}{4} + u \right) \right] \Bigg|_2^3, \\
y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0).
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})}. \qquad (18)
$$

- f_0 avaliada a partir de y_0 e, f_1 e f_2 obtidos por método de passo simples.

Método implícito de Adams-Moulton de passo três

- Fórmula explícita obtida por extrapolação
  - Integração no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.
  - Polinômio construído a partir de pontos em $[x_{i-2}, x_i]$.
- Método implícito de Adams-Moulton de passo $k = 3$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})}. \tag{19}$$

Método de Adams-Bashforth-Moulton de quarta ordem

- Um dos métodos mais populares de passo múltiplo.
- Preditor explícito: Adams-Bashforth de passo $k = 4$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})}, \tag{20}$$

- Corretor implícito: Adams-Moulton de passo $k = 3$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})}.$$

- Corretor aplicado mais de uma vez para melhorar ainda mais o resultado.

Algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4 para a solução de PVI

Algoritmo ABM4
{ **Objetivo:** Resolver PVI pelo método de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4 }
parâmetros de entrada $a,\ b,\ m,\ y0$
  { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }
parâmetros de saída $VetX,\ VetY,\ Erro$
  { abscissas, solução do PVI e erro }
  $h \leftarrow (b-a)/m$; $[VetX, VetY, Erro] \leftarrow$ **DOPRI**$(a, a+3*h, 3, y0)$ (ver algoritmo)
  { parâmetros de saída de **DOPRI** retornam em $VetX$, $VetY$, $Erro$ }
  para $i \leftarrow 1$ **até** 4 **faça**; **escreva** $i-1, VetX(i), VetY(i), Erro(i)$; **fimpara**
  para $i \leftarrow 4$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow VetX(i-3)$; $y \leftarrow VetY(i-3)$; $f0 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow VetX(i-2)$; $y \leftarrow VetY(i-2)$; $f1 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow VetX(i-1)$; $y \leftarrow VetY(i-1)$; $f2 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $x \leftarrow VetX(i)$; $y \leftarrow VetY(i)$; $f3 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
    $Ypre \leftarrow h*(55*f3-59*f2+37*f1-9*f0)/24+VetY(i)$
    $VetY(i+1) \leftarrow Ypre$; $VetX(i+1) \leftarrow a+i*h$; $x \leftarrow VetX(i+1)$
    para $j \leftarrow 1$ **até** 2 **faça**
      $y \leftarrow VetY(i+1)$; $f4 \leftarrow f(x,y)$ { avaliar $f(x,y)$ }
      $Ycor \leftarrow h*(9*f4+19*f3-5*f2+f1)/24+VetY(i)$; $VetY(i+1) \leftarrow Ycor$
    fimpara
    $Erro \leftarrow \mathrm{abs}(Ycor-Ypre)*19/270$;   **escreva** $i, VetX(i+1), VetY(i+1), Erro$
  fimpara
fimalgoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 6 Calcular a solução do PVI do Exemplo 1, $y' = x - 2y + 1$, com $y(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$, utilizando o algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y0 = 1
% produzem os resultados
Metodo de Adams-Bashforth-Moulton - ordem 4
   i     x          y          Erro
