LABORATÓRIO DE FÍSICA   A

AULA 2: INTRODUÇÃO MEDIDAS E INCERTEZAS

ROTEIRO

- Medidas Experimentais
- Incertezas

3 MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Uma grandeza física deve ser determinada a partir de medição e o resultado é sempre uma aproximação para o valor verdadeiro.

Teoria de Erros

Determinar o melhor valor possível para a grandeza.

Determinar o quanto o melhor valor obtido pode ser diferente do valor verdadeiro.

4 MEDIDAS EXPERIMENTAIS

A incerteza no melhor valor de uma grandeza pode ser definida como uma indicação de quanto este melhor valor pode diferir do valor verdadeiro do mensurando, em termos de probabilidades.

$$\eta = x - x_v$$

Erro na medida da grandeza "x".

Valor medido da grandeza "x".

Valor verdadeiro da grandeza "x".

5 MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Qual é o problema que temos, em geral no laboratório?

Não conhecemos o valor "verdadeiro" do mensurando.

O melhor valor e a respectiva incerteza só podem ser obtidos e interpretados em termos de probabilidades.

Objetivos da Teoria de Erros

1. Obter o melhor valor para o mensurando.
2. Obter a incerteza no melhor valor obtido.

Formas de indicar a incerteza:

1. Incerteza padrão (σ): desvio-padrão da distribuição de erros.

2. Incerteza expandida com confiança P ($k\sigma$): é um múltiplo da incerteza padrão, $k\sigma$. Os valores usuais do fator multiplicativo k são: 1, 2, 3 e 5.

3. Limite de erro (L): é o valor máximo admissível para o erro.

4. Erro provável (Δ): é valor Δ que tem 50% de probabilidade de ser excedido pelo valor η, em módulo

7 MEDIDAS EXPERIMENTAIS

Em geral, realizamos a medida de uma grandeza X várias vezes. Vários considerar que o nosso mensurando (grandeza X) foi medido n vezes.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$$

Note que cada x_i representa uma medida do mesmo mensurando.

Média dos valores: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

8 INCERTEZAS

Vários tipos de erros podem ocorrer numa mesma medição.

Os diferentes tipos de erros podem ser agrupados em dois grandes grupos:

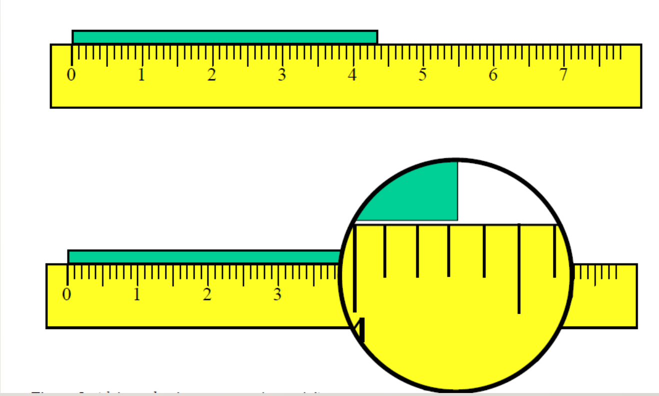
1. **Erro sistemático:** é sempre o mesmo nos n resultados. Isto é, quando existe somente erro sistemático, os n resultados de x_i são iguais e a diferença para o valor verdadeiro x_v é sempre a mesma.

2. **Erro estatístico (ou aleatório):** é um erro tal que os n resultados de x_i se distribuem de maneira aleatória em torno do valor verdadeiro x_v (ausência de erro sistemático). Conforme o número de repetições aumenta o valor médio $(\bar{x})$ se aproxima do valor verdadeiro x_v.

9 INCERTEZAS

1 - <u>Erros sistemáticos:</u> O erro sistemático é o mesmo para qualquer resultado quando a medição é repetida. Podem ter causas muito diversas e geralmente se enquadram em:

- Erros sistemáticos instrumentais.
- Erros sistemáticos ambientais.
- Erros sistemáticos observacionais.
- Erro sistemático teórico.



