实分析供题

1.$\mathcal{N}$是教材上定义的不可测集，记$\mathcal{N}_0=[0,1]-\mathcal{N}$.

若$O_n=\{x|d(x,\mathcal{N}_0)<\dfrac{1}{n}\}$,

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}m(O_n)=m_*(\mathcal{N}_0)$

(stein p45t33的改编)

2.设f可测. 对任意开集E，若$m(E)=1$则有$\int_E f=1$.

证明: $f=1\ a.e.$

(有界集合上的绝对连续性)

3.设f,f_n均可测，$f\in L^1(\mathcal{R}^d)$.若$0\le f_1\le f_2\le\cdots\ a.e.$，且有 f_n依测度收敛于f.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

(Riesz定理)

4.$f\in L^1(\mathcal{R}^d)$且有$f\ge-\dfrac{1}{2}\ a.e.$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int n\log(1+\dfrac{f}{n})=\int f$.

(控制收敛定理)

5.$f\in L^1(\mathcal{R}^d)$.

证明: $\lim\limits_{h\to\infty}||f+f_h||_{L^1(\mathcal{R}^d)}=2||f||_{L^1(\mathcal{R}^d)}$.

(去年第五题相同类型的题实在找不到了)

6.设$x\in R$, $\{r_n\}$是有理数的一个排列，证明下列级数几乎处处收敛:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{|x-r_n|^{\frac{1}{2}}}$

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{|x-r_n|}\chi_{(r_n-\frac{1}{2^n},r_n+\frac{1}{2^n})}$

(第一个积分收敛，第二个Borel-Cantelli引理)

7.$\{r_n\}$是有理数的一个排列，记$f(x)=m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n-\dfrac{1}{x^n},r_n+\dfrac{1}{x^n}))$.

证明: f在$(1,+\infty)$上连续.

(stein p20 Corollary 3.3直接推论，或者次可加性放缩)

8.设$f_n,f\in L^1(\mathcal{R}^d)$，$f_n\to f\ a.e.$，且有$||f_n||_{L^1(\mathcal{R}^d)}\to||f||_{L^1(\mathcal{R}^d)}$.

证明:(1)对任意可测集E均有$\int_E |f_n| \to \int_E |f|$.
(2)$||f_n - f||_{L^1(\mathcal{R}^d)} \to 0$.
(第一个Fatou引理，第二个叶戈罗夫定理和绝对连续性)

9.设f_n, f是可测集E上的可测函数，其中$m(E) < \infty$. 如果$f_n \to f\ a.e., \int_E f_n^2 \to \int_E f^2$.
证明:$\int_E |f_n - f| \to 0$.
(叶戈罗夫定理，但是还需要用Cauchy不等式)

10.设f是可测集E上的正可积函数，若$0 < \lambda \leq m(E) < +\infty$,
证明: $\inf\{\int_e f | e \subset E,\ m(e) = \lambda\} > 0$.
(反证法作上限集，只用到了stein p20 Corollary 3.3(ii))

11.$\mathcal{N}$是不可测集，$N_0 = [0,1] - N$.
证明：$\inf\{m(A \cap B) | N \subset A,\ N_0 \subset B,$其中A,B是可测集$\} = m_*(E)$.
(stein p20 Corollary 3.3改编)

12.$f \in L^1(\mathcal{R})$，对任意$x \in R$均有$\int_0^x f = 0$.
证明: $f = 0\ a.e.$
(先证f在开区间的有限并上积分为0，然后用Littlewood三原则及绝对连续性证明任意测度有限可测集上积分为0)