   0   0.00000   1.00000   0.00000e+00
   1   0.10000   0.91405   2.10000e-07
   2   0.20000   0.85274   1.71933e-07
   3   0.30000   0.81161   1.40767e-07
   4   0.40000   0.78699   4.23161e-06
   5   0.50000   0.77590   3.51703e-06
   6   0.60000   0.77589   2.82201e-06
   7   0.70000   0.78494   2.33307e-06
   8   0.80000   0.80142   1.90865e-06
   9   0.90000   0.82397   1.56299e-06
  10   1.00000   0.85150   1.27961e-06
```

Comparação da solução pelo método preditor-corretor de ordem 4

- Diferença entre resultado exato, dado por (6), e os obtidos pelo método preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4.

i	x_i	y_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,00	1,0000	0
1	0,10	0,9140	$1{,}52_{\times}10^{-8}$
2	0,20	0,8527	$2{,}49_{\times}10^{-8}$
3	0,30	0,8116	$3{,}05_{\times}10^{-8}$
4	0,40	0,7870	$3{,}07_{\times}10^{-6}$
5	0,50	0,7759	$4{,}94_{\times}10^{-6}$
6	0,60	0,7759	$6{,}07_{\times}10^{-6}$
7	0,70	0,7849	$6{,}62_{\times}10^{-6}$
8	0,80	0,8014	$6{,}77_{\times}10^{-6}$
9	0,90	0,8240	$6{,}65_{\times}10^{-6}$
10	1,00	0,8515	$6{,}35_{\times}10^{-6}$

(a) 10 subintervalos.

i	x_i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0,00	0
10	0,10	$3{,}69_{\times}10^{-10}$
20	0,20	$7{,}33_{\times}10^{-10}$
30	0,30	$9{,}53_{\times}10^{-10}$
40	0,40	$1{,}07_{\times}10^{-9}$
50	0,50	$1{,}11_{\times}10^{-9}$
60	0,60	$1{,}10_{\times}10^{-9}$
70	0,70	$1{,}06_{\times}10^{-9}$
80	0,80	$9{,}99_{\times}10^{-10}$
90	0,90	$9{,}25_{\times}10^{-10}$
100	1,00	$8{,}44_{\times}10^{-10}$

(b) 100 subintervalos.

i	$\|y_i - y(x_i)\|$
0	0
100	$5{,}02_{\times}10^{-14}$
200	$8{,}39_{\times}10^{-14}$
300	$1{,}03_{\times}10^{-13}$
400	$1{,}14_{\times}10^{-13}$
500	$1{,}16_{\times}10^{-13}$
600	$1{,}15_{\times}10^{-13}$
700	$1{,}10_{\times}10^{-13}$
800	$1{,}03_{\times}10^{-13}$
900	$9{,}43_{\times}10^{-14}$
1000	$8{,}56_{\times}10^{-14}$

(c) 1000 subintervalos.

Comparação de métodos para EDO

- Métodos de passo simples (Runge-Kutta).
- Métodos de passo múltiplo (Adams).

Métodos de Runge-Kutta

- Vantagens:
  1. Auto-iniciáveis não dependendo do auxílio de outros métodos.
  2. Fácil alteração do incremento h para reduzir esforço computacional.
- Desvantagens:
  1. Número elevado de avaliações da função $f(x, y)$, por passo.
  2. Escolha de h pequeno para limitar erro de discretização pode causar aumento do erro de arredondamento.

Métodos de Adams

- Vantagens:
  1. Número pequeno de avaliações da função $f(x, y)$, a cada iteração i: uma vez nas fórmulas explícitas e $i + 1$ vezes nas implícitas.
  2. Fórmulas simples podendo ser utilizadas com calculadora.
- Desvantagens:
  1. Não são auto-iniciáveis causando dependência de outro método.
  2. Mudança do incremento h mais difícil.

Comparação de métodos para EDO para solução de cinco PVI's

- Métodos: Euler, Dormand-Prince e Adams-Bashforth-Moulton.
- Solução exata do j-ésimo PVI é dada por $y_j(x)$.

$$f_1(x,y) = -2x^2y^2,\ y(0)=2,\ x\in[0,2],\ y_1(x)=\frac{6}{4x^3+3},$$