EX: Considerando o desvio avaliado em medida com régua milimetrada:

$$\bar{l} = 4,32\ cm, \delta l = 0,05$$
$$l = \bar{l} \pm \delta l = (4,32 \pm 0,05) cm$$

10 INCERTEZAS

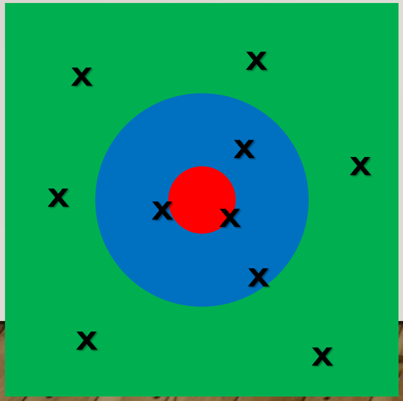
2 - <u>Erros estatísticos:</u> resultam de variações aleatórias no resultado da medição, devido a fatores que não podem ser controlados ou que, por algum motivo, não são controlados. Em geral, estas variações se devem somente ao processo de medida, mas em certos casos, as variações aleatórias são intrínsecas do próprio mensurando.

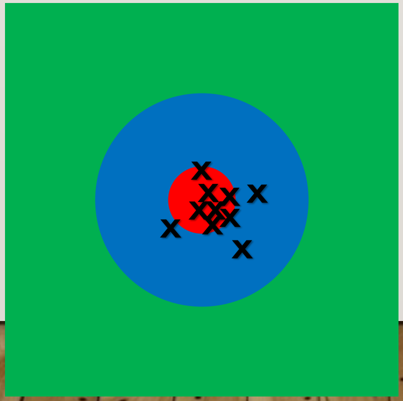
ERROS ESTATÍSTICOS

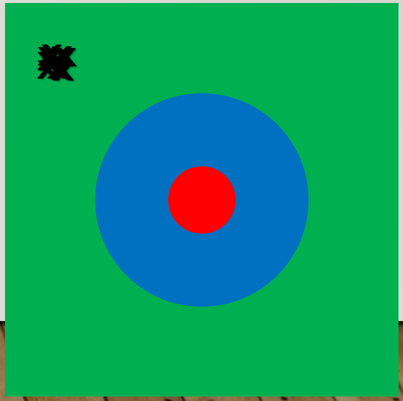
Basicamente precisamos ter dois conceitos na análise de dados:

1. Medida de Tendência Central – Localização

2. Medida de Variabilidade - Dispersão







ESTATÍSTICA BÁSICA

Vamos supor que um aluno mediu 5 vezes a massa de um objeto

Mensurando: massa do objeto

Instrumento de medida: balança com precisão 0,1 g.

Tabela 1: Valores obtidos em gramas [g].

58,2	**58,9**	**58,5**	**57,9**	**58,3**

13 ESTATÍSTICA BÁSICA

Cálculo da Média

Relembrando: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

No nosso caso: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$

$$\bar{x} = \frac{58{,}2 + 58{,}9 + 58{,}5 + 57{,}9 + 58{,}3}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{291{,}8}{5}$$

$$\boldsymbol{\bar{x} = 58{,}36\ g}$$

Valor médio das medições da massa do objeto

ESTATÍSTICA BÁSICA

Cálculo dos desvios

Desvio: $d_i = x_i - \bar{x}$

No nosso caso:

$x_i - \bar{x}$	d_i
58,2 – 58,36	$-0,16$
58,9 – 58,36	0,54
58,5 – 58,36	0,14
57,9 – 58,36	$-0,46$
58,3 – 58,36	$-0,06$

Note:

$$\sum_{i=1}^{5} d_i = 0$$

Os valores distribuem-se "simetricamente" em relação à média

15 ESTATÍSTICA BÁSICA

Desvio absoluto: $\frac{\sum_{i=1}^{N} |\, d_i|}{N}$

No nosso caso:

$x_i - \bar{x}$	d_i	$\mid d_i \mid$
58,2 – 58,36	−0,16	0,16
58,9 – 58,36	0,54	0,54
58,5 – 58,36	0,14	0,14
57,9 – 58,36	−0,46	0,46
58,3 – 58,36	−0,06	0,06

Agora:

$$\sum_{i=1}^{5} |\, d_i \,| = 1,36$$

Desvio absoluto médio:

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{5} |\, d_i \,|}{5} = \frac{1,36}{5} = 0,272\ g$$

16 ESTATÍSTICA BÁSICA

Desvio quadrático médio: $\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N}$

Onde $d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$

No nosso caso:

$x_i - \bar{x}$	d_i	$\mid d_i \mid$	d_i^2
58,2 – 58,36	−0,16	0,16	0,0256
58,9 – 58,36	0,54	0,54	0,2916
58,5 – 58,36	0,14	0,14	0,0196
57,9 – 58,36	−0,46	0,46	0,2116
58,3 – 58,36	−0,06	0,06	0,0036

Agora:

$$\sum_{i=1}^{5} d_i^2 = 0,552$$

Desvio quadrático médio:

$$\overline{d^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} d_i^2}{5} = \frac{0,552}{5} = 0,1104\ g^2$$

ESTATÍSTICA BÁSICA

<u>Variância:</u> $\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-1}$

No nosso caso:

Variância (s^2):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} d_i^2}{5-1} = \frac{0,552}{4} = 0,138\ g^2$$

Observação:

Quando a amostra usada é grande ($n \to \infty$), o desvio quadrático médio e a variância convergem para o mesmo valor.

Para amostras pequenas, o uso da variância é mais apropriado e tem um significado na teoria de probabilidades.

Porém ambas são quadráticas, não se pode comparar diretamente com o valor médio da grandeza. Para isso definimos o desvio-padrão (s).

ESTATÍSTICA BÁSICA

Desvio padrão: $s = \sqrt{s^2}$

No nosso problema, $s = \sqrt{0{,}138} \cong 0{,}3715\ g$

Erro padrão da média: $\Delta x_e = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Melhor estimativa para a incerteza no valor da média

No nosso problema, $\Delta x_e \cong \frac{0{,}3715}{\sqrt{5}} = 0{,}166\ g$

19 ESTATÍSTICA BÁSICA

Resumindo...

1. Média: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
2. Desvio quadrático médio: $\overline{d^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$
3. Variância: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
4. Desvio padrão: $s = \sqrt{s^2}$
5. Erro padrão da média: $\Delta x_e = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Será usado como incerteza estatística nas nossas análises.

ESTATÍSTICA BÁSICA

- Porém, devemos lembrar que nossas medidas também podem ter erros sistemáticos. Um dos erros que deverá ser levado em conta é o erro sistemático instrumental (desvio avaliado). Iremos chamar esse erro de Δx_i.
- Logo, o erro total (Δx) em uma medida será calculado como:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_e)^2 + (\Delta x_i)^2}$$

Erro Total

Erro Estatístico

Erro Instrumental

21 ESTATÍSTICA BÁSICA

No nosso problema:

Valor médio: $58{,}36\ g$

Erro estatístico: $0{,}166\ g$

Erro instrumental: $0{,}1\ g$

Erro total: $0{,}1938\ g$

EX: Considerando os valores listados encontre a média, o desvio padrão e o erro padrão da média

n	L_i (mm)
1	54,1
2	54,2
3	54,1
4	54,3
5	54,4
6	54,0
7	54,2
8	54,2
9	54,3
10	54,1

EX 2: Considere a seguinte série de medidas do comprimento de um objeto feito com o paquímetro.

$m_1 = 12{,}15\text{mm}$, $m_2 = 11{,}95\text{mm}$, $m_3 = 12{,}10\text{mm}$, $m_4 = 12{,}05\text{mm}$

a) Calcule a média

b) Calcule o desvio absoluto médio.

c) Considere $0{,}05\text{mm}$ o desvio do aparelho (paquímetro)

Calcule o desvio final na forma:

$$\delta m_{final} = \sqrt{\delta m_{abs.médio}{}^2 + \delta m_{aparelho}{}^2}$$

d) Considerando os devidos ajustes nas casas decimais expresse o resultado da medida na forma:

$$m = \bar{m} \pm \delta m_{final}$$