$$f_2(x,y) = 3x^2y,\ y(1)=1,\ x\in[1,2],\ y_2(x)=e^{x^3-1},$$

$$f_3(x,y) = -2xy^3,\ y(0)=1,\ x\in[0,5],\ y_3(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}},$$

$$f_4(x,y) = \cos(x)y,\ y(0)=1,\ x\in[0,10],\ y_4(x)=e^{\mathrm{sen}(x)},$$

$$f_5(x,y) = \mathrm{sen}(x)-y,\ y(0)=0,\ x\in[0,\pi],\ y_5(x)=\frac{e^{-x}+\mathrm{sen}(x)-\cos(x)}{2}.$$

- Erro: maior diferença, em valor absoluto, entre solução numérica e exata.
- t_{rel}: razão entre tempo gasto pelo método e pelo método de Euler.

$$f_1(x, y) = -2x^2y^2, \; y(0) = 2, \; x \in [0, 2]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}
Euler	$1{,}43_{\times}10^{-1}$	1,0	Euler	$1{,}26_{\times}10^{-2}$	1,0	Euler	$1{,}24_{\times}10^{-3}$	1,0
DOPRI	$3{,}51_{\times}10^{-5}$	4,7	DOPRI	$7{,}26_{\times}10^{-11}$	6,4	DOPRI	$3{,}33_{\times}10^{-15}$	6,1
ABM4	$2{,}48_{\times}10^{-3}$	4,3	ABM4	$3{,}62_{\times}10^{-7}$	5,3	ABM4	$3{,}75_{\times}10^{-11}$	4,9

$$f_2(x,y) = 3x^2y,\ y(1) = 1,\ x \in [1,2]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}
Euler	$9{,}59_{\times}10^{2}$	1,0	Euler	$2{,}89_{\times}10^{2}$	1,0	Euler	$3{,}48_{\times}10^{1}$	1,0
DOPRI	$1{,}54_{\times}10^{-1}$	7,0	DOPRI	$1{,}18_{\times}10^{-5}$	6,4	DOPRI	$1{,}34_{\times}10^{-10}$	6,0
ABM4	$4{,}96_{\times}10^{1}$	6,5	ABM4	$2{,}82_{\times}10^{-2}$	5,2	ABM4	$3{,}17_{\times}10^{-6}$	4,8

$$f_3(x,y) = -2xy^3,\ y(0) = 1,\ x \in [0,5]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}
Euler	$1{,}84{\times}10^{-1}$	1,0	Euler	$1{,}05{\times}10^{-2}$	1,0	Euler	$9{,}97{\times}10^{-4}$	1,0
DOPRI	$1{,}51{\times}10^{-4}$	6,2	DOPRI	$1{,}99{\times}10^{-10}$	6,4	DOPRI	$3{,}00{\times}10^{-15}$	6,1
ABM4	$3{,}99{\times}10^{-3}$	5,6	ABM4	$4{,}89{\times}10^{-6}$	5,3	ABM4	$6{,}23{\times}10^{-10}$	4,9

$$f_4(x,y) = \cos(x)y,\ \ y(0) = 1,\ \ x \in [0,10]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}
Euler	$2{,}66{\times}10^{0}$	1,0	Euler	$3{,}90{\times}10^{-1}$	1,0	Euler	$4{,}15{\times}10^{-2}$	1,0
DOPRI	$7{,}25{\times}10^{-4}$	6,8	DOPRI	$1{,}02{\times}10^{-8}$	6,6	DOPRI	$1{,}06{\times}10^{-13}$	6,0
ABM4	$5{,}65{\times}10^{-1}$	6,0	ABM4	$4{,}82{\times}10^{-5}$	5,3	ABM4	$3{,}65{\times}10^{-9}$	4,6

$$f_5(x,y) = \mathsf{sen}(x) - y,\ y(0) = 0,\ x \in [0,\pi]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}	Método	Erro	t_{rel}
Euler	$7{,}73_{\times}10^{-2}$	1,0	Euler	$7{,}18_{\times}10^{-3}$	1,0	Euler	$7{,}13_{\times}10^{-4}$	1,0
DOPRI	$4{,}90_{\times}10^{-7}$	7,0	DOPRI	$4{,}05_{\times}10^{-12}$	6,6	DOPRI	$1{,}22_{\times}10^{-15}$	6,1
ABM4	$5{,}63_{\times}10^{-5}$	6,0	ABM4	$8{,}72_{\times}10^{-9}$	5,3	ABM4	$8{,}75_{\times}10^{-13}$	4,6

Sistemas de equações diferenciais ordinárias

- Uso de sistemas de EDO é comum na modelagem de problema real.
- Equação diferencial de ordem $n > 1$ resolvida por um sistema de ordem n.
- Sistema de p equações diferenciais ordinárias com p incógnitas

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_p),\\
y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_p),\\
&\ldots\\
y_p' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_p),
\end{aligned}
$$

  - f_i: função dada do problema e
  - $y_i(a) = \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$: condições iniciais.

Algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4 para sistema de ordem 2

Algoritmo RK4sis2
{ **Objetivo:** Resolver sistema de EDO pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 }
parâmetros de entrada a, b, m, $y10$, $y20$
  { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valores iniciais }
parâmetros de saída $VetX$, $VetY1$, $VetY2$
  { abscissas e soluções do PVI }
  $h \leftarrow (b-a)/m$; $xt \leftarrow a$; $y1t \leftarrow y10$; $y2t \leftarrow y20$; $VetX(1) \leftarrow xt$; $VetY1(1) \leftarrow y1t$; $VetY2(1) \leftarrow y2t$
  escreva $0, xt, y1t, y2t$
  para $i \leftarrow 1$ **até** m **faça**
    $x \leftarrow xt$; $y1 \leftarrow y1t$; $y2 \leftarrow y2t$
    $k11 \leftarrow f_1(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_1(x, y_1, y_2)$ }; $k12 \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_2(x, y_1, y_2)$ }
    $x \leftarrow xt + h/2$; $y1 \leftarrow y1t + h/2 * k11$; $y2 \leftarrow y2t + h/2 * k12$
    $k21 \leftarrow f_1(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_1(x, y_1, y_2)$ }; $k22 \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_2(x, y_1, y_2)$ }
    $y1 \leftarrow y1t + h/2 * k21$; $y2 \leftarrow y2t + h/2 * k22$
    $k31 \leftarrow f_1(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_1(x, y_1, y_2)$ }; $k32 \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_2(x, y_1, y_2)$ }
    $x \leftarrow xt + h$; $y1 \leftarrow y1t + h * k31$; $y2 \leftarrow y2t + h * k32$
    $k41 \leftarrow f_1(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_1(x, y_1, y_2)$ }; $k42 \leftarrow f_2(x, y_1, y_2)$ { avaliar $f_2(x, y_1, y_2)$ }
    $xt \leftarrow a + i * h$
    $y1t \leftarrow y1t + h/6 * (k11 + 2 * (k21 + k31) + k41)$; $y2t \leftarrow y2t + h/6 * (k12 + 2 * (k22 + k32) + k42)$
    escreva $i, xt, y1t, y2t$
    $VetX(i+1) \leftarrow xt$; $VetY1(i+1) \leftarrow y1t$; $VetY2(i+1) \leftarrow y2t$
  fim para
fim algoritmo

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 7 Resolver o sistema de EDO $y_1' = y_1 + y_2 + 3x$ e $y_2' = 2y_1 - y_2 - x$, com $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = -1$ no intervalo $[0, 2]$ com 10 subintervalos, utilizando o algoritmo **RK4sis2**.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 2
m = 10
y10 = 0
y20 = -1
% produzem os resultados
   Metodo RK4 para sistema de ordem 2
    i     x          y1          y2
    0   0.00000    0.00000   -1.00000
    1   0.20000   -0.14073   -0.86747
    2   0.40000   -0.16119   -0.82388
    3   0.60000   -0.04768   -0.80741
    4   0.80000    0.22970   -0.75950
    5   1.00000    0.72072   -0.61782
    6   1.20000    1.50106   -0.30864
    7   1.40000    2.68142    0.26206
    8   1.60000    4.42101    1.22000
    9   1.80000    6.94680    2.73780
   10   2.00000   10.58102    5.05594
```

Equações diferenciais de segunda ordem

- Equação diferencial ordinária de ordem $n > 1$ reduzida a sistema de EDO de primeira ordem com n equações.
- Transformação por meio de mudança de variáveis.
- PVI de segunda ordem

$$y'' = f(x, y, y') \text{ com } y(a) = \eta_1 \text{ e } y'(a) = \eta_2.$$

- Equivalente ao sistema de equações de primeira ordem

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2),$$

com $y_1(a) = \eta_1$ e $y_2(a) = \eta_2$.

- Mudanças de variáveis

$$y_1 = y \text{ e } y_2 = y_1'.$$

Exemplo de equações diferenciais de segunda ordem

Exemplo 8 Resolver o PVI de segunda ordem $y'' = y' + 2y - x^2$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, intervalo $[0, 1]$ com 10 subintervalos.

- Mudanças de variáveis: $y_1 = y$ e $y_2 = y_1'$.
- Sistema de ordem dois de EDO de primeira ordem

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = y_2 + 2y_1 - x^2,$$

com $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 0$.

Exemplo de uso do algoritmo

- Sistema de EDO de primeira ordem $y_1' = y_2$ e $y_2' = y_2 + 2y_1 - x^2$, com $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 0$, intervalo $[0, 1]$ com 10 subintervalos.
- Usando o algoritmo **RK4sis2**

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y10 = 1
y20 = 0
% produzem os resultados
   Metodo RK4 para sistema de ordem 2
    i      x           y1          y2
    0   0.00000     1.00000     0.00000
    1   0.10000     1.01035     0.21070
    2   0.20000     1.04295     0.44591
    3   0.30000     1.10053     0.71105
    4   0.40000     1.18638     1.01276
    5   0.50000     1.30456     1.35912
    6   0.60000     1.46002     1.76003
    7   0.70000     1.65878     2.22756
    8   0.80000     1.90823     2.77646
    9   0.90000     2.21738     3.42475
   10   1.00000     2.59721     4.19443
```

Comparação da solução pelo algoritmo RK4sis2

- Resultados obtidos pelo algoritmo **RK4sis2** comparados com valor exato

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2x^2 - 2x + 3).$$

i	x_i	y_i	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	1,0103	$8{,}98_{\times}10^{-7}$
2	0,2	1,0430	$2{,}17_{\times}10^{-6}$
3	0,3	1,1005	$3{,}93_{\times}10^{-6}$
4	0,4	1,1864	$6{,}32_{\times}10^{-6}$
5	0,5	1,3046	$9{,}54_{\times}10^{-6}$
6	0,6	1,4600	$1{,}38_{\times}10^{-5}$
7	0,7	1,6588	$1{,}95_{\times}10^{-5}$
8	0,8	1,9082	$2{,}69_{\times}10^{-5}$
9	0,9	2,2174	$3{,}66_{\times}10^{-5}$
10	1,0	2,5972	$4{,}93_{\times}10^{-5}$

(a) 10 subintervalos.

i	x_i	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	0,0	0
10	0,1	$1{,}04_{\times}10^{-10}$
20	0,2	$2{,}51_{\times}10^{-10}$
30	0,3	$4{,}53_{\times}10^{-10}$
40	0,4	$7{,}29_{\times}10^{-10}$
50	0,5	$1{,}10_{\times}10^{-9}$
60	0,6	$1{,}59_{\times}10^{-9}$
70	0,7	$2{,}25_{\times}10^{-9}$
80	0,8	$3{,}10_{\times}10^{-9}$
90	0,9	$4{,}22_{\times}10^{-9}$
100	1,0	$5{,}68_{\times}10^{-9}$

(b) 100 subintervalos.

i	$\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	0
100	$1{,}13_{\times}10^{-14}$
200	$2{,}69_{\times}10^{-14}$
300	$4{,}82_{\times}10^{-14}$
400	$7{,}53_{\times}10^{-14}$
500	$1{,}13_{\times}10^{-13}$
600	$1{,}63_{\times}10^{-13}$
700	$2{,}29_{\times}10^{-13}$
800	$3{,}15_{\times}10^{-13}$
900	$4{,}29_{\times}10^{-13}$
1000	$5{,}76_{\times}10^{-13}$

(c) 1000 subintervalos.

.

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 9 Resolver o PVI de segunda ordem $y'' = 4y' - 5y + x - 2$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, $x \in [0, 2]$, usando 8 subintervalos.

- Mudanças de variáveis: $y_1 = y$ e $y_2 = y_1'$.
- Sistema: $y_1' = y_2$ e $y_2' = 4y_2 - 5y_1 + x - 2$, com $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = -1$.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 2
m = 8
y10 = 1
y20 =-1
% produzem os resultados
   Metodo RK4 para sistema de ordem 2
    i     x          y1          y2
    0   0.00000    1.00000   -1.00000
    1   0.25000    0.29150   -5.22233
    2   0.50000   -1.97300  -13.86486
    3   0.75000   -7.25688  -30.00220
    4   1.00000  -17.95859  -58.07121
    5   1.25000  -37.76370 -103.89015
    6   1.50000  -71.92819 -173.98777
    7   1.75000 -127.22682 -273.40703
    8   2.00000 -211.01753 -400.51082
```

Capítulo 7: Equações diferenciais ordinárias

Fim